$$n\varepsilon < \sum_{1\leq k\leq n} \|\Delta^2_{yx} z_{0,2k-1}\| +$$
$$+ \sum_{1\leq k\leq n} \|\Delta^2_{yx} z_{2k-1,0}\| + \sum_{1\leq k\leq n} \|\Delta_y z_{0,2k-1}\| +$$
$$+ \sum_{1\leq k\leq n} \|\Delta_x z_{2k-1,0}\| \leq M + 2N,$$

em virtude das hipóteses do teorema e do lema demonstrado.

Em resumo, ter-se-ia

$$(2) \qquad n\varepsilon < M + 2N \quad \text{para todo } n,$$

o que é absurdo.

De modo análogo se conclui que existe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

em cada um dos casos II, III e IV.

OBSERVAÇÃO: Se alguns dos pontos tomados (x_i, y_i) têm a mesma abcissa, tem-se, como $z_{i+1,i+1} = z_{i,i+1}$,

$$\|z_{i,i} - z_{i,i+1}\| \leq \|z_{i,i} - z_{i,i+1} - z_{0,i} +$$
$$+ z_{0,i+1}\| + \|z_{0,i} - z_{0,i+1}\| = \|\Delta^2_{yx} z_{0j}\| +$$
$$+ \|\Delta_y z_{0j}\|$$

e, por consequência, o resultado (2) não é alterado.

Anàlogamente para o caso de alguns dos (x_i, y_i) terem a mesma ordenada.

REFERÊNCIAS

[1] L. SCHWARTZ, «*Cours d'Analyse*», II.º volume.

[2] T. H. HILDEBRANDT, «*Introduction to the Theory of Integration*» (1963), Academic Press.

[3] J. DIEUDONNÉ, «*Foundations of Modern Analysis*», (1960), Academic Press.

Natureza da Investigação Operacional (*)

por **Fernando de Jesus**

1. Generalidades sobre a natureza da ciência e metodologia

1.1. Caracterização da ciência

A extensiva bibliografia referente à definição ou caracterização da ciência é de tal modo vasta e abarca pontos de vista tão diversos e não raras vezes contraditórios, que se torna extremamente difícil apresentar uma definição adequada. Verifica-se, no entanto, que grande parte das dificuldades provém do facto de o significado do termo «ciência» não ser constante pois tem-se modificado com o decorrer dos séculos e não temos a certeza de que amanhã a designação tenha o mesmo sentido que hoje possui.

Não se podendo pois apresentar uma definição inatacável de ciência, é preferível mencionar algumas das características essenciais do que se designa por ciência.

Num conceito dinâmico, consideraremos *a ciência como um processo de investigação,* isto é, um processo para: (*a*) responder a questões, (*b*) resolver problemas, (*c*) desenvolver processos mais eficientes para responder a questões e resolver problemas. Posteriormente faremos a distinção entre questões e problemas.

A par da investigação científica é costume

(*) Palestra proferida no dia 8 de Janeiro de 1966 perante o Grupo de Investigação Operacional do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

porém considerar a investigação não científica, mas a distinção entre estes dois tipos de investigação é extremamente difícil e prende-se de perto com o complexo problema da limitação da ciência. No entanto, é ideia geralmente aceite que, através da investigação científica, o Homem tem mais possibilidades de obter respostas correctas para as questões e melhores soluções para os problemas. Isto não significa que os melhores resultados sejam sempre obtidos através da ciência mas que há mais possibilidades de os alcançar com o emprego de um processo científico de investigação. Esta superioridade da investigação científica deriva do facto de ser *controlada. Um processo é controlado na medida em que é eficientemente dirigido para a obtenção de objectivos desejados.*

O controle da investigação é exercido em vários graus, sendo o controle perfeito um ideal de que nos aproximamos cada vez mais com o avanço da ciência mas que nunca se atinge. Toda a investigação apresenta aspectos controláveis e incontroláveis e por consequência há muitas gradações de investigação além da investigação científica e da não científica.

O controle, embora necessário, não é porém suficiente para distinguir a investigação científica da não científica. A ciência caracteriza-se também pelos objectivos de *autoperpetuação* e *auto-aperfeiçoamento*, isto é, propõe-se aumentar sem limites o nosso conhecimento e a nossa eficiência para responder a questões e resolver problemas.

1. 2. Experimentação e investigação

Fala-se muitas vezes de experimentação como sinónimo de investigação científica, mas o certo é que nem toda a investigação envolve experimentação. Esta, no sentido que lhe era atribuído no século XIX, incluía a manipulação física de objectos, acontecimentos e suas propriedades. A manipulação física era considerada idêntica ao controle.

