Panorama da Geodesia Contemporânea (*)

por F. Teixeira de Queiroz

1. O problema geodésico.

Como acontece com toda a ciência em rápido desenvolvimento, é extremamente difícil a apresentação duma panorâmica da geodesia contemporânea porque, não só alguns dos factos expostos podem à altura da publicação estar já desactualizados, mas também, e principalmente, porque a exposição duma ciência em tais condições está muito mais marcada do que qualquer outra por influências subjectivas, que sempre existem, daquele que a expõe. A qualquer desses perigos nos expomos ao apresentar esta panorâmica duma ciência que, como tantas outras, adquiriu depois da segunda guerra mundial um desenvolvimento que se pode classificar de explosivo.

Deve-se um tal desenvolvimento a quatro factores fundamentais:

1) Uma melhor colaboração entre as nações a respeito dos problemas geodésicos.

2) O aparecimento de máquinas de calcular electrónicas que permitem a resolução de sistemas de equações lineares a um muito grande número de incógnitas.

3) O aparecimento de instrumentos electrónicos medidores de distâncias.

4) A colocação em órbita de satélites artificiais.

Parece-nos útil, porém, antes de abordarmos a influência que cada um destes pontos tem em geodesia, fazer um apanhado dos objectivos e métodos da geodesia clássica pois, só assim, será possível inserir e fazer ressaltar o papel que cada um dos factores acima assinalados desempenha no desenvolvimento e renovação desta ciência.

*

A geodesia é uma ciência que tem como objectivo a determinação das dimensões e da forma da Terra. É uma das ciências mais antigas pois, já na Grécia clássica, AERATÓSTENES realizou uma determinação do raio da Terra.

Contudo, é por alturas da revolução francesa que a geodesia principia a adquirir o aspecto que tem hoje. Nessa altura, a observação duma cadeia de triângulos centrada em Paris e estendendo-se para Norte e Sul da Europa, levou alguns geodetas a formularem a hipótese de ser a Terra sensìvelmente um elipsóide alongado de revolução (elipsóide de CASSINIS). Tal hipótese deu origem a uma grande controvérsia pois estava em contradição com a teoria de NEWTON e HUYGENS a qual conduzia a admitir ser um elipsóide achatado de revolução o que melhor se adaptava à forma da Terra. A fim de decidir

(*) O presente artigo consta de dois extractos, a Introdução e o Capítulo V, do trabalho apresentado pelo Autor ao Concurso organizado pela «Gazeta de Matemática» com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian e que mereceu o 2.º prémio da *Secção B*.

qual o elipsóide que melhor se adaptava à Terra, a Academia das Ciências de Paris mandou, em 1735, duas expedições para regiões de latitude elevada com o objectivo de aí medirem arcos que se podessem comparar com o da Europa Central. Uma das expedições, enviada para a Patagónia, depois de inúmeras peripécias, ficou impossibilitada de chegar a resultados conclusivos. A outra, enviada para a planície de Lapland, pôde provar ter a Terra uma forma mais próxima dum elipsóide achatado do que dum alongado.

Com a controvérsia acima referida ficou posto um dos problemas fundamentais da geodesia: a determinação do elipsóide que melhor se ajusta à superfície da Terra.

Este problema é duma importância capital pois é sobre uma tal superfície que, na geodesia clássica, se efectuam os cálculos das observações geodésicas. Portanto, estes conduzem a resultados diferentes conforme o elipsóide escolhido, afastando-se tanto mais dos valores observáveis quanto mais diferir a superfície terrestre desse elipsóide. Evidentemente não se pode pensar que toda a massa de observações, feita ou a fazer, possa ser referida automàticamente a um elipsóide satisfatório. Escolhido um, ele é conservado durante o maior tempo possível, já que a mudança de milhares de dados observados, dum elipsóide para outro é uma operação muito dispendiosa. Além disso, não sendo a Terra uma superfície regular, pode haver um elipsóide que se ajuste melhor a uma dada região e que não seja satisfatório para outra.

Fixado um elipsóide de referência, todo o ponto do espaço pode ser determinado pela normal ao elipsóide que passa por ele e pela distância do ponto (afectada dum sinal) a esse elipsóide. Em particular, podem ser referidos a essa superfície todos os pontos da superfície terrestre. Na prática, é porém impossível, duma maneira simples, determinar num ponto da superfície terrestre, a normal a um elipsóide dado. Contudo, sempre que o elipsóide escolhido seja uma boa aproximação da superfície terrestre, a vertical desse lugar é uma linha vizinha da normal referida. É por isso que todas as observações geodésicas são baseadas nessa vertical.

Assim, nas observações astronómicas determinam-se os parâmetros da vertical que passa pelo lugar de observação.

Na triangulação geodésica medem-se rectilíneos de diedros cujas arestas são tangentes a verticais.

No nivelamento geométrico determina-se a equidistência dos planos horizontais (Planos perpendiculares à referida vertical) que passam em lugares vizinhos.

