Uma introdução à Teoria das Distribuições

por Fernando Sequeira
Lisboa

(Continuação do número anterior)

7. Uma topologia em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$

Descrevemos $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ como sendo uma ampliação de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ que conserva a sua estrutura vectorial e que torna a derivação sempre possível; os seus elementos são as derivadas generalizadas de funções contínuas.

Para definirmos uma topologia em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, vamos agora recorrer ao facto de ele ser a soma vectorial de uma família numerável $(\mathcal{C}_q(\mathbf{R}))_{q\in\mathbf{N}}$ de espaços vectoriais complexos $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$, em que para cada natural q, $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ designa o sub-espaço de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ constituído pelas distribuições que se podem representar como derivadas de ordem q de funções contínuas. Em cada um destes espaços $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ introduziremos uma topologia $\mathcal{T}_q$ que verifica certas propriedades (I e II deste parágrafo) sendo a topologia do $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ definida como soma das topologias $\mathcal{T}_q$.

No entanto, é o conceito de convergência relativo às topologias $\mathcal{T}_q$ que nos interessa em especial, ou mais precisamente, a convergência num pelo menos dos $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ (suposto munido de $\mathcal{T}_q$).

O leitor que queira evitar considerações de natureza topológica pode pois utilizar-se da definição de $\mathcal{T}_q$ e do consequente critério de convergência dado para sucessões, e prosseguir a leitura dos restantes parágrafos do trabalho.

Visando uma análise um pouco mais detalhada do problema, vamos descrever um processo de chegar à referida topologia de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, citando também algumas das suas principais propriedades. Com o mesmo objectivo sugerimos a resolução dos problemas que seguem no fim do parágrafo. Para facilitar a leitura, este parágrafo vem acompanhado de dois apêndices e de notas, com resultados, definições e propriadades a utilizar.

Comecemos então por considerar uma certa topologia $\mathcal{T}_0$ que se utiliza geralmente em $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ e se impõe pelas suas propriedades, e determinemos uma topologia $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ tal que:

A. *A topologia induzida sobre* $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ *por* $\mathcal{T}$ *é menos fina que* $\mathcal{T}_0$ (o que assegura que toda a sucessão convergente em $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ segundo $\mathcal{T}_0$, é também convergente segundo $\mathcal{T}$);

B. *O operador derivação* D *é contínuo para a topologia* $\mathcal{T}$

C. $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ *munido de* $\mathcal{T}$ *é um espaço vectorial topológico separado.*

Isto é uma topologia em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, que torna o operador derivação contínuo, e tal que $\mathcal{C}(\mathbf{R})$, munido de $\mathcal{T}_0$ fica topològicamente incluído em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$.

A topologia $\mathcal{T}_0$, òbviamente compatível [nota 1] com a estructura vectorial de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ *pode ser introduzida através de um sistema fundamental de vizinhanças da origem* [nota 1] *constituído pelas partes* $V(I,\varepsilon)$ *de* $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ *seguintes; para cada intervalo compacto* $I\subset\mathbf{R}$, *e cada real* $\varepsilon>0$, $V(I,\varepsilon)$ *é constituído pelas*

funções $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ *que verificam a desigualdade*

$$\max_{x \in I} |f(x)| < \varepsilon .$$

Sempre que não exista perigo de confusões usaremos também a notação $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ para designar o espaço vectorial topológico assim obtido.

A topologia τ_0 verifica algumas propriedades que nos interessa salientar:

1. *Uma sucessão* (f_n) *de funções* $f_n \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ *converge para* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, *se e só se ela converge uniformemente para* f *sobre todo o intervalo compacto* $I \subset \mathbf{R}$.

O operador primitivação definido sobre $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ é pois contínuo, verificando-se a igualdade

$$\lim (\mathcal{J} f_n) = \mathcal{J} \lim (f_n)$$

para toda a sucessão (f_n) convergente em $\mathcal{C}(\mathbf{R})$.

2. $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ *munido de* τ_0 *é limite projectivo* [nota 2] *de um sistema projectivo de espaços de Banach* [vidé apêndice I].

Por sua vez, para cada q natural, o sistema fundamental de vizinhanças $\{[D^q V(I, \varepsilon)]: I \in \mathcal{V}, \varepsilon$ real positivo$\}$, onde $\mathcal{V}$ é o conjunto dos intervalos impactos $I \subset \mathbf{R}$, define uma topologia τ_q sobre $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ tal que:

I) $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ *munido de* τ_q *é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de Banach* [ver apêndice 2];

II) *São contínuas as seguintes aplicações lineares:*

1. *A injecção canónica* $\mathcal{C}(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ (o que assegura a convergência em $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ de toda a sucessão convergente em $\mathcal{C}(\mathbf{R})$);
2. *A injecção canónica* $\mathcal{C}_q(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_{q+m}(\mathbf{R})$ (m: natural) (o que assegura que toda a sucessão convergente em $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ é também convergente em $\mathcal{C}_{q+m}(\mathbf{R})$);
3. *A restricsão de* D^q *a* $\mathcal{C}(\mathbf{R})$, *considerada como aplicação de* $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ *em* $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$;
4. *A restricção* D^m (m: natural) *a* $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$, *considerada como aplicação de* $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ *em* $\mathcal{C}_{q+m}(\mathbf{R})$.

