# Um processo de gerar números pseudo-aleatórios e seus testes — fundamentos e resultados (1)

por M. Antónia Amaral, Helena M. Barroso, M. Lucília Carvalho, M. Ivette Gomes, Daniel A. Muller e M. F. Veiga de Oliveira
(bolseiros do I. A. C.)

«*There is no such a thing as a rondam number*»

— J. von Neumman

## 0. Introdução

Um problema básico de simulação é o da obtenção de amostras com determinadas distribuições, supostas adequadas à representação de fenómenos do mundo real que se pretendem explicar. Existem diversos processos de obtenção de sucessões de números com propriedades análogas às que teriam se fossem extraídas de uma população com a distribuição pretendida.

A solução para este tipo de problemas — qualquer que seja a distribuição em causa — consiste na utilização de números aleatórios.

A ideia do uso das tabelas de números aleatórios foi introduzida por Tippett quando estudava, sob a direcção de Karl Pearson, a distribuição das amplitudes de amostras extraídas de uma população normal. Para esse trabalho, Tipett construiu uma tabela de 10 400 dígitos aleatórios a partir de tabelas dum recenseamento, tomando os algarismos finais dos números aí apresentados. Verificou-se posteriormente que a tabela dos 10 400 números aleatórios de Tipett não era suficiente. Assim, Kendall e Babington-Smith construiram uma tabela de 100 000 dígitos gerados por um processo mecânico. Ao mesmo tempo Fisher e Yates, construiram uma tabela mais pequena de 15 000 dígitos obtidos dum modo conveniente a a partir da tabela Logarithmica Britannica de Thompson. Depois da II Guerra Mundial e devido ao desenvolvimento tecnológico dos computadores, muitas outras tabelas foram construídas, tornando mais simples a resolução de diversos problemas de simulação.

## 1. Números aleatórios: sua geração

### 1. 1. Generalidades

Um conjunto de números aleatórios pode ser gerado por vários processos resultantes de fenómenos físicos dos quais o mais simples é o da rotação de um disco dividido em dez sectores de igual área, cada qual correspondendo ao seu dígito. Obtêm-se assim dígitos aleatórios $x_i$ que podem tomar com probabilidades 1/10 os valores de 0 a 9.

Os termos de uma sucessão infinita $x_1$, $x_2, \cdots, x_n, \cdots$ podem ser encarados como os dígitos de um número $\xi$ dado por

(1) Este trabalho foi realizado sob o patrocínio do Instituto de Alta Cultura e orientação do Professor J. Tiago de Oliveira.

$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 10^{-i}$. O número $\xi$ é aleatório no intervalo $[0, 1[$. A probabilidade de que $\xi$ fique no intervalo $[0, 1/2[$ é igual a $1/2$ e que fique no intervalo $[0, 1/4[$ é $1/4$, etc; vê-se assim, de forma intuitiva que $\xi$ uniformemente distribuído em $[0, 1[$.

Na prática é necessário truncar a sucessão $x_i$ numa ordem $n$, obtendo assim um número $\xi_n$ cuja distribuição $F_n(x)$ é discreta aproximando tanto melhor a distribuição uniforme quanto maior for $n$.

Outro processo de natureza física é a contagem, por um contador de GEIGER, do número de partículas emitidas por uma substância radioactiva num determinado intervalo de tempo.

Tem havido certa controvérsia sobre se estes fenómenos naturais podem ser considerados aleatórios. No entanto devemes considerá-los aleatórios e independentes pois:

*a*) O conhecimento do comportamento passado não melhora de forma nenhuma a predição sobre o comportamento futuro.

*b*) O seu mecanismo exacto é-nos desconhecido.

*c*) O seu comportamento não é previsível por nenhuma lei determinista óbvia.

Os processos de tipo físico exigem por vezes uma aparelhagem complicada e são muito morosos. Pode obter-se mais rapidamente uma sucessão de «números aleatórios» programando num computador uma certa relação de recorrência em que um número $\xi^*_{i+1}$ é gerado a partir de $\xi^*_i$, ou de um grupo de números anteriores, empregando algum algoritmo. É claro que esta sucessão não é aleatória, pois do próprio processo de geração deriva a possibilidade de predição, o que entra em contradição com as três exigências anteriormente feitas. No entanto, sem ser aleatória, pode satisfazer vários critérios estatísticos de aleatoriedade. Tais números dizem-se *pseudo-aleatórios*.

Deve ter-se também em conta que qualquer sucessão gerada por um algoritmo e com um número finito de dígitos é periódica e portanto, de um ponto de vista prático há uma limitação do tamanho dessa sucessão para que possa ser considerada pseudo-aleatória.

Desde que se reconhece a periodicidade de toda a sucessão de números pseudo-aleatórios deve-se procurar obter o maior período possível.

Vamos considerar neste trabalho um método devido a LEHMER, definido a partir de um processo congruencial multiplicativo:

$$R_n \equiv \alpha R_{n-1} + \beta \pmod{m}$$

com $n \in N$ e $\alpha$, $\beta$ e $R_0$ convenientemente escolhidos.

Apenas trataremos o caso $\beta = 0$ — *processo multiplicativo puro*.

Terá agora interesse investigar, de acordo com o que se disse acima, a periodicidade da sucessão construída a partir de

$$(1.1) \qquad R_n \equiv \alpha R_{n-1} \pmod{m}.$$

Para isso vamos introduzir o conceito de gaussiano e estudar algumas das suas propriedades.

Vejamos primeiro um resultado preliminar sobre congruências [13]:

TEOREMA 1. *Se m. d. c.* $(\mathrm{l}, \mathrm{m}) = \mathrm{p}$, *então*

$$\mathrm{l\,a} \equiv \mathrm{l\,a'} \ (mod\ \mathrm{m}) \ \textit{se e só se} \ \mathrm{a} \equiv \mathrm{a'} \left(mod\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{p}}\right).$$

DEMONSTRAÇÃO. Visto que m.d.c. $(l, m) = p$, tem-se

$$l = l_1 p, \quad m = m_1 p \quad \text{com m. d. c. } (l_1, m_1) = 1.$$

Por hipótese $l a - l a' = \alpha m$ com $\alpha \in Z$

$$l(a - a') = l_1 p (a - a') = \alpha m_1 p$$

logo

$$l_1(a-a') = \alpha m_1 .$$

Como $l_1$ e $m_1$ são inteiros primos entre si, conclui-se que $a-a'$ é múltiplo de $m_1$, ou seja, de $m/p$, o que prova a implicação directa. A recíproca é imediata.

