MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame Final — (Cursos de Biológicas, Geológicas, Prof. Adjuntos) — 6-10-1961.

5378 — Dada a função $w = y^2 y^2 e^{x/2} + z^2 x^2 e^{y/2} + x^2 y^2 e^{z/2}$, calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}$.

5379 — Determine os máximos e mínimos da função

$$z = x y^2 (3x + 6y - 2).$$

5380 — Efectue a condensação e determine a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

5381 — Faça a contagem e separação das raízes da equação

$$x^3 = 2x + 5$$

e calcule aproximadamente uma delas pelo método de Newton.

5382 — No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos qual a probabilidade de obter uma soma de pontos

a) Pelo menos igual a 3?

b) Maior do que 3?

5383 — Propriedades da distribuição normal.

Num exame observaram-se os seguintes resultados:

40 % de notas inferiores a 10.
50 % de notas entre 10 e 15.
10 % de notas superiores a 15.

Admitindo que as notas seguem a distribuição normal, determine a média e o desvio padrão.

Enunciados dos n.os 5378 a 5383 de F. R. Dias Agudo

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.ª Prova Prática de Informação — 29-5-1961.

I

5384 — 1) Estudar a função $f(x) = \dfrac{2x^3}{(x-2)^2}$.

2) Desenvolver em série de potências inteiras de x a função

$$f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$$

indicando o intervalo onde é válido o desenvolvimento.

3) Calcular

$$\lim_{x=\infty} \left(\cos \frac{a}{x} + m \operatorname{sen} \frac{a}{x}\right)^x.$$

R: 1. *a*) *Domínio* $]-\infty, 2[$ e $]2, +\infty[$.

b) *Ponto de intersecção com os eixos:* P (0, 0).

c) *Não apresenta simetrias nem é periódica.*

d) *Extremos e intervalos de monotonia*

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-6)}{(x-2)^3} \quad \begin{array}{l} f'(x) \geqslant 0 \text{ em } [6, +\infty[\text{ e }]-\infty, 2[\\ f'(x) \leqslant 0 \text{ em }]2, 6] \end{array}$$

$f'(x) = 0$ *para* $x = 0$ *e* $x = 6$ *e apenas é extremante* $x = 6$ *(minimizante).*

e) *Convexidade e concavidade*

$$f''(x) = \frac{48x}{(x-2)^4}$$

e assim f (x) *é convexa em* $[0, +2[$ *e* $]2, +\infty[$ *e côncava em* $]-\infty, 0]$. *Em* $x = 0$ *tem um ponto de inflexão.*

f) *Assíntotas:*

Como $\lim\limits_{x=2} \dfrac{2x^3}{(x-2)^2} = +\infty$ *existe a assíntota* $X = 2$;

$\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{2x^3}{(x-2)^2} = \infty$: *não existem assíntotas paralelas*

ao eixo dos y y. *Dado que* $f(x)=2x+8+\dfrac{24x-32}{(x-2)^2}$ *existe a assíntota obliqua* $Y=2X+8$.

2. $$f'(x)=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\;\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^{2n}\ \textit{para}\ |x|<1.$$

Então $$f(x)=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\;\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

para $|x|<1$.

3. *É uma indeterminação da forma* 1^∞. *Calcule-se então*

$$\lim_{x=\infty} x\log\left(\cos\frac{a}{x}+m\,sen\frac{a}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x=\infty}\frac{\log\left(\cos\dfrac{a}{x}+m\,sen\dfrac{a}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x=\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{a}{x^2}\,sen\dfrac{a}{x}-\dfrac{ma}{x^2}\cos\dfrac{a}{x}}{\cos\dfrac{a}{x}+m\,sen\dfrac{a}{x}}}{-\dfrac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x=\infty}\frac{a\,sen\dfrac{a}{x}+ma\cos\dfrac{a}{x}}{\cos\dfrac{a}{x}+m\,sen\dfrac{a}{x}}=ma$$

isto é, $\lim\limits_{x=\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x}+m\,sen\dfrac{a}{x}\right)^x=e^{ma}$.

II

5385 — 1) Mostre que a função

$$F(x,y,z)=f(x-y,y-z,z-x)$$

verifica a equação $F'_x+F'_y+F'_z=0$ qualquer que seja F.

2) Calcular

$$\int_0^1\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

3) Determine os parâmetros reais a, b e c, por forma que o polinómio $f(z)=z^4-2z^3+az^2+bz+c$ tenha a raíz complexa i e uma raíz real dupla. Quais são as raízes de $f(z)$?

R: 1) *Fazendo* $u=x-y$, $v=y-z$, $w=z-x$, *vem* $F'_x=f'_u-f'_w$, $F'_y=-f'_u+f'_v$, $F'_z=-f'_v+f'_w$, *donde* $F'_x+F'_y+F'_z=0$.

2) *Fazendo* $x=t^6$, *vem*

$$\int_0^1\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx=6\int_0^1\frac{t^6}{1+t^2}\,dt=$$

$$=6\int_0^1\left(t^4-t^2+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6\int_0^1 t^4\,dt-$$

$$-6\int_0^1 t^2\,dt+6\int_0^1 dt-6\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{6}{5}[t^5]_0^1-2[t^3]_0^1+6[t]_0^1-6[arctg\,t]_0^1=$$

$$=\frac{6}{5}-2+6-6\frac{\pi}{4}=\frac{26}{5}-\frac{3\pi}{2}.$$

3) *Se* $f(z)$ *tem a raiz* i *também tem a raiz* $-i$. *A fórmula de Girard* $\dfrac{p_1}{p_0}=\Sigma r_i$ *dá* $2=i-i+r_1+r_1\Rightarrow r_1=1$. *Portanto,*

$$\begin{cases}f(i)=0\\ f(1)=0\end{cases}\begin{cases}(1-a+c)+(2+b)i=0\\ a+b+c-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}1-a+c=0\\ 2+b=0\\ a+b+c-1=0\end{cases}\quad\begin{cases}b=-2\\ 1-a+c=0\\ a+c-3=0\end{cases}\begin{cases}b=-2\\ c=1\\ a=2\end{cases}.$$

As raízes são $i,-i,1$ (*dupla*).

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 27-6-1961.

I

5386 — 1) Deduza a fórmula de Taylor para uma função de uma variável.

2) O polinómio $f(z)=24z^5+34z^4+39z^3+36z^2+15z+2$ tem raízes positivas? Porquê?

Calcule as suas raízes, sabendo que as raízes reais são racionais (não é necessário calcular os limites excedente e deficiente das raízes). Apresente a decomposição de $f(z)$ em factores primos.

R: 2) *As raízes racionais são da forma* p/q *em que* $p=\pm1,\pm2$ *e* $q=1,2,3,4,6,8,12,24$. *Como*

f (z) *não tem raízes positivas, as raízes racionais encontram-se entre os números:* $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}, -2, -\frac{2}{3}$.