Finalmente nas medições da gravidade determina-se qual a superfície equipotencial (superfície normal às verticais) que passa por um lugar dado.

Desta forma, nas observações geodésicas que referimos, ressalta a importância que tem o campo da gravidade terrestre, já que a vertical dum lugar não é senão a tangente, nesse lugar, à linha de corrente desse campo que passa por ele.

Aparece-nos assim, como segundo objectivo da geodesia, o estudo do campo da gravidade terrestre.

Da determinação das diferentes superfícies equipotenciais e das linhas de corrente desse campo deduz-se uma superfície (a superfície equipotencial de nível zero) que é uma melhor aproximação da superfície terrestre do que o elipsóide. Ela será a superfície que contém a superfície de equilíbrio dos oceanos. Em geodesia dá-se o nome de geoide a uma tal superfície.

Ficam assim definidas em geodesia três superfícies: a superfície terrestre, o geoide e o elipsóide de referência. A geodesia clássica desenvolve-se usando-as alternadamente: as observações são feitas sobre a primeira em relação à segunda e calculadas

sobre a terceira. Das vantagens e inconvenientes dum tal método teremos ocasião de falar no decorrer deste trabalho.

2. A Associação Internacional de Geodesia.

O estudo da figura da Terra não se pode compreender sem observações que abranjam, senão a totalidade, pelo menos uma grande extensão da superfície terrestre. Para a realização de tais observações é fundamental um perfeito acordo entre as nações, não só para que aquelas tenham sensìvelmente a mesma precisão mas, principalmente, para que se possam interligar.

O trabalho de coordenação e de sistematização das observações, bem como a compilação dos estudos àcerca da forma da Terra, tem sido realizado pela Associação Internacional de Geodesia (AIG).

A AIG que tem hoje, pràticamente, representações de todas as nações completou há poucos anos o seu primeiro centenário. Criada com o nome de Associação Geodésica Internacional, funcionou desde 1862 até 1914, altura em que a guerra interrompeu a sua actividade. Tornada a criar em 1922, já com o nome de AIG, a sua actividade tem-se mantido até à actualidade.

Apraz-nos salientar que o bom entendimento entre as secções das diferentes nações permitiu colocar ao serviço da AIG assuntos tais como as coordenadas geográficas de pontos bem definidos, os quais até há bem pouco tempo eram classificados como segredo militar.

A AIG foi primitivamente criada para interligar os países do centro da Europa mas tornou-se ràpidamente uma organização à escala planetária, podendo hoje reenvidicar com orgulho o título da mais antiga organização científica mundial.

A sua actividade foi estructurada numa sequência de congressos:

Em Berlim nos anos de 1864 e de 1867, em Viena (1871), em Dresde (1870), em Stutgart (1877), em Munique (1880), em Roma (1883), novamente em Berlim (1886), em Paris (1889), em Copenhague (1903), em Budapeste (1906), em Cambridge (1909). Com esta reunião terminou a primeira fase da vida desta organização.

Se quisessemos apontar os nomes da alguns geodetas que se distinguiram durante este período três aparecem imediatamente destacados: Gauss, Bessel e Helmert. Porém, numa organização deste tipo, é o trabalho contínuo de observação, sistematização e cálculo que mais convém destacar.

Durante o primeiro período de actividade da organização pode-se apresentar como obra realizada:

A Convenção Internacional do Metro que permitiu uniformizar as unidades de comprimento.

O Serviço Internacional de Latitudes ao qual está entregue a conservação da hora.

A repetição, com precisão muito maior, da observação dos arcos em regiões de latitude elevada, a que já fizemos referência no início deste trabalho.

A medição de diversos arcos de paralelos e de meridianos.

Determinações de desvios da vertical, pesquisas sobre isostasia e sobre marés terrestres, etc.

A seguir à guerra de 1914-1918 voltou a pôr-se a necessidade da Instituição. A mesma foi integrada numa União Geodésica e Geofísica Internacional da qual passou a ser uma das Associações.

Realizaram-se as Assembleias Gerais de Roma (1922), Madrid (1924), Praga (1927), Estocolmo (1930), Lisboa (1933), Edinburgo (1936), Washington (1939), e a seguir à segunda guerra mundial, Oslo (1948), Bruxelas (1951), Roma (1954), Toronto (1957), Helsinquia (1960) e Berkeley (1964).

A estructura da AIG tem evoluído sendo

actualmente formada por cinco secções: determinação geométrica de posições, nivelamento e movimentos dos solos, astronomia geodésica e satélites artificiais, gravimetria e geodesia física.

Para dar uma primeira ideia da problemática da geodesia contemporânea, damos a seguir um apanhado dos principais problemas que são o objecto de cada uma destas secções:

I Secção: Triangulações e trilaterações, poligonais de alta precisão, bases, medições electromagnéticas e ópticas de distâncias, nivelamento trigonométrico, refracção atmosférica, cálculo.

II Secção: Altitudes, definições, nivelamento de precisão, métodos e instrumentos, resultados, precisões e cálculos, movimentos horizontais e verticais do solo.

