MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência (1.ª chamada) — 14-3-1969.

I

5706 — 1) A partir da axiomática de corpo prove que, para qualquer corpo K,

a) $0 = -0$

b) $a \cdot b = a \cdot c \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$

c) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$.

2) Demonstre que o lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que

$$\forall \lambda \in R \text{ e } z_1, z_2 \in C \ \frac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda$$

é a recta corrente pelas imagens de z_1 e z_2.

R.: 1) a) *Como* $0 + 0 = 0$ *resulta logo* $0 = -0$.

b) *Como* $a \neq 0$ *existe* a^{-1} *e então de* $a \cdot b = a \cdot c$ *conclui-se que* $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$ *ou* $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$. *Dado que* $a^{-1} \cdot a = 1$, *vem finalmente* $1 \cdot b = 1 \cdot c$ *ou* $b = c$.

c) *Supondo, por exemplo,* $b \neq 0$, *vem de* $a \cdot b = 0$ *a relação* $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0$, *ou* $a \cdot 1 = 0$, *donde* $a = 0$. Mutatis mutandis *para* $a \neq 0$.

2) *Fazendo* $z = x + iy$, $z_1 = a + bi$ *e* $z_2 = c + di$, *a relação* $\dfrac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda$ *pode escrever-se na forma*

$$\frac{(x - a) + (y - b)i}{(x - c) + (y - d)i} = \lambda,$$

ou

$$(x - a) + (y - b)i = \lambda[(x - c) + (y - d)i].$$

Vem então $\begin{cases} x - a = \lambda(x - c) \\ y - b = \lambda(y - d) \end{cases}$ *e, eliminando* λ, *vem* $\dfrac{x - a}{y - b} = \dfrac{x - c}{y - d}$ *que é a equação da recta que passa pelos pontos* (a, b) *e* (c, d).

II

5707 — 1) Seja

$$X = \{x : x = (-1)^n + 1/m \quad (m, n = 1, 2, \cdots)\}.$$

Justificando as respostas, indique os seguintes conjuntos: $\operatorname{int} X$, $\operatorname{ext} X$, $\operatorname{front} X$ e derivado de X. Indique também $\sup X$ e $\inf X$. O conjunto X é fechado? É aberto? Porquê?

2) Seja u_n o termo geral de uma sucessão que possui a propriedade seguinte: existe um número natural m e um número real k $(0 < k < 1)$ tais que, para todo o número natural $n \geqq m$, é $|u_{n+1}| \leqq k|u_n|$. Mostre que $\lim u_n = 0$.

Calcule $\lim \left(\sqrt[9]{1 + \dfrac{n^2}{e^n}} - 1\right) \dfrac{n}{\log n}$.

R.: 1) $\mathit{int}\, X = \emptyset$

$\mathit{ext}\, X = R - (X \cup \{-1, 1\})$

$\mathit{front}\, X = X \cup \{-1, 1\}$

$X' = \{-1, 1\}$

$\sup X = 2$

$\inf X = -1$.

O conjunto X *não é fechado porque não contém o seu derivado e também não é aberto porque* $X \neq \mathit{int}\, X$.

2) *De*

$$|u_{m+1}| \leqq k|u_m|$$
$$|u_{m+2}| \leqq k|u_{m+1}|$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|u_{m+p}| \leqq k|u_{m+p-1}|,$$

vem

$$|u_{m+p}| \leqq k^p |u_m|, \text{ ou } |u_n| \leqq k^{n-m}|u_m| \ (n = m + p).$$

Como $k^{n-m} \to 0$, *resulta imediatamente* $\lim u_n = 0$.

Notando que

$$\sqrt[9]{1 + \frac{n^2}{e^n}} - 1 = \frac{1}{9}\zeta\frac{n^2}{e^n} \ (\zeta \to 1),$$

vem

$$\lim \left(\sqrt[9]{1+\frac{n^2}{e^n}}-1\right)\frac{n}{\log n}=$$

$$=\frac{1}{9}\lim \zeta \frac{n^3}{e^n}\cdot\frac{1}{\log n}=0.$$

III

5708 — 1) Admitindo que Σu_n converge absolutamente, e tendo em conta a evanescência do termo geral, demonstre que cada uma das séries seguintes também converge absolutamente:

$$a)\ \Sigma u_n^2 \quad b)\ \Sigma \frac{u_n}{1+u_n}\ (u_n \neq -1) \quad c)\ \Sigma \frac{u_n^2}{1+u_n^2}.$$

2) Supondo que $\lim\limits_{x=a} f(x)=A$ e que $f(x)>0$ em certa vizinhança do ponto a, prove que $A \geqq 0$. Utilize esta proposição para demonstrar que, sendo $\lim\limits_{x=a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x=a} g(x)=B$ e $f(x)<g(x)$ em certa vizinhança do ponto a, então $A \leqq B$.

R.: 1) a) $\lim \frac{u_n^2}{|u_n|}=0$, *isto é, a partir de certa ordem é* $\frac{u_n^2}{|u_n|}<\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ *ou* $u_n^2<\varepsilon|u_n|$. *Como* $\Sigma\,\varepsilon|u_n|$ *converge, também converge (absolutamente)* Σu_n^2.

b) $\lim \left|\frac{u_n}{1+u_n}\right| / |u_n| = 1$ *o que implica que a série* $\Sigma \left|\frac{u_n}{1+u_n}\right|$ *é convergente.*

c) $\lim \frac{u_n^2}{1+u_n^2} / u_n^2 = 1$ *e portanto, atendendo à alínea* a), *pode garantir-se que* $\Sigma \frac{u_n^2}{1+u_n^2}$ *converge (absolutamente).*

2) *Supondo* A *finito, se pudesse ser* $A<0$, *então, escolhido* $\delta<0$ *tal que* $A+\delta<0$, *existiria* $\varepsilon>0$ *tal que* $x \in \bigvee_\varepsilon (a) \wedge x \neq a \Rightarrow A-\delta<f(x)<A+\delta<0$ *e já não poderia ter-se* $f(x)>0$ *numa vizinhança do ponto* a. *Idêntico raciocínio para* A *infinito.*

A segunda parte tira-se imediatamente desta proposição, notando que $g(x)-f(x)>0$ *em certa vizinhança do ponto* a *e que* $\lim\limits_{x=a}[g(x)-f(x)]=B-A$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência (2.ª chamada) — 22-3-1969.

I

5709 — 1) A partir da axiomática de corpo prove que, em qualquer corpo K, são satisfeitas as propriedades seguintes:

a) Se $a \neq 0$ então $a \cdot c = b$ se e só se $c = a^{-1} \cdot b$.
b) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
c) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

2) Designando x e y números reais, demonstre que
a) $x>0 \wedge y>0 \Rightarrow x+y>0 \wedge x \cdot y>0$.
b) $x<0 \wedge y>0 \Rightarrow x \cdot y<0$.

R.: 1) a) *Se* $a \neq 0$ *existe* a^{-1} *e, de acordo com a relação* $a \cdot c = b$, *vem* $a^{-1} \cdot (a \cdot c) = a^{-1} \cdot b$ *ou* $c = a^{-1} \cdot b$. *Recìprocamente, de* $c = a^{-1} \cdot b$ *vem* $a \cdot c = a \cdot (a^{-1} \cdot b)$ *ou* $a \cdot c = b$.

b) *Notando que* $a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, *tem-se* $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

c) *Basta observar que*

$$0 = a \cdot 0 = a \cdot [b + (-b)] = a \cdot b + a \cdot (-b).$$

Desta relação se tira que $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. *Anàlogamente se conclui que* $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

2) a) *Sendo* $x = [X_1, X_2]$ *e* $y = [Y_1, Y_2]$, *tem-se*

$$x>0 \Leftrightarrow 0 \in X_1$$
$$y>0 \Leftrightarrow 0 \in Y_1.$$

Ora $0 \in X_1 \wedge 0 \in Y_1 \Rightarrow 0 \in X_1 + Y_1$ *o que prova que* $x+y>0$. *Designando* $X_1 Y_1$ *o conjunto dos produtos inferiores* $x_1 y_1\ (x_1>0 \wedge y_1>0)$ *é também evidente que a secção inferior de* xy *contém* 0 *e portanto* $xy>0$.

b) *Sendo* $x<0$ *é fácil mostrar que* $-x>0$ *e, por definição, vem* $xy = -[(-x)y]$. *O resultado anterior assegura que* $(-x)y>0$ *e portanto* $xy<0$.