Pode na verdade fazer-se investigação controlada sem recorrer à manipulação física, como acontece, por exemplo, em astronomia. O controle pode obter-se pela manipulação conceptual de representações simbólicas (modelos) dos fenómenos que são objecto da investigação científica.

Ainda que o controle não seja sinónimo de manipulação física, alguns cientistas consideram útil a distinção entre investigações em que o controle se realiza dessa maneira (como num laboratório) e aquelas em que o controle não envolve manipulação física. Reservam a utilização do termo «*experimentação*» para a investigação que inclui manipulação física e o emprego do termo «*investigação*», para englobar a experimentação e qualquer outro tipo de investigação controlada.

Com o desenvolvimento recente das técnicas de *delineamento de experiências*, a manipulação física não é hoje tão necessária para a experimentação como era antigamente; ela pode ser substituída efectivamente por técnicas de classificação e casualização.

1. 3. Instrumentos científicos, técnicas e métodos

O progresso científico apresenta um aspecto bidimencional. Por um lado, tem-se alargado constantemente a gama de questões e problemas aos quais a ciência tem sido aplicada; por outro, a ciência tem aumentado continuamente a eficiência com que a investigação pode ser conduzida. Os resultados da investigação científica são pois (1) um corpo organizado de conhecimentos que nos permite controlar melhor o ambiente em que vivemos e (2) um corpo de processos que nos habilita a aumentar o conjunto de conhecimentos.

Ocupar-nos-emos exclusivamente dos processos pelos quais a ciência gera um corpo de conhecimentos — o processo de investigação.

Os processos que caracterizam a ciência são geralmente designados por *instrumentos*, *técnicas* e *métodos*. Embora haja tendência para a utilização indistinta destes termos, eles não possuem o mesmo significado.

Por *instrumento científico* deve entender-se o instrumento físico ou conceptual que é utilizado na investigação científica. Exemplos de tais instrumentos são os símbolos matemáticos, os computadores electrónicos, microscópios, termómetros, tabelas de logaritmos e de números aleatórios, etc..

A *técnica científica* é o modo de utilizar os instrumentos científicos. Por exemplo, os vários tipos de amostragem são técnicas científicas que utilizam uma tabela de números aleatórios, um instrumento científico; a utilização do cálculo diferencial é uma técnica para achar o extremo de uma função.

O *método científico* é o modo pelo qual se seleccionam técnicas na ciência. Enquanto as técnicas utilizadas pelo investigador são resultados das suas decisões, o modo pelo qual essas decisões são tomadas é o resultado das suas *regras de decisão*. Os métodos são regras de escolha; as técnicas são as próprias escolhas. Por exemplo, de um conjunto de modos alternativos de medir uma propriedade (comprimento, dureza, inteligência, etc.), a selecção do processo mais adequado envolve a utilização de um método.

O estudo dos métodos científicos constitui a *metodologia*. O objectivo da metodologia é o aperfeiçoamento dos processos e critérios empregados na investigação científica.

1. 4. Ciência pura e aplicada

A distinção entre ciência pura e aplicada embora seja difícil — se não impossível — ocupa actualmente papel relevante nas discussões sobre ciência.

A investigação pura é frequentemente caracterizada como a que conduz a resultados que não são imediatamente utilizáveis fora do domínio da ciência. Nesta exposição distinguiremos investigação pura de investigação aplicada, baseando-nos na diferença entre procurar «*responder a uma questão*» e «*resolver um problema*».

Entende-se que um indivíduo tem *um problema* se deseja atingir determinado objectivo, possui modos alternativos de o alcançar e ignora qual a melhor alternativa. Assim, para resolver um problema, deve proceder-se a uma investigação a fim de obter elementos que permitam escolher o melhor processo de atingir os objectivos que definem o problema. Na resolução do problema pode-se responder a questões no intuito de melhor prosseguir um conjunto especificado de objectivos. Se o interesse por uma questão não envolve a utilização da resposta na prossecução de um objectivo específico, então não existe um problema.

Quando às questões, no sentido em que foram definidas, se dão respostas por métodos científicos, considera-se que se faz investigação pura. Quando os problemas são resolvidos por investigação científica e algum dos objectivos envolvidos é de natureza não científica, a investigação diz-se aplicada. O que acabámos de dizer não significa que todos os problemas pertençam ao domínio da investigação aplicada. Problemas metodológicos, por exemplo, são do domínio da ciência pura porque os objectivos envolvidos são de natureza científica.

1. 5. As fases da investigação

As fases da investigação científica tradicionalmente apontadas são:

1) observação
2) generalização
3) experimentação

admitindo-se geralmente que estas fases se podem realizar simultâneamente ou por outra ordem.