Demonstra-se que

TEOREMA 2. *Se* $\varepsilon$ *e* m *são inteiros primos entre si, então existe um número positivo* x *tal que*

$$\varepsilon^x \equiv 1 \quad (mod\ \mathrm{m}).$$

DEMONSTRAÇÃO. Dados $\varepsilon$ e $m$, existem inteiros $d_i$, $0 \leq d_i < m$, tais que

$$\varepsilon^i \equiv d_i (\mathrm{mod}\, m) \quad i \in \mathbf{N}.$$

Como $\varepsilon$ e $m$ são primos entre si, $d_i \neq 0$ para todo o $i$ e existem índices $j, k \leq m$ tais que $d_j = d_k$ com $j \neq k$. Admitamos que $j < k$.

Então, atendendo ao teorema 1,

$$\varepsilon^{k-j} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, m)$$

e o inteiro pretendido é $x = k - j$.

DEFINIÇÃO. O menor inteiro $x$ satisfazendo o teorema 2 diz-se *gaussiano* de $m$ na base $\varepsilon$ e representa-se por

$$x = g\,s\,s(m, \varepsilon).$$

Vamos agora enunciar três regras [7] que nos permitem calcular o gaussiano de inteiros que satisfaçam determinadas condições.

I. Se os inteiros $m$ e $n$ são primos entre si e com $\varepsilon$, então

$$g\,s\,s(m\,n, \varepsilon) = \mathrm{m.\,m.\,c.}\,[g\,s\,s(m, \varepsilon), g\,s\,s(n, \varepsilon)].$$

II. Se $\pi$ é um ímpar primo, $\varepsilon$ é primo com $\pi$ e $r$ é tal que $\pi^r$ é a maior potência de $\pi$ que divide $\varepsilon^{g\,s\,s(\pi, \varepsilon)} - 1$, então

$$g\,s\,s(\pi^p, \varepsilon) = \begin{cases} g\,s\,s(\pi, \varepsilon) & \text{se } p \leq r \\ \pi^{p-r}\, g\,s\,s(\pi, \varepsilon) & \text{se } p > r. \end{cases}$$

III. Se existe um inteiro $t \geq 0$ tal que $\varepsilon = 4t + 3$ e $r$ é tal que $2^r$ é a maior potência de 2 que divide $\varepsilon + 1$, então

$$g\,s\,s(2^p, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = 1 \\ 2 & \text{se } 1 < p \leq r \\ 2^{p-r} & \text{se } p > r. \end{cases}$$

A aplicação do conceito de Gaussiano à determinação do período é dada pelo seguinte teorema:

TEOREMA 3. *A sucessão dos* $\mathrm{R_n}$ *definida em* (1. 1.) *em que* $\alpha$ *e* m *são primos entre si e com* $\mathrm{R_0}$, *é periódica com período igual a* $\mathrm{g\,s\,s(m, \alpha)}$.

DEMONSTRAÇÃO. De $\mathrm{R}_n \equiv \alpha\, \mathrm{R}_{n-1} (\mathrm{mod}\, m)$ conclui-se facilmente que $\mathrm{R}_n \equiv \alpha^n\, \mathrm{R}_0 (\mathrm{mod}\, m)$.

Seja $x = g\,s\,s(m, \alpha)$. Então $x$ é o menor inteiro positivo tal que

$$\alpha^x \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, m)$$

e então

$$\begin{aligned} &\alpha^x \quad \mathrm{R}_0 \equiv \mathrm{R}_0 (\mathrm{mod}\, m) \\ &\alpha^{x+1}\, \mathrm{R}_0 \equiv \alpha\, \mathrm{R}_0 (\mathrm{mod}\, m) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\alpha^{x+k}\, \mathrm{R}_0 \equiv \alpha^k\, \mathrm{R}_0 (\mathrm{mod}\, m) \end{aligned}$$

o que demonstra que a sucessão é periódica. O período não pode ser menor que $x$, porque se

$$\alpha^i\, \mathrm{R}_0 \equiv \alpha^j\, \mathrm{R}_0 (\mathrm{mod}\, m) \quad \text{com} \quad i, j < x$$

então, atendendo ao teorema 1, se $i < j$

$$\alpha^{j-i} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, m)$$

o que vai contra a hipótese de $x$ ser gaussiano de $m$ na base $\alpha$.

### 1. 2. Aplicação prática

Com base nestes resultados fomos construir uma tabela de 1002 números pseudo-aleatórios uniformes. Utilizámos um computador «Time-Sharing General Electric Mark I (GE 265)».

Para construir a tabela que apresentamos usámos em (1. 1)

$$\alpha = 10^4 + 3$$
$$m = 10^6$$
$$R_0 = 10^6 - 3$$

o que dá uma sucessão de período igual a $gss(10^6, 10^4 + 3)$ (ver teorema 3).

Este valor calcula-se facilmente aplicando as regras indicadas:

Por aplicação da regra I tem-se

$$gss(10^6, 10^4 + 3) = \text{m. m. c.}$$
$$[gss(2^6, 10^4 + 3), gss(5^6, 10^4 + 3)].$$

Ora $gss(2^6, 10^4 + 3)$ pode calcular-se pela regra III. Com efeito, com $t = 2500$, tem-se $10^4 + 3 = 4t + 3$. A maior potência de 2 que divide $10^4 + 3 + 1$ é $2^2$, e como $6 > 2$, tem-se $gss(2^6, 10^4 + 3) = 2^{6-2} = 16$.

Quanto ao cálculo de $gss(5^6, 10^4 + 3)$, podemos aplicar a regra II, visto que $10^4 + 3$ é primo com 5. É fácil ver que

$$gss(5, 10^4 + 3) = 4,$$

e que a maior potência de 5 que divide $(10^4 + 3)^4 - 1$ é $5^1$. Como $6 > 1$, tem-se

$$gss(5^6, 10^4 + 3) = 5^{6-1}\ gss(5, 10^4 + 3) = 4 \cdot 5^5.$$

Logo

$$gss(10^6, 10^4 + 3) = \text{m. m. c.}$$
$$(16, 4 \cdot 5^5) = 50.000.$$

Para a dimensão da tabela que construímos (1002), consideramos que este período dá uma margem de segurança suficiente o que será comprovado na secção seguinte.