II

5710 — 1) Sendo $A = \{a : a = (-1)^n (1+2/n)^n\ (n = 1, 2, \cdots)\}$ e $B = [-10, 1]$, indique, justificando as respostas, o derivado de $A \cup B$, o fecho de $A \cup B$, $\operatorname{int}(A \cup B)$, $\operatorname{front}(A \cup B)$, $\sup(A \cup B)$ e $\inf(A \cup B)$.

2) Seja u_n o termo geral de uma sucessão limitada que não possui um termo superior a todos os outros. Prove que $\sup(u_n) = \overline{\lim}\, u_n$. Verifique a proposição com $u_n = (-1)^n (1-1/n)$.

Determine a e b, sabendo que $a+b=1$ e que $\lim n\left(e^{a/n}-\frac{b}{n}-1\right)=2$.

R.: 1) $(A\cup B)'=[-10,1]\cup\{e^2\}$.

$\overline{A\cup B}=[-10,1]\cup$

$$\cup\left\{a:a=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\ (n=2,4,6,\cdots)\right\}\cup\{e^2\}.$$

int $(A\cup B)=]-10,1[$.

front $(A\cup B)=\{-10,1,\ a=(-1)^n(1+2/n)^n$ $(n=1,2,\cdots),e^2\}$.

sup $(A\cup B)=e^2$.

inf $(A\cup B)=-10$.

2) *Como a sucessão é limitada e não possui um termo superior a todos os outros, pode garantir-se que* (u_n) *tem supremo finito e esse supremo terá de ser ponto de acumulação de* (u_n) *não pertencente a* (u_n). *Tal ponto de acumulação será o maior dos sublimites e portanto* $\overline{lim}\,u_n$.

A sucessão $u_n=(-1)^n(1-1/n)$ *é limitada* $(|u_n|<1)$ *e não possui um termo superior a todos os outros. O sup* $(u_n)=1$ *e* 1 *é* $\overline{lim}\,u_n$ *pois* $u_{2n}\to 1$ *e* $u_{2n-1}\to -1$. *Notando que*

$$lim\ n\left(e^{a/n}-\frac{b}{n}-1\right)=lim\ n\left(\xi\frac{a}{n}-\frac{b}{n}\right)=$$
$$=lim\,(\xi a-b)=a-b,$$

vem $a-b=2$ *que, juntamente com a condição* $a+b=1$, *dá* $a=3/2$ *e* $b=-1/2$.

III

5711 — 1) Mostre que as séries de potências $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma n a_n x^{n-1}$ e $\Sigma\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ possuem o mesmo intervalo de convergência absoluta $]-\lambda,\lambda[$. Tome $a_n=1/n$ para justificar que as três séries podem apresentar comportamentos diferentes para $x=\pm\lambda$.

2) Considere a função real de variável real

$$x\to f(x)=\lim_{n=\infty}\frac{x^n+2}{x^{n+1}+x^n+1}.$$

Mostre que ela também pode ser definida do modo seguinte:

$$x\to f(x)=\begin{cases}1/x+1 & (x<-1)\\ 2 & (-1<x<1)\\ 1 & (x=1)\\ 1/x+1 & (x>1),\end{cases}$$

A função é contínua para $x=1$? Porquê?

R.: 1) *As três séries possuem o mesmo intervalo de convergência absoluta porque*

$$\overline{lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}=\overline{lim}\ \sqrt[n]{(n+1)\,|a_{n+1}|}=\overline{lim}\ \sqrt[n]{|a_{n-1}|/n}.$$

Tomando $a_n=1/n$ *obtêm-se as séries* $\Sigma\frac{x^n}{n}$, Σx^{n-1} *e* $\Sigma\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ *para as quais o intervalo de convergência absoluta é* $]-1,1[$. *No entanto,* $\Sigma\frac{x^n}{n}$ *diverge para* $x=1$ *e converge para* $x=-1$; Σx^{n-1} *diverge para* $x=\pm1$; *e* $\Sigma\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ *converge para* $x=\pm1$.

2) *Com* $|x|>1$ *vem*

$$\lim_{n=\infty}\frac{x^n+2}{x^{n+1}+x^n+1}=\lim_{n=\infty}\frac{1+2/x^n}{x+1+1/x^n}=\frac{1}{x+1}.$$

Para $|x|<1$ *é* $\lim_{n=\infty}\frac{x^n+2}{x^{n+1}+x^n+1}=2$ *e* $f(1)=1$.

Para $x=-1$ *a função não é definida porque não existe* $\lim_{n=\infty}\frac{(-1)^n+2}{(-1)^{n+1}+(-1)^n+1}=\lim_{n=\infty}[(-1)^n+2]$.

A função não é contínua em $x=1$ *porque não existe* $\lim_{x=1}f(x)$. *De facto,* $f(1-0)=2$ *e* $f(1+0)=1/2$.

A função não apresenta continuidade lateral no ponto $x=1$ *porque* $f(1-0)\neq f(1+0)\neq f(1)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência — 1.ª chamada — Duração — 3 horas — 14-6-1969.

I

5712 — 1) Utilize a identidade $2\max(f,g)=|f-g|+f+g$ para demonstrar que, sendo f e g funções contínuas para $x=a$, também $\max(f,g)$ é função contínua para $x=a$. Mostre também que $\min(f,g)$ é contínua para $x=a$.

Estude a continuidade e extreme a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2\ (1\leq x<2)\\ 5\ (x=2)\\ -x\ (2<x\leq 3).\end{cases}$$

Indique os extremos absolutos (caso existam) e relativos. Justifique as respostas.

R.: *Basta notar que* $|f-g|$ *e* $f+g$ *são funções contínuas para* $x=a$. *Para a segunda parte observe-se que* $\min(f,g) = -\max(-f,-g)$.

A função $f(x)$ *é contínua em* $[1,2[\cup]2,3]$ *e descontínua para* $x=2$. *Tem-se*

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & (1\leqq x<2) \\ \pm\infty & (x=2) \\ -1 & (2<x\leqq 3)\end{cases}$$

o que permite concluir que os mínimos locais são $f(1)=1$ e $f(3)=-3$, *e o máximo local é* $f(2)=5$. *É claro que o máximo absoluto é* $f(2)=5$ *e o mínimo absoluto é* $f(3)=-3$.

2) Supondo que f admite primeira e segunda derivada em $[a,b]$ e que são cumpridas as condições $f(a)=f(b)=0$ e $f(c)>0$ $(a<c<b)$, demonstre que $\exists\,\xi\in\,]a,b[\,: f''(\xi)<0$.

R.: *A função* f *é regular. A aplicação do teorema de Lagrange dá*

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(c_1)>0 \quad (a<c_1<c)$$

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(c_2)<0 \quad (c<c_2<b)$$

$$\frac{f'(c_2)-f'(c_1)}{c_2-c_1}=f''(\xi)<0 \quad (c_1<\xi<c_2)$$

o que prova a proposição.

3) Prove que o desenvolvimento em série de Mac-Laurin de $y=\dfrac{1}{(1-k^2x^2)^2}$ $(k>0)$ é

$$\sum_0^\infty (n+1)\,k^{2n}\,x^{2n}$$

para $|x|<1/k$.

R.: *A fórmula do binómio dá, para* $|x|<1/k$,

$$(1-k^2x^2)^{-2}=$$

$$=\sum_0^\infty \frac{-2(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-k^2x^2)^n$$

$$=\sum_0^\infty \frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!}\,k^{2n}\,x^{2n}$$

$$=\sum_0^\infty (n+1)\,k^{2n}\,x^{2n}.$$

4) Calcule $P\dfrac{1}{2+\cos x}$.