A aplicação das regras de exclusão de Newton *permite aproveitar apenas os números:* $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -2, -\frac{2}{3}$. *A regra de* Ruffini *indica, finalmente, que as raízes racionais são:* $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}$. *As outras duas raízes são imaginárias:* i *e* $-$i.

$$f(z) = 24\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{2}{3}\right)(z^2+1).$$

II

5387 — 3) Quando se diz que $F(x, y)$ é diferenciável em $P(a, b)$? Enuncie e demonstre uma condição suficiente de diferenciabilidade.

Mostre que a função $g\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ é homogénea e verifique o teorema de Euler.

4) Mostre que toda a função contínua em $[a, b]$ é integrável no sentido de Riemann, nesse intervalo. Sendo $g(x)$ contínua em $[a, b]$, prove que $\int_a^b g(x)\,dx = g(c)(b-a)$ $(a \leqslant c \leqslant b)$.

R: 3) *A função é homogénea de grau zero pois* $g\left(\frac{tx+ty}{tx-ty}\right) = t^0 g\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$. *Como* $g'_x = g'\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2}$ *e* $g'_y = g'\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \cdot \frac{2x}{(x-y)^2}$ *vem* $x g'_x + y g'_y = 0$, *que é a verificação do teorema de* Euler.

III

5388 — 5) Dada a tabela

x	-1	0	1	2	3
y	2	1	0	1	a

determine a por forma que o polinómio interpolador seja do terceiro grau.

Sem achar o polinómio interpolador, calcule $y(-2)$ e $y(4)$.

6) Defina base de um espaço vectorial e prove que em R^n qualquer conjunto de n vectores independentes constitue uma base.

Deduza a regra de Cramer e utilize-a para resolver o sistema de n equações a n incógnitas $AX = A^j + A^k$ em que A^j e A^k são as colunas j e k da matriz A regular.

Utilize a teoria dos sistemas homogéneos para escrever as equações normais da recta $r \equiv \begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+z-1=0. \end{cases}$

Qual deverá ser o valor de a para que a recta seja perpendicular ao eixo Oy?

R: 5) *Construindo a tabela de diferenças vem*

x	y	Δ y	Δ^2 y	Δ^3 y	Δ^4 y
-1	2	-1	0	2	a$-$6
0	1	-1	2	a$-$4	
1	0	1	a$-$2		
2	1	a$-$1			
3	a				

Para que o polinómio interpolador seja do terceiro grau é preciso que $\Delta^4 y(-1) = 0$, *ou seja* $a = 6$.

Para $a = 6$ *vem* $y(4) = 6 + 5 + 4 + 2 = 17$ *e* $y(-2) = 1$.

6) *A solução do sistema* $AX = A^j + A^k$ *é o vector* X' *de componentes* $x'_r = 0$ $(r \neq j, k)$, $x' = 1$, $x'_k = 1$.

Para escrever as equações normais de r *escolha-se uma solução do sistema, por exemplo* $(0, -1, 1)$ *e escreva-se o sistema na forma* $\begin{cases} ax + (y+1) + (z-1) = 0 \\ x + (z-1) = 0 \end{cases}$ *(sistema homogéneo).*

Para tal sistema é $\frac{x}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y+1}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z-1}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}$

ou $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1-a} = \frac{z-1}{-1}$, *que são as equações normais de* r.

Para que r $\perp$ O y *deverá ser* $1 - a = 0$ *ou* $a = 1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência extraordinário — 30-6-1961.

I

5389 — 1) Mostre que $f(x)$ se desenvolve pela série de Taylor em qualquer intervalo $[a, a \pm k]$ onde as suas derivadas sejam globalmente limitadas. Prove também que toda a série inteira em x é série de Mac Laurin da sua própria soma.

2) Prove que é condição necessária e suficiente para que a seja zero de ordem n de $g(x)$ que esta função se possa escrever na forma $g(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, sendo $\varphi(x)$ uma função contínua que não se anula para $x = a$.

Separe os zeros do polinómio $2x^3-15x^2+36x+1$, utilizando a sucessão de ROLLE.

R: 2) *Utilizando o método de* NEWTON, *fàcilmente se calculam os limites excedente e deficiente das raízes do polinómio:* $L=3$ *e* $l=-1$. *Os zeros da primeira derivada são* $x'_1=2$ *e* $x'_2=3$ *e, construindo a sucessão de* ROLLE $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ - & + & + \end{vmatrix}$, *verifica-se que existe um zero do polinómio em* $[-1,2]$.

II

5390 — 3) Diga em que condições a equação $F(x,y)=0$ define uma função implícita $y(x)$ na vizinhança de $P(a,b)$. Utilize a regra de derivação das funções compostas para deduzir a expressão de $y'(x)$ e $y''(x)$.

4) Deduza a desigualdade de SCHWARTZ e a fórmula fundamental do cálculo integral. Utilize esta para calcular $\int_1^2 x^2 \log^2 x\, dx$.

R: 4)

$$\int_1^2 x^2 \log^2 x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\int_1^2 x^2 \log x\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\, dx\right\} =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^2 + \frac{2}{9}\int_1^2 x^2\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^2 + \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{8}{3}\log^2 2 - \frac{16}{9}\log 2 + \frac{14}{27}$$

III

5391 — 5) Dados os pares de valores (x_i, y_i), $(i=0,1,\cdots n)$, em que os valores de x estão em progressão aritmética, diga como procede para fazer uma interpolação com a fórmula de LAGRANGE, supondo que dispõe de tabelas de coeficientes Lagrangianos (não efectue demonstrações).

6) Quando se diz que p filas paralelas de uma matriz são independentes? Se, numa dada matriz, o número máximo de linhas independentes é r e o número máximo de colunas independentes é s prove que $r=s$.

Qual é o valor dos menores de ordem superior a r numa matriz de característica r? Porquê?

Considere o sistema possível $AX=B$ e seja X_0 uma solução. Prove que todas as soluções deste sistema são da forma $X=X_0+Y$ em que Y é solução de $AY=0$.

Discuta o sistema

$$\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ x-y+z&=1 \\ 3x+y+3z&=a \\ 5x+3y+5z&=5 \end{aligned}$$

por meio da teoria dos determinantes. Interprete geomètricamente a discussão.

R: 6) *A matriz do sistema é* $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

e é fácil ver que $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2$ *é determinante principal. Construindo os determinantes característicos*

$$\Delta'_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix}=6-2a \quad e \quad \Delta'_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0$$

o sistema proposto será possível quando $6-2a=0$ *ou* $a=3$ *e impossível quando* $a\neq 3$.

A interpretação geométrica e simples. Quando o sistema é possível os planos representados pelas 3.ª e 4.ª equações passam pela recta $r\equiv\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$.

Quando o sistema é impossível, o plano representado pela 3.ª equação é paralelo à recta r *e o plano representado pela 4.ª equação passa por* r.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — Prova Prática — 12-7-61.

5392 — 1) Estude a natureza da série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{x^n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

R: *Como* $\lim_{n=\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{x^{n+1}}\log\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\dfrac{1}{x^n}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right|=\dfrac{1}{|x|}$,

a série é absolutamente convergente quando $|x|>1$ *e divergente quando* $|x|<1$. Para $x=1$ *tem-se a série* $\sum_1^\infty \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, *que é divergente, e para* $y=-1$ *vem a série alternada decrescente* $\sum(-1)^n$

$log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, *portanto convergente. A série é uniformemente convergente em* $]-\infty,-1]$ e $[r,+\infty[$ $(r>1)$.