Estas três fases de um processo de investigação científica são as geralmente aceites pelos cientistas que se dedicam à investigação pura. Do ponto de vista da investigação aplicada, é necessário adoptar uma nova sequência de fases:

1) formulação do problema
2) construção do modelo
3) obtenção de uma solução a partir do modelo
4) testar o modelo e a solução dele derivada
5) controlar a solução
6) pôr a solução em prática.

Muito do que vamos dizer adiante situa-se em torno da discussão de cada uma destas fases da investigação aplicada. Na prática, estas diferentes fases raramente se sucedem na ordem indicada. Muitas podem ser simultâneas e, em numerosos estudos, por exemplo, a fase que consiste em formular o problema só fica completa quando a investigação está virtualmente terminada.

O processo de investigação é usualmente cíclico. Por exemplo, se, ao testar o modelo, se conclui que ele é deficiente, a formulação do problema e a construção do modelo podem ser revistas e modificadas. Por outras palavras, as diferentes fases influenciam-se mutuamente durante o trabalho de investigação.

2. Caracterização da investigação operacional

Tendo-se verificado que é impossível dar uma definição precisa do âmbito de qualquer disciplina científica, prefere-se modernamente caracterizar um ramo da ciência indicando a faceta sob a qual encara a unidade e complexidade do real. Dentro desta orientação, vamos caracterizar a investigação operacional (1).

Devemos já sublinhar que a I. O. *é* o que o seu próprio nome implica: *investigação (aplicada) das operações.*

Outro ponto a relevar é que a I. O. envolve um ponto de vista particular das operações e um tipo especial de investigação aplicada.

Entende-se por *operação* o conjunto de actos requeridos para obter determinado resultado, isto é, uma operação é um complexo de actos inter-relacionados, executados simultâneamente ou em sequência, que conduzem à obtenção de determinados objectivos.

No entanto, frize-se, o objecto de estudo da I. O. *não* é constituído por *todos* os tipos de operações. Exemplificando: a I. O. não estuda as operações de um indivíduo que trabalha com uma máquina mas sim o *sistema homem-máquina.*

A I. O. ocupa-se dos sistemas formados por duas ou mais partes cujos actos constituem uma operação. Grande número de sistemas que interessam à I. O. envolve comunicação entre algumas das partes e certas conexões. A comunicação e as conexões caracterizam um tipo de sistema a que se dá o nome de *sistema estruturado* ou *organização.*

Mais rigorosamente, uma organização é um sistema formado por duas ou mais partes cujos actos constituem uma operação e que apresenta quatro características essenciais:

1) Alguns dos seus componentes são seres humanos.
2) A responsabilidade das escolhas de um conjunto de actos está dividida entre dois ou mais indivíduos e (ou) grupos de indivíduos.
3) Os subgrupos funcionalmente distintos são conhecedores das escolhas de cada

(1) Daqui em diante utilizaremos apenas as iniciais I. O. para designar a investigação operacional.

um dos outros por meio de comunicação ou observação.

4) Um subgrupo (ou grupo total) de indivíduos no sistema tem função de controle: compara os resultados obtidos com os resultados desejados e faz ajustamentos no sistema por forma a reduzir as diferenças observadas.

Se alguma das condições 2, 3 e 4 não é satisfeita o sistema *não está organizado*. Se qualquer destas condições, embora satisfeita, não o é eficientemente, o sistema diz-se *desorganizado*.

Pode dizer-se que *a classe de fenómenos que são objecto de estudo da I. O. é constituída pelas operações das organizações*, mas, com o objectivo de restringir ainda mais o domínio da I. O., temos de referir os tipos de problemas, envolvendo operações das organizações, que são seu objecto de estudo. Nesse sentido, vamos indicar os quatro tipos de alterações que se verificam numa actividade organizada.

1) *Conteúdo da organização:* aumento, diminuição ou modificação das pessoas e (ou) equipamento.
2) *Estrutura da organização:* alterações na divisão do trabalho, envolvendo homens e (ou) equipamento.
3) *Comunicação:* alterações na geração, recolha, tratamento e transmissão da informação.
4) *Controle:* alterações no modo por que os recursos disponíveis são usados.

No estudo das alterações 1), 2) e 3) intervêm várias disciplinas tais como a psicologia, a engenharia, a cibernética e a economia.

Embora em certos estudos de I. O. seja necessário determinar quais as modificações a efectuar no conteúdo e estrutura da organização e na comunicação, para atingir determinados fins, é o controle das operações que constitui o *domínio de aplicação da investigação operacional*.

