La Inducción Matemática

por Eduardo H. del Busto (1)

A los profesores de matemática secundaria que han sido mis alumnos.

INTRODUCCION

De acuerdo con recomendaciones didácticas recientes, el método de la inducción matemática *pronto ha de ser tema de explicación en la segunda enseñanza.*

Los textos corrientes entre los profesores no son ricos en motivaciones adecuadas a la exposición y a la comprensión del razonamiento por recurrencia. Por fortuna, el excelente y ampliamente difundido How to solve it, *de George Polya, llena un notorio vacío en cuanto a la enseñanza del* mecanismo inductivo, *pues aporta inteligentes detalles cuyo conocimiento todo professor agradece.*

A nuestro juicio, falta, sin embargo, un enfoque histórico *de la cuestión, destinado a rastrearla desde los remotos y oscuros orígenes hasta los días presentes, cuando se manifiesta plena de sugerencias y posibilidades de* integración cultural. *El especialista en Historia de la Matemática cuenta, sin duda, con la información bibliográfica y, acaso, con los testimonios necesarios para reconstruir las etapas sucesivas de la argumentación inductiva; pero, en realidad, no tratamos aquí la historia de este interesante tema de la matemática sino en la medida parcial requerida por nuestro intento — repetimos — de ofrecer un enfoque histórico que satisfaga algunas exigencias didácticas. Queremos, pues, suministrar una serie de motivaciones más para el logro de una mayor comprensión de un modo de razonamiento cuya naturaleza misma aparece con nuevos relieves si se la trata según su línea evolutiva a través de los tiempos.*

La relación de las principales conexiones históricas del problema de la inducción matemática, que tantas implicaciones tiene, ha de servir — así lo esperamos — para provocar el interés de los alumnos secundarios, cuya fuerte apetencia cultural *no siempre es aprovechada al máximo en los cursos científicos de segunda enseñanza.*

A pesar de lo dicho, el presente trabajo está dedicado a los professores y no a los discípulos; por lo menos, en principio. Mas estamos seguros que los enseñantes harán llegar a los jóvenes, en oportunas dosis bien acondicionadas, algunos elementos de los muchos y variados que en esta reseña ofrecemos. La experiencia personal les ha de dar la pauta que mejor convenga a los alumnos.

La finalidad didáctica *de nuestra exposición y el* círculo de lectores *en quienes se ha pensado al redactarla, determinan el nivel y la extensión de los comentarios que siguen. No se requieren conocimientos especiales para abordar el contenido de este folleto; pero cierta madurez intelectual y alguna somera información acerca de los fundamentos de la matemática, se necessitan para interpretar cabalmente el alcance de las palabras de los últimos capítulos, donde la dificultad de los pro-*

---

(1) Doctor en Matemática. Profesor de la Universidad Nacional del Sur — Bahía Blanca.

blemas tan sólo enunciados brevemente en la mayoría de los casos, nos ha obligado a cortar y poner punto, so pena de salirnos de los límites que nos habíamos fijado antes.

Procurando ser sencillos y parcos, cuando los temas se tornan complejos o demasiado polémicos hemos preferido remitirnos a alguna obra especializada y de fácil acceso, donde podría satisfacerse la legítima avidez del presunto lector.

Bahía Blanca, Noviembre de 1963.

EL AUTOR

DEMOSTRACIONES POR INDUCCION MATEMATICA

1. 1. Empezamos por hacer una advertencia respecto de la denominación «inducción matemática».

La palabra «inducción» es capaz de producir equivocaciones y, para no caer en ellas, se emplea el aditamento calificativo de «matemática». Algunos autores la llaman, en cambio, «inducción completa» y otros aún, prefieren evitar lisamente la voz «inducción», causante de interpretaciones erróneas, y aconsejan decir «recurrencia» por todo nombre.

La última denominación nos parece la más oportuna y práctica, porque no favorece como aquellas a mantener una confusión bastante común entre los principiantes. En efecto, el método de la demostración por recurrencia difiere completamente de esa inferencia inductiva, de la cual nos valemos en la vida diaria y en la ciencia de la naturaleza, para aprender a partir de la experiencia reiterada.

