GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXVI **N.° 100** JULHO-DEZ. 1965

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

A GAZETA DE MATEMÁTICA

agradece às editoras abaixo citadas a valiosa colaboração com o envio de obras de matemática para referência bibliográfica.

Alemanha

Akademie Verlag, BERLIN
Hermann Schroedel Verlag, HANNOVER
Sammlung Göschen, BERLIN
Teubner Verlagsgesellschaft, LEIPZIG
Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, BERLIN
Walter de Gruyter, BERLIN

Argentina

Editorial Kapelusz, BUENOS AIRES
Instituto de Matemática de Rosário
Instituto de Matematica—Universidad Nacional del Sur, BAHIA BLANCA
Publicaciones de Matematicas y Fisicas, SAN LUIS

Bélgica

Établissements Ceuterick, LOUVAIN
Georges Thone, LIÈGE

Brasil

Araquara, S. PAULO
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, RIO DE JANEIRO
Editorial Latino Americana, RIO DE JANEIRO
Livraria Boffoni, RIO DE JANEIRO
Livraria Castelo, RIO DE JANEIRO
Sociedade Matemática de S. Paulo,

(Continua na pág. 3 da capa)

ANO XXVI — N.º 100 GAZETA DE MATEMÁTICA JULHO/DEZ. — 1965

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

EDITORIAL

Mais de um quarto de século decorreu desde a fundação da «Gazeta de Matemática» até o momento da publicação do seu centésimo número.

Espectaculares têm sido a evolução da Ciência e a sua incidência sobre a Natureza e sobre a Vida; determinante é o papel da Matemática no contexto social do progresso e do caminhar para o bem-estar e a paz duradoiros dos Povos e das Nações.

Por outro lado, é flagrante a «retracção exponencial da métrica do tempo» que se manifesta pela aproximação dos instantes em que ocorrem as descobertas científicas e as correspondentes aplicações práticas.

Por isso «crescem em exponencial» a responsabilidade dos utilizadores da Matemática perante os seus semelhantes, e a necessidade de actualização da sua formação: se a «Moderna Matemática» de 1940 se situa no domínio do clássico, terão porventura mais de 15 anos as técnicas que actualmente constituem a Informática...?

A «Gazeta de Matemática», recordando os antigos Colaboradores — os desaparecidos e os impossibilitados de participação directa na formação profissional da nossa Juventude — propõe-se redobrar de esforços no sentido de melhor responder às exigências da Época Cósmica.

Esta a razão do presente número especial *subordinado fundamentalmente aos temas seguintes:*

1 — Orientação e desenvolvimento actuais dos diversos ramos da matemática tendo em consideração:

a) *novos problemas postos pela actividade do Homem na segunda metade do século* XX

b) *soluções novas que resultam das descobertas científicas e das realizações tecnológicas na segunda metade do século* XX

c) *técnicas novas de cálculo e de tratamento de problemas surgidos na segunda metade do século* XX;

2 — *Problemas e aspectos das incidências recíprocas entre a investigação científica, nomeadamente no campo da matemática, e as realizações económicas, nos domínios da indústria e da agricultura. Em particular as necessidades da actividade científica nos campos da investigação fundamental orientada, da investigação aplicada e das operações de aperfeiçoamento técnico.*

3 — *Orientação e desenvolvimento a imprimir, no futuro próximo, à investigação científica no campo da matemática, tendo em consideração a evolução previsível dos aspectos citados em 1.* a), *1.* b) *e 1.* c).

Agradecemos reconhecidamente aos Colaboradores portugueses e estrangeiros deste número a pronta resposta da sua experiência.

Estamos certos de que o País virá a tirar o máximo proveito desta colaboração internacional que constitue um forte incitamento de valorização científica da nossa Juventude.

Dez. 1965

J. G. T.

GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 100 — Julho-Dezembro 1965

A Actividade Científica em Portugal (*)

José Gaspar Teixeira
Lisboa

Meu Caro Kepler:

... Que dizer dos nossos sábios que se recusam sistemàticamente e com obstinação de víboras a olhar o mundo através da luneta? Será caso de riso ou de choro? ...

Vosso Amigo
GALILEU GALILEI

Não é caso de riso nem de choro: antes pelo contrário, de uma atitude de séria gravidade.

E de guarda da devida distância: em relação às pessoas do subscritor, do destinatário e, seja-nos ainda permitido dizer, às dos citados sábios ...

Não é de utilizar lunetas astronómicas de invenção própria; singelamente bastam lentes divergentes do tipo das que abundam nas feiras de nossas aldeias ...

E se a pretensão de GALILEU foi a de colocar o Planeta no justo lugar da hierarquia dos Astros, esforçar-nos-emos pela integração do País na Comunidade das Nações conscientes da Época actual.

I. Notas Preliminares

1. O Ensino

A Época actual caracteriza-se por ter concedido ao Homem a possibilidade de evidenciar o valor inerente à característica de ser Pensante.

Como ser pensante, o Homem desenvolve uma actividade racional pela utilização conveniente das leis naturais no sentido de melhorar e aumentar as possibilidades de satisfação das suas necessidades.

Essa actividade racional tem o nome de *Trabalho*.

A faculdade humana de trabalho reveste-se de dois aspectos essenciais:

utilização da sua potencialidade energética muscular;
controle e direcção das formas de utilização de energia.

(*) O presente trabalho é menos que um ensaio preliminar.

Apresenta os pontos de vista — necessàriamente unilaterais — de quem se preocupa em princípio com problemas de actividade científica e sente a consequente necessidade do seu planeamento, fomento e desenvolvimento à escala nacional portuguesa.

Os capítulos e assuntos abordados assentam em

Como elemento potente, isto é, produtor directo do trabalho, o Homem é, entre os animais superiores, um dos menos favorecidos; pelo contrário, como elemento dirigente é incontestàvelmente o de vanguarda.

O grau de desenvolvimento de cada complexo social humano pode definir-se pela composição percentual média, em relação aos elementos de complexo, dos dois termos do binómio:

Potente — Dirigente.

Uma vez que a Humanidade atingiu a posição de poder dispor de recursos inesgotáveis de energia, o progresso social só se torna viável através de factores que, em princípio, contribuam para a transformação do binómio em monómio, com a utilização total das faculdades correspondentes ao termo dirigente e a dispensa das que correspondem ao termo potente.

Esses factores concretizam-se fundamentalmente num elemento vital a qualquer programa de desenvolvimento económico e social no mundo moderno: A *Educação*.

*

* *

A *Educação* é um factor de produção de *Cultura*.

A *Cultura* é o conjunto de valores materiais e espirituais, criados pela Humanidade no decurso da sua história, que decorrem e se desenvolvem com base no modo de produção dos bens materiais, histórica e socialmente bem determinado.

Cultura representa, portanto, o nível de desenvolvimento atingido pela Sociedade, implícito no progresso técnico e na experiência de produção e de trabalho; isto é, no grau de utilização pela Sociedade dos aperfeiçoamentos técnicos, das descobertas científicas no âmbito da produção social, no grau de difusão da instrução, da ciência, da literatura, da filosofia, da arte, da moral, etc.

É portanto, pela *Educação* que o Homem se liberta do aspecto de produtor directo do trabalho e adquire e desenvolve a faculdade de controlo e direcção das formas de utilização e conversão de energia.

*

* *

O complexo constituído pelos aspectos, formas e factores ligados à *Educação* reveste-se de características especiais:

1 — A *Educação* está sujeita a um grande *coeficiente de inércia* determinado por considerações não objectivas e de preconceitos retrógrados e irracionais.

---

elementos de natureza e origens diversas, relativos a datas diferentes e que se desenvolvem até níveis muito heterogéneos. Os problemas de contexto agrícola e industrial, e os relacionados aos aspectos de alimentação e aos da estrutura social portuguesa são referidos por quem, desconhecendo as técnicas actuais de análise das economias agrícola e industrial, as bases fundamentais da dietética das populações e das teorias sociológicas de trabalho, os aprecia e sobre eles raciocina com o elementar bom-senso cartesiano.

Assim se regista qualitativamente o interesse que determinados factores da vida social portuguesa apresentam no enunciado geral do problema do Ensino em Portugal.

Exprime-se pois o desejo de que grupo conveniente de especialistas, com o necessário apoio financeiro, estabeleça o conjunto de valores quantitativos da actividade científica portuguesa necessária à solução das situações de carência existentes.

É por isso que o conjunto de elementos que vão ser apresentados é menos que um ensaio preliminar. A sua utilidade reside em ser o esqueleto de um «monstro» — trabalho em via de realização por pequeno grupo de pessoas animadas de boa vontade.

Mas o «monstro» tem vida porque corresponde a uma realidade; para que a correspondência seja porém perfeita apenas se necessita de actualização e coerência dos elementos de base.

Os dados estatísticos foram recolhidos em 1963 (Agosto a Dezembro) e 1964 (Agosto).

E a resultante das forças sociais postas em jogo que determina o valor e o *sinal* desse coeficiente de inércia.

2 — O rendimento e custo da *Educação*, como factor de produção, variam muito sensivelmente com o nível geral do desenvolvimento económico e social do país.

Por tal forma que nos países sub-desenvolvidos a *Educação* toma aspectos particularmente sérios, dado que o seu rendimento é relativamente exíguo, enquanto que o encargo global é mais volumoso.

3 — A *Educação* é um factor de produção altamente remunerador.

Com efeito, o investimento sobre o material humano — que controla o material máquina — é, evidentemente, mais rendoso que o efectuado sobre este [1].

É através desta óptica que Sociedades e grupos humanos bem constituídos consideram a *Educação* artigo de consumo absolutamente vital.

Admite-se assim que o problema fundamental duma Nação seja, em qualquer estrutura social na Época actual, o Problema do Ensino que utiliza o Homem como ser possuidor dum cérebro afim de o habilitar às especiais funções de controlo e comando do mundo físico e biológico em que vivemos.

[1] Vários autores consideram que a elevação da produção não agrícola nos E. U. A., nos últimos 60 anos, é devida 10 % à acumulação de capitais, aumento de população e descoberta de novos recursos materiais, e 90 % à subida de nível de competências, invenções, melhoria da organização, etc. Além disso, aos investimentos públicos e privados na educação são recuperados em média em nove anos, ao passo que o são de doze a trinta para outras formas de investimentos produtivos». Cf. «Chroniques de l'Unesco» VII — 4, pg. 120.

2. **A Actividade Científica**

Por Actividade Científica entendemos uma multiplicidade de aspectos diversos, cada um dos quais de importância vital para o corpo unitário em que se integram, e que são em súmula:

a) formação profissional e humanística dos cientistas e técnicos, desde os graus de ensino mais elementares até à sua integração definitiva profissional — isto é, a *utilização racional do Homem*;

b) promoção post-profissional dos indivíduos integrados activamente na Sociedade — isto é, o *aumento do rendimento da utilização racional do Homem*;

c) quantificação dos valores e capitais investidos no empreendimento que utiliza a matéria prima humana e a transforma nos produtos mais valiosos da Sociedade: os seus técnicos e cientistas — isto é, a *Economia da Actividade Científica*;

d) estudo do «equilíbrio ecológico» das actividades nacionais que directamente estão ligadas à Ciência: Investigação, Aplicação, Difusão, etc. — isto é, a *plena e mais eficiente utilização nacional da Ciência*, encarada esta como elemento de progresso da vida social;

e) estabelecimento e manutenção dos aparelhos técnicos de divulgação de resultados, nas organizações que permitem a cooperação e o planeamento da actividade científica, etc. — isto é, o *pleno aproveitamento da universalidade da Ciência e da sua utilização universal para fins pacíficos*.

*

* *

Antes de prosseguir, e relativamente ao problema de Ensino em Portugal será de interesse o registo de duas observações de base,

1) Consideramos errada, porque é insuficiente e possibilita a criação de situações menos justas, a orientação de qualquer organização de ensino que vise *apenas* a formação de «indivíduos profissionalmente aptos», isto é, indivíduos capazes de desempenhar uma determinada profissão. Tal ensino poderá correr o grave risco de um sensível desvio, incompatível com o interesse nacional, na medida que a referida profissão deixe de pertencer ao núcleo de actividades que em determinada época alimentam a economia do País (1).

Os escassos estudos que se tem efectuado no nosso país sobre «o ensino da Filosofia», sobre «as reformas das Faculdades» ou ainda sobre outros temas semelhantes revestem-se, na sua generalidade, de condições iniciais bastantes e sobrantes para a obtenção de resultados sobejamente deficientes. E isto pela singela razão de que o problema definido em epígrafe desses estudos é sempre considerado «limitado em si» e nunca como necessàriamente integrado num todo nacional, mesmo universal; de forma que os relatores de tais trabalhos não podem esquivar-se às deformações da realidade consequentes da visão parcelar, geogràficamente limitada, de um edifício cuja estabilidade apenas em globo pode ser assegurada.

2) Pelo contrário, uma política nacional do ensino deve subordinar-se aos resultados das seguintes actividades (2):

a) Análise dos recursos nacionais existentes:

recursos humanos

recursos não humanos (do solo e sub-solo, águas, espaço aéreo);

b) análise das necessidades nacionais relativas às diversas actividades produtivas da sociedade portuguesa;

c) análise e estudo das técnicas e dos recursos de natureza técnico-científico actualmente ao dispor do Homem;

d) estudo e elaboração das formas próprias e mais económicas da utilização conjunta e coerente dos resultados dos estudos referidos em *a*, *b*, *c*);

e) garantias de financiamento adequado e do cumprimento das realizações tendentes à política do melhor aproveitamento das riquezas nacionais.

Neste trabalho apenas podemos abordar alguns aspectos dos assuntos focados em *a*), *b*), *e*).

---

(1) É por exemplo o caso do ensino nas nossas Faculdades de Ciências. A produção anual de licenciados pelas três faculdades é cerca de 20 % da que deveria corresponder às necessidades nacionais. Em condições normais dos países europeus, da produção total, 30 % dos licenciados destinam-se ao ensino, 30 % à investigação e os restantes 40 % à Indústria. Em Portugal a quase totalidade da produção destina-se ao ensino. Conclui-se que as necessidades deste são muito insuficientemente satisfeitas e, o que é bastante mais grave, deixa de existir o único padrão de aferição do valor e grau de actualização do Ensino — não há resposta às solicitações das restantes actividades económicas da nação —: o ensino faz-se apenas para o ensino..., encerra-se em si mesmo. Por seu lado a juventude desconhece o grau de absorpção característica de uma indústria progressiva, daí resultando o consequente abandono da frequência das Faculdades de Ciências.

(2) É de insistir no esclarecimento de que os resultados que vão ser apresentados não devem ser tomados no seu *exacto valor* e como produto de análise *totalmente objectiva*. Não poderão significar mais que *ordens de grandeza* obtidos numa primeira fase de estudo, realizado com os recursos humanos, estatísticos, financeiros e de competência, necessários a trabalhos de maior volume e profundidade. Por outro lado, soluções apontadas há cuja concretização, utópica no momento presente, será naturalmente viável a breve prazo.

Enfim, posição de seriedade e convicção de acerto em geral que revestem a tese apresentada, rejeitam consequentemente, por desinteressante, toda a eventual atitude de especulação polémica, para saudar com veemência objecções e correcções a erros ou deficiências cometidas no presente trabalho e críticas pertinentes que contribuam para a solução do problema do Ensino em Portugal.

II. O Homem, a Técnica e o Progresso

1. Perspectivas actuais

O século XX teve, na sua primeira metade, a virtude de consagrar a plena valorização do Homem como elemento vivo, distinto de todos os restantes organismos superiores. Ele atinge o seu valor potêncial intrinseco máximo na medida em que, não só domina as leis da natureza, mas se liberta da necessidade de utilização da faculdade de trabalho muscular — faculdade comum a todos os seres da escala animal superior — em benefício de preocupações de natureza intelectual ou cultural, de direcção ou de controle do sistema gregário ou ainda da produção de bens materiais.

Admitindo(1) a cultura como um «fenómeno social que representa o nível atingido pela sociedade em determinada etapa histórica — progresso técnico, experiência de produção e de trabalho, instrução, educação, ciência, literatura, arte e instituições correspondentes — », nunca como na segunda metade do século XX a Humanidade alcançou tão elevado nível de cultura.

Nunca como hoje se obtiveram mais altos valores dos mais válidos índices de nível cultural, como sejam a soma de conhecimentos técnicos e científicos, a utilização dos aperfeiçoamentos técnicos e das descobertas científicas na produção social, e o grau de difusão da instrução, da literatura, da arte entre as populações humanas.

Toda esta nova situação decorre de uma longa evolução histórica de muitos séculos, eivada de lutas sociais a que não foram estranhos os cientistas e os técnicos — quer pela sua acção indirecta através da detecção e da enunciação das novas leis da natureza e da sua consequente aplicação, quer, por vezes, pela participação directa nas mesmas lutas sociais contra a opressão e o obscurantismo — como prova, entre tantos, o nobre exemplo de GALILEU.

(1) Cf. M. ROSENTAHL e P. IOUDINE — Petit Dictionnaire Philosophique.

É esta a razão por que os cientistas e técnicos da nossa época requerem às gerências das sociedades humanas o cumprimento de uma atitude de coerência e de dignidade: a criação de todas as condições sociais que possibilitem e determinem a plena utilização da cultura actual, indiscriminadamente, por todos os elementos constituintes das sociedades humanas dos nossos tempos.

As sociedades humanas têm o direito de exigir aos que as dirigem as condições necessárias para a utilização gratuita dos factores primários que atribuem ao homem uma posição de dignidade própria e social, bem estar e felicidade:

- a *alimentação* — factor primário de necessidade individual e bio-fisiológica;
- a *saúde* — factor primário de necessidade individual e social, bio-fisio-psicológica;
- o *ensino* e a *instrução* — factor primário de necessidade colectiva, de formação.

Os recursos materiais técnicos e científicos existentes são qualitativa e quantitativamente suficientes para que a exigência anterior não seja puro resultado de posição leviana ou demagógica.

A Alimentação

Assim, no que respeita à *alimentação* e mais particularmente aos produtos agrícolas podemos dizer que «até o presente a agricultura tem sido considerada como uma actividade de lucros»; e se se cultiva uma tão pequena percentagem de solos aráveis — apenas aquelas zonas que garantem um elevado rendimento agrícola — isso resulta de uma não utilização racional do solo, como consequência natural de uma actividade individual, isolada, cujos produtos têm sempre preços notòriamente baixos comparados com os dos produtos das actividades industriais.

Uma utilização racional do solo, *mesmo com as actuais técnicas*, permitirá alimentar uma população dez vezes superior à actual população mundial. A melhoria das técnicas agrícolas permitirá alimentar uma população mundial cem vezes superior, e a descoberta, que se antevê, da síntese biológica, libertará definitivamente o homem do mundo vegetal que ainda depende por seu turno da maturação conveniente das plantas [1].

Uma situação semelhante verificar-se-à muito brevemente no campo da energia. Esboça-se uma evolução no sentido de se tornar igualmente gratuita a utilização de outros factores que pouco a pouco se tornarão primários: energia; comunicações e transportes. Actualmente ainda se fala e discute sobre a rentabilidade da produção de energia. Será sol de pouca dura! Em face das necessidades crescentes de consumo, ràpidamente a rentabilidade baixará e breve a produção de 1 kWh de energia será um «negócio» económicamente tão interessante como o é actualmente a de uma arroba de batatas.
Entretanto a evolução dos factores de natureza social processa-se em ritmo bastante mais acelerado do que o foi para a agricultura, de modo que a gratuitidade da energia será um facto antes que o seja o aparecimento de factores que, considerados isoladamente, poderiam conduzir ao abandono da sua produção.

A Saúde

As recentes e espectaculares descobertas no campo das *ciências médicas*, por um lado e, por outro, os resultados obtidos nos países onde, desde há longos anos, a medicina tem vindo a ser socializada, mas principalmente a incidência destes factores naquilo que se traduz objectivamente pelas tendências actuais

[1] Cf. Rencontre Internationale de Royaumont (17-20 Mai 1961) — Quel Avenir Attend l'Homme? pag. 67.

que se verificam na investigação científica no domínio das ciências da saúde pública e das respectivas ciências de base, mostram quão promissor se nos apresenta o próximo futuro no apoio que os poderes públicos concedem ou podem conceder aos respectivos cidadãos.

«Uma consequência importante e fundamental que influencia grandemente a investigação é a mudança de atitude em relação à doença, dando preferência à conservação da saúde no homem saudável» [1].

Uma superficial reflexão sobre este novo rumo da concepção, do conceito e do objectivo da medicina, revela uma característica que se traduz na necessidade intrínseca da gratuitidade da mesma, com a finalidade evidente de conservar o homem nas mais aptas condições de plena utilização da sua potência específica.

O Ensino e a Instrução

Uma boa definição do progresso consiste em dizer que «progresso é o acréscimo do poder do homem sobre a natureza». Na base do progresso existe evidentemente o «trabalho que no aspecto filosófico mais geral não é senão um verdadeiro acto entre o homem e a natureza». Este aspecto é fundamental porque implica o facto de não haver trabalho possível fóra da sociedade: «*o progresso é necessàriamente social e isto como essência do próprio trabalho*». Mas como o homem faz parte integrante da natureza, todo o progresso da natureza implica uma modificação do próprio homem sobre si próprio. Não poderá haver então progresso de alguma espécie, sem que o homem actue cada vez mais sobre o próprio homem e os homens em geral sobre a sociedade humana.

[1] Cf. P. Auger — Current Trends in Scientific Research, UNESCO, pag. 101.

Um instrumento de medição objectiva do progresso técnico, directa e dialècticamente ligado ao progresso social, é a taxa de aumento da produtividade do trabalho humano.

Uma condição de aceleração do progresso técnico está na melhoria da formação profissional dos quadros de trabalhadores qualificados, assim como na elevação da qualificação profissional e do nível da instrução geral dos trabalhadores (1). A melhoria da instrução geral também contribui de forma determinante para a elevação da qualificação profissional. S. C. STRUMILINE calculou que em igualdade de antiguidade e de idade a produtividade do trabalho é 67 % mais elevada num operário que fez 7 anos de estudos complementares em relação a outro que apenas possui instrução geral. A. AGANBEGUIAN e MAYER estabeleceram que do prolongamento da escolaridade obrigatória por um ano resulta o aumento geral de 17 % do nível de qualificação (isto é, tomando por índice 100 a diferença entre duas categorias profissionais consecutivas) (2).

Por outro lado, o Académico STRUMILINE indica que, segundo estimativas feitas em 1924, o custo da reforma do ensino primário que teve por objectivo elevar o número de alunos de 4 a 7 milhões em dez anos, foi de 1.622 milhões de rublos. Ora o aumento do rendimento bruto nacional devido à elevação do nível da qualificação de pessoas instruídas durante estes dez anos ultrapassava já 2 milhões de rublos depois de 5 anos de actividade dessas mesmas pessoas. Ainda segundo a avaliação do Prof. STRUMILINE, sobre 146,6 milhões de rublos que representava o produto nacional da URSS em 1960, 23 % são o resultado da elevação do nível de qualificação dos trabalhadores (3).

São a economia nacional e o bem-estar social do nosso Povo que estão essencialmente interessados na gratuitidade e na universalidade do ensino em Portugal.

III. O Problema Português

1. Premissas para a definição dos princípios orientadores de uma reforma do ensino: algumas noções de carácter genérico

A Conferência das Nações Unidas para a aplicação da ciência e da técnica no desenvolvimento das regiões pouco desenvolvidas (4) enunciou problemas gerais e aspectos técnicos da actividade científica que constituem a base do progresso económico e social, e reconheceu que o processo de desenvolvimento apenas se pode manter com a mobilização total dos recursos nacionais e com a coordenação de todas as actividades científicas no domínio das ciências exactas e naturais, da tecnologia e das ciências sociais e humanas. Reconheceu ainda que o desenvolvimento autónomo dum país repousa sobre o funcionamento harmonioso dos orgãos de elaboração, de decisão e de execução da política governamental nos domínios científico e técnico, económico e social.

É compreensível portanto que os países em vias de desenvolvimento prestem a maior atenção, numa primeira fase de trabalhos, ao estudo científico dos recursos naturais dos respectivos meios físico, biológico e social e do potencial que eles encerram; e que os governos dos países com determinado nível

(1) A. ZVORIKINE — Les Conséquences Sociales de la Mécanisation et de l'Automatisation en URSS, UNESCO, 1963.

(2) Ib. pág. 99.

(3) Cf. Colec. «Rapports et études statistiques de l'UNESCO, doc. ST/S/9, pág 32.

(4) Genebra, Fevereiro de 1963.

de desenvolvimento se preocupem, numa segunda fase, com a organização da política científica nacional que maior rendimento possa assegurar à actividade científica.

Assim, o grau de atenção dedicada pelos dirigentes nacionais a cada uma destas duas preocupações pode constituir padrão de aferição do nível de desenvolvimento do mesmo país.

Justifica-se assim que se comece por apreciar certos elementos correspondentes a determinado nível de conhecimentos da realidade portuguesa e por enunciar outros, determinantes das condições de subida desse mesmo nível.

Parece todavia que para análise conveniente dos *recursos nacionais* é evidentemente necessária a mobilização de esforços e técnicas na resolução de alguns problemas que constituem, por si, *necessidades nacionais*, entre os quais figura a própria análise dos recursos nacionais. Por outros termos,

a análise das necessidades nacionais e
a análise dos recursos nacionais

são questões interdependentes que apenas simultâneamente se podem resolver.

Resulta daqui a evidência da necessidade de apreciação conjunta de certos aspectos dos dois problemas.

1.1. Sistema de Forças Potenciais de Desenvolvimento

É a sociólogos que compete a definição, em termos e rigor científicos, das causas profundas das *forças em potencial* que determinam a evolução da Sociedade Humana, tão prodigiosamente rápida como a que se tem verificado no decorrer do presente século XX.

O ritmo das descobertas científicas e técnicas tem tido uma aceleração tal que as incidências na vida da Humanidade promoveram o que é banalmente conhecido: «o mundo mudou mais nos últimos 50 anos que no decurso de toda a anterior história da Humanidade» (1).

Do nosso ponto de vista e como resultado de uma análise bastante superficial, constatamos que essas *forças em potencial* são a resultante de duas componentes de natureza bio-social, concordantes nos respectivos sentidos, e que interferem dialécticamente:

o crescimento da população do globo num ritmo sem precedentes;
a extensão sem precedentes do que poderemos chamar a *colectivização do espírito científico*.

Antes de nos referirmos à necessidade do estudo das forças potenciais de desenvolvimento português convém, para melhor esclarecimento do conteúdo dos respectivos conceitos, fazer uma breve análise destas duas componentes, considerando-as porém à escala mundial, seguida de uma síntese das incidências directas das mesmas componentes nos grupos populacionais que constituem a população activa de um país.

O crescimento excepcionalmente rápido da população mundial: análise elementar

O quadro seguinte (2) reune elementos que no seu conjunto traduzem o acréscimo da população do globo durante o decénio 1950-60: 2.500 milhões de indivíduos para 2.900 milhões (aumento de 1/6 em 10 anos), ou seja ritmo de crescimento anual de 1,5 %.

Prevê-se que no período de 1960-1975 o o ritmo de crescimento seja maior: 1,9 % anual.

Factores de natureza económica, mas muito diferentes de região para região, determinam as evoluções das populações parciais indicadas nas restantes colunas do seguinte:

(1) *Cf.* Guide des Etudes et des Carrières. PUF. pag. 7.

(2) Elaborado a partir de dados obtidos de: Piganiol et Villecourt — Pour une Politique Scientifique, Flammarion.

QUADRO I

Crescimento por regiões das populações do globo

Região	Ano	Pop. Total	15-64 anos [1]	Pop. Activa [1]	Pop. Activa 15-64 anos
Europa	1950	100 (385) [2]	66,7	45,5	68,1
	1960	109	65,0	44,3	68,1
	1975	125	62,9	42,9	68,2
URSS	1950	100 (185)	62,7	44,9	71,6
	1960	116	63,3	45,1	71,3
	1975	149	61,1	43,6	71,4
América Norte	1950	100 (166)	64,5	42,2	65,4
	1960	119	59,5	40,6	67,8
	1975	151	61,2	41,6	68,0
América Latina	1950	100 (160)	57,2	36,9	64,1
	1960	128	55,6	35,6	64,0
	1975	194	53,9	34,6	64,1
África	1950	100 (200)	57,0	44,5	78,1
	1960	117	55,7	43,5	77,9
	1975	153	54,4	42,6	78,3
Ásia	1950	100 (1370)	57,2	38,5	67,3
	1960	112	57,0	38,3	67,3
	1975	162	55,9	37,6	67,3
Oceania	1950	100 (13)	61,5	38,5	62,5
	1960	120	62,5	37,5	60,0
	1975	162	61,9	38,1	61,5

(1) As percentagens são tomadas em relação à população total do respectivo ano.
(2) Milhões de pessoas.

Provas e aspectos da colectivização do espírito científico: análise elementar

Com a expressão: «colectivização do espírito científico» queremos referirmo-nos ao complexo de processos e fenómenos sociais que ocorrem actualmente nas sociedades humanas, e que se manifestam por dois aspectos fundamentais distintos, aqui também interrelacionados dialècticamente:

intelectualização contínua do trabalho;
alteração das estruturas social e profissional das populações activas.

A evolução destes dois aspectos é tão rápida que se prevê que o «mundo do ano 2000 revelar-se-á muito mais diferente do nosso, do que o nosso o é do mundo de entre as duas guerras» ([1]).

Ainda não se faz uma ideia completa dos efeitos da automação e da disponibilidade da energia gratuita sobre a estrutura e a organização das futuras empresas. «O que se conhece de sobra é que a densidade do tempo aumenta todos os dias; tudo acontece mais depressa; uma descoberta sucede a outra descoberta; um produto destrona outro produto».

«É necessário à empresa muita elasticidade para não perder o combóio; os que a administram devem ser de uma precisão digna da rapidez do progresso técnico. Torna-se necessário rever a cada momento os próprios conhecimentos que perdem em todos os instantes a actualidade. É-lhes necessário igualmente saber que também a métrica do espaço se retrai, que as economias nacionais não podem mais estiolar-se no isolamento» ([2])...

É dentro das tonalidades deste panorama que a vida das sociedades humanas actuais, por necessidade de sobrevivência, se tem de adaptar mimetisticamente.

O quadro seguinte mostra-nos o prazo decorrido entre o instante em que se faz no laboratório uma descoberta científica e o do início da sua exploração industrial:

Fotografia	1727-1829	102	anos
Telefone	1820-1876	56	»
Rádio	1867-1902	35	»
Televisão	1922-1936	14	»
Radar	1926-1940	14	»
Bomba de urânio	1939-1945	6	»
Transistor	1948-1953	5	»

O prazo destas «mises au point» é muito variável, mas sabe-se que o período que decorre, em média, entre o momento em que um novo processo foi descoberto pela investigação aplicada e o momento em que o produto ou o aparelho, realizado por este processo, é posto à venda, se tem reduzido em proporções consideráveis desde o início deste século, passando em alguns casos de vários anos a alguns meses» ([1]).

*

* *

Outro aspecto do mesmo problema encontra-se num relatório do «Bureau International du Travail» que se preocupa com a influência do progresso técnico sobre o emprego e a preparação da Juventude nos países industrializados. Recentemente publicado, destaca determinados pontos que são tanto mais interessantes quanto é certo provirem de inquéritos realizados em vários países industrializados e terem tais características de generalidade que não deixam dúvidas sobre a sua profunda legitimidade. Mostra o relatório que

([1]) Cf. Guide des Etudes, pág. 7.
([2]) Cf. P. Dessosque — Avenirs n.º 89.

([1]) Cf. P. Auger — Current Trends in Scientific Research, UNESCO, pág. 18.

o aparecimento de novas actividades profissionais, principalmente no domínio da indústria, promove necessária e consequentemente uma cada vez maior especialização profissional a todos os níveis;

o operário não especializado e o operário de força deixa de ter interesse para a indústria;

nos estádios mais avançados da mecanização, a manobra directa de uma máquina tende a ser substituída por uma função de vigilância, e a habilidade manual a ser substituída pelo conhecimento da instalação e do equipamento, isto é, por *elementos intelectuais* que revelam percepção e concepção.

Ao mesmo tempo

entre os operários qualificados, cuja procura aumenta cada vez mais, figuram os *operários de manutenção* que devem possuir uma *formação polivalente*;

a mão de obra indirecta aumenta enquanto a mão de obra directamente empregada na produção diminui;

desenvolve-se muito ràpidamente uma nova categoria de trabalhadores — os «techniciens» (¹) que ocupam uma posição chave na indústria;

de um modo geral, os quadros técnicos e científicos e os quadros de direcção tornam-se cada vez mais numerosos, sendo esta evolução particularmente acentuada nas indústrias jovens e em expansão rápida.

(¹) Empregamos a palavra francesa para destacar que não existe em Portugal categoria profissional equivalente e para que não se estabeleça confusão com a ideia vaga e imprecisa de *técnicos*.

São estes aspectos de uma evolução conjunta que nos levam a dizer que, de uma maneira geral, o *trabalho adquire espírito científico*. Eles caracterizam, em suma, a evolução que necessàriamente se processa na actual formação profissional dos indivíduos.

Incidências dos factores anteriores nas populações activas: síntese elementar

A confirmar estes factos, comecemos por registar a evolução da população activa ou por nos referir às perspectivas do seu desenvolvimento, através da citação de alguns exemplos e de extratos de estudos realizados.

Na ausência de elementos estatísticos mais pormenorizados temos o caso da França, resumido no quadro seguinte:

QUADRO II

Perspectivas da evolução da população activa do sector secundário, acrescida da dos transportes

	1959	1965	1975
Teòricamente não manuais (¹)	19,7	20,7	29,9
Manuais (²)	80,3	79,3	70,1

(¹) Engenheiros e assimilados; outros quadros superiores técnicos e desenhadores; agentes de controlo, empregados.
(²) Operários qualificados e não qualificados.

Notemos ainda que nos Estados Unidos, de 1947 a 1956, o número de trabalhadores não afectos directamente à produção aumentou de 50 %, ao passo que os trabalhadores da produção aumentou de 30 %. Na URSS, entre 1939 e 1959, o número de trabalhadores não manuais passou de 11.800.000 para 20.945.000, correspondendo um aumento de 75 %, ao passo que no mesmo período o número dos trabalhadores manuais aumentou apenas 30 % [1].

Todas estas transformações têm profundas repercussões na estrutura das sociedades, na organização do trabalho, na evolução dos ofícios e das profissões.

A colectivisação do espírito científico não se limita à aquisição, pelo trabalho, do espírito científico: ela está associada a uma transferência geral de trabalhadores das tarefas manuais para actividades mais intelectuais. Ela deve ser analisada ainda através de transformações mais profundas e complexas da estrutura social e profissional da população activa, como as que se têm processado no decorrer dos últimos 50 anos.

Não poderemos, porém, analisar aqui as incidências da variação de certos factores sociais, como o aumento da produtividade do trabalho, o aumento do consumo de produto, a substituição de produtos por sucedâneos, etc., sobre as referidas transformações da estrutura social e da estrutura profissional. Partiremos para a simplesmente da constatação de tais transformações, quantificando-as tanto quanto possível.

Os quadros III e IV apresentam as evoluções da repartição da população activa segundo os três sectores profissionais no decurso dos séculos XIX e XX.

QUADRO III

População Activa dos Estados Unidos

	Primário	Secundário	Terciário
1820	72,8	12	15,2
1850	64,8	17,6	17,6
1900	37,4	29,0	33,6
1920	26,7	33,2	40,1
1950	14	35	53

(1) Para mais exemplos e referências, consultar: Guide des Études.

QUADRO IV

População Activa da França

	Primário	Secundário	Terciário
1800	85	5	10
1860	65	16	19
1901	42	30	28
1931	36	33	31
1954	27	36,5	36,5
1962	20,5	38,7	40,8

Conclusões.

Adaptando os resultados das considerações acabadas de fazer ao caso português verifica-se que o estudo das qualidades de aptidão dos valores humanos, como *recursos nacionais* fundamentais deverá iniciar-se por uma análise da Estrutura Social Portuguesa, sua constituição e sua evolução durante as últimas decadas, com o objectivo de, entre outros, determinar até que ponto houve, da parte dos indivíduos, da parte dos organismos colectivos e da parte do Estado, real actualização nas atitudes, que se tenha traduzido pela integração de todos na evolução geral — mundial — dos fenómenos sociais atrás descritos.

Propomos como esquema geral, em princípio, o apresentado pelo Grupo de Estudos das Ciências Sociais da Cooperativa de Actividade Científica DIALOGO, em Julho de 1962 [1].

(1) **Evolução da Estrutura Social Portuguesa 1890/1965**

1. *Morfologia social*

1. 1 — Bases geográficas da Sociedade Portuguesa
 a — Meio rural
  As condições do meio físico
  Estrutura social do meio rural
   propriedade rural
   formas de exploração

Particular interesse terão igualmente os resultados de estudos da História da Evolução das Ciências e das Técnicas em Portugal, nos termos e nas condições igualmente definidas por outro grupo da DIÁLOGO em Novembro de 1964.

Para conhecimento real das possibilidades potenciais do Povo Português, naturalmente idênticas às de qualquer outro povo, interessa, neste campo, saber não só o que se fez, mas principalmente *o que não se fez* e as respectivas razões. Em suma, quais as causas de natureza sociológica, política e económica que impediram a entrada no País das ideias e das teorias científicas contemporâneas, do grau da sua aceitação e assimilação, quando conhecidas, e da participação portuguesa para o seu desenvolvimento.

* * *

Se pretendermos porém uma previsão da evolução futura da população activa, interessando particularmente a preparação profissional dos seus elementos, a divisão nos três sectores clássicos — primário, secundário e terceário — é muito insuficiente. Por isso FOURASTIER [2] ensaia a classificação de todas as profissões em seis grandes categorias de acordo com o grau de qualificação que aquelas parecem necessitar e estabeleceu uma correspondência entre estes níveis de qualificação e a duração média da formação escolar ou universitária recebida:

1.ª categoria — muito alta qualificação (11 anos): estudos universitários além da licenciatura;

Sistemas de cultura
Paisagem rural e habitat
b — Meio urbano
Geografia industrial
Dados económicos e técnicos
Conteúdo profissional e funcional
Arquitectura de aglomeração urbana

1. 2 — Bases demográficas
Inventário demográfico (sexo, idade, família)
Densidade populacional (simples e diferenciada)
População rural e população urbana
Repartição profissional
Repartição segundo características externas relevantes
Tendências demográficas:
Taxas de nupcialidade
Taxas de natalidade
Taxas de mortalidade (simples e diferenciada)
Taxas de envelhecimento

2. *Estrutura económica*

2. 2 — Rendimento nacional:
Números globais e per capita
Repartição por classes sociais
Tendências (níveis de desenvolvimento)

2. 3 — Interferência do sector público
Políticas fiscais
Políticas financeiras
Condicionamento institucional

3. *Bem estar social*
Educação
Saúde pública
Alimentação
Condições de habitação
Emprego, salários, custos de vida
Segurança social
Serviços sociais
Defesa social
Meios de informação

4. *Supra-estruturas ideológicas e culturais*
Sociologia das instituições jurídicas e das ideologias políticas
Sociologia das obras artísticas e literárias
Sociologia da actividade científica e das realizações técnicas

5. *Sociologia da vida quotidiana*
Comportamentos tradicionais
Usos e costumes

[2] Representante em França da ideologia e organização social neo-capitalista dos Estados Unidos.

2.ª categoria — alta qualificação (9 anos): estudos universitários a nível de licenciatura;

3.ª categoria — técnicos e quadros administrativos médios (6 ou 7 anos): um ou dois anos de estudos depois do «bac»;

4.ª categoria — mestres e empregados muito qualificados (5 anos): diplomas técnicos ou de «bac»;

5.ª categoria — trabalhadores qualificados (3 ou 4 anos): formação profissional;

6.ª categoria — trabalhadores não qualificados.

Antes de prosseguirmos, devemos porém fazer algumas observações importantes:

o número de anos de estudos indicado refere-se a estudos a partir em média dos 14 anos — idade de frequência escolar obrigatória — isto é um nível de conhecimentos que podemos, sem êrro sensível, equiparar ao atingido no nosso 5.º ano das escolas comerciais e industriais portuguesas;

conservamos a designação francesa de «bac» para indicar o nível de conhecimentos atingido aquando da realização do exame de aptidão às universidades francesas, substancialmente diferente e superior ao correspondente ao da aptidão às universidades portuguesas; o mesmo se podendo dizer do termo licenciatura;

os termos referidos, diplomas de «bac» ou licenciatura, devem ser considerados como significando níveis de conhecimentos equivalentes nos graus de dificuldade, tempo e profundidade de preparação obtidos, mediante vários outros diplomas existentes;

finalmente, conservamos o referencial e a expressão francesa por serem os adoptados no estudo original.

Nestes termos FOURASTIER faz uma previsão do que será a distribuição (¹) de uma população activa de sociedade normal no ano de 1975, e obtém valores e qualificações que são resumidas no quadro seguinte:

34 % possuindo cultura de nível pelo menos equivalente à do «bac»:
- 14 % pelo menos com licenciatura:
  - 7,5 % com estudos literários, jurídicos, administrativos, etc.;
  - 6,5 % com estudos científicos, médicos, engenharia;
- 16 % com estudos gerais ou técnicos de 1 ou 2 anos além do «bac»;
- 4 % com estudos completos do «bac».

47 % — *trabalhadores qualificados* — dotados de formação profissional ou técnica de 3 ou 4 anos de duração.

19 % — *trabalhadores não qualificados* — isto é operários não especializados.

Para manter esta repartição da população activa é necessário que cada geração escolar forneça:

48 % de adolescentes com um certificado de aptidão profissional;

20 % de adolescentes com nível de conhecimentos da ordem de um «Brevet» de ensino geral;

32 % de adolescentes com nível de conhecimentos do «bac»; destes:
- 28 % deverão ainda seguir os estudos, por forma que:
  - 14 % atinjam a licenciatura e
  - 6 % a ultrapassem.

*
* *

A esta distribuição da actividade profissional da população activa, considerada agora

(¹) Estes aspectos quantitativos referem-se, naturalmente, a uma sociedade estruturada numa base industrial e capitalista.

em valores absolutos, deve sobrepor-se uma evolução no tempo, consequência da subida de nível científico e do progresso económico.

P. AUGER[1] como resultado de estudos realizados em vários países preconiza um

> aumento anual de 3% dos quadros técnicos e científicos para conservação do bem-estar social em nível estacionário;
>
> aumento anual adicional de 4% para um ajustamento adequado entre o nível científico e o progresso económico (admitindo que este último tem igualmente uma taxa de crescimento anual de 4% — o que é considerado um mínimo normal necessário);
>
> — mas se se atender não ao desenvolvimento do nível económico mas ao desenvolvimento científico e técnico, o acréscimo anual necessário de engenheiros e trabalhadores científicos será não de 7% mas de 10% em relação aos quadros então existentes.

Estas taxas de crescimento foram determinadas para as condições do ano de 1956, e revelaram-se um pouco superiores aos valores de então, 6 a 8%, para os países uropeus, socialistas e U. S. A.

*

* *

A divulgação e a análise dos aspectos e factores acabados de considerar contribuirão para o esclarecimento de pontos básicos do problema geral da Organização do Ensino em Portugal e, consequentemente, para a definição de uma estrutura de articulação do mesmo Ensino dentro de uma actividade nacional que é vitalmente necessária ao País: a *Actividade Científica Nacional*.

(1) Cf. Current Trends in Scientific Research.