III Secção. Métodos de observação em astronomia geodésica, variação das latitudes e das longitudes, problemas da hora, utilização geométrica dos satélites artificiais.

IV Secção: Medições absolutas e relativas da gravidade, estabelecimento duma rede gravimétrica mundial homogénia, bases de calibração, estabelecimento de cartas de anomalias da gravidade, utilização prática dos métodos de redução.

V Secção: Desvios da vertical, reduções da gravidade, interpretação física das anomalias da gravidade, determinação do potencial exterior e do campo gravítico terrestre, utilização dinâmica dos satélites artificiais, marés terrestres.

A estruturação da AIG em cinco secções não é suficiente para abordar os diferentes problemas da geodesia moderna. Por isso, sempre que um problema o justifique, é criada uma Comissão Permanente ou, pelo tempo que for julgado necessário, um Grupo Especial de Estudo (que pode eventualmente ser desdobrado em subgrupos) a que ficam adestrictos os membros da AIG a que ele interesse. O problema é estudado por esse grupo duma forma permanente e, quando se justifique, em sessões de trabalho.

A seguir ao congresso de Berkeley as comissões permanentes ficaram a ser:

1.ª Comissão: Nova compensação de conjunto das triangulações europeias. 2.ª Comissão: Estabelecimento duma rede europeia de nivelamento unificada (REUN). 3.ª Comissão: comissão gravimétrica internacional. 4.ª Comissão: marés terrestres. 5.ª Comissão: bibliografiia geodésica. 6.ª Comissão: movimentos recentes da crusta terrestre. 7.ª Comissão: satélites artificiais.

Quanto aos grupos de estudo foram criados os seguintes (indicamos entre parêntesis a secção a que o grupo diz respeito):

GEE 1 (I) Problemas teóricos respeitantes ao cálculo e à compensação das grandes triangulações. GEE 2 (I) Cálculo das redes de SHORAN (e de processos análogos) e das grandes geodésicas. GEE 3 (II) Estudo dos erros sistemáticos dos nivelamentos de precisão por métodos de análise estatística. GEE 4 (III) Estudo crítico dos métodos de astronomia geodésica. GEE 5_1 (IV) Determinações absolutas da gravidade. Ligações entre estações absolutas. Fórmula da gravidade normal. GEE 5_2 Técnica das observações gravimétricas. GEE 6 (IV) Estabelecimento duma base europeia de calibração de gravímetros. Bases de calibração GEE 7 (IV) Sobre a oportunidade da adopção dum sistema único de decomposição em zonas para o cálculo das reduções topográficas (e isostáticas) e para o cálculo dos desvios absolutos da vertical. GEE 8 (V) Reduções das observações gravimétricas com vista à sua utilização na fórmula de STOKES. GEE 9 (III) Emprego em geodesia dos resultados das observações lunares e de satélites artificiais

(eclipses, ocultações, fotografias sobre um campo estelar, etc.). GEE 10 (V) Determinação do geóide europeu pelos desvios relativos da vertical. GEE 11 (V) Interpretação geofísica das anomalias da gravidade. GEE 12 (I) Utilização nos diferentes domínios da geodesia das modernas máquinas de cálculo (máquinas de cartões perfurados, de fita magnética, etc.). GEE 13 (I) Determinação dos movimentos da crusta terrestre (exceptuando o das marés) por todas as medidas susceptíveis de serem realizadas à superfície da Terra. GEE 14 (I) Especificações das precisões requeridas para as triangulações e as trilaterações. Pontos de LAPLACE. Emprego combinado de trilaterações e triangulações. GEE 15 (V) Estudo das secções do geóide que atravessam largas regiões do mar (Creta, Egipto, Canadá, etc.). GEE 16 (V) Estudo prático sobre a aplicação à fórmula de STOKES das anomalias definidas pela teoria de J. DE GRAAF HUNTER. GEE 17 (IV) Resultados obtidos por observação de satélites artificiais acerca do campo da gravidade terrestre. GEE 18 (IV) Métodos para a determinação absoluta da gravidade. GEE 19 (I) Medições electrónicas de distâncias. GEE 20 (IV) Medições da gravidade no mar (em submarinos e em navios). GEE 21 Cálculos numéricos com interesse para as grandes triangulações. GEE 22 (II) Estudo do nível médio dos mares. GEE 23 Estudo da refracção atmosférica. GEE 24 Notações e nomenclatura a usar em geodesia. GEE 25 (III) Observações ópticas de satélites artificiais. GEE 26 (III) Ligações geodésicas por meio de satélites artificiais. GEE 27 (III) Navegação por meio de satélites artificiais. GEE 28 (V) Dinâmica dos satélites artificiais.

Demos uma tão extensa lista de agrupamentos da AIG por nos parecer que assim destacávamos melhor um certo número de problemas da geodesia moderna. Teremos ocasião de nos referir a alguns particularmente.

A Associação Internacional de Geodesia publica uma revista, o «Bulletin Géodésique», ao qual fomos buscar os elementos relativos a esta Associação.