R.: *Fazendo a substituição* $tg\dfrac{x}{2}=t$, *vem*

$$P\frac{1+2\cos x}{1}=P\frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}=$$

$$=2P\frac{1}{3+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,P\frac{1\sqrt{3}}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{tg\dfrac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

II

5713 — 1) Seja dada $A=[a_{ij}]\,(m\times n)$ e considerem-se as somas por colunas $\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$ $(j=1,2,\cdots,n)$. Define-se o módulo de A, $M(A)$, como

$$\max_j\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| \quad (j=1,2,\cdots,n)\right\}.$$

Prove que

a) $M(I)=1$.

b) $M(\lambda A)=|\lambda|\,M(A)$ para qualquer escalar λ.

c) $M(A+B)\leqq M(A)+M(B)$.

R.: a) *Para a matriz identidade* I *tem-se*

$$\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|=1,\ \forall j.$$

Logo é $M(I)=1$.

b) *Como* $\lambda A=[\lambda a_{ij}]$ *e*

$$\sum_{i=1}^{m}|\lambda a_{ij}|=|\lambda|\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|,$$

tem-se imediatamente o resultado.

c) *Com* $A=[a_{ij}]$ *e* $B=[b_{ij}]$ *é* $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$ *e* $\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}+b_{ij}|\leqq\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|+\sum_{i=1}^{m}|b_{ij}|$, *relação que conduz fàcilmente ao resultado.*

2) Utilize a teoria dos determinantes para calcular os valores de a e b por forma que os sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = b \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 + a\,x_2 = b \\ x_1 + x_3 = b \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

sejam equivalentes. Mostre que para esses valores de a e b os sistemas são ambos possíveis determinados e ache a solução comum.

R.: *O primeiro sistema é possível determinado porque* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

A sua solução vem dada pela regra de Cramer:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - b$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = b - 1$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 1 .$$

Para que o segundo sistema também seja possível determinado é preciso que $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a + 1 \neq 0$ *ou* $a \neq -1$. *E, para que seja equivalente ao primeiro, a sua solução terá de ser* $x_1 = 3 - b$, $x_2 = b - 1$ *e* $x_3 = 1$, *isto é,*

$$\begin{cases} 3 - b + a\,(b - 1) = b \\ 3 - b + 1 = b \\ 3 - b - (b - 1) = 0 \end{cases}$$

sistema que dá $a = 1$ *e* $b = 2$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência — 2.ª chamada — Duração — 3 horas — 20-6-1969.

I

5714 — 1) Seja f contínua em $[a, b]$ e admita que x_1 e x_2 são maximizantes (minimizantes) de f que se supõe não constante entre x_1 e x_2. Prove, utilizando o teorema de Weierstrass, que existe um minimizante (maximizante) de f entre x_1 e x_2.

Indique, justificando, os pontos (próprios e impróprios) de continuidade) e de descontinuidade de $x \to f(x) = x\,e^{1/x}$.

R.: *Suponha-se que* $f(x_1)$ e $f(x_2)$ *são dois máximos de* $f(x)$. *Como* $f(x)$ *não é constante entre* x_1 *e* x_2, *seja* $f(x_3)$ *o mínimo absoluto em* $[x_1, x_2]$ *cuja existência é garantida pelo teorema de* Weierstrass. *Se* x_3 *não pertence a qualquer secção de invariabilidade,* $f(x_3)$ *é mínimo e não é máximo; se* x_3 *pertence a uma tal secção algum dos extremos desta cai entre* x_1 *e* x_2 *e ainda em tal ponto* $f(x)$ *tem ùnicamente mínimo.* Mutatis mutandis *para o caso de* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *serem dois mínimos.*

A função $x \to f(x)$ *é contínua em todos os pontos de* R *excepto* $x = -\infty$, $x = 0$, $x = +\infty$.

2) Utilize a função auxiliar definida por $g(x) = [f(x) - f(a)](x - b)$ para demonstrar que, sendo f regular em $[a, b]$, então $\exists\, c \in]a, b[$:

$$\frac{f(c) - f(a)}{b - c} = f'(c) .$$

R.: *A função* $g(x)$ *é regular e, como* $g(a) = g(b) = 0$, *o teorema de* Rolle *garante que* $g'(x) = f'(x)(x - b) + [f(x) - f(a)]$ *se anula para* $x = c$ $(a < c < b)$. *Então* $f'(c)(c - b) + [f(c) - f(a)] = 0$, *o que prova o teorema.*

3) Sabendo que $x \to f(x) = k\,x - \dfrac{x^3}{1 + x^2}$ é crescente $\forall\, x \in R$, mostre que $k \geqq 9/8$.

R.: $f'(x) = K - \dfrac{x^4 + 3\,x^2}{(1 + x^2)^2} \geqq 0, \forall\, x \in R$.

Tomando $g(x) = \dfrac{x^4 + 3\,x^2}{(1 + x^2)^3}$, *o seu máximo terá de ser inferior ou igual a* k: *Ora*

$$g'(x) = \frac{-2\,x^3 + 6\,x}{(1 + x^2)^3}$$

e $g'(0) = g'(\pm\sqrt{3}) = 0$. *Não é difícil reconhecer que* $\pm\sqrt{3}$ *são maximizantes e* $g(\pm\sqrt{3}) = 9/8$. *Logo,* $k \geqq 9/8$.

4) Calcule $P\,\dfrac{e^x\,(1 + x \log x)}{x}$.

R.: $P\,\dfrac{e^x\,(1 + x \log x)}{x} = P\,\dfrac{e^x}{x} + P\,e^x \log x =$

$$= P\,\frac{e^x}{x} + e^x \log x - P\,\frac{e^x}{x} = e^x \log x .$$

II

5715 — 1) Sendo A e B matrizes quadradas tais que AB e BA existem, demonstre que a soma dos elementos principais de AB e BA é a mesma.

Prove que matrizes diagonais da mesma ordem são permutáveis na multiplicação.

R.: *Fazendo* $P = AB$ *e* $Q = BA$ *vem* $p_{ij} = a_{i\alpha} b_{\alpha j}$ *e* $q_{ij} = b_{i\alpha} a_{\alpha j}$ *com* $\alpha\,(mudo) = 1, 2, \cdots, n$. *Então* $p_{ii} = a_{i\alpha} b_{\alpha i}$ *e* $q_{ii} = b_{i\alpha} a_{\alpha i}$ *com* $\alpha\,(mudo) = 1, 2, \cdots, n$. *Logo,* $\sum_i p_{ii} = \sum_i q_{ii} = a_{i\alpha} b_{\alpha i}$ *com* $\alpha\,(mudo) = 1, 2, \cdots, n$ *e* $i\,(mudo) = 1, 2, \cdots, n$.

Para a segunda proposição, supondo A *e* B *diagonais da mesma ordem, vem*

$$p_{ij} = a_{i\alpha} b_{\alpha j} = \begin{cases} a_{ii}\, b_{ii} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$q_{ij} = b_{i\alpha} a_{\alpha j} = \begin{cases} b_{ii}\, a_{ii} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

o que prova que $P = Q$.

2) Utilize a teoria dos determinantes para calcular os valores de a e b por forma que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 - x_2 = b \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = a \end{cases}$$

seja possível. Ache nesse caso a solução do sistema.

R.: *A característica da matriz dos coeficientes é* 2 *pois, por exemplo,*

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. *Para que o sistema seja possível o teorema de* Rouché *exige que os determinantes característicos*

$$\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + b + 3a$$

$$\Delta'_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a - b$$

sejam nulos, isto é

$$\begin{cases} -2 + b + 3a = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

que dá $a = b = 1/2$. *O sistema dado é pois possível (determinado) para estes valores de* a *e* b *e é equivalente ao sistema constituido pelas equações principais* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1/2 \\ x_1 - x_2 = 1/2 \end{cases}$ *cuja solução é* $x_1 = 1/2$ *e* $x_2 = 0$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Julho — 1.ª chamada — Duração 3 horas — 5-7-1969.

I

5716 — 1) Seja A subconjunto do conjunto fundamental U. A aplicação φ_A de U em $\{0, 1\}$ definida por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

é a chamada *função característica* de A. Demonstre que

a) $\varphi_{\sim A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$
b) $\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$
c) $\varphi_{A \cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_{A \cap B}(x)$.