2. A situação portuguesa e alguns dos seus reflexos na definição de um plano de reforma

Antes de uma análise dos recursos nacionais portugueses, nos termos acabados de indicar, teremos forçosamente de nos limitar à apreciação daqueles factores que, ou são susceptíveis de mais fácil observação, ou acerca dos quais existe um conjunto de dados mais acessível ao nosso conhecimento.

Vamos pois tentar tirar algumas conclusões:

2. 1. A Sociedade Portuguesa: aspectos muito superficiais

A Sociedade Portuguesa sofre na nossa época uma evolução essencialmente heterogénea que se manifesta francamente sob formas e aspectos diversos; no prosseguimento deste esboço de análise o problema deveria ser considerado com maior desenvolvimento. No entanto, podemos desde já apontar alguns resultados de outros trabalhos já realizados, que confirmam a nossa tese. Entre outros, deveriam constituir objecto de estudo, directamente dirigido ao fim que temos em vista, os temas seguintes:

> factores de agregação e migração populacional, de fixação profissional e de distribuição da população activa;
> qualificação e especialização profissionais inferior, média e superior.

2. 1. 1. Factores de agregação e dispersão populacional,[1] de fixação profissional e de distribuição da população activa

A evolução económica duma sociedade não é mais que o resultado da acção do homem, através da técnica, sobre o espaço físico e o condicionalismo conjuntural em que se enqua-

(1) Cf. SANTOS LOUREIRO — As assimetrias espaciais de crescimento no Continente Português — Estudos INII — 1.º vol.

dra. Ora «a situação económica de Portugal continental, considerado, como se diz, uma estrutura económica em vias de desenvolvimento, torna o País especialmente sujeito ao agravamento das assimetrias espaciais de crescimento».

O quadro de evolução da população portuguesa no período de 1940-1960 e os dois mapas relativos à distribuição geográfica apresentados em Apêndice mostram, em relação ao nosso País, até que ponto se verifica a «reconciliação do homem com o seu meio, para benefício de ambos».

Conclue-se naturalmente que o alargamento das zonas sujeitas a «*esvaziamento demográfico*» revela a existência de um problema alarmante que se traduz pela «tendência em se manterem numa estagnação absoluta que, constituindo um recuo relativo, gera por consequência um *êxodo* de população, de meios financeiros, de capacidade embrionária e de todo o espírito de empreendimento, em breve, dos recursos de qualquer ordem». Além disso, os elementos e valores que em seguida vão ser apresentados referem-se não pròpriamente ao continente português, considerado na sua totalidade, mas principalmente a zonas que «sem dúvida... por motivos de ordem económica se vêm comportando como centros de atracção populacional».

*

* *

Não considerando estes valores como suficientemente conclusivos ou mesmo actualizados, seria da máxima conveniência, como se disse, efectuar um estudo de conjunto, principalmente orientado com a finalidade que nos preocupa, incluindo a análise dos factores de natureza social e económica e a determinação da evolução dos valores relativos à emigração da população portuguesa por classes sociais e por classes profissionais.

QUADRO V

Evolução da População Portuguesa
(em milhares de pessoas)

	1951-55	1956-60	1960		1900
				°/o	
População total			8.875		
» activa			3.193	36	
Aumento natural popul.	106,1	112,0	118,9	1,3	123,3
Aumento população metrop.	57,1	69,0	78,0	0,9	74,1
Emigração	49,0	43,0	40,9	0,4	49,2

*

* *

Em pequeno opúsculo da OCDE [1] encontra-se a apreciação:

«Se bem que não se disponha de estatísticas regulares adequadas sobre o emprego (da população activa), a análise dos dois últimos recenseamentos resumida no quadro junto fornece muitas conclusões gerais. De 1950 a 1960, o emprego fora dos sectores primários aumentou em cerca de 18°/o, tendo-se registado a mais forte progressão na

(1) Etudes Economiques de l'OCDE — Portugal, pag. 7, Juin 1963.

construção e, em menor medida, nas indústrias transformadoras.

O emprego agrícola baixou de 9 °/₀ durante o mesmo período e o aumento de emprego total foi de 5 °/₀.

Apesar da expansão do emprego verificada na indústria, a sua composição não sofreu transformação fundamental; o ramo têxteis, vestuário e calçado representa ainda em 1960 30 °/₀ do emprego total nas indústrias transformadoras contra 39 °/₀ em 1950».

Esta apreciação deve sobrepôr-se ao quadro que a seguir se transcreve

Alimentação da População Portuguesa; problemas afins

Admitimos que é profundamente errado por ser anticientífico, e malévolo por ser tendencioso, pretender opor os «conceitos» fatalistas e obsoletos de «país essencialmente agrícola» e «país essencialmente industrial». Para defesa desta tese não vamos desenvolver nem repetir argumentos já apresentados e apenas citaremos ao leitor alguma bibliografia específica [1].

Existe certa dependência entre o *grau de*

QUADRO VI

Evolução da Composição da População Activa
(em milhares de indivíduos)

	1950 Resultado do recenseamento		1960 Resultado provisório do recenseamento	
	Total	Homens	Total	Homens
1. Agricultura e silvicultura	1.413	1.178	1.285	1.181
2. Pesca	40	39	40	39
3. Indústria extractivas	25	23	26	25
4. » de transformação	569	408	665	499
5. Construções e trabalhos públicos	145	144	213	211
6. Electricidade, gás, etc.	10	9	14	13
7. Comércio, bancos e seguros	216	184	253	214
8. Transportes e comunicações	102	95	116	106
9. Serviços e diversos [1]	446	185	503	193
10. Emprego civil total	2.966	2.265	3.115	2.481
11. Desemprego	88	76	78	74
12. População activa civil total	3.054	2.341	3.193	2.555

Terminando esta fase de citações, seja-nos permitida breve referência a um factor de importância excepcional, por constituir, como dissemos, necessidade vital da população portuguesa.

industrialização de um país e o do *estado de alimentação da sua população* (e de outros

[1] Dos quais: pessoal de serviço caseiro (criados) e outros pessoais 290 (T) 75 (H) em 1950 e 249 (T) 80 (H) em 1960.

parâmetros, estado de guerra, etc.); não é possível a *fracos* valores do *estado de alimentação* corresponderem *elevados* ou mesmo *médios valores do grau de industrialização* (1).

É uma verdade «à la Palisse», intuitiva, biológica e social e discorrer com fraseologias sobre este assunto (2) é pretender escamotear o papel de responsabilidade determinante que as Administrações desempenham na referida interdependência.

Adoptamos pois como premissas de base os seguintes pontos:

todos os países estão industrializados num maior ou menor grau;

cada país tem a sua população suficiente ou deficientemente alimentada.

Na análise das incidências da produção nacional nos campos de alimentação e da agricultura sobre o quadro geral da evolução económica portuguesa, preocupam-nos três factores conclusivos:

— evolução do produto nacional agrícola — como índice da realização de de uma das funções vitais da População: a alimentação;
— população directa ou indirectamente ligada à Agricultura — como índice do «investimento» necessário de valores humanos ligados à referida realização;
— produtividade do trabalho agrícola — como índice de rendimento obtido em toda a actividade.

Evolução do Produto Nacional Agrícola

A evolução do produto bruto agrícola no período 1952-1958, em milhares de contos e percentagens é indicada no quadro seguinte:

QUADRO VII

Estrutura do Produto Bruto Agrícola (milhares de contos)

	1952		1954		1956		1958	
Prod. vegetais	7281	59,0	7893	59,8	8181	58,4	8628	61,8
Prod. animais	2761	22,4	2817	21,6	3249	23,2	2928	21,0
Prod. Florestais	2068	16,8	2236	16,9	2390	17,0	2193	15,7
Ren. em auto-investimento	219	1,8	226	1,7	195	1,4	213	1,5
Total geral	12329	100,0	13192	100,0	14015	100,0	13962	100,0

Usando o método de comparação com países que os especialistas afirmam terem condições ecológicas semelhantes — Espanha, Itália do Sul, Grécia e Turquia — ou seja

(1) Cf. J. D. Bernal — Science for a Developing World — pg. 29-31.

(2) Ref. a pág. 69 de S. Loureiro.

os chamados países do Mediterrâneo, e tomando o índice (100,0) dos países restantes ([1]) da Europa não socialista temos o quadro seguinte que nos coloca na posição mais desfavorável do conjunto:

QUADRO VIII

Desenvolvimento do Sector Agrícola

	Prod. Agric. total	Prod. Animal total	Cereais panificáveis	Cereais secundários	Total Cereais	Frutos	Legumes
	1952/53 — 1953/54		1956 — 1957				
Portugal	65	30	75	45	60	175	120
Grécia	80	35	130	50	90	305	155
Turquia	90	35	255	115	180	365	130
Itália Sul	65	25	135	15	70	400	210

tra 52.001 milhares de contos) conclui-se que a actividade agrícola teve um «rendimento» de 0,52 tomando para índice 1,00 o «rendimento» médio relativo à actividade total nacional ([3]).

Parece pois estarmos perante uma agricultura que, quer pela evolução em quantidade e diversidade da sua produção, quer em relação aos padrões de rendimento obtidos em países com condições ecológicas e climáticas comparáveis, nos revela sinais evidentes de estagnação ([2]).

População directa ou indirectamente ligada à agricultura

No ano de 1958 a população activa nacional era constituída por 3,159 milhões de indivíduos dos quais 1,457 ou seja 46,1 % se dedicavam às actividades agro-pecuárias. Se se observar, de passagem, que o produto nacional bruto agrícola foi nesse ano 24,1 % do produto nacional bruto total (12.546 con-

Esta população activa agrícola encontra-se socialmente organizada em empresas que o Instituto Nacional de Estatística classificaem:

Empresa familiar: O empresário é produtor autónomo que fornece o trabalho próprio ou familiar e os capitais. É perfeita se o empresário e a família conseguem viver exclusivamente do rendimento da exploração; é imperfeita se o empresário ou os membros da família necessitam de trabalhar fora da exploração para suprirem a insuficiência do rendimento desta.

Empresa patronal: O empresário tem de recorrer a estranhos para entrar na posse de meios de produção, tal como sucede no caso de contratar trabalho assalariado.

([1]) Países ditos industrializados. Cf. S. Lourenço, pág. 96.

([2]) Cf. op. cit. pág. 104.

([3]) Cf. José de Matos Torres — Aspectos quantitativos do Ensino em Portugal, CIE do ISCEF, Lisboa.

Nestes termos [1], existem no país os seguintes tipos de empresa:

Familiares perfeitas	276.619	32,4 °/₀
» imperfeitas	425.812	49,9 °/₀
Patronais individuais	150.786	17,6 °/₀
» societárias	305	0,1 °/₀
Públicas	46	—

Verifica-se assim que «nas parcelas territoriais aferidas com uma intensidade de presença de empresas imperfeitas superior a 50 °/₀ *se forma cerca de 40 °/₀ do produto bruto agrícola, e se encontra aproximadamente, 44 °/₀ da população activa agrícola*. A repartição funcional do produto bruto agrícola é, por capitação anual e em escudos (1958) [2]:

Assalariados	3.800
Empregados	5.700
Isolados	7.000
Patrões	65.300

Produtividade do trabalho agrícola

A produtividade da terra é não só baixa, em média, em relação a todo o Continente, como tem ainda variações de grande amplitude. Assim o mostra o quadro seguinte [3]:

QUADRO IX

Produtividade da Terra

Média dos anos 1956-1958

Continente	Superfície produtiva (a)	Superfície agrícola (b)	Superfície florestal (c)
Valor médio	1.800	2.400	800
Valor máximo	4.300	9.200	2.000
Valor mínimo	1.000	1.000	100

(a) Produto bruto por hectare
(b) » agro-pecuário por hectare } em escudos
(c) » florestal por hectare

[1] Cf. S. Lourenço — Op. cit., pág. 139.
[2] Ib., pág. 171.
[3] Ib., pág. 115.

A produtividade do trabalho é mais difícil de definir visto que, como população activa, devemos considerar «homens e mulheres de todas as classes etárias, e também crianças que individualmente representam um potencial de trabalho distinto, maior ou menor consoante, *grosso modo*, a idade e o sexo». Portanto, sujeitos a um erro mais grosseiro, obtém-se como valor médio para todo o território do Continente Português, ainda relativamente ao período 1956-1958, o índice de 9.900 de capitação do PBA por activo agrícola, verificando-se ainda, numa análise de pormenor, que os distritos de maior produtividade por hectare são precisamente os que apresentam menores capitações por activo agrícola. Este factor traduz apenas que os «resultados alcançados nas regiões mais bem dotadas em recursos ou em potencialidade do meio físico são, em larga medida, neutralizados pelos altos níveis distritais de cobertura demográfica».

3. Conclusões

Várias são as conclusões a extrair das referências e citações anteriores.

Em primeiro lugar, e como verdade evidente, verifica-se a necessidade de definição e realização de uma política económico-social da qual resulte directamente a citada «reconciliação» do homem português com o seu meio, com a sua profissão, com a sua vida, com a sua real capacidade criadora.

Não é suficientemente significativo o facto de o índice de 1,24 °/₀ do crescimento natural anual da população portuguesa, durante o período de 1950-1960, nos situar no Quadro I na posição dos povos da Oceania e da América Latina. Na realidade, deduzida a emigração, o *acréscimo anual da população é apenas de 0,7 °/₀*, sendo as percentagens da população activa, em relação à população total, e do crescimento da população activa durante o referido decénio, respectivamente 35 °/₀ e 4,6 °/₀; e «esta evolução demográfica geral demonstra largamente a necessidade de empreender um esforço de desenvolvimento por forma que a economia portuguesa possa oferecer suficientes possibilidades de emprego à população em idade de trabalho» (1).

Insistimos porém, em que este termo genérico de «possibilidades do emprego» deve significar concretamente:

> fixação do elemento humano à região geográfica de que é oriundo por meio da promoção e do desenvolvimento de actividades produtivas, económicas e culturais, tanto quanto possível, igualmente repartidas por todo o território nacional;
> estruturação social tendente à estabilidade e equilíbrio na participação por igual de toda a população nas referidas actividades económicas e culturais;
> fornecimento dos produtos alimentares em qualidade e quantidade convenientes à manutenção de uma população sàdia;
> faculdade de aquisição de conhecimentos formativos das competências humanas, por forma a fixar o homem à sua profissão e desenvolver-lhe o espírito de autoconfiança.

Em segundo lugar, é igualmente evidente que um país em «via de desenvolvimento» não poderá deixar de ser senão um país em «via de educação»: — falho portanto de pessoal conveniente e competente para a exploração racional das suas riquezas naturais e livre desenvolvimento da sua economia. É portanto em relação a um nível de «estabilidade da evolução económica», e nunca a nível de «via de desenvolvimento», que devem ser inferidos o volume e o género das necessidades nacionais determinantes da requerida política económico-social.

(1) Cf. Études économiques de l'OCDE, Portugal, Juin, 1963.

4. A Sociedade Portuguesa de 1975

As conclusões anteriores conduzem-nos, na fase elementar em que se situa o presente trabalho, à definição de um referencial — conjunto de diferentes parâmetros — em relação ao qual deveremos enunciar o problema geral do ensino em Portugal.

Uma das coordenadas referir-se-à, òbviamente, à evolução da Sociedade Portuguesa — mais particularmente a aspectos da sua população activa, podendo aceitar-se como origem por exemplo os valores relativos ao ano de 1975.

Consequentemente, admitindo que a Sociedade Portuguesa de 1975 tenha atingido um nível de «estabilidade de evolução económica» sobre uma infra-estrutura económico-social ocidental europeia, será de determinar a estrutura da respectiva população activa no que respeita à sua constituição e percentagens.

De acordo com uma hipótese que os Autores citados podem considerar das mais desfavoráveis à nossa evolução demográfica, que é a de o ritmo de crescimento da sua população activa *se manter* no valor 4,6 °/₀, relativo a dez anos, a População Activa Portuguesa em 1975 contará 3.500.000 indivíduos.

Admite-se ao mesmo tempo que o crescimento da população total não ultrapasse os 1,24 °/₀ anuais e que «a emigração líquida de trabalhadores não tenha ultrapassado os 20.000 por ano» (1), hipóteses que nos parecem excepcionalmente optimistas e de muito difícil verificação. Se pretendermos que a estrutura dessa População Activa seja «coerente com a sua época» ou, o que é o mesmo,

(1) Cf. Études Économiques de l'OCDE — Portugal, Juin 1963 pg. 7.

se adoptarmos os resultados do trabalho de FOURASTIER, a sua constituição será de

I)
- 1.190.000 (1.360.000)(1) indivíduos com conhecimentos pelo menos equivalentes aos do «bac», dos quais
  - 490.000 (560.000) são licenciados ou de grau superior
  - 560.000 (640.000) tem estudos de 2 ou 3 anos além do «bac»
  - 140.000 (160.000) com estudos completos do «bac»
- 1.645.000 (1.880.000) trabalhadores qualificados
- 665.000 (760.000) trabalhadores não qualificados.

Dos

- 490.000 (560.000) licenciados ou de grau superior
  - 262.500 (300.000) terão estudos literários, jurídicos, administrativos, etc.
  - 227.500 (260.000) terão estudos científicos, de engenharia, de medicina, etc.

E, na ausência de valores resultantes de estudos de previsão sobre a evolução da população portuguesa, podemos admitir que em 1975 ela seja de 11.750.000 indivíduos, que a população com idade entre os 14 e 23 anos de idade seja de 1.500.000 e que a taxa de escolaridade seja de 30 ‰, percentagens que consideramos situadas no limiar do inadmissível para o referido ano — então uma geração escolar de 450.000 indivíduos que, em números redondos terá que fornecer anualmente (2):

II)
- 24.000 adolescentes com certificado de aptidão profissional
- 10.000 adolescentes com nível de conhecimentos da ordem de um Brevet de ensino geral
- 16.000 adolescentes com nível de conhecimentos igual ou superior aos do «bac». Destes últimos,
  - 14.000 deverão ter seguido os estudos por forma que
    - 7.000 tenham atingido a licenciatura e
    - 3.000 a tenham ultrapassado.

Estes números, frizemos, referem-se a indivíduos diplomados e não a candidatos a diploma, isto é, a saídas e não a admissões a cursos.

Estamos neste momento em condições de poder enunciar em primeira fase uma das finalidades de qualquer reforma do Ensino em Portugal — nomeadamente aquela que se relaciona com os aspectos quantitativos da nossa População.

Tal reforma não poderá ser menos que um *projecto de instalação de uma Indústria Nacionalizada produtora de Quadros Científicos, Técnicos e Profissionais* com a capacidade de produção tal que até 1975 possa suprir os déficits existentes em relação aos valores indicados I), e a partir desse ano mantenha o referido volume de população II) e um crescimento anual de 10 ‰ (3).

(1) Entre parêntesis figuram os números que correspondem ao aproveitamento integral do crescimento natural da população, isto é, à hipótese altamente optimista de se poder evitar a emigração.

(2) Sem que se possa estabelecer uma correspondência entre os níveis de conhecimentos adquiridos comparem-se estes números com os seguintes, extraídos de J. MATOS TORRES — Op. cit, pág. 43:

Alunos que no ensino técnico profissional terminavam o curso

Elementar e complementar (14 anos)	6714
Médio (18-19 anos) total	265
» agrícola	66
» comercial e industrial	199

(média anual relativa ao período 1950-1958)

(3) Segundo indicação do Prof. AUGER.

IV. O Problema Português (Continuação)

1. A Indústria Portuguesa

As políticas de desenvolvimento económico apreciam-se através da elevação dos níveis de vida que resulta do rendimento global dos factores de produção, nos diversos ramos da actividade geral do homem.

Fizemos uma breve análise da importância do sector agrícola na vida nacional, e verificámos que, quer pela extensão do produto, quer pela parcela de população activa nele abrangida, os valores registados bastam para mostrar como é pouco e insuficientemente evoluída a estrutura económica portuguesa.

No que respeita ao sector industrial, a situação não é mais brilhante e apenas reforça a conclusão anterior.

«À forte presença do sector agrícola anda ainda geralmente ligada ··· uma dimensão e estrutura de comércio externo geralmente em desacordo com os imperativos do desenvolvimento interno. A insuficiente extensão do sector industrial obriga a importações avultadas de produtos industriais ···: uma sensível imutabilidade nesta estrutura genérica do comércio externo poderá acarretar uma diminuição progressiva da *capacidade de importação* nacional, revelando-se as exportações cada vez menos aptas a proverem ao *financiamento* de importações *pelo menos* crescentes, em quantidades, valor e diversidade, com os acréscimos populacionais» (¹).

É o que resulta, por sua vez, da incidência da actividade industrial na vida económica da nação, evidenciada, por exemplo, pela posição que o País ocupa entre os países da Europa meridional, considerados no seu conjunto, e a Espanha, relativamente à produção industrial. No Quadro X apresentam-se valores relativos ao ano de 1953, tomando para 100 o índice de produção *per capita* dos países da Europa Ocidental (²):

QUADRO X

Extensão Comparada da Produção Industrial

	Europa Meridional	Portugal	Espanha
Indústrias transformadoras	25	25	30
Produtos alimentares, bebidas e tabacos	35	25	40
Têxteis	50	45	65
Vestuário	25	35	40
Produtos de madeira	50	50	70
Papel e artigos de papel	15	10	20
Tipografia	20	15	25
Curtumes	65	50	70
Produtos de borracha	30	35	50
Produtos químicos	25	25	40
Produtos minerais (não metálicos)	35	35	50
Produtos minerais (metálicos)	10	10	15
Metais	25	20	30

Esta muito reduzida actividade produtiva nacional no sector da indústria é por outro lado de uma heterogeneidade flagrante no que respeita a vários factores significativos:

repartição geográfica do produto industrial bruto, indicada no Quadro XI pelos valores de 1958: a concentração de 82 % da actividade em 5 dos 19 distritos do continente português é factor de instabilidade intrínseca na evolução da economia nacional;

(¹) S. Lourenço — As assimetrias... II Vol. pág. 12.

(²) Cf. S. Lourenço, Op. cit. pág. 60 e seguintes.

QUADRO XI

Distribuição distrital do Produto Bruto Industrial (percentagens)

	Lisboa	Porto	A	B
Ind. Extractivas	24,4 %	21,3 %	19,3 %	35 %
Ind. Transform.	35,4 %	22,7 %	24,9 %	17 %
Total	34,9 %	22,6 %	24,5 %	18 %

A — Aveiro, Braga e Setúbal, conjuntamente.
B — Os restantes 14 distritos.

distribuição do pessoal industrial que traduz em parte a distorsão anterior, como mostra o Quadro XII;

A estes factores, que contribuem fortemente para a instabilidade na fixação profissional da população trabalhadora neste sector, não é estranha a estrutura industrial que comporta 74.546 estabelecimentos caracterizados no Quadro XIV, e cujo volume, relativo ao número de empregados, se encontra expresso, por sua vez, no Quadro XV.

Interessa completar este breve estudo da actividade industrial portuguesa pela individualização dos elementos expressos e resumidos nos dois quadros seguintes:

Indústria Transformadora

A distribuição da produção e do produto industrial relativos ao ano de 1958, são por grupos de indústrias (ver Quadro XVI).

QUADRO XII

Distribuição do pessoal industrial (1957-1959)

Distritos	Operários		Restante			Total	
		%		%	%		%
Lisboa	132.400	23	29.300	26	22	161.700	23,5
Porto	140.400	24	21.000	19	15	161.400	23,3
Aveiro	51.300	8,8	8.300	7,5	16,1	59.600	8,6
Braga	48.900	8,5	4.500	4	9,2	53.400	7,7
Setúbal	45.300	7,8	5.900	5,2	13	51.200	7,4
Total	578.700	100	112.900	100	19,6	691.600	100

e ainda a

capitação anual do produto industrial bruto relativa a distritos, como mostra o Quadro XIII.

Indústria Extractiva

O sector extractivo da indústria portuguesa compreendia, em 1958, as actividades de pesca, minas e pedreiras, e a estrutura da produção

QUADRO XIII

Capitação Anual do Produto Industrial Bruto (1958 — 1000 esc./hom.)

Distritos	Capitação	Distritos	Capitação
Lisboa	45	Aveiro	27
Setúbal	36	. . .	. . .
Braga	31	Bragança	9
Porto	29	Guarda	7
Continente 30			

esforço não dispensará o conjunto de reformas sociais e políticas que permita ao cidadão português atingir o justo equilíbrio na vida social, familiar e individual.

2. Interdependência entre as actividades industrial e científica

«Enquanto que algumas pessoas se voltam para a ciência com o objectivo de saciar uma sede de conhecimento, muitas outras consideram-na principalmente como uma força potencial crescente com a capacidade de dominar a natureza.

QUADRO XIV

Indicadores de Estrutura dos Estabelecimentos Industriais

Capital fixo por estabelecimento 1.000 esc.			Capital fixo por empregado 1.000 esc.			Consumo de energia
Equipamento	Edifícios	Cap. fixo total	Equipamento	Edifícios	Cap. fixo total	MWh
222	144	451	24	16	50	30

no sector distribuia-se da forma como mostra o Quadro XVII, sendo de destacar o volume relativo de actividade no domínio da pesca.

Esta análise sumária das distorções fundamentais da estrutura industrial portuguesa vai poder determinar, no parágrafo seguinte, de forma igualmente sumária, o correspondente esforço adicional da actividade científica nacional necessário para, em futuro próximo, podermos ocupar uma posição de dignidade a que temos direito como nação consciente das possibilidades e recursos actuais da Ciência e da Tecnologia. Tal

Eis a razão por que, de uma maneira geral, o apoio que se dá à ciência resulta da necessidade das suas aplicações imediatas e do desejo de um aumento de produção.

QUADRO XV

Estrutura Dimensional dos Estabelecimentos Industriais (Indústrias transformadoras)

N.º de pessoas empregadas	1-10	11-100	101-1.000	+ de 1.000
% de estabelecimentos	26 %	31 %	36 %	7 %

Devemos frisar, mais uma vez, que o progresso devido à ciência resulta, em última análise, do avanço nos conhecimentos de natureza teórica e experimental de base.

Se o caminhar da ciência pura sofre um abrandamento ou mesmo uma paragem, o mesmo acontece à indústria, à agricultura e à medicina. Esta dependência toma aspectos de evidência em alguns exemplos: os da penicilina e da energia atómica; mas mesmo que o progresso da vida prática pareça basear-se principalmente em experiências empíricas, é fora de dúvida que, sem um conhecimento científico básico, está irremediàvelmente condenado à falência.

QUADRO XVI

Distribuição da Produção e do Produto Industriais das Indústrias Transformadoras (1958)

	Produto	Produção
Alimentares	11,2	20,5
Bebidas	1,9	1,0
Têxteis	22,7	17,6
Vestuário	4,7	4,0
Cortiça	3,6	3,9
Madeira e mobílias	2,9	3,5
Papel e artigos de papel	2,9	2,5
Tipografia, editoriais e conexas	3,0	2,2
Químicas básicas	1,2	2,3
Adubos	1,4	2,0
Outras químicas	4,5	4,9
Derivados do petróleo e do carvão	4,7	3,9
Minerais não metálicos	5,8	3,6
Metalúrgicas de base	1,6	1,4
Produtos metálicos	4,9	5,1
Construção de máquinas (excep. eléctricas)	2,0	1,8
Material eléctrico	2,2	2,0
Material de transporte	5,9	4,8
Construção	8,3	8,0
Diversas transformadoras	4,6	5,0
Total	100,0	100,0

QUADRO XVII

Produção das Indústrias Extractivas (1958)

Pesca	74,2
Extracção de carvão	5,2
» de minério de ferro	9,3
» de pedras, argila, etc.	5,1
» de minério não metálico	6,2
Total	100 %

Tomando consciência do princípio desta dependência, consideremos os seus resultados práticos e vejamos como utilizá-la convenientemente. Cada uma das quatro categorias de investigação[1], desde a mais especulativa até ao trabalho final de *aperfeiçoamento técnico*, necessitam de tratamento específico da parte das administrações.

Como regra, cada categoria requere instituições próprias, quer a investigação se faça em organismos públicos ou privados, e departamentos com organizações adequadas, qualquer que seja a escala em que ela se desenvolva. Uma primeira questão a ser apreciada refere-se ao volume relativo, em cada caso, do orçamento e do pessoal. Neste ponto, muitos estudos estatísticos são unânimes nos resultados.

Se analisarmos o preço final no mercado de um novo produto em relação ao custo da investigação fundamental e aplicada (categorias 1, 2, 3), trabalho de desenvolvimento (categoria 4) e capital de investimento para produção, obteremos valores nas proporções de 1, 10 e 100. Por outro lado, as investigações pura e orientada (categorias 1 e 2) e a investigação industrial juntamente com o trabalho de aplicação e desenvolvimento (categorias 3 e 4) estão na relação de 4 para 100.

Finalmente, a proporção dos fundos atribuídos à investigação pura (categoria 1) e à

[1] P. AUGER considera quatro tipos de investigação científica:

Categoria 1 — investigação fundamental livre.
» 2 — investigação fundamental orientada.
» 3 — investigação aplicada.
» 4 — operação de aperfeiçoamento técnico.

Cf. Apêndice 2.

investigação fundamental aplicada (categoria 2) é de 1 para 3.

Coordenando estes diferentes valores atribuíveis às quatro categorias de investigação atrás referidas, obtemos o escalonamento dos custos de investigação da forma seguinte:

investigação pura	1
investigação fundamental orientada	3
investigação aplicada	6
aperfeiçoamento técnico	100

Este esquema refere-se porém a uma situação mediana actual e não deve ser considerada como um padrão para aceitação geral. Além disso, os baixos valores atribuídos às investigações pura e fundamental aplicada não reflectem os valores intrínsecos destas categorias de investigação; pelo contrário, pode proclamar-se sem exagero que elas condicionam a investigação nas restantes categorias.

As estatísticas revelam igualmente que o único meio económico de organizar a investigação fundamental (pura e orientada) consiste em integrá-la como um todo num largo esquema de actividade que compreenda todas as quatro categorias; tal esquema deve referir-se nomeadamente a uma companhia privada, a um grupo de interesse, a um organismo público ou mesmo a um Estado nacional...

Podemos também concluir que unidades de investigação fundamental com um *staff* inferior a 100 indivíduos, incluindo trabalhadores científicos e pessoal auxiliar, na proporção de 1 para 3, não são eficientes. Na realidade estes valores determinam o «limiar» de eficiência das dimensões dos laborarórios que constituem as unidades de investigação fundamental. As organizações públicas ou privadas que não tenham capacidade para manter uma investigação fundamental a esta escala, devem constituir-se em grupos de interesse ou consultar grandes centros e institutos de investigação especializada por meio de contratos.

Foi este, sem dúvida, o espírito de cooperação que norteou o rápido desenvolvimento da investigação fundamental orientada nos grandes países, e fez agrupar os pequenos países em organismos como o Euratom e o CERN, em busca dos resultados de sólida e eficiente colaboração científica» [1].

*

* *

As instituições de organização e direcção da actividade científica dos diversos países prestam a necessária atenção a estes elementos acabados de referir. Nomeadamente elaboram e estudam inquéritos dirigidos às empresas industriais nacionais, daí resultando um apoio que se concretiza no controle da forma pela qual as disposições práticas de gestão da actividade científica nas mesmas empresas se acordam com as disposições gerais teóricas, cientificamente determinadas.

Como exemplo, vamos registar os resultados finais de um inquérito realizado em 1963 junto da indústria francesa, cuja validade saiu reforçada pela geral concordância com valores semelhantes obtidos em outros países [2].

De 619 empresas consultadas (sociedades nacionalizadas do sector não concorrencial, centros profissionais ligados a determinados ramos da economia nacional e empresas do sector concorrencial — estas constituindo o maior grupo) 42,5 % não responderam, 0,8 % recusaram-se a participar no inquérito, 17,1 % declararam não fazer investigação e

---

(1) Transcrito de P. Auger – Current trends in Scientific Research, UNESCO, pág. 215.

(2) Cf. L'expansion de la recherche scientifique, **20**, Fev. 1964.

39,6 % forneceram respostas pormenorizadas.

Verificou-se que a distribuição geográfica da investigação científica promovida no seio das empresas industriais se reparte da forma seguinte: cerca de 70 % na região de Paris, 11 % na região Ródano-Alpes e 20 % no resto da França.

A equipa média de investigação compõe-se aproximadamente de 2 técnicos, 1 operário e 0,5 administrativo por cada investigador científico e gasta, em média por ano, cerca de 1.000 contos[1].

Se atendermos às empresas cujo volume de negócios corresponde a um nível superior ao do «limiar de eficiência» da investigação científica própria, verificamos que a relação das despesas da investigação para o montante das receitas brutas foi de 3,4 %. Para essas despesas o Estado contribuiu com 35 % dos fundos, 60 % resultou de autofinanciamento, provindo os 5 % restantes de origens diversas.

Por outro lado, prevê-se que a taxa de crescimento anual do potencial de investigação no sector industrial deva ser pelo menos de 10 %, podendo atingir valores de 15 %.

Observemos, finalmente, que o grau de intervenção dos governos neste domínio, no que respeita à promoção de realizações e à concessão de subsídios, e a posição das empresas em face dos governos solicitando subvenções, contratos de participação, convénios de desenvolvimento etc., traduz a consciência da parte das administrações da importância e interesse da exploração do progresso científico.

Temos, por exemplo, ainda a França, onde esta tomada de consciência resultou da necessidade de coordenação das operações de restabelecimento de uma economia desfeita pela guerra, na qual existe um sector nacionalizado que actua de colaboração com um sector privado. Nos Estados Unidos, ela é intrínseca a um complexo de causas ligadas a uma economia que sustentou uma guerra mundial, em seguida subordinada aos interesses de guerras locais e guerra fria embora o território não tivesse sofrido qualquer prejuízo material durante o presente século. Na União Soviética, ela resultou da necessidade de estruturação de uma economia nacional, por um lado, resistente aos embates de todas as tentativas de intervenção de países dominados por sistemas sociais diferentes, e por outro lado tendente à valorização máxima do seu material humano, reduzindo-lhe o esforço físico e aumentando-lhe a capacidade de conhecimentos das leis da natureza e do domínio dos fenómenos naturais.

Temos ainda o exemplo dos países representados na Conferência de Lagos[2] que aí definiram as respectivas políticas científicas nacionais em matéria das investigações sobre os recursos naturais, formas de elaboração e realização dessas políticas; determinaram a classificação e efectivos necessários de pessoal científico e técnico, formas de financiamento e de economia da investigação e ainda os problemas fundamentais relacionados com a cooperação internacional no domínio da investigação.

Em oposição, o desinteresse dos governos pelo mesmo problema resulta de vários e diversos factores, nomeadamente:

a) ausência de visão dos problemas actuais;

---

(1) 172.000 NF em França e 174.000 nos E. U. A.

(2) Ghana, Tunísia, Kenia, Togo, Ouganda, Congo, República Unida de Tanganica e Zanzibar, Etiópia, RAU, Nigéria, Serra Leoa, Argélia, Alto-Volta, Sudão, Marrocos, Burundi, Ilha Maurício, Ruanda, Mali, Nigéria, Daomei, Senegal, Camarão, Madagascar, Tchad e Costa do Marfim. A Conferência realizou-se de 28 de Julho a 6 de Agosto de 1964.

b) ausência de perspectivas futuras imediatas quanto à economia nacional;

c) ausência de capacidade de decisão dos responsáveis;

d) existência de uma «tradição nacional», em resolver por analogias, superficialmente e sempre voltados para o passado;

e) existência de barreiras geográficas, de impecilhos para os contactos com os indivíduos, com as organizações, em suma com o sec. XX;

f) ausência de instrumentos (organismos, sociedades científicas, etc.) capazes de analisar, discutir e contribuir para a solução dos problemas nacionais.

A traços largos aqui se apresentam novos elementos — insistimos, insuficientes nos valores absolutos e possìvelmente nas características — determinantes de outras condições iniciais para qualquer reforma do Ensino em Portugal, particularmente no que respeita à Actividade Científica Nacional.

Mais uma vez se verifica a necessidade de uma simultânea reforma económico-social cuja natureza, todavia, será de mais difícil determinação.

Um ponto, porém, é de inferência imediata: de tal reforma terá que resultar necessàriamente a já citada reconciliação do homem português consigo próprio e com o seu meio.

Possìvelmente será ainda de insistir numa política de concentração das indústrias em torno dos tipos já existentes; ou de manter os tipos e apoiar a independência das pequenas indústrias; ou de promover o aparecimento de outras; ou ainda de adoptar soluções mistas?

São perguntas às quais apenas grupos de especialistas estarão em condições de poder apresentar resposta.

Aqui, interessa-nos lembrar que a principal riqueza de um país industrializado não é o seu equipamento material mas antes, a soma de conhecimentos acumulados como resultado de experiências vividas, a capacidade da população em utilizar eficazmente os seus conhecimentos e a possibilidade de os aprofundar quando tal se revele necessário.

Atendendo ainda a que o progresso de um país se processa através de uma industrialização progressiva do mesmo, e que «é em relação a um nível de *estabilidade da evolução económica* e nunca ao nível de *via de desenvolvimento*, que devem ser inferidos o volume e o género das necessidades nacionais determinantes da referida política económico-social», são valores apresentados nos quadros VIII, X, XI XVI e XVIII que em primeira análise determinam o grau de esforço da actividade científica a imprimir ao País.

Da análise dos factores expostos nos pará grafos anteriores, ressalta a evidência da necessidade de introdução de novo parâmetro no problema geral do ensino em Portugal: percentagem da actividade industrial portuguesa em relação à actividade industrial dos Países da Europa Ocidental.

A urgência em se atingir o desenvolvimento industrial equivalente ao destes países implica, qualquer que seja o regime político em que o problema se enquadre, a independência nacional da indústria portuguesa em relação a todos os factores de que ela depende.

Como é óbvio, sem dúvida o mais importante é o da formação das competências profissionais portuguesas, obtida através do ensino e do apoio de uma actividade científica própria e superior.

Factores ainda a atender e que se situam a nível imediatamente inferior, referem-se à heterogeneidade e desvio dos padrões normais patentes nos quadros XI a XV. Faltam-nos porém elementos para aqui abordarmos o assunto.

9. Aspectos Potenciais

As considerações e elementos acabados de expôr podem servir de base a uma análise, a realizar pelas instituições responsáveis pela organização da actividade científica em Portugal, tendente à determinação do factor de utilização dos recursos actuais da ciência para o progresso nacional.

Tomemos, por exemplo, o caso de sessenta e três emprezas com séde na metrópole portuguesa[1]. Agrupando-as por actividades afins, o quadro seguinte apresenta as receitas brutas relativas ao ano de 1962:

QUADRO XVIII

Grupos de empresas	Receitas brutas (milhares de contos)
Bancos	2.083
Seguros	2.211
Electricidade, aplicações e afins	1.670
Quimicas e afins	1.463
Navegação	218
Alimentação	212
Várias	1.012

Baseados nos resultados do inquérito realizado em 1963 pela indústria francesa já citado elaboramos o Quadro XIX que nos dá o número de investigadores, técnicos, operários, pessoal administrativo e orçamento *exclusivamente destinados a investigações* que as referidas empresas deveriam fazer incluir como parte integrante dos seus quadros, com o objectivo do seu próprio desenvolvimento.

Tomando como base as percentagens dos resultados do mesmo inquérito, chegamos à conclusão de que a investigação privada deveria dispender 360.000 contos dos quais

126.000 contos	:	subsídio do Estado
201.600 »	:	autofinanciamento
32.400 »	:	diversos.

Ainda desses 360.000 contos, 180.000 deveriam destinar-se a «développement» como seja, por exemplo, o estudo e a criação de protótipos, unidades piloto etc. e os restantes à investigação aplicada.

QUADRO XIX

Actividade Científica necessária a algumas empresas portuguesas (1962)

	% [2]	Inves.	Tecn.	Oper.	Adm.	Orçamento
Bancos	3,4	68	122	82	34	68,000
Seguros	3,4	75	135	90	38	75.000
Electricidade	5,5	92	202	92	46	92.000
Quimicas	4,3	64	140	104	32	64.000
Navegação	4,5	10	18	12	5	10.000
Alimentação	4,5	10	18	12	5	10.000
Várias	4	40	72	48	20	40.000
Total		359	707	440	180	359.000 contos

Além disso, 216.000 contos seriam dispendidos como remuneração a pessoal e os restantes 217.000 destinar-se-iam a amortizações e aquisições de material.

[1] Cf. Aplicação de Capitais, Pancada Morais & C.ª, Lisboa 1963.

[2] Percentagem do custo da investigação sobre as receitas brutas.

Poderemos dizer ainda que, excluindo os bancos e seguros, os restantes 217.000 contos seriam gastos da forma seguinte:

ciências do engenheiro	86.800	contos
electrónica e electrotecnia	60.760	»
química	32.550	»
física	21.700	»
matemática	7.595	»
outros	7.595	»
	217.000	

Todos estes valores referidos ao ano de 1962 deveriam ainda sofrer um aumento anual de 10 %.

4. Conclusões

Nos documentos e estudos em que fundamentamos os cálculos anteriores não há referências ao impedimento de se poder considerar um Estado nacional como uma grande empresa no que respeita a valores e percentagens dos factores relacionados com a investigação científica. Antes pelo contrário, tais valores e percentagens são tanto mais válidos quanto mais volumosa e completa for o conjunto das actividades da mesma empresa.

Parece portanto legítimo extrapolar os pontos de vista anteriores fazendo-os incidir sobre a actividade global portuguesa, mensurável, por exemplo, através do Produto Bruto Nacional.

Sempre sob a reserva destas breves observações não visarem mais que a determinação de uma primeira aproximação de valores, poderemos apreciar o quadro seguinte elaborado com base no método utilizado para o anterior.

Nele se indicam os valores em homens e milhares de contos a ocupar no continente português com a investigação científica nacional.

QUADRO XX

Actividade da Investigação Científica Nacional (1958)
(milhares de contos)

Produto Bruto		Pessoal					A (5)	Nível (1)	B (6)
Natureza	Valor	Inves.	Tecn.	Oper.	Adm.	Total	Orçamento	%	Orçamento
Agrícola	*13.749*	*467*	*327*	*467*	*234*	*1495*	467	65	890
Vegetal	8.628	294	206	294	147		294		570
Florestal	2.193	77	54	77	38		77		
Animal	2.928	96	67	96	49		96	30	320
Pesca	*3.483*	*120*	*180*	*60*	*60*	*420*	*120*	?	?
Indústrias (3)	*25.261*	*980*	*1764*	*1176*	*490*	*4410*	*980*	30 (4)	3.270
Serviços (2)	*23.548*	*400*	*720*	*480*	*200*	*1800*	*400*	?	?
Total		1967	2961	2183	984	8115	1967		5.050 + ?

(1) Percentagem da produção *per capita* em relação aos países da europa ocidental.

(2) Extractivas, transformadoras, construções, electricidade, etc.

(3) Tomamos para as percentagens de investigadores, técnicos, etc. metade dos valores indicados como média nos resultados do inquérito dirigido à indústria francesa.

(4) Valor estimado sobre elementos pouco seguros.

(5) A — Orçamentos necessários para manter o país no nível actual.

(6) B — Orçamentos necessários para levar o país ao nível dos países da Europa Ocidental.

Os valores indicados na coluna A referem-se à preocupação de não deixar que o país desça do baixo nível em que se encontra; os indicados em B correspondem porém, à preocupação de levar o país ao nível dos restantes países da Europa Ocidental.