O programa para a construção da tabela — ALEAS — encontra-se reproduzido e convenientemente detalhado no anexo I.

## 2. Critérios de aleatoriedade

Uma vez gerados os números pelo método congruencial multiplicativo de LEHMER, temos de verificar, de acordo com o que foi dito anteriormente, se satisfazem os seguintes critérios de aleatoriedade:

*a*) a sua distribuição aproxima tanto quanto possível a distribuição uniforme

*b*) os números têm correlação não significativamente diferente de zero.

Com esse objectivo fomos então aplicar aos números obtidos os seguintes testes de aleatoriedade e uniformidade: teste de frequência, teste de correlação serial e testes sobre a função de distribuição.

### 2. 1. *Teste de frequência*

Numa sucessão de números aleatórios uniformes é de esperar que cada dígito ocorra aproximadamente com igual frequência, não só globalmente como também por colunas. Testámos portanto essas hipóteses, aplicando a cada uma delas o teste do $\chi^2$.

O teste foi feito com auxílio do computador, por meio do programa CONTAR (ver anexo II).

Os resultados obtidos (quadro I) levaram à não rejeição da hipótese a um nível de significância $\alpha = .10$ e portanto também aos níveis habituais de .05, .01 e .001.

QUADRO I

Frequência dos dígitos e valores de $\chi^2$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | $\chi^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| coluna 1 | 92 | 107 | 97 | 113 | 97 | 100 | 104 | 112 | 83 | 97 | 1002 | 7.5609 |
| coluna 2 | 97 | 117 | 93 | 104 | 109 | 95 | 99 | 113 | 85 | 90 | 1002 | 9.6168 |
| coluna 3 | 77 | 94 | 110 | 106 | 112 | 101 | 101 | 112 | 94 | 95 | 1002 | 10.4950 |
| colunn 4 | 101 | 100 | 100 | 103 | 79 | 108 | 91 | 99 | 102 | 119 | 1002 | 9.5968 |
| coluna 5 | 103 | 94 | 92 | 102 | 101 | 94 | 95 | 113 | 116 | 92 | 1002 | 6.6228 |
| coluna 6 | 90 | 97 | 104 | 124 | 99 | 106 | 95 | 96 | 88 | 103 | 1002 | 9.2974 |
| total | 560 | 609 | 596 | 652 | 597 | 604 | 585 | 645 | 568 | 596 | 6002 | 12.8104 |

## 2. 2. *Teste de correlação serial*

### 2. 2. 1. *Descrição*

Uma sucessão de números $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ diz-se aleatória se $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ são independentes e semelhantes. É pois óbvio que um modo de verificar a aleatoriedade consiste em testar a independência. Os testes frequentemente usados para esse fim são baseados na correlação serial.

O coeficiente de correlação serial circular de passo $h$ é definido por

$$r_h = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(x_{i+h} - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+h} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}$$

em que $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ e $x_{i+h}$ é substituído por $x_{i+h-n}$ para valores de $i$ tais que $i + h > n$.

Partindo da hipótese da independência e normalidade das observações, ANDERSON [1] mostrou que a distribuição exacta de $r_1$ é dada por

$$\text{Prob}\,\{r_1 > R\} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - R)^{\frac{(n-3)}{2}}}{\alpha_i}$$

$$\nu_{m+1} \leq R \leq \nu_m$$

em que

$$\nu_i = \cos(2\pi i/n)$$

$$\alpha_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\frac{n-1}{2}} (\nu_i - \nu_j) \qquad \text{se } n = 3, 5, \cdots$$

$$\alpha_i = \sqrt{\nu_i + 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\frac{n-2}{2}} (\nu_i - \nu_j) \qquad \text{se } n = 4, 6, \cdots$$

$$m = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \dfrac{n-3}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Para $r_k$, com $k$ primo com $n$, a distribuição é a mesma que a de $r_1$.

A par desta distribuição exacta, apresenta uma distribuição assintótica extremamente simples, baseada no facto de $r_1 + \frac{1}{n}$ estar aproximadamente distriduído como um coeficiente de correlação de PEARSON para $n+3$ observações e portanto que

$$r_1^* = \left(r_1 + \frac{1}{n-1}\right) \frac{(n-1)\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{n^2 - 3n}}$$

é assintoticamente normal reduzida, simbolicamente $\mathfrak{N}(0, 1)$.

Vários autores se têm debruçado sobre a distribuição dos coeficientes de correlação serial, baseando-se na hipótese da normalidade dos valores observados, evidentemente restrictiva, pois frequentemente a distribuição $F(x)$ subjacente não é conhecida.

WALD e WOLFOWITZ [12] apresentam um teste de permutação que satisfaz as seguintes condições:

*i*) Se $F(x)$ é contínua o tamanho da região crítica não depende da função de distribuição $F(x)$, o que torna o teste de significância possível quando nada é conhecido sobre $F(x)$, excepto a sua continuidade.

*ii*) Se $F(x)$ não é contínua, mas todos os momentos são finitos e a variância não é nula, o tamanho da região crítica aproxima-se quando $n \to \infty$ do tamanho que teria se $F(x)$ fosse contínua, e neste caso ainda é possível fazer um teste assintótico.

O teste baseia-se não propriamente no coeficiente de correlação $r_h$, mas sim na estatística

$$R_h = \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+h}.$$

Uma vez que se está a trabalhar com a subpopulação de todas as permutações dos verdadeiros valores observados, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ são constantes, e portanto, a estatística $R_h$ é uma função linear de $r_h$.

Demonstra-se que se $h$ for primo com $n$ a distribuição de $R_h$ é a mesma de $R_1$. O seu valor médio e a sua variância são dados por

$$E(R_1) = \frac{S_1^2 - S_2}{n-1}$$

$$\sigma^2(R_1) = \frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \frac{S_1^4 - 4 S_1^2 S_2 + 4 S_1 S_3 + S_2^2 - 2 S_4}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1}\right)^2$$

em que

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r.$$

A distribuição assintótica de

$$R_1^* = \frac{R_1 - E(R_1)}{\sigma(R_1)}$$

é normal reduzida.