Uma organização com bom pessoal e equipamento e dispondo de estrutura e comunicações eficientes pode, porém, ser ineficiente se não fizer a utilização óptima dos seus recursos (homens, máquinas, matérias e dinheiro), isto é, se as operações da organização não forem controladas eficientemente.

O controle obtém-se mediante a *decisão correcta* dos responsáveis pela direcção das operações. Neste contexto, decidir consiste em escolher e utilizar recursos, edificar uma estrutura, criar um sistema de comunicações e um processo de controle. *Fornecer às autoridades responsáveis pelo controle das operações de uma organização os resultados que sirvam de base a uma decisão correcta, eis pois o importante objectivo da I. O.*

Embora o controle se interesse pelo conteúdo, estrutura e comunicações, estes factores não são objecto de estudo da I. O. mas sim as decisões pelas quais eles são seleccionados, concebidos e utilizados.

3. Metodologia da investigação operacional

Como características gerais da metodologia da I. O. apontam-se: o *carácter interdisciplinar*, o *estudo dos sistemas como um todo* e o *recurso ao método científico*.

3.1. Carácter interdisciplinar

A divisão da ciência em disciplinas foi feita pelo Homem, não pela Natureza. Ora os diversos ramos da ciência não podem ser individualizados por uma categoria de fenómenos que constituem o seu objecto de estudo mas distinguem-se, sim, pelos aspectos parcelares sob os quais os encaram. Por exemplo, um acto de comunicação pode apresentar aspec-

tos físicos, químicos, biológicos, psicológicos, sociológicos e económicos.

Na linguagem corrente fala-se de problemas físicos, químicos, médicos, biológicos, sociais, políticos e económicos, como se eles se apresentassem diferenciados na Natureza. Na realidade, trata-se simplesmente de problemas e os adjectivos que os qualificam limitam-se a indicar a disciplina sob cuja faceta são estudados.

Dado um problema, não é geralmente fácil prever qual das disciplinas científicas fornecerá a melhor solução e se é possível obter esta no quadro restrito de uma só disciplina. Por esse facto, esboça-se actualmente a tendência para se encararem os fenómenos na multiplicidade dos seus aspectos. Isto não significa que se deixe de caminhar para a especialização, absolutamente indispensável ao progresso do conhecimento, mas sim que a investigação dos fenómenos reais tende progressivamente a assumir um carácter interdisciplinar. A adopção desta nova atitude científica implica que a investigação dos fenómenos reais tem de ser realizada por equipas de cientistas com diferentes especializações.

Ora uma das características metodológicas importantes da I. O. reside precisamente no seu *carácter interdisciplinar, dando-lhe a possibilidade de encarar os problemas reais sob a multiplicidade dos seus aspectos.*

As equipas de investigação operacional têm assim uma particularidade notável: agregam especialistas de diversas disciplinas que actuam tendo em vista o estudo unificado das operações.

3.2. Estudo dos sistemas como um todo

É evidente que a actividade de uma parte qualquer de uma organização influi sobre a actividade de cada uma das suas outras partes. Portanto, quando o investigador operacional se debruça sobre aspectos relativos ao controle de uma organização deve ter em conta todas as interacções significativas existentes no sistema que influenciam o fenómeno sob observação. Por outras palavras, *o estudo do sistema como um todo* envolve a consideração de todos os objectivos relevantes e todas as classes de acções que integram a operação.

Este processo de investigação é diferente do normalmente adoptado no quadro de outras disciplinas, o qual consiste em simplificar um problema muito complexo, isolando-o de certos factores que dificultam o seu tratamento. A I. O. adopta orientação oposta: considera deliberadamente todas as componentes significativas que intervêm na operação, cobrindo toda a área sob controle e não apenas uma parcela.

O estudo do sistema como um todo tem ainda um reflexo importante na I. O.. Esta é fortemente orientada pelos problemas e não pelas técnicas que tem à sua disposição, isto é, a I. O. tem provocado o desenvolvimento de técnicas ajustáveis ao tratamento eficiente dos problemas e não simplificado os problemas para lhes aplicar técnicas disponíveis.

3.3. Recurso ao método científico

Sendo a I. O. um tipo de investigaçã aplicada, é evidente que ela se processará de acordo com as fases já descritas anteriormente:

1) formular o problema
2) construir o modelo
3) obter uma solução a partir do modelo
4) testar o modelo e a solução dele derivada
5) controlar a solução
6) pôr a solução em prática.

Vamos focar, sucintamente, cada uma destas fases do método científico.

Na *formulação do problema* há a distinguir dois aspectos: o problema da entidade que tem de tomar decisões e o problema de investigação pròpriamente dito. Este é uma transformação do primeiro, envolvendo inicialmente a definição de uma base científica para encontrar uma política (sucessão de decisões) como solução.

