GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XIX — N.° 70-71 — MARÇO-JUNHO 1958

SUMÁRIO

Uma órbita simétrica de um foguetão para vôo em torno da Lua
por *G. A. Tchebotarev*

Observações astronómicas dos satélites artificiais
por *R. O. Vicente*

As superfícies planificáveis e as envolventes das faces do triedro móvel
por *J. Ribeiro de Albuquerque*

Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional
por *Luis G. M. de Albuquerque*

Aspectos da actualidade Matemática
por *A. Pereira Gomes*

«Probabilidades, erros e estatística»
por *M. A. Fernandes Costa*

Movimento Matemático
Conferências na Faculdade de Ciências de Barcelona — Centro de Estudos matemáticos de Lisboa — Congresso internacional dos matemáticos — Professor agregado da F. C. L. — Doutoramento

Matemáticas Superiores
Pontos de exames de frequência e finais
Matemáticas Gerais — Geometria Descritiva — Cálculo Infinitesimal — Análise Matemática

Crítica de livros

Boletim Bibliográfico

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

geral, o foguetão no seu movimento a partir do ponto x^0, já não toca a superfície da Terra mas passa a certa distância r_{min} do centro da Terra.

É evidente que, aumentando o valor inicial x^0, aumentamos a distância do foguetão à Lua $\Delta^0 = x^0 - x_1^0$ e por consequência diminuímos as perturbações lunares. Por aproximações sucessivas é possível conseguir-se que seja verificada a desigualdade

$$r_{min} < R\,,$$

onde R é o raio da Terra.

Supunhamos agora que o movimento da Lua é o invertido. Então o foguetão, partindo do ponto x^0, descreve nova trajectória, simétrica da que acaba de ser construída. A posição e velocidade do foguetão no instante da queda dão as condições iniciais indispensáveis para lançar o foguetão para a posição x^0. Nestas condições, o movimento inverso da Lua deve-se substituir, indispensávelmente, pelo directo.

Assim é construída a trajectória, que consiste em dois ramos simétricos, para um vôo do foguetão em torno da Lua com retorno para a superfície da Terra.

Neste trabalho tomam-se os seguintes valores numéricos para as constantes astronómicas

raio médio da órbita da Lua	$a_1 = 384.400$ Km
período da revolução da Lua	$P_1 = 655{,}72$ horas
massa da Lua	$m_1 = 0{,}012277$
raio da Terra	$R = 6.378$ Km.
raio da Lua	$R_1 = 1.740$ Km.

É adoptado o sistema de unidades: kilómetro, hora, massa da Terra. Neste sistema, o valor numérico da constante de GAUSS é dado por

$$k = 2{,}2699 \times 10^6\,.$$

Todos os cálculos são feitos com cinco decimais exactas.

§ 2. Primeira aproximação

Em primeira aproximação, a distância do foguetão à Terra, para $t = 0$, é aceite como igual a 400.000 km. Deste modo, as condições iniciais de integração são definidas pelos seguintes dados

$$(1)\qquad \begin{aligned} x^0 &= 400.000\,\text{Km} & \dot{x}_0 &= 0 \\ y^0 &= 0 & \dot{y}_0 &= 0 \end{aligned}$$

A distância inicial do foguetão ao centro da Lua é $\Delta^0 = 15.600$ km. A integração numérica foi ordenada pelo método de COWELL [1] com as fórmulas bem conhecidas:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= f^{-2} + 0{,}083333\,f \\ y &= g^{-2} + 0{,}083333\,g \end{aligned}$$

onde

$$(3)\qquad \begin{aligned} f &= \omega^2 \ddot{x} = -\omega^2 k^2 \frac{x}{r^3} + X \\ g &= \omega^2 \ddot{y} = -\omega^2 k^2 \frac{y}{r^3} + Y \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} X &= \omega^2 k^2 m_1 \frac{x_1 - x}{\Delta^3} \\ Y &= \omega^2 k^2 m_1 \frac{y_1 - y}{\Delta^3} \end{aligned}$$

Os termos

$$X_1 = -\omega^2 k^2 m_1 \frac{x_1}{a_1^3}$$

e

$$Y_1 = -\omega^2 k^2 m_1 \frac{y_1}{a_1^3}$$

estão situados fóra dos limites de precisão dos cálculos e consequentemente são regeitados.