La *inferencia inductiva* nos hace extraer consecuencias generales mediante la observación de un número finito y tal vez pequeño de casos particulares, en los cuales se reitera una característica común a todos. Pero la conclusión obtenida es cierta sólo cuando hemos podido verificar uno a uno, sin excepción, los casos que constituyen el objeto de observación; es decir, cuando han sido observados todos, sin dejar ninguno. De otro modo, *la conclusión obtenida por inferencia inductiva es* cierta *cuando hemos procedido por enumeración completa.*

Si no hubiésemos tenido a nuestro alcance la enumeración completa (sea porque no la hayamos efectuado voluntariamente, sea porque resulte infinita o sencillamente impracticable), la inferencia inductiva todavía nos brindará una conclusión (no cierta sino) *probable* en relación a alguna característica de los casos observados, *siempre que no hayan aparecido ejemplos contraproducentes.* Este tipo de conclusiones se obtienen por *enumeración incompleta* y son los más corrientes en las ciencias.

Vamos a ilustrar la inferencia inductiva por enumeración completa y por enumeración incompleta.

Si revisamos uno a uno los libros de una biblioteca y observamos, sin excepción, que tratan temas literarios, llegamos a la conclusión *cierta* de que la biblioteca es de literatura (Enumeración completa).

Si nos limitamos a revisar un conjunto de libros de esa biblioteca, pero no la totalidad de ella, estaremos constreñidos a extraer la conclusión *probable* de que la biblioteca es literaria, siempre que no hubiésemos hallado ningún volumen no literario (Enumeración incompleta). La conclución es tanto más probable cuanto mayor sea el número de las reiteradas observaciones.

Las conclusiones surgidas de la inferencia inductiva (completa o incompleta) no son proposiciones *demostradas*, en el sentido lógico del término. Podemos decir de ellas que han sido *verificadas* (en forma total o parcial, respectivamente).

En cambio, la *recurrencia (inducción matemática* o *inducción completa)* es, en primer lugar, un método de demostración al cual la matemática echa mano a fin de *deducir* proposiciones estrictamente válidas en una infinidad numerable de casos, sin requerir, no obstante, una infinidad de pruebas.

Conviene insistir en este punto: la recurrencia es un método de demostración, no de verificación. Es, por ende, esencialmente diversa de la inferencia inductiva.

Es verdad, empero, que muchas innovaciones en matemática se conjeturan antes de demostrarse; y es verdad también que, en el proceso de conjeturar, la mente humana procede muchas veces inductivamente, como lo atestiguan trabajos de psicología de la invención. Pero la incorporación de una proposición al dominio matemático exige, en absoluto, el cumplimiento de los requisitos de la ciencia demostrativa. La recurrencia sirve los propósitos de ésta; no debe ser confundida, pues, con la inducción de las ciencias naturales.

Para comprender mejor lo que acabamos de expressar, veremos algunos ejemplos matemáticos, donde hacemos uso correcto o incorrecto del método de recurrencia.

1. 2. Leamos con atención los enunciados y demostraciones que siguen:

a) *Demostrar que* $1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, *para cualquier* n *natural.*

Muchos alumnos están tentados de razonar como si se tratase de una proposición que se somete a prueba experimental. Dirían, poco más o menos: «La fórmula es cierta porque se cumple si n = 1, 2, 3, 4, 5, *etc.* Inferimos, pues, que es verdadera».

En matemática un razonamiento tal es inadmisible, aunque sea del tipo que emplean la física, la química, la biología, para verificar una hipótesis probable.

El método de recurrencia, como veremos luego, trasciende la conjetura y afirma la proposición deductivamente.

b) *Demostrar que todo número naturat de la forma* $n^2 + n + 41$ *es primo.* (?)

Esta famosa expresión propuesta por Leonhard Euler (1707 a 1783) «parece» cierta porque se verifica para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots, 39$; es decir, se verifica en los primeros cuarenta (!) casos... Sin embargo, para $n = 40$, resulta un número compuesto: $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$.

¿Para qué nos sirve este hermoso ejemplo? Para precavernos de las conjeturas inferenciales no demostradas y para distinguir, de una vez por todas, una demostración matemática de una inducción natural.

c) n *planos dividen al espacio en* 2^n *partes.* (?)

Otra vez la misma historia. Si $n = 1$, la proposición se verifica; si $n = 2$, también; si $n = 3$, también. Sin embargo, cuatro planos dividen al espacio en catorce partes, y cinco planos lo dividen en veintidós.