O problema da entidade que pretende tomar decisões raramente é apresentado com clareza à equipa de I. O. e, portanto, na maior parte dos casos, é esta que tem de observar o sistema considerado, seus fins e as diferentes possibilidades existentes. É necessário também identificar todos os participantes susceptíveis de serem afectados pelas decisões, assim como determinar as operações em que eles intervêm e os seus objectivos.

O problema para a equipa de I. O. consiste depois, fundamentalmente, em determinar a política mais eficiente (*política óptima*) para a entidade que tem de tomar decisões. Consequentemente, a equipa tem de definir a medida ou quantificação da eficiência que vai tomar. Na definição de políticas óptimas assume papel relevante a *teoria da decisão*.

O *modelo* é um esquema simplificado para a interpretação da realidade. Em consequência da complexidade do mundo real, é necessário formular hipóteses simplificadoras que levem à compreensão de um certo fenómeno. A mera acumulação de observações não pode fornecer explicação satisfatória do fenómeno e, portanto, o investigador tem necessidade de sistematizar e racionalizar os factos conhecidos, seleccionando os aspectos mais importantes e desprezando os que considera irrelevantes.

É este processo de abstracção, acompanhado de uma generalização, que conduz à construção do modelo que vai permitir representar, com certo grau de aderência, o fenómeno real.

Os investigadores operacionais constroem e utilizam os chamados *modelos operacionais* no estudo das operações das organizações. Os modelos podem ser *icónicos, analógicos* e *simbólicos*.

Os modelos *icónicos* são representações, geralmente reduzidas, de estados, objectos ou acontecimentos. Estes modelos representam o fenómeno real apenas com uma transformação de escala. Podem considerar-se modelos icónicos, por exemplo, os mapas de estradas, as fotografias aéreas, os diagramas de fluxos que mostram o processamento de material ou informação, etc..

Quando num mapa se pretende mostrar o relevo, não se recorre geralmente a um mapa tridimensional; utilizam-se para esse efeito curvas de nível.

Querendo-se indicar o estado das estradas, podem usar-se cores e uma legenda explicativa. Nestes, como noutros casos, emprega-se uma propriedade para representar outra e o modelo assim construído diz-se *analógico*.

Um sistema eléctrico pode ser representado por um sistema hidráulico onde o fluxo de água representa a corrente eléctrica. A régua de cálculo é também um modelo analógico em que as quantidades são representadas por distâncias proporcionais aos seus logarítmos. Os gráficos em que são representadas certas propriedades, tais como custos, tempo, números de pessoas e percentagens, constituem também exemplos de modelos analógicos.

Os modelos *simbólicos* são aqueles em que as propriedades do fenómeno real são expressas simbòlicamente. Como se sabe, a matemática assume papel relevante na construção dos modelos simbólicos que se utilizam em diversas ciências. São os chamados *modelos matemáticos*.

Os modelos icónicos são os mais concretos dos três tipos de modelo mas, em geral, são os mais difíceis de manipular para a determinação do efeito de variações no fenómeno real. Os modelos analógicos são geralmente mais fáceis de manipular e como consequência possuem um carácter mais abstracto. Os

modelos simbólicos são os mais abstractos e gerais e são normalmente os mais fáceis de manipular.

Em I. O. utilizam-se os três tipos de modelos, sendo frequente o emprego de modelos icónicos e analógicos como fase intermédia na construção de modelos simbólicos.

Os modelos matemáticos utilizados em I. O. apresentam-se frequentemente com uma expressão matemática complicada. No entanto, a estrutura de um modelo matemático operacional é relativamente simples. Com efeito, designando E uma medida de eficiência, C_i variáveis controláveis ou de acção e I_j variáveis incontroláveis, E é função de C_i e I_j, isto é, a forma básica de um modelo matemático operacional é:

$$E = f(C_i, I_j).$$

Em certos casos, é necessário acrescentar a este modelo básico um conjunto de restrições sobre os valores possíveis de C_i.

Os modelos operacionais são de explicação-previsão não só porque mostram como as coisas se passam, como os diversos factores reagem entre si, como a medida de eficiência varia em função das variáveis de acção, mas também porque não se limitam a verificar o passado, devendo aplicar-se ao futuro para permitirem a tomada de uma decisão.

Os modelos operacionais também se classificam em exactos (ou deterministas) e estocásticos. Um modelo exacto utiliza-se quando o acaso desempenha um papel pouco importante; o modelo estocástico contém explìcitamente variáveis aleatórias.

Quanto à forma das relações que os integram, os modelos matemáticos podem ser lineares ou não lineares. No primeiro caso todas as relações são lineares, no segundo pelo menos uma não é linear.