R.: a) *Como*

$$\varphi_{\sim A}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \notin A \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0$$
$$\varphi_{\sim A}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in A \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1,$$

a igualdade é óbvia.

b) *Notando que*

$$\varphi_{A \cap B}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 1$$

$$\varphi_{A \cap B}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \notin A \cap B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 0 \\ x \notin A \wedge x \in B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 1 \\ x \notin A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 0, \end{cases}$$

vem imediatamente

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x).$$

c) *Tem-se*

$$\varphi_{A \cup B}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A \cup B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 0 \\ x \notin A \wedge x \in B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 1 \\ x \in A \wedge x \in B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 1 \end{cases}$$

$$\varphi_{A \cup B}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \notin A \cup B \Longleftrightarrow x \notin B \wedge x \notin B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 0$$

e, atendendo ao resultado da alínea b), *vem*

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_{A\cap B}(x).$$

2) Desenvolva $\log x$ segundo as potências de $y = (x-1)/(x+1)$. Para que valores de x é válido o desenvolvimento? Justifique.

R.: *De* $y=(x-1)/(x+1)$ *vem* $x=(1+y)/(1-y)$ *e portanto*

$$\log x = \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \log(1+y) - \log(1-y) =$$

$$= 2\sum_0^\infty \frac{y^{2n+1}}{2n+1} = 2\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$

terá de ser $|y| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$, *donde resulta* $x>0$.

3) Calcule $P\,1/(\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5-x})$.

R.: *Fazendo* $5-x = t^4$, *vem*

$$P\frac{1}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}} = -P\frac{4t^3}{t+t^2} =$$

$$= -4P\frac{t^2}{t+1} = -4P\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right) =$$

$$= -4\frac{t^2}{2} + 4t - 4\log|t+1| =$$

$$= -2\sqrt{5-x} + 4\sqrt[4]{5-x} - 4\log|\sqrt[4]{5-x}+1|.$$

4) Estude a monotonia de $x \to f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ em $]0, \pi/2]$ e deduza desse estudo que $\forall\, x \in]0,\pi/2]$ $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \geqq 2/\pi$ (a igualdade é verificada se e só se $x = \pi/2$).

R.: $f' = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \cos x\,\frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2}$ *e, como no intervalo indicado é* $\cos x > 0$ *e* $x - \operatorname{tg} x < 0$, *vem* $f' < 0$ *o que indica que a função é incessantemente decrescente em* $]0,\pi/2]$. *É claro que*

$$\forall\, x \in]0,\pi/2]\ \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geqq \frac{\operatorname{sen}\pi/2}{\pi/2} = 2/\pi.$$

II

5717 — 1) Mostre que todas as matrizes permutáveis com $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ têm a forma

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

R.: *Fazendo* $B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$, *vem*

$$AB = \begin{bmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & e & f & g \\ 0 & i & j & k \\ 0 & m & n & o \end{bmatrix}$$

e a condição $AB = BA$ *implica*

$$\begin{cases} e = i = j = m = n = o = 0 \\ a = f = k = p \\ b = g = l \\ c = h \end{cases}$$

2) Prove que o determinante $|a_{ij}|$ não sofre alteração se se multiplica cada a_{ij} por p^{i-j}. Calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ -1 & 0 & 1 \cdots 1 \\ -1 & -1 & 0 \cdots 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ -1 & -1 & -1 \cdots 0 \end{vmatrix}.$$

R.: *Como qualquer termo da matriz* $[a_{ij}]$ *é da forma* $t = a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \cdots a_{\alpha_n\beta_n}$, *multiplicando cada* a_{ij} *por* p^{i-j} *vem*

$$t' = p^{\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_i} a_{\alpha_1\beta_1} \cdots a_{\alpha_n\beta_n} = t$$

pois $\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_i = 0$.

Adicionando a primeira linha do determinante dado a cada uma das restantes, vem o determinante triangular

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ 0 & 1 & 2 \cdots 2 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 \quad 1 \end{vmatrix}$$

cujo valor é 1.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª Cadeira — Exame final — Epoca de Julho — 2.ª chamada — Duração 3 horas — 11-7-1969.

I

5718 – 1) Prove as seguintes proposições relativas a conjuntos:

a) $A \cap B = A - (A - B)$

b) $B \subseteq A \Longleftrightarrow B = A - (A - B)$.

R.: a) $A - (A - B) = A \cap (\widetilde{A - B}) = A \cap \cap (A \widetilde{\cap} \sim B) = A \cap (\sim A \cup B) = (A \cap \sim A) \cup \cup (A \cap B) = \varphi \cup (A \cap B) = A \cap B$.

b) $B \subseteq A \Longleftrightarrow A \cap B = B \Longleftrightarrow B = A - (A - B)$

2) Supondo que a função f é par (ímpar), mostre que, possuindo derivadas para $x = 0$, são nulas as derivadas de ordem ímpar (par).

Sejam f e g funções ímpares com derivadas contínuas de ordem $\leqq 3$. Admitindo que $g'''(0) \neq 0$, calcule $\lim\limits_{x=0} \dfrac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)}$

R.: *Para função par tem-se*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ f'(x) &= -f'(-x) \\ f''(x) &= f''(-x) \\ f'''(x) &= -f'''(-x) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

o que implica $f'(0) = f'''(0) = \cdots = 0$. *Para função ímpar tem-se*

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ f'(x) &= f'(-x) \\ f''(x) &= -f''(-x) \\ f'''(x) &= f'''(-x) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

o que implica $f(0) = f''(0) = \cdots = 0$.

O limite apresentado conduz a uma indeterminação da forma $0/0$ *e a regra de Cauchy dá*

$$\lim_{x=0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{f'(x) - 4f'(2x) + 3f'(3x)}{g'(x) - 4g'(2x) + 3g'(3x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{f''(x) - 8f''(2x) + 9f''(3x)}{g''(x) - 8g''(2x) + 9g''(3x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{f'''(x) - 16f'''(2x) + 27f'''(3x)}{g'''(x) - 16g'''(2x) + 27g'''(3x)} = \frac{f'''(0)}{g'''(0)}.$$

3) Calcule $P \dfrac{1}{1 + 3\cos^2 x}$.

R.:

$$P \frac{1}{1 + 3\cos^2 x} = P \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + 3} = P \frac{\sec^2 x}{4 + tg^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2} P \frac{\frac{1}{2}\sec^2 x}{1 + \left(\frac{tg\, x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} arctg \left(\frac{tg\, x}{2}\right).$$

4) Para que valores de a e b o ponto $P(1, 3)$ é ponto de inflexão da imagem de $x \to f(x) = a x^3 + b x^2$? Justifique.

Escreva a equação da tangente à curva no ponto de inflexão.

R.:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

A condição $f(1) = 3$, *juntamente com* $f''(1) = 0$, *dá* $a = -3/2$ *e* $b = 9/2$.

A tangente de inflexão é $Y - 3 = \dfrac{9}{2}(X - 1)$.

II

5719 – 1) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, ache as matrizes X que satisfazem à equação matricial $AX = XA$.

R.: *Tomando* $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, *vem*

$$AX = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_3 & x_2 - 2x_4 \\ -3x_1 + 4x_3 & -3x_2 + 4x_4 \end{bmatrix}$$

e

$$XA = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 & -2x_1 + 4x_2 \\ x_3 - 3x_4 & -2x_3 + 4x_4 \end{bmatrix}.$$

A condição $AX = XA$ *conduz ao seguinte sistema homogéneo duplamente indeterminado:*

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Um sistema fundamental de soluções é dado por

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ *e portanto a solução geral é*

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \dfrac{2}{3}\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

para quaisquer valores dos parâmetros α *e* β. *Tem-se então*

$$X = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & \dfrac{2}{3}\alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

2) Prove as relaçõss:

a) $$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

b) $$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ b_1 & a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_n & a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_1 \cdots c_n \\ 0 & a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

R.: a) *Basta desenvolver pelo teorema de Laplace o determinante no primeiro membro ao longo da primeira linha (coluna) e proceder de modo idêntico para o determinante no segundo membro para se obter o resultado.*

b) *Utilizando o teorema de Laplace para o segundo determinante ao longo da primeira linha e para o terceiro determinante ao longo da primeira coluna, obtém-se o primeiro.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Outubro (1.ª chamada) — Prova escrita — 1-10-1969.