*

Redigidas estas notas em 1965, são publicadas em 1970. Como não notar desactualizações? As palavras com que abriramos estas notas confirmaram-se plenamente. Contudo, quere-nos parecer que o contexto que serviu de base à redacção desta panorâmica da geodesia ainda se mantém o que justifica a sua publicação. Ao fazê-lo, importa assinalar os principais factos que introduzem desactualizações e os principais pontos onde uma influência subjectiva marcada, pode ter conduzido a um erro de apreciação.

Assim, importa assinalar os seguintes factos ocorridos durante este período:

a) A conclusão dos projectos de observação baseados nos satélites ECOS, GEOS e PAGEOS.

b) A introdução dum novo elipsóide internacional de referência: o IAU, 1963.

c) O início dum novo capítulo da geodesia: o estudo da forma da Lua. A este novo capítulo deu-se o nome de selenodesia (*).

d) O início e possível conclusão do projecto SECOR.

Como influência subjectiva, assinalamos a importância excessiva que demos às observa-

(*) Quere-nos parecer que o nome de geodesia lunar teria sido mais apropriado. O que realmente se está a passar neste momento é o facto do objecto da geodesia estar a sofrer uma mutação: de ciência que estuda a forma da Terra tende a transformar-se na ciência que estuda a forma dum Planeta qualquer. Donde se justifica a conservação do nome da ciência mas não o seu conteúdo. Tal como aconteceu à geometria.

ções ópticas de satélites em detrimento das observações baseadas no efeito DOPPLER-FIZEAU. O segundo tipo de observações revela-se de momento mais preciso do que o primeiro.

Como resultado de tal precisão, a geodesia por satélites encontra-se de momento diferenciada em dois sectores. Um, o da «geodesia rica» utiliza satélites activos do tipo GEOS e SECOR. É a geodesia dos Estados Unidos e da União Soviética. O outro, o da «geodesia pobre», utiliza satélites passivos do tipo ECO, PAGEOS ou Diamante. É a geodesia da Europa.

ELEMENTOS DE GEODESIA DINÂMICA

1. Introdução.

Mostramos nos dois últimos capítulos a importância que tinha em geodesia a determinação do potencial do campo da gravidade. Essa determinação fazia-se decompondo o campo da gravidade num campo de gravidade normal e num campo de perturbação. Ao primeiro correspondia um potencial de gravidade normal e ao segundo um potencial de perturbação, T.

A geodesia dinâmica tem por objectivo estudar o campo de gravitação terrestre. Para isso, decompõe este num campo de gravitação normal e num campo de perturbação. Para campo de gravitação normal toma-se um campo de simetria esférica. Em tais condições, o potencial de perturbação é o mesmo usado em geodesia física quando se toma como superfície de referência uma esfera.

Se desenvolvermos o potencial de perturbação em série de LEGENDREANOS, tal como o fizemos nos capítulos anteriores, o problema central da geodesia dinâmica será o da determinação dos coeficientes J_n, J_{nm}, e K_{nm}: Essa determinação faz-se pela análise das perturbações causadas no movimento dos satélites artificiais devido à existência do potencial de perturbação.

Torna-se então necessário separar as perturbações causadas pelo campo de perturbação daquelas devidas a diversos efeitos parasitários. Destes, os mais importantes são o atrito da atmosfera, a atracção do Sol e da Lua e a pressão da radiação solar. Destas perturbações parasitárias as de mais difícil controle são a pressão de radiação e o atrito atmosférico pois dependem grandemente da actividade solar. A fim de minimizar os seus efeitos, são escolhidos satélites cujas órbitas tenham um perigeu não muito pequeno e um apogeu não muito grande, pois a acção da atmosfera faz-se sentir quando o satélite está mais próximo da Terra e a perturbação causada pela pressão de radiação é tanto maior quanto mais afastado está o satélite da Terra. Além disso escolhem-se para estudo satélites pequenos e pesados.

A órbita é escolhida em conformidade com a perturbação a analisar. Para isso procura-se uma órbita que torne máximas as perturbações de interesse geodésico e mínimas as perturbações parasitárias. Em geral, uma dada perturbação não é estudada só relativamente a uma dada órbita. Procuram-se observar satélites em diversas órbitas, com diferentes inclinações (afastadas em geral da inclinação crítica), para se obter uma determinação suficientemente precisa. Um método a usar é o da escolha de satélites onde os harmónicos em estudo criem fenómenos de ressonância.

