GAZETA
DE
MATEMÁTICA

PUBLICADA POR

A. MONTEIRO, B. CARAÇA, H. RIBEIRO, J. PAULO, M. ZALUAR

1.º ANO - N.º 1 ≡ PREÇO DÊSTE NÚMERO: 3$00 ≡ JANEIRO 1940
DEPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA - LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

1.º ANO - N.º 1

JANEIRO 1940

GAZETA DE MATEMÁTICA

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

APRESENTAÇÃO

Gazeta de Matemática inicia, com o presente número, a sua publicação.

Duas palavras sôbre os seus objectivos e o seu programa.

Pretende ela ser um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de Matemática das Escolas Superiores portuguêsas num campo onde êles encontram, porventura, as maiores dificuldades — o campo da preparação prática. O escasso tempo de que em geral dispõem as aulas práticas nas diferentes escolas, a falta de boas colecções de exercícios, adaptadas à orientação das várias cadeiras, são males que assoberbam o estudante e que a *Gazeta*, sem pretender anulá-los, procurará, no entanto, atenuar, na medida do possível.

Para isso, procederá à publicação de todos os pontos de exames de freqüência e finais de tôdas as cadeiras de Matemática das Escolas Superiores, acompanhando-os dos resultados e, quando pareça conveniente, dos passos fundamentais da resolução ou, mesmo, da resolução completa. Assim, a colecção dos números da *Gazeta* constituïrá um repositório de problemas e resoluções que orientará o estudante na sua preparação.

Outro problema que à *Gazeta* merecerá um cuidado especial é a situação dos centenares de candidatos à admissão das Escolas Superiores. Por motivos que não é oportuno analisar aqui, encontram-se êles quási às cegas na escolha do caminho que hão-de imprimir à sua preparação para os exames de aptidão.

Mencionemos apenas que o critério dos seleccionadores, revelado na organização dos pontos dos exames de aptidão, nem sempre está de acôrdo com o critério que preside à elaboração dos pontos dos exames de saída dos Liceus, critério êste que, necessàriamente, tem enorme influência na orientação do ensino liceal.

Pois bem, *Gazeta de Matemática* procederá à publicação dos pontos de matemática saídos nos exames de aptidão das várias Escolas, dará os esclarecimentos necessários para a sua resolução e assim contribuïrá para orientar os candidatos.

Em cada número publicar-se-á também um artigo de carácter didáctico, sôbre um assunto de matemáticas elementares ou superiores.

*

* *

As pessoas que assumem o encargo duma publicação desta natureza sabem que ela vingará e terá condições de vida apenas na medida em que consiga interessar a massa dos estudantes a que se dirige; mas, para que êsse interêsse seja mais acentuado, ela necessita da colaboração dos seus leitores. Para isso, cada número conterá algumas *questões propostas* para os leitores resolverem. Nos números seguintes serão publicadas, com indicação dos nomes dos autores, as melhores soluções recebidas.

E assim, com a colaboração de todos, redactores e leitores, *Gazeta de Matemática* constituïrá um organismo vivo, um instrumento eficiente de trabalho e, ao mesmo tempo, um Amigo, animado do desejo de *bem servir*. Êste é, acima de todos, o seu objectivo fundamental.

A NOÇÃO DE CONTINGENTE

Seja R^3 o espaço euclideano a três dimensões reais. Recordemos a noção de *limite de uma sucessão de pontos* de R^3. Seja $p_1, p_2, \cdots p_n, \cdots$ uma tal sucessão; diz-se que ela tem por limite o ponto p quando a distância de p a p_n tende para zero quando n aumenta indefinidamente.

Seja A um conjunto de pontos de R^3. Como se sabe, diz-se que p é *ponto de acumulação de* A, se A contém, pelo menos, uma sucessão de pontos $p_n \neq p$ que tem por limite o ponto p.

A noção de limite de uma sucessão pode definir-se para sucessões de rectas, curvas, funções, superfícies, etc. Consideremos uma sucessão de semi-rectas r_n que tenham por origem um ponto fixo p $(r_n \equiv pp_n)$. Diremos que esta sucessão tem por limite uma semi-recta r (de origem p) se o ângulo das semi-rectas r e r_n tende para zero quando n aumenta indefinidamente. (Chamamos aqui ângulo de duas semi-rectas com a mesma origem, ao menor dos dois ângulos que essas duas semi-rectas determinam). De modo análogo ao anterior se podia agora definir a *semi-recta de acumulação* de um conjunto qualquer de semi-rectas (com a mesma origem).

Estas noções que acabamos de recordar são indispensáveis para definir a noção de semi-tangente a um conjunto A num dos seus pontos de acumulação. *Seja* p *um ponto de acumulação de* A; *diremos que a semi-recta* pq *é uma* *semi-tangente a A no ponto p se existir uma sucessão $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ de pontos de A (sendo $p_n \neq p$) tal que a sucessão de semi-rectas $pp_1, pp_2, \cdots, pp_n, \cdots$ tenha por limite a semi-recta pq.* Ao conjunto de tôdas as semi-tangentes a um conjunto A no mesmo ponto p, dá-se o nome de *contingente de A no ponto p*. Esta designação é devida ao matemático francês Bouligand [1]. Se o contingente de A no ponto p se reduz a uma recta r diz-se que r é *tangente ao conjunto A no ponto p*. Se o contingente de A no ponto p contém tôdas as semi-rectas de um plano que passa por p, e só essas, diz-se que êsse plano é tangente a A no ponto p. A noção de contingente contém como casos particulares as noções de tangente a uma curva (plana ou torsa) e de plano tangente a uma superfície.

É possível definir para um conjunto de pontos de R^3, noções que generalizam as noções de plano osculador, círculo osculador, etc. Pode, portanto, estudar-se a geometria infinitesimal independentemente da teoria das funções.