V. O Problema Português. O Ensino

Depois de pràticamente redigidas as presentes notas, por despacho de Sua Excelência o Ministro da Educação Nacional foi autorizada a divulgação de um Relatório denominado «Projecto Regional do Mediterrâneo — Evolução da Estrutura Escolar Portuguesa, Previsão para 1975 —», elaborado em ligação com a Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económicos (O. C. D. E.) por um grupo de trabalho do Centro de Estudos de Estatística Económica, do Instituto de Alta Cultura, constituído pelo Professor Doutor Carlos Manuel Pinto Alves Martins, Director do Centro e pelos licenciados António José Barata Alves Caetano, António Simões Lopes e Ludovico Lázaro Morgado Cândido; o Relatório teve ainda um subsídio da Fundação Calouste Gulbenkian, a assistência de 94 outros colaboradores e o financiamento de 15.230 dolares, concedidos pela OECE e 700 mil escudos concedidos pelo INII e outros créditos adicionais.

O Relatório é portanto obra de vulto, realizada por técnicos de vulto e com o apoio de avultados elementos trabalho e verbas financeiras.

A nossa posição é apenas a de um curioso que durante dois períodos de férias, resolveu recolher alguns elementos estatísticos e sobre eles discorrer.

É pois na esperança de um ambiente de desportivismo — e com o espírito que leva o amador a competir com o profissional — que nos atrevemos a manifestar a nossa discordância de fundo com a orientação geral da obra, o que não exclui reconhecer o esforço que significa dirigir e manobrar tantos recursos financeiros e humanos.

Não é nosso objectivo debater, neste momento, as razões do desacordo: não discutimos a legitimidade das «equações diferenciais do problema»; pensamos apenas que são outras as «condições iniciais» a adoptar.

Com efeito, o Relatório *parte do que o País é em 1960* e determina qual *deve ser em 1975* o nível atingido através de uma evolução contínua e regular.

Em oposição, nós tentamos:

apreciar as distorções e atrazos reais das actividades económica e científica nacional;

admitir que em 1975 se tenha atingido, por processo não especificado, o nível de estrutura económica equilibrada;

partir do que, nestas condições, *o País deve ser em 1975*, definindo as consequentes realizações necessárias.

Gostaríamos, porém, de deixar aqui formulada uma singela pergunta:

— Quais as razões de natureza económica, social ou pedagógica (científica) que indicam que a estrutura do ensino em Portugal, em 1975, deva subdividir-se em

ensino primário,
ensino secundário $\left\{\begin{array}{l}\text{liceal}\\ \text{técnico}\end{array}\right.$
ensino médio,
ensino normal,
ensino superior;

ou melhor, ser a mesma de 1911?

1. O ensino

Para terminar esta breve análise dos aspectos gerais da vida portuguesa necessitamos ainda registar mais alguns dados que consideramos fundamentais e que se relacionam com a situação actual do nosso ensino, limitando-nos para simplicidade aos ramos: agrícola, técnico-profissional e superior.

Vamo-nos socorrer mais uma vez de documentos já elaborados; e se caímos no abuso das citações, beneficiamos da experiência de técnicos abalisados na prática da colheita de dados e da sua apreciação.

O ensino agrícola [1]

«... as técnicas agrícolas aplicadas na lavoura portuguesa são deficientes, quando não francamente primitivas, daí resultando baixas produtividades em muitos sectores da produção. O primeiro esforço a realizar deveria incidir, lògicamente, na melhoria das técnicas de produção da nossa agricultura — e, para isso, *haverá que atribuir ao elemento humano um papel primacial no ordenamento e na rentabilidade do trabalho* [2]. Uma agricultura evoluída implica, necessàriamente, a presença de valores humanos tècnicamente qualificados. Ora em Portugal — cumpre repetir a pergunta — existem quadros ao serviço da lavoura em escala suficiente para levar a cabo a inadiável faina da melhoria de produtividade na agricultura?

Um dos indicadores mais usualmente utilizados para este efeito, embora notòriamente falível, é o dos números respeitantes ao ensino agrícola. Em Portugal são abrangidos sob esta rubrica o ensino elementar, que prepara operários rurais e feitores; o ensino médio, em que se formam regentes agrícolas; e o ensino superior, preparatório de engenheiros agrónomos e silvicultores e de médicos veterinários. A seguir se publica um quadro representativo das conclusões de curso nos

QUADRO XXI

Conclusões de Curso no Ensino Agrícola

Tipo	1950-51	1951-52	1952-53	1953-54	1954-55	1955-56	1956-57	1957-58
Elementar (3)	64	57	60	64	72	51	71	58
Médio (4)	67	63	56	39	70	67	69	56
Superior	83	83	115	95	87	79	68	76
Agron.	42	34	52	45	47	51	37	60
Silvic.	9	10	26	19	15	18	17	—
Veterin.	32	39	37	31	25	10	14	16
Total	214	203	231	198	229	197	208	190

diversos ramos, do ensino agrícola e veterinário no nosso País».

. . . .

O ensino agrícola e veterinário em Portugal acusa nítida tendência para a diminuição de frequências e conclusões de cursos. Enquanto no ano lectivo de 1950-51 a frequência total foi de 1.533 alunos, o número correspondente em 1957-58 declinou para 1.239. A redução foi, espectacularmente, de menos 294 alunos (19 %).

. . . .

Ressalvando o ano lectivo de 1956-57, o número de conclusões de cursos no ensino superior tem sido sempre mais elevado do que o dos outros graus de ensino. Daí serão de concluir a existência e o agravamento de desiquilíbrios sensíveis nos três níveis profissionais a que correspondem os três graus do ensino. Em princípio, o número de técnicos a nível superior deveria ser inferior ao de técnicos a nível médio e o destes, também, inferior ao dos trabalhadores qualificados ao

(1) Cf. J. Matos Torres, Op. cit. pág. 55.
(2) Sublinhado nosso.

(3) Operário rural e feitor agrícola.
(4) Regente agrícola.

nível elementar. É particularmente significativa, sob este ângulo de observação, a insignificância dos números respeitantes ao ensino agrícola elementar, formativo de operários rurais e feitores agrícolas, cuja frequência no ano lectivo de 1957-58 ultrapassava as três centenas de alunos mas em que se registaram, sòmente, 58 conclusões de curso.

Observe-se, finalmente, *que a percentagem do número de alunos inscritos no ensino agrícola, no ano lectivo de 1957-58, em relação à população activa ocupada na agricultura se limitava a 0,09 por cento; e que a percentagem de conclusões de curso em relação ao mesmo conjunto populacional se confinou em idêntico período a cerca de 0,01* (¹).

As realidades falam por si, com eloquência impressionante, neste capítulo do ensino agrícola em Portugal. Elas bastam para inculcar os caminhos a seguir sem demora em tais matérias».

Ensino técnico-profissional (²)

«No âmbito do ensino técnico profissional português são abrangidos o curso elementar e complementar (comercial e industrial) e o curso médio (agrícola, comercial e industrial). Observe-se, desde já, os números respeitantes às conclusões de cursos» (Quadro XXII).

. . . .

«No conjunto do período considerado a média anual das conclusões de curso foi de 6714 no ensino elementar e complementar, 265 na totalidade do ensino médio, 66 no ensino agrícola médio (!) e 199 no ensino comercial e industrial médio».

QUADRO XXII

Conclusões de curso no ensino técnico-profissional

Ensinos / Anos lectivos	Ensino Técnico-profissional (Elementar e Complementar) I	Ensino Técnico-Profis. (Médio) II — Agrícola	Ensino Técnico-Profis. (Médio) II — Comercial e industrial	Ensino Técnico-Profis. (Médio) II — Total	Diferença I-II
1950-1951	5 416	67	198	265	5151
1951-1952	5 774	63	209	272	5502
1952-1953	5 952	63	300	363	5589
1953-1954	6 667	50	173	223	6444
1954-1955	6 783	77	121	198	6585
1955-1956	7 746	78	188	266	7480
1956-1957	7 674	71	179	250	7424
1957-1958	7 700	60	226	286	7414
Média anual	6 714	66	199	265	6449

. . . .

«O mesmo quadro, todavia, ainda nos permite formular uma outra observação de assinalável interesse: a diferença entre o número de alunos que concluíram os cursos

(¹) O sublinhado é nosso.

(²) Op. cit. pág. 42.

do ensino técnico-profissional elementar e complementar e os que finalizaram os cursos médios. Essa diferença representa-se na última coluna do quadro anterior.

A tendência manifesta é para a dilatação considerável da diferença referida, contràriamente ao que seria de supor e de desejar num país que procura esforçadamente as vias do seu desenvolvimento mais acelerado e em conformidade com as clamorosas necessidades da nossa época. E ninguém ignora, nos sectores onde problemas desta índole são estudados objectivamente, que o crescimento económico é obra, em amplíssima parcela, dos técnicos de grau médio que o servem. Não parece fácil demonstrar, por outro lado, que sejam suficientes, como preparação profissional para as mais variadas funções, os conhecimentos ministrados no ensino técnico elementar e complementar».

Ensino Superior (¹)

«O panorama das licenciaturas no ensino superior em Portugal toma aspectos particularmente significativos nos casos da Escola Superior de Medicina Veterinária, Instituto Superior de Agronomia e Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, onde a formatura de novos licenciados continua sendo consideràvelmente reduzida e, ao mesmo tempo, se observa dominante tendência para diminuição nos anos considerados. Num país como Portugal, em que a Agricultura e Silvicultura contribuíam, em 1958, com a parcela de 24,1 por cento para a formação do produto nacional bruto, só a deficiência dos métodos de exploração podem explicar a continuidade de tão reduzidos números na formação de técnicos veterinários e agrónomos — acrescendo ainda que alguns dos licenciados nesses ramos não vêm a exercer actividades profissionais relacionadas com a formação que a escola lhes ministrou. Pode apontar-se, a propósito, o elevado número de veterinários dispersos pelo País e aos quais apenas se exige, no exercício das suas funções, que verifiquem se este ou aquele produto estão em condições sanitárias de consumo público e que procedam a vacinação de animais em épocas ou regiões ameaçadas de epidemias — função que deveria ser, muito mais adequadamente, exercida por enfermeiros. Trabalhos de estudo, de investigação, de ciência aplicada, quase não existem nesse sector. E a imensa maioria dos concelhos do País não estão preparados para que tais actividades se desenvolvam em condições mínimas de eficiência.

Por outro lado, também no sector dos técnicos economistas já não há quem conteste a importância do seu papel numa estrutura económico-social em desenvolvimento. Não há hoje país que possa levar por diante um programa sério de crescimento económico organizado sem contar com o labor sistemático desses especialistas, idòneamente preparados. O grupo de ciências que estudam e que têm por missão aplicar no tratamento das realidades, em exercício de actividade profissional nesse sentido orientada, assenta actualmente em bases bem positivas. E os frutos da utilização de tais conhecimentos estão claramente à vista nos mais diversos países do mundo contemporâneo. Também em Portugal — embora em certos casos com timidez e desconfiança que só confirmam o nosso recuo na marcha em que tantos outros já caminham vitoriosamente — começa a acreditar-se que aos técnicos economistas competem funções de importância relevante. O facto é confirmado pela crescente procura de licenciados do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras nos mais diversos sectores da actividade oficial e privada.

O número de licenciados pela Escola Supe-

(¹) Op. cit. pág. 50.

rior de Medicina Veterinária atingiu o máximo de 39 (!) no ano lectivo de 1952-53 e o mínimo de 10 (!!!) em 1955-56. Em 1957-58, último ano do período em estudo, o número de licenciados naquela especialidade foi de 16 — precisamente metade do que se registou no ano lectivo de 1950-51.

No Instituto Superior de Agronomia o máximo de licenciados foi de 78, em 1952-53, limitando-se o mínimo anual verificado a 44, em 1951-52. A diferença entre os dois anos extremos do período 1950-51 e 1957-58, foi apenas de 9 — registando-se 51 no primeiro e 60 no último.

No Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, salvo no ano lectivo de 1953-54 em que se observa um acréscimo de 3 licenciados relativamente ao ano anterior, a tendência que prevalece na evolução do número de licenciados é a de um constante declínio. O máximo de 91 formaturas corresponde, precisamente, ao primeiro dos anos referidos, e o mínimo, de 41, verifica-se no último. A queda no número de licenciados foi superior a metade entre os extremos do período».

. . . .

QUADRO XXIII

Conclusões de curso no ensino superior

Anos lectivos / Estabelecimentos	1950-1951	1951-1952	1952-1953	1953-1954	1954-1955	1955-1956	1956-1957	1957-1958
Facs. de Ciências	151	161	126	169	192	168	184	175
Facs. de Direito	113	158	149	155	131	140	163	167
Facs. de Letras	111	88	87	100	90	95	121	174
Facs. de Medicina	224	242	240	130	194	216	204	264
Fac. de Engenharia e Inst. Sup. Técnico . .	264	308	289	248	225	217	250	279
Fac. e Esc. Superior de Farmácia (¹)	180	174	162	183	157	177	157	174
Esc. Sup. Med. Vet. . . .	32	39	37	31	25	10	14	16
Inst. Sup. Agronom. . .	51	44	78	64	62	69	54	60
Inst. Sup. Ciências Ec. e Financeiras	91	80	53	56	55	46	43	41
Fac. Econ. (Porto) . . .	—	—	—	—	—	—	—	24

(¹) Deve levar-se em conta neste número, que muitos alunos que terminam os estudos nas Escolas Superiores de Farmácia transitam em seguida para a Faculdade de Farmácia em exercício na cidade do Porto.

«Portugal tem figurado entre os países europeus em que o número de engenheiros relativamente à população activa (excluída a agricultura) é mais reduzido. No extremo oposto situavam-se, ainda recentemente, a França e a Noruega. Em 1950 havia em Portugal cerca de 3400 engenheiros que se distribuíam, em percentagens e por número de engenheiros por milhar de habitantes empregados nos diversos ramos da actividade económica, pelos seguintes ramos de actividade:

QUADRO XXIV

Distribuição de engenheiros por ramos de actividade

<table>
<tr><th>Ramo de actividade</th><th>Indústria</th><th>Construção</th><th>Transportes e Comunicações</th><th>Comércio, Bancos e Seguros</th><th>Administração Pública</th><th>Ensino</th><th>Diversos (Excepto Agricultura)</th></tr>
<tr><td>%</td><td>28</td><td>14</td><td>6</td><td>5</td><td>39</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td>N.º de engenheiros por milhar de pessoas empregadas</td><td>1,5</td><td>3,0</td><td>1,8</td><td>0,8</td><td>11,8</td><td colspan="2">0,7</td></tr>
</table>

A administração pública e a indústria, respectivamente, com 39 e 28 por cento, empregavam naquele ano perto de 70 por cento da totalidade dos engenheiros portugueses. Não ia além de 8 por cento a parcela referida às funções de ensino.

É curioso constatar que, por mil pessoas empregadas na indústria, apenas 1,5 eram engenheiros — ao passo que na administração pública a proporção equivalente se elevava a 11,8.

Ainda com referência ao ano de 1950, a repartição dos engenheiros portugueses pelos diversos grupos de idades mostrava que as percentagens mais avultadas se situavam nos grupos dos 25 aos 29 anos (22 %), dos 30 aos 34 (20 %) e dos 35 aos 39 (16 %). Em 1950, por conseguinte, o problema da substituição dos engenheiros em actividade não oferecia grande acuidade imediata. O quadro a seguir apresentado ilustra mais objectivamente a situação por idades desse sector dos quadros técnicos portugueses (Quadro XXV).

QUADRO XXV

Distribuição de engenheiros por idades

Menos de 25 anos	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	56-59	60-64	65 e mais
3 %	22 %	20 %	16 %	9 %	8 %	8 %	7 %	4 %	3 %

Assim documentada, por forma bastante elementar mas para o efeito significativo, a situação dos quadros de engenheiros em Portugal no ano de 1950, para o qual foi possível coligir elementos de informação, parece evidente que o problema fundamental a considerar nessa época seria o de determinar com a aproximação possível as necessidades futuras em tal domínio. Daí se deveria partir para o estudo ponderado da maneira de dar satisfação, em devido tempo, a tais necessidades — preparando as condições básicas para uma oferta satisfatória no sector dos quadros técnicos superiores em Portugal.

O problema da determinação das necessidades futuras em matéria de quadros especializados constitui campo de estudo muito complexo que não cabe nas proporções e fins deste trabalho. Apenas se indica que existem para tal efeito vários métodos de previsão, todos com vantagens e defeitos quando comparados entre si, mas alguns deles já postos à prova em vários países: Noruega, Dinamarca, Jugoslávia, Inglaterra, etc. Em certos casos, os resultados foram bastante satisfatórios e atestam a conveniência de os experimentar em função das características e exigências verificadas de cada país».

*

* *

É evidente que o Ensino se deve estruturar em torno de um esquema coerente, e coerente por sua vez, com a estrutura social existente; e que a actualização de uma qualquer das estruturas exige necessàriamente a actualização da outra.

No presente trabalho fazemos o possível por enunciar os problemas em termos exclusivos de ensino, esforçando-nos por reduzir ao mínimo as implicações e referências à necessária Reforma Social. Esta limitação resulta não do receio de encarar ou debater os problemas que se nos apresentarem sob este novo aspecto mas sim de necessária limitação do campo de observação.

Nova reforma do Ensino, além de ter que opor-se a um espírito generalizado, imbuído de empirismo atávico e de leviandade na decisão, (produto de irresponsabilidade de responsáveis) deve atender ainda aos resultados da aplicação de novos métodos de pedagogia e das diversas ciências da educação, dirigir-se ao aluno tendo em vista nele o futuro cidadão e dar realce devido aos factores económicos nacionais fundamentais.

Além disso são premissas essenciais em reforma actual da educação de futuros cidadãos [1]:

A — Os direitos do indivíduo a uma educação integral, gratuita e democrática de acordo com as suas necessidades e os seus interesses.

B — Os direitos da criança a uma educação conforme à sua natureza.

C — Os direitos da juventude a uma educação conforme às suas capacidades.

São aspectos indiscutíveis inerentes a um plano de reforma:

A — O dever do Estado de possibilitar uma educação suficiente ao desenvolvimento harmonioso do indivíduo e à sua formação de acordo com as necessidades da sociedade moderna, as tradições de liberdade dos povos e as esperanças humanas de paz, de progresso e de justiça social.

B — O dever da Sociedade de promover uma larga educação capaz criar sentimentos, costumes e propósitos de solidariedade entre os indivíduos e grupos, através da luta pelo bem-estar e pela defesa dos ideais nacionais no quadro da convivência universal.

C — O dever da Família de oferecer à criança e ao jovem um ambiente conveniente e saudável, liberto de preconceitos e limitações ao desenvolvimento natural da sua personalidade.

---

[1] Temas apresentados na Assembleia Mundial da Educação, México, 4-27 de Setembro de 1964, que deram origem à elaboração da chamada Carta do México que apresentamos em Apêndice.

VI. Conclusões Finais

Terminaremos estas muito incompletas considerações sobre a actividade científica em Portugal, com uma apreciação sintética dos aspectos focados, os de natureza geral relativos a sociedades bem estruturadas, actuais ou futuras, e os de natureza particular relativos ao País, referenciando superficialmente as incidências recíprocas, e tentando estabelecer valores e conclusões que, insistimos, serão sempre aproximados. Assim, retomaremos alguns pontos da *política nacional do ensino*, pela ordem por que eles foram abordados em I. 2. 2 (1), enunciando exemplos dum esboço do que podemos chamar *estratégia e táctica nacionais do ensino português*.

1. Problemas de Estratégia do Ensino Português

1. 1. Análise dos *recursos nacionais*:

Têm a palavra os geógrafos e os sociólogos portugueses a quem cabe um papel e *responsabilidade* fundamentais na execução desta tarefa de base: a análise dos recursos humanos e não humanos terá que iniciar-se no campo da geografia com a elaboração de um atlas nacional onde sejam cientificamente expressas e registadas todas as características físicas e económicas do País, os recursos naturais e a sua avaliação, todo o progresso cultural e histórico e os dados essenciais sobre o trabalho da população e a consequente produção.

A realização de tal empreendimento requere o exame de todos os materiais provenientes de diversos centros científicos, para tal criados ou orientados, contactos entre técnicos e cientistas, mas muito especialmente a adequada coordenação e planificação das investigações.

Uma obra desta natureza evidenciará naturalmente a evolução do País, nos campos da alimentação, da saúde pública e do ensino, no desenvolvimento da cultura e da economia, e em que grau o povo toma conhecimento das suas riquezas naturais e delas beneficia como seu autêntico possuidor.

Será difícil nesta fase elementar de apreciação do problema, determinar o número de técnicos e de cientistas, subdivididos pelas diversas especialidades, necessário à realização da tarefa. Será no entanto várias dezenas de vezes superior aos dos que actualmente saem das nossas escolas; pelo que podemos concluir que uma das tarefas mais *importantes* e *fundamentais do momento presente* é a formação de um muito maior número de especialistas nos campos das ciências da terra e do homem.

1. 2. Análise das *necessidades* nacionais relativas às diversas actividades produtivas da sociedade portuguesa

1. 2. 1. Necessidades de quadros

De uma maneira geral, a determinação do número de quadros técnicos e científicos com formação superior ou secundária adstritos a determinada actividade produtiva faz-se em certos países, simultâneamente, por duas vias diferentes:

avaliação das necessidades, tendo em vista a lista de lugares a preencher;

determinação das necessidades com base na análise do desenvolvimento da economia nacional.

O primeiro método compreende as operações seguintes:

estabelecimento e actualização das listas de lugares a preencher pelos especialistas (listas apresentadas por cada empresa, serviço, ministério, região económica ou administração central, com indicação dos lugares e precisão da natureza das qualificações e especializações requeridas);

(1) Cf. pág. 6 — col. 2.

determinação das necessidades suplementares na base do desenvolvimento das empresas e das realizações, da administração ou do sector de economia nacional considerado, tendo em conta as diversas evoluções em curso, as compensações das perdas ou transferências e a substituição parcial de auxiliares por especialistas qualificados.

A segunda via baseia-se na evolução prevista da população, na planificação da economia às escalas nacional e regional.

Os métodos empregados para a avaliação das necessidades e para a planificação dos recursos nacionais em pessoal científico e técnico variam segundo as concepções regionais e nacionais (1).

No quadro seguinte resumimos os resultados da aplicação de um destes métodos a um caso concreto (2), mostrando em relação a uma população activa, a percentagem de indivíduos que trabalham em cada sector da economia nacional, coluna A, e, dentro de cada sector a percentagem de especialistas, coluna B.

QUADRO XXVI

Sector	A	B
Indústria	25,4	2,0
Construção	6,0	1,8
Agricultura e silvicultura	35,3	0,4
Transportes e comunicações	8,3	1,0
Comércio, alimentação	5,6	1,3
Alojamento e serviços comunais	2,3	0,5
Serviços sanitários	5,7	10,5
Ensino	2,1	28,1
Ciência e investigação	1,9	30,7
Administração pública, gestão, etc.	2,3	21,1

Ainda na mesma população activa, a percentagem dos especialistas com formação superior e secundária é:

QUADRO XXVII

Especialização	%	A	B
Superior			
Engenheiros	30	147.000	168.000
Agrónomos, zootécnicos, veterinários e silvicultores	8	39.200	44.800
Economistas, estatistas e peritos comerciais	6	29.400	33.600
Juristas	2	9.800	11.200
Médicos (n. c. (1) dentistas)	11	53.900	61.600
Ensino (n. c. geólogos, juristas, médicos e economistas), bibliotecários e pessoal de serviços culturais e educativos	38	186.200	212.800
Secundário			
Técnicos	37	259.000	296.000
Agrónomos, zootécnicos, veterinários e silvicultores	7,5	52.500	60.000
Estatistas, planificadores e peritos comerciais	8	56.000	64.000
Juristas	0,5	3.500	4.000
Pessoal médico (n. c. dentistas)	22	154.000	176.000
Ensino, bibliotecários e pessoal de serviços culturais e educativos	20	140.000	160.000

Admitindo que a distribuição da população activa portuguesa em 1975 venha a ser aproximadamente a que apresentamos (III. 4), as colunas A e B dos quadros anteriores indi-

(1) Cf. Doc. ST/S/9 da UNESCO, 1964.

(2) Cf. op. cit., págs. 21, 27.

(1) Leia — não compreendendo.

cam os valores aproximados dos especialistas portugueses de formação superior e secundária que a constituirão nessa data. As duas colunas referem-se respectivamente às duas hipóteses([1]) consideradas de crescimento da população portuguesa.

De uma simples comparação do quadro com os números correspondentes e relativos ao ano de 1950, concluímos que estamos razoàvelmente bem servidos em juristas...([2]), mas que o número de engenheiros deve ser multiplicado por cerca de 50, e do pessoal superior de ensino pelo mesmo factor etc.

Quanto ao pessoal técnico secundário a situação é bastante mais grave.

A comparação é feita em relação a duas referências (1950 e 1975) que distam de 25 anos, dos quais já 15 passaram... sem que ao longo deles se tivesse registado algum progresso na evolução requerida.

De maior interesse, porém, é a determinação aproximada da distribuição das percentagens por especializações nos diversos sectores de actividade.

Analisemos apenas o caso da investigação científica, e vamos admitir que:

são válidos os números de investigadores e técnicos indicados como necessários à investigação científica nacional em 1958 (Quadro XX);

a evolução destes números têm uma taxa de crescimento anual de 10 %, como indicamos([3]).

Nestes termos, deve ser constituído respectivamente por

10000 investigadores
15000 técnicos

o quadro de pessoal especializado superior e secundário ligado à investigação científica portuguesa em 1975([3]).

Adoptando as percentagens que foram tomadas em IV.3, estes números ainda se desdobram no Quadro seguinte

QUADRO XXVIII

Sectores	Superior	Secundário
ciências do engenheiro	4000	6000
electrónica e electrotécnia	2800	4200
química	1400	2100
física	1000	1500
matemática	400	600
outros	400	600
Total	10000	15000

Convém esclarecer que na rubrica *ciências do engenheiro* se incluem especializações que precipitadamente poderiam ser incluídas nas restantes([4]).

2. Problemas de Táctica do Ensino Português

2. 1. Problemas gerais

2. 1. 1. Exigências de Pesca

A grande percentagem das actividades da pesca dentro do sector das indústrias extrac-

([1]) Cf. pág. 24, nota ([1]).

([2]) Não existindo insuficiência de juristas, há no entanto grande deficiência no que respeita à especialização: o advogado que resolve um problema do cível *encontra-se apto* a responsabilizar-se por causa de direito fiscal, ou internacional, etc.

([3]) Cf. pág. 17.

([3]) Estes valores apresentam um acordo flagrante com os *números reais* dos investigadores em França e em 1963, tendo em consideração as respectivas populações totais, cf. Le Progrès Scientifique, 89, pag. 20.

([4]) Por exemplo, em 1964 em França, de um total de 7007 engenheiros que terminaram o curso, 113 eram *engenheiros matemáticos*, isto é, possuidores de um dos 6 diplomas diferentes que naquele país são concedidos:

Grenoble: ENS. Electrotecnia:
secção matemática aplicada (dois diplomas diferentes)
secção automática.
Nancy: Instituto de Ciências do Engenheiro.
Toulouse: Electrotecnia:
opção matemática aplicada.

tivas põe em evidência a atenção que se deve prestar às ciências e às técnicas de apoio àquela actividade.

Os 670 especialistas (veja Quadro XX), ligados em 1975 à investigação científica de apoio a esta actividade, devem dedicar-se: à biologia, oceanografia e algologia com o objectivo de determinar a localização, a grandeza e a dinâmica das fontes da vida aquática; à investigação no domínio da física, para a aplicação e aperfeiçoamento das técnicas de detecção de peixe, para projecto e operação dos instrumentos e dos barcos de pesca; à microbiologia, bioquímica, química orgânica e física para a manutenção, o armazenamento e a produção da pesca e dos produtos de pesca. Este conjunto de actividades é bem definido e forma um todo, pelo seu objectivo.

Assim, por exemplo, para só falarmos no campo da física, além do equipamento de ultra-sons e respectivas técnicas para localização de cardumes, com o mesmo fim se utiliza equipamento electrónico. Feixes de luz com intensidades e composições determinadas, correntes e campos eléctricos são utilizados para atrair, concentrar e matar o pescado.

Grande e complexo é o problema do apoio científico que deve ser dado a uma das actividades produtivas que maior significado tem tido para o nosso País.

2. 1. 2. Exigências da Agricultura

No que respeita à actividade agrícola, os 1875 indivíduos a ela adstritos devem dedicar-se à investigação e ao tratamento de solos: estudo das relações planta-água-solo, da evolução dos fertilizantes, dos produtores de microflora e microfauna, alimentos das plantas; utilização de calcários nos solos ácidos; desmineralização das águas salobras e conservação das outras; rotação das colheitas, utilização de radioisótopos, etc.

Enfim, não nos é possível por insuficiência de informação e falta de espaço ocuparmo-nos da actividade científica de apoio necessária ao sector da agricultura portuguesa. Mas, repetindo e resumindo o que diz R. Dumont (¹), as imensas possibilidades da agricultura tem exigências enormes que se podem resumir, enunciando os trabalhos de investigação relativos às diversas fases que constituem a «artificialização do meio» e que são Tratamento do Solo, Fertilização, Domínio da Água e por vezes a Horticultura. Mas se as «técnicas modernas *quando aplicadas em escala suficiente*, podem muito ràpidamente restabelecer a produção agrícola, acarretando espectaculares victórias na luta contra a fome», elas exigem, porém, nos campos das ciências de base e das ciências da terra e do espaço, um complexo de actividades de apoio que se estendem desde capítulos especializados da matemática (bio-estatística, por exemplo) até ramos muito desenvolvidos da química (síntese de compostos orgânicos) da biologia (efeitos genéticos das radiações), da meteorologia etc., utilizando por sua vez técnicas muito específicas como a fotogrametria aérea (e respectivo tratamento em calculador electrónico) e outras.

2. 1. 3. Precioso instrumento de trabalho

Na 780.ª sessão plenária da Assembleia Geral das Nações Unidas foi adoptada uma resolução sobre a coordenação dos resultados da investigação científica, que passamos a transcrever:

Resolução 1260 (XIII) adoptada pela Assembleia Geral das Nações Unidas

Coordenação dos resultados da investigação científica

A Assembleia geral,

Constatando os notáveis progressos alcançados desde há alguns anos no domínio das ciências exactas e naturais puras e aplicadas,

---

(¹) Alimentation et la Faim pág. 55.

Considerando que a Organização das Nações Unidas e as Instituições Especializadas devem estimular e fortalecer em especial o desenvolvimento geral da investigação científica, dirigido para os objectivos pacíficos que são o progresso económico e o bem-estar da humanidade, no interesse da paz e da cooperação internacional,

Recordando a sua resolução 1164 (XII) de 26 de novembro de 1957 sobre o desenvolvimento da cooperação internacional nos domínios da ciência, da cultura e da educação, e a resolução 695 (XXVI) do Conselho Económico e Social, com data de 31 de Julho de 1958, relativa a um estudo que deve ser preparado sobre as relações e as trocas internacionais nos domínios da educação, da ciência e da cultura,

Reconhecendo a responsabilidade que cabe à Organização das Nações Unidas no que respeita à coordenação da actividade dos seus orgãos e das Instituições Especializadas, de acordo com os artigos 58 e 63 da Carta das Nações Unidas, e observando que o Conselho Económico e Social pediu à Organização das Nações Unidas e a cinco Instituições Especializadas para procederem à avaliação das suas actividades e programas para o período 1959-1964,

1. *Pede* ao Secretário geral para, de cooperação com a Organização das Nações Unidas para a Educação a Ciência e a Cultura e as outras Instituições Especializadas que interessam as aplicações pacíficas da ciência, assim como com a Agência Internacional de Energia Atómica, para que seja feito um estudo sobre as tendências fundamentais da investigação no domínio das ciências exactas e naturais e sobre a difusão e a aplicação a fins pacíficos dos conhecimentos científicos, assim como sobre as medidas que as Nações Unidas, as Instituições Especializadas e a Agência Internacional da Energia Atómica poderão tomar para favorecer a concentração destes esforços sobre os problemas mais urgentes, tendo em atenção as necessidades dos diversos países. Pede ao Secretário geral que tenha em consideração, quando fôr da realização deste estudo, o relatório a preparar pela UNESCO como aplicação da resolução 695 (XXVI) do Conselho Económico e Social;

2. *Convida* as já citadas organizações a cooperar com o Secretário geral sobre esta questão;

3. *Pede* além disso ao Secretário geral para submeter o referido estudo ao Conselho Económico e Social, na sua trigésima sessão, afim de que o Conselho formule as observações e todas as recomendações apropriadas;

4. *Pede* ao Conselho para transmitir o referido estudo à Assembleia Geral, fazendo-o acompanhar das suas observações e recomendações.

Em conformidade, e de acordo com a sua posição de membro das Nações Unidas, Portugal foi consultado sobre este problema vital através da carta circular CL/1368, datada de Maio de 1959 e assinada pelo Director Geral da UNESCO, M. René Maheu.

Infelizmente o nosso País não figura na lista dos que enviaram «um relatório pormenorizado sobre as Tendências Actuais da Investigação Científica», nem tão pouco na dos que «acusaram recepção da referida carta circular» (1). Assim perdemos a oportunidade de poder contribuir para a realização da obra dirigida pelo prof. Pierre Auger, sob o patrocínio da UNESCO, publicada em 1961 e intitulada «Tendências Actuais da Investigação Científica».

É nosso propósito considerar e utilizar este histórico documento como elemento fundamental para prosseguir na apreciação e na análise actualizadas de *problemas de táctica da Actividade Científica Nacional*.

2.2. A Matemática

Não podemos terminar este trabalho sem uma referência especial ao caso da matemática.

A divisão desta ciência em *pura* e *aplicada* resulta, em parte, de uma atitude de vantajosa comodidade; mas conduz os seus cultores a tomadas de posição de alheamento da maioria dos extensíssimos campos em que ela se espraia — precisamente daqueles que não se encontram sob a alçada dos seus interesses científicos pessoais: aquele que se diz *matemático puro* refugia-se fàcilmente nos ramos mais especulativos, ao passo que o *utilizador* tem tendência a afastar-se, e por

(1) Cf. Current Trends in Scientific Research, pág. 231.

vezes subestimar mesmo, o valor da actividade de base. Além disso, torna-se impossível ao matemático, assim *rotulado*, perceber-se em que medida a matemática se integra nas restantes ciências ou técnicas e estas por sua vez contribuem com o poder da experiência e da intuição para a estruturação e o desenvolvimento daquela [1].

A matemática pura, que por excelência se presta à investigação fundamental livre, desenvolve-se actualmente em Álgebra, Espaços vectoriais topológicos, Topologia algébrica, Geometria algébrica, Geometria diferencial, Teorias das funções analíticas — de uma e mais variáveis complexas — Teoria do potencial, Teoria das equações de derivadas parciais, etc.. A matemática aplicada desenvolve-se em ligação com as ciências e actividades humanas — Estatística, Econometria, Investigação operacional, Psicologia aplicada, Demografia, Informática [2], etc. — e com as ciências da natureza — Mecânica, Teorias físicas, Matemática do engenheiro, Biometria, etc.. Todas são ramos e disciplinas matemáticas cujo interesse é fundamental para o desenvolvimento económico do país.

Na prè-história da «era das máquinas calculadoras» [3], Lebesgue afirmava: «A matemática foi criada pelos homens para satisfação das suas necessidades, e tem sido para eles, de facto, um precioso instrumento; o professor de matemática deve permanecer por isso um professor de acção···»; e por seu lado o académico M. Lavrentiev preocupa-se por que «a produção industrial pode estar sensìvelmente em atraso sobre as descobertas científicas», indicando que «a aplicação rápida das descobertas científicas na economia nacional supõe resolvidos um certo número de problemas económicos, institucionais, etc.».

Tudo isto, e mais ainda, é sobejamente conhecido; muito mais se tem escrito, talvez sem que daí tenhamos, nós portugueses, sabido extrair lucro efectivo.

Consideramos, portanto, que *no caso particular do nosso País*, e precisamente porque em Portugal a matemática e o seu ensino têm andado a par, e ambos muito longe das realidades — quer as que resultam das exigências nacionais, quer as que correspondem à época presente — os programas de ensino superior da matemática devem resultar *à posteriori* e não *à priori* em relação aos passos essenciais que devem ser dados no sentido de uma boa utilização da matemática.

Esclarecendo e concretizando: É fundamental criar-se um *Instituto Nacional de Actividade Matemática* com secções pelo menos nas três cidades Lisboa, Porto e Coimbra, cada uma delas com os meios de cálculo automático e tratamento de informação convenientes, ligados entre si, a outros institutos científicos e aos departamentos matemáticos universitários, por rede própria de transmissão de dados (telex). O *Instituto* deve constar pelo menos de:

Departamento de Investigação de Base
Departamento de equipamento em meios de cálculo e de tratamento automático da informação
Departamento de investigação operacional
Departamento de Informática e automática.

Qualquer destes departamentos deve possuir uma estrutura que permita, por um lado,

---

(1) Sabemos de tentativas realizadas no País de entendimento entre grupo de cientistas e *matemáticos especializados*, para a determinação em comum da solução de um problema que interessava àqueles.

Aqueles matemáticos não souberam nem expressar-se nem adaptar-se às condições concretas do problema.

Consideramos que esta é mais uma prova do *valor livresco* da matemática, entre os seus cultores portugueses.

(2) Compreende cálculo numérico, tradução automática de línguas, aplicação da electrónica aos calculadores, etc.

(3) Cf. Doc. n.º 16854 da O. C. D. E.

a realização de verdadeiro trabalho colectivo e, por outro, o contacto permanente e directo com cientistas de outros ramos: físicos, químicos, biólogos, geólogos, médicos, geneticistas, economistas, sociólogos etc., organizados ou não, por sua vez, em outros institutos científicos.

Os alunos dos últimos três anos dos cursos superiores de matemática, engenharia, economia, sociologia, línguas vivas (linguística) devem ter acesso *de jus* ao Instituto e nele colaborarem activa e financeiramente (com remuneração) nos trabalhos realizados.

Uma vez aceites estas *premissas fundamentais* para a reorganização do ensino da matemática em Portugal, as soluções dos problemas, igualmente fundamentais, como sejam os da escolha das matérias a professar no ensino superior, decorrem lógica e naturalmente.

Não deve subestimar-se o papel de colaboração que uma *Sociedade Portuguesa de Matemática* deve desempenhar na estruturação, na condução e na direcção de todo este complexo de actividade.

Resta-nos fazer uma observação final:

Em Dezembro de 1963 foi publicado o trabalho n.º 16582 da O C D E com o título «Rapports par Pays sur l'organisation de la Recherche Scientifique — PORTUGAL —». Não conhecemos a forma como a «Direction des Affaires Scientifiques, responsable de la publication du présent rapport» colheu os elementos que apresenta. E não compreendemos também em muitos pontos a linguagem utilizada... e o conteúdo dos termos citados: admitimos apenas que a esses termos tenham sido atribuídos, por nós, significados diferentes... E tanto basta.

Uma coisa é certa porém: — Os Institutos, a que fazemos referência no nosso trabalho, nada têm de comum com os organismos científicos de nome congénere ou afim, citados no Relatório da O C D E.

Mais fácil será concretizarmos o nosso ponto de vista sobre aquilo que aí se chama «Sociedade Portuguesa de Matemática».

O Relatório da O C D E diz: «Subventionnée par l'Institut de la Haute Culture fonctionne une *Association Portugaise pour le Progrès des Sciences*, fédération des 25 sociétés scientifiques portugaises qui ont pour objectif de stimuler···» Na realidade uma das 25 sociedades federadas tem o nome de Sociedade Portuguesa de Matemática, e a cada congresso internacional dos matemáticos, o Instituto para a Alta Cultura tem escolhido e enviado um representante da S. P. M. No entanto, desde 1942, os sócios da projectada S. P. M. esperam a aprovação superior dos seus Estatutos, para que possam reunir e debater os seus problemas profissionais e científicos (1).

A *Sociedade Portuguesa de Matemática* que propomos é pois uma organização científica — à semelhança das que existem em todos países — com Séde própria e Estatutos oficialmente aprovados e cuja estrutura permita a qualquer associado — como *homem comum* do mundo da matemática — contribuir através da própria dignificação profissional e cívica para o progresso económico e científico do seu País.

Fundamental ainda será o papel desta *Sociedade Portuguesa de Matemática* na criação duma mentalidade geral, na qual as frases dos citados especialistas das teorias da Integração e das Funções Analíticas de variáveis complexas não soem a falso nem provoquem rebates de consciência.

3. Projecto

É nossa intensão continuar o presente estado:

retrocedendo, no sentido de

(1) O autor destas linhas é seu Sócio Fundador N.º 124.

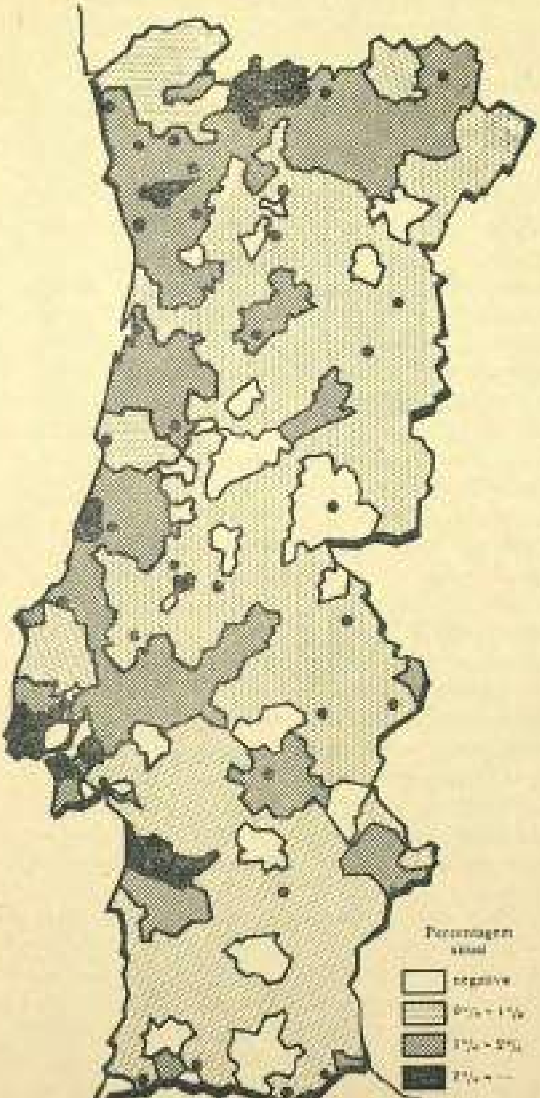
melhorar ou corrigir a metodologia utilizada;
actualizar os dados estatísticos de base citados;
precisar os factores numéricos ou taxas admitidas por analogia com casos ou países diferentes, mas comparáveis;
melhorar a coerência entre certos factores ou taxas que, por vezes, foram considerados independentemente;

prosseguindo, na análise pormenorizada dos diversos problemas aqui apenas enunciados, com a colaboração de grupos de especialistas portugueses e o apoio da Comissão Inter-Uniões para o Ensino das Ciências.

