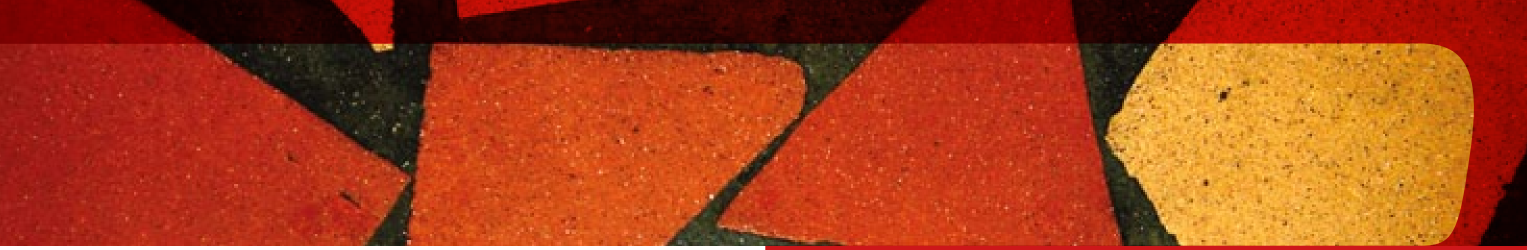

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

PROBLEMAS ANTIGOS COM NÚMEROS PERFEITOS

"Seis é um número perfeito em si mesmo, e não porque Deus criou o mundo em seis dias, na verdade o contrário é que é verdadeiro. Deus criou o mundo em seis dias porque este número é perfeito, e continuaria a ser perfeito, mesmo que o trabalho desses seis dias não existisse."

Santo Agostinho (354-430) em "A Cidade de Deus"

Hoje vamos falar de números deficientes, abundantes, perfeitos, e também de números amigos. A história que pretendemos contar começa há cerca de 2500 anos. Alguns problemas formulados nessa altura permanecem ainda hoje em aberto. Não parece existir nenhuma aplicação prática para o tipo de problemas aritméticos que iremos discutir. Qual terá sido a razão que levou à formulação inicial destes problemas? Será que devemos ainda ocupar-nos deste tipo de questões? Não é fácil decidir se um dado problema matemático é mais ou menos interessante do que outro.

O matemático Enrico Bombieri, especialista em Teoria de Números e único medalha Fields italiano, afirmou:

> "Existem diversos problemas antigos em aritmética cujo interesse é praticamente nulo, por exemplo, a existência de números perfeitos ímpares, problemas envolvendo a iteração de funções numéricas, a existência de infinitos primos de Fermat $2^{2^n}+1$, etc."

Por outro lado, o matemático Carl Pomerance defende que os números perfeitos, números amigos e outros conceitos do mesmo tipo foram fundamentais no desenvolvimento da aritmética, tendo sido decisivos na visão moderna da Teoria de Números. A Teoria de Números probabilística, por exemplo, foi inspirada nesses problemas antigos. Os problemas computacionais envolvidos na procura de números perfeitos exigiram o desenvolvimento dos testes de primalidade, e, mais geralmente, da teoria algorítmica dos números. Além disso, existem conexões surpreendentes de alguns destes problemas antigos com outros problemas aparentemente distantes. Por exemplo, uma equação diofantina exponencial, como a equação de Catalan $x^n+1=y^k$, está relacionada com a existência de números perfeitos ímpares.

Os pitagóricos, cuja escola surgiu no século V a.C., em Crotona, acreditavam que os números estavam na origem de todas as coisas. Talvez por isso considerassem interessante o facto de os números $6=1+2+3$ e $28=1+2+4+7+14$ coincidirem com a soma dos seus divisores próprios. Estes números eram considerados perfeitos. Um outro facto envolvendo divisores que interessou à escola pitagórica foi a existência de pares de números de inteiros positivos, tais que cada um deles coincide com a soma dos divisores próprios do outro. Estes números dizem-se *amigos*. Por exemplo,

$$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$$

e

$$220=1+2+4+71+142$$

é o primeiro par de números amigos. Há quem veja uma referência a isto na oferta de 220 carneiros e 220 ovelhas de Jacó a Esaú, descrita no Génesis – o número 220 seria um símbolo dessa amizade pretendida.

1. FUNÇÕES ARITMÉTICAS MULTIPLICATIVAS

Num curso elementar de Teoria de Números é inevitável discutir as propriedades das seguintes três funções.

A primeira função $\tau(n)$ conta o número de divisores de n. Vamos considerar daqui para a frente que a decomposição em fatores primos de n é dada por

$$n = p_1^{n_1} \times \cdots \times p_k^{n_k}.$$

Para obter uma fórmula simples que permita calcular o número de divisores de n, basta observar que todo o fator primo p de um divisor d é também fator primo de n. Além disso, cada um dos fatores primos aparece em d com uma multiplicidade não superior à de n. Logo,

$$\tau(n) = (n_1 + 1) \times \cdots \times (n_k + 1).$$

A segunda é a função $\phi(n)$ de Euler, a qual para cada n conta os números naturais $1 \leq m < n$ que são coprimos com n.