O intervalo de integração ω é tomado como igual a uma hora. Para $t > 100$ horas as perturbações tornam-se insignificantes e o movimento ulterior do foguetão pode ser considerado como não perturbado.

t Horas	x (1.000 Km)	y (1.000 Km)	r (1.000 Km)	x_1 (1.000 Km)	y_1 (1.000 Km)	Δ (1.000 Km)
18,07	169,4	−36,6	173,3	221,0	−314,5	282,7
28,07	221,9	−34,6	224,6	250,1	−291,9	258,8
38,07	264,1	−31,1	265,9	276,9	−266,6	235,3
48,07	299,0	−26,7	300,2	301,1	−238,9	212,1
58,07	328,1	−22,0	328,8	322,6	−209,0	187,1
68,07	352,4	−17,2	352,8	341,1	−177,2	160,3
78,07	372,6	−12,4	372,8	356,5	−143,8	132,0
88,07	389,0	− 7,8	389,1	368,6	−109,0	103,0
98,07	401,9	− 3,8	401,9	377,4	− 73,2	73,6
108,07	411,1	− 0,9	411,0	382,6	− 36,8	45,7
118,07	414,9	0	414,9	384,4	0	30,5
128,07	410,3	+ 0,5	410,3	382,6	+ 36,8	45,6
138,07	400,4	+ 3,5	400,4	377,4	+ 73,2	73,4
148,07	386,8	+ 7,6	386,8	368,6	+109,0	103,0
158,07	369,6	+12,3	369,8	356,5	+143,8	132,0
168,07	348,6	+17,2	349,0	341,1	+177,2	160,2
178,07	323,3	+22,2	324,5	322,6	+209,0	186,8
188,07	293,2	+27,0	294,8	301,1	+238,9	212,0
198,07	257,0	+31,4	259,3	276,9	+266,6	236,0
208,07	213,2	+34,9	216,4	250,1	+291,9	259,5
218,07	158,2	+36,7	162,7	221,0	+314,5	284,7

As investigações ulteriores devem seguir em três direcções:

1 — Estudo da estabilidade da trajectória teórica relativamente às condições iniciais do movimento.

2 — Estudo da influência dos erros das constantes astronómicas adoptadas no movimento do foguetão.

3 — Passagem ao problema real em resultado da renúncia às simplificações feitas no presente trabalho.

§ 4. Cálculo de controle.

Em conclusão do trabalho, foi feito o cálculo de controle de todo o percurso do foguetão desde a partida da superfície da Terra até o regresso inverso à Terra. Como dados de partida serviram os elementos elípticos (12).

Durante as primeiras 18,07 horas de vôo, o movimento foi considerado como não perturbado. As medidas fundamentais que caracterizam o movimento perturbado são indicados na tabela junta. Pelos dados numéricos desta tabela fàcilmente se vê [3] o efeito da acumulação de erros no processo de integração numérica. É necessário notar também a inexactidão dos dados iniciais (12), que são obtidos como resultado da integração numérica.

A órbita elíptica osculatriz calcula-se para o instante t_{100}:

$$a = 214.247 \text{ Km}$$
$$e = 0{,}97524 \tag{13}$$
$$r_{min} = 5.313 \text{ Km}$$

Deste modo, o foguetão no seu movimento pela órbita não perturbada toca a superfície da Terra.

Os cálculos de controle são feitos pelo colaborador científico do Instituto, M. C. Volkov.

§ 5. Etapas fundamentais da conquista do espaço interplanetário.

Que significado prático tem o problema examinado no presente trabalho?

Para responder a esta questão, é necessário dizer algumas palavras sobre as étapas fundamentais da conquista do espaço interplanetário. É possível marcar três étapas fundamentais na organização dos vôos interplanetários:

I etapa — vôos de foguetões não dirigidos;

II etapa — vôos de foguetões automáticos dirigidos;

III etapa — vôos de foguetões dirigidos com passageiros.

Para lançar no espaço interplanetário um foguetão, privado de combustível próprio (e, consequentemente, não dirigido), com alguns quilogramas de peso, é necessário construir um foguetão de três andares, cujo peso inicial será igual a 16,8 t. Mas já para o peso útil dum terceiro andar de 100 kg o peso inicial do foguetão sobe a 62,4 t. (em outra variante — 90,9 t). Para criar um satélite artificial de 36 t de carga útil o peso total do foguetão de três andares deve ser igual a 7.000 t, das quais 90% é de combustivel (projecto Brown). Para comparação, indicaremos que o peso inicial das V-2 é ao todo 12,9 t.