2) Dada a função $f(x)=e^{ax}\log(e+x)$, calcule a por forma que $f(x)$ tenha um extremo para $x=0$. Indique a natureza desse extremo.

Averigue se a imagem de $f(x)$ admite assíntotas.

R: *Como* $f'(x)=e^{ax}\left[a\,log\,(e+x)+\frac{1}{e+x}\right]$, *a condição* $f'(0)=0$ *implica* $a=-1/e$. *Calculando* $f''(x)$, *vem* $f''(0)<0$, *o que indica que* $x=0$ *é um maximizante.*

$$\lim_{x=-e} f(x)=-\infty \quad e \quad \lim_{x=+\infty} f(x)=\lim_{x=+\infty}\frac{log\,(e+x)}{e^{\frac{1}{e}x}}=$$

$$=\lim_{x=+\infty} e\,\frac{e^{-\frac{1}{e}x}}{e+x}=0:\ X=-e \quad e \quad Y=0$$ *são pois assíntotas. Não há assíntotas obliquas.*

3) Calcule $P\,x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

R: $$P\,x\,log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=P\,x\,log\,(x-1)-$$

$$-P\,x\,log\,(x+1)=\frac{x^2}{2}log\,(x-1)-\frac{1}{2}P\,\frac{x^2}{x-1}-$$

$$-\frac{x^2}{2}log\,(x+1)+\frac{1}{2}P\,\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2}{2}log\,(x-1)-$$

$$-\frac{1}{2}P\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)-\frac{x^2}{2}log\,(x+1)+$$

$$+\frac{1}{2}P\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x^2}{2}log\,(x-1)-$$

$$-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}log\,(x-1)-\frac{x^2}{2}log\,(x+1)+$$

$$+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}log\,(x+1)=\frac{x^2}{2}log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+$$

$$+log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-x.$$

4) Sendo $z=F(x,y)$, considere as funções $u=g(z)$ e $v=h(z)$ e prove que:

a) $$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

b) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

sabendo que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}.$$

R: a) $$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\left(\frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{dv}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=$$

$$=\left(\frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{dv}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

b) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

e, como

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x},$$

resulta a igualdade, atendendo também à alínea a).

5) Mostre que os vectores

$$A_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

são linearmente dependentes. Determine a forma geral dos números que satisfazem à igualdade $l^1A_1+l_2A_2+l_3A_3+l_4A_4=0$.

R: *Se os vectores são linearmente dependentes, ter-se-á de verificar a relação* $l_1A_1+l_2A_2+l_3A_3+l_4A_4=0$ *em que* l_1,l_2,l_3,l_4 *são constantes não conjuntamente nulas.*

Aquela condição equivale a dizer que o sistema homogéneo

$$\begin{aligned}l_1 \qquad\quad &+l_3-l_4=0\\ l_3 \qquad\quad &=0\\ l_1+l_2+l_3 \qquad &=0\\ l_2 \qquad\quad &+l_4=0\end{aligned}$$

terá de possuir soluções não nulas. Com efeito,

$$\begin{vmatrix}1&0&1&-1\\0&0&1&0\\1&1&1&0\\0&1&0&1\end{vmatrix}=0$$

e por conseguinte o sistema tem soluções não nulas. Como $\Delta=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, *o sistema e simplesmente indeterminado e as suas soluções são proporcionais. Acha-se fàcilmente uma solução não nula tomando os complementos algébricos de* l_1,l_2,l_3 *e* l_4 *em*

$D=\begin{vmatrix}1&0&1&-1\\0&0&1&0\\1&1&1&0\\l_1&l_2&l_3&l_4\end{vmatrix}$. *A forma geral das soluções é*

$$\frac{l_1}{-\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{l_2}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{l_3}{-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{l_4}{\Delta} = \alpha$$

ou

$$\frac{l_1}{-1} = \frac{l_2}{1} = \frac{l_3}{0} = \frac{l_4}{-1} = \alpha$$

ou ainda

$$\begin{cases} l_1 = -\alpha \\ l_2 = \alpha \\ l_3 = 0 \\ l^4 = -\alpha \end{cases}.$$

6) Dada a recta $r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$, calcule os seus cosenos directores e escreva a equação do plano que passa por r e corta o eixo $0x$ em $(2,0,0)$.

R: *cos* $\alpha, \beta, \gamma = \pm \frac{0,1,2}{\sqrt{5}}$.

Como $r \equiv \begin{cases} x-1=0 \\ 2y-z-1=0 \end{cases}$, *será* $\alpha(x-1) + \beta(2y-z-1) = 0$ *a equação do feixe de planos que passa por* r. *Fazendo* $m = \frac{\alpha}{\beta}$, *vem* $x + 2my - mz - m - 1 = 0$ *e a equação axial é* $\frac{x}{m+1} + \frac{2m}{m+1}y - \frac{m}{m+1}z = 1$. *Como o plano pedido deverá passar por* $(2,0,0)$, *terá de ser* $m + 1 = 2$ *ou* $m = 1 : \frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Julho (2.ª chamada) — Prova Prática — 15-7-1961.

5393 1) Dada a curva $y = \frac{ax + bx^2 + cx^3}{1 + 2x - x^2}$, determine a, b e c por forma que a assíntota oblíqua seja a recta $X + Y - 1 = 0$ e a tangente na origem seja $2X - Y = 0$.

R: *Como* $\frac{ax + bx^2 + cx^3}{1 + 2x - x^2} = -cx - (b+2c) + \varphi(x)$, *com* $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$, *a assíntota oblíqua é* $Y = -cX - (b + 2c)$, *isto é*, $c = 1$ *e* $b = -3$. *Então* $y = \frac{ax - 3x^2 + x^3}{1 + 2x - x^2}$ *e* $y'(0) = 2$, *o que dá* $a = 2$.

2) Ache o desenvolvimento em série de Mac Laurin da função $\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$, determinando o interem que é válido o desenvolvimento.

Calcule $P \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$.

R: $\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{a_0 + a_1(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{b_0}{x-2} = -\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x-2}$.

Cálculo de a_0 *e* a_1: *fazendo* $x - 1 = t$, *vem* $R_1(x) = \frac{x+1}{x-2} = \frac{2+t}{-1+t} = -2 - 3t + \cdots$ *e* $a_0 = -2$, $a_1 = -3$.

Cálculo de b_0: $b_0 = R_2(2) = \left[\frac{x+1}{(x-1)^2}\right]_{x=2} = 3$.