A êste novo capítulo da matemática deu Bouligand o nome de Geometria Infinitesimal Directa, que pode considerar-se como uma ciência em plena formação. O seu aparecimento era indispensável. De há muito que se reconhecera a complicação que os métodos da Geometria Analítica traziam para a resolução de certos problemas. Todos os estudantes conhecem as complicações que podem aparecer na resolução de certos problemas de geometria por métodos analíticos, quando não se escolhem *convenientemente* os eixos coordenados. Os eixos *mais convenientes* são aquêles que conduzem a cálculos mais simples, o que depende evidentemente do problema a resolver. E como não se conhecem regras gerais para a escolha dos eixos mais convenientes essa escolha constitue um dos *misteriosos quebra-cabeças* da Geometria Analítica. Para estudar, por exemplo, as propriedades de um triângulo, umas vezes convém escolher para eixos coordenados dois dos seus lados, outras vezes convém escolher a recta que contém um dos lados e a perpendicular no ponto médio, etc. No estudo das curvas torsas, o sistema de eixos mais *conveniente* pode mesmo variar de ponto para ponto (triedro de Frenet-Serret). Tôdas estas circunstâncias deixam perplexo o estudante desprevenido, perante os laboriosos cálculos que têm, às vezes, que fazer para demonstrar uma propriedade simples da Geometria Elementar, pelos métodos da Geometria Analítica. Compreende-se assim a importância da Geometria Infinitésimal Directa em que não existem eixos que compliquem a resolução dos problemas, nem hipóteses de continuïdade sôbre as funções (ou sôbre as suas derivadas) que mascarem completamente a natureza geométrica das questões a estudar.

ANTÓNIO MONTEIRO

[1] *Bouligand* — Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe.

COLABORAÇÃO

A *Gazeta de Matemática* pede aos Professores e Assistentes das cadeiras de Matemática das Escolas Superiores de Lisboa, Pôrto e Coimbra que colaborem com a *Gazeta* facultando-lhe os pontos de exames, das suas cadeiras, com a indicação dos respectivos resultados, sempre que fôr possível.

As respostas às questões propostas deverão ser enviadas a: *Gazeta de Matemática*, Faculdade de Ciências, Rua da Escola Politécnica — Lisboa.

A *Gazeta* será enviada gratuïtamente aos colaboradores permanentes.

"PRÉMIO NACIONAL DOUTOR FRANCISCO GOMES TEIXEIRA"

Transcrevemos duma portaria do Ministério da Educação Nacional publicada no início do presente ano lectivo o seguinte:

«*a)* É criado o «Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira», em homenagem ao insigne matemático contemporâneo, cuja obra didáctica e de investigação contribuiu poderosamente para o progresso das ciências exactas em Portugal, e cujas virtudes cívicas ficaram como modêlo perene de bondade e amor pátrio, o qual se destina a galardoar, mediante concurso, o melhor trabalho de matemáticas puras elaborado em cada ano lectivo por um aluno de qualquer estabelecimento de ensino universitário em que sejam professadas;

b) O prémio da importância de 2.500$00, será anualmente concedido por proposta de um júri constituído pelo presidente da Junta Nacional da Educação e por dois professores de cada Faculdade de Ciências, sob a presidência do primeiro:

c) Os directores das três Faculdades, ouvidos os respectivos Conselhos, elaborarão, no prazo de noventa dias, para serem superiormente aprovadas, as normas técnicas e regulamentares a que hão-de obedecer o trabalho e o concurso a realizar já no corrente ano lectivo».

EXAMES DE ADMISSÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Pontos modelos publicados no «Diário do Govêrno» (n.º 114) — I série de 18 de Maio de 1939

Cursos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

1 — Um pai tem 27 anos e o seu filho 3. Quantos anos serão precisos para que o filho tenha 1/4 da idade do pai? Haverá lugar para a discussão a formar? Justifique a resposta. R: *Representando por* x *o número de anos que são precisos, vem* $\frac{1}{4}(27+x)=3+x$ *donde* $x=5$.

2 — Ache a expressão do desenvolvimento de

$$(1+a)^m+(1-a)^m.$$

3 — Determine m de maneira que a soma dos quadrados das raízes da equação: $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ seja igual a um número k. A que se reduzem as raízes?

R: $m=1\pm\sqrt{k-9}$ $x=\frac{1\mp\sqrt{k-9}\pm\sqrt{8+k\pm2\sqrt{k-9}}}{2}$

4 — Calcule por logaritmos a superfície e o volume dum cilindro regular com 0,18643 m de altura e 0,09325 m de raio da base. R: $S=0^{m^2},16408$ $V=0^{m^3},00506$.

5 — Demonstre que: $\operatorname{tg}(a+b)\cdot\operatorname{tg}(a-b)=$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b}{\cos^2 a-\cos^2 b}.$$

6 — Pelo método do problema contrário trace uma recta que seja cortada pelos três raios de um feixe de semi-rectas dado, segundo dois segmentos de comprimentos também dados.

7 — Que é necessário para que o produto de dois números fraccionários irredutíveis seja um número inteiro? R: *É necessário que o numerador de cada uma das fracções seja múltiplo do denominador da outra.*

Curso de habilitação para professores de desenho dos liceus

8 — Forme a equação do segundo grau cujas raízes são os valores de x e y que se obtêm resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y-\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{5}{6} \\ x-\dfrac{y+1}{3}=-\dfrac{1}{6}\end{cases}\qquad \text{R: } 6x^2-5x+1=0.$$

9 — *a)* Defina o limite de uma sucessão. *b)* É possível a desigualdade $3x-x^2-10>0$? Justifique a resposta. R: *b) Não, porque o descriminante e o coeficiente de* x^2 *são ambos negativos.*

10 — Calcule por logaritmos a área do triângulo isósceles sabendo que a altura é 102,27 m e que o ângulo da base mede 52° 48′ 34″.