I

5720 — 1) Estude do ponto de vista da reflexividade, simetria e transitividade as relações binárias seguintes:

a) $x\,S\,y \Longleftrightarrow x$ e y são primos entre si em N;
b) $x\,S\,y \Longleftrightarrow x - y < 1$ em R;
c) $x\,S\,y \Longleftrightarrow |x - y| < 3$ em R.

R.: a) *Não reflexiva, simétrica e não transitiva.*
b) *Reflexiva, não simétrica e não transitiva.*
c) *Reflexiva, simétrica e não transitiva.*

2) Utilizando os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin de sen x e cos x, determine a, b e c por forma que $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x(a + b\cos x) - c \operatorname{sen} x}{x^5} = 1$.

R.: $$\frac{x(a + b\cos x) - c\,\mathrm{sen}\,x}{x^5} =$$

$$= \frac{x\left(a + b - \dfrac{bx^2}{2} + \dfrac{bx^4}{24} - \dfrac{bx^6}{6!} + \cdots\right) - cx + \dfrac{cx^3}{6} - \dfrac{cx^5}{120} + \cdots}{x^5} =$$

$$= \frac{(a + b - c)x + \left(\dfrac{c}{6} - \dfrac{b}{2}\right)x^3 + \left(\dfrac{b}{24} - \dfrac{c}{120}\right)x^5 + \cdots}{x^5}$$

Para que o limite seja 1 *é preciso que*

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ \dfrac{c}{6} - \dfrac{b}{2} = 0 \\ \dfrac{b}{24} - \dfrac{c}{120} = 1 \end{cases}$$

sistema cuja solução é $\begin{cases} a = 120 \\ b = 60 \\ c = 180 \end{cases}$.

3) Culcule $P\dfrac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^3}$.

R.: $$P\frac{\mathit{sen}\,(\log x)}{x^3} = P\frac{1}{x^2}\,\mathit{sen}\,(\log x)\frac{1}{x} =$$

$$= -\cos(\log x)\frac{1}{x^2} - 2P\cos(\log x)\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2} =$$

$$= -\cos(\log x)\frac{1}{x^2} - 2\left[\frac{\mathit{sen}\,(\log x)}{x^2} + 2P\frac{\mathit{sen}\,(\log x)}{x^3}\right] =$$

$$= -\frac{\cos(\log x)}{x^2} - 2\frac{\mathit{sen}\,(\log x)}{x^2} - 4P\frac{\mathit{sen}\,(\log x)}{x^3}$$

donde resulta

$$P\frac{\mathit{sen}\,(\log x)}{x^3} = \frac{1}{5}\left[-\frac{\cos(\log x)}{x^2} - 2\frac{\mathit{sen}\,(\log x)}{x^2}\right].$$

4) Represente geométricamente a função definida por $f(x) = 1 - e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x}$.

R.: *Dominio:* $]-\infty, +\infty[$.

Continuidade: continua em todos os pontos próprios e em $x = +\infty$; *descontínua para* $x = -\infty$.

Variação: $f'(x) = e^{-x}(1 - e^{-x})$ *e portanto a função é decrescente em* $]-\infty, 0]$ *e crescente em* $[0, +\infty[$; *possui o mínimo* $f(0) = 1/2$.

Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = e^{-x}(2e^{-x} - 1)$$

e portanto a concavidade está voltada para cima em $]-\infty, \log 2]$ *e para baixo em* $]\log 2, +\infty[$; *existe um ponto de inflexão para* $x = \log 2$.

Assíntotas: $Y = 1$.

II

5721 — 1) Discuta a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 & m \\ 2 & -3 & 2 & n & -1 \end{bmatrix}$$

consoante os valores assumidos por m e n.

R.: *Condensando* A, *obtém-se*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & n+2 & 0 \end{bmatrix}$$

donde é fácil concluir a resposta:

$$m \neq 0 \begin{cases} n \neq -2 & r = 4 \\ n = -2 & r = 3 \end{cases}$$

$$m = 0 \begin{cases} n \neq -2 & r = 3 \\ n = -2 & r = 2 \end{cases}$$

2) Utilizando a teoria dos determinantes, calcule α e β por forma que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = \alpha \\ x_1 + \beta x_3 = 0 \end{cases}$$

seja possível indeterminado.

R.: *Tomando a matriz dos coeficientes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \beta \end{bmatrix},$$

β *terá de ser determinado por forma que a característica de* A *seja inferior a* 3. *Basta tomar* $|A| = 0$ *para obter* $\beta = 1$. *É claro que a característica de* A *passa a ser* 2 *porque* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Para que o sistema seja possível é preciso que o característico $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *se anule o que acontece para* $\alpha = 2$.

Portanto, para $\alpha = 2$ *e* $\beta = 1$ *o sistema é possível e simplesmente indeterminado.*

I. S. C. E. F. — Matematicas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Outubro (2.ª chamada) — 7-10-1969.

I

5722 — 1) Para quaisquer conjuntos A e B de U define-se a *soma simétrica* $A \oplus B$ do modo seguinte: $A \oplus B = A \cup B - (A \cap B)$. Prove que

a) $A \oplus B = B \oplus A$
b) $A \oplus A = \emptyset$
c) $(A \oplus B) \cap C = (A \cap C) \oplus (B \cap C)$

R: a) $A \oplus B = A \cup B - (A \cap B) =$
$= B \cup A - (B \cap A) = B \oplus A$

b) $A \oplus A = A \cup A - (A \cap A) = A - A = \emptyset$

c) $(A \oplus B) \cap C = [(A \cup B) - (A \cap B)] \cap C =$
$= [(A \cup B) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B})] \cap C =$
$= \{[(A \cup B) \cap \tilde{A}] \cup [(A \cup B) \cap \tilde{B}]\} \cap C =$
$= \{[(B \cap \sim A) \cup (A \cap \tilde{B})]\} \cap C =$
$= [(B \cap C) \cap \tilde{A}] \cup [(A \cap C) \cap \tilde{B}]$

$(A \cap C) \oplus (B \cap C) = [(A \cap C) \cup (B \cap C)] -$
$- [(A \cap C) \cap (B \cap C)] =$
$= [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \cap [(\widetilde{A \cap C}) \cup (\widetilde{B \cap C})]$
$= [(A \cap C) \cap (\widetilde{B \cap C})] \cup [(B \cap C) \cap (\widetilde{A \cap C})]$
$= [(A \cap C) \cap \tilde{B}] \cup [(B \cap C) \cap \tilde{A}]$.

2) Prove que $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = 1 + \sum_1^\infty (4n^2 + 2)x^n$ para $|x| < 1$:

R:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = (1+x)^3(1-x)^{-3} =$$

$$= (1+3x+3x^2+x^3)\sum_1^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n =$$

$$= (1+3x+3x^2+x^3)(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots) =$$

$$= 1+6x+18x^2+38x^3+\cdots$$

para $|x|<1$.

Para obter o termo geral do desenvolvimento note-se que o coeficiente de x^n $(n \geqq 3)$ *é*

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 3\frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} = 4n^2+2.$$

Tem-se então

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = 1 + \sum_1^\infty (4n^2+2)x^n.$$

3) Calcule $P\left(\frac{\log x}{x}\right)^2$.

R:

$$P\left(\frac{\log x}{x}\right)^2 = P\frac{1}{x^2}\log^2 x =$$

$$= -\frac{1}{x}\log^2 x + 2P\frac{\log x}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x}\log^2 x + 2\left(-\frac{1}{x}\log x + P\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x}\log^2 x - \frac{2}{x}\log x - \frac{2}{x}.$$

4) Determine os valores de a e b por forma que a função $x \to f(x) = a\log x + bx^2 + x$ tenha extremos para $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Mostre que com esses valores de a e b x_1 é minimizante e x_2 é maximizante.