Ora $\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n$ *para* $|x| < 1$ *e portanto*

$$-\frac{2}{(x-1)^2} = -2\left(\frac{1}{1-x}\right)' =$$

$$= -2\sum_1^\infty n x^{n-1} \text{ também para } |x| < 1;$$

$$-\frac{3}{x-1} = \frac{3}{1-x} = 3\sum_0^\infty x^n \text{ para } |x| < 1;$$

$$\frac{3}{x-2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{3}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^n \text{ para } |x| < 2;$$

Então $\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \sum_0^\infty \left(1 - 2n - \frac{3}{2^{n+1}}\right) x^n$, *para* $|x| < 1$.

$$P\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = -2P\frac{1}{(x-1)^2} - 3P\frac{1}{x-1} + 3P\frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-1} + 3\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.$$

3) Prove que a função $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ satisfaz, quaisquer que sejam as funções f e g, à relação

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

R.:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) - f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x} - g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^3} + \frac{y^2}{x^4}g''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\cdot f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right).$$

Fazendo as operações indicadas no primeiro membro da igualdade, obtem-se 0.

4) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & p \end{bmatrix}$, determine p por forma que o sistema homogéneo $A\,X = 0$ seja indeterminado. Ache nesse caso um sistema fundamental de soluções.

R.: *Para que o sistema* $A\,X = 0$ *seja indeterminado é preciso que a característica de* A *seja menor do que três.*

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ *e* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, *deverá ser*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & p \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } p = 2.$$

O sistema é simplesmente indeterminado e o sistema fundamental de soluções é constituido apenas por uma solução que se obtém fàcilmente tomando os complementos algébricos de x_1, x_2 e x_3 *no determinante*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1. \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

A solução geral é $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\alpha. \\ x_3 = \alpha \end{cases}$

5) Decomponha em quadrados a forma

$$x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 2\,x_2\,x_3.$$

R.:

	x_1	x_2	x_3	
x_1	1	-1	0	$\to x_1 - x_2$
x_2	-1	0	-1	
x_3	0	-1	0	
		x_2	x_3	
	x_2	-1	-1	$\to -x_2 - x_3$
	x_3	-1	0	
			x_3	
		x_3	-1	$\to -x_3$

$$x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 2\,x_2\,x_3 = (x_1 - x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_3^2.$$

6) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto $P(1,0,0)$ e é perpendicular à recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

R.: *O feixe de planos que passa por* $P(1,0,0)$ *é* $A(x-1) + B\,y + C\,z = 0$ *e os parâmetros directores de* r *são* $h = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $k = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ *e* $l = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. *Ter-se-á de verificar a condição* $\frac{A}{-1} = \frac{B}{-1} = \frac{C}{1}$, *o que conduz à equação do plano:* $x + y - z - 1 = 0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Outubro — 2/10/1961.

Prova prática

3594 — 1) Calcule $\lim\limits_{x=+0} (\operatorname{cosec} x + \log x)$.

R.: $\lim\limits_{x=+0} (cosec\ x + log\ x) = \lim\limits_{x=+0}\left(\frac{1}{sen\ x} + log\ x\right) =$

$$= \lim_{x=+0} \frac{1 + sen\ x\ log\ x}{sen\ x}.$$

Como $\lim\limits_{x=+0} sen\ x\ log\ x = \lim\limits_{x=+0} \frac{log\ x}{cosec\ x} =$

$$= \lim_{x=+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x} = \lim_{x=+0} -\frac{\operatorname{sen} x}{\frac{x}{\operatorname{sen} x} \cos x} = 0, \text{ vem}$$

$$\lim_{x=+0} (\operatorname{cosec} x + \log x) = +\infty .$$

5395 — 2) Estude a função assim definida

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & (x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ \dfrac{x^2}{x-1} & (x > 0) \end{cases}$$

Faça a representação geométrica de $f(x)$.

R.: a) *Domínio* $]-\infty, 1[$, $]1, +\infty[$. *Pontos de descontinuidade:* $x = 0$ *e* $x = 1$.

b) *Não apresenta simetrias nem periodicidade.*

c) *Intervalos de monotonia; extremos.*

Como o comportamento da função em $]-\infty, 0]$ *é bem conhecido, basta ver o que se passa em* $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \qquad \begin{array}{l} f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \\ f'(x) > 0 \Rightarrow x > 2 \\ f'(x) < 0 \Rightarrow x < 2 \end{array}$$

Portanto, $f(x)$ *é decrescente em* $]0, 1[$ *e* $]1, 2[$, *tem um mínimo no ponto* $m(2, 4)$ *e é crescente em* $]2, +\infty[$.

d) *Convexidade* $(x > 0)$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \qquad \begin{array}{l} f''(x) > 0 \Rightarrow x > 1 \\ f''(x) < 0 \Rightarrow x < 1 \end{array}$$

A função é convexa em $]1, +\infty[$ *e côncava em* $]0, 1[$.

e) *Assíntotas.*

Como $\lim_{x=1} f(x) = \infty$ *existe a assíntota* $X = 1$ *paralela ao eixo* Oy. *Existe também a assíntota oblíqua* $Y = X + 1$ *pois* $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ *e* $\lim_{x=\infty} \frac{1}{x-1} = 0$.

5396 — 3) Calcule $P \dfrac{1}{2 + \cos x}$.

R.: *Fazendo* $tg \frac{x}{2} = t$ *vem* $P \dfrac{1}{2 + \cos x} =$

$$= 2P \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} = 2P \frac{1}{3+t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} P \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{tg \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right).$$

5397 — 4) A função $g(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $g(0, 0) = 0$ é contínua no ponto $P(0, 0)$? Porquê?

Calcule $g'_x(0, 0)$ e $g'_y(0, 0)$.

R.: *Calculemos* $\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} g(x, y)$ *segundo a direcção da recta* $y = \alpha x$:

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} g(x, y) = \lim_{x=0} \frac{x}{x^2 + \alpha^2 x^2} = \lim_{x=0} \frac{1}{x + \alpha^2 x} = \infty .$$

Segundo a direcção da parábola $y^2 = x$:

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} g(x, y) = \lim_{x=0} \frac{x}{x^2 + x} = \lim_{x=0} \frac{1}{x+1} = 1 .$$

Assim se vê que não existe $\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} g(x, y)$ *e portanto* $g(x, y)$ *não é contínua em* $P(0, 0)$.

$$g'_x(0, 0) = \lim_{x=0} \frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x} = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{x} = +\infty$$

$$g'_y(0, 0) = \lim_{y=0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y=0} \frac{0}{y} = 0 .$$

5398 — 5) Como se sabe, para uma tabela de três pares de valores $\begin{array}{c|ccc} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ \hline y & y_0 & y_1 & y_2 \end{array}$ a fórmula interpoladora de Lagrange é $I(x) = \sum_{i=0}^{2} \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)} y_i$

$$\left[\varphi(x) = \prod_{i=0}^{2} (x - x_i) \quad \text{e} \quad \varphi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{x - x_i} \right].$$

a) Sabendo que $\varphi_0(x_0) = 6$, $\varphi_1(x_1) = -2$, $\varphi_2(x_2) = 3$ e que $-7\varphi_0(x) + 9\varphi_1(x) - 2\varphi_2(x) = 12x - 18$, ache os valores de x_0, x_1 e x_2.

b) Supondo que o polinómio interpolador é do primeiro grau e que se verificam as relações $y_0 + y_1 + y_2 = -11$ e $y_2 - y_1 = 2$, determine os valores de y_0, y_1 e y_2. Escreva o polinómio interpolador.