11 — Escreva a expressão geral dos ângulos que verificam a igualdade $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. R: $\alpha=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$. (radianos)

12 — Calcule o volume de um cilindro de revolução de raio 3 m sabendo que a altura é o dôbro do lado do quadrado inscrito na base. R: $v=54\pi\sqrt{2}\,m^3$.

13 — *a)* Quanto mede em radianos o ângulo externo de um hexágono regular? R: $\frac{\pi}{3}$. *b)* Enuncie o teorema das três perpendiculares.

14 — Qual é a condição necessária e suficiente para que um número primo divida um produto? R: *Que divida um dos factores do produto.*

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo

15 — Determine n de modo que a equação
$$(a-b)^2x^2+2(a^2-b^2)x+n=0$$
tenha raízes iguais. R: $n=(a+b)^2$.

16 — *a)* Que relação há entre $\log_2 16$ e $\log_4 16$? R: $\log_2 16=2\log_4 16$. *b)* Quando se diz que a função $y=f(x)$ é contínua no ponto x_0?

17 — Calcule por logaritmos a área de um triângulo rectângulo em que a hipotenusa tem de comprimento $94^m,623$ e um dos ângulos mede 26° 49′ 51″.

18 — *a)* Verifique que $\operatorname{tg}a+\operatorname{cotg}a=\frac{\operatorname{cotg}a}{\cos^2 a}$. *b)* Escreva as expressões gerais dos ângulos que têm o mesmo coseno que o ângulo α. R: $x=2n\pi\pm\alpha$, *onde* n *é um número inteiro.*

19 — Verifique que a área de uma coroa circular é igual ao produto do perímetro da circunferência exterior pela diferença do raio das duas circunferências, subtraído (o produto) da área do círculo cujo raio é a diferença dos raios das duas circunferências.

20 — Que relação há entre o máximo divisor comum de dois números a e b e o máximo divisor comum de dois números ac e bc? Justifique a resposta recorrendo ao método da decomposição em factores primos. R: *Se* $M=m.d.c.(a,b)$ *é:* $Mc=m.d.c.(ac,bc)$.

(Pontos modelos publicados no «Diário do Govêrno» n.° 132, 2.ª série, de 8 de Junho de 1939)

Instituto Superior Técnico

21 — Porque é que $c<0$ é condição suficiente mas não necessária para que as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ sejam reais? Determinar os coeficientes b e c de forma que as raízes sejam 3 e $-\frac{1}{2}$. R: *A condição é suficiente (se fôr* $a>0$*) porque o descriminante,* Δ, *é, neste caso, positivo; mas não é necessária porque, sendo* $c>0$, Δ *pode, ainda, ser positivo. Somos conduzidos à equação* $2x^2-5x-3=0$ *e portanto* $b=-5$ *e* $c=-3$.

22 — Possuem-se duas qualidades de carvão de composição desconhecida. Se as reünirmos na proporção de 1:3 obtemos um lote com 15 por cento de cinzas; se as reünirmos na proporção de 3:2 obtemos um lote com 11 por cento de cinzas. Qual é a percentagem de cinzas em cada um dos carvões existentes? R: *Se representarmos por* x *e* y *as percentagens de cinzas dos dois carvões será*

$$\begin{cases} x+3y=15 \\ 3x+2y=11\end{cases}\quad \text{donde } x={}^3/_7\,\% \text{ e } y=4\,{}^6/_7\,\%.$$

23 — Dado um triângulo rectângulo de hipotenusa $2a$ e de altura correspondente à hipotenusa igual a $\frac{a}{2}$, determinar a posição de um ponto sôbre a hipotenusa tal que, tirando por êle uma recta perpendicular a êste lado, o triângulo fique dividido em duas figuras de áreas iguais. R: *Uma das duas figuras da decomposição é um triângulo rectângulo com o vértice do ângulo recto no maior segmento da hipotenusa de-*

terminado pelo pé da altura. Seja x *o cateto dêsse triângulo que pertence à hipotenusa do triângulo dado. A expressão analitica que indica que a área dum dos triângulos é dupla da do outro é* [*visto a razão de semelhança dos dois triângulos ser* $\frac{x}{a\sqrt{2+\sqrt{3}}}$] $\frac{a^2}{2} = 2 \cdot \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2$ *donde*

$$x = \frac{a\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}.$$

24 — Dada um circunferência de raio R, determinar a distância a que devem passar do centro duas cordas paralelas e simétricas para que a área do paralelogramo formado sôbre elas seja igual a metade da área do círculo. R: *Os outros dois lados do paralelogramo também são cordas paralelas e simétricas. A equação a que se chega é* $64x^4 - 64R^2x^2 + \pi^2R^4 = 0$ *se fôr* x *a distância referida. E encontram-se duas soluções correspondentes aos dois pares de cordas paralelas e simétricas*

$$x = R\sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{16-\pi^2}}{8}}.$$

25 — A distância entre as arestas opostas dum tetraedro é d. Calcular os volumes em que êste tetraedro é dividido por um plano paralelo a uma das faces, passando a metade da altura. R: *A aresta do tetraedro é* $d\sqrt{2}$; *a área de uma face é, pois,* $\frac{d^2\sqrt{3}}{2}$. *A altura do tetraedro é* $\frac{2d}{\sqrt{3}}$ *e o volume* $\frac{d^3}{3}$. *O volume do tetraedro que se obteve pela decomposição indicada é* $\frac{d^3}{24}$ *e o volume do sólido restante* $\frac{7d^3}{24}$.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras

26 — *a)* Diga como resolve desigualdades do 2º grau e em que propriedades se baseia essa resolução. *b)* Resolva a desigualdade $\frac{2x^2+x+1}{x^2-x-3} > 2$.