De acordo com τ_q, *uma sucessão* (φ_n) *de elementos de* $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ *converge para* $\varphi \in \mathcal{C}_q(\mathbf{R})$, *se e só se existirem uma sucessão* (f_n) *de elementos* $f_n \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ *e uma função* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ *tais que:* a) $\varphi = [D^q f]$ *e para todo o natural* n, $\varphi_n = [D^q f_n]$; b) $(f_n) \to f$ *em* $\mathcal{C}(\mathbf{R})$.

Obtém-se assim uma família numerável $(\mathcal{C}_q(\mathbf{R}))_{q \in \mathbf{N}}$ de espaços vectoriais topológicos que verifica as seguintes propriedades:

i) *Todo o* $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ *verifica* I;

ii) *Quaisquer que sejam os naturais* q *e* m, *tem-se* $\mathcal{C}_q(\mathbf{R}) \subset \mathcal{C}_{q+m}(\mathbf{R})$, *sendo a injecção canónica* $\mathcal{C}_q(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_{q+m}(\mathbf{R})$ *uma aplicação linear contínua;*

iii) $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ *é a soma vectorial dos espaços* $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$.

Nestas condições é natural munir-se $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ da mais fina das topologias que tornam contínuas as injecções canónicas $\mathcal{C}_q(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, denominada soma das topologias τ_q; isto é, da mais fina das topologias que induzem em cada um dos $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ uma topologia menos fina por τ_q. Então, em virtude de II 1, *ela induzirá em* $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ *uma topologia que é também menos fina que* τ_0, como se pretendia. E de acordo com essa topologia, que designaremos por τ, *o operador derivação é contínuo*, como se pode provar facilmente. Para o efeito basta ter em consideração II. 4 e que um conjunto $A \subset \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ é aberto segundo τ, se e só se cada uma das intersecções $A \cap \mathcal{C}_q(\mathbf{R})$, $q \in \mathbf{N}$, é um aberto de τ_q.

Mas para o que se segue, tem particular importância a convergência num pelo menos dos $\mathcal{C}_q, (\mathbf{R})$. Relativamente a esse tipo de

convergência é ainda verdadeiro que se uma dada sucessão (φ_n) de distribuições converge para φ nesse sentido, a sucessão $(D\varphi_n)$ das suas derivadas converge também para $D\varphi$ num pelo menos dos $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$, e nesse sentido pode escrever-se

$$D\lim(\varphi_n) = \lim(D\varphi_n).$$

Nota 1

Dado um espaço topológico X, denomina-se vizinhança de uma parte $A \subset X$, todo o conjunto que contém um aberto contendo A. As vizinhanças de uma parte $\{u\}$ com $u \in X$ denominam-se também vizinhanças de u.

Posto isto, demonstra-se que o conjunto $\mathcal{V}(u)$ das vizinhanças de um ponto $u \in X$ verifica as seguintes propriedades:

1. Toda a parte de X que contém um conjunto de $\mathcal{V}(u)$, pertence a $\mathcal{V}(u)$;
2. Toda a intersecção finita dos conjuntos de $\mathcal{V}(u)$ pertence a $\mathcal{V}(u)$;
3. u pertence a todo o $V \in \mathcal{V}(u)$;
4. Se $V \in \mathcal{V}(u)$, existe um $W \in \mathcal{V}(u)$ tal que V é uma vizinhança de todo o ponto de W.

Recìprocamente, se para cada $u \in X$ existe um conjunto $\mathcal{V}(u)$ de pontos de X que verifica 1, 2, 3 e 4, então existe uma e uma só topologia sobre X tal que para cada $u \in X$, $\mathcal{V}(u)$ é o conjunto das vizinhanças de u.

Isto significa que uma topologia sobre um conjunto X pode ser definida pelos conjuntos $\mathcal{V}(u)$ das vizinhanças de cada um dos seus pontos $u \in X$. Mais precisamente, para a definir é suficiente dar para cada $u \in X$, um sistema fundamental de vizinhanças, isto é, um conjunto $\mathcal{S}(u) \subset \mathcal{V}(u)$ tal que para todo o $V \in \mathcal{V}(u)$ existe um $W \in \mathcal{S}(u)$ tal que $W \subset V$. $\mathcal{V}(u)$ será então constituído pelas partes de X que contêm um conjunto de $\mathcal{S}(u)$.