R.: a)
$$\begin{array}{l} -7\varphi_0(x_0) = 12x_0 - 18 \\ -42 = 12x_0 - 18 \Rightarrow x_0 = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9\varphi_1(x_1) = 12x_1 - 18 \\ -18 = 12x_1 - 18 \Rightarrow x_1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2\varphi_2(x_2) = 12x_2 - 18 \\ -6 = 12x_2 - 18 \Rightarrow x_2 = 1 \end{array}$$

b) $\varphi_0(x) = x(x-1) = x^2 - x$
$\varphi_1(x) = (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$
$\varphi_2(x) = (x+2)x = x^2 + 2x$

O polinómio interpolador é

$$I(x) = \frac{x^2 - x}{6} y_0 + \frac{x^2 + x - 2}{-2} y_1 + \frac{x^2 + 2x}{3} y_2$$

e, como é do primeiro grau, terá de ser

$$\frac{1}{6} y_0 - \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{3} y_2 = 0 .$$

Esta equação, juntamente com as duas relações dadas, conduz ao sistema $\begin{cases} y_0 - 3y_1 + 2y_2 = 0 \\ y_0 + y_1 + y_2 = -11 \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$

cuja solução é $\begin{cases} y_0 = -7 \\ y_1 = -3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$

O polinómio interpolador é

$$I(x) = \frac{x^2 - x}{6}(-7) + \frac{x^2 + x - 2}{-2}(-3) + \frac{x^2 + 2x}{3}(-1) = 2x - 3 .$$

5399 — 6) Utilize a teoria dos determinantes para estudar a posição relativa dos planos $\pi_1 \equiv x - y - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x + z - 1 = 0$, $\pi_3 \equiv x - 2y - z - 1 = 0$ e $\pi_4 = y + z = 0$.

Escreva a equação da recta r que passa pela origem e se apoia na recta $s \equiv \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \end{cases}$ sabendo que $r \perp s$.

R.: *A característica da matriz do sistema*

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \\ x - 2y - z - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

é $r = 2$. *Com efeito, da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

o determinante de maior ordem significativo que dela se pode extrair é $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ *(determinante principal).*

Os determinantes característicos $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ *e* $\Delta'' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ *são ambos nulos e por isso o sistema é indeterminado de grau* 1.

Geométricamente significa que os planos π_3 *e* π_4 *passam pela recta definida por* π_1 *e* π_2.

O problema de geometria analítica pode resolver-se do seguinte modo: conduz-se pela origem o plano $\pi \perp s$, *acha-se a intersecção* P *do plano* π *com a recta* s *e depois escreve-se a equação da recta* OP.

A recta s *tem os parâmetros directores* $h = -1$, $k = -1$ *e* $l = 1$; *o plano* π *é* $Ax + By + Cz = 0$ *tal que* $\frac{A}{h} = \frac{B}{k} = \frac{C}{l}$, *isto é,* $\pi \equiv x + y - z = 0$.

A intersecção P *determina-se resolvendo o sistema*

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $P\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. *A recta* r *é então*

$$r \equiv \frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{y}{-\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \quad ou \quad r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} .$$

Enunciados e soluções dos n.os 5384 a 5399 de Fernando de Jesus

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 20-7-1961.

5400 — Seja π_1 o plano determinado por $A(1,0,0)$, $B(0,1,2)$ e $C(0,0,1)$ e π_2 o plano que intersecta a parte positiva dos eixos coordenados a distâncias da origem iguais a 1.

Conduza pelo ponto $P(1,1,1)$ uma recta paralela à intersecção dos planos π_1 e π_2.

5401 — É dado um triângulo isósceles de base 20 e altura 8 cm. De todos os paralelogramos inscritos neste triângulo com um dos lados assente na base do triângulo e os ângulos agudos iguais a $\operatorname{ang\,tg} \frac{4}{3}$, quais as dimensões do de área máxima?

5402 — Primitive as funções

$$a)\ x \sec^2 x ; \quad b)\ \frac{2x^3 + x^2 + 6x + 1}{2x^3 - x^2 + 4x - 2} .$$

5403 — Sejam $OXYZ$ e $O\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ dois sistemas de referência não necessàriamente triortogonais, de versores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ respectivamente, relacionados pela igualdade matricial

$$[\hat{\mathbf{e}}_1\ \hat{\mathbf{e}}_2\ \hat{\mathbf{e}}_3] = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3]\, T$$

a) Qual a relação entre as matrizes colunas X e $\hat{X}$ que representam um mesmo vector $\mathbf{x}$ de $\mathcal{R}^3$ nos dois sistemas de referência?

b) Se for G a matriz de elemento genérico $g_{ij} = \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j = \cos(\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j})$ [matriz da métrica relativa ao sistema de referência $OXYZ$] e $\hat{G}$ a correspondente matriz para $O\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$, qual a expressão matricial do produto interno de dois vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ num e noutro dos sistemas de referência?

Aproveite a igualdade das duas expressões do produto interno para concluir que $\hat{G} = T^{\mathrm{T}} G T$.

c) Se for $P^{\mathrm{T}} \mathcal{A} P + 2 \Lambda^{\mathrm{T}} P + a_{44} = 0$ a equação de uma superfície de 2.ª ordem no primeiro sistema, qual a forma que toma a equação da mesma superfície no segundo sistema de referência?

Mostre que nesta transformação de coordenadas a matriz $G^{-1}\mathcal{A}$ dá lugar a outra semelhante e que o polinómio $|G^{-1}\mathcal{A} - \lambda I|$ é invariante, o mesmo acontecendo a $c(G^{-1}\mathcal{A})$, $Tr(G^{-1}\mathcal{A})$, $Tr\,\mathrm{adj}(G^{-1}\mathcal{A})$ e $|G^{-1}\mathcal{A}|$.

d) Se em vez de uma quádrica se tratar de uma cónica do plano XOY, deduza a forma que tomam os invariantes anteriores em função do ângulo θ que formam entre si os dois eixos coordenados.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame Final — 14-10-1961.

5404 — *a*) Verifique que a matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem um valor próprio racional e dois irracionais.

b) Dados os vectores

$$\overline{a} = [1 \; -y \; z]$$
$$\overline{b} = [x \;\; 1 \;\; 0]$$

determine x, y e z de modo que $\overline{b}$ seja vector próprio da matriz correspondente ao valor próprio racional e os vectores $\overline{a}$ e $\overline{b}$ definam um rectângulo de área 6.

5405 — Uma função $T(x)$ está definida da seguinte forma:

$$T(x) = \begin{cases} x - 6 & \text{para} \quad 0 \leqslant x < 10 \\ 0 & \text{para} \quad 10 < x < 11 \\ -2 & \text{para} \quad 11 < x \leqslant 12 \end{cases}.$$

Determine a partir dela uma função contínua $M(x)$ que satisfaça às relações $\dfrac{dM}{dx} = T(x)$ e $M(0) = 12$.