R: *Há que resolver* $\frac{3x+7}{x^2-x-3} > 0$. *As soluções são*

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2} > x > -\frac{7}{3} \quad e \quad x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

27 — *a)* Diga o que entende por proporcionalidade de grandezas; dê exemplos geométricos de grandezas directa e inversamente proporcionais. *b)* Resolva o seguinte problema: determinar dois números tais que a sua diferença, a sua soma e o seu produto sejam directamente proporcionais, por esta ordem, aos números 2, 3, 5. R: *Os números são* 10 *e* 2.

28 — *a)* Defina figuras semelhantes e diga que casos conhece de semelhança de triângulos. *b*) Resolva o seguinte problema: Seja um triângulo rectângulo AOC de catetos $AO = a$ e $OC = b$. Prolonguem-se o cateto AO até D e a hipotenusa AC até F, sendo D e F dois pontos situados no semi-plano determinado pela recta OC que não contém o ponto A, de modo que D e F estejam numa mesma perpendicular a AO. Determinar $x = OD$ de modo que a área do trapézio $ODFC$ seja igual à área do triângulo AOC. (*Nota* — O enunciado deste problema tem, aqui, uma forma que difere da do original. Esta inclue uma gravura que fomos obrigados a dispensar). R: *É-se conduzido à equação* $\frac{ab}{2} = bx + \frac{ab}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2$ *e a solução é* $x = a(\sqrt{2}-1)$.

29 — É dada uma esfera C de centro O e raio conhecido r; Seja S a sua área. Sôbre um diâmetro $\overline{AB}$, tome-se um ponto M e faça-se $\overline{OM} = x$. Com $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ como diâmetros, tracem-se duas novas esferas C_1 e C_2. Determinar x de modo que a soma das áreas de C_1 e C_2 seja $\frac{1}{n}S$ (n, inteiro e positivo). Discutir a solução mostrando quais são os valores possíveis de n. R: *É-se conduzido à equação* $\pi(r+x)^2 + \pi(r-x)^2 = \frac{4\pi r^2}{n}$ *que só tem raizes reais para* $n = 0$ e $n = 1$. *O único caso de interêsse é o de* $n = 1$ *a que corresponde a solução* $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

30 — É dado um triângulo isósceles de base l e altura h; divida-se a altura em n partes iguais e pelos pontos de divisão tirem-se paralelas à base. Determinar a soma dos comprimentos dos segmentos dessas paralelas limitados pelos lados do triângulo. R: *A soma pedida é* $\frac{n+1}{2}l$.

Instituto Superior de Agronomia

31 — Pondo em equação o problema: «Circunscrever a uma esfera de raio R um cone de revolução cuja superfície total seja igual a πRm», acha-se, para resolvê-lo, a equação $X^2 + (2R-m)X + R(m+R) = 0$ em que X mede a distância do centro da esfera ao vértice do cone e o parâmetro m é um certo múltiplo de R. Verifique então: 1) Qual a condição necessária e suficiente para que o problema seja possível; 2) Que êste não pode ter uma solução única; 3) Qual o valor a atribuir a m para que a superfície total do cone seja dupla da superfície da esfera nêle inscrita. Começará por definir o que é que se entende por *condição necessária* e por *condição suficiente*. R: $m \geq 8R$.

32 — Dada a demonstração do teorema: «Num círculo a maior das cordas é o diâmetro»: Interpretar as sucessivas relações conducentes à demonstração (que será escrita no quadro negro, em seguida à extracção do ponto); Justificar cada uma das mesmas relações. Dizer: 1) Qual foi o método seguido na demonstração; 2) Em que consiste êsse método; 3) A que outros métodos, dedutivos ou demonstrativos, se recorre nas matemáticas.

33 — Como é que se pode tornar calculável por logaritmos uma soma ou diferença de dois senos ou duas tangentes trigonométricas? Aplique o processo a *uma* das expressões: $\operatorname{sen} 36^\circ 12' 27'' + \operatorname{sen} 122^\circ 15' 10'', 6$; $\operatorname{tang} 138^\circ 1' 25'' + \operatorname{tang} 12^\circ 45' 16'', 8$; limitando-se porém, a fazer os cálculos apenas quanto a uma das quatro operações indicadas.

34 — Ache dois números que tenham 9 divisores comuns e tais que um dêles seja raíz quadrada do outro. Escreva todos os divisores de cada um dêsses números. Diga que particularidade oferece o problema, justificando a resposta. R: *Os dois números são da forma* p^8 *e* p^{16} *ou* p^2q^2 *e* p^4q^4, *onde* p *e* q *são números primos quaisquer.*

35 — Mostre que a equação $\sqrt[3]{x+2} = \sqrt{2x+4}$ embora tenha uma raiz dupla e outra simples — fàcilmente se resolve por um artifício de cálculo, começando por elevar ambos os seus membros à 6.ª potência. Verifique as soluções achadas.

R: *A raiz dupla é* -2 *e a raiz simples* $-\frac{3}{2}$.

ALGEBRA SUPERIOR E MATEMÁTICAS GERAIS

Faculdade de Ciências de Lisboa

(1.º exame de freqüência de Álgebra Superior 1938-39)

I

36 — *a)* Defina divisão de números complexos e indique, justificando-a, a representação geométrica de tal operação. *b)* Defina limite de uma variável e enuncie as propriedades que dizem respeito à noção de limite. *c)* Defina funções homogéneas e enuncie o teorema de Euler que lhes respeita. *d)* Indique em que consiste o problema da transformação das equações algébricas e defina transformação homográfica. *e)* Defina equação recíproca, enuncie as condições a que devem satisfazer os coeficientes de uma tal equação e indique como se procede ao abaixamento do seu grau.