Deste modo, as possibilidades da técnica contemporânea não vão fora dos limites de realização da I etapa das comunicações interplanetárias (foguetões não dirigidos).

A realização das II e III etapas requer, sem dúvida, em princípio, uma solução nova para o problema do combustivel do foguetão. Além disso, a realização da III etapa está ligada a uma série de problemas difíceis, e ainda não esclarecidos, de carácter biológico e médico (complexidade especial representa a defesa da actividade biológica contra as radiações cósmicas).

Que problemas podem ser solucionados na I etapa com o auxílio dos foguetões não dirigidos?

Indicaremos três desses problemas:

1 — problema: — Criação dum satélite artificial da Terra. As órbitas dos satélites podem ser muito variadas.

2 — problema: — Embora o vôo à Lua dum foguetão não leve consigo qualquer carga útil e não possa impedir a sua queda na superfície da Lua, o significado científico de tal vôo é extraordinariamente importante.

3 — problema: — Vôo à volta da Lua com regresso à Terra. Para frenar o foguetão na atmosfera empregam-se planadores e paraquedas. A realização deste projecto torna possível fotografar o hemisfério lunar invisivel da Terra.

Todos estes três problemas, de dificuldade técnica aproximadamente idêntica, serão provàvelmente resolvidos uns após outros no decurso dos próximos 5-10 anos.

Contudo, do ponto de vista da mecânica celeste, o segundo e especialmente o terceiro são problemas muito mais úteis de que o primeiro. Para a atenção destes problemas deve voltar-se a atenção dos astrónomos que se interessam pelas questões de cosmonáutica.

Na lista bibliográfica são indicados os trabalhos fundamentais publicados em russo.

LITERATURA

Kondratiuk, Y. V., 1947 — *A conquista do espaço interplanetário.* Defesa, 84 págs.

Kvoi, I. e I. Yutenbogart, 1950 — *O foguetão dinâmico.* Defesa, 232 págs.

2.ª — As melhores condições de visibilidade, para um satélite passando no zénite do observador, têm lugar quando o Sol tem uma altura de — 5° a — 17°.

3.ª — Se a altitude do satélite fôr superior a 320 km, a sua observação torna-se difícil em virtude do brilho variar com o inverso do quadrado da distância. Tem no entanto as seguintes vantagens: o céu apresenta-se mais escuro, o satélite será iluminado durante períodos maiores no crepúsculo e além disso parece mover-se mais lentamente na esfera celeste, tornando assim mais fácil a observação com instrumentos.

4.ª — Os cálculos foram feitos supondo que a atmosfera é muito transparente. No caso de a atmosfera apresentar pouca transparência, o seu brilho aumenta, diminuindo o brilho do satélite. Por isso os locais de observação devem estar situados em regiões em que a atmosfera tenha boa transparência, como sucede, por exemplo, em regiões de elevada altitude.

De todos estes resultados podemos deduzir as melhores condições práticas para a observação de satélites. Verifica-se assim que se deve preferir a observação com um binóculo ou um instrumento astronómico (luneta ou telescópio) com pequeno poder amplificador e com um campo razoável, isto é, que a região da esfera celeste observável seja suficientemente grande. Um binóculo 7×50, cujo poder amplificador é de 7 vezes, sendo o diâmetro da objectiva de 50 mm, permitirá observar fàcilmente os satélites.

As observações dos satélites que estamos a considerar têm por fim a determinação da órbita do satélite com o maior rigor possível para que, a partir do conhecimento da órbita, se possam obter as coordenadas das várias grandezas físicas determinadas pelos instrumentos científicos transportados pelos satélites.

As observações visuais de satélites podem dividir-se em dois grupos, conforme são feitas por amadores ou profissionais, desempenhando um papel importante as observações de amadores visto que, como vimos, as observações de satélites são difíceis pelas condições especiais em que se encontram os objectos a observar.

As observações só apresentam interesse quando, no momento da observação, se regista o tempo por meio de cronógrafos ou cronómetros.

Algumas das observações visuais e fotográficas de amadores que apresentaram maior interesse foram efectuadas na Nova Zelândia, região situada numa posição favorável para as observações do primeiro satélite russo, visto que a órbita do satélite passava precisamente por cima da Nova Zelândia durante o crepúsculo vespertino quando o satélite e o foguetão que o acompanhava estavam ainda iluminados pelo Sol.