Represente gràficamente as duas funções em dois sistemas de referência com o mesmo eixo de ordenadas e eixos das abcissas paralelos e indique como a partir da função dada se pode estudar o crescimento e os máximos e mínimos da função $M(x)$.

5406 — Calcule

a) $P e^{2x} \cdot \cos 3x$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$.

5407 — Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x(x+y)} & \text{para} \quad x(x+y) \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x(x+y) = 0 \end{cases}.$$

a) Estude a sua continuidade na origem.

b) Verifique se aí admite derivadas parciais.

c) Investigue a existência de alguma direcção ao longo da qual exista derivada dirigida na origem e indique o seu valor.

Enunciados dos n.os 5400 a 5407 de F. R. Dias Agudo

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. C. — Álgebra Superior — 1.ª Frequência — 1.ª chamada.

I

Parte Teórica

5408 — 1) $\mathfrak{G}$ é um grupo multiplicativo; que entende por ordem de um elemento a e $\mathfrak{G}$?

Se os elementos a_i e $\mathfrak{G}$ têm ordem n_i, com $i = 1, 2, \cdots, k$, qual é a ordem do elemento $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$?

5409 — 2) Seja $\mathfrak{A}$ um anel. Suponha que em $\mathfrak{A}$ semi-grupo em relação ao produto, existe inverso a^{-1} de qualquer elemento $a \neq 0$. Prove que $\mathfrak{A}$ é então um corpo — S.

5410 — 3) Considere o grupo das raízes índice n

da unidade e seja

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$$

a sua decomposição em factores primos. Indique os sub-grupos do grupo considerado e os respectivos índices.

II

Parte Prática

5411 — 1) Considere o grupo $\mathfrak{S}$ das permutações de ordem n e a aplicação de $\mathfrak{S}$ no grupo aditivo abeliano constituído pelos números 0 e 1 (a operação é a adição aritmética quando ao menos um dos números é zero e ainda $1 + 1 = 0$).

Como se chama a aplicação assim definida? Justifique.

5412 — 2) Considere o conjunto $\mathfrak{A}$ de elementos $a, b, \cdots$, cada um deles definido por três números reais; por exemplo,

$$a \equiv (x_1, x_2, x_3);$$

sendo

$$b \equiv (y_1, y_2, y_3),$$

defina-se $a + b$ por

$$(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3).$$

Mostre que $\mathfrak{A}$ é grupo aditivo abeliano. Justifique.

5413 — 3) Constituirão os polinómios de coeficientes reais um anel? No caso afirmativo:

a) Terá o anel elemento unidade?

b) Terá o anel divisores próprios de zero?

c) Será o anel comutativo?

Justifique as respostas.

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

F. C. C. — Álgebra Superior — 1.ª Frequência — 2.ª chamada.

I

Parte Teórica

5414 — 1) Dê a definição de grupo cíclico em notação aditiva. Defina elemento primitivo nesse caso. Se $k \cdot a$ é elemento primitivo e m a ordem do grupo, que relação existe entre k e m?

5415 — 2) Com fundamento nos postulados da definição de um corpo — S poderá assegurar a solução das equações

$$a \cdot x + b = c$$
$$y \cdot a + b = c.$$

Justifique.

5416 — 3) Seja $\mathfrak{G}$ um grupo aditivo e seja $\mathfrak{g}$ um dos seus sub-grupos. Como define classes laterais (à esquerda e à direita) neste, relativamente a $\mathfrak{g}$.

Prove que se estas classes laterais coincidem, o sub-grupo é normal.

II

Parte Prática

5417 — 1) Decomponha a permutação

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_5 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_5 & \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

no produto dum número mínimo de transposições.

5418 — 2) Os números $+1$ e -1 constituem um grupo relativamente à multiplicação. Mostre que este grupo é imagem homomorfa do grupo aditivo dos inteiros. Poderá estabelecer um homomorfismo entre aquele grupo e o grupo multiplicativo do conjunto dos números reais, uma vez deste excluído o zero?

5419 — 3) Considere o conjunto das matrizes diagonais de 3.ª ordem. Terá este conjunto estrutura de anel? Justifique completamente a resposta.

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

F. C. C. — Álgebra Superior — 2.º exame de frequência — 1.ª chamada — Maio 1961.

I

Parte Teórica

5420 — 1) Estabeleça uma condição para que o produto de duas matrizes seja permutável quando elas são simétricas.

5421 — 2) Sejam: E espaço vectorial complexo de n dimensões $A \in (E \to E)$ e $e_1, e_2, \cdots, e_n$ uma base de E.

a) Supondo que

$$A e_1 = \cdots = A e_k = \Theta \qquad 1 < h < n$$

e que para $k \geqslant h + 1$, $A e_k$ é uma combinação linear de $e_{h+1}, \cdots, e_n$, escreva uma matriz que represente A naquela base. Qual a dimensão do espaço nulo do operador A?

b) Nas mesmas condições que relação existe entre os valores próprios de A e os da restricção de A no espaço de base

$$e_{h+1}, \cdots, e_n?$$

5422 — 3) Seja E o espaço vectorial dos núme-

ros complexos sobre o corpo Ω dos números reais. Mostre que a transformação

$$x \to \overline{x} \text{ (conjugado de } x)$$

é linear e determine a sua matriz relativamente à base $1, i$.

II

Parte Prática

5423 — 1) Seja E o espaço vectorial real com 3 dimensões, considerado em Geometria Analítica com base e_1, e_2, e_3 (vectores unitários do sistema de eixos tri-rectangulares). Escreva a matriz que corresponde ao operador e que determina uma rotação de 30° em torno de e_3 e no sentido de e_1 para e_2.

Determine os valores próprios desse operador.

5424 — 2) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

determine o seu polinómio característico, a sua matriz adjunta e a sua inversa.

5425 — 3) Escreva a associada da matriz de transformação de

$$e_1^* = e_1$$
$$e_k^* = \alpha_{1k} e_1 + \alpha_{2k} e_2 + \cdots + \alpha_{(n-1)k} e_{n-1} + e_n \; (2 \leqslant k \leqslant n).$$

Qual a matriz da transformação inversa?

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

F. C. C. — Álgebra Superior — 2.º exame de frequência — 2.ª chamada — 31/5/61.

I

Parte Teórica

5426 — 1) Se $\mathcal{A}$ é matriz simétrica e $\mathcal{B}$ anti-simétrica, de que natureza é a matriz $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$? Justifique.

5427 — 2) *a)* Considerem-se os operadores lineares A e B sobre o espaço vectorial E (no corpo Ω) e admita que eles têm um vector próprio comum x, mas correspondente a diferentes valores próprios. Será x vector próprio de uma combinação linear de A e B, com coeficientes em Ω?

b) Seja $\mathcal{A}$ uma matriz quadrada de ordem n com valores próprios $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

Quais são os valores próprios de $\alpha A + \beta I$ (α e β complexos quaisquer)?

5428 — 3) Seja $A \in (E \to E_1)$ com E e E_1 espaços vectoriais. Mostre que: vectores linearmente dependentes são transformados em vectores com a mesma propriedade.