37 — Sabendo que as raízes da equação $x^3+2x^2-5x-6=0$, verificam as relações $\alpha_1+\alpha_2=1$ e $\alpha_2+\alpha_3=-1$, determine os valores de α_1, α_2 e α_3. R: $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=-3$.

38 — Calcule a derivada de primeira ordem da função y definida pela equação

$$e^{\operatorname{sen} xy}-[\cos(x-y)]^{\operatorname{tg} x}+l\frac{xy}{1+x^2}=0.$$

39 — Determine os máximos e os mínimos da função $y=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x$. R: $x=\frac{\pi}{4}$ e $x=\frac{5\pi}{4}$ *conduzindo, ambos, ao máximo* $y=1$.

II

40 — *a)* Defina números complexos conjugados e enuncie as propriedades que lhes respeitam. *b)* Defina função contínua num ponto no caso de uma só variável independente e enuncie os teoremas que respeitam a tais funções. *c)* Escreva as fórmulas de Taylor e de Maclaurin para as funções inteiras de uma só variável independente. *d)* Indique a condição necessária e suficiente para a divisibilidade de um polinómio inteiro em x por $x-\alpha$ e enuncie a regra de Ruffini. *e)* Indique em que consiste o problema da separação das raízes de uma equação algébrica e enuncie os teoremas de Rolle e de Descartes.

41 — Calcule os valores de $z=\sqrt[4]{\frac{-1-2i}{2-i}+(1+2i)}$

R: $|z|=8$, $\arg z=\pi\left(\frac{1}{16}+2k\right)$ $k=0,1,2,3$.

42 — Aplique a fórmula de Leibnitz à determinação da derivada de 4.ª ordem da função $y=a^{x+1}.\,lx$.

43 — Calcule $\lim\limits_{x=0} x(lx)^2$. R: $\lim\limits_{x=0} x(lx)^2=0$

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras

(Exame de freqüência)

44 — Dado o sistema $\begin{cases}4x-2y-3z=1\\ x+3y+z=2\end{cases}$. *a)* Determinar x e y em função de z. *b)* Determinar os valores de z de modo que seja $\frac{y^3}{x^3}=1$. R: *a)* $x=\frac{z+1}{2}$, $y=\frac{-z+1}{2}$. *b)* $z_1=i\sqrt{3}$, $z_2=-i\sqrt{3}$.

45 — Dadas duas funções $y(x)$ e $z(x)$ satisfazendo às relações $y^2+z^2=1$, $y'^2+z'^2=1$, $y''^2+z''^2=1$ mostrar que $yy'+zz'=0$, $yy''+zz''=-1$, $yy'''+zz'''=0$, $yy^{IV}+zz^{IV}=1$.

46 — Estudar e representar geomètricamente a função

$$y=\frac{x}{1-\frac{x^2}{4}}.$$

47 — Calcular a soma $1+i+i^2+\cdots+i^n$ (discussão conforme os valores de n). R: *A soma é uma função do resto da divisão de* n *por* 4 *dada pela tabela de correspondência* $0\rightarrow 1$, $1\rightarrow 1+i$, $2\rightarrow i$, $3\rightarrow 0$.

48 — Dada a equação $\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x^2+1)}=k$, determinar k de modo que a equação se reduza à forma $x^n-A=0$ e resolvê-la, nessa hipótese.

R: *Para* $k=-2$ *vem* $x^4-\frac{1}{k-1}=0$ *cujas raízes são*

$$x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{k-1}}.$$

Para $k=1$ *vem* $x^2=\frac{1}{2+k}$ *cujas raízes são*

$$x=\frac{1}{\pm\sqrt{2+k}}.$$

Instituto Superior Técnico

(Mat. Gerais, 1.º exame de freqüência — 1938-39)

I

49 — Achar a derivada de: $y=\sqrt[x]{\frac{5x^3+10}{\log ch\,(\operatorname{tg}x)}}$.

50 — Estudar a função: $y=\frac{9x^2-6x+1}{x^3}$. Representação geométrica.

51 — Sendo $thx=0{,}75$, calcular x com 4 casas decimais.

52 — Provar que a série $\Sigma n^2\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ é divergente para todos os valores de x diferentes de 0.

II

53 — Mostrar que tôdas as raízes da equação

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^3=\cos\frac{r}{n}+i\operatorname{sen}\frac{r}{3}\quad\text{são reais.}$$

54 — Calcular o triângulo isósceles de área máxima que pode ser cortado numa fôlha semi-circular, supondo que a base é paralela ao diâmetro do semi-círculo, e o vértice está no centro.

55 — Calcular $\frac{dy}{dx}$, sendo $10^x+y^x.\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}+y^{\operatorname{tg}y}=0$.

56 — Calcular o verdadeiro valor de $y=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ para $x=\pm 0$.

Outros exercícios

57 — De uma fôlha metálica, com forma circular, é suprimido um sector de modo que a parte restante da fôlha pode formar um recipiente cónico. Calcular o ângulo que deve ter essa parte restante para que o recipiente tenha a capacidade máxima. R: *Represente-se por* r *o raio do círculo dado e por* x o *número de radianos do ângulo a calcular. Como o comprimento do arco de circunferência que permanece depois da supressão é* rx, *o raio da base do cone é* $\frac{rx}{2\pi}$. *E o problema é, agora, o da determinação do número que dá para a função*

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2 x^2}{4\pi^2}\sqrt{r^2 - \frac{r^2 x^2}{4\pi}}. \quad \textit{(volume do cone)}$$

um minimo. Encontra-se que o ângulo pedido é $\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ radianos.