O sea, la proposición anterior no se verifica para $n = 4$ ni para $n = 5$; el teorema no es cierto *en general*, a pesar de que una conjetura apresurada permitía suponerlo.

(En general, lo cierto es que n planos dividen al espacio en $n(n-1)+2$ partes).

En matemática (y en ciencia natural) basta que un solo caso contradiga a una fórmula conjeturada como válida en general, para que tal fórmula quede negada en general (En matemática, definitivamente; en ciencia natural, transitoriamente).

La proposición general b) quedó invalidada al verificar que $n = 40$ no la satisface, o sea que $40^2 + 40 + 41$ no es primo; la proposición c) quedó invalidada al verificar que $n = 4$ (ó $n = 5$) no la satisfacen.

¿Será necesario recurrir a una *infinidad* de verificaciones para asegurar la *validez general* de una fórmula como la a), por ejemplo? Si así fuese, nunca estaríamos en con-

diciones de afirmar que una proposición como la a) es cierta en general, porque existe imposibilidad de realizar infinitas verificaciones. Afortunadamente, el método de demostración por recurrencia nos proporciona la clave para razonar correctamente en estos casos del quehacer matemático.

El esquema es notable por su sencillez. Ante una proposición general en donde intervienen los números naturales $1, 2, \cdots, n, \cdots$ (o, acaso, $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$) y cuya verdad debemos demostrar, procedemos en tres etapas:

1.° *Demostramos* que la proposición es cierta para un primer elemento (para $n = 1$ ó para $n = 0$, por ejemplo). Como éste constituye un solo caso, basta una verificación de la fórmula; verificación que es válida por enumeración completa.

2.° *Demostramos* que la proposición es cierta para $n = k + 1$ *si* la hemos supuesto cierta para $n = k$, siendo k un número natural *cualquiera.*

3.° «Cumplidas las etapas 1.° y 2.°, *afirmamos* que la proposición es cierta en general». La afirmación es trascendental, en el sentido de que traspasa los límites de cualquier posible experiencia. Reparemos bien: se apoya en que, para un primer elemento se verifica (o se demuestra) la proposición, y que *supuesta* válida para un elemento *cualquiera,* se *demuestra* válida para el *siguiente* elemento.

La tercera etapa constituye el principio de recurrencia (o de inducción completa) cuya esencia e implicaciones culturales intentaremos dilucidar históricamente, a partir del Cap. II. Por ahora contentémonos con parangonarlo con la sucesión de una herencia dejada por un primer magnate con orden de transmitirla inalterada indefinidamente, sin que ninguna vicisitud la modifique nunca. Condiciones muy fuertes; condiciones ideales, sólo exigibles en el dominio de la razón.

Para conceder vigencia al principio de recurrencia es condición esencial que las etapas 1.° y 2.° sean demostradas. De otra manera, decimos que el principio de recurrencia se apoya en la demostración de dos teoremas previos: uno se refiere al primer elemento y otro concluye la validez de la proposición para un elemento cualquiera si se la *supone* para el elemento anterior. La segunda condición significa que la fórmula sometida a prueba constituye una *propiedad hereditaria* e inalterable, transmitida del caso k-ésimo al siguiente, cualquiera sea k.

El principio se halla condicionado, pues, a dos teoremas. A dos teoremas y no a uno de los dos. El profesor debe insistir sobre este particular...

Pasemos ahora a ejemplos concretos para mostrar la aplicación correcta del principio de recurrencia y para mostrar, también, los efectos que produce una aplicación incorrecta.

d) Demostramos por recurrencia la conjetura planteada en *a*)

TEOREMA. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, *para cualquier* n *natural.*

Primera etapa (Teorema d · 1): *La fórmula es cierta para* $n = 1$.

En efecto, tomando $n = 1$, la fórmula se verifica, pues resulta

$$1 = \frac{1 \cdot (2)}{2}.$$

Esta verificación directa basta; lógicamente.

Segunda etapa (Teorema d · 2): *Si la fórmula se supone válida para* $n = k$ (siendo k, cualquiera), *es también válida para* $n = k + 1$.

Partimos de la hipótesis de d · 2, que consiste en suponer cierto que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Sumando $k+1$ a ambos miembros de la igualdad y operando de acuerdo con las reglas de la aritmética, se obtiene:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

que es lo que procurábamos demostrar, porque la última expresión es la misma que resultaría de la fórmula *d*) si se reemplazase en ella n por $k+1$.