Finalmente, a função $\sigma(n)$ é a soma dos divisores de n. A função $\sigma(n)$ foi considerada por Pitágoras, sendo por isso uma das mais antigas funções consideradas na história da matemática.

Podemos dividir os números naturais em três classes: os números deficientes, para quais $\sigma(n) < 2n$, os números abundantes, que satisfazem $\sigma(n) > 2n$, e os números perfeitos que verificam a igualdade: $\sigma(n) = 2n$.

Uma função aritmética $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ diz-se multiplicativa, se

$$f(mn) = f(m) \times f(n),$$

sempre que m e n são coprimos. As funções $\tau(n)$, $\phi(n)$ e $\sigma(n)$ são as três multiplicativas. Uma função multiplicativa fica completamente determinada pelos valores que toma nas potências de primos.

No caso da função $\phi(n)$, temos naturalmente que $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. Como consequência da propriedade multiplicativa, obtemos ainda:

$$\phi(n) = (p_1^{n_1} - p_1^{n_1-1}) \times \cdots \times (p_k^{n_k} - p_k^{n_k-1}).$$

Há também uma fórmula conhecida para a função $\sigma(n)$:

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \cdots + p_1^{n_1}) \times \cdots \times (1 + p_k + \cdots + p_k^{n_k}),$$

a qual resulta facilmente também da propriedade multiplicativa.

2. PROBLEMAS ANTIGOS, NOVOS E EM ABERTO

Recordamos aqui alguns resultados clássicos envolvendo os conceitos anteriores.

1. Os primeiros números perfeitos são: 6, 28, 496, 8128.
2. O primeiro número ímpar abundante é o 945.
3. Euclides mostrou que se $2^n - 1$ é um número primo, então
$$N = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$$
é um número perfeito. Por exemplo, $6 = 2 \times 3$, $28 = 4 \times 7$, $496 = 16 \times 31$ e $8128 = 64 \times 127$.
4. Sabemos que para $2^n - 1$ ser primo, o expoente n terá também de ser um número primo, embora isso não seja suficiente.
5. Euler mostrou que se N é um número perfeito par, então N pode ser escrito na forma
$$N = 2^{n-1} \times (2^n - 1),$$
onde $2^n - 1$ é um número primo – ou seja, a fórmula de Euclides fornece todos os números perfeitos pares.
6. O primeiro par de números amigos (220, 284) foi descoberto por Pitágoras (500 a.C.).
7. Todos os múltiplos de números abundantes são abundantes. Analogamente, todos os divisores de um número deficiente são deficientes.
8. Se n divide m, então
$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq \frac{\sigma(m)}{m}.$$
A igualdade é verificada apenas se $n = m$.
9. A função $f(n) = \sigma(n)/n$ toma valores arbitrariamente grandes. Isto é uma consequência de a série dos inversos dos primos ser divergente.

Alguns problemas relacionados com estes conceitos permanecem ainda hoje em aberto. Por exemplo, não se sabe se existem infinitos números perfeitos. Nem se existe algum número perfeito ímpar.

Podemos generalizar o conceito de números amigos. Seja $s(n) = \sigma(n) - n$ a função soma dos divisores próprios de n. Se n é um número perfeito, então $s(n) = n$. Os números perfeitos são pontos fixos de n. Os números amigos são ciclos de comprimento 2. Por exemplo, $s(220) = 284$ e $s(284) = 220$ fecha o ciclo. Podemos considerar iterações sucessivas de $s(n)$, obtendo o que se denomina órbitas. Por exemplo, $s(12) = 16$, $s(16) = 15$, $s(15) = 9$,

$s(9) = 4$, $s(4) = 3$, $s(3) = 1$, e $s(1) = 0$ é uma órbita de comprimento 7. Uma órbita pode terminar em zero como a anterior, pode terminar num número perfeito, ou num ciclo de comprimento $k \geq 2$. Dickson conjeturou em 1907 que não existiam órbitas de comprimento infinito, todas as sequências de iterações em $s(n)$ devem terminar. Esta conjetura permanece em aberto.

Será que existem mais números perfeitos, deficientes ou abundantes? Dado um conjunto $A \subset \mathbb{N}$, podemos definir a sua *densidade* pelo limite do quociente entre o número de elementos de A inferiores ou iguais a n e o próprio n. No caso do conjunto dos números abundantes, Davenport mostrou que o limite da definição de densidade existia. E Felix Behrend mostrou que a densidade dos números abundantes estava entre 0.241 e 0.314. Sabemos que os números perfeitos mesmo no caso de serem infinitos têm densidade zero.