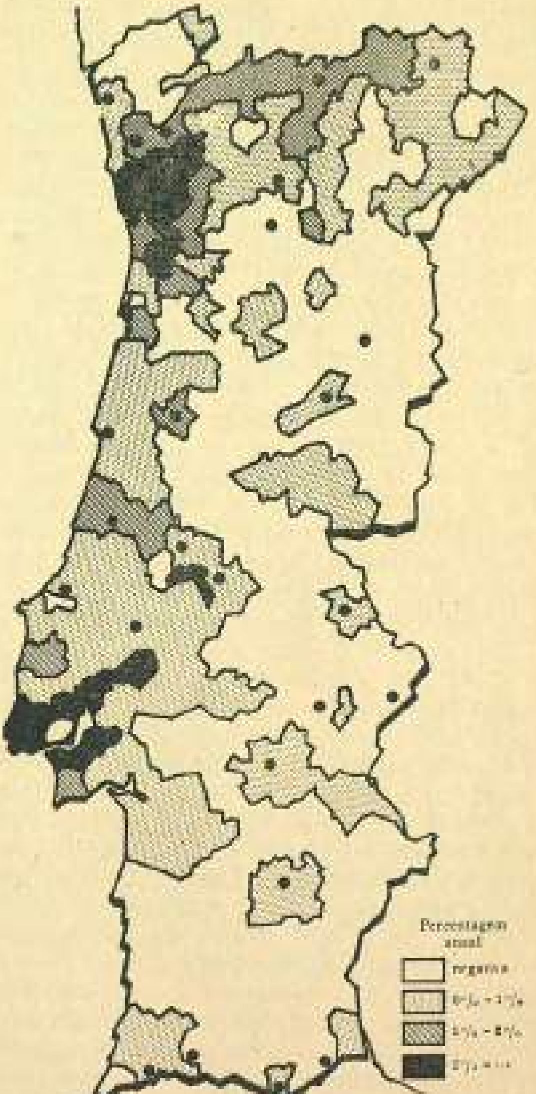
APÊNDICE 1

Evolução da População Portuguesa [1]

1940-1950



1950-1960



(¹) Mapas extraídos de S. Lourenço — op. cit.

APÊNDICE 2

A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA ACTUAL (¹)

A *investigação fundamental livre*, ou investigação pura, é geralmente individual, ou pelo menos existe uma pessoa cujo papel é preeminente no progresso da experimentação, a imaginação teórica, a precisão das operações e das normas. Isto não quer dizer que as conversações, os colóquios e as computações de resultados não sejam importantes, mas o trabalho individual e prático está centrado no cérebro e nas mãos dum único indivíduo. Um outro aspecto, que acompanha o carácter individual, é a liberdade de invenção do trabalho: as ideias que surgem ao investigador são postas à prova por ele próprio, se as mesmas parecerem interessantes, se elas prometem fazer progredir os conhecimentos científicos e obter uma melhor compreensão das leis do universo, abrindo um campo de investigação ainda desconhecido. Como consequência desta independência necessária, os recursos que são destinados ao avanço das ciências puras devem ser atribuídos nominalmente aos próprios investigadores que deles disporão livremente para os seus trabalhos. É este um acto de confiança indispensável que, bem entendido, não impede o doador dos fundos, público ou particular, de considerar os sucessos obtidos na sua política de assistência.

A *investigação fundamental orientada* encontra-se ainda centrada nas ciências fundamentais, quer dizer, o investigador tenta resolver os problemas postos pela natureza, ampliar os conhecimentos e a compreensão do homem sem passar às aplicações utilitárias concretas. Mas ele já não realiza esta tarefa com uma liberdade total na escolha dos objectivos porque a sua actividade mantém-se ligada a um sector definido do conjunto das ciências. Desta persistência na orientação dos esforços resulta que consideráveis meios técnicos poderão ser postos em acção com uma certa garantia de rendimento e que os trabalhos tomarão frequentemente um carácter colectivo que não permite retalhar arbitràriamente o campo de investigação ao arbítrio de cada investigador. É também nesta categoria de investigação que melhor se faz sentir a vantagem duma boa organização administrativa, comportando instituições científicas especializadas, missões de exploração e por vezes o estabelecimento duma cooperação de grande envergadura entre laboratórios. Uma outra consequência far-se-á sentir nos métodos de atribuição dos fundos públicos ou particulares que serão concedidos preferentemente aos organismos de investigação e aos laboratórios e não aos investigadores individuais e estarão portanto ligados a um programa de pesquisas ou pelo menos a um determinado domínio da ciência.

Nesta segunda categoria interessa distinguir duas subdivisões. Uma é relativa às «investigações descritivas», com carácter exploratório (background research) orientadas para a obtenção dum elevado número de dados, de observações e de medidas; tais investigações podem ter como domínio de desenvolvimento o solo do nosso planeta, os oceanos, o espaço atmosférico; podem dirigir-se a uma determinada categoria de corpos químicos e deles empreender a síntese sistemática assim como o estudo das propriedades físicas, químicas e biológicas. A segunda subdivisão será relativa às «investigações tematisadas», centradas sistemàticamente em torno dum grande fenómeno da natureza: um tipo de radiações como os raios cósmicos, um estado da matéria como o estado sólido, um aspecto da vida como a hereditariedade ou o metabolismo; as investigações tenderão por vezes a estabelecer o quadro no seio do qual uma descoberta imprevisível virá sùbitamente abrir novos caminhos em domínios ainda inexplorados. Mesmo nos ramos mais abstractos da matemática acontece que os investigadores pacientes e conscienciosos preparam pelo seu trabalho os instrumentos com os quais os Einstein do futuro apresentarão uma revelação fundamental de carácter muito geral.

Estes dois tipos de pesquiza fundamental orientada não constituem apenas as bases das grandes descobertas teóricas mas também as das grandes aplicações concretas. Assim as medições sistemáticas das marés e das correntes, as medições da gravidade e do magnetismo terrestre têm permitido escolher com segurança os locais sobre os quais poderiam ser, razoàvelmente, feitas tentativas de utilização da força das marés e as dos depósitos minerais ou das reservas de combustível fóssil. As cartas geológicas e meteorológicas, as cartas dos solos e da vegetação constituem a base

(¹) Cf. P. Auger — Op. cit.

necessária de toda a tentativa de valorização de terras inexploradas.

A *investigação aplicada pròpriamente dita* vem frequentemente enxertar-se sobre uma ou outra das duas categorias precedentes. Mas neste caso o fim visado conscientemente pela investigação consiste na possibilidade concreta de servir a humanidade numa das suas necessidades permitindo finalmente a produção de substâncias ou aparelhos úteis, podendo esta utilidade fazer-se sentir em domínios tão variados como os transportes, a saúde, a agricultura. O investigador deverá portanto dirigir os seus esforços para esta finalidade e não se deixar arrastar para caminhos divergentes mesmo que estes lhe pareçam apresentar promessas de resultados interessantes em si mesmos. Esta exigência será de resto geralmente incluída nas condições sob as quais os meios de acção lhe são fornecidos, quer por uma empresa privada, quer por um organismo público, nacional ou internacional. Com efeito, é a consideração do rendimento provável das pesquisas que determinará o interesse por elas despertado aliás reportando por vezes a uma época bastante afastada as realizações concretas necessárias. É evidente portanto que os resultados de investigações aplicadas devem ser objecto de relatórios regulares, independentemente dos maiores ou menores sucessos obtidos. A cooperação entre institutos de investigação pode ser extremamente fecunda no domínio da investigação aplicada. Ela permite reduzir as despesas, evitar as duplicações inúteis, aumentar a potência dos meios utilizados.

As *operações de aperfeiçoamento técnico* representam a última étapa com vista à obtenção dum rendimento económico ou social. A duração destes aperfeiçoamentos é bastante variável, mas sabe-se que o período que, em média, decorre entre o momento em que um processo novo foi descoberto pela investigação aplicada e o momento em que o produto realizado por este processo é posto à venda, encontra-se consideràvelmente reduzido desde o início do século tendo passado, em alguns casos, de vários anos para alguns meses. Estas operações não fazem intervir em princípio, resultados científicos novos mas exigem frequentemente numerosos conhecimentos empíricos, técnicos e científicos em domínios variados. Elas exigem, em particular, muita imaginação e engenhosidade quando é necessário transplantar uma técnica já experimentada em certas condições para o seio de condições muito diferentes quer do clima, quer dos materiais utilizados ou do pessoal disponível. As questões de mudança de escala são também muito importantes. Certos processos que resultam bem no laboratório põem problemas sérios quando é necessário passar à realização industrial. No domínio das operações só o que conta é o resultado concreto, e é ele que determina a atribuição dos meios de acção. É também por isso que a cooperação é mais difícil de realizar entre vários organismos de trabalho, gabinetes de estudos ou fábricas piloto: no entanto é possível encontrar fórmulas práticas mesmo neste caso.

Uma categoria muito importante de aperfeiçoamentos é constituída actualmente pela adaptação de métodos e processos industriais, agrícolas ou médicos, elaborados em regiões já plenamente desenvolvidas às condições existentes em regiões em vias de desenvolvimento. Em tais regiões, certos materiais necessários na forma primária das técnicas poderão faltar mais ou menos completamente e deverão ser substituídos por materiais disponíveis no local, por meio duma transformação por vezes bastante profunda dos processos utilizados. Poderá fazer-se sentir a falta de energia ou de combustível. As condições climáticas poderão exigir modificações dos métodos e da escolha dos materiais. Estudos deste género têm por vezes repercussões retroactivas sobre as aplicações nas regiões desenvolvidas onde elas conduzem a simplificações e economias.

É preciso notar que esta quarta categoria de trabalhos, a dos aperfeiçoamentos, é sensível a factores económicos, cuja modificação pode tornar caducos resultados obtidos à custa de grandes esforços. Mesmo factores sociais e psicológicos muito subtis podem influir profundamente sobre o valor de tal ou tal processo, aparelho ou materiais. A cooperação das ciências sociais, económicas e políticas, útil já ao nível da investigação aplicada, torna-se então necessária para uma boa condução dos trabalhos.

O domínio da investigação científica termina no fim das operações de aperfeiçoamento. No entanto fica ainda por decidir e realizar a marcha da produção efectiva, quer dizer, das operações industriais pròpriamente ditas. É neste momento que se fará sentir todo o impacto sobre a vida social, das descobertas que se encontram na origem de toda a cadeia de operações aqui descrita. O elo estreito, necessário, que mantém a dependência dos diferentes elementos desta cadeia, deve ser sempre perfeitamente apercebido quando são considerados os problemas postos pela política científica dos diferentes países.

Definição e descrição dos diferentes tipos de investigação científica

	Ponto de vista do investigador			Em relação aos resultados obtidos		
Tipos de investigação.	Móbil do Investigador.	Liberdade de invenção do trabalho ao critério do director de pesquisas.	Carácter individual ou colectivo do trabalho de investigação.	Método de financiamento.	Perspectiva de aplicação prática dos resultados.	Importância científica dos resultados.
Investigação fundamental. *Investigação pura.*	Investigação visando a compreensão do universo e a descoberta de novos campos, sem finalidade prática específica.	Escolha do domínio, do programa e do método de trabalho.	Geralmente individual.	Fundos atribuídos ao investigador.	Demora de aplicação prática imprevisível.	Resultados que afectam extensos campos da ciência e têm frequentemente profundas e longínquas repercussões.
Investigação orientada.	*Investigação tematisada* (Exploração de novos campos de investigação). Investigação fundamental centrada sistemàticamente sobre um tema dado, geralmente em torno dum fenómeno da natureza de largo alcance e frequentemente dirigido para um objectivo preciso.	Escolha de programa e do método de trabalho.	Geralmente colectivo.	Fundos atribuídos a uma instituição ou a um laboratório.	Demora de aplicação geralmente longa.	Resultados de carácter geral, interessando um domínio bem determinado da ciência.
	Investigação de base Investigação que visa a precisão de conhecimentos científicos num domínio particular, pela obtenção de dados, de observações e de medições essenciais.	Escolha do método (e por vezes do programa) de trabalho.	Geralmente colectivo.	Fundos geralmente atribuídos a uma instituição ou a um laboratório e frequentemente ligados a um programa de pesquisas.	A demora de aplicações práticas depende essencialmente do domínio das pesquisas.	Resultados de carácter empírico e que constituem as bases necessárias para o avanço das ciências puras e aplicadas.

Investigação aplicada.	Investigação com uma finalidade prática determinada para servir o homem nas suas necessidades.					
Investigação agronómica.	Investigação dirigida essencialmente para a compreensão e a promoção da produtividade agrícola (incluindo a criação de gado, silvicultura e a pesca).					
Investigação médica	Investigação com o objectivo da compreensão das doenças do homem, a conservação e a melhoria da saúde.	Escolha do método (e excepcionalmente do programa) de trabalho.	Geralmente colectivo.	Fundos atribuídos a uma instituição ou a um laboratório e ligados a um programa de pesquisas.	Demora de aplicação prática geralmente curta.	Resultados de alcance geralmente limitado e de carácter especializado.
Investigação industrial.	Investigação com o objectivo do acréscimo dos conhecimentos científicos em determinado domínio da actividade industrial do homem.					
Operações de aperfeiçoamento técnico.	Utilização sistemática dos dados da investigação aplicada e dos conhecimentos empíricos com vista à produção e uso de novos materiais, aparelhos, métodos ou processos novos na indústria, agricultura, medicina, etc., compreendendo também o aperfeiçoamento de protótipos e de instalações piloto.	O domínio e o programa de trabalho são fixados pelo mandatário (por vezes também o projecto experimental da investigação).	Geralmente colectivo.	Fundos geralmente atribuídos a um determinado programa de trabalho.	Aplicação prática geralmente imediata.	Resultados de alcance muito limitado e de carácter estritamente especializado.

APÊNDICE 3

CARTA DO MÉXICO

Os direitos e deveres humanos sobre Educação, Ciência e Cultura

1 — Todo o ser humano tem direito a participar da herança cultural do seu povo e da de todos os povos do mundo. Este direito implica, na sociedade contemporânea, a igualdade de oportunidades de acesso a estabelecimentos adequados, em todos os níveis do sistema educativo do Estado.

2 — Todo o ser humano tem direito a uma educação integral que respeite a sua personalidade, e seja livre de preconceitos; uma educação que assegure o seu pleno desenvolvimento: Físico, Intelectual, Moral e Estético; a sua formação de cidadão, e a sua capacidade para o trabalho.

3 — Todo o ser humano tem direito a receber educação democrática e popular, sem que dela possa ser privado por razões de raça, religião, opinião política, idade, sexo, situação económica ou condição social.

4 — Todo o ser humano tem o dever de contribuir na medida das suas possibilidades, para a conservação depuração e aumento da herança que recebeu; e de transmiti-la aos seus semelhantes, por meio do ensino, ou com o exemplo da sua conduta pública e privada.

5 — Todo o ser humano tem o dever de servir a sua pátria com a sua experiência, conhecimentos, virtudes e iniciativas; e de cooperar, por estes meios na manutenção da paz universal. Há que popularizar um conceito da formação do homem, que inclua a aquisição de conhecimentos e experiências, e ponha os mais altos valores da dignidade humana, ao serviço da harmonia universal entre todos os povos e nações.

6 — Todo o ser humano tem o dever de velar pela educação de seus filhos, pupilos e dependentes; de ajudá-los, orientá-los, estimulá-los e sustentá-los no seu esforço por se educarem; e tudo isto de acordo com os interesses superiores da comunidade, e com o desenvolvimento normal da personalidade do educando. Este dever compreende o cumprimento dos preceitos legais da educação obrigatória, e o aproveitamento de oportunidades a todos os níveis do sistema educativo do Estado.

7 — Cabe ao Estado, em representação da Sociedade, a responsabilidade de organizar e dirigir a educação do povo; de ditar as leis que garantam o direito à educação; e de imprimir a esta um sentido cívico e patriótico, de acordo com os postulados fundamentais das constituições nacionais.

8 — A educação é um serviço público; quando seja empreendida por particulares, o Estado deve providenciar para que não se converta em objecto de lucro. Mesmo assim, deve evitar-se que se desvirtuem os objectivos nacionais da educação e os princípios enunciados nesta carta. Em nenhum caso a inscrição e assistência às escolas será objecto de discriminações.

9 — A educação pública deve ser gratuita em todos os seus níveis e obrigatória no primário e secundário. Deve também ser laica, isto é, à parte de toda a doutrina religiosa, respeitar os foros da consciência e basear-se no progresso científico.

Educação e Seguro Social

10 — O direito à educação baseia-se no reconhecimento da pessoa humana e da sua hierarquia ética e jurídica; e robustece-se com o dever que tem a colectividade, de assegurar a todos os seus membros os meios que efectivamente lhes permitam o pleno desenvolvimento das suas personalidades, num ambiente de liberdade e justiça social.

11 — O Estado, como representante da sociedade, deve fomentar, com todo o seu vigor, a expansão e o melhoramento dos serviços educativos; e prever as

perspectivas que possam oferecer ao educando, o desenvolvimento económico e o progresso social, numa época de mudanças aceleradas; e numa forma tal, que lhe permita adaptar-se aos estados de cada momento.

12 — A capacidade para o trabalho deve ser gratuita, quer seja a que lhe é dada pelo Estado, como um serviço público, ou a que lhe é dada pelas empresas, como uma prestação para os seus trabalhadores. Este serviço deve compreender o aperfeiçoamento técnico para se actualizar nas alterações dos métodos de trabalho, e a capacidade para apreciar e desfrutar os bens culturais.

13 — As empresas agrícolas, industrias, mineiras ou de qualquer outra natureza, devem atender às necessidades educativas dos filhos de seus trabalhadores, financiando os empreendimentos escolares necessários. As leis de cada país devem determinar a forma como hão-de prestar este serviço.

14 — A Escola não é a única instituição educativa. Os grandes meios de publicidade — Imprensa, Cinema, Rádio e Televisão — são recursos modernos de grande eficácia didáctica. Os educadores devem preocupar-se por incorporar estes meios como seus instrumentos técnicos; e o Estado deve estabelecer as formas de cooperação, que as empresas hão-de prestar, na realização do plano educativo nacional.

15 — Educação e desenvolvimento económico devem planear-se simultâneamente. A primeira prepara os quadros do segundo; e este favorece a expansão e o melhoramento daqueles.

Os direitos da criança e do adolescente

16 — Reconhecida a dignidade da criança e do adolescente, como pessoas humanas, nada se lhe deve apresentar com a faculdade de resolver sobre o seu destino ou à sua consciência, ou ainda de utilizá-los para fim algum, que não seja o do desenvolvimento da sua personalidade e da conquista do seu bem estar, ou da sua incorporação na vida e nas tarefas da colectividade.

17 — *As crianças e os adolescentes* constituem a riqueza potencial da família, da pátria e do género humano. Protegê-los contra todo o perigo é responsabilidade suprema de todas as instituições sociais.

18 — *A criança* tem direito, desde o seu nascimento, a um nome, um lugar e uma nacionalidade, que lhe deêm consciência e segurança do seu próprio ser.

O adolescente, no uso deste direito, está apto a participar nas actividades da colectividade.

19 — Todas as crianças e adolescentes tem o direito a um desenvolvimento normal e a uma realização plena da sua personalidade. Assim, tem direito a receber educação, aos níveis correspondentes à sua idade e desenvolvimento e num ambiente livre de espectáculos deprimentes e de exemplo negativos.

Os adolescentes, antes de mais, têm direito à atenção especial dos seus problemas de vocação e à capacidade para o trabalho que lhes haverá de permitir incorporar-se em forma satisfatória, nas tarefas da colectividade.

20 — Os adolescentes que trabalham têm direito a escolas diurnas ou nocturnas primárias e secundárias, consoante as suas necessidades educativas.

A Ciência, a Cultura e a Paz

21 — O direito de todos os homens a expressar-se livremente deve ser respeitado, não só porque representa um atributo da sua dignidade, mas também porque constitue a melhor garantia da sua participação na obra da cultura. O génio criador do homem deve manifestar-se livremente e a arte e a ciência do educador consiste em saber descobri-lo e guiá-lo, de maneira que contribua a enriquecer — com o seu próprio esforço — o património cultural que se lhe entrega.

22 — O património cultural de cada povo deve ser defendido, sem hostilidade nem exclusivismos, contra todo o intento de destruição, deformação ou abandono. O enfraquecimento da personalidade cultural dos povos põe em perigo a sua independência e reduz o valor da sua contribuição à obra humana.

23 — A todos os povos assiste o direito de expressar livre e cabalmente, a sua própria cultura. O património científico e espiritual do género humano deve aumentar com a criação e a participação activa de todos os povos. Quando se trata de impulsionar a educação, deve superar-se toda a diferença ideológica.

24 — A cooperação ou auxílio, em matéria educativa, de nação para nação e a que qualquer organização

internacional presta a um país independente, deve ter como condição o respeito à independência e aos valores culturais do país que recebe a ajuda.

25 — A solidariedade internacional, em matéria educativa, deve manifestar-se antes de mais, pelo intercâmbio de estudantes e mestres, pela recíproca concessão de bolsas e serviços, pelas missões educativas de boa vontade, e pelo estudo das experiências educativas de todos.

26 — A Educação, como instrumento por excelência do aperfeiçoamento humano, só pode cumprir os seus altos fins no ambiente de igualdade e concórdia. A sociedade tem o dever de assegurar, mediante uma convivência justa e pacífica, o respeito pelos valores que se pretende incutir às novas gerações através da acção educativa.

27 — A educação popular deve fomentar a colaboração activa e entusiástica entre todos os povos do mundo. A educação para a liberdade, a justiça e paz constitue a força mais poderosa de que dispõe o género humano para alcançar o bem estar e a concórdia universal.

México, 24 de Setembro de 1964.

GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 100 — Julho - Dezembro 1965

A single axiom for closure operators of partially ordered sets(*)

by José Morgado
Recife — Brasil

1. Let us recall that an operator φ of a partially ordered set P is said to be a closure operator of P, if the following conditions hold:

C1: $x \leq \varphi(x)$ *for every* $x \in P$;
C2: *if* $x \leq y$, *then* $\varphi(x) \leq \varphi(y)$;
C3: $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ *for every* $x \in P$.

In [1], António Monteiro gave a characterization of the closure operators of the lattice $\mathcal{P}(I)$ formed by all subsets of the set I, by means of one axiom. He stated that the operator φ of $\mathcal{P}(I)$ is a closure operator, if and only if one has

(1) $\quad Y \cup \varphi(Y) \cup \varphi(\varphi(X)) \subseteq \varphi(X \cup Y)$,

for all, X, $Y \in \mathcal{P}(I)$.

In [2], it is showed that an operator φ of the partially ordered set P is a closure operator, if and only if

(2) $\quad x \leq \varphi(y)$ *is equivalent to* $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

One sees that the elements of the partially ordered set, on which the operator φ is defined, are present in both conditions (1) and (2), that is to say, neither of these conditions is intrinsic.

The purpose of this note is to formulate an intrinsic characterization of the closure operators of a partially ordered set, by using only one axiom.

2. It is well known that the set of all operators of a partially ordered set P becomes a partially ordered set, by defining

$$\varphi \leq \psi, \text{ if and only if } \varphi(x) \leq \psi(x)$$

for every $x \in P$.

The identity operator of P is denoted by ε and, if φ and ψ are operators of P, one denotes by $\varphi \circ \psi$ the operator defined by $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$ for every $x \in P$.

We are going to state the following

Theorem: *If* P *is a partially ordered set and* φ *is an operator of* P, *then* φ *is a closure operator, if and only*

(3) $\quad \varepsilon \leq \psi$ *implies* $\varepsilon \leq \varphi \circ \varphi \leq \varphi \circ \psi$.

Proof: Indeed, let φ be a closure operator of P and let us suppose that ψ is an operator of P satisfying the condition $\varepsilon \leq \psi$. This means that

$$x \leq \psi(x) \text{ for every } x \in P,$$

(*) Trabalho especialmente destinado a comemorar a publicação do n.º 100 da «Gazeta de Matemática».

and from this it follows, by C2,

$$\varphi(x) \leq \varphi(\psi(x)) = (\varphi \circ \psi)(x)$$

for every $x \in P$, that is to say,

$$\varphi \leq \varphi \circ \psi .$$

The condition C1 and C3 mean that one has

$$\varepsilon \leq \varphi = \varphi \circ \varphi$$

and, consequently,

$$\varepsilon \leq \varphi \circ \varphi \leq \varphi \circ \psi ,$$

as wanted.

Conversely, let us suppose that condition (3) holds.

Then, since $\varepsilon \leq \varepsilon$, one has

$$\varepsilon \leq \varphi \circ \varphi \leq \varphi \circ \varepsilon = \varphi .$$

This shows that one has

$$x \leq \varphi(x) \text{ for every } x \in P ,$$

i. e., C1 holds.

Moreover, since $\varphi \circ \varphi \leq \varphi$, one concludes that

$$\varphi(\varphi(x)) \leq \varphi(x) \text{ for every } x \in P .$$

On the other hand, from $t \leq \varphi(t)$ for every $t \in P$, it follows, by putting $t = \varphi(x)$,

$$\varphi(x) \leq \varphi(\varphi(x)) \text{ for every } x \in P ,$$

proving that C3 holds.

Finally, let $x \leq y$ and let ψ be the operator of P defined by the conditions

$$\begin{cases} \psi(z) = y , & \text{if } z \leq y ; \\ \psi(z) = z , & \text{if } z \not\leq y . \end{cases}$$

One has clearly $\varepsilon \leq \psi$ and from this it follows, by condition (3) and C3,

$$\varphi(x) = \varphi(\varphi(x)) \leq \varphi(\psi(x)) = \varphi(y) .$$

Consequently, condition C2 holds and the proof is complete.

3. It is also easy to see that the operator φ of the partially ordered set P is a closure operator, if and only if the following condition is satisfied:

(4) $\varepsilon \leq \varphi \circ \psi$ *is equivalent to* $\varphi \leq \varphi \circ \psi$.

In fact, if φ is a closure operator, from condition (2), it results that

$$x \leq \varphi(\psi(x)) \text{ is equivalent to } \varphi(x) \leq \varphi(\psi(x))$$

for every $x \in P$, and so (4) holds.

Conversely, one sees that condition (4) implies condition (2).

BIBLIOGRAPHY

[1] António Monteiro, *Caractérisation de l'opération de fermeture par un seul axiome*, Portugal. Math., 4 (1945), pp. 158-160.

[2] José Morgado, *A characterization of the closure operators by means of one axiom*, Portugal. Math., 21 (1962), pp. 155-156.

A Matemática — Um Diálogo Socrático (*)

Alfréd Rényi
Budapeste

SÓCRATES: Meu caro Hipócrates, procuras alguém?

HIPÓCRATES: Agora não, Sócrates, pois já encontrei quem procurava; eras tu. Procurei-te em muitos lugares. No ágora disseram-me que te tinham visto a passear ao longo das margens do rio Ilisso. Aqui vim ter contigo.

S: Bem, diz então porque vieste. E já que estás aqui, também quero perguntar-te algo acerca da nossa discussão com Protágoras. Ainda te lembras dela?

H: Como é possível que me faças uma tal pergunta? Desde então, não se passa um único dia que não pense nesse assunto. Vim hoje ter contigo, para te pedir o teu conselho, pois a discussão não me sai da lembrança.

S: Pelos vistos, meu caro Hipócrates, ambos queremos falar sobre a mesma questão; deste modo, os dois assuntos são um e só um. Parece que os matemáticos não têm razão quando afirmam que dois nunca é igual a um.

H: Dir-se-ia, Sócrates, que possuis o poder sobrenatural de adivinhar. De facto, eu tencionava precisamente falar contigo acerca da Matemática.

S: Meu caro Hipócrates, bem sabes que não sou matemático. Porque não pões essas tuas questões ao famoso Teodoro?

H: Deixas-me perplexo, Sócrates; és capaz de responder às minhas perguntas ainda antes de eu as ter formulado. Vim ter contigo para saber a tua opinião sobre se achavas bem que me tornasse aluno de Teodoro. Já uma vez vim ter contigo com a intenção de me tornar aluno de Protágoras; dessa vez fomos juntos ter com ele e tu dirigiste a discussão de tal maneira que se tornou claro que Protágoras nem mesmo sabia o que ensinava. De modo que mudei de opinião e resolvi não o seguir. Essa discussão ajudou-me a compreender o que não devia fazer, mas não me indicou o que devia fazer. É coisa que me faz pasmar. Depois disso, tenho estado em vários banquetes e tido conversas com outros da minha idade e é verdade que passei momentos agradáveis; mas só isso não me satisfaz.

(*) Trabalho publicado pela revista *Physics Today* em Dezembro de 1964, em língua inglesa, atendendo a várias sugestões para que o «Diálogo Socrático» fosse publicado, tornando-o portanto acessível a todos os que não tiveram o privilégio de escutar o discurso original do Professor RÉNYI, depois de um jantar que se efectuou durante a reunião conjunta da American Physical Society e da Canadian Association of Physicists, realizada em Agosto de 1963 em Edmonton, Alberta, Canada.

O Prof. ALFRÉD RÉNYI é um matemático, especialista em Teoria das Probabilidades e aplicações a várias ciências, nomeadamente à Física; é professor de matemática na Universidade de Budapeste e Director do Instituto de Investigação Matemática da Academia das Ciências da Hungria. O Prof. RÉNYI esteve em 1964, como professor-visitante na Universidade de Michigan, USA.

Desagrada-me a sensação de que sou ignorante e de que o meu conhecimento é incerto. Durante a discussão com Protágoras, certifiquei-me de que o meu conhecimento sobre certas noções familiares, como a virtude, a justiça e a coragem, está longe de ser satisfatório. Não obstante, parece que, neste particular, fiz progressos, pois passei a ver claramente a minha própria ignorância.

S: Satisfaz-me, meu caro Hipócrates, que compreendas tão bem. Eu próprio, muitas vezes digo que, só sei que nada sei. A diferença entre mim e os outros é que eu nem sequer imagino saber o que na realidade não sei.

H: Isso mostra claramente a tua sabedoria. Mas não me satisfaz. Tenho um forte desejo de alcançar um conhecimento exacto e sólido, e sem ele não poderei ser feliz; mas, ao mesmo tempo, hesito na espécie de conhecimento que devo tentar adquirir. Teéteto disse-me, há pouco tempo, que esta espécie de conhecimento só existe na Matemática e sugeriu-me que eu deveria aprender Matemática com Teodoro, seu mestre que, segundo ele próprio me disse, é quem mais sabe de números e geometria, em Atenas. Agora, não estou disposto a cometer o mesmo erro que fiz da outra vez, quando tinha resolvido ser discípulo de Protágoras. Por isso, diz-me, meu caro Sócrates, será certo que encontrarei esse conhecimento exacto que procuro, se aprender Matemática com Teodoro?

S: Se queres aprender Matemática, tu, filho de Apolodoro, certamente nada de melhor terás a fazer do que ir ter com Teodoro, meu amigo e a quem muito estimo. Mas tens de ser tu a decidir se queres ou não estudar Matemática. Ninguém melhor do que tu sabe do que precisa.

H: Porque te recusas a auxiliar-me, Sócrates? Porventura, te ofendi, sem o saber?

S: Compreendeste-me mal, meu jóvem amigo; não estou zangado contigo. Simplesmente, tens de ser tu a responder a uma questão para a qual, pela minha parte, não posso, de modo algum dar qualquer resposta. Quem tem que decidir o que quer fazer, somos nós. Ao meu alcance só estará, ser como a parteira, ou seja ajudar a tua decisão a nascer.

H: Meu bom Sócrates, por favor, não me recuses a tua ajuda, e se agora tens vagar, vamos começar imediatamente.

S: Assim seja, se assim o queres; vamos sentar-nos à sombra daquela árvore e começar. Mas primeiro diz-me: estás disposto a discutir da maneira que eu prefiro? Far-te-ei perguntas e tu responder-me-ás. E sabes que duma tal conversa não tirarás maior proveito do que ver mais nitidamente o que já sabes, e fazer florescer o conhecimento cujas sementes já estão na tua alma. Espero que não faças como o rei Dario que matou o chefe das suas minas porque ele apenas tinha conseguido tirar delas cobre, ao passo que o rei pensava que continham ouro. Espero que não esqueças que um mineiro apenas pode encontrar na mina o que lá está.

H: Juro que te não vou censurar. Mas, por Zeus, comecemos quando antes a escavar na mina.

S: Está bem. Então diz-me lá: sabes o que é a Matemática? Suponho que sabes o que é, visto ser aquilo que queres estudar.

H: Parece-me que qualquer criança sabe isso. A Matemática é uma das ciências, até mesmo uma das mais puras.

S: Não te pedi que tecesses elogios à Matemática, mas sim que me falasses sobre a sua natureza. Se, por exemplo, eu te tivesse perguntado que arte era a dos médicos, ter-me-ias respondido que esta arte se ocupa da saúde e das doenças e procura curar o mal e preservar a saúde. Tenho ou não razão?

H: Claro!

S: Então responde: a arte dos médicos ocupa-se de qualquer coisa que existe, ou não? Se não houvesse médicos, haveria doenças?

H: Certamente; até mesmo muitas mais do que há agora.

S: Vejamos outra espécie de arte; sejam, por exemplo, os astrónomos. Concordas comigo, quando afirmo que os astrónomos estudam os movimentos das estrelas?

H: Sem dúvida.

S: E se eu te perguntar se a astronomia se ocupa de qualquer coisa que existe, que respondes?

H: A minha resposta é afirmativa.

S: E haveria estrelas no mundo se não existissem os astrónomos?

H: Certamente que sim. E se Zeus na sua cólera destruísse toda a humanidade, as estrelas ainda continuariam a brilhar no céu durante a noite. Mas qual é a razão porque me falas de astronomia, em vez de me falares de Matemática?

S: Não estejas impaciente, meu bom amigo. Vamos considerar mais algumas artes, para depois podermos comparar com a Matemática. Como chamas tu ao homem que conhece os seres que vivem nas florestas e no fundo dos mares?

H: Chamar-lhe-ia um cientista que estuda os seres vivos da natureza.

S: E acreditas que esse homem estuda coisas que existem?

H: Sim, acredito.

S: E se eu te disser que todas essas artes se ocupam de coisas que existem, estás de acordo?

H: Completamente!

S: Então diz-me, meu jovem amigo, qual é o objecto da Matemática, quais são as coisas que os matemáticos estudam?

H: Fiz a mesma pergunta a Teéteto e ele respondeu-me que a Matemática estuda os números e as formas geométricas.

S: Bom, a resposta é clara, mas serias capaz de dizer que essas coisas existem?

H: Certamente que sim; como seria possível falar delas se não existissem?

S: Então diz-me: se não houvesse matemáticos haveria porventura números primos?

H: De facto, não sei o que hei-de responder. Parece claro que se os matemáticos raciocinam acerca dos números primos é porque eles existem, pelo menos na nossa consciência, mas se não houvesse matemáticos em parte alguma existiriam números primos.

S: Parece-te que somos levados a afirmar que os matemáticos estudam coisas que não existem?

H: Sim, parece-me que temos de admitir.

S: Investiguemos a questão sobre outro ponto de vista. Repara: escrevi o número 39 nesta tábua encerada. Podes vê-lo?

H: Sim, posso.

S: E podes tocar-lhe com a tua mão?

H: Certamente.

S: Mas então isso é possível, não obstante os números não terem existência?

H: Ó Sócrates, parece que queres passar-me uma rasteira. Vou desenhar, na mesma tábua encerada, um dragão com sete cabeças. Poderá deduzir-se que um tal dragão existe? Nunca encontrei ninguém que tivesse visto um dragão e estou convencido de que os dragões nem sequer existem, a não ser nos contos. Mas suponhamos que estou enganado e que de facto, algures, para além das colunas de Hércules, existem dragões vivos; ainda assim, esse facto nada tem a ver com o meu desenho.

S: É uma verdade o que dizes, Hipócrates, e eu concordo plenamente contigo. Mas quererá isso dizer que embora falemos acerca dos números e até os possamos escrever, mesmo assim, não existem no real?

H: Certamente.

S: Não tiremos conclusões precipitadas. Façamos antes um novo ensaio. Terei eu razão, quando afirmo que é possível contar os carneiros que estão aqui neste prado ou contar os barcos no porto do Pireu?

H: Sim, claro que é possível.

S: E será que os carneiros e os barcos existem?

H: Claro.

S: Mas então, se os carneiros existem, o seu número também deve ser qualquer coisa que existe.

H: Tu estás a divertir-te à minha custa, Sócrates. Os matemáticos não contam carneiros. Essa tarefa compete aos pastores.

S: Queres então dizer que os matemáticos estudam, não o número de carneiros ou de barcos, ou de outras coisas, mas os números em si mesmos e que portanto se ocupam de coisas que existem apenas em suas mentes.

H: Sim, era isso mesmo o que eu queria dizer.

S: Disseste-me que, de acordo com a opinião de Teéteto, os matemáticos estudam os números e formas geométricas. Como é que explicas o que são formas? Se te perguntasse se as formas geométricas existem, que responderias?

H: Certamente que existem. Podemos, por exemplo, ver a forma de um belo vaso e senti-la até com as mãos.

S: Contudo, ainda há uma dificuldade. Se olhares para um vaso, o que vês: o vaso em si ou a sua forma?

H: Ambas as coisas.

S: Será isso o mesmo que olhar para um cordeiro: vê-se simultâneamente o cordeiro e o pêlo?

H: A comparação parece-me bem escolhida.

S: Bom, eu penso que esta comparação é tão coxa como Hefaisto. Podes tosquiar o pêlo do cordeiro e depois disso vês separadamente o cordeiro tosquiado e o pêlo; poderás, de forma semelhante, separar a forma do vaso do próprio vaso?

H: Certamente que não, e duvido que alguém afirme que o possa fazer.

S: E, não obstante, ainda acreditas que podes ver uma forma geométrica.

H: Começo a duvidar.

S: Além disso, se os matemáticos iniciassem os seus estudos pelas formas dos vasos, não teríamos que lhes chamar oleiros?

H: Certamente.

S: E se os matemáticos se dedicassem a estudar as formas dos vasos, não seria porventura Teodoro o melhor oleiro? Tenho ouvido muita gente elogiá-lo, mas ainda ninguém me disse que ele percebe qualquer coisa de olaria. Duvido mesmo que ele seja capaz de fazer uma panela. Acaso os matemáticos se ocupam com as formas das estátuas ou dos edifícios?

H: Se o fizessem seriam escultores e arquitectos.

S: Bom, meu amigo, chegámos à conclusão de que os matemáticos quando estudam a geometria não estão interessados na forma de objectos existentes, tais como vasos, mas sim em formas que apenas existem no seu pensamento. Estás de acordo?

H: Tenho de concordar.

S: Depois de estabelecermos que os matemáticos se ocupam de coisas que não existem no real, mas apenas no pensamento, investiguemos a afirmação de Teéteto, que há pouco mencionaste, de que o conhecimento matemático é o mais certo e o que nos inspira maior confiança, comparado com o conhecimento fornecido por qualquer outro ramo da ciência. Poderás dizer-me se Teéteto te deu alguns exemplos para corroborar a sua afirmação?

H: Sim, ele disse-me, por exemplo, que ninguém pode determinar exactamente a distância de Atenas a Esparta. Claro que aqueles que já percorreram o caminho entre as duas cidades poderiam chegar a um acordo quanto ao número de dias que demoravam, mas a distância exacta, essa não pode ser determinada. Por outro lado, utilizando o teorema de Pitágoras pode determinar-se o comprimento da diagonal de um quadrado. Teéteto também me disse que é impossível indicar exactamente o número dos habitantes da Grécia. Mesmo que alguém pudesse contar todos os habitantes, nunca chegaria a um número exacto; durante a contagem certamente morreriam alguns velhos e nasceriam algumas crianças, de modo que o número total que alcançasse seria, tão só, aproximadamente correcto. Mas se perguntares a um matemático qual o número de arestas de um dodecaedro regular, ele dir-te-á que o dodecaedro é limitado por 12 faces, cada uma com 5 arestas, o que faz um total de 60; mas como cada aresta é comum a 2 faces, e portanto foi contada duas vezes, as arestas de um dodecaedro são em número de 30, e este resultado está fora de qualquer discussão.

S: Ainda te deu mais alguns exemplos?

H: Bastantes, embora não me possa recordar de todos eles. Disse-me ainda que não é possível encontrar duas coisas exactamente iguais: não há dois ovos iguais; e até mesmo as colunas do templo de Poseidon são ligeiramente diferentes umas das outras. Mas pode assegurar-te que as duas diagonais de um rectângulo são precisamente iguais. Além disso, citou-me ainda Heraclito, que afirmou que tudo se transforma continuamente e que o conhecimento rigoroso apenas é possível relativamente àquelas coisas que nunca mudam, como, por exemplo, o número que é sempre par ou ímpar, a linha recta ou o círculo.

S: Basta. Estes exemplos convencem-me de que, na Matemática, se pode alcançar um conhecimento que está fora de quaisquer dúvidas, ao passo que nas outras ciências ou no dia-a-dia tal resultado é impossível. Tentemos resumir os resultados da nossa investigação acerca da natureza da Matemática. Estarei eu certo quando digo que chegámos à conclusão de que os estudos que são objecto da Matemática se processam sobre coisas que não existem, mas que é possível descobrir toda a verdade acerca delas?

H: Sim, é essa a conclusão que estabelecemos.

S: Mas, por amor de Zeus, meu caro Hipócrates, diz-me se não é uma coisa misteriosa poder saber-se mais acerca de coisas que não existem do que daquelas que, de facto, existem.

H: Se pões a questão desse modo, é de facto um mistério. Estou convencido de que há qualquer erro nos nossos argumentos.

S: Não, pois procedemos na nossa dedução com o maior cuidado e controlámos os nossos argumentos, passo a passo. Não é possível que, na nossa dedução, esteja envolvido erro algum. Mas escuta: parece-me que me lembrei agora de qualquer coisa que nos pode ajudar a decifrar este enigma.

H: Diz-mo depressa, pois estou verdadeiramente confuso.

S: Esta manhã estava eu no átrio da casa do segundo arconte, quando a mulher de um carpinteiro da aldeia de Pito foi acusada de ter atraiçoado e depois assassinado o marido, com a ajuda do amante. A mulher protestou e jurou por Artemisa e Afrodite que estava inocente, que nunca tinha amado ninguém senão a seu marido e que o marido fora assassinado pelos piratas. Muitos dos presentes foram chamados como testemunhas: uns disseram que a mulher era culpada, outros que ela estava inocente. Era impossível descobrir aquilo que na realidade se passara.

H: Estás de novo a troçar de mim? Primeiro, lanças a confusão completa no meu espírito, e agora, em vez de me ajudares a descobrir a verdade, ainda me contas essas histórias!

S: Não te arrelies, meu amigo, pois

tenho sérias razões para falar desta mulher, cuja culpabilidade era impossível determinar. Mas uma coisa é certa: esta mulher existe. Vi-a com os meus olhos e podes perguntar a qualquer dos que lá estiveram, pois entre os presentes encontravam-se muitos cidadãos respeitáveis que, durante a sua vida, nunca mentiram. Podes perguntar a qualquer deles.

H: Para mim, o teu testemunho é suficiente, meu caro Sócrates. Tomemos como certo o facto dessa mulher existir. Mas que tem isso a ver com a Matemática?

S: Mais do que imaginas. Mas antes, diz-me: conheces a história da Agamémnon e de Clitemnestra?

H: Todos conhecem essa história. Assisti até, no teatro, à exibição da trilogia de Ésquilo, no ano passado.

S: Então, conta-me a história por poucas palavras.

H: Enquanto Agamémnon, rei de Argos, combatia em Tróia, sua mulher Clitemnestra cometeu adultério com Égisto, primo de seu marido. Quando, depois da queda de Tróia, Agamémnon regressou; então, a mulher e o amante assassinaram-no.

S: Diz-me Hipócrates: é absolutamente certa a culpa de Clitemnestra?

H: Não percebo porque me fazes tais perguntas. Não pode haver dúvidas acerca da história. Já Homero contou que, quando Ulisses visitou o mundo dos mortos, encontrou Agamémnon, que lhe contou ele próprio o seu triste destino.