58 — Determine λ de modo que $2+i$ verifique a equação

$$z^3 - \lambda z^2 + 5 - i = 0. \quad \text{R}: \lambda = \frac{61}{25} + \frac{2}{25}i$$

59 — Resolver $\operatorname{sen} z = 0$. R: *Há que resolver a equação* $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$, ou $e^{2iz} = 1$ *donde se tira* $z = k\pi$, *sendo k um número inteiro.*

60 — Sendo y uma função de x definida pela equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, mostrar que é $y'' = \frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} y^{-\frac{1}{3}}$.

61 — Dado um segmento rectilíneo AB e uma recta $X'X$, perpendicular ao segmento e passando pelo ponto O do seu prolongamento, determinar o ponto P de $X'X$ do qual o segmento AB é visto sob o ângulo máximo. Determinação gráfica de P. $(\overline{OA} = a;\ \overline{OB} = b;\ a > b)$. R: *Seja* $\overline{OP} = x$ *e* φ *a variável representativa da medida do ângulo sob o qual o segmento* AB *é visto dum ponto qualquer de* X'X. *Nota-se fàcilmente que* $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{a}{x} - \frac{b}{x}\right) : \left(1 + \frac{ab}{x^2}\right)$ *E o problema, é agora, o da determinação do valor que dá um máximo para a função* $\varphi(x) = \operatorname{arctg}\frac{(a-b)x}{ab + x^2}$. *Encontra-se que o ponto* P *de* XX' *deve ser tal que* OP *é a média geométrica de* a *e* b.

62 — Verificar a identidade $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x - 2\operatorname{cotg} 2x$ e utilisá-la no cálculo da soma da série convergente

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) + \cdots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{4}\right) + \cdots$$

63 — Resolver a equação $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$, mostrando que tôdas as raízes são reais.

64 — Demonstrar que se a série $\Sigma\alpha_n$ é convergente, também a série $\Sigma\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}$ é convergente.

65 — Averigue se há polinómios inteiros em x que satisfaçam à equação

$$y'' + (x-1)y' - 4y = 0 \quad \left(y' = \frac{dy}{dx};\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

R: *Suponha-se que um polinómio de grau* n *satisfaz esta equação e ver-se-á que o coeficiente de* x^n *é nulo. A resposta é, pois, negativa.*

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. (1.º exame de freqüência, 2.ª Chamada 8 Fev. 1939)

66 — *a)* No problema das provas repetidas como define desvio médio quadrático do número de vezes que o acontecimento se realiza em n provas? Como define desvio provável e desvio médio absoluto? Indique algumas relações entre estes desvios. *b)* Quais são as expressões exactas da probabilidade de que o acontecimento se realize n vezes e de que o desvio tenha o valor 1?.

67 — *a)* Defina curvas de probabilidade e indique as suas principais propriedades. *b)* Enuncie os teoremas de Tchebycheff e de Bernoulli.

68 — Calcule a probabilidade de obter duas vezes e só duas vezes a sena, quando se lançam sôbre uma mesa 4 dados. Descreva o raciocínio que fêz. R: *Probabilidade de obter a sena em dois dados prèviamente fixados, e, só neles:*

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2. \quad \textit{Probabilidade pedida:} \quad \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}.$$

69 — Qual é o número de vezes que se deve lançar uma moeda ao ar para que seja 1/2 a probabilidade de aparecer um desvio relativo em valor absoluto menor que 0 ,02? Descreva o raciocínio que fêz.

$\theta(\lambda) = \frac{1}{2}$

$\lambda = \frac{0{,}02 \times n}{\sqrt{2n\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}$

MECANICA RACIONAL

F. C. L. (1.º exame de freqüência de 1938-39)

70 — *Cálculo vectorial:* 1) Defina produto mixto de três vectores e diga quais as suas propriedades. 2) Defina momento axial e momento polar de um vector aplicado. 3) Defina fluxo elementar de 1 vector. 4) Escreva a expressão vectorial do centro de um sistema de vectores paralelos e indique o significado das letras.

71 — *Cinemática:* 1) Escreva as componentes tangencial e centrípeta da aceleração dum ponto móvel. 2) O que entende por movimentos de aceleração constante? Quais as trajectórias dêstes movimentos? 3) Defina movimento central e enuncie as suas propriedades.

72 — Um sistema é constituído pelos vectores: $(A_1, 2\mathbf{e}_1)$, $(A_2, 3\mathbf{e}_1)$, $(A_3, -4\mathbf{e}_1)$ sendo as coordenadas dos pontos de aplicação $A_1(0,0,0)$ $A_2(0,2,0)$ $A_3(1,1.1)$; determinar o centro do sistema e a equação do seu eixo central.

73 — Um ponto material move-se de forma que as componentes da sua aceleração segundo dois eixos coordenados rectangulares são $x'' = y$, $y'' = -\operatorname{sen} t$. Determinar as equações do movimento e a equação da trajectória sabendo-se que para $t = 0$ é: $x = 2$, $x' = -1$, $y = 0$, $y' = 1$.

Escola Naval (1.º exame de freqüência — 1939)

74 — Um ponto move-se segundo uma recta com a seguinte lei dos espaços $s = t^3 + 3t + 2$. Determine o instante em que a velocidade e a aceleração têm o mesmo valor e os valores médios da velocidade e da aceleração no intervalo $t = 1$ a $t = 3$.

75 — Um ponto percorre uma circunferência de 2 m de raio com a velocidade linear $v = 4$ m/s. Determine o número de voltas por minuto e a aceleração centrípeta.

GEOMETRIA PROJECTIVA

F. C. L. (Exame de freqüência)

1.ª Chamada — 8 de Fev. de 1939

76 — *a)* Razão dupla de 4 elementos de uma forma de 1.ª espécie; definição, propriedades, valores principais e suas relações. *b)* Feixes harmónicos; definições e suas propriedades. *c)* Coordenadas projectivas nas formas de 1.ª espécie; definição e transformação de coordenadas. *d)* Involução nas formas de 1.ª espécie; definição. Ponto central e norma da involução; definições e sua determinação analítica. *e)* Geração projectiva das cónicas e propriedades que dela derivam.