A topologia $\mathcal{T}$ diz-se separada e X um espaço separado, se além das propriedades 1, 2, 3 e 4, X verifica ainda a seguinte:

5. Quaisquer que sejam $u, v \in X$, com $u \neq v$, existem $U \in \mathcal{V}(u)$ e $V \in \mathcal{V}(v)$ tais que $U \cap V = \Phi$.

Se X é também um espaço vectorial complexo, diz-se que $\mathcal{T}$ é compatível com a sua estructura vectorial, sempre que se verificam as seguintes propriedades:

6. Se $w = u + v$, com $u, v, w \in X$, então qualquer que seja $W \in \mathcal{V}(w)$, existem $U \in \mathcal{V}(u)$ e $V \in \mathcal{V}(v)$ tais que $U + V \subset W$;
7. Se $w = \lambda \cdot u$, com $\lambda \in \mathbf{C}$ e $u, w \in X$, então qualquer que seja a vizinhança $W \in \mathcal{V}(w)$, existem $U \in \mathcal{V}(u)$ e um real $\varepsilon > 0$, tais que $(\lambda + \lambda') \cdot U \subset W$ para todo o complexo λ' verificando $|\lambda'| < \varepsilon$.

Como consequência destas propriedades resulta então que sendo $u \in X$ e $\mathcal{S}(0)$ um sistema fundamental de vizinhanças da origem, o conjunto das translatadas $u + V$, com $V \in \mathcal{S}(0)$, é também um sistema fundamental das vizinhanças de u. Este resultado permite pois, definir uma topologia sobre X, compatível com a sua estructura vectorial, por meio de um sistema fundamental de vizinhanças da origem.

De uma forma geral, seja $\mathcal{S}(0)$ um conjunto de partes de X (que supomos um espaço vectorial complexo) que verifica as seguintes propriedades:

i. O zero pertence a todo o conjunto de $\mathcal{S}(0)$;

ii. Quaisquer que sejam $U, V \in \mathcal{S}(0)$, *existe um* $W \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $W \subset U \cap V$;

iii. Qualquer que seja $u \neq 0$, *existe* $W \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $u \notin W$;

iv. Se $U \in \mathcal{S}(0)$, *existe* $W \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $W \pm W \subset U$;

v. Se $u \in U \in \mathcal{S}(0)$, *existe* $V \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $u + V \subset U$;

vi. Quaisquer que sejam $U \in \mathcal{S}(0)$ *e o complexo* $\alpha \neq 0$, *existe* $V \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $\alpha V \subset U$;

vii. Quaisquer que sejam $U \in \mathcal{S}(0)$ *e* $v \in X$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\lambda v \in U$ *quando* $|\lambda| < \varepsilon$;

viii. Qualquer que seja $U \in \mathcal{S}(0)$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\lambda U \subset U$ *quando* $|\lambda| < \varepsilon$.

Nestas condições demonstra-se que existe uma e uma só topologia sobre X, separada, compatível com a sua estructura vectorial, para a qual $\mathcal{S}(0)$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem.

Nota 2

Sendo $\mathcal{D}$ um conjunto parcialmente ordenado, filtrante à direita, diz-se sistema projectivo de espaços vectoriais topológicos com índice em $\mathcal{D}$, todo o par $((X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}, (f_\alpha^\beta)_{\alpha, \beta \in \mathcal{D}})$ onde $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ é uma família de espaçes vectoriais topológicos e $(f_\alpha^\beta)^{\mathcal{D}}$ é uma família de aplicações lineares contínuas $f_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ cujo conjunto de índices é constituído pelos pares $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, com $\alpha \leqq \beta$, e os f_α^β verificam as seguintes propriedades: *a*) f_α^α, $\alpha \in \mathcal{D}$, é a identidade de X_α; *b*) Quaisquer que sejam $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$, tem-se $f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma = f_\alpha^\gamma$.

Posto isto, diz-se limite projectivo deste sistema o par $(X, (f_\alpha)_{\mathcal{D}})$ onde X é um espaço vectorial topológico e $(f_\alpha)^{\mathcal{D}}$ é uma família de aplicações lineares contínuas $f_\alpha : X \to X_\alpha$ tais que: *a*) $f_\alpha^\beta \circ f_\beta = f_\alpha$ quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, com $\alpha \leqq \beta$; *b*) Dado um espaço vectorial topológico Y e uma família $(g_\alpha)_{\mathcal{D}}$ de aplicações lineares contínuas $g_\alpha : Y \to X_\alpha$, verificando as relações $f_\alpha^\beta \circ g_\beta = g_\alpha$, $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ e $\alpha \leqq \beta$, existe uma e uma só aplicação linear contínua $h : X \to Y$ tal que $f_\alpha \circ h = g_\alpha$, para todo o $\alpha \in \mathcal{D}$.