II

Parte Prática

5429 — 1) Num espaço de dimensão $n = 2k$ e x_i, x_i' $(i = 1, \cdots, k)$ uma base. Escreva a matriz que corresponde à transformação definida por

$$A x_i = \alpha_i x_i + \beta_i x_i'$$
$$A x_i' = -\beta_i x_i + \alpha_i x_i'.$$

Qual a matriz que corresponde à transformação inversa?

5430 — 2) Calcule a matriz adjunta e a matriz inversa de

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5431 — 3) Calcular as raízes características e os vectores próprios da matriz de 4.ª ordem cujos elementos são todos iguais a 1.

Indicar uma base para cada sub-espaço próprio.

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

Enunciados dos n.os 5408 a 5431 recolhidos por Maria Beatriz Ferreira da Costa

CÁLCULO INFINITÉSIMAL

Academia Militar — Cálculo Infinitésimal — Prova escrita do exame final — Julho de 1961.

(Responda apenas a uma questão de cada grupo).

I

5432 — 1) Determinar as equações vectoriais da tangente, do plano normal, do plano osculador e da binormal no ponto da linha

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

em que $x = 1$.

II

5433 — 1) Desenvolver em série de Fourier no

intervalo $[-\pi, +\pi]$ a função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{para } x > 0 \end{cases}.$$

III

5434 — 1) Calcular $\iiint_{(v)} (x^2 + y^2)\, dv$ sendo (v) o volume limitado pelo plano XOY e pela semi-superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$.

2) Determinar o volume da parte da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

que é interior à superfície cónica

$$z^2 = x^3 + y^2.$$

IV

5435 — 1 — *a*) Quando é que se diz que a equação

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

é uma diferencial exacta?

b) Mostrar que $\frac{1}{y^2}$ é um factor integrante para a equação

$$3x^2 y^3\, dx + (x^3 y^2 + 2y + 1)\, dy = 0$$

e determinar o seu integral geral.

V

5436 — 1) Dada a equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x e^x$$

mudar a variável (dependente) y para a variável z por forma que $y = z e^x$.

Determinar a solução geral da equação dada e a solução particular y_1 que verifica as condições $y_1(0) = y_1'(0) = 0$.

Enunciados dos n.os 5432 a 5436 de A. César de Freitas

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — **1.ª frequência, 1.ª chamada — (Janeiro 1961).**

5437 — 1) Dados um ponto P do plano vertical de projecção, uma recta qualquer r e uma recta s do 2.º bissector, conduzir por P a recta perpendicular a r que se apoia em s.

5438 — 2) Dadas 2 rectas enviesadas, sendo uma delas vertical e a outra qualquer, determinar o ângulo que elas definem.

5439 — 3) Dados um plano qualquer pelos traços, um plano de nível de cota 3 e uma recta r que não pertence a nenhum dos planos, determinar:

a) a intersecção dos planos

b) os pontos de r que são equidistantes dos planos dados.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. C. — Cálculo das Probabilidades — **1.ª Frequência — 2.ª chamada — 8-3-1960.**

I

Parte Teórica

5440 — 1) Enuncie e demonstre o teorema da possibilidade composta para uma classe dupla em probabilidade descontínua.

5441 — 2) Enuncie a lei binomial no problema das provas repetidas. Generalize o enunciado.

5442 — 3) Em Probabilidade contínua defina probabilidade no caso de lançamentos em regiões ilimitadas. Enuncie um teorema relativo a esse caso e faça a aplicação a um exemplo.

II

Parte Prática

5443 — 1) Num baralho de 40 cartas tiram-se à sorte sucessivamente e sem reposição 5 cartas. Calcular a probabilidade de saída de:

a) um só ás;

b) um ás pelo menos;

c) 3 cartas de um mesmo naipe e 2 de outro;

d) uma copa na última tiragem, sabendo que nas anteriores só saíu uma. Justifique sumàriamente.

5444 — 2) Duma urna com 10 esferas, sendo 6 brancas e 4 pretas, tiram-se à sorte, simultâneamente, 2 esferas que saiem da mesma côr. Qual a probabilidade de, em nova tiragem de 2 esferas, de entre as 8 restantes, voltar a saír esfera da mesma côr das duas primeiras?

5445 — 3) Sobre os catetos dum triângulo rectângulo $[O\,A\,B]$ lançem-se à sorte 2 pontos M e N, um em cada cateto. A recta aleatória $M\,N$ divide o triângulo em 2 regiões: um triângulo rectângulo e um quadrilátero. Calcule a probabilidade de, em novo lançamento de um ponto Q, este caír no quadrilátero.

Enunciados dos n.os 5437 a 5445 recolhidos por Maria Beatriz Ferreira da Costa

ASTRONOMIA

F. C. L. — Astronomia — Exame Final — 1.ª chamada — Outubro de 1961.

Teoria

5446 — 1) Os valores da paralaxe heliocêntrica de Marte aparecem nas efemérides astronómicas? Porquê?

5447 — 2) A expressão usualmente utilizada na correcção do semi-diâmetro

$$s_1'' = s''\,(1 + \pi \operatorname{sen} 1'' \cos z)$$

inclui termos de 2.ª ordem? Justifique a resposta.

5448 — 3) A expressão analítica que nos permite determinar a precessão planetária inclui termos periódicos? Porquê?

5449 — 4) Todas as estrelas da nossa galáxia podem emitir energia em virtude dos fenómenos de contracção gravitacional? Justifique a resposta.

5450 — 5) A denominada lei da massa-luminosidade aplica-se a todas as estrelas situadas até 100 parsecs do Sol? Porquê?

5451 — 6) As estrelas novae têm uma posição determinada no diagrama Hertzsprung-Russell? Justifique a resposta.

Prática

5452 — Calcule o tempo médio do ocaso do Sol num lugar de coordenadas

$$\begin{cases} \varphi = +\,65^\circ\ 34'\ 54'' \\ \lambda = -\,7^h\ 39^m\ 17^s.9 \end{cases}$$

para o dia 1961 Junho 22.

(Precisão do problema $0^m.1$).

F. C. L. — Astronomia — Exame Final — 2.ª chamada — Outubro de 1961.

Teoria

5453 — 1) O fenómeno da aberração da luz proveniente de Júpiter varia no decurso do ano? Justifique a resposta.

5454 — 2) A partir da expressão da influência, na ascensão recta, da precessão luni-solar em um ano

$$d\,\alpha = \theta\,(\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{tg}\delta \operatorname{sen}\alpha)$$

justifique se um erro $d\,\delta$ no valor da declinação tem importância no valor da ascensão recta.

5455 — 3) Do ponto de vista teórico, poderão existir estrelas sem movimento próprio? Justifique a resposta.

5456 — 4) O aparecimento, na esfera celeste, das estrelas novas é um fenómeno frequente? Porquê?

5457 — 5) As estrelas sub-gigantes são muito numerosas na nossa galáxia? Justifique a resposta.

5458 — 6) Uma galáxia espiral com barra apresenta substracto? Justifique a resposta.

Prática

5459 — Calcule o tempo legal do nascimento do Sol num lugar de coordenadas

$$\begin{cases} \varphi = -\,71^\circ\ 58'\ 43'' \\ \lambda = +\,8^h\ 35^m\ 08^s.9 \end{cases}$$

para o dia 1961 Setembro 24.