Como acaba de verse, ya se han cumplido las etapas primera y segunda, y, por tanto, es aplicable la tercera etapa, la cual equivale a afirmar que la fórmula *d*) es válida en general por haberse demostrado d · 1) y d · 2).

Ha quedado demostrado por recurrencia o inducción completa el teorema

Es $1+2+3+\cdots+\mathrm{n}=\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}$, *cualquiera sea* n *natural.*

Si el lector se sirve cotejar el razonamiento que hemos efectuado a lo largo del párrafo correspondiente al ejemplo *d*), con el que habíamos presentado en *a*), recibirá una patente aclaración de la diferencia que existe entre una demostración y una simple conjetura inductiva.

¿Es imprescindible cumplir las tres etapas para la correcta aplicación del método demostrativo por recurrencia? La respuesta es afirmativa, como los ejemplos que vienen a continuación lo evidencian.

e) Es imprescindible demostrar la etapa primera. De lo contrario llegaríamos a conclusiones erróneas como la omisión de esta etapa permite extraer. Así, el falso teorema: *Todo número natural iguala al siguiente*, se fundamenta en haber «demostrado» que $n=n+1$, para todo natural (!). En efecto, pensaríamos luego de haber omitido la verificación que impone la etapa primera, *si suponemos que* $k=k+1$ (etapa segunda, sola), *se deduce que* $k+1=k+2$, pues esta última igualdad (!) se obtiene de la anterior sumando 1 a ambos miembros.

Si, en virtud de cumplirse la etapa segunda (y no cuidando que debe cumplirse, además, la primera) aplicamos (mal) ahora la etapa tercera, concluiríamos afirmando que $n=n+1$, para todo n natural. Esto implicaría afirmar también que todos los números naturales son iguales entre sí; lo cual no es cierto.

A tan grave error hemos sido conducidos por no haber respetado la etapa primera; aquella que nos habría exigido verificar que $n=n+1$ se cumple si $n=1$, y, como esto no es verdad, pues 1 no es igual a 2, no tenemos derecho a aplicar la etapa tercera; es decir, el principio de recurrencia no cabe en este caso.

f) Es imprescindible demostrar también la etapa segunda. Sobre este particular nos basta con recalcar algunas observaciones que ya tenemos hechas.

Las conclusiones erróneas *b*) y *c*) verifican, no obstante ser falsas, la etapa primera: ambas se cumplen para un primer elemento natural.

Sin embargo *no son ciertas* en la segunda etapa, pues no valen para el siguiente de cualquier k, como lo hemos notado a través de casos particulares en los ejemplos *b*) y *c*).

Del mismo modo como reclama la verificación para el primer elemento, el principio de recurrencia exige el cabal cumplimiento de la segunda etapa, donde se pone de relieve el carácter hereditario, inalterable, de una propiedad que se trasmite desde ese primer elemento indefinidamente.

En *Induction and Analogy in Mathematics* (volumen I de *Mathematics and Plausible Reasoning*) de Georg Polya, se plantea un problema paradojal muy ilustrativo de lo que

importa la elección de un elemento *cualquier* en la segunda etapa de la demostración por recurrencia. Helo a continuación:

Considerando que las paralelas son rectas del plano que se cortan en el infinito, demostraremos (!) que «n rectas cualesquiera del plano tienen un punto en común».

La proposición es obvia para $n = 1$ y para $n = 2$ (aún tratándose de paralelas, como hemos dicho). Supongamos ahora que la proposición es cierta para $n = k$. Entonces, para «probar» que es cierta para $n = k + 1$ razonamos así:

De las $k + 1$ rectas elegimos k. Estas pasan por un punto, según hemos supuesto. Una de ellas y la $(k + 1)$-ésima recta pasan, entonces, por un punto, pues así lo hemos verificado para $n = 2$. Luego, las $k + 1$ rectas pasan por un punto del plano (!).

La conclusión es falsa, sin embargo, porque tres rectas distintas *no pasan necesariamente* por el mismo punto del plano. Por consiguiente, al tomar en consideración k rectas del plano, bastará suponer que por lo menos *dos* son distintas para no poder inferir necesariamente que dichas k rectas y la $(k + 1)$-ésima se cortan en un solo punto.