Nota 3

Chama-se espaço localmente convexo todo o espaço vectorial complexo E onde se definiu uma topologia por meio de um sistema fundamental de vizinhanças da origem constituído por conjuntos absolutamente convexos e absorventes, isto é, por conjuntos V que verificam as seguintes propriedades:

1. $\alpha u + \beta v$ pertence a V quaisquer que sejam $u, v \in V$ e os complexos α, β, com $|\alpha| + |\beta| \leqq 1$;

2. Para todo o $u \in E$ existe um real $\rho > 0$ tal que $u \in \rho V$.

E diz-se completo para as sucessões, se toda a sucessão de CAUCHY, é convergente em E.

Apêndice I

$\mathcal{C}(\mathsf{R})$ munido de τ_0 é limite projectivo do sistema $((F(I))_{I \in \mathcal{D}}, (\rho_J^I)_{I, J \in \mathcal{D}})$ definido como se segue:

a) $\mathcal{D}$ é o conjunto dos intervalos compactos de R, munido da relação de ordem $\subset$;

b) Para cada $I \in \mathcal{D}$, $F(I)$ é o espaço de BANACH formado pelo conjunto das funções complexas definidas e contínuas sobre I, munido da estructura vectorial usual e da norma definida para cada $f \in F(I)$ por

$$\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)|$$

c) Quaisquer que sejam $I, J \in \mathcal{D}$, com $J \subset I$, ρ_J^I é a aplicação linear contínua $F(I) \to F(J)$ que a cada $f \in F(I)$ faz corresponder a sua restricção a J.

Para todo o $I \in \mathcal{D}$, a aplicação canónica $\rho_I : \mathcal{C}(\mathsf{R}) \to F(I)$, a cada $f \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$ faz corresponder a sua restricção a I. τ_0 é pois a menos fina das topologias que tornam contínuas as aplicações ρ_I.

Apêndice II

Pode demonstrar-se que $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ é isomorfo a um sub-espaço vectorial de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$. Com efeito, seleccionando um conjunto $\{x_1, x_2, \cdots x_q\}$ de q pontos distintos de $\mathbf{R}$, segue-se que o sub-espaço vectorial $F_q(\mathbf{R})$ de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$, instituido pelas funções $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ que se anulam naqueles pontos, é isomorfo a $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$: a aplicação $\Psi_q : F_q(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ que a cada $f \in F_q(\mathbf{R})$ faz corresponder a distribuição $\Psi_q(f) = [D^q f]$ é um isomorfismo vectorial.

Pode pois munir-se $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ da imagem dada por Ψ_q da topologia induzida em $F_q(\mathbf{R})$ por τ_0, e essa imagem é precisamente τ_q. Ela é de resto independente dos q pontos escolhidos inicialmente.

Recorrendo ao isomorfismo Ψ_q demonstra-se então fàcilmente que $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ munido de τ_q é limite projectivo do sistema $(F_q(I))_{I \in \mathcal{D}_q}$, $(\rho_J^I)_{I, J \in \mathcal{D}_q})$ definido como se segue:

a) $\mathcal{D}_q$ é o conjunto dos intervalos compatos de $\mathbf{R}$ que contêm os q pontos, escolhidos, munido da relação de ordem $\subset$;

b) Para cada $I \in \mathcal{D}_q$, $F_q(I)$ é o espaço de Banach formado pelo conjunto das funções complexas, definidas e contínuas sobre I, que se anulam nos q pontos considerados, conjunto este munido da estructura vectorial usual e de norma dada para cada $f \in F_q(J)$ por

$$\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)| .$$

c) ρ_J^I, para cada I, $J \in \mathcal{D}_q$, com $J \subset I$, é a aplicação de $F_q(I)$ em $F_q(J)$ que a cada $f \in F_q(I)$ faz corresponder a sua restrição a J.

As aplicações canónicas $\mathcal{C}_q(\mathbf{R}) \to F_q(I)$, $I \in \mathcal{D}_q$, *são as aplicações* $\rho_I \circ \Psi_q^{-1}$ *onde* ρ_I *designa a restrição a* I; *a topologia* τ_q *é pois a menos fina das topologias que tornam contínuas estas aplicações.*

Problemas

1. Demonstre que:

a) O conjunto das partes $V(I, \varepsilon)$ de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$, definidas neste parágrafo satisfaz as propriedades *i*) a *viii*) da nota 1, determinando por isso, unìvocamente, uma topologia τ_0 sobre $\mathcal{C}(\mathbf{R})$, compatível com a estructura vectorial deste espaço, separada, e para a qual o referido conjunto constitui um sistema fundamental de vizinhanças da origem;

b) Cada uma das partes $V(I, \varepsilon)$ é absolutamente convexa e absorvente [ver nota 3].

c) $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ munido de τ_0 é completo para as sucessões.