R: $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$ *e o sistema*

$$\begin{cases} a+2b+1=0 \\ \frac{a}{2}+4b+1=0 \end{cases} \quad \text{dá} \quad \begin{cases} a=-2/3 \\ b=-1/6 \end{cases}$$

Para estes valores de a *e* b *vem* $f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$ *e, como* $f''(1) = \frac{1}{3} > 0$, $f''(2) = -\frac{1}{6} < 0$, $x_1 = 1$ *é minimizante e* $x_2 = 2$ *é maximizante.*

II

5723 — 1) Ache as matrizes X e Y tais que

$$2X+Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad X-3Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

R:

$$6X+3Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$$

e

$$X-3Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

donde resulta

$$7X = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} \quad ou \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

De

$$2X+Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad -2X+6Y = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$$

vem

$$7Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -14 & 7 \end{bmatrix} \quad ou \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Prove que $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n+1.$

Sugestão: Estabeleça préviamente a relação $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.

R: *Desenvolvendo* D_n *pelo teorema de Laplace ao longo da primeira coluna, vem* $D_n = 2D_{n-1} - 1 . D_{n-2}$ *ou* $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$. *Esta relação mostra que* $D_1 D_2 D_3 \dots$ *estão em progressão aritmética e, como* $D_1 = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, *a razão dessa progressão é* 1 *o que prova o resultado:* $D_n = n+1$.

Enunciados e soluções dos n.os 5706 a 5723 de Fernando de Jesus

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 15-1-1969.

5724 — 1) Uma aplicação $\varphi: A \to B$ diz-se constante sse $\forall_{x,y \in A}\ \varphi(x) = \varphi(y)$

a) Dadas duas aplicações $f: A \to B$ e $g: B \to C$, prove que a aplicação composta $h = g \circ f$ é constante

sempre que pelo menos uma das aplicações f ou g o for.

b) Mostre por meio de um exemplo que $g \circ f$ pode ser constante não o sendo f nem g.

5725 — 2) Indique, justificando, se são

a) reflexivas *b*) simétricas *c*) transitivas as relações F, G e H, no conjunto dos reais, determinadas pelas condições seguintes:

1.ª) $x F y \Longleftrightarrow |x - y| \leq 1$

2.ª) $x G y \Longleftrightarrow x - y \in Z$

3.ª) $x H y \Longleftrightarrow \underset{k \in Z}{\exists} (x \in [k, k+1[\wedge y \in [k, k+1[)$

onde Z designa o conjunto dos inteiros.

Nos casos em que se trate de relações de equivalência descreva as classes de equivalência a que pertencem os números 0, 1/2 e 1.

5726 — 3) Quando possível dê um exemplo de um conjunto X, majorado no conjunto ordenado $\mathbf{R}$ e cujo supremo seja:

a) ponto de acumulação de X

b) » isolado de X

c) » interior de X

d) » fronteiro de X

e) » exterior de X.

Nos casos em que não seja possível indicar um exemplo prove que efectivamente o não é.

5727 — 4) Seja u_n o termo geral de uma sucessão limitada, verificando a condição

$$\underset{m, n \in N}{\forall} (n \neq m \Longrightarrow u_n \neq u_m)$$

e seja U o conjunto dos termos da sucessão:

Das proposições

a) U não é majorado

b) U tem elemento mínimo

c) u_n é convergente

d) o derivado de U não é vazio

indique as que são necessàriamente verdadeiras, as que são necessàriamente falsas e as que podem ser verdadeiras ou falsas consoante a sucessão u_n que seja escolhida.

Justifique cuidadosamente as suas respostas.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 15-1-1969.

5728 — 1) Represente A, sucessivamente, cada um dos conjuntos: $\{-1, 0\}$, $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ e Q (conjunto dos racionais). Diga quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas:

a) $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{x \in A}{\exists} \; x \in V_\varepsilon(-1)$

b) $\underset{\varepsilon > 0}{\exists} \; \underset{x \in A}{\forall} \; x \in V_\varepsilon(+\infty)$

c) $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{x \in A}{\exists} \; x \in V_\varepsilon(\varepsilon)$

Justifique resumidamente.

5729 — 2) *a*) Seja A o subconjunto de $\mathbf{R}$ formado por todos os números x tais que $x \in \mathbf{R}$ e $x^2 < 4$. Prove que a intersecção dos derivados de A e de Q é igual ao derivado da intersecção de A e Q:

$$(A \cap Q)' = A' \cap Q'$$

b) Dê exemplos de dois conjuntos (por exemplo, dois intervalos abertos de $\mathbf{R}$, escolhidos convenientemente) tais que a intersecção dos seus derivados não seja igual ao derivado da sua intersecção.

5730 — 3) *a*) Demonstre que sendo $A_1, A_2, \cdots, A_k$ ($k \in N$) subconjuntos majorados de $\mathbf{R}$, a sua reunião, $A = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_k\}$ é também um conjunto majorado.

b) Se em vez de um número finito considerarmos uma infinidade de conjuntos majorados. será ainda verdadeira a afirmação de que a sua reunião é necessàriamente um conjunto majorado? Justifique.

5731 — 4) Seja u_n o termo geral de uma sucessão limitada verificando a condição $\underset{n \in N}{\forall} u_n \in N$ e seja U o conjunto dos termos da sucessão.

Das proposições:

a) U é um conjunto finito

b) U é um conjunto fechado

c) u_n é estritamente monótona

d) u_n é convergente

indique as que são necessàriamente verdadeiras, as que são necessàriamente falsas e as que podem ser falsas ou verdadeiras consoante a sucessão u_n que seja escolhida. Justifique cuidadosamente as respostas.

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 22-1-1969.

5732 — 1) Para cada $x \in R$, seja

$f(x) = \max \{k : k \in Z \wedge k \gtreqless x\}$ e $g(x) = x - f(x)$.

a) Determine os contradomínios das aplicações f e g (de R em R) e indique se elas são injectivas ou sobrejectivas.

b) Determine as aplicações compostas $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$. Justifique abreviadamente as respostas.

2) Indique, justificando, o derivado de cada um dos seguintes conjuntos:

$$A = \{x : x \in N \wedge \underset{y \in N}{\exists}\ xy = 100\}$$

$$B = \{x : x \in R \wedge 0 < |x - 1| \gtreqless 3\}$$

$$C = \left\{x : x \in R \wedge |x| < \min\{|x-2|, |x+2|\}\right\}$$

$$D = \left\{x : x \in R \wedge \underset{m,n \in N}{\exists}\ x = \frac{m}{m+n}\right\}$$

3) Das proposições

$$\underset{X,Y \subset R}{\forall}\ X \subset Y \Rightarrow \operatorname{int} X \subset \operatorname{int} Y$$

$$\underset{X,Y \subset R}{\forall}\ X \subset Y \Rightarrow \operatorname{ext} X \subset \operatorname{ext} Z$$

$$\underset{X,Y \subset R}{\forall}\ X \subset Y \Rightarrow \operatorname{front} X \subset \operatorname{front} Y$$

só uma é verdadeira. Demonstre-a e mostre, por meio de exemplos convenientes, que as outras duas são falsas.

4) Seja $X_1, X_2, X_n, \cdots$ uma sucessão crescente de conjuntos não vazios, todos contidos num mesmo conjunto X, limitado em R.

Para cada $n \in N$, seja ainda $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$.

a) Prove que as sucessões de termos gerais a_n e b_n são convergentes e que

$$\lim a_n \leqq \lim b_n .$$

b) Em que caso se verifica a igualdade? Justifique.

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 22-1-1969.

5733 — 1) Sejam A e B dois conjuntos totalmente ordenados (com relações de ordem que, em ambos os casos, serão designadas pelo sinal $<$) e φ uma aplicação de A em B tal que

$$\underset{x,y \in A}{\forall}\ (x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)) .$$

Nestas condições:

a) prove que as proposições «φ é sobrejectiva» e «φ é bijectiva» são equivalentes;

b) prove que, se X é uma parte majorada de A, a imagem $\varphi(X)$ é uma parte majorada de B;

c) poderá haver partes não majoradas de A que tenham por imagem uma parte majorada de B? Justifique.

2) Sendo G a relação em R formada por todos os pares $(x, y) \in R^2$ que verificam a condição

$$x \in Z \wedge x \leqq y < x + 1 ,$$

a) indique o domínio e o contradomínio de G e da relação inversa G^{-1}. Algumas destas relações é uma função? Justifique.

b) Verifique se G é reflexiva, simétrica ou transitiva.