Esta paradoja nos enseña que para aplicar correctamente el principio de recurrencia, es esencial que las condiciones de la herencia estén precisamente enunciadas y valgan para cualquier n. No basta que valgan para algunos n (como aquí, para $n = 1$, ó $n = 2$, nada más).

1. 3. Para familiarizar al alumno con las tres etapas del método de recurrencia, el profesor debe encomendar varios ejercicios de demostración. Una colección muy útil es la de los capítulos I y II de I. S. Sominskii, *The method of mathematical induction,* Blaisdell, N. York y Londres, 1961.

La práctica del método facilita la correcta interpretación y torna comprensible al alumno el enunciado del principio de recurrencia, que los textos corrientes presentan ya como axioma ya como teorema.

Algunos de esos enunciados se transcriben a continuación:

(1.3.1) «Supongamos haber demostrado: *a*) que el número 1 (o el cero) tiene la propiedad P; *b*) que, en la hipótesis de que el número natural k tiene la propiedad P, se demuestra que el número natural $k + 1$ también la tiene. Entonces todo número natural tiene necesariamente la propiedad P».

(1.3.2) «Para demostrar que una propiedad P de los números naturales es general para todos los números mayores o iguales que uno de ellos llamado m, basta verificar: *a*) que P se verifica para m; *b*) que supuesto que P se verifica para $n \geqq m$, se prueba que P se verifica para $n + 1$».

En este enunciado, m oficia de primer elemento.

(1.3.3) «Sea N el conjunto de los números naturales y se trata de verificar cierta propiedad. Entonces

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & \text{La propiedad es verdadera para } a=1; \\ (2) & [\forall p \in \mathrm{N}: \text{ verdadera para } a = p] \\ & \Rightarrow [\text{verdadera para } a = p + 1] \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow [\text{verdadera } \forall a \in \mathrm{N}]\text{»}.$$

La precedente enunciación reviste una forma aceptable para un enfoque moderno de la matemática elemental. Es particularmente interesante porque pone de manifiesto la vinculación de las implicaciones. Se deberá cuidar que los alumnos sepan traducir al lenguaje corriente lo expresado por los símbolos.

(1.3.4) «Si a un conjunto pertenece un primer número natural, y con cada elemento su sucesor, entonces a ese conjunto pertenecen todos los números naturales».

Como hemos tomado aquí el amplio concepto de «conjunto» como equivalente al de «clase de fórmulas que verifican cierta pro-

piedad», la manera de expresar el principio de recurrencia que acabamos de dar, ofrece la particularidad de usar las breves nociones que sobre la teoría de los conjuntos se enseñan en los colegios secundarios.

1. 4 Aunque no las utilizaremos a menudo, merecen párrafo aparte las llamadas *definiciones por recurrencia* (o *definiciones por inducción*) que el alumno encarará en estudios posteriores. Las caracterizaremos por medio de un ejemplo.

Imaginemos haber construído la tabla de multiplicar correspondiente al número natural a, basándonos en la noción previa de suma de naturales. La tabla sería de la forma:

$$a \times 1 = a$$
$$a \times 2 = 2a$$
$$a \times 3 = 3a\,;\ \text{etc.}\,;$$

otorgando a a diversos valores se consiguen diversas tablas de multiplicación. ¿Cómo ascender, de esas tablas *particulares*, a una definición de la multiplicación de los números naturales?

La *definición por recurrencia* nos suministra la respuesta satisfactoria. Para el caso del producto de números naturales, hela aquí:

(1.4.1) «Sean a, n, números naturales cualesquiera, y sea $n+1$ el sucesor de n; entonces la multiplicación de números naturales queda expresada por:

$$\begin{cases} a \times 1 = a \\ a \times (n+1) = a \times n + a\,. \end{cases}$$ »

Nótense los dos pasos seguidos: la definición del producto de a por el primer natural, y la definición del producto de a por el siguiento de n. Evidentemente, este paso unido al primero significa reconocer la presencia de un ingrediente hereditario, inalterable, a lo largo de todos los números naturales. Sobre la base de ambos pasos está cimentada, pues, la definición por recurrencia (o por inducción).