A consideração da variável tempo conduz a uma nova classificação dos modelos em estáticos e dinâmicos. O modelo é estático quando todas as variáveis que nele intervêm se referem ao mesmo instante t; é dinâmico quando as relações compreendem variáveis desfasadas.

A gama diversíssima de modelos matemáticos de que dispõe a investigação operacional é constituída fundamentalmente pelos modelos aplicáveis ao estudo dos problemas básicos que se põem à entidade controladora das operações de uma organização e que serão descritos sucintamente no n.º 5: existências, repartição, filas de espera, ordenação, substituição, concorrência e pesquisa.

Construído o modelo que representa a operação, segue-se a terceira fase do processo de investigação: *obtenção de uma solução a partir do modelo.*

Sendo

$$E = f(C_i, I_j)$$

o modelo matemático que representa a operação, põe-se o problema de obter os valores de C_i que optimizam E. A solução aparece na forma

$$C_1 = f_1(I_j)$$
$$C_2 = f_2(I_j)$$
$$- - - - - - -$$

$f_1, f_2 \cdots$ são as chamadas *regras de decisão.*

Existem dois processos principais para derivar uma solução óptima (ou vizinha da solução óptima): o processo *analítico* e o processo *numérico.*

O processo analítico consiste na obtenção da solução por via dedutiva, utilizando diversos ramos da análise matemática e da álgebra. O processo numérico consiste na utilização de técnicas que permitem obter índutivamente a solução, quer ensaiando diversos valores nas variáveis de acção quer adoptando processos iterativos.

Entre os processos de análise numérica assume posição relevante a *simulação* que

abrange um conjunto de técnicas, utilizáveis sobretudo quando há dificuldades para formular o modelo, obter soluções a partir do modelo ou testar o modelo e a solução dele derivada.

Na quarta fase do processo de investigação põe-se o problema de *testar o modelo e a solução dele derivada.*

Dado que o modelo é uma representação simplificada da operação, ele será bom se possui suficiente aderência à realidade, isto é, se apesar do seu carácter incompleto, serve para explicar a realidade, fazer previsões e tomar decisões com certo grau de precisão. Utilizam-se largamente em I. O. técnicas estatísticas para testar os modelos e as suas soluções.

Na fase de *controle da solução de um modelo,* há que atender ao facto de ela só permanecer como solução quando as variáveis incontroláveis mantêm os seus valores e não há modificações das relações entre as variáveis. Para controlar uma solução é necessário (*a*) definir para cada variável e relação uma variação significativa, (*b*) construir um processo para detectar a ocorrência de tais variações significativas e (*c*) especificar como deve ser modificada a solução se ocorrem tais variações.

Um dos problemas mais delicados que finalmente se põe à equipa de I. O. é o de conseguir *pôr a solução em prática.*

As soluções são geralmente executadas por pessoal cujos conhecimentos matemáticos são muito reduzidos e, por consequência, se a equipa de investigação operacional quer assegurar o cumprimento das suas recomendações deve apresentar as soluções em termos muito simples.

Como já dissemos, na prática, estas diferentes fases de investigação raramente se sucedem na ordem indicada. Muitas podem ser simultâneas e em numerosos estudos, por exemplo, a fase que consiste em enunciar o problema só fica terminada quando o próprio estudo está virtualmente terminado. Normalmente as diferentes fases influenciam-se mutuamente durante o trabalho de investigação.

4. Breve história da investigação operacional

4.1. Período anterior à II Grande Guerra

Embora o termo «*investigação operacional*» seja relativamente recente, a utilização de métodos científicos na preparação das decisões que competem a uma autoridade executiva remonta a datas longíquas. Recordemos que já no século III A. C., Hierão, tirano de Siracusa, pedia ao sábio Arquimedes que indicasse a mais eficiente utilização das armas da época a fim de romper o cerco imposto pela frota romana.

Mais perto de nós, PASCAL, FERMAT e sobretudo JACQUES BERNOULLI são os percursores da teoria da decisão, criando um novo ramo da matemática — o cálculo das probabilidades — cujo desenvolvimento teve grande influência nos progressos recentes da I. O..

Em 1885, surgem os trabalhos pioneiros de TAYLOR sobre a organização científica do trabalho; em 1917, aparecem as contribuições de ERLANG sobre as comunicações telefónicas e, em 1930, LEVINSON aplica os métodos científicos a problemas de mercado.

No domínio das aplicações militares, devem referir-se os trabalhos importantes de LANCHESTER (1916), que traduziu em fórmulas matemáticas algumas complexas estratégias militares, e as contribuições de EDISON sobre as técnicas a serem adoptadas pelos navios mercantes para se defenderem dos submarinos.