Da relação

$$E[R_h R_k] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+h}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+k}\right)\right] =$$

$$= 4n E(x_1 x_2^2 x_3) + n(n-4) E(x_1 x_2 x_3 x_4) =$$

$$= 4n \frac{S_{121}}{n(n-1)(n-2)} +$$

$$+ n(n-4) \frac{S_{1111}}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

em que

$$S_{121} = S_1^2 S_2 - S_2^3 - 2 S_1 S_3 + 2 S_4$$

$$S_{1111} = S_1^4 - 6 S_1^2 S_2^2 + 8 S_1 S_3 + 3 S_2^2 - 6 S_4$$

deduz-se que a covariância entre $R_h^*$ e $R_k^*$ tende para zero por valores negativos, quando $n \to +\infty$ ($h$ e $k$ primos com $n$).

Uma vez que o teste de ANDERSON exige a normalidade das observações, gerámos números normais a partir dos uniformes (ver secção 3) e aplicámos a esses números não só o teste de ANDERSON mas também o WALD-WOLFOWITZ. Os resultados obtidos levaram-nos a suspeitar da equivalência assintótica dos testes. Na realidade conseguimos provar a sua equivalência assintótica, na hipótese da normalidade, como vamos ver.

Recordemos que dois testes baseados em estatísticas assintoticamente normais se dizem assintoticamente equivalentes se os valores médios tiverem o mesmo limite e o cociente das variâncias tender para um.

O teste de ANDERSON baseia-se na estatística $r_h$ que é assintoticamente normal de valor médio $-1/(n-1)$ e de desvio padrão $\sqrt{n^2 - 3n}/(n-1)\sqrt{n+1}$. O teste de WALD-WOLFOWITZ baseia-se na estatística $R_h$, que como vimos está relacionada com a primeira por

$$r_h = \frac{R_h - S_1^2/n}{S_2 - S_1^2/n}$$

e que é assintoticamente

$$\mathfrak{N}\left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1}, \left(\frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \right.\right.$$

$$+ \frac{S_1^4 - 4 S_1^2 S_2 + 4 S_1 S_3 + S_2^2 - 2 S_4}{(n-1)(n-2)} -$$

$$\left.\left. - \left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1}\right)^2\right)^{1/2}\right).$$

Chamando $E(r_h)$, $V(r_h)$ ao valor médio e à variância de $r_h$ dados por ANDERSON, e $E_1(r_h)$, $V_1(r_h)$ ao valor médio e variância de $r_h$ obtidos a partir de $E_1(R_h)$ e $V_1(R_h)$, valor médio e variância de $R_h$ dados por WALD-WOLFOWITZ, tem-se

$$E_1(r_h) = \frac{E_1(R_h) - S_1^2/n}{S_2 - S_1^2/n} =$$

$$= -\frac{1}{n-1} = E(r_h)$$

e, na hipótese da normalidade e independência dos valores observados

$$V_1(r_h) = \frac{V_1(R_h)}{(S_2 - S_1^2/n)^2} =$$

$$= \frac{1}{(S_2 - S_1^2/n)^2} \left\{ \frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \right.$$

$$+ \frac{S_1^4 - 4 S_1^2 S_2 + 4 S_1 S_3 + S_2^2 - 2 S_4}{(n-1)(n-2)} -$$

$$\left. - \left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1}\right)^2 \right\}.$$

Assim, tendo em conta que $n \cdot m_i = S_i$, facilmente se conclui que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{V_1(r_h)}{V(r_h)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{n^3}{(n-1)^2(n-2)} m_1^4\right) = 1$$

isto é,

$$E(r_h) = E_1(r_h)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{V_1(r_h)}{V(r_h)} = 1$$

e portanto, na hipótese da normalidade e independência da amostra, os testes são de facto assintoticamente equivalentes, pois as estatísticas de teste $r_h$ têm assintoticamente a mesma distribuição.

### 2. 2. 2. *Aplicação*

Atendendo ao facto da distribuição de $R_h$ (ou $r_h$) ser a mesma de $R_1$ (ou $r_1$) para todo o $h$ primo com $n$, resolvemos fazer o teste não para $n = 1002$, mas para $n = 997$, maior número primo mais próximo. Assim poderíamos testar todos os $R_i$ (ou $r_i$) $(i = 1, 2, \cdots, n)$. É evidente que não há necessidade de os considerar todos. Adoptámos o critério sugerido por JENKINS, isto é, tomámos apenas os primeiros $m = n/4$ valores dos $R_i$ (ou $r_i$) (anexo III).

Vejamos como formular o teste de WALD-WOLFOWITZ.

Assintoticamente, as variáveis aleatórias $R_i^*$ $(i = 1, \cdots, n)$ são normais de valor médio nulo, variância unitária e correlação nula, sendo portanto assintoticamente independentes duas a duas.

Consequentemente e para grandes valores de $n$, as variáveis aleatórias $|R_i^*|$ são também independentes duas a duas.

Da fórmula de BOOLE

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\sum_{i<j} P(A_j \cap A_i) + \\ + \cdots + (-1)^m P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

e atendendo que

$$1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)$$

vem

$$1 - \sum_{i=1}^{m} (1 - P(A_i)) \leq P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \leq$$

$$\leq 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)) + \sum\sum_{i<j} P(A_i^c \cap A_j^c).$$

Consideremos os acontecimentos $A_i$

$$A_i = [\,|R_i^*| < y\,].$$

Então, devido à simetria nos $|R_i^*|$ da distribuição conjunta dos $|R_i^*|$, tem-se

$$1 - m(1 - P(A_1)) \leq P\left[\bigcap_{i=1}^{n} [\,|R_i^*| < y\,]\right] \leq$$

$$\leq 1 - m(1 - P(A_1)) + \binom{m}{2}(1 - P(A_1 \cup A_2)).$$

Fixando $c = m(1 - P(A_1)) = 2m(1 - \phi(y))$, em que $\phi$ é a função de distribuição de uma normal $\mathfrak{N}(0, 1)$, designemos por $y^{(1)} = \phi^{-1}(1 - c/2m)$ a solução desta equação.