2. As equações do movimento dum satélite.

As equações do movimento dum satélite artificial sob a acção dum campo criado por um potencial da forma

$$(1) \qquad W = \frac{fM}{r} + T = \frac{fM}{r} \cdot$$

$$\cdot\left(1 + \sum \frac{J_n P_n + \Sigma(J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \operatorname{sen} m\lambda) P_{nm}}{r^n}\right)$$

são mais fàcilmente deduzidas se utilizarmos um sistema de coordenadas esféricas. Com efeito, consideremos um sistema de coordenadas esféricas, com origem no centro de massas do corpo atraente e introduzidas por meio de

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \cos\eta \\ y &= r \cos\theta \operatorname{sen}\eta \,. \\ z &= r \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Será então

$$d s^2 = d x^2 + d y^2 + d z^2 =$$
$$= d r^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \cos^2\theta \, d\eta^2$$

e a força viva do satélite, que supomos de massa m, será

$$(2) \qquad 2T = m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2\theta \, \dot{\eta}^2) \,.$$

Com auxílio das equações de LAGRANGE obtemos para componentes da aceleração da partícula.

$$\gamma_r = \frac{1}{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{m} Q_r$$

$$\gamma_\theta = \frac{1}{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{m r} Q_\theta$$

$$\gamma_\eta = \frac{1}{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial T}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{m r \cos\theta} Q_\eta$$

onde as segundas igualdades são uma consequência de ser o trabalho realizado pelo campo, quando o satélite sofre um deslocamento $d P$, igual a

$$d W = Q_i \, d P^i = Q_r \, d r + Q_\theta \, d\theta + Q_\eta \, d\eta =$$
$$= m \gamma^i \, d P_i = m(\gamma^r d r + \gamma^\theta r \, d\theta + \gamma^\eta r \cos\theta \, d\eta) \,.$$

Com a força viva dada por (2) e o potencial da intensidade de campo dado por (1), as equações do movimento podem ser escritas

$$(3) \quad \gamma^r = r'' - r\theta'^2 - r\cos^2\theta \, \eta'^2 = \frac{\partial W}{\partial r}$$

$$\gamma^\theta = \frac{1}{r}(r^2\theta')' - r\cos\theta \operatorname{sen}\theta \, \eta'^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\gamma^\eta = \frac{1}{r\cos\theta}(r^2\cos^2\theta \, \eta')' = \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial W}{\partial \eta} \,.$$

A decomposição do potencial, no potencial de gravitação normal e no potencial de perturbação T, permite-nos escrever, em vez de (3), as equações com a forma

$$r'' - r\theta'^2 - r\cos^2\theta \, \eta'^2 + \frac{fM}{r^2} = \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r}(r^2\theta')' + r\cos\theta \operatorname{sen}\theta \, \eta'^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{1}{r\cos\theta}(r^2\cos^2\eta')' = \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial \eta} \,.$$

3. O problema dos dois corpos.

Se anularmos os segundos membros do sistema de equações I, obtemos as equações do movimento dum satélite sob a acção do campo de gravitação normal escolhido. É o conhecido problema dos dois corpos, visto o anulamento do segundo membro equivaler a admitir que o corpo atraente tem simetria esférica. As equações I tomam a forma

$$r'' - r\theta'^2 - r\cos^2\theta \, \eta'^2 + \frac{fM}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r}(r^2\theta')' + r\cos\theta \operatorname{sen}\theta \, \eta'^2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{1}{r\cos\theta}(r^2\cos^2\theta \, \eta')' = 0 \,.$$

Adoptamos, ao estabelecer o sistema de equações, um sistema de coordenadas esférico cujo plano de referência era arbitrário. Vamos agora admitir que esse plano contém no instante t_0, não só o ponto material, como ainda é paralelo à velocidade dele no mesmo instante. Por outras palavras, vamos admitir que no instante t_0 é $\eta = \eta' = 0$. Em tais condições, a última das equações II admite o integral primeiro $r^2 \cos^2 \theta \, \eta' = k$ que se reduz a $\eta' = 0$. Com uma segunda integração resultará $\eta = k_1 = 0$. Vemos que a trajectória do ponto material é uma curva plana que está agora contida no plano de referência. Em tais condições o sistema II toma a forma mais simples

$$(2) \qquad r'' - r\,\theta'^2 + \frac{fM}{r^2} = 0$$

$$(r^2 \theta')' = 0 .$$

A segunda equação dá origem ao integral primeiro

$$(3) \qquad \frac{1}{2} r^2 \theta' = k$$

que exprime que a velocidade areolar é constante. A eliminação do tempo entre a primeira das equações (2) e (3) dá-nos uma nova equação que determina a trajectória. Seja $1/r = u = f(\theta)$ a sua solução. Será então

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} \theta' = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{2k}{r^2} \cdot \frac{du}{d\theta} =$$

$$= -2k \frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -2k \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \theta' = -4k^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

e, portanto, essa equação escrever-se-á

$$(4) \qquad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u - m = 0$$

em que $m = \dfrac{fM}{4k^2}$. Esta equação tem uma solução da forma $u - m = k \cos(\theta - \theta_0)$ o que mostra que a trajectória, visto não ter pontos impróprios, é uma elipse. Escrevemos a solução de (4) com a forma

$$(5) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{a(1 - e^2)} = \frac{1 + e \cos \theta}{a(1 - e^2)} .$$