2. Atendendo a que $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ munido de τ_0 é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de Banach [ver apêndice I e nota 2] e supondo que $\hat{f}$ é uma função definida sobre $\mathbf{R}$ e com valores em $\mathcal{C}(\mathbf{R})$, demonstre que:

a) Se para todo o $x \in \mathbf{R}$ existe em $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ e é nulo o limite $\lim_{h \to 0} \dfrac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h}$, então $\hat{f}$ é uma constante sobre $\mathbf{R}$; de uma forma geral, as soluções da equação $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n \hat{f} = 0$ (n número natural) são polinómios inteiros em x de grau inferior a n, com coeficientes em $\mathcal{C}(\mathbf{R})$;

b) Se $\hat{f}$ é contínua para a topologia τ_0, tem-se $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_0^x \hat{f}(t)\, dt = \hat{f}(x)$ e portanto é válida a fórmula de Barrow

$$\int_\alpha^\beta \hat{f}(t)\, dt = \hat{g}(\beta) - \hat{g}(\alpha)$$

em que $\hat{g}$ é uma primitiva de $\hat{f}$;

c) Se $\hat{f}$ é contìnuamente derivável sobre $\mathbf{R}$ e se φ é uma função escalar também con-

tinuamente derivável sobre $\mathbf{R}$, tem-se

$$\frac{d}{dx}(\varphi \cdot \hat{f}) = \varphi' \cdot \hat{f} + \varphi \cdot \hat{f}'$$

onde $\hat{f}'$ e φ' designam as respectivas derivadas;

d) Se $\hat{f}$ é contínuamente derivável sobre $\mathbf{R}$, verificam-se as igualdades

$$\int_0^x t\hat{f}''(t)\,dt = x\hat{f}'(x) - \int_0^x \hat{f}'(t)\,dt$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \hat{f}'(t)\,dt = \hat{f}'(0);$$

e) Se $\hat{f}$ admite derivada contínua até à ordem n, tem-se

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(0) + \hat{f}'(0)\cdot x + \frac{1}{2!}\hat{f}''(0)\,x^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\hat{f}^{(n-1)}(0)\,x^{n-1} +$$

$$+ \int_0^x \hat{f}^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

para todo o $x \in \mathbf{R}$, e

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\int_0^x \hat{f}^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \frac{1}{n!}\hat{f}^{(n)}(0).$$

f) Se existe o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n!\,\hat{f}(x)}{x^n} = \alpha \neq \infty$, para todo o natural m tem-se

$$\lim_{x\to 0}\frac{(n+m)!\,\mathcal{J}^m\hat{f}(x)}{x^{n+m}} = \alpha$$

onde $\mathcal{J}^m$ é a potência m do operador primitivação $\mathcal{J}\hat{f} = \int_0^x \hat{f}(t)\,dt$.

NOTA: *Estas propriedades (a a f) são ainda válidas se o espaço onde $\hat{f}$ toma valores é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de* BANACH.

3) Demonstre que o conjunto

$$\{[D^q V(I,\varepsilon)]:\ I \in \mathcal{D},\ \varepsilon \text{ real positivo}\}$$

de partes de $\mathcal{C}_q(\mathbf{R})$ verifica as propriedades *i* a *viii* da nota 1.

4) Demonstre a propriedade II.

8. Distribuições vectoriais

Recorrendo a uma restricção do tipo de funções contínuas que se consideram, podem também definir-se certas distribuições vectoriais, como derivadas generalizadas de ordem finita de funções contínuas.

Com esse objectivo consideremos, à imagem do que sucede com $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, um espaço vectorial complexo E, e uma família numerável $(E_q)_{q\in\mathbf{N}}$ de espaços vectoriais topológicos E_q tais que:

I. *Cada um dos E_q é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de* BANACH;

II. *$E_q \subset E_{q+m}$ quaisquer que sejam os naturais q e m, sendo a injecção canónica $E_q \to E_{q+m}$ uma aplicação linear contínua;*

III. *E é a soma vectorial dos espaços E_q.*

E designemos por:

a) $\mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$ o espaço vectorial complexo formado pelo conjunto das funções $\hat{f}$, definidas sobre $\mathbf{R}$, com valores num dos E_q (dependente de $\hat{f}$) e contínuas relativamente à topologia desse espaço, conjunto este munido da estructura vectorial usual;

b) $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, E)$ o subespaço de $\mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$ constituído pelas funções $\hat{f}$ que verificam a seguinte propriedade: para cada $\hat{f}$ existe um E_q tal que $\hat{f}$ é uma aplicação de $\mathbf{R}$ em E_q,

contìnuamente derivável relativamente à topologia de E_q.