3) Sendo

$$A = \{x : x \in R \wedge x^2 - 1 < 0\}$$

$$B = \{x : x \in R \wedge 0 < x - 3 \leqq |x - 5|\}$$

$$C = \left\{x : \underset{n \in N}{\exists}\ x = 2 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$$

indique, justificando abreviadamente as respostas, o derivado, o interior e o fecho do conjunto

$$X = A \cup B \cup C .$$

4) Segundo o princípio de encaixe, se $I_1, \cdots, I_n, \cdots$ é uma sucessão decrescente de intervalos limitados e fechados de R, de comprimentos $c_1, \cdots, c_n, \cdots$ tais que $\lim c_n = 0$, existe um e um só ponto comum a todos os intervalos I_n.

Mostre por meio de exemplos convenientes, que se obteriam proposições falsas se, no enunciado precedente, se suprimisse a hipótese de:

a) a sucessão de intervalos ser decrescente;

b) $\lim c_n = 0$;

c) os intervalos I_n serem fechados.

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 16-4-1969.

5734 — 1) *a*) Determine os limites das sucessões de termos gerais

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} + (-1)^n \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}}\right],$$

$$v_n = \frac{n^{n-1}}{2^{n^2-1}}$$

b) Sendo a_n o termo geral de uma sucessão de termos positivos, com limite $+\infty$, considere as séries:

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n}, \sum \frac{1}{n^2+a_n}, \sum \frac{1}{e^{a_n}}$$

e indique, justificando, as que são necessàriamente convergentes ou necessàriamente divergentes e as que podem ser de uma ou outra natureza consoante a sucessão a_n considerada.

5735 — 2) *a*) Para cada $x \in R$, estude o $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos \pi x)^n$, (considere separadamente os valores de x não inteiros, inteiros pares e inteiros ímpares).

b) Sendo g a função definida pela fórmula:

$$g(x) = x + \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\cos \pi x)^n}{2+(\cos \pi x)^n},$$

no conjunto dos pontos x para os quais existe o limite indicado no segundo membro, determine os pontos em que g é contínua, descontínua ou prolongável por continuidade.

5736 — 3) Suponha que f é uma função com derivada contínua em R e que a equação $f'(x) = 0$ não tem raízes reais. Enunciando os principais teoremas a que fizer referência prove que:

a) f é estritamente monótona;

b) a função inversa de f é contínua;

c) f é limitada em qualquer intervalo limitado;

d) o contradomínio de f é um intervalo aberto.

Mostre também, por meio de exemplos, que podem ser verdadeiras ou falsas as proposições:

e) a equação $f(x) = 0$ tem uma e uma só raíz real;

f) f é limitada (em R).

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 16-4-1969.

5737 — 1) *a*) Determine os limites das sucessões de termos gerais:

$$u_n = \frac{2^{2n}}{5^n+3}, \quad v_n = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$$

b) Sendo $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes de termos positivos, considere as séries:

$$\sum \left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right), \quad \sum \frac{a_n}{b_n}, \quad \sum a_n b_n,$$

e indique, justificando, as que são necessàriamente convergentes ou necessàriamente divergentes e as que podem ser de uma ou de outra natureza consoante as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ consideradas.

5738 — 2) *a*) Para cada $x \in R$, calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2 \operatorname{sen} \pi x}$$

(considere separadamente valores de x inteiros e não inteiros).

b) Estude, quanto à continuidade lateral, em todos os pontos de R, a função definida pela fórmula:

$$g(x) = C(x) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2 \operatorname{sen} \pi x},$$

onde $C(x)$ designa o maior inteiro $\leqslant x$. Esboce um gráfico aproximado de $g(x)$.

5739 — 3) Suponha que f é uma função contínua em R e que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

a) Justifique cuidadosamente as duas afirmações seguintes:

1.ª Existe um número $a > 0$ tal que $|x| > a \Rightarrow f(x) > f(0)$;

2.ª No intervalo $[-a, a]$, f tem mínimo.

b) Utilizando as duas afirmações anteriores, prove que f tem mínimo absoluto (isto é, em todo o seu domínio, R) e, designando esse mínimo por b, indique, justificando, o contradomínio da função.

c) Dê exemplos de duas funções nas condições da função f deste enunciado, uma que atinja o seu mínimo num único ponto, no qual seja diferenciável, outra que atinja o mínimo em dois e só dois pontos, nos quais não seja diferenciável.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 23-4-1969.

5740 — 1) *a*) Determine os limites das sucessões de termos gerais u_n e v_n, sendo

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}; \; u_{n+1} = u_n \cdot \dfrac{n+1}{n+2}, \quad \forall\, n \in N \\ v_n = \sqrt{4^n + 3^{2n} + 2^{3n}}. \end{cases}$$

b) Supondo $a_n > 0$, justifique que se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to r \in]0,1[$$

então $a_n \to 0$.

Dê exemplos de sucessões cujo termo geral a_n seja um infinitésimo e tais que:

$$1.^{\circ}\ \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \quad 2.^{\circ})\ \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

$$3.^{\circ})\ \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2.$$

5741 — 2) Seja φ a função definida pela fórmula:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

no conjunto dos pontos $x \in R$ nos quais a série que figura no 2.º membro é convergente.

a) Mostre que o domínio de φ é um intervalo e indique os extremos desse intervalo.

b) Mostre que φ é uma função ímpar e estritamente monótona.

c) Determine o máximo de φ.

d) Obtenha uma equação da tangente à curva $y = \varphi(x)$ no ponto de abcissa 0.

5742 — 3) Sendo I e J dois intervalos de R tais que $I \subset J$, diz-se que uma função f, definida e contínua em I, é contìnuamente prolongável a J, sse existe pelo menos uma função g definida e contínua em J e tal que:

$$f(x) = g(x), \ \forall\, x \in I.$$

Uma tal função g diz-se um prolongamento contínuo da função f ao intervalo J.

a) Das funções definidas no intervalo $]0,1[$, pelas expressões

$$\frac{1}{x-1},\ x - C(x),\ \cos^2\frac{\pi}{2x},\ (e^x - 1)\operatorname{sen}\frac{\pi}{x},$$

(onde $C(x)$ designa o maior inteiro $\leqq x$), indique, justificando, as que são contìnuamente prolongáveis ao intervalo $[0,1]$.

b) Supondo que f é uma função definida e contínua em $]a,b[$ e contìnuamente prolongável a $[a,b]$ prove que:

1.º f é limitada em $]a,b[$;

2.º o prolongamento contínuo de f a $[a,b]$ é único;

3.º f é também contìnuamente prolongável a R, admitindo, porém, uma infinidade de prolongamentos contínuos distintos.

c) Para uma das funções consideradas na alínea *a*) dê dois exemplos de prolongamentos contínuos a R, por forma que num desses exemplos o prolongamento seja uma função ilimitada mas com limite finito quando $x \to +\infty$ e no outro seja uma função limitada mas sem limite quando $x \to +\infty$.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 23-4-1969.

5743 — 1) *a*) Estude, quanto à convergência, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ e $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdots\frac{1}{2n} + \cdots$

b) Prove que, se Σa_n é uma série convergente de termos positivos, as séries $\Sigma(-1)^n \cdot a_n$ e Σa_n^2 também são convergentes. Mostre, por meio de exemplos, que qualquer destas duas séries pode ser divergente se Σa_n for uma série convergente, mas de termos não necessàriamente positivos.

5744 — 2) Considere a função φ definida em R pela fórmula:

$$\varphi(x) = [1 + C(x)] \cdot [2x - C(x)],$$

onde $C(x)$ designa o maior inteiro $\leqq x$.

a) Mostre que φ é contínua em R.

b) Mostre que φ não é diferenciável nos pontos $x \in Z$, mas que o é em todos os outros pontos de R, sendo precisamente:

$$\varphi'(x) = 2[1 + C(x)], \quad \forall\, x \notin Z.$$

c) Indique, justificando, o contradomínio de φ.