(1.4.2) Es posible comprobar que *cualquier justificación de una definición por recurrencia* implica *una justificación de la* demostración *por recurrencia*, y *recíprocamente*. Excede al nivel impuesto a este folleto, considerar el detalle de tan interesante cuestión; pero es indispensable tener en cuenta el resultado anotado, pues en virtud de él nos eximiremos de mayores comentarios acerca de las definiciones por recurrencia.

Por otra parte, quien desee ahondar el tema podrá recurrir al capítulo 6 de Evert W. Beth, *The foundations of mathematics*, 1959.

(1.4.3) Para finalizar, vamos a señalar las notas típicas del método de recurrencia. Primero, la existencia de un *ingrediente hereditario*, inalterable; segundo, la presencia de una sucesión que tiene un primer elemento, y que no termina.

El método se aplica, entonces, si existe una propiedad que transita a lo largo de todos los elementos de un conjunto numerable, sin excepción alguna y sin manifestar modificación alguna.

Con esta noción general y un tanto imprecisa por el momento, vamos a rastrear los oscuros orígenes históricos del método de la inducción completa. Con el ánimo de iluminar mejor su significación y alcances hemos de indagar antes las diversas modalidades de algunas antiquísimas argumentaciones donde se evidenciaba algún tipo de ingrediente hereditario, inalterable a lo largo de muchas (aunque no necesariamente infinitas) etapas de un proceso. Después hemos de estudiar más específicamente las primeras demostraciones donde el método se aplica con el suficiente rigor como para no confundirlo con otro ninguno.

EL «INGREDIENTE HEREDITARIO» EN ARGUMENTACIONES ANTIGUAS

2. 1. Aunque impreciso y todavía oscuro, uno de los primeros testimonios donde atisbamos el empleo de una especie de «ingrediente hereditario» en argumentaciones demostrativas, se remonta a varios siglos antes de Cristo. Por lo menos en Europa, pues del Oriente nada sabemos en estos aspectos.

Acaso el sofista Brisón de Heraclea (siglo V a. C.) y, seguramente Políxenes, a quien le ha sido atribuída la paternidad del argumento, emplearon en actitud polémica, un tipo de razonamiento que fue llamado *argumento del Tercer hombre* y que reviste la forma de un proceso deductivo donde es patente la intervención de características hereditarias inalterables.

De Políxenes se sabe que vivió en Siracusa entre los años 367 y 344 a. C. Por este pequeño lapso de su vida, colegimos que fue contemporáneo de Platón, quien circunstancialmente estuvo también en Sicilia en diversas oportunidades.

Platón alude a Políxenes en el *Parménides*, con ocasión de criticar aquella argumentación del Tercer hombre, atribuíble como hemos dicho a Políxenes, y cuya finalidad era invalidar la teoría platónica de las Ideas, poniendo de manifiesto dificultades de orden lógico o filosófico que los miembros de la Academia discutían mucho. Por eso Aristóteles (*Metafísica*, A. 9) alude al argumento del Tercer hombre cuando revista las críticas suscitadas por la concepción platónica, y, en *El-Soph.* lo cita como sofisma. Ubiquémoslo históricamente.

Platón no presta atención a lo peculiar de las cosas visibles y tangibles, sino a lo que ellas tienen de común, o sea, a lo general, que es de naturaleza puramente inteligible. No lo particular de cada cosa por separado es lo esencial y permanente, sino aquello que tienen en común con otras cosas de la misma clase. A esta cualidad común, que desde Aristóteles denominamos «concepto», Platón la llama «Idea».

En la *República* (X, 596 A) dice Platón: «Suponemos que una Idea existe cuando damos el mismo nombre a muchas cosas separadas.»

Las Ideas forman el mundo existente por sí mismo, eterno, invariable y sólo accesible por el pensamiento. Los seres sensibles, en cambio, no son sino las sombras o imágenes del superior mundo ideal, como lo enseña el muy conocido símil de la caverna (*Rep.*, libro 17).

Las Ideas platónicas son además los modelos *perfectos e inmutables* de los cuales las efímeras cosas sensibles toman la razón de su aparente existencia.

Hay Ideas de cuanto sea posible; no únicamente de las cosas naturales, sino también de los productos artísticos, de las relaciones, de las actividades, de las cosas valiosas y de las indignas, etc. En una palabra, una verdadera *duplicación* del mundo: el sensible y el inteligible. Y tal duplicación es la consecuencia necesaria de postularse en el *Parménides* (130, B-D) que todo cuanto existe como sensible tiene su razón de ser en una Idea.