S: Mas estás certo de que Clitemnestra e Agamémnon, bem como todos os outros personagens da história existiram realmente?

H: Talvez se eu fosse dizer aquilo que penso em público me votassem ao ostracismo; porém, a minha opinião é de que hoje, após tantos séculos, é impossível provar se as histórias que Homero narrou são verdadeiras ou falsas. Mas isto não é o ponto mais importante: quando te disse que Clitemnestra era culpada não me quiz referir à Clitemnestra real, física (quer uma tal pessoa tenha de facto vivido ou não), mas sim à Clitemnestra da nossa tradição homérica, isto é, à Clitemnestra da trilogia de Ésquilo.

S: Posso então dizer que acerca da Clitemnestra real nada sabemos; até mesmo a sua existência é incerta, mas relativamente à Clitemnestra que é uma das personagens da trilogia de Ésquilo, temos a certeza de que ela era culpada do assassínio de Agamémnon, porque é isso o que Ésquilo nos conta. Não será assim?

H: Sim, decerto. Mas porque insistes em tudo isso?

S: Já vais ver. Deixa-me agora reunir o resultado das nossas descobertas: a respeito da mulher sensual e sanguinária que foi hoje julgada em Atenas, é pràcticamente impossível descobrir se é culpada ou não, ao passo que relativamente a Clitemnestra, personagem que faz parte de uma peça de teatro, e que pròvàvelmente nunca existiu, a sua culpa não aparece dúvidas. Concordas?

H: Agora parece-me que começo a compreender o que queres dizer. Mas julgo preferível que sejas tu a tirar as conclusões.

S: A conclusão é a seguinte: temos um conhecimento muito mais seguro acerca de pessoas que existem apenas na nossa imaginação, como por exemplo os personagens de uma peça de teatro, do que de pessoas que realmente existem. Se afirmamos que Clitemnestra era culpada, isso resulta da maneira como Ésquilo a imaginou e depois a apresentou na sua peça. Relativamente à Matemática a situação é exactamente a mesma: podemos ter a certeza de que as diagonais de um rectângulo são iguais porque isso é uma consequência da definição de rectângulo, tal como é apresentada pelos matemáticos.

H: Queres com isso dizer, Sócrates, que o resultado paradoxal a que chegámos é, de facto, verdadeiro, ou seja, o conhecimento que se pode chegar a ter acerca de coisas que não existem — como, por exemplo, as que são o objecto da Matemática — é muito mais seguro, em face do que pode alcançar-se relativamente a objectos reais da Natureza. Parece-me descortinar também a razão disso: as noções por nós criadas são, pela sua própria natureza, integralmente conhecidas, e é possível chegar a apreender-se toda a verdade acerca delas, porque são exactamente como as imaginámos, uma vez que não possuem qualquer outro suporte de realidade fora da nossa imaginação. Contudo, os objectos que existem no mundo real não são idênticos às representações que deles temos, pois estas são sempre incompletas e aproximadas e, portanto, o nosso conhecimento acerca das coisas reais nem pode ser completo nem absolutamente certo.

S: Essa é a verdade, meu jóvem amigo, e tu conseguiste enunciá-la melhor do que eu.

H: O mérito pertence-te, Sócrates, pois foste tu que me guiaste até eu perceber tais razões. Já compreendo não só que Teéteto tinha toda a razão quando me dizia que se eu queria obter um conhecimento certo, teria de estudar Matemática. Até mesmo se me tornou claríssimo o motivo porque tudo isso é verdade. Mas se me conduziste até aqui com tanta paciência não me abandones ainda, porque uma das minhas dúvidas, precisamente a mais importante, ainda está por esclarecer.

S: Que dúvida é essa?

H: Sócrates, por favor, lembra-te que vim aqui para te pedir o teu conselho sobre se deveria ou não estudar Matemática. Ajudaste-me a compreender que a Matemática, e só ela, me pode dar aquela espécie de conhecimento absoluto que ambiciono. Mas, para que serve afinal esse conhecimento? Com efeito, se alguém adquire conhecimentos acerca do mundo real, ainda que esses conhecimentos não sejam completamente exactos e sejam até incompletos, são, apesar disso, de grande valor não só para o próprio como para a comunidade. Mesmo conhecimentos relativos a coisas longínquas, como as estrelas, são necessários, por exemplo, para a navegação durante a noite. Mas, qual será a utilidade do conhecimento de coisas que não existem, como é o caso da Matemática? Ainda mesmo que este conhecimento seja completo e fora de quaisquer dúvidas, para que servirá um conhecimento de coisas que na realidade não existem?

S: Meu bom amigo, estou certo que conheces a resposta, mas queres certificar-te se eu a sei ou não.

H: Por Hércules! Não sei encontrar resposta para esta pergunta. Por favor, auxilia-me.

S: Vamos tentar. Chegámos à conclusão de que as noções da Matemática são criadas pelo próprio matemático. Diz-me: será que o matemático escolhe estas noções de maneira completamente arbitrária, a seu bel-prazer?

H: Como te disse, ainda não sei muito de Matemática. Mas parece-me que o matemático tem plena liberdade para escolher os objectos que fazem parte do seu estudo mental, tal como o poeta é livre para escolher as imagens dos seus versos. E, enquanto o poeta descreve as suas figuras com as características pessoais que mais lhe agradam, o matemático pode dotar as noções que ele próprio criou com as propriedades que desejar.

S: Se isso fôsse verdade, haveria tantas Matemáticas quantos os matemáticos. Como explicas que os matemáticos estudem todos as mesmas noções e problemas? Como explicas que matemáticos, vivendo longe uns dos outros e sem quaisquer contactos, descubram, independentemente uns dos outros, as mesmas verdades? E nunca me constou que dois poetas escrevessem o mesmo poema.

H: Eu também nunca ouvi tal coisa, mas

lembro-me de Teéteto me ter contado que tinha descoberto um teorema interessante sobre distâncias incomensuráveis; mostrou, em seguida, o resultado ao seu mestre, Teodoro, que lhe mostrou uma carta de Arquitas, onde o mesmo teorema estava reproduzido, quase textualmente.

S: Na poesia isso seria impossível. Agora nota que se esconde aqui um problema. Mas vamos continuar: como explicas que os matemáticos de diferentes países possam normalmente chegar a acordo àcerca da verdade, ao passo que, por exemplo, no que diz respeito à política, não só os persas e os espartanos têm ideias completamente diferentes das nossas, em Atenas, como nós próprios, os atenienses, muitas vezes, não nos entendemos?

H: A essa questão posso eu responder: em assuntos de política, todos os cidadãos estão pessoalmente interessados e os interesses pessoais de cada um são, frequentemente, contraditórios. Esta é a razão pela qual muitas vezes não é possível chegar a um acordo. Por outro lado, o matemático é guiado ùnicamente pelo seu desejo de descobrir a verdade.

S: Queres dizer que os matemáticos tentam descobrir a verdade, que é completamente independente das suas próprias pessoas?

H: Sim!

S: Bom, mas, desse modo, estamos enganados quando pensamos que os matemáticos escolhem os temas do seu estudo segundo a sua vontade pessoal. Parece que esses temas sobre os quais incidem os estudos dos matemáticos têm uma existência independente das suas próprias pessoas. Temos que solucionar este novo enigma.

H: Desta vez não vejo por onde começar.

S: Se ainda tens paciência, vamos ambos tentar. Diz-me: qual é a diferença entre o marinheiro que encontra uma ilha desconhecida e o pintor que descobre uma cor que antes dele ninguém usara?

H: Parece-me que ao tal marinheiro se pode chamar descobridor, enquanto o pintor é um inventor. O marinheiro descobre uma ilha que, antes dele, já existia mas era desconhecida; quanto ao pintor, este inventa uma nova cor que antes disso nunca tinha existido.

S: Ninguém responderia melhor do que tu. Mas diz-me: o matemático que chega ao conhecimento duma nova verdade descobre-a ou inventa-a? Podemos classificá-lo como um descobridor, como o marinheiro, ou será ele um inventor, como o pintor?

H: Parece-me que o matemático é mais parecido com o descobridor: ele procede como o navegador arrojado que navega no oceano desconhecido do pensamento e explora as suas costas, ilhas e correntes.

S: Muito bem, estou completamente de acordo contigo. No entanto, eu diria ainda que o matemático é, em certa medida, também um inventor, especialmente quando inventa novos conceitos. Mas, o descobridor tem de possuir também qualquer coisa do inventor. Se, por exemplo, o navegador quer ir a lugares onde nenhum outro navegador foi capaz de chegar antes dele, tem, para isso, que construir um barco melhor do que os barcos usados por outros navegadores. Os conceitos novos que os matemáticos inventam são como os barcos novos que descobrem mais para diante no oceano imenso do pensamento.

H: Meu caro Sócrates, ajudaste-me a encontrar a resposta para uma pergunta que se me afigurava tão difícil. O fim principal do matemático é explorar os segredos e mistérios do oceano do pensamento humano. Estes existem, independentemente do homem que é matemático, embora não da humanidade em conjunto. O matemático tem uma certa independência no inventar de novos conceitos, que utiliza como instrumentos, e parece-me que a poderá orientar como melhor entender. Mas já não tem liberdade absoluta na invenção destes novos conceitos, pois estes têm de ser úteis para o seu trabalho. O navegador, se quiser, pode construir qualquer espécie de barco, mas é evidente que não vai cometer a loucura de construir um barco que possa ser destruído pelo primeiro temporal. Agora, tudo me parece claro.

S: Se agora consegues ver tudo claro, tenta de novo encontrar uma resposta para a pergunta: qual é o objecto da Matemática?

H: Chegámos à conclusão de que, ao lado do mundo em que vivemos, existe um outro mundo, o mundo do pensamento humano, e que o matemático é como um navegador destemido que explora esse outro mundo, sem sucumbir às preocupações, perigos e aventuras que o aguardam.

S: Meu amigo, o teu ardor juvenil quase me lança por terra; lamento porém ter de te dizer que, no teu entusiasmo, esqueceste alguns pontos que deveríamos focar durante a nossa conversa.

H: Quais?

S: Não te quero desmoralizar, mas parece-me que ainda não respondeste à pergunta mais importante, ou seja: qual é a utilidade de explorar o oceano maravilhoso do pensamento humano?

H: Meu caro Sócrates: como sempre, mais uma vez tens razão. Mas não poderias, desta vez, pôr de parte o teu método e dar-me a resposta imediatamente?

S: Não meu amigo, ainda que o pudesse fazer, não o faria, e procederia assim para teu bem. O conhecimento que se adquire sem trabalho é quase sempre inútil. Apenas chegamos a compreender aquilo que, quando muito, com algum auxílio externo, fomos nós próprios a aprender, tal como a planta que só pode utilizar a água que extrai do solo através das próprias raízes.

H: Óptimo, continuemos então com a nossa investigação usando o mesmo método, mas ajuda-me, ao menos numa das questões.

S: Voltemos atrás, até à altura em que nos encontrávamos quando estabelecemos que os matemáticos não se ocupam com o número de carneiros, de barcos ou de qualquer outra coisa concreta, mas com os números em si mesmos. Não te parece, porém, que descobertas feitas pelos matemáticos a respeito dos números puros é também válido para os números de coisas cuja existência é autêntica? Por exemplo: os matemáticos estabeleceram que dezassete é um número primo. Não terá isto como consequência que a única maneira de distribuir dezassete carneiros por um certo número de pessoas, de tal maneira que seja igual o número de carneiros que cabe a cada uma, é dar os dezassete carneiros a dezassete pessoas, ou seja, um carneiro a cada pessoa?

H: Isso é verdade.

S: Bom, e relativamente à geometria? Não poderá o mesmo raciocínio ser aplicado à construção de casas, ao fabrico de vasos ou na determinação da quantidade de cereais que um navio pode transportar?

H: Sim, pode e é aplicado, embora me pareça que, para os fins práticos do simples artífice, não é necessário muita Matemática. As regras mais simples, que já eram conhecidas pelos servidores dos faraós no antigo Egipto, bastam para quase todos esses fins e as novas descobertas, de que Teéteto me falou com tanto entusiasmo, não são usadas nem sequer são necessárias na vida corrente.

S: Talvez ainda o não sejam, mas virão certamente a ser usadas no futuro.

H: Mas a mim, interessa-me o presente.

S: Se te queres tornar matemático, terás de compreender que trabalharás, na maior parte das vezes, para o futuro. Mas regressemos à questão mais importante: vimos que o conhecimento de um outro mundo, o mundo do pensamento, isto é, de coisas que não existem, no sentido corrente da palavra, pode ser usado na vida de todos os dias, para responder a perguntas do mundo real. Não é surpreendente?

H: Mais do que isso: tem de ser assim; aí está um verdadeiro milagre!

S: Talvez não seja tão misterioso como parece e, se abrirmos a concha desta questão, vamos encontrar dentro dela uma pérola verdadeira.

H: Por favor, meu caro Sócrates, não me fales tantos enigmas, como faz a pitonisa.

S: Diz-me então: se alguém fosse viajar em países estrangeiros muito afastados e lá tivesse visto muitas coisas e adquirido junto de outros uma experiência nova, e depois regressasse à sua cidade e utilizasse essa experiência para, sàbiamente, aconselhar os seus concidadãos, achas que seria isso uma coisa surpreendente?

H: Nem por isso.

S: Ainda mesmo que os países que este viajante tivesse visitado ficassem muito longe e fossem habitados por povos completamente diferentes, falando outras línguas e adorando outros deuses.

H: Nem mesmo neste caso, pois há muito de comum entre povos diferentes.

S: Agora diz-me: caso se reconhecesse que o mundo da Matemática, não obstante as suas características próprias, é, de certo modo, semelhante ao nosso mundo real, ainda considerarias miraculoso o facto da Matemática poder ser aplicada ao estudo do mundo real?

H: Nesse caso, não. Mas não vejo qualquer semelhança entre o mundo real e o mundo imaginário da Matemática.

S: Vês aquele penhasco na outra margem do rio, além, onde o rio transborda e forma um lago?

H: Sim, vejo.

S: E vês a imagem da rocha reflectida na água?

H: Certamente que sim.

S: Então diz-me: Qual é a diferença entre a rocha e a sua imagem?

H: A rocha é um pedaço resistente composto de uma matéria rija. É aquecida pelo Sol. Se lhe tocares, sentirás que é áspera. A imagem reflectida na água não se pode tocar; se lhe puzer a mão em cima, apalpo apenas a água fria. É um facto que a imagem reflectida não existe na realidade, é uma ilusão e nada mais.

S: E não haverá nada de comum entre a rocha e a sua imagem reflectida?

H: Sim, de certo modo, há: a imagem reflectida reproduz fielmente a rocha; até os pormenores mais insignificantes são bem visíveis na imagem reflectida. Mas que temos nós a ver com tudo isto? Queres dizer que o mundo da Matemática é uma imagem reflectida do mundo real no espelho do nosso pensamento?

S: Tu o disseste e muito bem.

H: Mas como é isso possível?

S: Vamos recapitular como se desenvolvem os conceitos abstractos da Matemática. Dissemos que o matemático se ocupa de números puros e não de números resultantes da contagem de objectos reais. Mas parece-te que alguém que nunca tenha contado objectos reais possa aprender a noção abstracta de número? Quando uma criança aprende a contar, conta primeiro pedras e pausinhos; só quando já sabe que duas pedras mais três pedras fazem, no total, cinco pedras e que o mesmo é válido para paus ou moedas, é que percebe que dois e três são cinco. A situação é, na sua essência, a mesma com a geometria. A criança aprende a noção de esfera através de experiências realizadas com objectos redondos, como as bolas. O ser humano desenvolveu de maneira semelhante todas as noções fundamentais da Matemática. Estas noções cristalizaram-se a partir dos conhecimentos do mundo real e, deste modo, não é surpreendente, antes mesmo natural que apresentem alguns vínculos da sua origem, tal como as crianças são parecidas com os pais. E, exactamente como as crianças, que quando crescem se tornam o amparo dos pais, do mesmo modo, qualquer ramo da Matemática, desde que esteja suficientemente desenvolvido, torna-se mais tarde um instrumento útil para exploração do mundo real.

H: Agora é que compreendo perfeitamente como é que o conhecimento das coisas que não existem, e fazem parte do mundo da Matemática, pode ser usado na vida diária. Prestaste-me um grande serviço em me ajudares a compreender isso.

S: Invejo-te, meu caro Hipócrates, porque ainda tenho dúvidas acerca de uma coisa, sobre a qual gostaria de conhecer toda a verdade. Mas talvez tu me possas auxiliar.

H: Fá-lo-ia com prazer, mas lamento verificar que estás de novo a rir-te de mim. Não me envergonhes, pedindo-me ajuda, mas diz-me francamente qual é, desta vez, a questão que esqueci.

S: Serás tu a descobri-la, se tentares reunir os resultados da nossa discussão.

H: Bom, quando se tornou claro que a Matemática é capaz de dar um conhecimento certo sobre um outro mundo, diferente do mundo em que vivemos, não se resolveu a questão da utilidade desse conhecimento. Agora descobrimos que o mundo da Matemática não é nada mais do que o reflexo do mundo real no nosso pensamento e daqui se conclui que todas as descobertas no mundo da Matemática nos dão alguma informação sobre o mundo real. Estou completamente satisfeito com esta resposta.

S: E se eu te disser que a resposta não está completa? Digo-to, não porque te queira atrapalhar, mas porque estou certo de que, mais cedo ou mais tarde, acabarias tu próprio por levantar esta questão e te aborrecerias comigo por não te ter chamado a atenção para o facto. E depois virias perguntar-me: «Diz-me, Sócrates, faz sentido estudar a imagem reflectida, quando podemos estudar o próprio objecto?».

H: Bom, tens inteira razão, pois esta pergunta é óbvia. Tu és um feiticeiro, Sócrates, e com algumas palavras podes confundir qualquer pessoa. Além disso, és capaz de fazer ruir todo um edifício mental construído com o maior cuidado só com uma perguntinha inocente. Claro que eu diria que se podemos olhar para o objecto original, não faz sentido olhar para a imagem reflectida. Mas parece-me que o nosso modelo falha neste ponto. Há, de certeza, uma resposta para isto, mas nem sequer a vislumbro.

S: As tuas suspeitas são certas e o paradoxo surgiu porque nos agarrámos demasiado ao modelo da imagem reflectida. Um modelo é como um arco: quando se estica demasiado acaba por se partir. Deixemos este e escolhamos um outro modelo. Certamente sabes que os viajantes e marinheiros tiram muitas vantagens do uso dos mapas.

H: Eu próprio tenho experiência disso. Queres dizer que a Matemática fornece uma imagem do mundo real?

S: Tu o disseste. És agora capaz de responder à pergunta: qual é a vantagem que há em olhar para o mapa, em vez de olhar para a paisagem?

H: Isso é claro; usando o mapa podemos considerar grandes distâncias que só poderiam ser cobertas viajando durante muitas semanas ou meses. O mapa não nos mostra todos os pormenores, mas apenas as coisas mais importantes e é exactamente essa a razão por que é útil no caso de tencionarmos fazer uma grande viagem.

S: Muito bem; no entanto, há ainda mais alguma coisa que agora me ocorreu.

H: Qual é?

S: Há ainda outra razão para que seja útil o estudo da imagem matemática do universo. Se os matemáticos descobrem alguma propriedade do círculo, isso logo nos dá alguma informação sobre qualquer objecto de forma circular. Deste modo, o método da Matemática permite-nos tratar, ao mesmo tempo, de coisas diversas.

H: Que me dizes aos exemplos seguintes: se alguém olha para uma cidade do cimo de uma montanha vizinha consegue ter uma visão melhor e mais compreensível do que se percorrer todas as suas tortas ruazinhas. Do mesmo modo, o general que, do topo duma colina, observa os movimentos do exército inimigo tem uma imagem mais nítida da situação do que o soldado que na primeira linha apenas vê quem se encontra na sua frente.

S: Bom, agora ultrapassaste-me na invenção de novos modelos, mas como não quero ficar para trás, deixa-me ainda juntar uma parábola. Recentemente vi um quadro pintado por Aristófon, o filho de Aglaófon, e o pintor preveniu-me: «Se te aproximas assim tanto do quadro, Sócrates, apenas verás umas manchas coloridas, mas não conseguirás ver o quadro todo».

H: Claro que ele tinha razão, e tu também, quando não deixaste terminar a nossa discussão antes de termos chegado ao cerne da questão. Mas parece-me que já é altura de regressarmos à cidade, pois já as sombras da noite estão a cair e eu tenho fome e sede. Mas se ainda tens alguma paciência, gostaria de te perguntar mais uma coisa, enquanto caminhamos.

S: Muito bem, vamos andando e tu podes fazer a tua pergunta.

H: A nossa conversa deixou-me completamente convencido de que tenho de começar a estudar Matemática e estou-te muito grato por teres contribuído para isso. Mas diz-me: porque não te dedicas à Matemática? A avaliar pelo teu profundo conhecimento da Natureza real e da importância da Matemática, estou certo que ultrapassarias todos os outros matemáticos helénicos, caso te concentrasses neste domínio. Se o quisesses, teria uma grande alegria em te seguir, como teu discípulo, em Matemática.

S: Não, meu caro Hipócrates, isso não me diz respeito. Teodoro sabe muito mais de Matemática do que eu e não encontrarás nenhum mestre melhor do que ele. Quanto à tua pergunta, porque não sou matemático, vou indicar-te as razões. Não oculto que tenho uma grande consideração pela Matemática. Penso mesmo que nós, os helenos, em nenhuma outra arte fizemos progressos mais importantes do que na Matemática, e apenas vamos no início. Se nos não exterminássemos em guerras mesquinhas alcançaríamos resultados maravilhosos, como descobridores e inventores. Perguntaste-me porque é que eu não queria fazer parte daqueles que desenvolvem esta ciência maravilhosa. De facto, eu também sou uma espécie de matemático, apenas de um género diferente. Uma voz interior (talvez se lhe possa chamar um oráculo), que sempre escuto com atenção, perguntou-me há muitos anos: «Qual é a origem dos progressos notáveis feitos pelos matemáticos na sua nobre ciência?» E respondi então: «Julgo que a origem dos bons êxitos dos matemáticos está no método que usam: o nível avançado da sua lógica, a sua competição uns com os outros, sem o menor compromisso relativamente à verdade; o seu hábito de começar sempre pelos primeiros princípios, definindo exactamente todas as noções usadas e evitando as auto-contradições». A minha voz interior respondeu: «Muito bem, Sócrates, mas porque pensas que este método de pensar e argumentar só pode ser usado para estudar números e formas geométricas? Porque é que não tentas convencer os teus concidadãos a usar o mesmo rigor lógico noutros campos, por exemplo na filosofia e na política, na discussão dos problemas da vida pública e privada de todos os dias?» E desde esse dia, é o que sempre tenho tentado fazer. Na nossa discussão com Protágoras, como decerto te lembras, demonstrei que quem se julga sábio, é, muitas vezes, tolo e ignorante e aos seus argumentos faltam alicerces sólidos pois que, ao contrário dos matemáticos, usam noções que não são convenientemente definidas e que não perceberam completamente. No desenvolvimento desta actividade, quase todos se tornaram meus inimigos. Este facto não é surpreendente pois sou como que um crítico, sempre atento a chamar a atenção aos que são indolentes a pensar e usam ociosamente termos obscuros. E as pessoas não gostam daqueles que constantemente lhes lembram os erros que não podem ou não querem corrigir. Chegará o dia em que cairão sobre mim para me exterminarem. Mas até esse dia, continuarei a seguir o chamamento dessa voz interior. Entretanto, tu irás ter com Teodoro e segui-lo-ás!

A Estatística, Molière e Henry Adams*

William Kruskal
Chicago

I

Um dos perigos profissionais ao qual nós, os estatísticos, estamos expostos vislumbra-se no decorrer de um acontecimento social, por exemplo, um jantar elegante. Suponhamos que fiquei sentado junto de uma jóvem encantadora com quem travei conhecimento nessa reunião, que ela se volta para mim, com um sorriso atraente e, à guiza de quem pretende iniciar uma conversa que destrua a barreira de gêlo ainda existente entre nós, me pergunta: «Agora diga-me: qual é a sua profissão?»

Ora, é forçoso que lhe diga a verdade; de modo que lhe respondo que sou estatístico. Isso, no entanto, é normalmente a ruína do que poderia vir a ser uma bela conversa, pois em 86 °/₀ dos casos o sorriso da jóvem desaparece, enquanto ela se volta para o meu «rival», sentado do outro lado dela e eu, abandonado e ferido na minha dignidade incompreendida, não tenho outra solução do que atacar o frango assado que jaz à minha frente.

Outros há que, embora pertencendo ao mundo da Estatística, descobriram métodos mais efectivos, embora menos verdadeiros, de ladear este problema. Assim, há alguns colegas estatísticos que, quando se lhes pergunta o que fazem, respondem que são matemáticos; isto é apenas um começo de conversa um pouco melhor do que o anterior, mas tem o mérito de não ser uma mentira descarada. Outros ainda evadem-se cobardemente à questão e respondem: «Não me ocupo de nada com interesse. Fale-me antes de si». A primeira parte desta declaração é uma mentira manifesta e hoje vou tentar explicar alguma coisa do que é a Estatística, por que nós, os estatísticos, a consideramos uma ciência fascinante e a razão pela qual muitos mais estatísticos convenientemente treinados são de necessidade premente.

---

* O presente artigo foi originàriamente publicado em língua inglesa pela Revista *The Centennial Review*, Vol IX, N.º 1, pp. 79-96, de 1965. Trata-se de uma lição apresentada dentro do âmbito do «Programa de Professores-Visitantes de Estatística, em 1963-64», financiado pela Fundação Nacional para a Ciência dos Estados Unidos da América (National Science Foundation) e patrocinado pela COPSS. A preparação desta lição foi financiada em parte por um Subsídio para Fins de Investigação (Research Grant No. NSF-GP 609) da Divisão de Engenharia e de Ciências Matemáticas e Físicas da referida Fundação Nacional para a Ciência.

Nota do Tradutor: A COPSS (Committee of Presidents of Statistical Societies), da qual fazem parte os Presidentes e Secretários das principais associações profissionais de Estatística dos Estados Unidos — nomeadamente a Associação Americana de Estatística (American Statistical Association), o Instituto de Estatística Matemática (The Institute of Mathematical Statistics) e a Sociedade de Biometria, Região Oriental da América do Norte (Biometric Society, Eastern North American Region) — tem, entre outras missões, as de coordenar o trabalho destas sociedades de Estatística e a elaboração anual do «Programa de Professores-Visitantes de Estatística», patrocinado pela COPSS.

Aquele contratempo do jantar acima referido nunca sucede aos meus conhecidos, que são poetas, físicos, exploradores em África ou vendedores de carros usados. O que é que haverá acerca da palavra «Estatística» que, com tanta frequência, provoca um silêncio desmedido?

A algumas pessoas esta palavra faz lembrar uma espécie de feiticeiros-alquimistas, sentados em bancos enormes, com uma coloração esverdeada nos olhos, passando toda a vida a adicionar colunas intermináveis de números. Como há quem possa interessar-se por tal actividade?

Outros, imaginam o estatístico como um fanático de factos que se exprimem por números, um dos tais que, sem pestanejar, é capaz de dizer imediatamente a extensão do rio Amazonas, a população de Viena de Áustria em 1892, o número médio de crianças numa família americana, arredondado até ao centésimo, etc.

Ainda para outros, o estatístico é o que analisa as cotações da bolsa ou estuda balancetes ou contas de ganhos e perdas, no intuito de elaborar conclusões que pròvàvelmente não serão tomadas em consideração por um em cada cinquenta capitalistas.

Claro que há pessoas de cada um destes tipos; são cidadãos bastante úteis cujo trabalho está, de facto, muitas vezes relacionado com problemas estatísticos. Mas o que é certo é que normalmente *não* são estatísticos no sentido em que vamos aqui usar o termo.

Dar definições exactas e concisas de uma certa disciplina é tarefa cada vez mais difícil: de uma maneira típica ou se trata de aforismos, que podem divertir, mas não dão informação alguma [1], ou são verdadeiros relatos de generalidades vagas. Mas temos de tentar uma: a Estatística, pelo menos como a consideramos, é o estudo e a aplicação, baseados em informações, de métodos, com vista a alcançar conclusões acerca do mundo real, a partir de observações incertas. Esta definição é muito ampla e o seu conteúdo terá de ser limitado de várias maneiras, mas, para começar, será o suficiente. Nesta definição as palavras-chave são «métodos» e «incertas». Na Estatística ocupamo-nos de métodos, das suas características, de como os escolher no caso de poder haver alternativas, de conceitos de optimização. Na nossa profissão também estamos ligados à incerteza dos dados observados, e tal incerteza é saliente. Por esta razão, muitos dos estudos estatísticos modernos são feitos em termos de modelos probabilísticos para obter os dados, isto é, estudamos métodos de chegar a conclusões baseados numa variedade de suposições acerca da maneira como os dados podiam ter sido observados, no decorrer de um mecanismo casual.

A Estatística teórica é o estudo abstracto de tais métodos; a Estatística aplicada é a aplicação dos métodos, feita à luz da teoria.

Muitos se recordam certamente dum personagem famoso de uma das peças de MOLIÈRE, um tal Monsieur JOURDAIN. Pois bem, este Monsieur JOURDAIN acreditava plenamente na cultura, mas era tão ingénuo e ignorante que as suas tentativas para se educar a si próprio eram caricatas, ainda que tocadas por uma certa humanidade. Uma das partes mais interessantes da peça de MOLIÈRE é, na nossa opinião, aquela em que o nosso Monsieur JOURDAIN descobre, com satisfação incalculável, que durante toda a vida falou sempre em prosa.

Do mesmo modo, cada um de nós esteve, desde que nasceu ocupado durante toda a vida com a Estatística, na medida em que cada um de nós procurou alcançar conclusões, baseando-se em observações empíricas. Con-

---

(1) Exemplos: 1) A Estatística é a arte de declarar em termos precisos o que não se sabe; 2) Um estatístico é aquele que duma suposição injustificada chega a uma conclusão correcta através de um modelo matemático rigoroso.

tudo, há diferenças importantes entre as inferências estatísticas que fazemos durante a nossa vida e as que são feitas pelos profissionais da Estatística. São estas que vamos tentar descrever durante esta conversa. Talvez a diferença mais importante resida no uso, feito pelos estatísticos profissionais, de métodos explícitos, que foram analisados teòricamente e cujas propriedades são conhecidas.

A linguagem que falamos durante toda a nossa vida é trabalhada profissionalmente por novelistas, poetas e actores; é analisada profissionalmente por linguistas e gramáticos. Do mesmo modo, o pensamento estatístico que usamos durante a nossa vida é praticado profissionalmente pelos estatísticos práticos. Estes, consoante a sua actividade específica, podem chamar-se psicometristas, analistas da saúde pública, econometristas, etc., enquanto que a análise e o desenvolvimento da Estatística são aprofundados pelos estatísticos teóricos. Todas estas pessoas têm uma função importante, e, pelo menos no caso da Estatística, o seu número não é, nem de perto, suficiente.

II

A nossa conversa vai ser estruturada a partir de dois exemplos, o primeiro representando uma situação experimental genérica e o segundo acerca de um inquérito estatístico para fins oficiais. Em ambos os casos apontaremos algumas maneiras de mostrar que os dados são incertos e diremos algo acerca dos métodos de chegar a conclusões a partir destes dados incertos.

Suponhamos, no nosso primeiro exemplo, que depois de realizar uma experiência, comparámos dois tratamentos médicos e que os resultados se resumem no quadro seguinte:

Tratamento 1	Taxa de cura: 70 %
Tratamento 2	Taxa de cura: 90 %

A conclusão imediata é que o tratamento 2 é bastante melhor do que o tratamento 1. Mas qual o grau de confiança que podemos atribuir a esta afirmação? Quais as espécies de incerteza que envolvem as taxas de cura e que espécies de inferências podem ser feitas com segurança? Talvez o tratamento 2, que parece ser muito melhor do que o tratamento 1, possua, de facto, a mesma taxa fundamental de cura; ou talvez não.

Para começar, é claro que as próprias taxas de cura são inadequadas para uma comparação. Além disso, é necessário saber, pelo menos, os números de doentes, ou seja, a chamada dimensão das amostras. Talvez tenham sido dez, em cada caso, os doentes aos quais foram ministrados os tratamentos; daqueles aos quais foi aplicado o tratamento 1, 7 curaram-se, enquanto, no caso do tratamento 2, o número de doentes curados foi de 9. Pode também suceder que o número de doentes aos quais foi aplicado cada um dos tratamentos tivesse sido de 100 ou de 1000. Ou, talvez o tratamento 1 tenha sido aplicado a 1000 doentes e o tratamento 2 a 100. No entanto, para sermos específicos, suponhamos que era de 20, para cada caso, o número de doentes aos quais foi aplicado cada um dos tratamentos. Deste modo, os resultados numéricos da experiência podem exprimir-se na tabela seguinte:

	Número dos curados	Não curados	Total
Tratamento 1	14	6	20
Tratamento 2	18	2	20

De passagem, notemos que o esquema apresentado neste exemplo é aplicável a muitos outros fenómenos diferentes deste das taxas de cura por tratamentos médicos. Podíamos, do mesmo modo, trabalhar com taxas de germinação relativas a duas qualidades de sementes, ou considerar o número de estudantes aprovados num exame, com o intuito de comparar as taxas de aprovação relativas a rapazes e raparigas. No entanto, será conveniente pensar concretamente em termos da situação médica.

O estatístico classifica os erros e as fontes de variabilidade em duas espécies. Em primeiro lugar, há os erros sistemáticos ou de excentricidade; estes são factores que não dependem essencialmente da dimensão da amostra mas introduzem uma distorsão dos resultados conforme o número de doentes é de 20, 200 ou 2000 por tratamento. Em segundo lugar há a considerar os erros aleatórios ou casuais, cujos efeitos podem ser reduzidos, tomando amostras maiores, tornando assim médios os efeitos da variabilidade devida ao acaso.

Quais são os erros sistemáticos possíveis no caso do nosso exemplo médico genérico? Uma espécie importante de erros sistemáticos resulta das *definições* adoptadas. Qual será, por exemplo, o sentido a atribuir à palavra «curado»? Aqui o problema mais importante depende da opinião subjectiva da pessoa que examina o doente e o considera, ou não, como curado. Suponhamos, para concretizar, que o tratamento 1 é constituído pela aplicação de um medicamento convencional e clássico, enquanto o Tratamento 2 é constituído por um outro medicamento, recente, e proposto pelo cientista que executa a experiência. Suponhamos ainda que é o cientista o próprio a decidir se o doente está curado ou não. Uma primeira causa de excentricidade deriva da tendência muito humana de considerar um caso marginal como curado se fôr do grupo a que é aplicado o tratamento 2, e como não curado se fôr do do tratamento 1. Tal prática parece disparatada quando descrita em termos tão simples, mas o facto é que é muito corrente. Este problema reveste-se de dificuldades especiais em casos particulares, por exemplo na avaliação da terápia psicológica. Uma segunda causa de excentricidade ocorre quando o experimentador toma a consciência da possibilidade de não poder controlar o seu entusiasmo pelo seu próprio tratamento e actua em sentido contrário, ou seja, procede à classificação dos resultados, penalizando o seu próprio tratamento. Em qualquer dos casos os resultados que se obtêm apresentam-se distorsidos.

O único meio que conhecemos de evitar este problema das excentricidades devidas às classificações é o da *classificação casual*: trata-se de arranjar as coisas de modo que o classificador não tenha qualquer possibilidade de saber qual o tratamento que foi aplicado a cada um dos doentes. Muitas vezes isso é difícil, mas sempre absolutamente essencial para a validade científica da experiência.

Um erro sistemático relacionado é o da *selecção para tratamento*. Como é que os quarenta doentes foram distribuídos pelos dois tratamentos? Mais uma vez é claro o facto de o experimentador — ainda que inconscientemente — poder fàcilmente introduzir excentricidades nos resultados, seleccionando para o tratamento que subjectivamente favorece os doentes mais saudáveis, mais novos, mais optimistas, etc. Foram-nos referidos casos em que a selecção para o tratamento era feita por uma enfermeira ou secretária, admitindo-se que a sua escolha era feita de maneira imparcial, mas como ela, de facto, sabia qual o tratamento favorecido pelo seu chefe, seleccionava, nessas condições os doentes em melhor estado de saúde. Do mesmo modo, no outro caso da classificação, a selecção dos doentes para tratamento pode ser prejudicada em sentido inverso, no intuito de eliminar excentricidades no sentido subjectivamente favorecido criando excentricidades em direcção oposta.

O único método conhecido para eliminar este problema é o da *escolha casual*, ou seja, a selecção dos pacientes de modo que ela seja completamente independente do conhecimento do tratamento a aplicar. Por motivos que, por falta de tempo, não podemos aprofundar aqui, a melhor maneira de conseguir uma selecção adequada é usar um mecanismo aleatório semelhante ao de lançar uma moeda ao ar ou de tirar cartas de um baralho.

Outra fonte de erros sistemáticos é a exclusão de doentes que pareçam constituir caso àparte. Este problema é particularmente insidioso porque quando os registos científicos não contêm nenhuma menção de um caso fora do normal, o leitor não tem qualquer possibilidade de compensar a omissão.

A literatura médica está cheia de novos tratamentos apontados inicialmente como descobertas maravilhosas; mais tarde, verificou-se que muitos deles *não* proporcionavam uma cura efectiva, estando as razões do fracasso relacionadas muitas vezes (na classificação inicial) com causas de excentricidade como as que foram apontadas atrás.

Há muitas outras fontes de erros sistemáticos. Poderia, por exemplo, apontar-se que os tratamentos diferem apenas na diferença médica considerada. Se os dois tratamentos são aplicados em dois hospitais diferentes podem existir outros aspectos do regime hospitalar — muito diferentes das divergências de tratamento — a levar em consideração por afectarem os resultados. Mas temos de resistir à tentação de procurar dar uma lista completa dos erros sistemáticos. Passemos, por isso, aos *erros aleatórios*.

Duma maneira geral, as causas de excentricidade não dependem do número de doentes; apresentam-se quer se trate de 20 ou 2000 doentes por tratamento, e não são eliminadas pelo facto de se tomarem os valores médios no caso da dimensão da amostra ser grande. Na realidade, os experimentadores são, muitas vezes, enganados por um sentimento de certeza errado quando analisam experiências muito grandes, devido exactamente ao número elevado de provas a efectuar. Os erros aleatórios, pelo contrário, dependem, em grande parte, do número de experiências efectuadas.

Os erros aleatórios surgem especialmente, de duas maneiras embora a primeira seja pròvàvelmente menos frequente, no caso concreto do nosso exemplo com os tratamentos médicos. Em primeiro lugar, temos os erros devidos às medições e aos cálculos efectuados··· podem ser simplesmente lapsos ocorridos no momento de decidir se o paciente está curado ou não ou ser erros de carácter burocrático ou de cálculo, que surgem na transmissão da informação obtida através dos registos e nas computações. É fácil esquecer estes pormenores, mas os estatísticos sabem bem que é necessário tomá-los sempre em consideração. Ainda não há muito, foi tornado público por um grupo de médicos eminentes o facto de ser perigoso, para mulheres de certas idades, o uso muito generalizado de um medicamento (Enovid). Naturalmente, este anúncio causou quase um tumulto e foi com um sentimento misto de vexame e alívio que os médicos anunciaram pouco depois que a prevenção tinha sido feita com base num erro proveniente de um simples engano nos cálculos.

Em segundo lugar, vamos considerar os *erros de amostragem*. Suponhamos que estávamos suficientemente satisfeitos com o facto dos erros sistemáticos, de medição e de cálculo serem desprezáveis nos dois tratamentos. No entanto, se pudéssemos repetir a experiência, não obteríamos pròvàvelmente os mesmos resultados. Em vez de 14 e 18 doentes curados, respectivamente, podíamos obter 13 e 19, ou 16 e 16, ou até mesmo 17 e 15, sendo o resultado neste último caso completamente oposto ao da diferença aparente inicial. Como é que podemos considerar o erro da amostra, ou, antes, para usar uma expressão mais exacta, a flutuação da amostra?

Um método importante da análise estatística baseia-se no cálculo das probabilidades de obter vários resultados, especialmente na hipótese de que não há de facto diferença alguma entre os tratamentos. Relembremos que os resultados observados foram:

	Curados	Não curados
Tratamento 1	14	6
Tratamento 2	18	2

Usando a técnica estatística corrente podemos calcular a probabilidade de observar este resultado se, de facto, os dois tratamentos não diferissem na taxa de cura. O valor numérico desta probabilidade é de cerca de 1 para 10, ou, mais exactamente, de 0,0958.

De modo semelhante podemos calcular as probabilidades dos outros resultados possíveis, ainda na hipótese de que os tratamentos tivessem a mesma taxa fundamental de cura. Podíamos ter observado uma tabela ligeiramente diferente, a seguinte, por exemplo:

	Curados	Não curados
Tratamento 1	13	7
Tratamento 2	19	1

As taxas de cura, neste caso, são de 65%, e 95%, respectivamente. Na hipótese de as taxas fundamentais de cura seram iguais, esta tabela seria observada, pouco mais ou menos, uma vez em cada 50 casos; mais exactamente, a probabilidade é de 0,0202.

O método geral que estamos a descrever serve para basear as inferências estatísticas em cálculos de probabilidades duma variedade de tabelas possíveis observadas, baseadas numa variedade de hipóteses acerca das verdadeiras taxas fundamentais de cura. Estas taxas verdadeiras, embora desconhecidas, podem imaginar-se como sendo as que obteríamos se aplicássemos os tratamentos a um número extraordinàriamente grande de doentes, por exemplo um milhão, sempre nas mesmas circunstâncias da experiência real.

É tradicional e muitas vezes útil concentrar a atenção na hipótese acima mencionada de que os dois tratamentos têm exactamente as mesmas taxas de cura. Imaginemos agora que era possível alinhar lado a lado todas as tabelas que fosse possível observar, de modo que as tabelas do lado direito mostrassem as diferenças máximas observáveis entre as taxas de cura, enquanto as tabelas do lado esquerdo não mostrassem diferença alguma ou só diferenças muito pequenas entre as taxas de cura. Deste modo, na extremidade do lado esquerdo teríamos tabelas como:

0	20	8	12	17	3
0	20	8	12	17	3

etc. Na extremidade do lado direito teríamos os casos extremos

0	20	20	0
20	0	0	20

Imaginemos estas tabelas possíveis alinhadas e representemos cada uma delas por um pequeno círculo:

← diferenças pequenas   tabela observada ↓   diferenças grandes →

ooooo. . . . . . . .ooooo. . . . . . . .ooooo

A tabela que observámos será representada por um destes círculos. Suponhamos que é o que está indicado por uma seta. (A análise completa deste tópico incluiria uma descrição precisa deste alinhamento dos resultados possíveis observáveis e esclareceria vários pontos que só podemos mencionar muito por alto nesta nossa exposição condensada, p. ex., a distinção entre um teste condicionado por todos os valores marginais e um teste condicionado só por uma margem).

Um método importante da Estatística é o seguinte: calculemos a probabilidade de observar o que realmente observámos *ou casos mais extremos*: os casos cuja probabilidade total é calculada estão indicados no diagrama por um colchete inferior. Calculemos então esta probabilidade, na hipótese de que os dois tratamentos possuem de facto a mesma taxa fundamental de cura. No caso de esta probabilidade ser pequena, então de duas uma: 1) ou, na hipótese de as taxas de cura serem iguais, observámos um resultado muito surpreendente; ou, 2) a hipótese é falsa. Por outro lado, se a probabilidade calculada é de valor médio ou grande, então observámos um resultado que é compatível com a hipótese de não existir diferença. Deste modo, uma probabilidade calculada pequena faz pôr em dúvida a hipótese de não haver diferença, enquanto uma probabilidade moderada ou grande não lança dúvidas sobre a hipótese.