4. 2. Período 1939-45

Foi no entanto durante a Segunda Guerra Mundial que a I. O., já assim designada, recebeu um impulso extraordinário.

Desde 1939 que um pequeno grupo de técnicos dedicados à I. O. trabalhou, em Inglaterra, na crítica dos métodos de emprego dos primeiros radares. E, nas horas cruciais de 1940, o Estado Maior inglês recorreu a uma equipa de investigadores — o grupo Blackett — para conseguir o aproveitamento óptimo do sistema defensivo britânico. Citam-se como resultados notáveis obtidos por estes cientistas, os seguintes: duplicação da eficiência dos ataques aéreos aos submersíveis, nova disposição dos combóios de navios por forma a minimizar as perdas, organização dos bombardeamentos aéreos sobre a Alemanha, etc..

Paralelamente, nos E. U. A., desde a sua entrada na guerra, grupos de I. O. foram incubidos pelo exército, marinha e força aérea de estudarem científicamente cada uma destas armas. Métodos e formação de ataque dos submersíveis inimigos, técnicas de bombardeamento aéreo por esquadrilhas, meios de defesa contra os ataques aéreos dos japoneses, eis alguns dos assuntos estudados, tendo-se obtido uma sensível melhoria dos resultados e uma diminuição importante das perdas inevitáveis.

4. 3. Período do após-guerra

No fim da guerra, os grupos de I. O. gozavam de merecido prestígio. Tinha ficado demonstrado, durante as hostilidades, que as equipas constituídas por especialistas das mais diversas disciplinas eram capazes de resolver complexos problemas, envolvendo muitas variáveis, e os métodos que tinham permitido obter uma maior eficiência das armas e uma valiosa economia em vidas humanas e material, eram susceptíveis de ser aplicados, em tempo de paz, na obtenção de uma maior eficiência económica.

Terminado o conflito, numerosas empresas progressistas aplicaram nas suas organizações os métodos da I. O. que a tão bons resultados tinham conduzido no período das hostilidades. Na Inglaterra, por exemplo, as primeiras organizações a introduzirem a I. O. nos seus serviços foram a «British Transport Commission», o «National Coal Board», «Courtaulds, Ltd». e a «British Iron and Steel Federation». Também nos E. U. A., na França e, pouco a pouco, em todos os países abertos ao progresso científico, os meios industriais, comerciais e o próprio sector público foram-se interessando pela I. O..

Nos Estados Unidos, onde existiam já, antes de 1941, numerosos gabinetes ou empresas de organização científica, a introdução da I. O. nos meios de negócios foi rápida e pode dizer-se que, embora existam nesse país milhares de especialistas, eles não chegam actualmente para satisfazer a procura das empresas.

Em França, a adopção da I. O. começou a ser feita pelas grandes empresas nacionalizadas (S. N. C. F., E. D. F., etc.) e ràpidamente se difundiu. Existem também, neste país, alguns grupos de consultores que se dedicam ao estudo científico dos problemas postos pela indústria e as maiores empresas dispõem das suas próprias equipas de I. O.

Nos países socialistas, a I. O. encontra-se também muito difundida. Na U. R. S. S., por exemplo, a I. O. é largamente utilizada no planeamento económico.

O desenvolvimento progressivo das aplicações da I. O. nos diversos sectores da actividade económica é, ao mesmo tempo, causa e efeito do número crescente de livros e revistas especializadas que se publicam hoje em todo o mundo. Simultâneamente, têm-se fundado numerosas sociedades científicas que agrupam os técnicos e as empresas interessadas na I. O. Entre as mais importantes

citam-se: *Operational Research Society* (Inglaterra), fundada em 1948, que publica desde 1950 a revista *Operational Research Quarterly*; a *Operations Research Society of America*, fundada em 1952, publicando o *Journal of the O. R. S. A.*; em França, a *Société Française de Recherche Opérationnelle*, (1) criada em 1956, edita a *Revue Française de Recherche Opérationelle*.

Em 1 de Janeiro de 1959, fundou-se a *Federação Internacional das Sociedades de Investigação Operacional* que agrupa, actualmente, as sociedades da Alemanha, Argentina, Austrália, Bélgica, Canadá, Dinamarca, Espanha, França, Holanda, Índia, Inglaterra, Itália, Japão, Noruega, Suécia e Suiça. A federação começou a publicar, em 1962, a revista bibliográfica *International Abstracts in Operations Research* que regista as publicações de livros e artigos que dizem respeito à I. O. ou disciplinas afins.