As observações dos foguetões dos primeiros satélites russos eram relativamente fáceis devido às suas dimensões. Assim observações visuais e fotográficas (algumas delas feitas com máquinas de formato 35 mm) efectuadas na Irlanda permitiram determinar o período de revolução e a variação do semi-eixo da órbita.

O programa americano de observação dos satélites por amadores está organizado de modo a que as observações sejam efectuadas por grupos, denominando-se «Moonwatch Program», havendo numerosos grupos de amadores integrados neste programa não só nos Estados Unidos como também na América do Sul e no Japão.

As observações dos satélites feitas por astrónomos são efectuadas principalmente por métodos fotográficos que permitem maior precisão na determinação dos elementos da órbita. Uma das câmaras fotográficas utilizadas é uma câmara SCHMIDT F/1 de 51 cm de abertura, permitindo fotografar uma região

da esfera celeste de 30° de diâmetro; verifica-se que uma tal câmara pode registar as imagens de uma esfera de 38 cm de diâmetro situada a cerca de 1600 km. A precisão das observações depende principalmente da precisão com que se consegue registar o tempo, utilizando-se por isso os relógios de quartzo. Colocando várias destas câmaras em regiões convenientes para a observação dos satélites, conseguem-se obter informações precisas da maior parte da trajectória do satélite.

A partir das observações, visuais e fotográficas, determina-se a órbita do satélite utilizando os métodos clássicos da Mecânica Celeste. Para os satélites situados nas proximidades da superfície terrestre, até 1600 km de altitude, verifica-se que as perturbações principais da órbita elíptica resultam da forma do globo terrestre e da atmosfera; em comparação com estas perturbações, a influência do Sol, da Lua e dos efeitos da teoria da relatividade podem-se desprezar.

Conhecida a órbita de um astro, pode-se determinar o instante em que o astro passa no meridiano de um lugar (cujas coordenadas, latitude e longitude, são conhecidas) e que se denomina passagem meridiana do astro, sendo esta maneira de proceder a mais utilizada na maior parte dos problemas de Astronomia de posição. Porém, no caso dos satélites artificiais até agora lançados, sucede que os planos das órbitas apresentam inclinações apreciáveis em relação ao equador, desde 30° a 65°; além disso, os elementos da órbita apresentam grandes variações no decurso de alguns dias, em virtude da proximidade dos satélites. Por estas razões, verificou-se que era preferível calcular os instantes da passagem no paralelo correspondente à latitude do lugar.

Como já dissemos, os progressos da Rádio-Astronomia têm sido muito rápidos, utilizando-se não só instrumentos muito sensíveis, capazes de captarem as radiações emitidas pelas origens de rádio galácticas e extra-galácticas, como também instalações de radar que têm sido utilizadas, por exemplo, na observação de meteoros.

Desta maneira os observatórios rádio-astronómicos encontram-se em excelentes condições para a observação dos satélites artificiais, quer recebendo as emissões provenientes dos aparelhos de rádio dos satélites quer utilizando técnicas de radar para determinar directamente a distância a que os satélites se encontram.

As emissões dos satélites têm sido utilizadas principalmente para a determinação dos elementos da órbita, empregando-se processos interferométricos e processos que se baseiam no efeito DOPPLER. A partir destas emissões também se podem obter dados muito importantes acerca da propagação das ondas de rádio nas camadas da atmosfera.

Nos processos que utilizam o efeito DOPPLER, a redução das medidas feitas numa dada estação principia com a determinação do tempo t_0 a que corresponde a distância mínima r_0 a que o satélite se encontra da estação de observação. Designando por r a distância a que se encontra o satélite no instante t, contado a partir de t_0, e sendo v_r a velocidade relativa entre o satélite e a estação, podemos escrever

$$r^2 = r_0^2 + v_r^2 t^2 ,$$

supondo que a Terra e a trajectória do satélite são planas nas proximidades da estação.

A partir desta equação podem-se determinar os valores de v_r e r_0, utilizando uma série de observações e aplicando o método dos mínimos quadrados. Utilizando o efeito DOPPLER, os elementos que se podem obter a partir da observação duma única passagem do satélite são v_r, r_0 e t_0. Para determinar a órbita verifica-se que é necessário combinar as observações provenientes de diversas estações.

Utilizando os resultados obtidos pelos processos interferométricos com os provenientes