A integração do sistema II leva ao aparecimento de seis constantes. A forma como eliminamos η, mostra-nos que duas das constantes deverão determinar o plano da trajectória. Duas outras determinam a forma da elipse (5) descrita pelo satélite. Finalmente, as duas restantes são necessárias para determinar o movimento do satélite na sua órbita. Tomaremos, para definir a órbita descrita pelo ponto, o semi-eixo maior, a, e a excentrícidade, e. O plano da órbita ficará definido pelo conhecimento da sua inclinação, i sobre o plano de referência XOY e ainda pelo conhecimento dum seu ponto nesse plano. Chamamos nodo ascendente o ponto em que o satélite passa do hemisfério Sul para o hemisfério Norte. A outra constante a ser introduzida é a ascensão recta (ou a longitude) do nodo ascendente, Ω. Por fim, para determinar o movimento do astro, introduzimos o instante, τ, em que ele passa mais próximo do corpo atraente (Instante da passagem no periastro) e o argumento do periastro, ω, que é o arco da órbita compreendido entre o nodo ascendente e o periastro. A estas constantes a, i, ω, Ω, τ, dá-se o nome de constantes elípticas.

Para acabar de resolver o problema dos dois corpos, torna-se necessário fazer ainda a integração de (3). Para a fazermos, vamos introduzir a variável auxiliar E dada por

$$(6) \qquad r = a(1 - e \cos E) .$$

Será

$$1 - e^2 = (1 + e\cos v)\cdot(1 - e\cos E)$$

e portanto

$$(7) \qquad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E},$$

$$\operatorname{sen} v = \frac{\sqrt{1-e^2}\operatorname{sen} E}{1 - e\cos E}$$

ou, o que é equivalente,

$$(8) \qquad \operatorname{tg}^2\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{1+\cos v} = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}.$$

Finalmente, derivando (7), teremos

$$\operatorname{sen} v\,\frac{dv}{dE} = \frac{(1-e^2)\operatorname{sen} E}{(1-e\cos E)^2}$$

ou seja

$$(9) \qquad \frac{dv}{dE} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}.$$

Utilizando esta relação e (6) para fazer uma mudança de variável em (3), somos conduzidos a

$$(10) \quad r^2\frac{dv}{dt} = 2k = a^2\sqrt{1-e^2}\,(1-e\cos E)\frac{dE}{dt}$$

Introduzindo a constante auxiliar

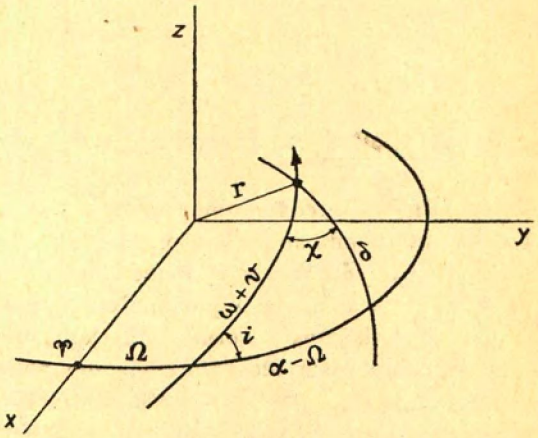
$$n = \frac{2k}{a^2\sqrt{1-e^2}}$$

e fazendo a integração temos

$$(11) \qquad E - e\operatorname{sen} E = n(t-\tau).$$

A posição do corpo atraído será então determinada por meio de

$$M = n(t-\tau)$$
$$E = e\operatorname{sen} E = M$$
$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} \qquad \text{(III)}$$
$$r = a(1 - e\cos E)$$
$$\operatorname{tg}(\alpha - \Omega) = \cos i\operatorname{tg}(\omega + v)$$
$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen} i\operatorname{sen}(\omega + v).$$



Usando (6), (9) e (10) vemos que

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{n^2a^2}{r^2}(a^2 - a^2e^2\cos^2 E).$$

Usando novamente (6) podemos formar a constante das forças vivas

$$h = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right] -$$
$$-\frac{fM}{r} = -\frac{n^2a^2}{2} + \frac{n^2a^5 - fM}{r}$$

o que mostra ser

$$(12) \qquad 2h = -n^2a^2 \qquad n^2a^5 = fM.$$

Finalmente, a partir de (10), vemos que o momento cinético da unidade de massa, constantemente normal ao plano da orbita, tem

a grandeza

$$(13)\quad r^2 \frac{dv}{dt} = n a^2 \sqrt{1-e^2} = \sqrt{f M a (1-e^2)}.$$

As suas coordenadas no referencial celeste que introduzimos anteriormente, serão

$$\sqrt{f M a (1-e^2)}\,\text{sen}\, i\, \text{sen}\, \Omega\,,$$

$$\sqrt{f M a (1-e^2)}\,\text{sen}\, i \cos \Omega\,,\ \sqrt{f M a (1-e^2)} \cos i.$$