Como $A_1$ e $A_2$ são acontecimentos assintoticamente independentes podemos, para grandes valores de $m$, substituir

$$1 - P(A_1 \cup A_2) \text{ por } (1 - P(A_1))^2 = \frac{c^2}{m^2}$$

e portanto assintoticamente

$$1 - c \leq P\left[\bigcap_{i=1}^{n} [\,|R_i^*| < y^{(1)}\,]\right] \leq$$

$$\leq 1 - c + \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{c^2}{m^2} \leq 1 - c + \frac{c^2}{2}.$$

Ao nível de significância $\alpha$ determinamos $c$ de modo que $1 - \alpha$ seja o ponto médio do intervalo anterior,

$$\alpha = 1 - \frac{(1 - c) + (1 - c + c^2/2)}{2} = c - c^2/4$$

ou seja, $c = 2(1 - \sqrt{1 - \alpha})$; o erro no nível de significância é $< \frac{c^2}{4} = (1 - \sqrt{1 - \alpha})^2$ sendo o erro relativo $\frac{(1 - \sqrt{1 - \alpha})^2}{\alpha} \approx \frac{\alpha}{4}$.

Somos então conduzidos à não rejeição da hipótese desde que todos os valores observados das variáveis aleatórias $R_i^*$ caiam no intervalo $[-y^{(1)}, y^{(1)}]$.

Na aplicação do teste aos números uniformes e para $\alpha = 0.10$, obtém-se $y^{(1)} = 3.54$, o que conduziu à não rejeição da hipótese de independência.

Aos números normais aplicámos não só este teste como também o de ANDERSON.

A formulação assintótica do teste de ANDERSON é idêntica à do teste de WALD-WOLFOWITZ, porque as variáveis aleatórias $r_h^*$ são também assintoticamente independentes duas a duas.

Ambos os testes conduziram à não rejeição da hipótese da independência dos valores observados ao nível de significância $\alpha = 0.10$.

## 2. 3. *Testes de distribuição*

No que se segue consideraremos as estatísticas ordinais $(x'_1, \cdots, x'_n)$ dos números pseudo-aleatórios obtidas a partir da amostra inicial $(x_1, \cdots, x_n)$.

Vários métodos não paramétricos têm sido propostos para testar a hipótese de $n$ observações terem sido extraídas de uma população com uma determidada função de distribuição $F(x)$. A maior parte destes métodos baseia-se na comparação da função de distribuição suposta $F(x)$ com a função de distribuição empírica $S_n(x)$.

Para testar a uniformidade dos números, utilizámos alguns destes testes que passamos a descrever.

### 2. 3. 1. *Teste de Kolmogorov-Smirnov*

TEOREMA 4 (KOLMOGOROV). *Seja* $S_n(x)$ *a função de distribuição empírica correspondente a uma amostra de dimensão* n *extraída de uma população com função de distribuição contínua* $F(x)$.

*Considere-se a variável aleatória*

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |S_n(x) - F(x)|$$

*e*

$$Q_n(\lambda) = \begin{cases} \text{Prob}(\sqrt{n}\, D_n < \lambda) & se \ \lambda > 0 \\ 0 & se \ \lambda \leq 0. \end{cases}$$

*Então*

$$\lim_{n \to \infty} Q_n(\lambda) = Q(\lambda)$$

$$Q(\lambda) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2\lambda^2) & se \ \lambda > 0 \\ 0 & se \ \lambda \leq 0. \end{cases}$$

Com base neste teorema pode-se estabelecer um teste não paramétrico, para testar a hipótese $H_0$ que especifica a função de distribuição desconhecida $F(x)$.

Assim para uma amostra ordenada $(x'_1, \cdots, x'_n)$, a função de distribuição empírica é dada por

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & x < x'_1 \\ k/n & x'_k \leq x < x'_{k+1} \quad k = 1, \cdots, n-1 \\ 1 & x \geq x'_n \end{cases}$$

Seja $d_n$ o valor observado da variável aleatória $D_n$ para a amostra considerada. Conclui-se facilmente que

$$d_n = \max \{ |F(x'_k) - S_n(x'_k)|, \ |F(x'_k) - S_n(x'_{k-1})| \}$$

em que $k = 1, 2, \cdots, n$ e $S_n(x'_0) = 0$.

Para testar a hipótese $H_0$ ao nível de significância $\alpha$, determina-se $\lambda_0$ tal que $Q(\lambda_0) = 1 - \alpha$. Se $d_n \geq \lambda_0/\sqrt{n}$, rejeita-se a hipótese $H_0$. Caso contrário o teste não conduz à rejeição de $H_0$.

### 2. 3. 2. *Teste* $W_n^2$ *de Cramer-von Mises*

Este teste baseia-se na estatística

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} |S_n(x) - F(x)|^2 \, dF(x)$$

que se pode exprimir em função das estatísticas ordinais do seguinte modo

$$W_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \left\{ F(X'_j) - \frac{2j-1}{2n} \right\}^2 + \frac{1}{12n}.$$

SMIRNOV e VON MISES chegaram por métodos diferentes à função característica $\phi(t)$ de $W^2 = \lim_{n\to\infty} W_n^2$

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{\sqrt{2it}}{\sin\sqrt{2it}}}$$

a partir da qual se obteve a função de distribuição

$$\text{prob}(W^2 \leq z) = \lim_{n\to\infty} \text{prob}(W_n^2 \leq z) =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{z}} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{-1/2}{j} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{4j+1}\, e^{-\frac{4j+1}{16z}} K_{1/4}\left(\frac{(4j+1)^2}{16z}\right)$$

em que $K_{1/4}(x)$ é a função de BESSEL modificada, de 2.º tipo e de ordem $1/4$.

ANDERSON e DARLING [2] tabelaram os valores de $z$ que satisfazem $\text{Prob}(W^2 \leq z) = \alpha$ com cinco casas decimais para $\alpha = 0.01$ (0.01) 0.99, 0.999.