5. Descrição sumária da forma e conteúdo dos problemas que se apresentam à investigação operacional

5.1. Generalidades

Embora não exista uma classificação única dos tipos de problemas que podem ser resolvidos por meio da I. O., veremos que há certas formas básicas que se encontram nas mais diversas situações reais.

Consideraremos a seguir sete formas básicas que, isoladamente ou em combinação, abrangem a maior parte dos problemas que se põem à entidade executiva de uma organização. A classificação adoptada é a seguinte:

1. Existências
2. Repartição
3. Filas de espera
4. Ordenação
5. Substituição
6. Concorrência
7. Pesquisa.

Relativamente a cada uma destas sete formas, faremos algumas observações sobre o modo de tratar esses problemas, sem no entanto entrarmos em detalhes técnicos.

Finalmente, agrupando os problemas em termos do seu conteúdo, daremos uma ideia da gama de situações concretas a que a I. O. tem sido aplicada.

5.2. Formas de problemas

5.2.1. Problemas de existências

Existências são recursos provisòriamente inactivos. Homens, material, máquinas e dinheiro são os principais recursos de que dispõem as autoridades executivas.

Para existir um problema de existências deve haver dois tipos de custos associados com os recursos inactivos: (1) um custo que cresce com o aumento das existências e (2) um custo que decresce com esse aumento.

Um custo crescente é, sem dúvida, o custo corrente das existências que inclui custos de armazenagem, custos de obsolência e deterioração, impostos, seguros, etc.. Há custos que decrescem quando aumentam as existências como, por exemplo, os custos de rotura, que estão associados com a impossibilidade de satisfazer a procura ou com as demoras em a satisfazer.

Pode definir-se um problema de existências como aquele em que está envolvido pelo menos um custo de cada tipo e onde a soma

(1) Esta Sociedade juntou-se recentemente à «Association Française de Calcul et Traitement de l'Information» e passaram a constituir a «Association Française d'Informatique et de Recherche Opérationelle».

desses custos é influenciada ou pela procura de artigos, ou pela frequência de reaprovisionamento, ou ainda por ambas. A questão consiste em seleccionar a quantidade ou frequência de reaprovisionamento, ou ambas, por forma a minimizar a soma dos custos relevantes.

Os problemas de existências aparecem nos mais variados contextos e existem técnicas matemáticas muito desenvolvidas para o seu tratamento. O cálculo infinitesimal, o cálculo das probabilidades e a álgebra linear estão na base dessas técnicas. Em casos mais complicados, quando é possível construir o modelo mas é difícil obter a solução, utilizam-se técnicas de simulação que, em geral, envolvem o emprego de um computador electrónico.

5. 2. 2. Problemas de repartição

Estes problemas agrupam-se em *três categorias* principais. Um problema de repartição da *primeira categoria* define-se pelas seguintes condições:

1. Há um conjunto de tarefas (de qualquer tipo) a cumprir.
2. Há recursos disponíveis suficientes para cumprir todas as tarefas.
3. Pelo menos uma das tarefas pode ser cumprida de diferentes maneiras, utilizando combinações e quantidades diferentes de recursos.
4. Algumas das maneiras de executar as tarefas são melhores do que outras (por exemplo, mais baratas ou mais lucrativas).
5. Não há recursos disponíveis suficientes para fazer cada uma das tarefas da melhor maneira possível.

O problema consiste em repartir os recursos pelas tarefas por forma a maximizar a eficiência total; por exemplo, minimizar o custo total ou maximizar o lucro total.

No problema de repartição mais simples, pertencente a esta categoria, cada tarefa requer um e um só recurso e há o mesmo número de tarefas e recursos. É o chamado *problema de afectação* porque envolve a afectação de um recurso a cada tarefa.

Suponha-se, por exemplo, que numa empresa há n lugares vagos $J_1, \cdots, J_n$ e n candidatos $I_1, \cdots, I_n$. Admitindo que, por meio de um teste, é possível obter quantitativamente a eficiência a_{ij} do indivíduo I_i para o lugar J_j, pretende-se afectar os indivíduos às tarefas por forma a maximizar a eficiência total. Representando por x_{ij} uma variável que toma o valor 1 ou 0, consoante o indivíduo I_i é afectado ou não à tarefa J_j, o problema traduz-se matemàticamente do seguinte modo:

maximizar

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$$

com as restrições

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

$$x^2_{ij} = x_{ij}$$

Quando algumas das tarefas requerem mais do que um recurso e se os recursos podem ser utilizados para mais de uma tarefa, o problema de repartição complica-se. Um dos problemas mais frequentes nesta categoria é o *problema do transporte*. Considere-se, por exemplo, um certo produto P que é produzido em cada uma das m fábricas $F_1, \cdots, F_m$ e seja a_i a produção anual de F_i. Su-