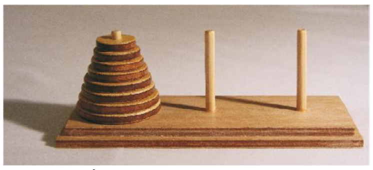
por Jorge Nuno Silva
[Universidade de Lisboa]

Torres de Hanói Magnetizadas

Torres de Hanói é um quebra-cabeças popular entre nós, sendo presença frequente em ambientes recreativos. A sua relação com a base binária de numeração e o crescimento do número de movimentos da respectiva solução com o número de discos são aspectos sempre realçados. Hoje apresentamos uma variante de Uri Levy, em que a base 2 é substituída por outra...

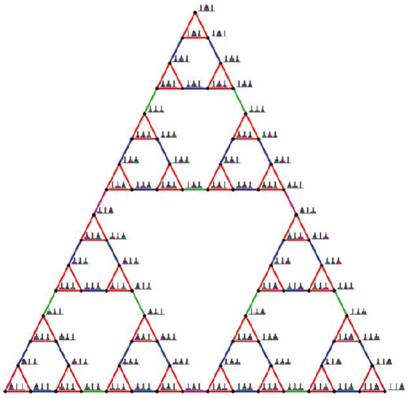
Todos conhecem o quebra-cabeças inventado e comercializado no final do século XIX pelo matemático Édouard Lucas, que o descreveu no seu livro *Récreations Mathématiques*.

Trata-se de deslocar um conjunto de peças circulares entre dois de três postes, sendo que cada movimento permitido consiste em mudar um disco de poste, mas sem nunca pousar num disco menor.



No caso ilustrado na figura seriam necessários 255 movimentos para terminar a tarefa. Em geral, se tivermos N discos, serão necessários 2^N-1 movimentos para os deslocar para outro poste de acordo com as regras.

Este *puzzle* surge relacionado com várias áreas matemáticas, às vezes de forma surpreendente.

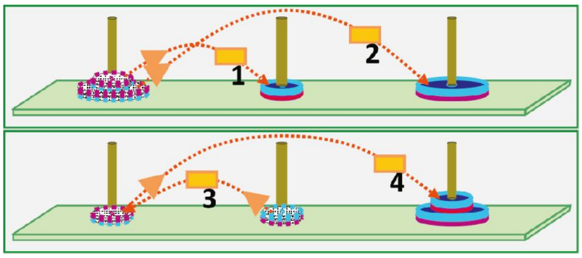


Descrição da resolução do Torres de Hanói
com a forma do Triângulo de Sierpinski

A variante de Uri Levy caracteriza-se por os discos terem faces de cores diferentes, azuis e vermelhas, sendo que nos movimentos os discos para além de não poderem pousar sobre discos menores, têm de respeitar o facto de cores iguais se repelirem, inviabilizando que a face inferior de um disco partilhe a cor da face superior do disco em que repousa. Cada movimento deve inverter as cores do disco movido.

Torres de Hanói magnéticas de Uri Levy

A figura seguinte mostra como se deve proceder para mudar dois discos de poste de acordo com as novas regras.



Repare-se no movimento intermédio 3, necessário para trocar as cores da peça que, assim, poderá ser colocada no poste da direita, terminando a migração.

Pergunta-se: quantos movimentos são necessários para deslocar uma pilha de N discos colocada num poste para outro?

Sobre o número anterior: Pediu-se para estudar a forma óptima de jogar *NIM*. Como Bouton mostrou no começo do século passado, devemos deixar ao adversário pilhas contendo $n_1, \ldots, n_k$ feijões, tais que a soma-nim destes números seja nula. A soma-nim define-se, em base 2, pela tabuada: 0+0=1+1=0, 0+1=1+0=1. Ver *Boletim da SPM – Número Especial de Jogos Matemáticos*.