4. A análise das perturbações.

Mostrámos já como obter as equações de LAGRANGE quando se toma como coordenadas esféricas r, α, δ. Isto é tomámos como plano de referência o plano equatorial. Porém, o método que usámos é geral: poderíamos ter tomado como plano de referência um plano qualquer. As equações das perturbações simplificam-se grandemente quando se toma para plano de referência o plano da orbita no instante t. Com efeito, nesse caso, o momento de inércia é normal ao plano de referência. Em vez de α usamos v. Podemos decompôr a força perturbadora numa componente radial, R, numa componente transversa, T (situada no plano da órbita) e numa componente bitransversa, B (Perpendicular ao plano da órbita). Em tais condições as equações de LAGRANGE são:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [e\,\text{sen}\, v\, R + (1 + e \cos v)\, T]$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a} [\text{sen}\, v\, R + (\cos v + \cos E)\, T]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a} \frac{\cos(\omega + v)}{1 + e \cos v} B$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a\, \text{sen}\, i} \frac{\text{sen}(\omega + v)}{1 + e \cos v} B \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a e} \Big[-\cos v\, R + \\ + \text{sen}\, v \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos v}\right) T \Big]$$

$$\frac{d\tau}{dt} - \frac{1}{n}\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt}\right) = \frac{1}{n^2 a} \\ \Big[\frac{2(1-e^2)\,\text{sen}\, E - 3 n e\, \text{sen}^2 v\, (t-\tau)}{(1 + e \cos v)\,\text{sen}\, E} R - \\ - \frac{3\,\text{sen}\, v}{\text{sen}\, E} n (t - \tau)\, T \Big].$$

Como em I a força perturbadora é dada pelas suas componentes radial $\left(R = \frac{\partial T}{\partial r}\right)$, meridiana $\left(M = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \delta}\right)$ e perpendicular $\left(P = \frac{1}{r\,\text{sen}\,\delta} \frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)$ será

$$(1)\quad \begin{aligned} R &= R \\ T &= M \cos \chi + P\, \text{sen}\, \chi \\ B &= M\, \text{sen}\, \chi - P \cos \chi \end{aligned}$$

em que χ é o ângulo que o plano meridiano que contem o satélite faz com o plano da órbita. Pela figura da página 95 vemos que

$$(2)\quad \begin{aligned} \cos i &= \cos \delta\, \text{sen}\, \chi \\ \text{sen}\, i \cos(\omega + v) &= \cos \delta \cos \chi \\ \text{sen}\, i\, \text{sen}(\omega + v) &= \text{sen}\, \delta\,. \end{aligned}$$

KING-HELE toma em primeira aproximação $P = 0$. Corresponde isso a considerar o corpo atraente como sendo de revolução. Uma tal aproximação, porém, só pode ser válida quando a inclinação da órbita não for pequena. Para pequenos valores de i, o factor que multiplica $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$ é grande e portanto P toma valores consideráveis. Isso mostra-nos que se devem usar satélites com órbitas de pequena inclinação quando se desejam determinar os harmónicos em xadrez.

Uma variante das equações de LAGRANGE quando, como no caso presente, as forças de perturbação derivam dum potencial T, é

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{n^2 a}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e}\frac{\partial T}{\partial \omega} - \frac{1-e^2}{n^2 a^2 e}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sen}\, i}\frac{\partial T}{\partial \Omega} - \frac{\mathrm{tg}\frac{i}{2}}{n a^2 \sqrt{1-e^2}}\frac{\partial T}{\partial \omega} \qquad \text{(V)}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sen}\, i}\frac{\partial T}{\partial i}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e}\frac{\partial T}{\partial e} + \frac{\mathrm{tg}\frac{i}{2}}{n a^2 \sqrt{1-e^2}}\frac{\partial T}{\partial i}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{2}{n^2 a}\frac{\partial T}{\partial a} + \frac{1-e^2}{n^2 a^2 e}\frac{\partial T}{\partial e}.$$

Vários outros sistemas equivalentes têm sido usados. Entre eles destaca-se o obtido por DELAUNAY para o estudo do movimento lunar. Em todos esses sistemas, bem como nos que já referimos, torna-se necessário exprimir o segundo membro em função dos elementos elípticos e do tempo.

As perturbações a estudar são decompostas como habitualmente, em perturbações periódicas e seculares. No estudo das perturbações seculares não é necessário entrar em consideração com os coeficientes J_{nm} e $K_{n'm}$ pois, a existência do movimento de rotação da Terra, é suficiente para fazer com que as perturbações correspondentes sejam periódicas.