77 — Dados dois raios a e b de um feixe de centro próprio, determine gràficamente o raio c tal que seja $(abc) = -3/2$. Justifique a construção empregada.

78 — Determine a equação da projectividade entre duas pontuais sobrepostas u e u', sendo conhecidas as abscissas 2 e 6 dos seus pontos limites I e J', respectivamente, e 3 e 5 as de dois pontos homólogos A e A', respectivamente, e calcule as abscissas dos seus pontos unidos. R: *A equação é* $xx' - 6x - 2x' + 13 = 0$ *e as abscissas dos pontos unidos são* $4 + \sqrt{3}$ *e* $4 - \sqrt{3}$.

79 — Determine gràficamente os pontos de intersecção de uma recta dada r com uma cónica definida por cinco pontos A, B, C, D e E. Justifique a construção empregada.

2.ª Chamada (10 de Fev. de 1939)

80 — *a)* Razões simples de pontos e de raios; definições e sua relação. *b)* Pontuais harmónicas; definição e suas propriedades. *c)* Coordenadas projectivas homogéneas nas formas de 1.ª espécie; definição e significado geométrico. Coordenadas dos elementos fundamentais. *d)* Formas projectivas; definições e propriedades. *e)* Teorema de Desargues sôbre as cónicas e seus casos limites.

81 — Sendo dados, sôbre uma pontual, três pontos A, B e C tais que $\overline{AB} + 3\,\overline{BC} = 0$, determine gràficamente o ponto D de modo que seja $(ABCD) = -1$. Justifique a construção empregada.

82 — Determine a equação da involução sôbre uma pontual, sendo conhecidas as abscissas -9 do ponto central e $+1$ e -1 de dois pontos homólogos, e calcule as abscissas dos pontos unidos dessa involução. R: *A equação é:* $xx' + 9(x + x') + 1 = 0$ *e as abscissas dos pontos unidos são* $-9 + \sqrt{80}$ *e* $-(9 + \sqrt{80})$

83 — Definida uma cónica por cinco tangentes a, b, c, d e e determine gràficamente uma outra tangente à mesma cónica e o ponto de contacto da tangente b. Justifique a construção empregada.

CÁLCULO INFINITÉSIMAL

F. C. L. (1.º Exame de freqüência 1938-39)

I

84 — *a)* Defina séries inteiras e enuncie o teorema de Abel. Defina convergência uniforme. *b)* Potência de um conjunto. Conjuntos com a potência do contínuo; definição e propriedades. *c)* Defina infinitamente pequenos equivalentes e enuncie os teoremas sôbre a substituïção dos infinitamente pequenos. *d)* Critérios de integrabilidade. Funções integraveis; definição e propriedades. *e)* Determinante funcional; definição e aplicações às funções compostas e às funções inversas.

85 — Determine o número a que corresponde a fracção contínua $[2(3,1,1)]$. R: $\dfrac{5 + \sqrt{17}}{4}$.

86 — Determine x de forma que sejam coplanares os vectores

$$\mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 \quad \mathbf{w} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 .$$

R: *O anulamento do produto mixto é uma condição suficiente (e necessária) que conduz a* $x = \dfrac{9}{4}$.

87 — Definidas as funções u e v de x e y pelo sistema $\begin{cases} vly - e^u + x^3 = 0 \\ uv - 2y = 0 \end{cases}$ calcule $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. (*Nota.* Por l representa-se o logarítmo neperiano).

II

88 — *a)* Critério geral de convergência de um produto infinito. Produtos infinitos absolutamente convergentes; definição e propriedades. *b)* Medida dos conjuntos. Conjuntos mensuráveis. *c)* Vectores colineares e vectores coplanares; definições e propriedades. *d)* Função contínua num conjunto. Continuïdade uniforme. Teorema de Cantor. *e)* Enuncie o segundo teorema sôbre a existência e derivabilidade das funções implícitas.

89 — Determine o carácter da série

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \cdots$$

4567

R: *Termo geral* $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$; *o critério de Duhamel-Raabe mostra que a série é convergente.*

90 — Dados os vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ com a origem comum O, determine x e y de forma que o paralelogramo construido sôbre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ seja rectângulo e tenha uma área igual a $\sqrt{70}$. R: *Para que o paralelogramo seja rectângulo têm de ser perpendiculares entre si os vectores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$, *isto é, tem de ser nulo o seu produto interno; para que a área do paralelogramo seja igual a* $\sqrt{70}$ *deve ser êste o módulo do vector produto externo. Portanto* $x = \pm 1$ *e* $y = \pm 2$.

91 — Definida a função z de x e y por $z = uv + \dfrac{u}{w} - v^w$, sendo $u = x^2 - y^2$ $v = xy$ e $w = e^x$, calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

I. S. C. E. F. (1.º Exame de freqüência de Matemáticas Superiores, 12 de Jan. de 1939)

92 — As funções

$$y_1 = 2x^2 + 3x + 1, \quad y_2 = x - 2, \quad y_3 = 4x^2 - 1,$$

são linearmente dependentes?

93 — Determine os máximos e mínimos da função $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$.

94 — O sistema $\begin{cases} xy + uv = 1 \\ \dfrac{x+y}{u+v} = -1 \end{cases}$ determina u e v como funções de x e y. Calcule $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

2.ª Chamada 19 de Jan. de 1939)

95 — Achar os máximos e mínimos da função implícita y de x definida pela equação $\cos(y-x) - 2\operatorname{sen} y - \cos x = 0$.