No nosso caso particular, encontramos para a probabilidade de observar a tabela que realmente observámos, ou uma outra correspondente a um caso mais extremo, na hipótese de não haver diferença (nível de significância da amostra com o «teste exacto» de duas abas de FISHER e simétrico) um valor que é aproximadamente de 24/100 ou, mais exactamente, de 0,2352. Quer isto dizer que em 24 de cada 100 repetições da experiência, encontraríamos uma diferença das taxas de cura igual à que encontrámos de facto, ou uma diferença maior, embora as taxas fundamentais de cura sejam iguais.

Ora, um resultado que sob uma determinada hipótese pode acontecer 24 em cada 100 vezes, não pode considerar-se como desacreditando sèriamente essa mesma hipótese, e deste modo concluímos que as nossas taxas de cura observadas, de 70 % e 90 %, podiam muito bem representar os resultados de uma amostragem casual efectuada no grupo dos pacientes tratados por dois tratamentos que têm efeitos iguais. Isto não quer evidentemente dizer que os dois tratamentos sejam igualmente efectivos, mas apenas que a equivalência é completamente compatível com a amostra observada.

Suponhamos a seguir que as duas amostras já não são de dimensão 20, mas antes de dimensão 40, enquanto as taxas observadas de cura permanecem as mesmas. Os resultados observados seriam então:

	Curados	Não curados	Totais
Tratamento 1	28	12	40
Tratamento 2	36	4	40

Se procedermos a cálculos semelhantes aos anteriores achamos que se os tratamentos realmente não diferissem na taxa de cura então a probabilidade de observar um tal desvio, ou outro ainda maior, nas taxas observadas de cura varia dos anteriores 24 em cada 100 casos para apenas cerca de 5 em 100. Quer dizer: os resultados observados são bastantes surpreendentes e seriam frequentemente tomados como uma boa evidência de que os tratamentos são realmente diferentes.

Continuando deste modo, se as amostras fossem aumentadas para 100 cada, ou seja, 5 vezes a dimensão original, e se as taxas observadas de cura continuassem as mesmas, a probabilidade decisiva desceria a menos de 1 em cada 1000 casos e estaria pràticamente fora de questão haver realmente uma diferença entre os dois tratamentos.

Repare-se como a interpretação das mesmas taxas observadas de cura muda ràpidamente à medida que vamos passando de amostras de dimensão 20 para 40 e depois para 100. Se considerassemos amostras de dimensão ainda maior, a probabilidade decisória continuaria ainda a decrescer.

Uma área importante da Estatística é a

que ajuda a planear ou a delinear as experiências e, no contexto presente, a maior parte do delineamento *antes de executar a experiência*, seria decidir a **dimensão** da amostra. Deveremos considerar 20, 40 ou 100 pacientes para cada tratamento? Os custos monetários podem desempenhar um papel importante em tal decisão; além disso o estatístico pode dar uma contribuição, calculando qual a probabilidade de que uma diferença real entre os tratamentos, de uma dada magnitude, se evidencie, dando origem a uma pequena probabilidade de surpresa, baseada nos resultados a serem observados durante a experiência.

Vimos com um exemplo simples como surgem diferentes espécies de erros e como funciona um método de alcançar conclusões. Mal fizemos uma introdução à análise completa do método e não discutimos sequer outros métodos da análise estatística que podiam ter sido usados.

III

O segundo exemplo que vamos discutir surge num domínio completamente diferente, o das estatísticas oficiais. Para introdução, vamos fazer uma citação da clássica autobiografia americana, *The Education of Henry Adams* (A Educação de Henry Adams). Depois de a lermos, faremos algumas considerações de carácter descritivo sugeridas pela transcrição e só depois nos vamos ocupar com o nosso segundo exemplo.

Henry Adams, a certa altura da sua interminável e frívola busca para uma verdade última, decidiu que a deveria descobrir estudando estatísticas, mas estatísticas no sentido plural de colunas de números. Falando de si próprio na terceira pessoa, Adams diz:

> Supondo que a alternativa relativamente à arte era a aritmética, embrenhou-se profundamente nas estatísticas, imaginando que a educação teria aí a sua base mais segura; e o estado provou ser o mais fácil que ele alguma vez havia tentado. Até o Governo se oferecia para produzir estatísticas em número ilimitado, colunas de números sem fim, médias insondáveis, apenas pelo prazer de perguntar. No Departamento de Estatística [em Washington: District of Columbia], Worthington Ford fornecia qualquer material que a curiosidade pudesse imaginar, preenchendo as vastas lacunas da ignorância, e métodos para aplicar a argamassa do facto. Dir-se-ia por um momento que se ganhava terreno e que as médias que se calculavam eram projectadas no futuro como se fossem leis. Talvez a parte mais embaraçosa do estado resida na atitude dos estatísticos, que não mostravam nenhuma confiança entusiástica nos seus próprios números. Eles deviam ter alcançado a certeza, mas falavam como os outros homens que sabiam menos. O método não resultou em crença. Na verdade, todo o aumento de massa (de volume e velocidade), parecia trazer novos elementos e, por último, um escolar, presumido em aritmética e ignorante de álgebra, caiu num supersticioso terror de complexos com o desmoronar dos factos. (*The Education of Henry Adams*, Cap. 23)

Esta passagem tem vários aspectos que bem merecem ser discutidos. Primeiro, consideremos a frase-chave «ignorante de álgebra». Adams constata que os números só por si fazem normalmente pouco sentido. Têm que ser trabalhados e condensados — ou numa palavra: analisados. Mas a análise é inevitável em termos de conceitos abstractos e os conceitos abstractos acerca dos números são normalmente expressos matemàticamente. O pensamento estatístico requer um certo grau de talento matemático, bem como de treino, dependendo o montante apropriado da espécie de estatísticas que se desejam fazer. É necessário algo de Matemática para a Estatística; mas por outro lado, pode fazer-se um belo trabalho estatístico, tanto teórico como aplicado, sem que seja necessário um Doutoramento em Matemática.

Um segundo aspecto interessante da narrativa de Henry Adams é a sua queixa de que os estatísticos não mostravam nenhuma «confiança entusiástica», e de que o seu método não «resultava em crença». Às vezes ouve-se dizer que os estatísticos, do ponto de vista profissional, são cínicos e destrutivos. Uma variante é a queixa de que a Estatística é subtil para a análise rotineira dos dados, mas que a construção de teorias científicas tem pouco a lucrar com a Estatística. Parece-me que estas queixas reflectem alguma coisa de verdadeiro, mas que são também caricaturas grosseiras. Se os estatísticos tendem a ser profissionalmente cínicos é porque muitas vezes vêem os resultados de optimismo indevido, de credulidade científica e de crença infantil em números escritos num pedaço de papel. Quanto à construção de teorias grandiosas acerca da Natureza, a Estatística pròpriamente intrepretada desempenha um papel real e positivo nesta actividade.

Vamos considerar agora um exemplo específico de estatísticas oficiais. Há alguns anos, de colaboração com um colega — um economista — interessámo-nos pelo Índice dos Preços de Consumo do Departamento de Estatística do Trabalho (Bureau of Labor Statistics), um respeitável organismo do governo federal (U. S. A.). Este índice é um número oficial do governo, publicado periòdicamente com o acompanhamento de publicidade da imprensa. Este número-índice é expresso com um impressionante nível de certeza aparente, e nós, os consumidores, aplaudimos ou lamentamos conforme ele decresce ou aumenta uns décimos de ponto. Os seus efeitos económicos são consideráveis, através dos contratos de trabalho que lhe estão ligados e através das decisões de negócios que nele se baseiam. Além disso, o índice e as suas componentes detalhadas — por cidade ou região, ou por espécie de bens económicos — são usados extensivamente por economistas para uma grande variedade de análises.

Quando começámos a estudar o Índice dos Preços de Consumo, tanto o nosso colega como nós próprios estávamos interessados especialmente na estrutura dos seus erros: quais as espécies de erros que o afectam e qual a espécie de justeza que o Índice possui? Depressa verificámos que uma das qualidades dos estatísticos governamentais tinha mudado desde os tempos de HENRY ADAMS. Os estatísticos de Washington que ele conheceu há uns setenta anos podem ter mostrado uma falta de confiança, mas os que actualmente escrevem acerca do Índice dos Preços de Consumo mostram um montante de confiança surpreendente. O material escrito que encontrámos exprimia grande confiança na precisão do Índice e dizia que os erros eram geralmente pequenos e desprezáveis. Seria fascinante especular sobre esta alteração no culto das estatísticas oficiais — poderíamos imaginar por exemplo, que o aumento na confiança era derivado de uma sensitividade crescente do governo para as relações públicas e a imagem apresentada — mas deixemos esta investigação ao cuidado dos sociólogos e dos cultores da ciência política.

Com surpresa nossa achámos que havia pouca evidência acerca da estrutura dos erros do Índice. Estudámos a evidência que pudemos encontrar e publicámos um artigo sobre o assunto([2]). Este artigo foi apenas um pequeno contributo num movimento geral em torno de investigações ulteriores acerca da estrutura dos erros do Índice e consta-nos que o Departamento de Estatística do Trabalho procede actualmente a estudos detalhados sobre os erros, como aliás é o seu dever.

O que é que entendemos por estrutura dos erros? Tentemos dar uma ideia dessa estru-

([2]) WILLIAM H. KRUSKAL and LESTER G. TELSER, «Food Prices and the Bureau of Labor Statistics», *J. Business*, Univ. of Chicago, 33 (1960), 258-279; comentado por EWAN CLAGUE e réplicas, 280-5.

tura, considerando apenas o preço dos produtos alimentares, que constituem aliás uma componente importante do Índice. A componente constituída pelo preço dos produtos alimentares é em si própria um sub-índice constituído pelos preços de muitos alimentos específicos. Suponhamos que estavamos interessados no preço por quilo de um corte bem definido de carne de vaca de uma certa qualidade vendida em Chicago num determinado dia. Sem dúvida que nesse dia há na cidade de Chicago milhares de talhos, oferecendo a carne do corte e qualidade que seleccionámos a vários preços. Claro que nem todos estes talhos podem ser levados em conta para efeitos de observação e, seja como for, tem de se proceder a uma amostra. A prática corrente é trabalhar com uma amostra mais ou menos fixada dos estabelecimentos de géneros alimentícios, de modo que o Departamento de Estatística do Trabalho envia representantes seus aos gerentes de cada um dos estabelecimentos incluídos na amostra, que se encarregam de perguntar ao gerente respectivo o preço corrente da carne (bem como, evidentemente, dos seus preços para muitos outros alimentos). Em Chicago, em 1960, foram pedidos os preços em todas as grandes cadeias de estabelecimentos e em cerca de 90 retalhistas de géneros alimentícios. Todo este processo de amostragem está sujeito a uma variedade de erros, muitos sem dúvida alguma desprezáveis, mas outros talvez grandes.

No caso dos dois tratamentos médicos foi conveniente classificar os erros em sistemáticos e aleatórios. Vamos considerar agora primeiro um erro sistemático possível, um erro de excentricidade, ou seja, um erro que tende a prosseguir numa direcção pouco mais ou menos com a mesma intensidade, e que é relativamente insensível à dimensão da amostra. É o caso de alguns estabelecimentos não estarem dispostos a cooperar com o Departamento de Estatística do Trabalho, na medida em que se recusam sistemàticamente a fornecer as suas listas de preços aos representantes do Departamento. (Claro que os representantes podiam simplesmente deslocar-se a outro estabelecimento e anotar os preços, mas esta operação requer muito mais tempo do que tirar simplesmente os números de uma lista). Pode muito bem ser que estes estabelecimentos menos cooperantes tendam para possuir um padrão de preços e uma variação dos preços diferentes dos estabelecimentos cujos gerentes têm um espírito mais aberto. Se, por exemplo, se trata de estabelecimentos que usam processos primitivos, ou mais recentes, ou ainda de estabelecimentos em áreas mais pobres, é possível que sejam menos cooperantes. Deste modo podem surgir excentricidades ou erros sistemáticos resultantes da diferença entre os estabelecimentos que cooperam e os que não cooperam. Claro que podemos pensar em muitas outras fontes de excentricidades; uma das funções do estatístico é estar sempre alerta para elas e sugerir programas experimentais especiais para avaliar as suas grandezas. O estatístico podia, por exemplo, planear um programa especial para observar alguns preços em estabelecimentos que não estivessem dispostos a colaborar, com o fim de comparar os movimentos destes preços com os movimentos dos preços dos estabelecimentos cooperantes.

E o que é que teremos acerca dos erros aleatórios no exemplo presente? Como anteriormente, pudemos subdividi-los em erros de medição e de cálculo e em erros de amostragem pròpriamente ditos. Os erros aleatórios de medição podem imaginar-se fàcilmente no exemplo presente; o gerente de um dos estabelecimentos pode simplesmente citar um preço errado, o empregado do Departamento de Estatística do Trabalho pode não ter ouvido o preço correctamente ou pode enganar-se ao escrevê-lo. Pode haver erros burocráticos no processamento posterior destes números. Tais erros parecem à primeira vista ridículos, mas são mais frequentes do que se pode pensar, especialmente numa operação grande e complexa. Muitos de nós temos contas de depósitos à ordem nos bancos e quantas vezes sucede que temos dificuldades em ajustar as nossas contas com o extracto mensal enviado pelo banco, apenas devido a um simples lapso aritmético! Acontecerá isto uma vez em cada cinco, em dez, em vinte? Possivelmente, pelo menos, o último caso. Agora imaginemos o que pode suceder num processo complexo que requer milhares de fases de carácter burocrático e aritmético.

Voltemos agora à segunda subdivisão dos erros aleatórios: os erros de amostragem pròpriamente ditos. Suponhamos que era possível registar exactamente cada uma das vendas da espécie particular de carne de vaca que seleccionámos durante o dia específico em que procedemos à operação. Então podíamos conhecer sem erro o preço médio verdadeiro daquele dia. Se apenas procedemos à *recolha de amostras* dos preços e calculamos uma média para a amostra, obtemos em geral um número diferente da média verdadeira. Mas qual será o valor provável desta diferença? Um cêntimo, dois, cinco? Há algumas diferenças, consoante o caso. Este é o erro de amostragem.

Para os nossos fins o aspecto mais importante do erro de amostragem é provàvelmente o que resulta das amostragens de estabelecimentos alimentares. Suponhamos que os registos do Departamento de Estatística do Trabalho tinham desaparecido inesperadamente e que se tornava necessário seleccionar uma nova amostra, ignorando os resultados da anterior, mas usando os mesmos métodos. Os estabelecimentos incluídos na nova amostra seriam duma maneira geral diferentes dos que estavam na amostra anterior e deste modo os seus preços — e o preço médio da amostra — seriam diferentes. Mas qual o valor desta diferença? Como é que podemos discutir esta espécie de erros da amostragem relativos aos estabelecimentos?

Suponhamos que sabemos o preço médio de cada amostra possível que poderíamos ter escolhido. Suponhamos que estes preços médios variavam entre 77 e 89 cêntimos, com a maioria dos preços médios nas proximidades dos 83 cêntimos, com uma diferença de dois cêntimos para mais ou para menos. A distribuição dos preços mostraria a *variabilidade do preço médio de amostra para amostra* e dessa distribuição poderíamos calcular a probabilidade de que a média de uma amostra individual, escolhida ao acaso, apresentasse um desvio do valor verdadeiro da ordem de um cêntimo, dois cêntimos, etc.

Infelizmente não há nenhuma maneira prática de obter o preço médio de cada amostra possível, e deste modo achar a variabilidade do preço médio de amostra para amostra. É aqui que entra um dos ramos fundamentais da Estatística. Se o método usado para a amostragem é o de escolher os estabelecimentos segundo a chamada *amostra casual*, isto é, fazer com que um estabelecimento entre ou não na amostra segundo um determinado mecanismo aleatório conhecido, podemos normalmente dizer que a variabilidade da média dos preços de amostra para amostra seria obtida olhando apenas para a variabilidade dos preços de uns estabelecimentos para os outros dentro da amostra *escolhida de facto*. O conceito de amostra casual é de importância fundamental e seria desejável se nos pudéssemos ocupar dele durante mais tempo.

A noção básica de passar da variabilidade *observável* dentro da amostra para a variabilidade entre as várias amostras *que não se pode observar* pode apreciar-se fàcilmente. Exactamente como podemos estimar o preço médio de todos os estabelecimentos a partir da média duma amostra convenientemente escolhida, também podemos estimar a variabilidade dos preços entre todos os estabelecimentos a partir da variabilidade dos preços de uns estabelecimentos para os outros dentro de uma amostra convenientemente escolhida. Uma vez que estejamos de posse de uma estimativa da variabilidade de estabelecimento para estabelecimento, podemos modificá-la, tomando em consideração o nosso interesse na variabilidade entre as médias das amostras.

Assim, se presumirmos que a nossa amostra foi escolhida por métodos probabilísticos, podemos estimar a variabilidade do preço médio de amostra para amostra e deste modo fazer afirmações acerca da probabilidade de que a média da nossa amostra apresente um desvio, relativamente à média verdadeira geral, de uma certa amplitude.

Por outro lado, se os estabelecimentos são seleccionados pelos chamados especialistas-avaliadores, ou pedindo voluntários, ou por qualquer outro método não probabilístico, não se pode a partir da estrutura interna da amostra predizer a variabilidade de amostra para amostra. Podemos ainda notar que os estabelecimentos que entram nas amostras do Índice dos Preços de Consumo *não* são escolhidos segundo o processo da amostra casual (ou, pelo menos, não o eram em 1960), e este facto torna as discussões acerca do erro da amostragem consideràvelmente mais complicadas.

E, deste modo, aqui temos de novo exemplos de duas grandes classes de erros: sistemáticos e aleatórios. Há algumas espécies de erros que não são fáceis de classificar deste modo. Em inquéritos que incluem perguntas sobre a idade, surgem fenómenos muito interessante. Senhoras mais idosas tendem a decrescer as suas idades, enquanto que jóvens bastante novas tendem a aumentar as suas. Outra espécie de erro que não cai estritamente dentro das nossas rúbricas é um erro aleatório que afecta grupos inteiros de observações. Sabe-se que características pessoais dos entrevistadores podem influenciar as respostas em certas amostras feitas por inquérito, de modo que todas as respostas obtidas por intermédio de um determinado entrevistador ficarão sujeitas à mesma influência. Tal erro pode ter uma componente sistemática, juntamente com uma componente aleatória, derivada do facto de a escolha dos entrevistadores ser feita por um processo aleatório. O efeito da componente aleatória decrescerá, não à medida que o número total de observações cresce, mas antes com o aumento do número de entrevistadores.

Deste modo completámos a nossa discussão acerca do Índice dos Preços de Consumo, com ênfase especial na estrutura dos erros que o influenciam e em questões do método estatístico, especialmente o uso de médias dos resultados obtidos por amostragem para estimar médias verdadeiras e a estimação da variabilidade entre as amostras com base na amostra casual.

IV

Neste espaço limitado de tempo não podemos descrever o trabalho dos estatísticos teóricos, que comparam métodos alternativos de inferência em termos abstractos e que inventam novos métodos. Contudo, quase todos os estatísticos teóricos se socorrem duma motivação e interesse associados permanentemente com problemas da Estatística aplicada. Uma das fontes de beleza da Estatística está na variedade quase ilimitada de investigações que por seu intermédio se podem realizar. Apenas para mencionar algumas, tiradas da nossa própria experiência pessoal, indicamos as seguintes:

Alterações meteorológicas baseadas na sedimentação das nuvens.

Estabelecimento da autoria dos disputados *Federalist Papers* (Estados Federalistas).

Modelos de livros usados numa biblioteca universitária.

Uso dos raios X no tratamento de úlceras. Ensaios de hipóteses acerca da resistência à fractura de matérias frágeis.

Esperamos ter traçado alguns aspectos do pensamento e do trabalho dos estatísticos. Embora, de certo modo, todos nós nos ocupemos com a Estatística, a prática da Estatística como uma profissão requer um estudo disciplinado, do mesmo modo que a prática profissional do Direito ou da Medicina. A Estatística de que, tal como Monsieur JOURDAIN temos andado a falar durante toda a vida, é justamente como as discussões jurídicas ou médicas que fazemos como leigos: muitas vezes, embora imperfeitas, são de algum mérito; mas sempre que surge qualquer problema real, temos de nos socorrer dos especialistas. Como nota HENRY ADAMS, os profissionais da Estatística são muitas vezes profundamente cépticos, tal como os especialistas do Direito e da Medicina, mas é o cepticismo que, esperamos, nos irá conduzir até à verdade, pela análise dos erros e pelo estudo quantitativo dos métodos de inferência.

GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 100 — Julho-Dezembro 1965

Das possíveis tendências da Matemática do Acaso

J. Tiago de Oliveira
Lisboa

Quem poderia enumerar as mudanças incontáveis que a atmosfera tem dia a dia, e disto predizer hoje o tempo que fará daqui a um mês ou a um ano?

JACOB BERNOULLI, Ars Conjectandi (1713)

Falar do impacto da Estatística no mundo moderno e do modo como ela está profundamente integrada no evoluir da civilização industrial dos nossos dias é já tarefa pouco convidativa. Mas, ainda, em pequeno toque de bruxaria, tentar prever a sua evolução, prognosticar do seu futuro, é decerto bem mais complexo. Se a predição é um tema estatístico, todo o estudioso deste sector sabe bem que a sua confiança, a segurança do prever, se esvae à medida que se avança no futuro, à medida que o futuro devém passado.

Com esta ressalva, poderíamos talvez transformar a questão: Quais são os projectos próximos da Estatística? em: Quais são as linhas de força actuais do seu desenvolvimento? Quais são os problemas em aberto?

Mas, mesmo assim, se nos voltarmos para o passado, quantas foram as linhas de evolução percebidas claramente pelos contemporâneos? Quantas vezes foram certas direcções inicialmente rejeitadas? É fácil, quando o modo da evolução já foi presente e é passado, encontrar que o que sucedeu «tinha de suceder», que «certos desenvolvimentos estavam até implícitos em trabalhos anteriores», etc. Estas análises «a-posteriori», bem úteis de resto!, são fáceis; difícil é sim o prever no presente. A história situa-se numa dialéctica entre acções pessoais e tendências sociológicas, sendo as primeiras cada vez mais prementes quanto mais se entra na história de um ramo cultural, embora o impulso socio-tecnológico mantenha sempre a sua pressão. A mostrar esta pressão, uma só nota: a tão consabida existência de «épocas grávidas de invenção», em que a mesma descoberta surge simultâneamente em vários investigadores; a recordar a acção pessoal, uma só pergunta: Sem CANTOR, de quantos anos se teria atrasado a teoria dos conjuntos? Ou teria, por providencialismo ou inevitabilidade histórica, de acontecer «um CANTOR» naquela época? E a questão transmuda-se, de novo: Quais são, tão-só, os principais problemas em aberto?; já que o impacto, nas linhas de força, de investigadores presentes ou passados é desconhecido. Neste movimento browniano tendencial do pensar, impelido pela pressão histórico-tecnológica, vamos pois tentar diagnosticar algumas vias não percorridas ou pouco percorridas ainda, alguns caminhos por abrir.

E, de novo, uma dificuldade se nos antolha: Quem conhece todo um ramo do saber para dele fazer uma perspectiva total? A questão, dado que há, necessàriamente, escolha pessoal, torna-se em: Quais *lhe* parecem ser os principais problemas em aberto? É a esta pergunta, tão restrita, que vamos tentar dar resposta. A auxiliá-la, vamos servir-

-nos, também, do notável estudo de P. AUGER «Les tendances actuelles de la recherche scientifique», UNESCO (1961) no que toca a evolução possível das Probabilidades e Estatística e do heterodoxo e desafiador ensaio de JOHN W. TUKEY «The future of data analysis», Ann. Math. Stat., vol. 33, 1962. Mas, recordemo-lo de novo, esta escolha tem sempre algo de aleatório (e não o teria em Estatística!) pois o movimento, que depois será «naturalíssimo», deverá transcender, pela sua dinâmica interna, os projectos aqui indicados.

No princípio do século eram quase só palavras, descrições. A Estatística é então, sòmente, a mera compilação de dados, a sua disposição em tabelas, uns tantos cálculos de médias e outras estatísticas simples... e pouco mais; a decisão estatística era, tantas vezes!, feita de modo intuitivo, vendo se o valor calculado a partir da amostra estava próximo ou distante daquele que teòricamente se esperava; um eco, ainda, encontra-se num tratadista das Probabilidades (J. USPENSKY, «Introduction to Mathematical Probability», 1937) ao avaliar a heterogeneidade, verificando se o coeficiente de divergência era próximo ou distante da unidade. A fixação da variabilidade estava ainda bem longe!

Mas a situação começa breve a mudar. FISHER, NEYMANN e WALD, após o esforço de KARL PEARSON e «STUDENT» lançam os fundamentos da Estatística moderna, a procura dos métodos óptimos da inferência, o estudo do comportamento indutivo, rigorizando a comparação intuitiva e vaga. E desde 1912 (o primeiro trabalho de FISHER), a Estatística é explosão, passando do estadio de descrição verbal ao nível de disciplina matemática. Por 1950 a situação pode descrever-se como segue: da estatística estática — isto é, dos processos em que o acaso intervém, digamos, sempre do mesmo modo, sem evolução — pode supor-se (e poderá?!, quando se procuram projectos de futuro) que estão lançadas as traves-mestras fundamentais; está formulada a teoria da estimação, do teste de hipóteses, da discriminação, etc. e, acima de tudo, um método geral de inferência (ou decisão) estatística. O texto, ainda vivo, de H. CRAMÉR («Mathematical Methods of Statistics», 1945) dá uma excelente perspectiva do domínio em causa que o tempo, de certo!, alargou e aprofundou. Evidentemente que, traves-mestras lançadas, há muito ainda a fazer, um edifício a completar. E, adentro desse esquema, se vem trabalhando desde então. Ao mesmo tempo, vem-se desenvolvendo a teoria dos processos estocásticos, com primórdios no estudo da evolução económica, a futura Estatística dinâmica, que ainda tem imenso a formular. É esta, em duas breves linhas, a situação do dia de hoje, após meio século de vida intensa.

E agora, em breve parêntesis, uma nota sobre o impacto da Matemática do Acaso no sector das aplicações. FISHER, como se sabe, era estatístico na Estação Agrária Experimental de Rothamsteed; daí que os métodos de análise estatística no domínio agro-pecuário tenham sofrido desde logo forte impulso, permitindo a melhoria da produtividade, o aumento da eficácia, o estudo cuidado e metódico das condições de produção, etc. As aplicações industriais surgem cerca da década de 30: as cartas de contrôle e os métodos, sucessivamente alargados, do contrôle de lotes (estes tão ligados ao desenvolvimento dos testes de hipóteses) são, talvez, os primeiros contributos da Estatística ao aperfeiçoamento tecnológico da sociedade industrial, em que a estabilidade de produção, o seu padronizar, desempenham papel relevante; depois, a análise sequencial, desenvolvida durante a II guerra mundial, a teoria de segurança (reliability), os testes de duração (life tests), etc. são novos e importantes instrumentos colocados ao dispor da tecnologia industrial. E a lista poderia prosseguir; o multiplicar de artigos, e mesmo de novas revistas!, sobre este sector, é um índice efectivo da sua importância. No domínio das aplicações médicas, o estudo da eficácia dos fármacos, da qualidade dos tratamentos, a detecção de causas possíveis de doença, etc. são algumas das várias orientações. A Econometria e a Teoria das Comunicações, a Sociologia e a Biometria, etc. eis, ainda, alguns dos diversos sectores em que o impacto metodológico e analítico da Estatística se fez sentir.

E, agora, os projectos? Ah!, era tão fácil, qual Sancho!, escapar através da porta cómoda de que, traves-mestras lançadas, se estava apenas na fase dos pequenos problemas, das soluções locais, adequadas a cada questão científica, um pouco decretar a morte lenta da Estatística, uma «morte térmica», com aumento de produção (e entropia!), como ensina a Termodinâmica. Ah!, a via de salvação era simples··· mas não parece justa. Está-se ainda longe, bem longe, da fase do bordado no tecido das relações, este ainda por tecer completamente.

Muitos problemas de tipo experimental necessitam ainda de solução específica. Topam-se a cada instante. E, tantas vezes, há para êles, tão-só, solução aproximada e ineficiente, tantas vezes difícil de manejar, embora solução. Daí que novos métodos de ataque sejam necessários. O que está formulado é *um* sistema, *uma* teoria, *uma* abordagem teorética do comportamento indutivo, desse salto para o desconhecido. Aqui e ali, surgem poucas tentativas esparsas de um novo fundamento da inferência.

Direcções como, por exemplo, o fundamentar da decisão estatística em termos da distância (ou separação) entre os dados e as hipóteses estatísticas em jogo são possíveis e têm sido, um pouco, tentadas. Avaliações de eficiência em termos outros que a comparação da variância são viáveis e, de certo, úteis; a introdução geral das funções de perda (por WALD) libertou um pouco a Estatística deste uso, embora muitas vias estejam inexploradas: o estudo da eficiência dos testes têm sido, sòmente, feito nesses termos.

Doutro lado, toda a aplicação da Estatística está baseada no pressuposto de que dado modelo é duma descrição teorética suficiente do fenómeno aleatório em estudo. E se assim não for, se o modelo não for adequado? Poucos trabalhos existem neste sector do estudo da *adequação* ou *prova dos modelos*.

Aqui, a dialéctica é complexa: a um lado os modelos disponíveis não são muitos; a outro a aplicação irreflectida de modelos inadequados pode levar a grandes riscos na decisão em concreto; a prova dos modelos bem como o uso de direcções alternativas de decisão deverão não só fundar mais largamente a sua validade como também alargar o âmbito das aplicações.

Uma outra via, conexa com esta, é a do desenvolvimento dos *métodos não-paramétricos*, já agora em expansão larga, que permitem, em tantos casos, a necessária libertação dos modelos estreitos, que, muitas vezes, podem levar a conclusões erróneas. Faltam também métodos de análise da *heterogeneidade das amostras* que tão grandemente podem viciar um estudo estatístico, quando falsamente pressupostas. Conexo com as possibilidades de um novo fundamento da inferência e a adequação dos modelos está, também, o estudo da *robustez da inferência*, em especial do problema complexo das *misturas*, que podem levar à inversão de resultados clássicos (preferência não da média mas da mediana no caso das distribuições normais, como o mostra um trabalho de TUKEY) quando dois modelos (um contaminado e outro não) podem ser ambos descrição igualmente eficiente do problema empírico em causa. Eis pois alguns, mas só *alguns*, dos problemas em aberto no domínio da Estatística estática.

E para os processos estocásticos? Destes, os mais largamente estudados são os processos estacionários e os markovianos, extensões naturais da independência que tantas vezes aparece na Estatística estática; deve porém observar-se que há ainda muito a encontrar nos modelos markovianos, de tal modo que AUGER o aponta como um dos grandes problemas, embora de então para cá algo se tenha feito. Mas processos markovianos (que fundamentam *um* determinismo estatístico) e estacionários são apenas alguns, embora importantes, dos muitos que uma *fisiologia dos processos estocásticos* terá que estudar probabilìsticamente, em primeira etapa. Está ainda em início a *estatística dos processos estocásticos* com os seus problemas já clássicos de estimação (ou extracção de sinal), de teste de hipóteses (ou detecção de sinal), discriminação, etc, estudados alguns apenas para os processos de estrutura menos complexa. Fundamentada que foi a *teoria da predição* do ponto de vista probabilístico (WIENER-KOLMOGOROFF) (e sob poucas perspectivas), a *teoria estatística da predição* pode dizer-se não existir: o que há, tão-só, são arremedos baseados na teoria probabilística, aproximações.

Ora aí está! Após esta curta volta aqui ficam indicadas *algumas*, não *as!*, direcções possíveis do evoluir próximo que *me* parece natural para a Estatística. O tempo se encarregará de mostrar quão pouco se disse e quanto se falhou.

Investigações recentes acerca da influência do núcleo nos movimentos da terra(*)

R. O. Vicente
Lisboa

Desejaria indicar sumàriamente os movimentos principais da Terra que parecem ser afectados pela existência do núcleo, antes de falar acerca das investigações recentes sobre este assunto.

Têm sido estudados os seguintes movimentos:

1) os movimentos de precessão e nutação — tradicionalmente estudados em astronomia em relação com a teoria da rotação da Terra, considerada como um corpo sólido e rígido, sob a acção das forças gravitacionais do Sol e da Lua

2) as marés terrestres — tratando das marés da parte sólida da Terra, considerada como um corpo elástico sob a influência dos corpos exteriores (Sol e Lua)

3) as oscilações livres da Terra — procurando-se investigar o comportamento da Terra sob a influência das forças elásticas, sendo este movimento também dependente das forças gravitacionais

4) o campo geomagnético secular — estudando-se as possíveis explicações das variações observadas no campo magnético secular da Terra. Supõe-se geralmente que a origem do magnetismo terrestre é devido à existência do núcleo

Esta descrição concisa mostra imediatamente que estes movimentos têm sido estudados de uma maneira completamente independente uns dos outros: o primeiro em astronomia e os restantes em diferentes ramos da geofísica.

Estes movimentos foram escritos por esta ordem por duas razões: 1.ª foram estudados històricamente na ordem indicada; 2.ª referem-se a movimentos de complexidade crescente.

Todos estes fenómenos dependem em maior ou menor grau da existência do núcleo terrestre. Devemos no entanto notar que esta dependência só foi possível estabelecer recentemente, graças aos progressos feitos em geofísica durante as últimas décadas.

A Terra foi considerada como um corpo sólido e rígido para o estudo da precessão e nutação, mas no caso das oscilações livres e das marés terrestres temos de considerar um corpo elástico constituído por um envólucro e um núcleo; o estudo destes movimentos é feito a partir das equações conhecidas da elasticidade e da hidrodinâmica. O estudo do campo geomagnético principal envolve a consideração do electromagnetismo e, portanto, é ainda mais complicado.

(*) Tradução da conferência pronunciada no «Earth Sciences Building» do «Massachusetts Institute of Technology» E. U. A. em Maio de 1965.

Vou procurar indicar alguns resultados mais importantes obtidos no estudo destes movimentos e, ao mesmo tempo, mostrar as relações existentes entre estes diferentes movimentos. Parece-me que esta é uma das tendências das investigações recentes acerca destes problemas.

O centro de massa da Terra considera-se como a origem O dos diferentes sistemas de eixos coordenados utilizados na teoria do movimento da Terra. Um sistema de eixos rectangulares $OXYZ$, fixo no espaço, considera-se de tal maneira que OZ é dirigido para o polo norte da eclíptica e OX para o equinócio (referido a uma época determinada). Também se define um outro sistema de eixos rectangulares $Oxyz$, de maneira que coincide com os eixos principais de inércia da Terra e, portanto, solidários com a terra. O eixo Oz denomina-se o eixo de figura e corresponde ao maior momento de inércia.

As equações dinâmicas do movimento podem exprimir-se pela equação vectorial

$$\text{(1)} \qquad \frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{G}$$

mostrando que a variação do vector $\vec{H}$, momento da quantidade de movimento, em torno do centro de massa é igual ao vector $\vec{G}$ momento resultante das forças exteriores. A projecção desta equação vectorial no sistema de eixos $Oxyz$ corresponde às conhecidas equações de EULER do movimento de um corpo rígido em torno do seu centro de massa

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 + (C-B)\,\omega_2\,\omega_3 &= L \\ B\dot{\omega}_2 + (A-C)\,\omega_3\,\omega_1 &= M \\ C\dot{\omega}_3 + (B-A)\,\omega_1\,\omega_2 &= N \end{aligned}$$

sendo (A, B, C) os momentos de inércia principais, (L, M, N) os momentos das forças exteriores em torno dos eixos $Oxyz$ e $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ as velocidades angulares, segundo estes eixos, do movimento dos dois sistemas de eixos indicados. Como se sabe, podemos exprimir $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ em função dos ângulos de EULER (θ, φ, ψ).

O movimento da Terra, em relação ao ponto O, é representado, em qualquer instante, pela rotação instantânea $\vec{\omega}$ ao longo de um eixo passando pelo centro de massa e que se denomina o eixo de rotação (a intersecção do eixo de rotação com a superfície da Terra corresponde aos polos geográficos).

O eixo, ao longo do vector $\vec{H}$ do momento da quantidade de movimento, denomina-se eixo invariável nos estudos de dinâmica dos corpos rígidos em rotação.

As forças externas que temos de considerar no estudo do movimento de rotação da Terra são devidas ao Sol e à Lua, mas os seus efeitos são relativamente pequenos, de modo que o movimento real da Terra pode ser considerado como um movimento de rotação perturbado pelas forças exteriores. Uma consequência importante deste resultado é o facto de que a deformação provocada pela maré terrestre tem pequena influência na forma do elipsóide de inércia, para qualquer hipótese plausível acerca da constituição do interior terrestre.

Para determinarmos o movimento de rotação, consideramos que não existem forças exteriores, isto é, $\vec{G}=0$ na equação (1) e portanto $\vec{H} = \text{const.}$, e este resultado significa que o momento da quantidade de movimento é constante e o vector $\vec{H}$ é fixo no espaço.

As equações do movimento dão a possibilidade de determinar os ângulos que os eixos acima mencionados formam entre si. Isto é muito útil para nos dar uma idéia da ordem de grandeza destes movimentos puramente dinâmicos e, ao mesmo tempo, mostram já a complexidade dos movimentos que têm lugar no núcleo.

Os cálculos mostram que o ângulo α entre o eixo do momento da quantidade de movimento e o eixo de rotação é cerca de $0'',001$, isto é, 3 cm à superfície da Terra. Este ângulo é tão pequeno que o vector $\vec{\omega}$ coincide pràticamente com o vector $\vec{H}$.

A ordem de magnitude do ângulo β entre os eixos de rotação e de figura é $0'',3$ ou sejam, 10 metros à superfície da Terra; este resultado significa que os polos geográficos estão afastados cerca de 10 metros dos polos correspondentes ao eixo de figura. Este movimento pode ser sòmente detectado por meio de observações de alta precisão, mostrando a variação da latitude astronómica de qualquer lugar situado na terra.

As equações do movimento mostram ainda que o eixo instantâneo de rotação descreve um cone de revolução em torno do eixo de figura num período de cerca de 10 meses, denominado período livre ou nutação euleriana livre. Se considerarmos a Terra como um corpo elástico, as deformações provocadas pelas forças centrífugas são ao longo deste eixo.

Os cálculos feitos a partir de muitas observações de latitude mostram que o período da nutação livre é cerca de 14 meses, isto é, há uma divergência de cerca de 4 meses entre o valor calculado teòricamente e o valor obtido a partir das observações.

Temos de considerar agora as forças exteriores, isto é, a equação (1) sendo $\vec{G} \neq 0$ e tendo em atenção a pequena influência do Sol e da Lua. A integração das equações do movimento é mais difícil e obtém-se uma primeira aproximação considerando sòmente o 1.º termo do 2.º membro das equações (1), obtendo-se as denominadas equações de Poisson:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{Cn \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{Cn \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

sendo $n = \omega_3 =$ const. e U o potencial gravitacional das forças exteriores (para a dedução destas equações ver, por exemplo, Vicente 1961).

É conveniente considerar as posições e movimentos no espaço dos eixos atrás mencionados para o caso em que $\vec{G} \neq 0$ e que corresponde ao movimento real da Terra. O movimento euleriano ainda se executa mas a equação (1) mostra que o eixo do vector $\vec{H}$ não é fixo no espaço. Esta equação mostra que o movimento de $\vec{H}$, em relação ao sistema de coordenadas fixo $OXYZ$, depende das posições do Sol e da Lua, sendo este movimento designado com o nome de movimento luni-solar. O movimento dos eixos de figura e rotação pode ser considerado como resultante dos movimentos destes eixos em torno de $\vec{H}$ e, em seguida, o movimento de $\vec{H}$ no espaço.

Uma das teorias antigas da nutação mais interessantes é devida a Poincaré (1910) que considera um núcleo fluido rodeado por um envólucro rígido. Poincaré utilizou o princípio de que as componentes da velocidade do líquido são funções lineares das coordenadas, e o problema relativo a um elipsóide pode reduzir-se ao caso de um líquido contido numa superfície esférica se transformarmos as coordenadas e as velocidades correspondentes por meio de deformações homogéneas (desta maneira teremos de considerar sòmente superfícies esféricas e sem haver alteração das condições fronteiras).

Designamos por (A, C) os momentos de inércia principais da Terra (considerada como um esferóide de semi-eixos a e c), por (A_0, C_0) os do envólucro e por (A_1, C_1) os do núcleo. Supondo que o centro de massa e os eixos principais de inércia do envólucro coincidem com os do núcleo, e que o núcleo tem vorticidade uniforme, podemos escrever as componentes da velocidade (u, v, w) da seguinte maneira:

$$u = \frac{a}{c} q_1 z - r_1 y + q z - r y$$

$$v = r_1 x - \frac{a}{c} p_1 z + r x - p z$$

$$w = \frac{c}{a} p_1 y - \frac{c}{a} q_1 x + p y - q x$$

sendo (p_1, q_1, r_1) as componentes da rotação do núcleo e (p, q, r) referem-se a uma rotação uniforme de todo o corpo.

As equações dinâmicas e as equações de HELMHOLTZ em relação aos eixos móveis mostram que $r = \text{const.} = \omega$, considerando $L = k \cos \sigma t$, $M = k \operatorname{sen} \sigma t$ como os momentos das forças exteriores.

Esta teoria simplificada conduz às seguintes conclusões importantes:

A) Se as forças perturbadoras luni-solares fossem invariáveis no espaço $(\sigma = -\omega)$ a existência de um núcleo líquido não teria influência

Se as forças perturbadoras luni-solares variarem no espaço $(\sigma = -\omega + n$ sendo $\frac{n}{\omega}$ pequeno) o núcleo líquido altera os movimentos terrestres.

B) A nutação euleriana tem um período mais curto do que no caso de um corpo sólido e rígido.

A explicação do alongamento do período da nutação euleriana pode sòmente obter-se considerando a elasticidade da Terra e a existência do núcleo líquido.

Mencionámos sucintamente o problema das nutações terrestres e os deslocamentos dos diversos eixos que são importantes considerar na teoria do movimento da Terra. Se considerarmos a constituição da Terra, tal como sabemos actualmente, podemos imaginar os movimentos complexos que aparecem no núcleo líquido em virtude dos deslocamentos no espaço dos eixos mencionados.

Outro aspecto das acções do Sol e da Lua sobre a Terra refere-se às marés de atracção, provocadas pelas forças luni-solares, as quais, deformando a Terra, dão origem às marés da parte sólida da Terra.

Apesar de que as marés terrestres dependem das acções do Sol e da Lua, tal como acontece com a teoria da nutação, o facto é que as investigações feitas no passado acerca destes dois problemas foram sempre consideradas separadamente.

Componentes diferentes da maré terrestre produzem as nutações que acabámos de mencionar, correspondendo as nutações forçadas às marés diurnas.

As investigações relativas às marés da parte sólida da Terra introduzem os denominados números característicos das marés terrestres: h, k e l. Devemos fazer notar que estes números foram derivados considerando-se uma teoria estática, aplicada a um modelo sólido e elástico da Terra, com simetria esférica, e o potencial perturbador de maré é uma função esférica harmónica de 2.ª ordem.