O potencial de perturbação causa perturbações mais sensiveis no movimento do perigeu e do nodo ascendente. Daí, utilizarem-se quase exclusivamente, as equações em Ω e ω para o estudo do potencial terrestre. A introdução dos elementos da órbita nas equações das perturbações permite dar às equações das perturbações seculares a forma

$$\frac{d\Omega}{dt} = \Sigma c_n J_n + \Sigma c_{nm} J_n J_m$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \Sigma d_n J_n + \Sigma d_{nm} J_n J_m \qquad (3)$$

em que os coeficientes c_n, c_{nm}, d_n e d_{nm} são funções dos elementos elípticos. Assim, por exemplo, KING-HELE (considerando só quantidades até à ordem de J_2^2) obtém

$$\frac{d\Omega}{dt} = n\left(\frac{1}{1-e^2}\right)^2 \cos i\left[\frac{3}{2}J_2 + \frac{9}{4}J_2^2\left(\frac{1}{1-e^2}\right)\left(\frac{19}{12}\mathrm{sen}^2 i - 1\right) + \frac{15}{16}J_4\left(\frac{1}{1+e^2}\right)^2 (y\,\mathrm{sen}^2 i - 4)\right] \qquad (4)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4}n\left(\frac{1}{1-e^2}\right)^2 J_2 (5\cos^2 i - 1).$$

A segunda destas equações mostra-nos a importância que têm as órbitas com a inclinação $i = 63{,}4^\circ$ para as quais $5\cos^2 i = 1$. É de notar que um grande número de satélites soviéticos têm uma inclinação próxima. Isso permite diminuir as perturbações causadas por J_2 no movimento do perigeu.

A utilização de (3), calculado para diferentes satélites em órbitas distintas, e com inclinações variadas, permite, depois de determinado $\frac{d\Omega}{dt}$ por observações determinar os coeficientes J_n. KING-HELE, por exemplo, faz uma determinação simultânea de J_2, J_4 e J_6 usando o Sputnik 2 ($i = 65^0$), o Vanguard 1 ($i = 34^0$) e o Explorer 4 ($i = 50^0$).

Em 1963 melhora o resultado obtido pelo estudo do movimento do nodo de sete satélites com inclinações variando de 28,8° até 97,4°. KOZAI em 1962 utiliza igualmente sete satélites mas com um número menor de órbitas.

Breve análise dos resultados obtidos.

Foram já realizadas várias determinações dos coeficientes J_n. Assim, dos valores comunicados ao congresso de Berkeley, destacamos os de KING-HELE e KOSAI a que já fizemos referência.

Ambas as determinações foram feitas pelo estudo do movimento secular do nodo ascendente. Os valores obtidos foram:

(Entre parêntesis indicam-se as precisões obtidas)

	$J_2.10^6$	$J_4.10^6$	$J_6.10^6$	$J_8.10^6$	$J_{10}.10^6$	$J_{12}.10^6$
KOSAI						
	+1082.48	−1.84	+0.39	+0.002		
	(0.04)	(0.09)	(0.09)	(0.07)		
KING-HELE						
	+1082 86	−1.03	+0.72	+0.34	−0.50	+0.44
	(0.1)	(0.2)	(0.2)	(0.2)	(0.2)	(0.2)

Os coeficientes de ordem ímpar foram estudados por meio das variações periódicas do perigeu, da excentricidade, da inclinação e do nodo ascendente. KOSAI dá-nos os valores

$J_3.10^6$	$J_5.10^6$	$J_7.10^6$	$J_9.10^6$
−2.562	−0.064	−0.470	−0.117
(0.007)	(0.007)	(0.010)	(0.011)

Estes resultados melhoram muito os que tinham sido obtidos por métodos gravimétricos. Com efeito JEFFREYS tinha chegado aos valores:

$$J_2 = (+1093 \pm 5).10^{-6}, \quad J_3 = (-0.4 \pm 2.8).10^{-6}$$

$$J_4 = (-2.2 \pm 2.1).10^{-6}$$

valores estes que são de muito menor precisão.

Poderá supor-se, pelos valores dados, que os métodos da geodesia dinâmica vêm substituir, com vantagem, os métodos da gravimetria. Isso só em parte é verdade. Com efeito, a observação de satélites permite determinar, com uma muito grande precisão, os harmónicos de ordem inferior. A precisão com que se fazem estas determinações vai diminuindo à medida que a ordem dos harmónicos vai aumentando. Pelo contrário, a precisão com que se fazem as determinações pelos métodos gravimétricos é independente da ordem dos harmónicos. Além disso, certamente essa precisão melhorará à medida que forem aumentando o número de observações gravimétricas realizadas. Desta forma, é de esperar que os métodos gravimétricos e os métodos da geodesia dinâmica se completem harmoniosamente para, conjuntamente, determinarem o potencial terrestre.

5. Conclusão.

Ao apresentar os diferentes métodos usados para determinar a forma da Terra, procuramos mostrar os problemas ligados a cada um. Para isso tivemos que os estudar separadamente desarticulando em parte a ciência geodésica. Na verdade esta, para fazer esse estudo, não recorre alternadamente a um e outro método mas, bem ao contrário, procura utilizá-los simultâneamente.

Já demos alguns exemplos da colaboração existente entre os diferentes métodos utilizados. Assim, vimos como o conceito de cota geopotencial era obtido a partir do nivelamento e da gravimetria. Vimos igualmente, no fim do parágrafo anterior, que o potencial terrestre era determinado pela colaboração da gravimetria e da geodesia dinâmica. Outros exemplos de trabalho conjunto dos diferentes ramos da geodesia podem ser apresentados.