Sugestão: para a resolução de algumas das questões anteriores, poderá ser-lhe útil observar que, sendo $k \in Z$, para todo o $x \in [k, k+1[$ se tem

$$\varphi(x) = (1 + k)(2x - k).$$

5745 — 3) Sendo a um ponto de acumulação do domínio D de uma função f, diz-se que b é *sublimite* de f no ponto a sse existe uma sucessão x_n de termos em $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = b$.

a) Justifique que, se f tem limite (finito ou infinito) quando $x \to a$, esse limite é o único sublimite da função no ponto a.

b) Determine os sublimites no ponto 0, das funções:

$$\frac{|x|}{x}(1+x), \quad \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad D(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in Q \\ 0 \text{ se } x \in R \setminus Q. \end{cases}$$

c) Supondo que f é uma função monótona numa vizinhança do ponto a, indique, justificando, quais são os sublimites de f no mesmo ponto.

d Dê exemplos de funções que tenham como únicos sublimites finitos no ponto $a = +\infty$,

1.º — os números 0 e 2;

2.º — todos os números do intervalo $[0, 4]$;

3.º — todos os números reais.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 2-6-1969

5746 — 1) Designe por I o intervalo $[0, 1]$, no conjunto ordenado R.

a) Admitindo que $X \subset I$, indique, justificando, quais das condições seguintes são *equivalentes* à condição «o supremo de X é menor do que 1»:

1.ª — $1 \notin X$

2.ª — $\forall_{x \in X} \; \exists_{y \in I \setminus X} \; y > 2x$

3.ª — $\exists_{y \in \operatorname{int} I} \; \forall_{x \in X} \; x \leqq y$.

b) Prove que não é possível dar exemplos de funções f, definidas no intervalo I e verificando alguma das condições seguintes:

1.ª — f é contínua em I e $f\left(\frac{1}{n}\right) = n, \forall n \in N$;

2.ª — f é monótona mas não limitada em I;

3.ª — f é contínua e não constante em I e $f(x)$ é racional, $\forall x \in I$.

Se, em vez de ser $I = [0, 1]$ fosse $I =]0, 1[$, em quais dos casos anteriores seria possível dar exemplos? Justifique.

5747—2) *a*) Estude a função g, contínua em R e tal que:

$$g(x) = x^2 \cdot \log x^2, \quad \forall x \in R \setminus \{0\}.$$

Esboce o gráfico de g. *b*). É a função desenvolvível em série de Mac-Laurin? Justifique. Obtenha o desenvolvimento de $g(x)$ em série de potências de $x - 1$ e indique o raio de convergência dessa série.

b) Determine a área limitada pelo gráfico da função g e pelas tangentes ao mesmo gráfico nos pontos (distintos da origem) em que ele intersecta o eixo das abcissas.

5748—3) *a*) Sendo $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base do espaço vectorial E e φ e ψ duas aplicações lineares de E em si mesmo, prove que, para que φ e ψ sejam permutáveis — isto é, para que se tenha $\varphi[\psi(x)] = \psi[\varphi(x)], \forall x \in E$ — é necessário e suficiente que $\varphi[\psi(e_j)] = \psi[\varphi(e_j)]$, para $j = 1, 2, \cdots, n$.

Se forem A e B as matrizes correspondentes a φ e ψ (em relação à base referida, suposta ordenada) de que forma se traduz, na álgebra matricial, a permutabilidade de φ e ψ? Justifique.

b) Designe por $C(R)$ o espaço vectorial real formado pelas funções contínuas em R (com as operações usuais) e por θ a aplicacão de $C(R)$ em si mesmo que associa a cada função $f \in C(R)$ a função $g = \theta(f)$ definida pela fórmula:

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \forall x \in R.$$

Mostre que θ é uma aplicação linear, cujo contradomínio é o conjunto de todas as funções que têm derivada contínua em R e se anulam no ponto 0. Diga se θ é ou não injectiva e indique, justificando cuidadosamente as respostas, qual é o transformado por θ do subconjunto de $C(R)$ formado pelas funções f que verificam a condição:

$$f(x) \geqq 0, \qquad \forall x \in R.$$

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 21-7-69.

5749 — 1) Sendo $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ uma base ordenada do espaço vectorial E e k um número natural menor do que n, designe respectivamente por F e G os subespaços de E gerados pelos conjuntos de vectores $\{e_1, \cdots, e_k\}$ e $\{e_{k+1}, \cdots, e_n\}$. Nestas condições, demonstre que:

1.º — $F \cap G = \{0\}$;

2.º — Qualquer que seja $x \in E$ existe um e um só par (y, z), verificando as condições: $y \in F$, $z \in G$ e $x = y + z$.

5750 — 2) Determine os valores reais de a para os quais o sistema de equações:

$$\begin{cases} a\,x + y + z + a^4 u = 0 \\ x + a\,y + z + a^3 u = 0 \\ x + y + a\,z + a^2 u = 0 \\ x + y + z + a\,u = 0, \end{cases}$$

(nas incógnitas x, y, z e u) é indeterminado e, para cada um desses valores, indique, justificando, o grau de indeterminação do sistema.

5751 — 3) Seja g uma função crescente e limitada em R.

Escolhido arbitràriamente um número real c_1, ponha-se $g(c_1) = c_2$, e duma forma geral,

$$g(c_n) = c_{n+1}, \quad \forall\, n \in N.$$

Nestas condições:

1.º — Prove que a sucessão de termo geral c_n é convergente (considere separadamente as hipóteses $c_2 \geqslant c_1$ e $c_2 < c_1$).

2.º — Designando por c o limite de c_n prove que, se g é contínua no ponto c, a equação $g(x) = x$ tem pelo menos uma raíz real.

5752 — 4) Qual é o maior valor que pode assumir o volume de um cilindro circular recto inscrito numa superfície esférica de raio r? Prove que o valor encontrado é realmente o máximo.

5753 — 5) Seja f uma função definida e majorada no intervalo $I = [a, b]$ $(a, b \in R,\ a < b)$ e, para todo o $x \in I$, seja $\varphi(x)$ o supremo de f no intervalo $[a, x]$:

$$\varphi(x) = \sup_{t \in [a,x]} f(t), \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Das proposições seguintes, prove as que são verdadeiras e mostre, por meio de exemplos, que as restantes são falsas:

1.º — Para que se tenha $\varphi = f$ é necessário e suficiente que f seja crescente em I.

2.º — φ é integrável em I, mesmo que f o não seja e, no caso de f ser integrável em I, tem-se: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

3.º — Se φ é contínua em I, f também o é.

Indique ainda, justificando a resposta, uma condição (a impor a f) necessária e suficiente para que φ seja constante em I.

5754 — 6) Calcule o comprimento do arco de curva definido pelas relações:

$$y = 1 - \log \cos x$$

e

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 24-7-69.

5755 — 1) Sejam $u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}$ vectores de um espaço vectorial E, tais que:

1.º) $u_1, u_2, \cdots, u_k$ são linearmente independentes;

2.º) $u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}$ são linearmente dependentes.

Nestas condições, prove que u_{k+1} pode exprimir-se, de forma única, como combinação linear de

$$u_1, u_2, \cdots, u_k.$$

Se φ for uma aplicação linear de E noutro espaço vectorial F, indique, justificando, qual das proposições seguintes é necessàriamente verdadeira:

1.ª — Os vectores $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \cdots, \varphi(u_k)$ são linearmente independentes;

2.ª — Os vectores $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \cdots, \varphi(u_k), \varphi(u_{k+1})$ são linearmente dependentes.

5756 — 2) Sendo p um número natural, calcule a área limitada pelos gráficos das funções f e g, contínuas no intervalo $[0, +\infty[$ e tais que

$$f(x) = x^p \cdot \log x \quad \text{e} \quad g(x) = x^{p+1} \cdot \log x, \qquad \forall\, x > 0.$$

5757 — 3) Prove que, se uma série de potências de x é absolutamente convergente no ponto $\alpha > 0$, converge também sbsolutamente em qualquer ponto x tal que $|x| \leqslant \alpha$. Admitindo apenas que a série é convergente no ponto α, para que valores de x poderá ainda garantir-se a convergência absoluta da série? Justifique.

Se as séries $\Sigma\, a_n x^n$ e $\Sigma\, b_n x^n$ tiverem o mesmo raio de convergência e se, num dos extremos do intervalo de convergência, uma das séries for convergente e a outra divergente, qual será o raio de convergência da série $\Sigma\,(a_n + b_n)\, x^n$? Justifique.