(Precisão do problema $0^m.1$).

Enunciados dos n.os 5446 a 5459 de Raimundo Vicente

F. C. C. — Astronomia — 1.ª Frequência — 2.ª chamada — Fevereiro de 1961.

Prova Prática

5460 — Em 1961, Janeiro 16, observou-se em Coimbra uma estrela com um teodolito, tendo-se determinado a distância zenital

$$z = 46^\circ\ 57'\ 46'',6$$

e o azimute

$$A = 279^\circ\ 7'\ 23'',6\,.$$

A observação foi feita às $2^h\ 13^m\ 20^s,53$ de tempo universal.

Calcular a ascensão recta e a declinação da estrela.

Prova Teórica

5461 — 1) Determinação da latitude de um lugar. Vantagem de observação de uma estrela no meridiano.

5462 — 2) Conversão de tempo sideral local em tempo solar médio local.

5463 — 3) Transformação de coordenadas; passagem de um astro no 1.º vertical.

Nota — Responder só a duas questões.

F. C. C. — Astronomia — 2.ª Frequência — 1.ª chamada — 26-4-1961.

Parte Prática

5464 — Calcular para Coimbra e para o dia 15 de Maio de 1961 o T. U. e o azimute nos instantes correspondentes ao nascimento e ocaso da estrela γ Pegasis.

Parte Teórica

5465 — 1) Influência da refracção nas coordenadas equatoriais.

5466 — 2) Deduzir (ou estabelecer) as fórmulas fundamentais da paralaxe em azimute e distância zenital.

5467 — 3) Estabelecer o desenvolvimento em série da latitude local geocêntrica.

Nota — Responder só a duas questões.

F. C. C. — Astronomia — 2.ª Frequência — 2.ª chamada — Maio de 1961.

Parte Prática

5468 — Em 1961, Abril 17, observou-se num determinado instante em Coimbra e a leste do meridiano a estrela γ Cassiopeiae com a distância zenital verdadeira

$$55^\circ\ 12'\ 33'',6\,.$$

Calcular o T. U., o azimute e o ângulo paraláctico da estrela nesse instante.

Parte Teórica

5469 — 1) Influência da refracção no nascimento ou ocaso de um astro

5470 — 2) Dedução das fórmulas fundamentais para a determinante da paralaxe em declinação e ascensão recta.

5471 — 3) Estabelecer o desenvolvimento em série do raio local terrestre.

Nota — Responder só a duas perguntas.

F. C. C. — Astronomia — Exame Final — 1.ª chamada 12-6-61.

Prova Prática

5472 — Calcular para um lugar situado no semi-meridiano de Coimbra de latitude

$$\varphi = 41^\circ\ 15'\ 34'',7$$

e para 1961, Junho 27, o T. U., a distância zenital e o azimute da maior digressão a leste da estrela α Cassiopeiae.

Enunciados dos n.os 5460 a 5472 recolhidos por Maria Beatriz Ferreira da Costa

PONTOS DE EXAME DA UNIVERSIDADE DO RECIFE

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Complementos de Geometria — 2.ª prova parcial — Novembro de 1960.

5473 — 1) Seja S a superfície definida pela equação vectorial paramétrica

$$\vec{r} = f(u)\,\vec{i} + f(u)\,g(v)\,\vec{j} + g(v)\,\vec{k}\,,$$

onde f e g são funções de classe suficientemente elevada e tais que as derivadas f' e g' são constantemente positivas.

a) Mostre que as linhas de curvatura da super-

fície S são definidas pela relação

$$\log\left(f(u)+\sqrt{1+(f(u))^2}\right)\pm$$
$$\pm\log\left(g(v)+\sqrt{1+(g(v))^2}\right)=\log C$$

onde C é uma constante arbitrária (positiva).

b) Mostre que as linhas da superfície S que cortam ortogonalmente as linhas de S definidas por $f(u)\,g(v)=\text{Const.}$, são as linhas de S definidas por $(f(u))^2-(g(v))^2=\text{Const.}$

c) Verifique que a superfície S não tem pontos umbilicais.

5474 — 2) Dada a superfície S de equação vectorial paramétrica

$$\vec{r}=(u^3+u)\,\vec{i}-\frac{2}{v}(u^3+u)\,\vec{j}+2\,v\,\vec{k},$$

seja Γ a família de linhas de S, definida pela equação diferencial

$$u^2\frac{d^2v}{du^2}+(u^3-3u)\frac{dv}{du}+(3-u^2)\,v=u^5$$

a) Mostre que existe em Γ uma e uma só linha que é definida por uma equação da forma $v=a\cdot u^m$, onde a e m são constantes e determine uma equação vectorial paramétrica dessa linha.

b) Utilizando o resultado anterior, determine, em termos finitos, uma equação vectorial paramétrica geral das linhas da família Γ e determine, em particular, uma equação vectorial paramétrica da linha γ da família Γ que passa pelo ponto P definido por $u=1, v=1$ e tal que nesse ponto se tem $\left(\frac{dv}{du}\right)_P=2$.

c) Mostre que a linha γ obtida é uma linha assintótica da superfície S. Qual é a outra linha assintótica de S que passa pelo ponto P?

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática I — 2.ª prova parcial — Novembro de 1960.

5475 — 1) Seja f a função real de variável real x definida pela relação

$$f(x)=\frac{x^3+A\,x^2+B}{C\,x^2+4}$$

onde A, B, C são constantes.

a) Determinar as constantes A, B, C, de modo que o gráfico de f seja tal que a recta de equação cartesiana $x+y=0$ seja uma assíntota e o ponto $(0, f(0))$ seja de inflexão.

b) Esboçar o gráfico da função f.

c) Determinar a área da região limitada pelo gráfico de f e pelas rectas $x+y=0$ e $x=1$.

5476 — 2) Sobre uma circunferência de raio R, considere um ponto A. Seja P um ponto da tangente à circunferência em A e que dista R de A. Designe por B e C os pontos de encontro da circunferência com uma secante variável que passe por P. Mostre que o valor máximo da área do triângulo ABC é igual a $\frac{\sqrt{6\sqrt{3}}}{4}R^2$.

5477 — 3 — *a*) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$ é convergente.

b) Verifique que a igualdade

$$\frac{1}{1\cdot 1}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(2n-1)}=$$
$$=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{2}{n+n}$$

é válida para todo o natural n.

c) Baseando-se na igualdade anterior, mostre que a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$ é igual a $2\log 2$.

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática II — 1.ª prova parcial — Agosto de 1961.

5478 — 1) Mostre que, se f é uma função real das variáveis reais x e y, homogénea, de grau m, cujas segundas derivadas existem e são contínuas, então

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\,x\,y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=m\,(m-1)\,f(x,y).$$

Conclua, em seguida, que a função f definida por

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{\frac{x\,y}{x^2+y^2}},\quad (x,y)\neq(0,0)$$

é solução da equação

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\,x\,y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

5479 — 2) Dada a função f, das variáveis reais x e y, definida por