Verifica-se então que se $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, E)$ e se $\hat{f}'$ é a sua derivada calculada num certo E_q, $\hat{f}'$ é também a derivada de $\hat{f}$ em todo o E_{q+m}, o que justifica denominá-la derivada de $\hat{f}$.

O operador $\hat{f} \to \hat{f}'$ é pois uma aplicação linear de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, E)$ em $\mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$.

Nestas condições, pode pôr-se o problema de determinar um sobre-espaço mínimo $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ de $\mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$, onde a derivação é sempre possível, um operador linear e um prolongamento da derivada definida em $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, E)$. Por outras palavras; *determinar um sobre-espaço vectorial complexo* $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ *de* $\mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$ *e duas aplicações lineares* $\Phi : \mathcal{C}(\mathbf{R}, E) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ *e* $D : \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ *tais que:*

i. Φ é injectiva;

ii. Se $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, E)$, então $\Phi(\hat{f}') = D\Phi(\hat{f})$;

iii. Todo o $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ pode exprimir-se com a forma $\hat{\varphi} = D^n \Phi(\hat{f})$ onde n é um inteiro não negativo e $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$;

iv. Se $D\hat{\varphi} = 0$, com $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$, então $\hat{\varphi} = \Phi(\text{constante})$.

Percorrendo caminhos paralelos aos utilizados para o caso escalar, pode demonstrar-se a existência e a unicidade (a menos de um isomorfismo vectorial) de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$. Um modelo pode ainda ser obtido recorrendo ao conjunto $\mathcal{C}^*(\mathbf{R}, E)$ constituído pelos elementos de forma $D^n \hat{f}$, com n inteiro não negativo e $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$, e à relação de equivalência definida sobre $\mathcal{C}^*(\mathbf{R}, E)$ do seguinte modo: dados dois elementos $D^n \hat{f}$ e $D^m \hat{g}$ pertencentes a $\mathcal{C}^*(\mathbf{R}, E)$, eles dizem-se equivalentes e escreve-se $[D^n \hat{f}] = [D^m \hat{g}]$, se e só se $J^m \hat{f} - J^n \hat{g}$ é um polinómio de grau inferior a $n + m$, cujos coeficientes são elementos de E.

O conjunto das classes de equivalência assim obtidas munido de adição definida por

$$[D^n \hat{f}] + [D^m \hat{g}] = [D^{n+m}(J^m \hat{f} + J^n \hat{g})]$$

e do produto por escalares dado por

$$\lambda \cdot [D^n \hat{f}] = [D^n(\lambda \hat{f})], \quad \lambda \in \mathbf{C}$$

constitui um espaço vectorial complexo. Associado às aplicações Φ e D definidas por

$$\Phi(f) = [D^0 \hat{f}], \quad \hat{f} \in \mathbf{C}(\mathbf{R}, E)$$

e

$$D[D^n f] = [D^{n+1} \hat{f}]$$

verifica as propriedades *i* a *iv*, constituindo portanto uma solução do problema. Designá-la-emos por $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$; os seus elementos são certas distribuições vectoriais que se podem representar como derivadas de ordem finita de funções contínuas, uma vez que identifiquemos os elementos da forma $\Phi(\hat{f})$, $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$, com os próprios $\hat{f}$. As distribuições assim obtidas são suficientes para o nosso objectivo.

*

* *

Dados uma família numerável $(E_q)_{q \in \mathbf{N}}$ de espaços vectoriais topológicos que verifica as propriedades I e II, e para cada $q \in \mathbf{N}$, o subespaço $\mathcal{C}_q(\mathbf{R}, E_q) \subset \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$, constituído pelas distribuições que se podem representar como derivadas de ordem q de funções, definidas sobre $\mathbf{R}$, com valores em E_q e contínuas para a topologia de E_q, pode demonstrar-se que a família $(\mathcal{C}_q(\mathbf{R}, E_q))_{q \in \mathbf{N}}$ também verifica as propriedades I e II, e

que $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$ é precisamente a sua soma vectorial.

Este resultado permite então definir as distribuições de ordem finita em R^2, como distribuições de ordem finita em R, com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, e por indução as distribuições de ordem finita em R^n. Assim, uma distribuição $\hat{\varphi}$ de ordem finita em R^n pode apresentar-se como a derivada generalizada $D_1^{p_1} D_2^{p_2}, \cdots, D_n^{p_n}$ de ordem p_1 em relação a x_1, p_2 em relação a $x_2, \cdots$, de uma função complexa $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ definida e contínua sobre R^n.