A teoria da maré terrestre tem de entrar em consideração com os factos de que a Terra está num estado de tensão inicial e tem gravidade. Temos a possibilidade de considerar uma teoria estática em virtude dos períodos das oscilações livres de tipo maré serem muito curtos em comparação com quaisquer períodos das marés.

As equações do movimento, utilizando coordenadas rectangulares, constituem um sistema de 3 equações do tipo

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

onde (u, v, w) são as componentes do deslocamento do ponto material a partir da posição inicial, ρ a densidade, V o potencial das forças actuando na terra, e o estado de tensão (existente no ponto (x, y, z) no instante t) pode ser especificado pelas 6 componentes da tensão $X_x, X_y, \cdots$ (designando estas componentes a composição das tensões inicial e adicional).

A solução das equações do movimento, considerando a Terra constituida por um envólucro e um núcleo líquido, juntamente com a equação de POISSON

$$\nabla^2 K = 4\pi f\left(U\frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0\Delta\right)$$

sendo K o potencial adicional devido aos corpos exteriores (Sol e Lua) e às variações adicionais de densidade, f a constante de gravitação, U o deslocamento radial, Δ a dilatação cúbica, r a distância contada a partir da origem e ρ_0 a densidade no estado inicial, permite determinar os valores de h, k e l para o caso estático, e os valores obtidos por TAKEUCHI (1950) apresentam concordância com as observações.

A solução do problema das marés terrestres permitiu tornar mais fácil o tratamento conjunto dos problemas das nutações e das marés terrestres.

A teoria desenvolvida por Sir HAROLD JEFFREYS e por mim (1957) utilizou a solução estática para o envólucro, obtida por TAKEUCHI, simplificando-se assim consideràvelmente os cálculos numéricos. Adoptámos dois modelos para o núcleo: 1.º modelo de partícula central: considera o núcleo como um fluido homogéneo e incompressivel, adicionando-se um ponto material no centro para dar uma estimativa dos possiveis efeitos do núcleo interior; 2.º modelo Roche: considera a variação de densidade provocada ùnicamente pela compressibilidade. Estes modelos podem considerar-se como representando casos limites do possivel comportamento do núcleo, e as expressões adoptadas para os deslocamentos no núcleo supõem-se representar os movimentos principais no seu interior.

Esta teoria conduz à determinação não só dos periodos das diversas nutações como também dos valores dos números da maré terrestre h, k e l para as componentes principais das marés diurnas. Desta maneira foi possivel, pela primeira vez, tratar conjuntamente os problemas das nutações e das marés terrestres.

O estudo das oscilações livres e forçadas da Terra foi levado a efeito por PEKERIS e colaboradores (1959), que consideraram os periodos naturais determinados para oscilações dos tipos radial, torsional e esferoidal. As equações do movimento, expressas em coordenadas esféricas (r, φ, θ), sendo as componentes do deslocamento $\vec{u}$ representadas por $(u_r, u_\theta, u_\varphi)$, são

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \rho_0 g_0\Delta + \rho_0\frac{\partial K}{\partial r} - \rho_0\frac{\partial}{\partial r}(g_0 u_r) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{\mu}{r}\frac{\partial e_{r\theta}}{\partial\theta} + \\ &+ \frac{\mu}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\mu}{r}(4e_{rr} - 2e_{\theta\theta} - 2e_{\varphi\varphi} + \\ &+ \cot\theta\, e_{r\theta})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= \frac{\rho_0}{r}\frac{\partial K}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial r}(\mu e_{r\theta}) + \\ &+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(-g_0\rho_0 u_r + \lambda\Delta + 2\mu e_{\theta\theta}) + \\ &+ \frac{\mu}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial e_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\mu}{r}\left[2\cot\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} - \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{u_\theta}{r}\cot\theta - \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right) + 3e_{r\theta}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} &= \frac{\rho_0}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial K}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial r}(\mu e_{r\varphi}) + \\ &+ \frac{\mu}{r}\frac{\partial e_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(-g_0\rho_0 u_r + \lambda\Delta + \\ &+ 2\mu e_{\varphi\varphi}) + \frac{3\mu}{r}e_{r\varphi} + \frac{2\mu}{r}\cot\theta\, e_{\theta\varphi}\end{aligned}$$

sendo g_0 a gravidade no estado inicial, e_{ij} as componentes da deformação e (λ, μ) as constantes de LAMÉ. Além das oscilações forçadas, também estudaram as marés terrestres, calculando os valores de h, k e l, e considerando uma teoria dinâmica.

As teorias que acabámos de mencionar fornecem uma explicação satisfatória dos movimentos da Terra correspondentes à precessão e nutação, às marés terrestres e às oscilações livres. Infelizmente, estas teorias não adoptaram o mesmo modelo para a constituição da Terra mas, apesar disso, os resultados apresentam uma certa concordância.

Desejaria chamar a atenção para o facto de que, em todos estes problemas, não é considerada a camada fronteira entre os movimentos do envólucro e do núcleo viscoso. BONDI e LYTTLETON (1953) mostraram que as equações do movimento contêm termos dependentes da viscosidade mas sòmente para a camada fronteira.

Devemos notar que os valores obtidos para os números h, k e l diferem cerca de $5\,^0/_0$ entre as três teorias mencionadas. Em virtude destas teorias adoptarem sistemas de coordenadas diferentes e os sistemas de equações diferenciais obtidos serem complicados, considerou-se conveniente tornar a calcular as equações diferenciais e verificar que os sistemas de equações deduzidos pelos diversos autores são equivalentes. Este trabalho de investigação foi recentemente completado por Sir HAROLD JEFFREYS e por mim (1965), tendo-se verificado que as equações do movimento utilizadas na teoria das nutações, na teoria da maré terrestre e na teoria das oscilações livres são equivalentes. Deste facto pode-se tirar a conclusão de que as diferenças de $5\,^0/_0$, encontradas nos valores da maré terrestre, não podem ser atribuidas ao possível esquecimento de alguns termos, das equações diferenciais do movimento, pelos autores destas teorias.

Uma explicação possível para as diferenças encontradas pode residir na utilização de diferentes modelos para o envólucro, mas não parece provável que possam apresentar tais variações. Outras explicações possíveis são: a) o emprego de técnicas diferentes de cálculo numérico para a integração das equações do movimento; b) diferenças nos modelos adoptados para o núcleo, porque sabemos, pelos resultados obtidos para as nutações, a grande importância do núcleo liquido especialmente para as marés diurnas.

Para terminarmos esta análise resumida acerca da influência do núcleo, devemos mencionar o deslocamento para oeste do campo magnético secular, o qual é causado muito provàvelmente pelos movimentos no interior do núcleo, conforme as conclusões obtidas recentemente a partir do modelo teórico de R. HIDE, que mostram a existência de ondas propagando-se no seu interior.

Dissemos que as teorias explicando as nutações, as marés terrestres e as oscilações livres também admitem a existência de certos tipos de movimentos no interior do núcleo, e parece-me que um dos objectivos das futuras investigações sobre estes problemas deverá ser a construção de uma teoria que abranja todos estes movimentos terrestres e, portanto, explicando conjuntamente todas as observações conhecidas destes fenómenos.

BIBLIOGRAFIA

BONDI, H. e LYTTLETON, R. A., Proc. Camb. Phil. Soc. **49**, (1953) 498-515.

JEFFREYS, H. e VICENTE, R. O., Monthly Notices Royal Astr. Soc. **117**, (1957) 142-173.

JEFFREYS, H. e VICENTE, R. O., Mémoires Cl. Sciences Acad. Royale Belgique **31**, (1965) 3-31.

PEKERIS, C. L., Z. ALTERMAN, H. JAROSCH, Proc. Royal Soc. London, **252**, (1959) 80-95.

POINCARÉ, H., Bulletin Astronomique **27**, (1910) 321-356.

TAKEUCHI, H., Trans. Amer. Geophys. Union **31**, (1950) 651-689.

VICENTE, R. O., Physics and Chemistry of the Earth **4** (1961) 251-280.

Institut de Programmation de la Faculté des Sciences de Paris

I — GENERALITES SUR LA PROGRAMMATION

L'emploi des calculateurs électroniques ouvre d'immenses possibilités à la science et à la technique: c'est pourquoi il s'étend chaque jour et ne cessera de s'étendre.

Pour utiliser une telle machine en vue de résoudre un problème, il est nécessaire d'exprimer dans un langage approprié, qui soit utilisable par la machine, la solution de ce problème, c'est-à-dire la suite des opérations à effectuer sur les données. La solution ainsi rédigée constitue un «*programme*». Ecrire des programmes au sens que nous venons de donner à ce mot est le travail de spécialistes qu'on nomme des «*programmeurs*».

Ces spécialistes doivent avoir une formation tout à fait particulière et ce à des niveaux très différents. On distingue un premier niveau où le spécialiste est chargé de la surveillance et de la conduite de la calculatrice. Il peut être amené à écrire des programmes simples. C'est l'*opérateur-programmeur*.

A un deuxième niveau, le spécialiste écrit des programmes plus compliqués, donne des directives aux opérateurs-programmeurs, et aide l'utilisateur qui a besoin de la machine à mettre son problème sous une forme admissible. C'est là le rôle du *programmeur d'études*.

A un troisième niveau, le spécialiste rencontre des problèmes d'un autre type. Il est amené à étudier de nouvelles méthodes de calcul, à élaborer des langages de programmation plus appropriés à ces problèmes. Il doit aussi spécifier les caractéristiques que devront posséder des machines futures, afin de résoudre aisément de nouveaux problèmes. Il doit ainsi collaborer étroitement avec les constructeurs à la réalisation de ces machines. Il est d'ailleurs évident qu'à ce niveau une spécialisation s'impose, comme nous le verrons plus loin. Ces spécialistes peuvent être qualifiés d'ingénieurs en programmation ou d'*experts en traitement de l'information;* car les calculatrices électroniques ne résolvent pas seulement des problèmes de calcul: elles sont susceptibles de «traiter» des questions beaucoup plus générales, transformant ainsi l'«information» qui leur est donnée en «information» d'une nature différente.

II — L'INSTITUT DE PROGRAMMATION DE LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

L'Institut a été créé par le décret du 26 Novembre 1963. Son rôle est triple:

— former à tous les niveaux les spécialistes nécessaires au fonctionnement d'un centre de calcul.

— initier au calcul électronique les étudiants, les chercheurs, les ingénieurs des différentes disciplines scientifiques qui sont ou peuvent devenir des utilisateurs du calcul électronique,

— promouvoir des recherches tant dans le domaine de l'utilisation des calculatrices existantes que dans celui de la conception et de la réalisation de calculatrices futures.

Afin de remplir ses différentes fonctions, l'Institut de Programmation

— prépare au *Diplôme d'opérateur-programmeur de l'Université de Paris;*

— prépare au *Diplôme de programmeur d'études de l'Université de Paris;*

— prépare au *Diplôme d'expert en Traitement de l'Information;*

— initie les étudiants issus de Propédeutique aux techniques de la programmation et de l'analyse numérique dans le cadre du *certificat de «Technologie de la Programmation»*, certificat qui fait partie du «Diplôme d'Études Supérieures Techniques (D.E.S.T.)», mention programmation, et de la «Licence ès Sciences Appliquées» (mention programmation);

— dispense aux étudiants en analyse numérique (certificat de licence) des éléments de programmation et d'emploi des calculatrices;

— organise des cours de *«recyclage»* pour les chercheurs et les ingénieurs de l'Université, du C.N.R.S., ou d'organismes privés, de façon à leur permettre d'écrire eux-mêmes des programmes et de communiquer efficacement avec les spécialistes;

— organise des *séminaires* et des *conférences* de spécialistes français ou étrangers, destinés plus particulièrement aux chercheurs dont l'intérêt touche à la programmation ou au traitement de l'information.

III — CONDITIONS D'INSCRIPTION

Diplôme d'opérateur-programmeur

Les candidats doivent être titulaires du baccalauréat mathématiques ou technique mais des dispenses peuvent être accordées aux étudiants qui ont le niveau du baccalauréat.

L'inscription définitive a lieu à l'issue d'un examen probatoire organisé après quelques semaines de cours.

Les cours ont lieu d'octobre à mars de l'année suivante.

En plus de la réussite à l'examen définitif, un stage d'une durée de trois mois est nécessaire pour l'obtention du Diplôme.

Il est recommandé aux élèves de consacrer tout leur temps à la préparation du diplôme.

Diplôme de programmeur d'études

Les candidats doivent être titulaires du certificat d'Analyse numérique; des dispenses peuvent être accordées aux élèves ayant le niveau de la propédeutique et des connaissances suffisantes des méthodes de l'analyse numérique.

L'inscription a lieu à l'issue d'un examen probatoire.

Les cours durent d'octobre à mars de l'année suivante.

En plus de la réussite à l'examen définitif, un stage d'une durée de trois mois est nécessaire pour l'obtention du Diplôme.

Il est recommandé aux élèves de consacrer tout leur temps à la préparation du Diplôme.

Diplôme d'expert en traitement de l'information

Le niveau exigé est celui de la Licence de mathématiques. Sont admis sans examen les élèves qui possèdent, soit une telle licence, soit le diplôme de sortie d'une École d'Ingénieurs, soit la licence ès Sciences économiques. Des connaissances générales en programmation au moins équivalentes à celles qui permettent d'obtenir le diplôme de programmeur d'études sont nécessaires.

La durée des cours communs à tous les élèves est d'une année; elle est suivie d'une année de spécialisation. (Les cours ont commencé en février 1965. Les suivants commenceront en octobre 1966).

Certificat de technologie de la programmation

Pour s'inscrire, il faut avoir réussi les épreuves de mathématiques du certificat MGP, ou les épreuves de deux matières du certificat MPC, ou les épreuves de quatre matières du certificat SPCN.

La durée des cours est d'un semestre.

Le certificat est délivré aux élèves qui ont réussi à l'examen et accompli un stage professionnel d'une durée de *neuf mois*.

Recyclages

De nombreuses sessions ont lieu chaque année; leur durée est d'une semaine à temps complet. Les participants peuvent suivre plusieurs recyclages successifs.

IV — DIPLOME D'OPERATEUR-PROGRAMMEUR DE L'UNIVERSITE DE PARIS

L'enseignement qui prépare à ce diplôme a pour but de former des techniciens capables

— de conduire des calculatrices électroniques,

— d'effectuer toutes les opérations mécanographiques annexes,

— d'écrire des programmes d'après des directives détaillées,

— d'effectuer des calculs nécessaires à la vérification d'un programme.

Cet enseignement est destiné en principe aux titulaires du baccalauréat, mais des dispenses peuvent être accordées à des candidats qui possèdent seulement le niveau du baccalauréat mathématiques ou technique.

Les candidats doivent prendre une inscription provisoire au Secrétariat de l'Institut de Programmation; ils passent après quelques semaines de cours, un examen probatoire destiné à vérifier leurs aptitudes et leur travail.

Après réussite, ils peuvent s'inscrire à la Faculté des Sciences et bénéficier ainsi des avantages afférents à la qualité d'étudiant.

L'examen définitif a lieu après un semestre. Les candidats qui ont obtenu une note d'au moins 10 sur 20 reçoivent une attestation.

Le Diplôme d'*opérateur-programmeur de l'Université de Paris*, créé par l'arrêté ministériel du 26 novembre 1963, n'est délivré qu'aux candidats dont la moyenne à l'examen final est au moins égale à 12 sur 20 et qui, à l'issue d'un stage de trois mois, rédigent un rapport de stage approuvé par le Directeur de l'Institut de Programmation.

PROGRAMME DES MATIERES ENSEIGNEES

1. *Mathématiques*

— Identités remarquables; formules classiques d'analyse combinatoire.

— Polynômes à une variable: division selon les puissances croissantes ou décroissantes; calcul du pgcd et du ppcm; polynômes à plusieurs variables, dérivation et intégration.

— Notion de fonction; fonction inverse; transcendantes usuelles.
— Notations matricielles et opérations associées.
— Problèmes de numération, bases, notion de cadrage; interpolation; méthodes de calcul.

Des *Travaux Pratiques* permettent d'apprendre à calculer à l'aide de machines de bureau ou de tables.

2. *Programmation*

— Réduction d'un calcul à des enchaînements d'opérations élémentaires: embranchements, boucles, sous-programmes. Notion d'organigramme. Ecriture d'organigrammes simples illustrant le cours de mathématiques.
— Programmation symbolique: généralités, étude détaillée d'un langage particulier.
— Aperçu sur les langages machines, notion de registre, adressage, mémoires auxiliaires.
— Traduction dans le langage d'une machine donnée d'organigrammes ou de programmes symboliques.

Des *Travaux Pratiques* permettent de mettre au point des programmes écrits et d'apprendre à conduire un ordinateur: usage des différentes unités, relevé des anomalies, lectures des compteurs et voyants, analyse pas à pas, extraction du contenu des mémoires utilisées par le programme.

3. *Organisation des machines*

— Notions d'éléments et d'organe; principaux organes d'une machine.
— Codes numériques et alphanumériques; codes d'instructions; langage machine.
— Mémoires: différents types, caractéristiques mémoires auxiliaires; organe d'entrées et de sorties.

4. *Mécanographie*

— Principe de fonctionnement des machines à cartes perforées classiques: perforatrices, reproductrices, trieuses, tabulatrices, lecteurs de cartes, imprimantes.
— Machines à ruban perforé.
— Dérouleurs de bandes magnétiques.
— Problèmes de changement de support d'information.

Des *Travaux Pratiques* permettent aux étudiants de se familiariser avec les équipements usuels.

ORGANISATION DES ETUDES

Les cours commencent au début d'octobre et durent deux trimestres. Il est souhaitable que les élèves puissent consacrer tout leur temps à cet enseignement.

L'emploi du temps hebdomadaire est le suivant:

Programmation: Organigrammes, langage machine	1 heure
Programmation: Langages symboliques	1 heure
Méthodes de calcul (premier trimestre)	1 heure ½
Mécanographie (deuxième trimestre)	1 heure ½
Mathématiques	1 heure ½
Organisation des machines	1 heure ½
Exercices de programmation	2 heures
Travaux pratiques de programmation	3 heures
Travaux pratiques de mécanographie	2 heures
Interrogation écrite	1 heure ½

L'examen probatoire qui a lieu après quelques semaines de cours comporte les épreuves suivantes:

Nature de l'épreuve	Durée	Coefficient
Organigrame	2 heures	2
Mathématiques	1 heure	1
Technologie	1 heure	1

Les études sont sanctionnées par un examen final comportant les épreuves suivantes:

1)

Nature de l'épreuve	Durée	Coefficient
Organigramme:		
Mathématiques	1 heure	½
Algorithme	2 heures	½
Programmation:		
Langage symbolique	2 heures	½
Langage machine	1 heure	½

2) Sous réserve d'*admissibilité* après ces épreuves:

Nature de l'épreuve	Durée	Coefficient
Interrogation de Technologie		1
Epreuve pratique de mécanographie	2 heures	1
Epreuve pratique de programmation	2 heures	1

En cas de réussite (obtention d'une moyenne au moins égale à 10 sur 20) il est délivré une attestation portant mention du résultat.

Le diplôme n'est délivré qu'aux candidats

— dont la moyenne à l'examen final est au moins 12 sur 20 (mention A.B.),

— qui effectuent un stage d'une durée de trois mois dans un centre de calcul, au cours duquel ils complètent leur formation pratique et rédigent un rapport de stage.

— dont le rapport de stage est approuvé par le Directeur de l'Institut de Programmation.

L'Institut de Programmation se charge d'organiser les stages.

V — DIPLOME DE PROGRAMMEUR D'ETUDES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

L'enseignement qui prépare à ce diplôme a pour but de former des spécialistes capables:

— d'appliquer des directives générales qui leur sont fournies pour la résolution d'un problème,

— de traiter complètement des problèmes numériques ou non de difficulté moyenne,

— de fournir à leur tour des directives détaillées à des opérateurs-programmeurs.

Les candidats doivent être titulaires du certificat d'analyse numérique; des dispenses peuvent être accordées aux élèves ayant le niveau de la propédeutique et des connaissances suffisantes des méthodes de l'analyse numérique.

Les candidats doivent prendre une inscription provisoire au secrétariat de l'Institut de Programmation et passer après quelques semaines de cours un examen destiné à vérifier leurs connaissances et leurs aptitudes.

En cas de réussite ils peuvent alors s'inscrire à la Faculté des Sciences et bénéficier ainsi des avantages afférents à la qualité d'étudiant.

L'examen définitif a lieu au mois de mars. En cas de réussite (obtention de la moyenne) il est délivré une attestation portant mention du résultat.

Le diplôme de *Programmeur d'études de l'Université de Paris*, créé par l'Arrêté Ministériel du 26 novembre 1963, n'est délivré qu'aux candidats dont la moyenne à l'examen final est au moins égale à 12 sur 20 (mention A.B.) et qui, à l'issue d'un stage de trois mois, rédigent un rapport de stage approuvé par le Directeur de l'Institut de Programmation.

PROGRAMME DES MATIERES ENSEIGNEES

1. *Révision d'analyse numérique:*

— Interpolation, dérivation, intégration.
— Résolution d'équations algébriques.
— Systèmes d'équations linéaires; problèmes de valeurs et vecteurs propres.
— Equations différentielles.

2. *Méthodes mathématiques de la programmation:*

— Algorithmes non numériques; problèmes combinatoires, tris, rangements.
— Traitement des données groupées: problèmes de manipulation de l'information.
— Opérations sur les structures: algèbre de Boole; théorie des graphes.

3. *Programmation*

Généralités:

— Algorithmes et organigrammes.
— Étude approfondie d'un langage algorithmique.
— Programmation d'algorithmes numériques et non numériques.

Langages de programmation:

— Langages séquentiels, non séquentiels, numériques, symboliques.
— Adressage absolu, relatif, indexé, indirect, à une ou plusieurs adresses.
— Principes d'utilisation des mémoires auxiliaires et de programmation des entrées-sorties.
— Mise au point d'un programme: diverses méthodes d'analyse d'un programme.
— Étude d'un ensemble utilisant des bandes ou des disques.

Des *Travaux Pratiques* permettent l'assimilation de ces notions.

4. *Organisation des machines*

Généralités sur les machines:

— Les signaux d'information: mesure de l'information, représentation et modes; généralités sur les codes, codes détecteurs d'erreurs.
— Notion sur les éléments logiques; exemple d'organisation d'éléments en vue de réaliser une opération donnée.
— Mémoires auxiliaires et organes d'accès; notion de canal; exemples d'organisation.

Des*Travaux pratiques* illustrent cet enseignement.

5. *Cours à option.*

Les élèves doivent suivre l'un des quatre cours à leur choix:

1) Algèbre de Boole et Applications: Étude des circuits à relais, des chaînes de contacts, des circuits réflexes.
2) Applications de la Théorie des Graphes: Étude des graphes planaires.
3) Langages de traitement de l'information non numérique: étude d'un langage particulier (LISP), applications.
4) Eléments de recherche opérationelle: Gestion de stocks, problèmes de maintenance, programmes linéaires, problèmes d'ordonnancement.

ORGANISATION DES ETUDES

Les cours commencent au début d'Octobre et durent deux trimestres. Il est souhaitable que les étudiants consacrent tout leur temps à cet enseignement.

L'emploi du temps hebdomadaire est le suivant:

Révisions d'Analyse numérique	1 heure ½
Langages de Programmation	3 heures
Méthodes mathématiques	2 heures
Organisation des machines	1 heure ½
Exercices de programmation	1 heure ½
Travaux pratiques de programmation	2 heures
Travaux pratiques de technologie	1 heure
Interrogation écrite	1 heure ½

Les cours à option consistent chacun en un total de 8 séances de 2 heures.

L'examen probatoire a lieu après quelques semaines de cours et comporte les épreuves suivantes:

Nature de l'épreuve	Durée	Coefficient
Mathématiques	1 heure ½	1 ½
Programmation	1 heure ½	1 ½
Organisation des machines	1 heure	1

Les études sont sanctionnés par un examen final comportant les épreuves suivantes:

1)

Nature de l'épreuve	Durée	Coefficient
Programmation (problèmes numériques)	3 heures	1 ½
Programmation et algorithmes non numériques	3 heures	1 ½

2) Sous réserve *d'admissibilité* après ces épreuves:

	Coefficient
Interrogation sur l'organisation des machines	½
Interrogation (matière à option)	½
Analyse ou mise au point d'un programme (3 h.)	1

En cas de réussite (obtention d'une moyenne au moins égale à 10 sur 20) il sera délivré une attestation portant mention du résultat.

Le Diplôme n'est délivré qu'aux candidats:

— dont la moyenne à l'examen final est au moins 12 sur 20 (mention A.B.).

— qui effectuent un stage d'une durée de trois mois dans un centre de calcul ou un laboratoire, au cours duquel ils programment un problème pratique et rédigent un rapport de stage.

— dont le rapport de stage est approuvé par le Directeur de l'Institut.

L'Institut de Programmation se charge d'organiser les stages.

VI — CERTIFICAT DE TECHNOLOGIE DE LA PROGRAMMATION

L'enseignement conduisant à ce certificat est une initiation à

— l'Analyse numérique
— la mécanisation des calculs
— l'utilisation des matériels électroniques

Ce certificat concerne plus particulièrement les étudiants désireux d'obtenir le *Diplôme d'études superieures techniques*, mention Programmation, créé par l'Arrêté ministériel du 5 Mai 1961.

Pour obtenir ce diplôme, les candidats doivent remplir les conditions suivantes:

— obtenir le certificat de Technologie de la Programmation

— obtenir un certificat d'études supérieures choisi dans la liste ci-dessous:

Analyse numérique
Calcul Automatique
Physique Mathématique Appliquée.

— justifier d'au moins neuf mois de pratique industrielle ou de laboratoire.

Ce certificat entre également dans la composition de la *Licence* ès *Sciences appliquées*, mention programmation, créée par l'Arrêté ministériel du 16 Juillet 1962.

Les candidats au Certificat de technologie de la programmation doivent être titulaires de l'un des certificats d'études supérieures préparatoires de la licence (ou d'un titre équivalent) ou avoir satisfait aux épreuves de mathématiques du C.E.S. de MGP ou aux épreuves de deux matières du C.E.S. de MPC ou aux épreuves de quatre matières du C.E.S. de SPCN.

PROGRAMME DES MATIERES ENSEIGNEES

1. *Notions d'Analyse numérique*

— Approximation polynomiale, interpolation.

— Résolution d'équations algébriques.

— Dérivation et intégration numérique; équatons différentielles.

— Résolution de systèmes linéaires: procédés systématiques, procédés itératifs; inversion de matrices; problèmes de valeurs et vecteurs propres.

2. *Programmation*

— Notion d'algorithme; variables simples ou indicées; embranchements, boucles; sous-programmes; organigrammes.

— Description d'un langage symbolique; écriture en Algol d'algorithmes tirés du cours d'Analyse numérique.

— Généralités sur la programmation en langage machine: instructions, représentation des entiers et des réels.

— Etude d'un langage machine particulier.

Des *Travaux Pratiques* permettent la mise au point des programmes.

3. *Organisation des machines*

— Généralités sur les machines; différents constituants: composants, éléments, opérateurs, organes.

— Représentation physique de l'information, codes numériques et alphanumériques; réalisation des opérations arithmétiques.

— Différents types de mémoires: techniques d'écriture et de lecture.

4. *Cours à option*

Les élèves doivent suivre l'un des trois cours suivants à leur choix:

1) Calcul analogique: calcul analogique par courants continus; analogie rhéoélectrique; réseaux d'impédances.
2) Gestion des entreprises: conception, organisation, création et traitement des fichiers; analyses de problèmes classiques de gestion: paye, facturation, etc. ...
3) Statistique élémentaire: rappels de calcul des probabilités; caractéristique d'un échantillon; notions sur l'estimation et les tests.

ORGANISATION DES ETUDES

Les cours commencent fin février et durent un semestre. L'emploi du temps hebdomadaire est le suivant:

Analyse numérique	2 heures
Langages de programmation	2 heures
Organisation des machines	1 heure
1 cours à option (6 séances)	2 heures
Exercices de mathématiques	1 heure
Exercices de programmation	1 heure
Travaux pratiques de programmation	2 heures
Travaux pratiques de technologie	1 heure

Les études sont sanctionnées par un examen final comportant les épreuves suivantes:

1)

Nature de l'épreuve	Durée	Coefficient
Analyse numérique	1 heure ½	2
Programmation	2 heures ½	2

2) Sous réserve d'admissibilité après ces épreuves:

Interrogation de technologie	2
Interrogation sur une matière à option	2
Épreuve pratique de programmation (3 h.)	4

VII — DIPLOME D'EXPERT EN TRAITEMENT DE L'INFORMATION

Cet enseignement entre dans le cadre classique des études universitaires. Il déborde le domaine strict de la programmation pour faire partie du domaine plus vaste du «traitement de l'information». Il comporte tout d'abord deux parties indépendantes permettant aux étudiants d'acquérir des connaissances solides et cohérentes dans les deux domaines de l'information non numérique — on entend par là l'étude de nombreux problèmes qui n'ont pas un caractère numérique — et de l'organisation des machines. Viennent ensuite des cours de spécialisation visant à former selon les cas:

a) des chercheurs en analyse numérique, dont le rôle est de mettre au point de nouvelles méthodes et de constituer des ensembles (ou bibliothèques) de programmes utilisables par tous;

b) des experts en traitement de l'information non numérique qui contribuent, entre autres activités, à l'élaboration de systèmes de programmation;

c) des spécialistes des problèmes de gestion et de recherches opérationelles;

d) des spécialistes hautement qualifiés capables de participer à la création de matériels nouveaux.

L'ensemble des connaissances dispensées constituera ainsi une formation de base pour les futurs cadres de direction des centres de calcul et des centres de création des machines futures.

Le niveau requis à l'entrée est celui de la Licence ès Sciences, ou du diplôme de sortie d'une École d'Ingénieurs ou de la Licence ès Sciences économiques. De solides connaissances en programmation, au moins équivalentes à celles qui permettent d'obtenir le diplôme de programmeur d'études sont également exigées.

Pour les candidats qui ont à parfaire leurs connaissances, des cours complémentaires de mathématiques et de programmation sont organisés chaque année. Des dispenses sont accordées au vu des résultats d'un examen d'entrée.

PROGRAMME DES MATIERES ENSEIGNEES

Comme on l'a vu ci-dessus, les études comportent d'abord un enseignement d'une durée de deux semestres, commun à tous les étudiants. Il se subdivise en deux parties indépendantes donnant lieu à des examens distincts. On ne peut suivre simultanément les deux parties qu'en consacrant tout son temps à ces études.

1. *Traitement de l'information non numérique*

— Compléments de mathématiques dans le domaine de l'algèbre, de l'analyse, du calcul des probabilités.
— Systèmes formels, analyse syntaxique.
— Algèbre de Boole.
— Langages de programmation adaptés aux structures principales rencontrées en information non numérique.
— Algorithmes non numériques: applications aux problèmes de traduction d'un langage dans un autre.

2. *Organisation des machines électroniques*

— Structures fondamentales des machines: Représentation physique de l'information; notions d'élément logique; regroupement de ces éléments pour réaliser une opération simples. Système de mémoires.
— Codes et langages: Représentation des informations en mémoire et sur les supports externes. Forme des intructions. Systèmes d'adressages. Langages-machine symboliques. Aperçu sur quelques machines actuelles.
— Logique globale des machines: Application aux systèmes de programmation. Gestion des unités et de la mémoire par un programme moniteur.
— Optimisation: Modèles stochastiques et déterministes. Méthodes d'optimisation. Processus optimaux. Exemples de synthèse des stratégies optimales. Applications.

Pour chacune de ces deux parties, l'examen comprend:

Nature de l'épreuve	Coefficient
Une épreuve théorique, comprenant obligatoirement une question de cours	2
Une épreuve pratique: travail de bureau d'études ou épreuve sur machine	2
Une épreuve orale	2

Après avoir été reçus à ces deux examens, les étudiants pourront suivre les cours à option suivants:

Option analyse numérique

Le programme est celui du Diplôme d'Études Approfondies, mention «Analyse numérique», ou du certificat d'Analyse numérique approfondie, dont les étudiants devront suivre les cours qui comprennent:

— Théorie de l'approximation.
— Equations aux dérivées partielles.
— Statistiques et applications aux problèmes de stabilité.

Les étudiants devront de plus suivre l'un des cours suivants:

— Approximation des problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles.
— Problèmes d'optimisation. Théorie des fonctions convexes.
— Fonctions spéciales. Equations intégro-différentielles.

Option techniques non numériques

Le programme sera le suivant:

— Théorie approfondie des algèbres de Boole.
— Grammaires formelles, théorie des automates.

— Groupes de permutations et tris.
— Compléments d'algèbre appliquée.
— Problèmes combinatoires et méthode de dénombrement.

Les étudiants devront de plus suivre l'un des cours suivants:

— Problèmes combinatoires et méthodes d'énumération.
— Logique mathématique: Sémantique et fonctions récursives.

Option gestion et applications économiques

Le programme sera le suivant:

— Structure de l'information utilisée en gestion, fichiers et méthode de tri.
— Recherche opérationnelle: programmation linéaire et quadratique, algorithmes d'optimisation.
— Programmation dynamique: files d'attente, stocks.
— Modèles: leur simulation.

Option organisation des machines électroniques

Le programme sera le suivant:

— Notions sur la théorie de l'information et sur ses applications au traitement de l'information. Compléments sur les codes.
— Compléments sur les éléments des circuits logiques: éléments de théorie générale, méthodes de calcul des marges de fonctionnement, notions sur les technologies futures.
— Notions sur le calcul analogique: principe, organes principaux. Exemples: conversions analogique-numérique et numérique-analogique.
— Machines spécialisées, calculateurs flexibles, machines en temps réel, notions sur les analyseurs différentiels numériques.
— Méthodes de gestion des calculatrices; problèmes de gestion en temps réel.
— Conception d'un matériel nouveau à partir de spécifications externes; choix des composants.

Pour ces quatre options, l'enseignement est semestriel et comporte l'équivalent de quatre heures par semaine (1 an), en plus, des séances d'exercices et des travaux pratiques. Les cours commenceront en février 1966.

L'examen comporte:

une épreuve théorique	durée 4 heures
une épreuve pratique	durée 3 heures
une épreuve de travaux pratiques	durée 3 heures
une épreuve orale	deux interrogations

NOTA — Le premier cycle d'enseignement (partie commune) a débuté en février 1965; le prochain débutera en octobre 1966.

Conclusões e Recomendações do Simpósio Internacional sobre o Ensino Escolar da Matemática (*)

1. LA MATIERE A ENSEIGNER

1.1 Conditions de l'organisation d'un enseignement moderne de la mathématique.

1.11 *Horaires consacrés à la mathématique*

1.111 L'enseignement efficace de la mathématique exige un temps suffisant. Les participants demandent qu'une branche aussi fondamentale dispose, comme elle le fait déjà dans la majorité des pays, d'horaires allant de 4 à 6 heures par semaine, dans toutes les classes générales d'enseignement secondaire, à l'exclusion des classes scientifiques ou techniques où ils doivent être plus étendus.

1.112 Des expériences doivent être faites pour déterminer, selon l'âge des élèves, le niveau des classes, les méthodes employées et le type d'école, quelle est la répartition du temps consacré à l'enseignement qui permet la meilleure assimilation tout en ne surchargeant pas les élèves.

1.12 *Conditions de travail en classe*

1.121 Les conditions humaines doivent être réalisées pour que l'atmosphère des classes de mathématique soit aussi stimulante que possible.

1.122 Les effectifs resteront dans des limites adéquates. L'effectif optimum se situe entre 15 et 25 élèves. Si, par suite de la pénurie d'enseignement ou pour d'autres raisons, cette recommandation ne pouvait être observée, l'organisation de séances de travail par groupes restreints est vivement recommandée.

1.123 On étudiera les effets du travail individualisé et par groupe permettant, à chaque élève, de progresser à son rythme propre au sein de la collectivité de la classe.

1.2 Matière de l'enseignement.

1.21 *Tronc commun*

1.211 Au début des études, il importe que les notions de base de la mathématique soient enseignées à tous les enfants.

1.212 Il convient, dans toute la mesure du possible, que le premier enseignement soit fait, dans chaque pays, d'après un programme unique, sans empêcher l'expérimentation

---

(*) Realizado em Budapest, pela Comissão Nacional Húngara para a UNESCO e pelo Ministério da Cultura, com o concurso da Associação de Matemática «Bolyai Janos» e apoio da UNESCO, Setembro 1962.

avec de nouveaux programmes et l'introduction éventuelle et progressive d'un nouveau programme unique.

1.213 Sur ce tronc commun, se grefferont des développements et des compléments spécifiques.

1.22 *Résultats acquis relatifs aux concepts de base.*

1.221 Des expériences nombreuses ont montré qu'il était possible d'utiliser le langage, les notions et les opérations ensemblistes élémentaires, les notions de relation et de fonction dès 12 ans (et même auparavant).

Il est souhaitable d'utiliser ces notions qui facilitent notamment l'étude ultérieure des éléments de topologie et d'analyse.

1.222 Des expériences ont montré également qu'il est possible et souhaitable d'introduire, dès 12 ans, les notions nécessaires ou favorables à la présentation rationnelle de la structure d'espace vectoriel (équivalence, translation, vecteurs, notion de groupe ...) de manière à permettre l'étude et l'utilisation des espaces vectoriels dès l'âge de 15 ans.

1.23 *Investigations sur les matières à enseigner.*

1.231 A côté d'un approfondissement des recherches relatives à l'enseignement des ensembles, des espaces vectoriels et des notions connexes, il y a lieu de poursuivre des expériences sur les thèmes généraux suivants, présentés dans le contexte de la mathématique moderne :

éléments de topologie
géométrie élémentaire
notions de statistique et de probabilité,
calcul différentiel et intégral
logique mathématique.

1.232 Chacune de ces matières fera l'objet de recherches à plusieurs niveaux d'âges et dans divers types d'ecoles de façon que l'on puisse trouver à quel moment et par quelles méthodes on peut les introduire.

1.233 Il est important d'examiner, dans quelle mesure la méthode axiomatique peut être introduite comme instrument fondamental de l'investigation scientifique.

1.234 La polyvalence pratique de la mathématique doit être mise en plein lumière par ses applications concrètes multiples. Il est de toute utilité de constituer, avec la collaboration des spécialistes, des recueils de problèmes relatifs aux techniques actuelles et sciences physiques, biologiques et sociales.

1.3 Expériences

1.31 *Nécessité de l'expérimentation.*

1.311 Un éventail d'expériences, à petite et à grande échele, peut assurer l'introdution rapide d'améliorations dans les programmes.

1.312 Les expériences doivent porter sur diverses matières affin de contribuer à leur sélection objective et leur distributions dans les programmes.

1.32 *Classes expérimentales-pilotes*

1.321 Il est indispensable de mettre sur pied, dès le premier enseignement, à tous les niveaux et dans les divers types d'écoles, des classes expérimentales-pilotes.

11.322 L'organisation de ces classes doit être réalisée dans de bonnes conditions quant aux choix des maîtres, à la valeur des programmes et des méthodes, ainsi qu'au climat général dans lequel le travail expérimental a lieu.

1.323 Une expérience bien faite fournira toujours un résultat utile, qu'il soit positif ou négatif. Dans ce dernier cas, pour assurer l'objectivité scientifique de l'expérience, il convient de prémunir ceux qui la conduisent contre tout reproche injustifié.

1.324 Le sort des élèves engagés dans expérience doit être l'objet d'une sollicitude particulière. Il faut prévoir pour eux le programme des années suivantes afin d'assurer la continuité de leurs études. D'autre part, on doit prendre en considération l'existence des classes-pilotes dans le choix des matières des examens et, notamment, des examens d'entrée aux écoles supérieures.

1.33 *Comptes rendus d'expériences*

1.331 Des comptes rendus objectifs des expériences pédagogiques sont indispensables.

Sur la base des résultats obtenus, on peut déterminer des voies à suivre, et les erreurs à éviter.

1.332 Il importe que des documents significatifs soient publiés à ce sujet et distribués aux États membres.

2. PEDAGOGIE DE LA MATHEMATIQUE

2.1 Démarches relatives à l'apprentissage mathématique

L'apprentissage de la mathématique pour être accompli doit conduire l'élève a effectuer diverses démarches mentales :

- Acquérir des structures mathématiques
- Prendre conscience de leurs propriétés relationnelles
- Exprimer ces propriétés par différents moyens (schémas, language ordinaire, notations symboliques, etc.).
- Reconnaître et établir des liaisons logiques entre ces relations
- Organiser ces structures dans un édifice déductif
- Résoudre des problèmes mathématiques
- Utiliser les structures dans les applications comme modèles mathématiques de situations concrètes
- Exercer l'imagination créatrice dans le domaine mathématique.

2.2 Conditions favorables à l'apprentissage de la mathématique

L'expérience des professeurs et les recherches expérimentales des pédagogues établissent les faits suivants :

2.21 L'enseignement doit faire appel à l'intelligence naturelle de l'élève et non se borner à le conditionner à des techniques de pure routine, vite oubliées et peu susceptibles d'adaptation ou de transfert.

2.22 L'activité personnelle d'élève est indispensable à l'épanouissement de ces dispositions potentielles.

2.23 L'apprentissage efficace est favorisé lorsque l'on présente à l'élève des situations pédagogiques qui lui sont familières et qui lui permettent de les mathématiser en faisant ses propres découvertes et en travaillant à son rythme personnel.

2.24 Les situations d'apprentissage d'une discipline aussi organisée que la mathématique doivent être choisies et réparties de telle sorte que l'élève acquière progressivement une pensée structurée et un dynamisme mental efficace.

2.3 Motivation de l'apprentissage

2.31 Une motivation suffisante est un des moteurs de l'apprentissage actif.

2.32 Des recherches doivent être entreprises pour trouver, suivant les élèves, leurs dispositions et leur âge, quelles sont les motivations qui peuvent les engager vraiment dans l'activité mathématique:

esprit ludique
intérêt aiguisé par le choix personnel
applications intéressantes et multiples de la mathématique
combativité suscitée par les problèmes
satisfaction en cas de réussite personnelle d'un problème
esprit de compétition (concours et olympiades)
prise de conscience de la pensée mathématique
évolution historique de cette pensée
beauté rationnelle de la mathématique.

2.33 Des divers moyens de motivation, tant intérieurs qu'extérieurs à la mathématique, comportent tous un caractère affectif.

2.34 Il y a lieu d'étudier le rôle de l'affectivité dans l'apprentissage de la mathématique. On peut déja remarquer que dans un enseignement où de bonnes conditions affectives sont réalisées et où l'élève a la joie de sa propre activité mathématique, celle-ci peut trouver sa motivation en elle-même.

2.4 Voies et moyens d'apprentissage

Les voies de l'apprentissage de la mathématique sont multiples:

activité sur le concret et activité figurative à propos d'une situation
exposé du maître
travail de résolution de problèmes (individuel ou par groupe)
travail personnel de recherche
discussion
lecture de textes mathématiques, films mathématiques
étude à l'aide de machines à enseigner
exposé par télévision.

Il y a lieu d'étudier les apports et les dangers respectifs de ces moyens et de rechercher comment, suivant le niveau des élèves, les matières en cause et les circonstances, il convient de les mettre en oeuvre.

2.5 Le développement de la pensée mathématique

2.51 *Problèmes de la conceptualisation*

2.511 L'expérience de l'enseignement montre qu'une initiation mathématique doit prendre appui sur les notions dégagées des situations, concrètes ou abstraites, familières, à l'élève. Ces situations sont à prendre dans la vie et le milieu ou dans des matériels fabriqués se prêtant à des structurations (réglettes et blocs, films, «games», etc.).