### 2.3.3. *Teste $U_n^2$ de Stephens*

Outra medida da distância entre $S_n(x)$ e $F(x)$, sugerida par STEPHENS, é

$$U_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ S_n(x) - F(x) - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} [S_n(y) - F(y)]\, dF(y) \right\}^2 dF(x)$$

que em termos das estatísticas ordinais vem

$$U_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \left\{ F(X'_j) - \frac{2j-1}{2n} - \bar{F} + \frac{1}{2} \right\}^2 + \frac{1}{12n}$$

com $\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F(X^{(j)})$.

A distribuição limite de $U_n^2$ é dada por

$$\text{Prob}(U^2 \leq z) =$$

$$= 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \exp(-2\pi^2 k^2 z) =$$

$$= Q(\pi\sqrt{z})$$

em que $Q(x)$ é a função de distribuição limite da estatística de KOLMOGOROV.

### 2.3.4. *Teste de Sherman*

Outra estatística da mesma natureza das anteriores, apresentada por SHERMAN [8], é

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \left| F(X'_j) - F(X'_{j-1}) - \frac{1}{n+1} \right|$$

com $F(X'_0) = 0$ e $F(X'_{n+1}) = 1$.

Esta variável aleatória tem valor médio

$$E(S_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}$$

e variância

$$\text{Var}(S_n) = \frac{2n^{n+2} + n(n-1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+2}} -$$

$$- \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+2} \simeq \frac{2e-5}{ne^2}$$

e a distribuição assintótica da variável aleatória

$$\left(\frac{ne^2}{2e-5}\right)^{1/2} \left(S_n - \frac{1}{e}\right)$$

é normal reduzida.

### 2.3.5. *Testes de Tiago de Oliveira* [10]

i) *Teste do quadrado de* F

Uma medida de discrepância entre a função de distribuição empírica e a função de distribuição suposta, sugerida por GUMBEL [4] é

$$T_n = \frac{6(n+1)}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( F(X'_i) - \frac{i}{n+1} \right)^2$$

Facilmente se vê que

$$E(T_n) = 1$$

$$\mathrm{Var}(T_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 4{,}5$$

e que a distribuição assintótica desta variável é a de $6\, W_n^2$.

Pode-se a partir desta estatística obter uma outra consideravelmente mais simples, substituindo $\sum_{i=1}^{n} F(X'_i) \frac{i}{n+1}$ pelo seu valor médio $\frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$.

Deste modo é-se conduzido a estudar,

$$T_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F^2(X_i)$$

que pelo teorema limite central é assintoticamente normal, com valor médio 1/3 e desvio padrão $2/3\sqrt{5n}$.

ii) *Teste do produto de* F

Suponhamos que a população tem uma função de distribuição $F(x)$ e consideremos a estatística

$$T_{2n} = \frac{1}{n} \log [F(X_1) \cdots F(X_n)] =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \log (F(X_i))}{n}.$$

Atendendo que $T_{2n}$ é uma média e que o valor médio e a variância da variável aleatória $\log F(X)$ existem e são finitos

$$E(\log F(X)) = -1$$

$$\mathrm{Var}(\log F(X)) = 1$$

estamos em condições de aplicar o teorema limite central e concluir que

$$\sqrt{n}\,(T_{2n} + 1)$$

é uma variável aleatória assintoticamente normal reduzida.

### 2.3.6. *Aplicações*

Ao aplicar estes testes à sucessão de números aleatórios gerada, para testar a hipótese da uniformidade, obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} d_n &= 0.0229 \\ w_n^2 &= 0.0771 \\ u_n^2 &= 0.0559 \\ s_n &= 0.7103 \\ t_{1n} &= 0.3263 \\ t_{2n} &= -0.1642 \end{aligned}$$

que conduzem à não rejeição da hipótese ao nível de significância $\alpha = 0.10$.

## 3. Geração de números aleatórios com diferentes distribuições

Nesta secção vamos ver como se podem obter, a partir de uma sucessão de números aleatórios com distribuição uniforme, sucessões de números aleatórios com qualquer outra distribuição.

Seja $X$ uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$. Se $F(x)$ for uma aplicação biunívoca de **R** sobre $]0,1[$, a

nova variável aleatória $Y = F(X)$ é uniforme em $[0, 1]$ pois para $0 \leq y \leq 1$

$$G(y) = \text{prob}(Y \leq y) = \text{prob}(F(X) \leq y) =$$

$$= \text{prob}(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

Podemos portanto obter a variável aleatória $X$ a partir duma variável aleatória uniforme $Y$, fazendo

$$X = F^{-1}(Y)$$

ou seja

$$x_i = F^{-1}(y_i).$$

A título de exemplo apresentam-se as transformações que permitem obter algumas das distribuições mais correntes

| | |
|---|---|
| Logística | $F^{-1}(x) = -\log \frac{1-x}{x}$ |
| Exponencial | $F^{-1}(x) = -\log(1-x)$ |
| Cauchy | $F^{-1}(x) = \text{tg}(\pi(x - 1/2))$ |
| Beta (1, 2) | $F^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ |
| Fréchet ($k=1$) (máximos) | $F^{-1}(x) = -1/\log(x)$ |
| Fréchet ($k=2$) (máximos) | $F^{-1}(x) = 1/\sqrt{-\log(x)}$ |
| Weibull ($k=3$) (máximos) | $F^{-1}(x) = -\exp(\log(-\log(x)/3))$ |
| Gumbel (máx.) | $F^{-1}(x) = -\log(-\log(x))$ |
| Pareto | $F^{-1}(x) = \frac{1}{1-x}$ |
| Rayleigh | $F^{-1}(x) = \sqrt{-2\log(1-x)}$ |

Dado que a distribuição normal não tem inversa explícita, vamos apresentar um processo de obter números aleatórios normais a partir dos uniformes, embora existam fórmulas aproximadas para o cálculo dessa inversa.

Considere-se a densidade conjunta do par aleatório independente $(X_1, X_2)$ normal reduzido

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right).$$

A transformação

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} X_1 &= R\cos\Theta \\ X_2 &= R\sin\Theta \end{aligned}$$

dá um par aleatório $(R, \Theta)$ com densidade

$$g(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \cdot r$$

o que mostra que as variáveis $R^2/2$ e $\Theta$ são independentes, sendo $R^2/2$ exponencial e $\Theta$ uniforme em $[0, 2\pi]$.