No que se segue, utilizaremos a seguinte convenção: dado um conjunto

$$p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

de n números inteiros não negativos, representamos por D^p o operador $D_1^{p_1} D_1^{p_1}, \cdots, D_n^{p_n}$, e por J^p o operador $J_1^{p_1} J_2^{p_2}, \cdots, J_n^{p_n}$ onde J_i, $i \leq n$, é definido por

$$J_i f = \int_0^{x_i} f(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \cdots, x_n)\, d\xi$$

para toda a função f contínua sobre R^n.

Posto isto, dados dois elementos $[D^p f]$ e $[D^q g]$ onde $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ e $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$, eles representam a mesma distribuição, se e só se $J^q f - J^p g$ é da forma $\sum_{i=1}^{n} \Pi_i$, onde para cada $i \leq n$, Π_i é um polinómio de grau inferior a $p_i + q_i$ na variável x_i e cujos coeficientes são distribuições de ordem finita nas restantes variáveis.

A soma de duas distribuições $[D^p f] + [D^q g]$ vem dada por

$$[D^p f] + [D^q g] = [D^{p+q}(J^q f + J^p g)]$$

e o produto de um complexo λ por uma distribuição $[D^p f]$, é por sua vez

$$\lambda \cdot [D^p f] = [D^p(\lambda f)].$$

*

* *

Apliquemos agora estes resultados a alguns exemplos. Seja h a função de HEAVISIDE, e consideremos a função de x, que em cada ponto $x \in \mathsf{R}$ toma o valor $h(y - x)$. Ela é uma função vectorial, com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, contínua e indefinidamente diferenciável em ordem a x e pode ser representada por $D_y g(y - x)$ onde $g(y - x)$ é a função definida por

$$g(y - x) = \begin{cases} y - x & \text{se } y \geq x \\ 0 & \text{se } y < x \end{cases}.$$

A seu respeito, é então verdadeiro que $D_y g(y - x) = - D_x g(y - x)$, porquanto $J_x g(y - x) + J_y g(y - x) = \frac{1}{2} y^2$.

De uma forma geral, dada uma distribuição qualquer $\varphi \in D^n f$, com $f \in \mathcal{C}\mathsf{R})$, $n \in \mathsf{N}$, a função que em cada ponto $x \in \mathsf{R}$, toma o valor

$$\tau_x \varphi(g) = \varphi(y - x) = D^n f(y - x)$$

é contínua e indefinidamente diferenciável em ordem a x, e a sua derivada toma o valor $- D_y^{n+1} f(y - x)$ para todo o $x \in \mathsf{R}$. Podemos então escrever

$$D_x \varphi(y - x) = - D_y \varphi(y - x)$$

e para todo o natural p,

$$D_x^p \varphi(y - x) = (-1)^p D_y^p \varphi(y - x).$$

No caso da distribuição $\delta(x) \in \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, teremos:

$$\delta(y - x) = D_y^2 g(y - x) = D_x^2 g(y - x)$$

onde

$$g(y-x)=\begin{cases} y-x & \text{se} \quad y \geq x \\ 0 & \text{se} \quad y < x \end{cases}$$

e portanto

$$\delta(y-x)=D_x^2(g(y-x)-(y-x))=D_x^2 g(x-y)$$

isto é

$$\delta(y-x)=\delta(x-y).$$

*

* *

Um outro conceito que nos interessa é o de valor num ponto de uma distribuição vectorial. Adoptaremos a seguinte definição: *diz-se que vma distribuição* $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ *tem valor num ponto* $\alpha \in \mathbf{R}$, *se e só se ela admite uma representante* $D^n \hat{f}$, *com* $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$, *tal que num dos* E_q *existe o limite*

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{n!\, \hat{f}(x)}{(x-\alpha)^n}.$$

Este limite, que representaremos por $\hat{\varphi}(\alpha)$, *denomina-se valor de* $\hat{\varphi}$ *no ponto* α.

Por forma análoga à utilizada no parágrafo 4, podemos ainda definir os valores $\hat{\varphi}(\alpha^+)$, $\hat{\varphi}(\alpha^-)$, $\hat{\varphi}(-\infty)$, $\hat{\varphi}(+\infty)$, que são prolongamentos de conceitos análogos relativos a funções, e que verificam as propriedades usuais, descritas no parágrafo 4 para o caso das distribuições escalares.

Recorrendo a estes conceitos podem então definir-se os integrais

$$\int_{\alpha^\pm}^{\beta^\pm} \hat{\mu}(x)\,dx = \hat{\varphi}(\beta^\pm) - \hat{\varphi}(\alpha^\pm)$$

$$\int_\alpha^\beta \hat{\mu}(x)\,dx = \hat{\varphi}(\beta) - \hat{\varphi}(\alpha)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mu}(x)\,dx = \hat{\varphi}(+\infty) - \hat{\varphi}(-\infty)$$

onde $\hat{\mu} \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$, $\hat{\varphi}$ é uma primitiva de $\hat{\mu}$ e se supõe existirem aqueles valores ou limites laterais.