Pues bien, el argumento del Tercer hombre asume formas diversas para rebatir al platonismo. Una reviste carácter de sofisma (Si decimos, «el hombre pasea», no estamos hablando de la Idea de hombre — que es inmóvil — ni de un hombre particular; debemos concluir que nos hallamos refiriéndonos a una tercera especie de hombre); pero nos interesa destacar aquellas enunciaciones donde aparece un ingrediente hereditario que se reitera, inalterado, muchas veces.

Así, se atribuye precisamente a Políxenes este razonamiento: «Si el hombre existe por participar de la Idea de hombre, existe asimismo la razón entre hombre particular e Idea de hombre, y tal razón no es ya ni

Idea de hombre ni hombre particular; es una tercera especie. Y así siguiendo, indefinidamente.»

No cabe duda alguna que la argumentación puede explayarse para objetar la existencia de los dos mundos platónicos. Políxenes podía argüir como se dice a continuación.

Dos cosas particulares semejantes deben su *semejanza* a la Idea general de tales cosas, pues la Idea otorga la razón de ser de la semejanza entre las dos cosas particulares. Pero ¿a quién ha de atribuirse la razón de ser de la semejanza que existe, a su vez, entre la antedicha Idea y cada una de las dos cosas particulares? Por ejemplo, si la Idea de hombre está constituída por las notas comunes de los hombres particulares, la semejanza, ahora entre un hombre particular y la Idea misma de hombre, ¿qué razón de ser posee?

La semejanza entre la Idea general de hombre y el hombre particular, no puede fundamentarse ni en la Idea ni en el hombre; porque en aquella está la razón de la semejanza de seres particulares y no la razón de la semejanza entre un ser particular y una Idea. Por consiguiente, la razón de ser de la semejanza entre la Idea y el hombre particular ha de residir aparte de uno y otra, es decir, en un Tercer Hombre, en una nueva entidad.

Mas, análogamente, la razón de ser de la semejanza entre el Tercer hombre y la Idea de hombre es imposible hallarla en una u otro de éstos; entonces, se infiere que ha de residir en una nueva entidad aún, que llamaremos el Cuarto Hombre. Y, así, proseguiremos hasta el infinito. He aquí un *regressus in infinitum*, que para los griegos significaba una gravísima dificultad y que, lógicamente hablando, contradice el postulado de la duplicación del mundo, admitido por Platón en el *Parménides*.

No nos compete discutir los alcances filosóficos del argumento del Tercer hombre. Pero los esquemas del razonamiento de Políxenes nos resultan de sumo interés, porque en ellos vemos cómo cierto ingrediente pasa de etapa a etapa discursiva con el mismo grado de vigor, repitiendo los mismos efectos sucesivamente, y, cual una herencia perfecta e inalterable a través de las infinitas instancias que recorre, los elementos de la sucesión admiten igual aporte lógico; con lo que se asegura una consecuencia final válida para la totalidad de los elementos que reciben la herencia.

El argumento del Tercer hombre termina siendo un razonamiento basado en el ingrediente hereditario inalterable, tan característico del método de la inducción matemática. No es que sea en estricta verdad una demostración por recurrencia en el sentido que corresponde otorgar hoy al método demostrativo que nos ocupa, pero en el argumento del Tercer hombre se observa el tránsito de la propiedad hereditaria de una etapa a la siguiente, todo a lo largo de una sucesión que comienza en las efímeras cosas sensibles de Platón y se remonta hacia el infinito, provocando desazón en la mente lógica de los griegos.

Este primer testimonio, vago, nebuloso, informe, del razonamiento por recurrencia, nos ubica dentro de una problemática general que sale del ámbito filosófico puro e invade nuevos dominios del pensamiento discursivo.

2. 2. En el dominio matemático los griegos también han empleado razonamientos donde se utilizan ingredientes hereditarios. También un siciliano (¡sugestiva coincidencia!), el genial Arquímedes de Siracusa (287 a 212 a. C.) nos ha legado varios testimonios geométricos del método recurrente, al cual otorga una forma muy precisa, casi inobjetable.

En verdad, Arquímedes proporciona testimonios directos e indirectos. Estos vinculan