96 — Mudar a variável independente na equação

$$(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0 \quad \text{sendo} \quad x = \sqrt{1-t^2}\,.$$

97 — Sendo $\quad 2x^2 x^y + \log \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+y^2} - 3 \operatorname{sen} \sqrt[3]{y^z} = 0$

calcular $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

I. S. T. (I.º Exame de freqüência 1938-1939)

98 — Calcular o integral $\displaystyle\int \frac{4x^2+1}{(x-1)^2(2x^2+1)}\,dx$.

99 — Estudar a convergência do integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx$ para valores convenientes de a.

100 — Dado o sistema $\begin{cases} x^z - 2(\cos y)^x + \sqrt[3]{\operatorname{arc\,sen} \dfrac{x^2}{y^x}} = 0 \\ x^z \log y + \operatorname{tang} \dfrac{x^2+y}{z^x+x^y} = e^x \end{cases}$

calcular $\dfrac{dz}{dx}$ e $\dfrac{dy}{dx}$.

101 — Determinar os máximos e mínimos da função $z = 5x + 3y$ sendo $4 \operatorname{sen} x - 3 \cos y = 0$.

GEODESIA

F. C. L. (Exame de freqüência de 1938-39)

102 — *a)* Defina o geoide e a intensidade da gravidade num ponto. *b)* Indique a significação que se deve dar ao «comprimento de um fio de invar» indicado no certificado do construtor. Quais são, as correcções a fazer para atender à inclinação da recta que une os extremos do fio?

103 — *a)* Quais são as condições a que deve satisfazer um teodolito em estação para servir na medição dos ângulos azimutais? Como se determina o ângulo de inclinação do eixo dos munhões dum teodolito? *b)* Defina latitude, longitude e azimutes geodésicos. Como explica a necessidade de calcular os azimutes geodésicos dos lados dos triângulos de uma cadeia.

104 — O mesmo ângulo foi determinado por 20 medidas feitas com um instrumento e 25 feitas com outro, obtendo-se para valores compensados num e noutro caso $45^{gr},2375$ e $45^{gr},2364$. Computando-se em $20''$ e $30''$ respectivamente os erros médios quadráticos duma medida isolada: *a)* fazer a compensação de tôdas as medidas; *b)* determinar o êrro médio quadrático do valor compensado final.

105 — Para determinar o ângulo azimutal de duas direcções CA e CB adoptou-se a estação excêntrica E. As leituras azimutais feitas para A, C e B foram respectivamente $178^\circ\,43'\,22''$, $148^\circ\,20'\,10''$ e $115^\circ\,3'\,26''$. Calcular o valor do ângulo ACB, fazendo a redução das direcções ao centro da estação, supondo: 1.º que a graduação do limbo cresce no sentido do movimento dos ponteiros dum relógio; 2.º que as distâncias horizontais CA e CB são respectivamente $20206^m,1$ e $14203^m,4$; 3.º que a distância $CE = 3^m,08$.

ANÁLISE SUPERIOR

Faculdade de Ciências de Lisboa (I.º ex. freq. 1938-39)

106 — *a)* Funções analíticas num domínio: Definição; teorema das funções compostas e teorema das funções implícitas. *b)* Integrais de superfície: Definição; fórmula de Ostrogradsky-Green e fórmula de Stokes. *c)* Séries trigonométricas: Definição; Fórmulas de Fourier para o intervalo $(-\pi, +\pi)$; condições a que deve satisfazer uma função para ser susceptível de tal desenvolvimento. *d)* Funções holomorfas: Definição; generalisação da série de Taylor para o caso das funções de variável imaginária; desenvolvimento duma função holomorfa em tôrno de um dos seus zeros; teoremas relativos aos zeros. *e)* Resíduo de uma função: Definição; teorema dos resíduos de Cauchy relativo às funções meromorfas e sua aplicação ao caso das funções uniformes, numa região limitada por um contorno simples.

107 — Calcular a área da região da superfície $z^2 - 2xy = 0$ compreendida pelos planos de equações $z=0$, $x=1$, $y=0$ e $y-x=0$.

108 — Verificar que a função $\cot z$ é periódica de período π, determinar os seus polos e reduzi-la à forma $u(x,y) + i\,v(x,y)$.

109 — Calcular $\displaystyle\int_\gamma y^2\,dx - 2x^2 y\,dy$ ao longo do arco da elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ compreendido entre os pontos $A\left(1/2, \dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$ e $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1/2\right)$ no sentido de A para B.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1 — Um sólido é limitado por duas bases nos planos horizontais $z = \dfrac{h}{2}$ e $z = -\dfrac{h}{2}$ e por uma superfície tal que a área de cada secção dum plano horizontal é dada por uma expressão da forma: $a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ (onde, como casos especiais, alguns dos coeficientes podem ser nulos). Mostrar que o volume do sólido é dado pela fórmula $V = \dfrac{1}{6} h\,[B_1 + B_2 + 4M]$, onde B_1 e B_2 são as áreas das bases e M é a área da secção média horizontal. Mostrar que as fórmulas para o volume dum cone e duma esfera podem ser incluídas nesta fórmula, no caso em que $a_0 = 0$.

2 — Calcular

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n}$. $\qquad$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x (1+\operatorname{sen} 2t)^{\frac{1}{t}}\,dt$.

3 — Fazer o traçado da curva de equação

$$y = -m\left[\sqrt[3]{a \pm \sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt[3]{a}\right]^{-4},\ m>0,\ a>0.$$

4 — Determinar $2n+1$ números inteiros consecutivos tais que a soma dos quadrados dos primeiros $n+1$ seja igual à soma dos quadrados dos n restantes.

As soluções devem ser recebidas na redacção da Gazeta de Matemática *no mês de Fevereiro de 1940.*