A título de exemplo consideremos as distribuições vectoriais $h(y-x)$ e $\delta(y-x)$ onde h designa a função de HEAVISIDE. De acordo com as definições dadas, tem-se

$$[h(y-x)]_{x=\alpha} = h(y-\alpha),$$

$$[\delta(y-x)]_{x=\alpha} = \delta(y-\alpha),$$

$$[h(y-x)]_{x=+\infty} = 0$$

e

$$[h(y-x)]_{x=-\infty} = 1$$

o que nos permite escrever por sua vez

$$\int_\alpha^\beta \delta(y-x)\,dx = h(y-\beta) - h(y-\alpha)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x)\,dx = 1.$$

Problemas

1) Sendo $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}_\omega(\mathbf{R})$ uma distribuição vectorial com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, demonstre que:

a) $$\int_\alpha^\beta \hat{\varphi}(x)\,dx = \theta(y) \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta D_y \hat{\varphi}(x)\,dx = D_y\,\theta(y)$$

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(x)\,dx = \theta(y) \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} D_y \hat{\varphi}(x)\,dx = D_y\,\theta(y).$$

2) Demonstre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iyx}}{\alpha + ix}\,dx =$$

$$= \begin{cases} 2\pi h(y)\, e^{-\alpha y} & \text{se} \quad \alpha > 0 \\ -2\pi(1-h(y))\, e^{-\alpha y} & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}.$$

3) Considere e^{iyx} como uma distribuição em x com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, e a identidade

$$e^{iyx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_y^{n-k}\left[\frac{\alpha^k e^{iyx}}{(\alpha + i x)^n}\right]$$

válida para todo o natural n e todo o real $\alpha \neq 0$.

Posto isto, determine:

a) Os limites $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{iyx}$;

b) Tendo em atenção os problemas 1 e 2, o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} dx$;

c) O integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} dx$.

9. Alguns casos de multiplicação com distribuições. Fórmula de Dirac

Seja $\mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ o subespaço de $\mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$ constituído pelas funções indefinidamente diferenciáveis, sendo esta diferenciabilidade entendida no sentido referido no parágrafo 8. Entre os seus elementos e as distribuições de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ pode então definir-se uma multiplicação do seguinte modo: dadas $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, diz-se produto de $\hat{f}$ por φ e representa-se por $\hat{f} \cdot \varphi$ uma distribuição de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ tal que:

I. Se φ é uma função contínua, $\hat{f} \cdot \varphi$ é o produto usual;

II. É válida a regra de derivação

$$(1) \qquad D(\hat{f} \cdot \varphi) = \hat{f} \cdot D\varphi + \hat{f}' \cdot \varphi$$

onde $\hat{f}'$ designa a derivada de $\hat{f}$ no sentido referido atrás, e D representa indestintamente a derivação em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ e em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$.

De forma análoga à utilizada no § 6, demonstra-se que esta operação fica univocamente determinada pelas propriedades I e II, e que sendo $\varphi = D^n g$ com $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, e $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$, tem-se

$$(2) \quad \hat{f} \cdot \varphi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k}[\hat{f}^{(k)} \cdot g]$$

onde $\hat{f}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ designa a derivada de ordem k de $\hat{f}$. E demonstra-se ainda que esta multiplicação satisfaz as seguintes propriedades:

1. $(\hat{f} + \hat{g}) \cdot \varphi = \hat{f} \cdot \varphi + \hat{g} \cdot \varphi$

2. $\hat{f}(\varphi + \psi) = \hat{f} \cdot \varphi + \hat{f} \cdot \psi$

quaisquer que sejam $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$, e $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, e ainda

3. Se $\hat{\theta} = \hat{f} \cdot \varphi$, com $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, e se num ponto $\alpha \in \mathbf{R}$ existe o valor $\varphi(\alpha)$, então existe $\theta(\hat{\alpha})$ e tem-se $\hat{\theta}(\alpha) = \hat{f}(\alpha) \cdot \varphi(\alpha)$.

Por indução demonstra-se ainda que

$$(3) \quad \hat{f} \cdot D^n \varphi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k}(\hat{f}^{(k)} \cdot \varphi).$$

Consideremos agora o produto $\hat{f} \cdot \delta$ onde $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ e δ é a distribuição de Dirac: Como

$$\int_0^x \hat{f}'(\xi)\, h(\xi)\, d\xi = (\hat{f}(x) - \hat{f}(0))\, h(x)$$

onde h designa a função de HEAVISIDE, derivando ambos os membros desta igualdade vem

$$(4) \qquad \hat{f}(x) \cdot \delta(x) = \hat{f}(0) \cdot \delta(x)$$

Substituindo na igualdade 3, tem-se por sua vez