Tem-se ainda que as variáveis

$$V_1 = \int_0^R e^{-\frac{1}{2}r^2} r\, dr = 1 - e^{-\frac{R^2}{2}}$$

$$U_2 = \int_0^\Theta \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{\Theta}{2\pi}$$

são uniformes em $[0, 1]$.

Ora se $V_1$ é uniforme em $[0, 1]$, também $U_1 = 1 - V_1 = e^{-\frac{R^2}{2}}$ é uniforme em $[0, 1]$.

Invertendo as relações anteriores, obtém-se

$$R = \sqrt{-2\log U_1}$$

$$\Theta = 2\pi U_2.$$

Substituindo em (3. 1) vem finalmente

$$X_1 = \sqrt{-2 \log U_1} \cos (2 \pi U_2)$$

$$X_2 = \sqrt{-2 \log U_1} \sin (2 \pi U_2)$$

que permitem calcular os números pseudo-aleatórios normais a partir dos uniformes.

Observe-se que os testes usando a normalidade foram feitos sobre os números normais $x_i$ assim obtidos.

## ANEXO I

No programa *ALEAS*

```
05  SFILE ALEA5/ALEA6, ALEA7/ALEA8
10  DIMENSION R (1500)
20  S = 9999.97
30  DO 1 I = 1, 1495, 6
40  DO 2 J = 1, 6
50  L = I + J - 1
60  RU = (S - INTF (S)) + (S * 3)/10 ↑ 4
70  K = RU
80  R (L) = RU - K
90  S = R (L) * 10 ↑ 4
100 2
110 M = I + 5
120 IF (I - 499) 1, 10, 10
130 10 WRITE (1, 3) (R (L), L = I, M)
140 1
150 DO 4 L = 499, 1499
160 J = L + 1
170 7 IF (R (L) - R (J)) 5, 5, 6
180 6 T = R (L)
190 R (L) = R (J)
200 R (J) = T
210 5 J = J + 1
220 IF (J - 1500) 7, 7, 4
230 4
240 DO 8 I = 499, 1495, 6
250 M = I + 5
260 WRITE (3, 3) (R (L), L = I, M)
270 8
280 3 FORMAT (6 (2X, F8.6))
290 STOP
```

1) são gerados 1.500 números pseudo-aleatórios $R(L)$, pelo método atrás indicado, obtendo-se $R(L+1)$ como resto da divisão de $R(L) * (10^4 + 3)$ por $10^6$.

2) destes 1.500 números aproveitam-se apenas os últimos 1.002, seguindo a prática corrente de gerar uma sucessão de dimensão $m$, maior do que aquela que é necessária, $n$, e desprezar os primeiros $m - n$ termos.

3) seguidamente, procede-se à ordenação dos 1.002 números obtidos, uma vez que que para futuras aplicações de alguns testes é necessário considerar a sucessão ordenada.

Apresenta-se em seguida, a tabela dos números pseudo-aleatórios não ordenados.

NUMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES

| | | | |
|---|---|---|---|
| .57797800E+00 | .51527600E+00 | .30538000E+00 | .71481500E+00 |
| .29584300E+00 | .31677300E+00 | .68901600E+00 | .23047100E+00 |
| .39798500E+00 | .48540000E-01 | .54677400E+00 | .37942700E+00 |
| .40784300E+00 | .64988900E+00 | .83959000E+00 | .41949700E+00 |
| .22385200E+00 | .19313200E+00 | .90340200E+00 | .73349200E+00 |
| .11945200E+00 | .87358300E+00 | .44914800E+00 | .82922600E+00 |
| .74307800E+00 | .11553000E-01 | .56276500E+00 | .33951000E+00 |
| .11817000E+00 | .52355000E-01 | .70519100E+00 | .22158000E-01 |
| .64316400E+00 | .56630100E+00 | .71236200E+00 | .75998100E+00 |
| .91497000E-01 | .24870500E+00 | .79521800E+00 | .56079300E+00 |
| .61160900E+00 | .91987800E+00 | .53969400E+00 | .55740500E+00 |
| .72693400E+00 | .52513300E+00 | .90672900E+00 | .76310000E-02 |
| .33591300E+00 | .13478300E+00 | .23226000E+00 | .29428300E+00 |
| .71198100E+00 | .94413900E+00 | .22722400E+00 | .92517300E+00 |
| .50357600E+00 | .27351600E+00 | .97756000E+00 | .53311300E+00 |
| .73413700E+00 | .56822400E+00 | .94420400E+00 | .87591700E+00 |
| .80209900E+00 | .39857700E+00 | .96309500E+00 | .83639700E+00 |
| .48090200E+00 | .45988700E+00 | .24516900E+00 | .42236500E+00 |
| .91898200E+00 | .57246600E+00 | .37636400E+00 | .76663400E+00 |
| .63977600E+00 | .68162700E+00 | .31761700E+00 | .12701600E+00 |
| .54172300E+00 | .85768300E+00 | .40486700E+00 | .88632400E+00 |
| .89826000E+00 | .29594600E+00 | .34905100E+00 | .55237000E+00 |
| .35782400E+00 | .31672900E+00 | .23610500E+00 | .75796700E+00 |
| .94385300E+00 | .36534300E+00 | .52696800E+00 | .26092700E+00 |
| .54785000E-01 | .12102000E-01 | .57577000E-01 | .94406300E+00 |
| .46405600E+00 | .95231800E+00 | .38870000E-01 | .81518700E+00 |
| .32010500E+00 | .63040000E-02 | .56784000E-01 | .71130000E-02 |
| .14636800E+00 | .11937100E+00 | .72256000E-01 | .77765100E+00 |
| .84128400E+00 | .36183400E+00 | .42122500E+00 | .50961500E+00 |
| .67828900E+00 | .92900300E+00 | .81462700E+00 | .71081700E+00 |
| .30582200E+00 | .14119100E+00 | .33840000E+00 | .14071000E-01 |
| .74732000E+00 | .44371200E+00 | .45348200E+00 | .17718700E+00 |
| .40122000E+00 | .40687800E+00 | .99581000E+00 | .82979000E-01 |
| .40960000E-01 | .72600000E+00 | .17632100E+00 | .73926000E+00 |
| .81497800E+00 | .22139200E+00 | .58095400E+00 | .27884100E+00 |
| .24671000E+00 | .83836600E+00 | .17064500E+00 | .95953600E+00 |
| .23459400E+00 | .64723400E+00 | .28133200E+00 | .16415600E+00 |
| .52069000E-01 | .84330900E+00 | .62395300E+00 | .40051500E+00 |
| .34757000E+00 | .74690400E+00 | .28444500E+00 | .30142400E+00 |
| .14453700E+00 | .80333100E+00 | .72374500E+00 | .62469700E+00 |
| .84140600E+00 | .58290300E+00 | .77779200E+00 | .25314500E+00 |
| .21161500E+00 | .78093100E+00 | .65752200E+00 | .19458200E+00 |
| .40360100E+00 | .21773000E+00 | .94887400E+00 | .58182000E+00 |
| .94080200E+00 | .83861000E+00 | .61278300E+00 | .67267000E+00 |
| .72165500E+00 | .71388400E+00 | .98518900E+00 | .84994700E+00 |
| .19598000E-01 | .38866000E-01 | .77702900E+00 | .62146200E+00 |
| .48306800E+00 | .13386700E+00 | .74240000E-01 | .62002800E+00 |
| .13550400E+00 | .44420100E+00 | .33775900E+00 | .60345600E+00 |
| .37534100E+00 | .54017800E+00 | .40352400E+00 | .45456100E+00 |
| .97601900E+00 | .11711300E+00 | .48247300E+00 | .18115400E+00 |

NUMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES (CONT.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| .85974000E-01 | .99531700E+00 | .16054300E+00 | .91604800E+00 |
| .22864300E+00 | .12010400E+00 | .39867200E+00 | .91705500E+00 |
| .30246500E+00 | .56178500E+00 | .53279700E+00 | .56698800E+00 |
| .58087700E+00 | .51567300E+00 | .27385500E+00 | .37365900E+00 |
| .71231700E+00 | .30208000E+00 | .70776500E+00 | .96988100E+00 |
| .72022100E+00 | .36632000E+00 | .29552300E+00 | .11346600E+00 |
| .30270000E-02 | .27870400E+00 | .87300700E+00 | .68722700E+00 |
| .33417300E+00 | .73454500E+00 | .65117500E+00 | .69897700E+00 |
| .86209700E+00 | .55415500E+00 | .21596300E+00 | .28152700E+00 |
| .11023500E+00 | .68284800E+00 | .52831100E+00 | .69269000E+00 |
| .97702600E+00 | .19093500E+00 | .92415400E+00 | .31527900E+00 |
| .73590700E+00 | .27372900E+00 | .11443100E+00 | .65710600E+00 |
| .35315000E-01 | .25154300E+00 | .18508000E+00 | .35098500E+00 |
| .89868700E+00 | .56968900E+00 | .59703600E+00 | .15472600E+00 |
| .72446300E+00 | .79847900E+00 | .18623900E+00 | .95114300E+00 |
| .28607700E+00 | .63322600E+00 | .16362600E+00 | .74804900E+00 |
| .73197000E+00 | .89424300E+00 | .11513300E+00 | .67825500E+00 |
| .58557700E+00 | .52684200E+00 | .16990000E-02 | .99957500E+00 |
| .74533700E+00 | .60133600E+00 | .15926200E+00 | .94820000E-01 |
| .48468600E+00 | .31303600E+00 | .29875800E+00 | .47180400E+00 |
| .45206300E+00 | .98225600E+00 | .50612400E+00 | .76333800E+00 |
| .67090400E+00 | .54308000E-01 | .24230000E+00 | .72723600E+00 |
| .53964800E+00 | .99504000E-01 | .34322200E+00 | .24630900E+00 |
| .83173200E+00 | .81315800E+00 | .19827000E-01 | .32837100E+00 |
| .69559300E+00 | .15581000E-01 | .85805300E+00 | .10623400E+00 |
| .65466900E+00 | .65208600E+00 | .81883800E+00 | .83770900E+00 |
| .60739700E+00 | .79298600E+00 | .23811900E+00 | .90561100E+00 |
| .82721500E+00 | .63359300E+00 | .82683400E+00 | .81775100E+00 |
| .96256100E+00 | .49421900E+00 | .67091900E+00 | .20694200E+00 |
| .36871000E-01 | .82017700E+00 | .23131400E+00 | .83099600E+00 |
| .44858400E+00 | .18178000E+00 | .34395400E+00 | .57272500E+00 |
| .97113600E+00 | .27434000E+00 | .21977800E+00 | .43994300E+00 |
| .75296600E+00 | .91816900E+00 | .44472300E+00 | .56546200E+00 |
| .31751100E+00 | .58580000E-01 | .97972700E+00 | .20709400E+00 |
| .56320800E+00 | .76588600E+00 | .16072700E+00 | .74765200E+00 |
| .76349400E+00 | .23539900E+00 | .69866000E+00 | .69494800E+00 |
| .56680900E+00 | .78743200E+00 | .67946400E+00 | .68179500E+00 |
| .99658800E+00 | .86729600E+00 | .56407700E+00 | .46600500E+00 |
| .45126900E+00 | .45305000E-01 | .18843700E+00 | .93039100E+00 |
| .70429000E+00 | .16771000E-01 | .76347900E+00 | .82766000E-01 |
| .90408900E+00 | .60200700E+00 | .87514300E+00 | .55941000E-01 |
| .57410200E+00 | .74632500E+00 | .48436500E+00 | .10772900E+00 |
| .61276800E+00 | .52003700E+00 | .92708400E+00 | .62094300E+00 |
| .29352400E+00 | .11845600E+00 | .91423600E+00 | .10339500E+00 |
| .26480700E+00 | .86189500E+00 | .53175900E+00 | .18789900E+00 |
| .55005500E+00 | .19566500E+00 | .24059100E+00 | .63226500E+00 |
| .54770500E+00 | .69008100E+00 | .87666900E+00 | .31930700E+00 |
| .31195000E-01 | .40453000E-01 | .65093000E+00 | .25683800E+00 |
| .14896200E+00 | .67095000E-01 | .14931300E+00 | .57766900E+00 |
| .42444400E+00 | .71531900E+00 | .33275400E+00 | .53961400E+00 |