2.512 Pour préciser, par l'expérience mentale, une notion à transmettre, il y a lieu de présenter, en suffisance, des situations variées fournissant des exemples et des contre-exemples.

2.513 La construction de schémas représentatifs de situations (diagrammes de Venn, graphes, tableaux, etc.) offre un moyen d'extraire les notions des situations initiales et de les rendre perceptibles sous une forme non verbale.

2.514 Les erreurs des élèves révèlent les défauts d'intégration de leurs idées mathématiques. Une analyse de ces erreurs fournit souvent des indications sur le cheminement de l'apprentissage.

2.515 Il y aurait lieu d'étudier les aspects psychologiques de la dynamique des concepts (généralisation, spécialisation, analyse, synthèse, etc.).

2.52 Les démonstrations dans l'enseignement

Un effort tout particulier doit être poursuivi pour élucider l'initiation aux démonstrations mathématiques.

Des recherches doivent être faites notamment pour répondre aux questions suivantes:

2.521 Comment mettre en évidence le rôle actif, opératoire, de celui qui recherche, trouve ou expose une démonstration ainsi que le passage du plan d'attaque initial à la méthode analytique?

Comment présenter les démonstrations? Dans la langue véhiculaire ou à l'aide de films ou de suites de schémas en couleurs qui soulignent et soutiennent les étapes de la pensée au cours de la déduction?

Quels sont les avantages ou les inconvénients liés aux éléments perceptifs mis en jeu dans une démonstration?

Y a-t-il des thèmes où les premières démonstrations se présentent plus simplement, dans une matière mathématiquement claire?

2.522 Comment entraîner les élèves à la démonstration?

Y a-t-il des secteurs où ils puissent en trouver seuls dès le début?

Comment amener les élèves aux démarches inductives?

Comment les initier à la méthode analytique et au rôle de la synthèse?

2.523 Comment faire saisir les relations logiques d'implication et d'équivalence et leur rôle dynamique dans les inférences?

Comment apprendre à utiliser des quantificateurs?

Comment aborder la réduction à l'absurde et la démonstration par l'absurde?

2.524 Par quels moyens introduire la méthode axiomatique dans sa signification moderne?

2.53 *Rôle des problèmes*

2.531 Les problèmes ont une importance capitale, qu'il s'agisse d'applications empiriques ou de questions intérieures à la mathématique. La résolution des problèmes met en oeuvre les démarches de la pensée mathématique (formulation, vérification d'une supposition, analyse, synthèse, généralisation, spécialisation, etc.).

L'emploi des problèmes dans l'expérience antérieure à la formation des structures est fondamental.

2.532 Souvent un problème donné aux élèves dans le cadre traditionnel a un caractère fermé: ce qu'on donne et ce qu'on demande est déterminé, de plus, ce problème est posé dans une partie du cours où la méthode de résolution s'impose d'elle-même. Il s'agit d'un pur exercice d'application formel sans appel à l'imagination créatrice. On peut en dire autant des problèmes empiriques.

Pour favoriser le pouvoir créateur des élèves — il convient de leur donner plus souvent des situations problématiques ouvertes où ils interviennent dans la formulation, dans la détermination des données et des inconnues et dans le choix de la méthode de résolution.

Il faudrait étudier le rôle dynamique de ces problèmes dans l'apprentissage.

2.533 De plus, des investigations sur les méthodes heuristiques permettraient de rendre les élèves plus conscients des démarches productives dans les résolutions de problèmes.

2.6 Moyens.

2.61 *Matériels et jeux.*

Certains matériels et jeux sont conçus pour présenter structures mathématiques (réglettes, blocs, films, géoplans, modèles concrets, boîtes de construction etc.).

Il fraudrait faire l'inventaire des ressources en ce domaine et des recherches devraint être entreprises en vue d'évaluer la portée de ces matériels. Notamment, des investigations devraient être faites afin de savoir si pour étendre le champ d'application d'une structure, il faut varier les matériels qui la présentent. D'autre part, il conviendrait d'examiner les structures que permet d'introduire un matériel donné.

2.62 *Usage et rôle des schémas.*

2.621 Des expériences pédagogiques ont montré combien l'usage de schémas (cercles d'EULER, diagrammes de VENN, graphes, tableaux etc.) permettrait de présenter aux élèves, avec leur participation active, d'une manière élémentaire, des mathématiques réputées difficiles.

2.622 Il y a lieu d'étudier le rôle psychologique de ces schémas et de leurs particularités (formes, couleurs, dimensions, etc.) ainsi que les liens entre le soutien perceptif et la signification conceptuelle. Cette question est d'autant plus importante que les graphes qui servent à l'initiation ont un usage constant en mathématique tant pure qu'appliquée.

2.63 *Usage et rôle de la symbolisation*

Pour accroître l'efficacité de l'enseignement, il conviendrait d'entreprendre des recherches psychopédagogiques sur le rôle et l'usage des symboles qui désignent les concepts en mathématiques (objets, ensembles, relations, fonctions, opérations, etc). Il serait très utile d'avoir notamment des réponses aux questions suivantes :

2.631 Quel est le rôle des symboles dans l'élaboration des concepts ? Quands les introduire dans l'aprendissage ?

2.632 Dans quelle mesure les manipulations concrètes d'objets à role symbolique peuvent-elles aider à comprendre les transformations d'écriture symbolique, voire des démonstrations ?

2.633 Quelle relation psycologique qui lie le jeu perceptif des symboles et les combinaisons correspondantes des concepts qu'ils désignent ?

De ce point de vue, les conventions habituelles, avec leurs omissions, ne présentent-elles pas d'obscurités pour le débutant ?

2.634 Faut-il favoriser le maniement des symboles en liaison avec leur signification ou introduire assez tôt la considération formelle des écritures symboliques et faire usage des analogies opératoires ?

2.635 Cet aspect formel est-il susceptible de faire saisir la structure symbolisée ?

2.7 Coopération entre les mathématiciens, les pédagogues et les psychologues.

2.71 Pour promouvoir la pédagogie de la mathématique, il est vivement recommandé d'assurer une coopération étroite entre les mathématiciens, les enseignants, les pédagogues et les psycologues ayant une réelle connaissance des notions modernes de la mathématique.

2.72 Il convient d'interesser des psychologues aux problèmes que posent l'apprentissage de la mathématique et de son usage actuel et que suggère l'enseignement nouveau ?

2.73 Les résultats de leurs recherches auraient pour effet, non seulement de confirmer les enseignants dans certains des jugements issus de leur expérience courante, mais, surtout, de leur faire apercevoir les aspects psychologiques insoupçonnés de leurs moyens et de leur techniques didactiques. Dans la période de prospection actuelle, ces derniers résultats ne manqueront pas d'avoir une répercussion favorable sur l'enseignement.

2.74 Enfin, des recherches fourniraient des matériaux, tant quantitatifs que qualitatifs, pouvant servir au fondement scientifique de la pédagogie de la mathématique.

3. FORMATION ET PERFECTIONNEMENT DES ENSEIGNANTS

3.1 Préparation mathématique des enseignants

3.11 La formation mathématique des maîtres doit être imprégnée d'un esprit moderne et les mettre à même de dominer les matières qu'ils devront enseigner.

3.13 Pour assurer une base solide à toute éducation, les enseignants des classes primaires devront recevoir un enseignement qui approfondira les matières reprises dans le programme modernisé d'enseignement secondaire et qui les préparera à l'exercice de leur mission.

3.14 Les professeurs de mathématique des écoles secondaires recevront une formation moderne spécialisée (qu'il s'agisse d'une préparation à deux niveaux ou à un niveau unique).

Cette préparation comportera

3.141 une formation mathématique générale portant notamment sur les matières fondamentales suivantes et leurs applications :

théorie des ensembles et logique
algèbre abstraite
topologie
géométrie (exposé axiomatique, utilisant les espaces vectoriels et d'autres notions d'algèbre abstraite et de topologie)
analyse
théorie des probabilités et statistique
histoire de la pensée mathématique.

3.142 Des études dans une (deux) branche scientifique (physique, chimie, biologie, économie mathématique, psychologie, etc.).

3.143 Les maîtres du niveau supérieur de l'enseignement secondaire feront une étude plus approfondie des matières fondamentales et recevront des suppléments spécialisés, par exemple, équations différentielles, intégrales et aux dérivées partielles, programmation linéaire, théorie de l'information, théorie des jeux, théorie des nombres, etc.

3.15 En principe, la préparation mathématique des professeurs des classes supérieures de l'enseignemente secondaire ne pourra avoir une durée inférieure à quatre ans après les études secondaires générales.

3.2 Préparation pédagogique des enseignants de la mathématique

3.21 Tout professeur a besoin d'une culture pédagogique vivante qui ne se borne pas aux généralités de la méthodologie, de la didactique et de l'histoire de l'éducation. Il doit être ouvert aux problèmes modernes de la pédagogie.

3.22 Le futur enseignant doit connaître convenablement les grandes lignes de l'évolution psychologigue de l'enfance à l'âge adulte.

Il doit posséder aussi des connaissances lui permettant de tenir compte des différences individuelles entre les élèves, de la dynamique de groupe et des effets favorables ou néfastes de son comportement en classe.

3.23 Le futur professeur devra être informé de la psychologie de la pensée, spécialement des processus d'acquisition des connaissances mathématiques modernes. Il sera rendu attentif aux divers types de motivation et au rôle de l'affectivité dans l'apprentissage.

On veillera à lui faire acquérir une attitude ouverte et accueillante devant la pensée mathématique juvénile.

3.24 Le futur professeur étudiera la méthodologie actuelle relative à l'enseignement des matières de base qu'il devra enseigner. Ces matières seront éclairées du point de vue de la mathématique moderne.

Il fera des exercices sur les techniques particulières faisant l'objet de séminaires destinés à développer l'initiative pédagogique et l'imagination créatrice dans la résolution des problèmes didactiques.

3.25 Des stages organisés dans les écoles, sous la conduite de professeurs qualifiés, le mettront en contact avec la réalité scolaire.

3.26 La formation de l'enseignant devra ouvrir devant lui les perspectives d'une recherche scientifique en didactique et en psycho-pédagogie, en lui faisant découvrir les problèmes à résoudre et en lui fournissant les méthodes et les techniques de cette recherche, tout autant que les moyens matériels de celle-ci (livres, revues, matériel didactique et expérimental, etc.).

3.3 Formation continue des enseignants

3.31 Dans la période transitoire actuelle, pour mettre les professeurs à même d'enseigner des programmes modernes, il est d'une urgente nécessité d'entreprendre ou de poursuivre une information fondamentale du personnel en service.

3.32 Les matières de ce perfectionnement comprendront: les théories mathématiques nouvelles indispensables à l'exécution correcte des nouveaux programmes, des précisions méthodologiques permettant la mise en oeuvre efficace de ces derniers.

3.33 Pour le temps consacré à la modernisation des connaissances des enseignants on peut choisir des modalités diverses, déjà utilisée dans plusieurs pays: séances hebdomadaires régulières, week ends prolongés, périodes plus longues réparties sur l'année.

3.34 Toutes les ressources disponibles: Universités, Instituts Pédagogiques, Ecoles normales, Associations professionnelles, Centres didactiques ou pédagogiques, etc., doivent être engagés en coordination, pour rendre possible un renouveau national de l'enseignement mathématique.

3.35 Une documentation sur la mathématique d'aujourd'hui et son enseignement doit être diffusée parmi les professeur par tous les moyens dont on dispose: cours élémentaires ou supérieurs, notes de travail, articles de revues etc., paraissant dans divers pays.

En plus, des livres spécialisés, pour professeurs, doivent être rédigés aussitôt que possible pour éclairer les enseignants, d'une façon convenable, sur le contenu, la portée des idées modernes et la méthodologie qui leur est adéquate.

3.36 Pour engager un nombre suffisant d'enseignants à se perfectionner en mathématique, il importe de leur présenter de façon objective: le mouvement international de rénovation la situation particulière de leur pays, la nécessité d'un effort planifié, leur responsabilité personnelle devant leurs élèves, l'intérêt scientifique des idées nouvelles.

De plus, il faut, dans toute la mesure du possible, aménager leurs horaires, intervenir dans leurs frais et tenir compte de leur effort de qualification pour leur classement, leur rétribution et leur avancement.

3.37 Dans l'avenir, les enseignants de la mathématique, devront, pour assumer leur fontion, se tenir à jour de façon permanente, tant au point de vue de la mathématique que de sa méthodologie.

Il importe de maintenir ou de créer, dans chaque pays, des institutions capables d'assurer la formation continue des enseignants, cette formation étant désormais intégrée à leur métier.

3.4 Pénurie de personnel enseignants la mathématique

3.41 Devant la pénurie de professeurs de mathématique, il importe, compte tenu d'un enseignement de masse que des pays ont organisé ou se préparent à mettre sur pied, de favoriser un recrutement plus large.

3.42 Plusieurs pays ont fait face momentanément à la situation en engageant dans les écoles, après une formation pédagogique à court terme, des personnes provenant d'autres secteurs. Dans certains pays, on a été amené à faire usage de l'enseignement télévisé.

3.43 Afin de susciter des vocations, il convient de souligner les attraits de la carrière enseignante:

contact avec la jeunesse
rôle social fondamental

3.44 Il faut, sur le plan scientifique, revaloriser la fonction de professeur.

par la formation mathématique plus élevée
par le dynamisme nouveau de son métier
par le valeur de l'investigation pédagogique

Parallèlement, il est indispensable de réintégrer le professeur de la mathématique dans la société moderne en le liant au développement scientifique, culturel et social et en lui accordant la considération et le stading auxquels lui donnent droit sa responsabilité et sa mission d'éducateur.

3.46 La rémunération trop faible est une des causes de la pénurie des enseignants.

Sujets futurs et nouvelles méthodes de l'enseignement mathématique

W. Servais
Bruxelles

I. Situation de l'enseignement traditionnel.

La mathématique contemporaine, on le sait, a pris un essor sans pareil dans trois domaines connexes et distincts : le développement théorique, l'utilisation des machines calculatrices et le champs des applications.

L'enseignement est toujours en retard de phase sur la science. En mathématique, au niveau secondaire, ce déphasage avait pris une ampleur telle q'on pouvait parler, il y a une douzaine d'années, d'un fossé entre l'enseignement mathématique des écoles et la mathématique elle-même.

Ainsi, aux multiples reproches adressés à l'enseignement mathématique, le plus critiqué de tous les enseignement, s'ajoutait, à juste titre, l'accusation d'être, en maints endroits, anachronique.

Les mathématiciens soulignaient la pauvreté de certaines matières figurant aux programmes par pure routine scolaire, l'absence de notions fondamentales, le manque de structure de l'édifice présenté aux élèves et le caractère douteux de la pseudo-rigueur dont s'accomodaient maintes demonstrations. Les utilisateurs, tout en déplorant le manque de vigueur de la formation mathématique générale, regrettaient en outre les lacunes en techniques essentielles.

II. Efforts de renouveau d'aujourd'hui et de demain.

Pour sauver la situation, des groupes de travail se mirent à l'oeuvre en Europe, aux États-Unis et au Japon et élaborèrent des programmes modernes de mathématique.

a. *Les ensembles et les relations :*

Le fondement ce ces programmes est partout le même. Les notions sur les ensembles, les relations (en particulier équivalence et ordre) et les fonctions présentées de façon naïve mais correcte, en constituent l'essentiel.

Expérimentées d'abord dans quelques classes, ces matières prennent droit de cité dans des programmes adoptés de façon de plus en plus large. Sans aucun doute, cette place sera faite à l'avenir dans tout enseignement secondaire ; des essais satisfaisants portent à croire que, avec une didactique convenable, une première initiation à ces idées pourra être entreprise dans les classes primaires.

b. *Structures algébriques :*

Les structures les plus importantes de l'algèbre, telles que les groupes, les anneaux, les corps, sont introduites et, dans les programmes bien organisés, elles servent à la construction de la matière enseignée.

En particulier, le corps des réels présentés à l'aide des développement binaires ou décimaux est, pour la première fois, mis vraiment à la portée des élèves. Ainsi, à l'avenir, contrairement à ce qui a été fait longtemps, on pourra se servir des réels en sachant ce qu'il sont.

Un des objectifs principaux de l'enseignement élémentaire est l'algèbre linéaire. L'expérience montre qu'il est actuellement possible de faire comprendre la notion d'espace vectoriel, présentée à partir de la géometrie, et de l'utiliser dans l'étude des équations linéaires et des matrices.

c. *La géometrie :*

En géometrie, le plan et l'espace apparaissent comme des vectoriels à deux et à trois dimensions munis d'un produit scalaire.

La distinction entre les propriétés affines et les propriétés métriques de l'espace est alors aisée et ne peut manquer d'être profitable comme le prouve l'expérience pédagogique.

Enfin, la géometrie analytique a une base plus nette et est vraiment intégrée à la totalité de la géometrie. Cette dernière apparait bien mieux qu'auparavant comme une forme abstraite susceptible de servir de modèle à des question concrètes autres que la physique des solides ou des rayons lumineux. D'autre part, la capacité de penser géométriquement se développe et étend le pouvoir de représentation intuitive.

Cette conception, qui met au jour la structure algébrique du plan et de l'espace, aura l'assentiment de nombre de mathématiciens et sera bien accueillie non seulement par les physiciens mais aussi par les utilisateurs de la mathématique dans les sciences humaines.

d. *Analyse et topologie :*

Les programmes traditionnels de beaucoup de pays comprennent, au moins dans les cours secondaires pour scientifiques, des éléments d'analyse réduits aux notions sur les limites et les fonctions continues, les dérivées et les intégrales les plus simples.

Aujourd'hui, deux tendances se marquent dans la ligne d'évolution future de l'enseignement de l'analyse élémentaire.

D'une part, est proposée une amplification de la matière enseignée allant, dans certaines vues extrêmes (1), jusqu'au calcul différentiel et intégral à plusieurs variables, aux séries de Fourier, aux équations intégrales, aux fonctions de Green, etc. . . .

D'autre côté, s'affirme un soucie d'introduire dans les classes supérieures les notions essentielles de la topologie (ouverts, fermés, adhérence, continuité) tout au moins en ce qui concerne les espaces métriques et, spécialement, le plan et l'espace euclidiens. Peut-être serait-il possible de donner une idée des espaces topologiques non métriques.

En général se manifeste la volonté de faire descendre dans l'enseignement secondaire des matières et des idées considérés jusqu'ici comme appartenant aux mathématiques dites supérieures. Compte tenu du temps qui sera consacré aux études mathématiques l'expérience seule permettra de déterminer le niveau susceptible d'être atteint.

e. *Logique :*

L'accent mis sur une meilleure présentation mathématique conduit à des exigences logiques qui étaient souvent ignorées jusqu'ici dans l'enseignement.

La familiarité avec les notions d'implication, d'équivalence logique et des conjonctions «et» et «ou», l'usage des quantificateurs, en langage véhiculaire ou en notations symboliques, des éclaircissements sur la négation d'une proposition complexe, sur les contrapositions d'une implication, etc., se montrent très utiles pour faire comprendre le contenu des énoncés et les méthodes de démonstrations.

Au niveau plus élémentaire, les diagrammes de VENN relatifs aux ensembles donnent déjà une figuration très efficace de la logique en extension. A part quelques timides essais d'enseignement de la logique des propositions, il n'y a guère eu jusqu'ici de traitement autonome de la logique formelle dans les écoles secondaires. D'ailleurs, ce qui est tout d'abord nécessaire est une logique en action assez consciente de ses démarches et pouvant être notée avec un symbolisme réduit.

Il est souhaitable que, dans les prochaines années, nous mettions au point une utilisation plus nette et plus explicite de la logique mathématique. Dans la mesure où cette pratique deviendra plus commune, l'enseignement secondaire de la mathématique réalisera mieux un objectif souvent annoncé mais plus rarement atteint dans le passé : la formation logique de l'esprit.

f. *Probabilité et statistique :*

Les probabilités et la statistique apparaissent de plus en plus comme la partie de la mathématique qui est la plus largement utile dans les sciences biologiques et humaines. Elles sont aussi, faut-il le dire, d'une importance capitale pour le physicien et l'ingénieur, lesquels, s'ils ne sont plus les seuls utilisateurs de la mathématique, en restent les plus grands consommateurs.

En dehors de leurs emplois techniques, les probabilités et la statistique ont une grande valeur culturelle : elles introduisent et exercent un mode de pensée inconnu de la mathématique classique traditionnelle : le jugement et l'inférence aléatoires.

Plus que les autres innovations en matière d'enseignement, les probabilités et la statistique prendront à l'avenir une place primordiale. Leur étude requerra un soin pédagogique particulier car il faudra, par des expériences concrètes, faire reconnaître la permanence statistique de certain caractère et, du point de vue abstrait, présenter une mise en forme mathématique des probabilités. Heureusement les notions sur les ensembles permettent un abord clair des probabilités définies à partir de la mesure des événements dans l'espace des épreuves (Sample space).

Quelques essais ont été faits entre autres aux Pays-Bas (2) et aux États-Unis (3) mais ce sont sans doute les Pays scandinaves qui ont accompli l'effort le plus décisif en introduisant ces matières dans leurs programmes secondaires ([4]). Ils envisagent d'ailleurs de conduire une initiation concrète aux faits statistiques dès l'école primaire.

En fait, ceux qui enseignent les éléments de probabilités dans les études supérieures savent combien est longue et malaisée l'acquisition de la tournure d'esprit stochastique. Faut-il y voir une réelle difficulté intrinsèque des modes de la pensée aléatoire ou plutôt, tout au moins en partie, comme nous le croyons, l'effect du conditionnement prolongé à la logique à deux valeurs de l'enseignement traditionnel?

De toute façon, il faudra dans les prochaines années aménager une initiation aux probabilités et à la statistique dans les écoles secondaires afin de fournir un instrument conceptuel indispensable à la compréhension du monde d'aujourd'hui.

g. *Le calcul et les machines*:

Le calcul avec les machines mérite aussi une attention particulière. Jusqu'ici, malgré les demandes pressantes des utilisateurs, le calcul organisé n'a pas trouvé la place qui lui revient dans les programmes.

Des éléments sont cependant étudiés qui pourront contribuer à la mise au point de cette question. Tout d'abord, le calcul binaire joue un rôle important dans la représentation des nombres réels par des développements binaires illimités. L'application des réels à la mesure des grandeurs est ainsi facilitée puisqu'il suffit d'admettre que l'on puisse opérer indéfinement le partage de la grandeur en deux parties équivalentes.

L'amélioration de l'aspect logique des opérations est aussi favorable. Dans les Pays anglo-saxons, les élèves commencent à être initiés à la codification de la séries d'opérations d'un programme à l'aide de «flow charts». Celles-ci permettront en outre de rendre explicite la structure de maints algorithmes classiques (5).

En ce qui concerne le calcul aux machines proprement dit, dans certaines classes élémentaires anglaises, les élèves sont entraînés à l'usage de machines de bureaux (5); en Suisse, les élèves du cycle supérieur de certaines écoles (6) sont dotés de petites machines cylindriques. Par aillleurs des textes élémentaires sont écrits sur les calculatrices pour des élèves de 12 à 13 ans (7). C'est en Russie, semble-t-il, que l'éducation au calcul mécanique a été poussée de façon la plus systématique puisque récemment ont été créées, dans l'enseignement secondaire, des sections spéciales pour former des calculateurs. Cette veine sera sans doute développée à l'avenir.

h. *La mathématique appliquée*:

Nous ne voudrions pas clore ces indications sur les futurs sujets pour l'enseignement mathématique sans insister avec force sur la nécessité de compléter les cours théoriques d'un assortiment d'applications significatives.

Dans l'enseignement classique, lorsque le professeur, pour répondre à la question tant de fois posée par les élèves: «A quoi cela sert-il en pratique?», donnait des applications des théories étudiées, il s'agissait de quelques problèmes souvent stéréotypes et livresques, empruntés à la vie courante ou à la physique élémentaire. Ce serait donner une image tronquée de la mathématique que de ne pas en montrer, de façon tangible, le large champ d'applications actuelles. Quelques ouvrages récents (8) fournissent des matériaux utilisables à cet effet. Un cours élémentaire de probabilités et de statistique permettra de présenter tout un échantillonnage d'exemples très variés.

Cependant, tout développement de mathématique appliquée demandera une collaboration active entre les professeurs de divers branches scientifiques : mathématique, physique, chimie, biologie, géographie, sociologie.

Une coordination intéressante ne pourra être mise en oeuvre que si l'enseigment des sciences a atteint un niveau suffisant et si les responsables des diverses disciplines sont décidés à tirer parti des ressources des instruments que leur offre la mathématique.

III. Méthodes nouvelles d'éducations mathématique.

Jusqu'ici nous avons parlé de l'évolution à venir de l'enseignement en termes de matières et de programmes. Cette manière d'envisager la modernisation est insuffisante si l'on veut améliorer le rendiment de l'étude de la mathématique.

On pourrait affirmer sans paradoxe qu'un enseignement des notions modernes basé sur une didactique ancienne risquerait d'être plus traumatisant et moins efficace que sur l'enseignement traditionel.

Il ne peut y avoir de véritable renouveau de l'éducation mathématique sans une pédagogie aussi moderne que la mathématique elle-même.

Sans doute est-il plus expéditif d'enseigner souvent ex-cathedra les sujets modernes que de mettre au point une méthodologie qui permette une assimilation réelle des notions proposées. C'est porquoi certaine modernisation s'est effectuée dans le second cycle de l'enseignement secondaire, en descendant, de manière à faire usage, dans toute la mesure du possible, des méthodes expositives traditionnellement de mise dans l'enseignement supérieur.

Certes, la meilleure qualité mathématique des exposés peut avoir d'heureux effets. Mais les élèves ainsi conditionnés sont-il à même de comprendre et de maîtriser les notions nouvelles? La puissance, la rigueur et netteté de celles-ci, présentées sans initiation adéquate, peuvent-elles avoir toutes les vertus que leur reconnaissent les novateurs impatients?

Nous pensons que les idées nouvelles doivent être introduites, de façon adéquate, dès que l'enfant y est accessible.

Pour trouver une pédagogie capable d'apprendre la mathématique, il importe de prendre conscience de la nature de celle-ci.

Tous ceux qui créent ou utilisent la mathématique savent qu'elle est une activité spécifique s'exerçant dès qu'une situation provoque la mise en oeuvre de ses moyens de schématisation, de structuration, de déduction et de contrôle.

L'enseignement doit proposer des situations susceptibles d'engager et de développer l'apprentissage de l'activité mathématique. Il ne s'agit pas, comme on l'a cru trop longtemps, de transmettre sans plus des concepts et des résultats acquis. On le sait, ainsi que l'a explicité P. M. Vam Hielle (9), dans son élaboration, la pensée mathématique passe par des niveaux successifs qui vont de la perception à l'organisation logique consciente. Celui qui enseigne doit connaître ces niveaux et savoir auquel n'entre eux se situe un élève. L'apprentissage aura pour objet d'asseoir assez chaque niveau pour permettre de passer sans encombre d'un stade au suivant. L'une des tâches de la didactique est de rendre cette transition plus aisée et plus rapide tout en respectant l'échelle des niveaux.

A chaque niveau, ce qui importe, c'est de motiver une activité personnelle de l'élève qui soit significative à ce niveaux. Il en sera ainsi lorsque l'enseignant pourra offrir une situation assez riche abordable de plain-pied et qui provoquera une investigation au cours de laquelle des structures de la situation seront inventoriées. Les constatations résultantes seront explicitées dans le langage propre au stade atteint. Il faudra ensuite exercer l'élève à se retrouver dans le champ connu et l'aider à synthétiser les résultats acquis en aperçu global. Une illustration d'un enseignement conduit d'aprés cette progression a été donné à propos du pavage de plan à l'aide de polygones par Madame Van Hiele-Geldof dans sa thèse (10).

Parmi les nombreux travaux consacrés à l'enseignement de la mathématique aux État-Unis, un des plus significatifs est celui réalisé par le Madison project sous la direction de Robert B. Davis (11). Ce groupe a mis au point un abondant matérial destiné à susciter l'activité de l'élève et à lui permettre de découvrir par lui-même des propriétés algébriques. De la sorte, disparaît la barrière d'autorité qui s'interpose souvent dans l'enseignement traditionnel entre l'élève et la tâche ou le but proposé. La pédagogie des situations a été mise à profit par F. et G. Papy dans leur ouvrage destiné aux enfants à partir de 12 ans (12). Ce livre original présente, de façon unitaire, les ensembles, les relations et fonctions, les nombres entiers naturels et relatifs, la numération binaire et les premières notions de géometrie affine du plan (projection parallèle, translation, symetrie axiale et centrale). Il contient d'une manière très attrayante une initiation à l'usage des graphes qui constituent, grâce à l'emploi des couleurs, une figuration et une langage des ensembles et des relations. Les premières démonstrations y sont illustrées par des bandes présentant successivement les étapes de faire la déduction.

Grâces au matérial semi-abstrait des diagrammes et des graphes, les élèves sont entraînés à abstraire tout naturellement sans être, dès le début, embarrassés par des difficultés d'expression em langue véhiculaire. Le livre ne donne qu'une idée de la vie mathématique que ces méthodes son capables de régner dans les classes.

Avec une tournure d'esprit, l'équipe de St. Dustan's College, sous la direction de G. Mathews, écrit de petits ouvrages (13) destinés à être lus, pour une bonne part, par les élèves de 12 à 13 ans qui sont ainsi appelés à déchiffrer par eux-mêmes de nouveaux textes mathématiques. Evidemment, ces textes sont écrits de manière attrayante; dar exemple, les matrices sont introduites par un procédé de codage.

À côté de la littérature mathématique se développe tout un ensemble de modèles conçus pour porter les notions mathématiques et dont certains peuvent être construits par les élèves : jeux de réglettes en couleur pour le calcul, modèles géométriques, jeux de cartes perforées, systèmes de circuits électriques, films, etc.

Tous ont, quels que soient les moyens employés, un objectif commun : favoriser l'activité de représentation, de combinaison et de substitution des élèves de manière à leur fournir, par cette activité même, un monde de structures mentales sur lequel pourra faire fond l'organisation mathématique.

L'engagement réel des élèves dans leur travail ne pourra être acquis que par une motivation adéquate à leur niveau : plaisir du jeu et de la compétition, intérêt pour les applications, satisfaction de l'appétit de découverte, goût pour la mathématique en elle-même.

Afin de tenir compte des différences d'aptitude et de rithme personnels, il conviendra de faire une place suffisante au travail individuel au sein du travail collectif qui, seul, permet les échanges fructueux au sein du groupe et justifie, de façon fonctionnelle, les moyens d'expression et la rigueur du langage.

Le maître devra parler une langue véhiculaire et une langue mathématique correctes sans exiger trop tôt des élèves une expression parfaite quand la compréhension traduite par les actes est suffisante. Toute exigence prématurée de rigueur peut entraîner une véritable inhibition et un blocage intellectuel.

Les erreurs des élèves sont inévitables en période d'apprentissage. Elles permettent de de dépister les idées et les démarches incorrectes et justifient les mises au point et les éclaircissements. Les élèves ont le droit de tromper, il est souhaitable qu'ils le fassent pour mieux livrer leur pensée et mieux comprendre. L'essentiel est que se développent chez eux des réflexes de contrôle, de vérification et d'auto-correction.

Avec les méthodes et les moyens nouveaux, le maître parle et enseigne moins pour observer et comprendre afin de mieux guider l'apprentissage personnel de ses élèves.

En quelques années est ainsi apparue dans l'enseignement une tendance vraiment nouvelle: au lieu de conditionner les élèves à des procédés mathématiques routiniers dont ils comprennent rarement le sens et la portée, on tente de leur faire acquérir, par eux-memes, une capacité à mathématiser des situations et à élaborer leur mathématique, c'est-à-dire un pouvoir rationnel et raisonné du pensée et d'action.

REFERENCES

[1] Voir par exemple *Goals for School mathematics (analysis for grades 11 and 12)*, Educational Service Inc., Houghton Mifflin Co., Boston, Mass., p. 46.

[2] Cf. L. N. H. Bunt (Ed.) *Statistik*, J. B. Wolters, Groningen, 1956.

[3] *Probability, A first course*, F. Mosteller et al., Addison-Wesley Publ. Comp., 1961.

[4] Cf. Les programmes Danois et Suédois récemment entrés en vigueur; s'adresser à M. Matts Hastad, Secrétaire du Comité Nordique pour l'Enseignement des Mathématiques, 16, Hestigen, Stocksund. Suède.

[5] T. J. Fletcher (Ed.), *Some Lessons in Mathematics, a Handboock on the Teaching of "Modern" Mathematics*, by Members of the Association of Teachers of Mathematics, Cambridge University Press, 1964.

(6) Par exemple, le Gymnase Cantonal de Neuchâtel.

[7] F. B. Lovis, *Computers*, Contemporay School Mathematics Series, Edward Arnold. London, 1964.

[8] Cf. J. G. Kemeny, J. L. Snell and G. L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. et loc. cit. *Some Lessons in Mathematic*. [5]

[9] De problematiek van het inzicht: La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive, *Mathematica et Paedagogia*, N.º 16 (1958-1959).

[10] *De didaktiek van de meetkund in de eerste klas van het V. H. M. O.*, J. M. Meulenhoff, Amsterdam. 1957.

[11] R. Davis, *Discovery in Mathematics (Teacher's edn)*, Addison-Wesley Pub. Comp., 1964.

]12] Papy, *Mathématique moderne*, I. Didier, Bruxelles-Paris. 1963.

[13] G. Matthews, *Matrices I*; C. A. R. Bailey, *Sets and Logic I*; J. A. Reynolds, *Shape, Size and Place*; F. B Lovis, *Computers. I.* All these titles are published in the Contemporary School Mathematics Series, Edward Arnold, London.

GAZETA DE MATEMATICA
N.º 100 — Julho - Dezembro 1965

La géométrie, dans l'enseignement moderne de la mathématique

Papy
Bruxelles

Le programme de l'expérience belge pour les cinq premières années du cycle secondaire (12 à 17 ans) est conforme aux voeux unanimes émis par toutes les réunions de mathématiciens purs et appliqués qui se sont penchés sur le problème de l'enseignement :

1. La mathématique actuellement utile est la mathématique moderne. Elle a le plus de chances d'entrer en résonance avec l'esprit des enfants d'aujourd'hui.
2. Il faut apprendre à mathématiser des situations.
3. Les programmes du cycle secondaire doivent comporter: ensembles, relations, graphes, groupes, espaces vectoriels (y compris les vectoriels à produit scalaire euclidien), les débuts de l'analyse mathématique et du calcul différentiel et intégral.

Le point le plus central, le plus fondamental du programme précédent est sans conteste :

espaces vectoriels

La mise en évidence systématique des espaces vectoriels sous-jacents, dans les branches les plus variées, est un des traits caractéristiques du vrai visage de la mathématique d'aujourd'hui. L'étude de problèmes difficiles de topologie utilise notamment la structure d'anneau-module, qui généralise celle d'espace vectoriel.

Qui ne voit l'impossibilité actuelle de développer honnêtement un cours d'analyse mathématique sans utiliser de manière fondamentale les espaces vectoriels [D1]. Est-il admissible de dissimuler que différentielles et intégrales sont des exemples importants d'applications linéaires ?

Gustave Choquet a indiqué avec combien de force et de raison que les vectoriels à produit scalaire constituent la Voie Royale de la Géométrie. La théorie des vectoriels à produit scalaire est le cadre naturel du précieux legs de la tradition euclidienne !

Est-il possible d'étudier les espaces vectoriels sans introduire la structure de groupe... alors qu'un vectoriel est, avant tout, un groupe commutatif... et qu'apparaîtront inévitablement les groupes de transformations linéaires ?

La plupart des groupes envisagés sont des groupes de permutations. Il s'agira de distinguer les permutations parmi les transformations.

L'ensemble des classes latérales de tout sous-vectoriel constitue une partition.

Et nous n'avons pas encore évoqué le champ des coefficients. Les vectoriels considérés sont réels : il s'agit donc d'introduire le champ ordonné des nombres réels, dans lequel la structure d'ordre joue un rôle tout à fait fondamental.

Inutile de prolonger cette énumération en cascade, un bon enseignement des éléments des vectoriels utilise inévitablement tous les concepts de la théorie élémentaire des ensembles, des relations et des groupes.

L'inscription de l'étude du vectoriel réel au programme de l'enseignement secondaire, impose les grandes lignes de ce programme que nous allons examiner ci-dessous de manière plus détaillée, en suivant l'ordre chronologique, et en polarisant nos observations sur la géométrie et le vectoriel euclidien plan.

*

* *

En 1961, au moment même où l'entreprise belge de rénovation de l'enseignement de la mathématique démarrait dans les classes de 6ème (12-13 ans), j'ai pris une classe de 3ème scientifique (élèves de 15 à 16 ans, 7 périodes de 45 min. par semaine) pour voir s'il n'y avait pas moyen d'enseigner directement la théorie des vectoriels à des élèves de 15 ans ayant suivi un enseignement traditionnel.

Cette expérience m'a amené à la conclusion que voici:

1. L'enseignement traditionnel avant 15 ans, avait déjà conditionné les élèves dans un sens opposé à l'esprit de la mathématique moderne. De grands efforts devaient être consentis pour les désintoxiquer. Le conditionnement antérieur n'avait rien de naturel ni de spontané: des trésors de pédagogie et d'abnégation traditionnelles avaient été dépensés pour arriver à ce résultat... qu'il convenait maintenant de détruire. Quelle perte de temps et d'énergie!
2. Les notions fondamentales concernant ensembles et relations s'enseignent plus aisément à 12 ans qu'à 15. Elles embouteillent le cours de la classe de 15 ans où trop de concepts doivent s'introduire simultanément.
3. Ensembles, relations, groupes... étant enseignés dès 12-13 ans, il est possible d'utiliser harmonieusement ces concepts comme outils-moteurs de la construction même de l'édifice mathématique et en particulier de la géométrie. Il en résulte un énorme gain de temps et de motivation et la mathématique apparaît ainsi dans une vision unitaire.

Classe de sixième

(12-13 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.) (1)

La première moitié de cette année est réservée aux ensembles et relations, enseignés en s'aidant des représentations géométriques par diagrammes de Venn et graphes multicolores.

Tous ceux qui ont procédé de la sorte — et ont pris leur temps pour cet enseignement — ont pu constater, les années ultérieures, que les principales notions de cette théorie élémentaire et naïve étaient définitivement assimilées et faisaient même partie de la connaissance acquise immédiatement disponible.

L'usage des diagrammes de Venn et des graphes apprend subsidiairement à dessiner des schémas et à schématiser des situations, ce qui est fondamental pour toutes les études ultérieures.

On aborde la géométrie au cours de la deuxième moitié de cette année en utilisant à la fois les notions ensemblistes acquises et

(1) Certaines classes belges de sixième disposent de 5 à 6 périodes hebdomadaires. C'est l'idéal. Personnellement, nous avons mené l'expérience dans des classes à quatre périodes.

la méthode axiomatique des sciences expérimentales. Le plan est regardé comme un donné que l'on idéalise de manière harmonieuse lorsque l'expérience proprement dite cesse de donner des réponses. Le maître choisit des situations qui provoquent l'expression de certaines affirmations plus ou moins descriptives. C'est parmi celles-ci que l'on choisit les axiomes d'incidence de la géométrie plane.

Il est souvent difficile de raisonner sur des figures parce que l'on y *voit* les réponses sans *raisonner*. On obvie à cet inconvénient par l'utilisation des diagrammes de VENN ([MM 1] pp. 68-71) et notamment en demandant de dessiner dans le plan des situations primitivement décrites par des diagrammes.

L'axiome des parallèles est introduit sous forme globale ([MM 1] pp. 73-75).

Les chaînes de parallélogrammes conduisent tout naturellement à la notion de couples équipollents. Le caractère arguésien du plan est contenu dans l'axiome affirmant la transitivité de l'équipollence.

Les translations ou vecteurs (classes d'équivalence de l'équipollence), apparaissent d'emblée comme permutations du plan. L'identification délibérée de vecteur et translation à une permutation du plan économise des concepts et évite des distinguos subtils mais inutiles.

En ce qui concerne la géométrie, le cours de sixième se termine par la mise en évidence du groupe commutatif des vecteurs auquel s'identifie le plan Π dès la fixation d'une origine. Les élèves effectueront des calculs dans le groupe $\Pi_0, +$ qui est en lui-même une prodigieuse situation pédagogique.

En plus des translations, on considère dans cette classe les projections parallèles du plan sur une droite et l'une des premières démonstrations dignes de ce nom consiste à prouver que les projections parallèles de couples équipollents sont équipollentes, premier pas vers le théorème de THALÈS. On utilisera, à cet effet, le moyen pédagogique des bandes dessinées pour marquer les étapes de la démonstration ([MM 1] p. 362).

Une telle présentation de la géométrie est possible parce que nos élèves ont étudié au préalable ensembles et relations, et notamment les permutations.

Classe de cinquième

(13-14 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

Cette année est presque entièrement consacrée à la genèse simultanée du champ ordonné des réels et de la structure vectorielle plane. Le fait important à retenir ici, est qu'*il existe au moins une méthode permettant d'introduire ces notions importantes, de manière à la fois rigoureuse et intuitive, à des enfants de 13 à 14 ans.*

Cet enseignement a pu réussir grâce à la présentation antérieure des éléments de géométrie sous forme ensembliste, axiomatique et relationnelle. La numération de position joue un rôle essentiel dans l'introduction de l'ensemble ordonné des réels. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à [F1], petit ouvrage destiné aux enseignants, où à [MM2], manuel destiné aux élèves et écrit après l'expérience.

Un patient cheminement nous a conduit des axiomes originels de caractère intuitif à la structure de vectoriel réel de dimension deux. Au fur et à mesure du développment du cours, on invoque de moins en moins les axiomes originels et les propositions intermédiaires et de plus les propriétés qui caractérisent la structure de vectoriel réel du plan.

Le cours *culmine* par la mise en évidence de cette structure et se *termine* par son utilisation systématique. On prépare ainsi le retournement psychologique du début de la classe de troisième où la structure vectorielle est la base axiomatique de départ.

Classe de quatrième

(14-15 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

«Le cadre du vectoriel euclidien plan est la voie royale pour l'enseignement de la géométrie». Encore convenient-il d'accéder sans heurt à cette voie. Tel est le but de notre enseignement de la géométrie métrique dans la classe de quatrième.

A partir de la notion bien intuitive de symétrie orthogonale, on introduit ou l'on retrouve déplacements (rotations ou translations) et retournements (symétries glissées ou non).

Le moyen pédagogique des droites numérotées facilite l'accès au groupe des isométries et à celui des déplacements ([GP] et [MM3]).

L'utilisation simultanée de ces groupes et des repères affins des droites introduit la notion de distance sous sa forme moderne comme application de $\Pi \times \Pi$ dans R^+, ce qui sousentend le choix préalable de l'unité. Il n'y a aucune objection à la fixation de celle-ci, puisque le changement d'unité pose un problème dont la solution est banale.

Le groupe commutatif des rotations de centre donné conduit au groupe des angles. Comme la mesure des angles ne joue aucun rôle en géométrie élémentaire, le problème que pose son introduction est reporté à la classe de seconde où il est résolu dans le cadre de la théorie des fonctions circulaires. La préhension numérique de l'angle se fera d'abord par l'intermédiaire du cosinus.

Distance et cosinus introduisent le produit scalaire. Sa commutativité et sa bilinéarité entraînent, théorème de PYTHAGORE, inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ et inégalité triangulaire.

Le cours *culmine* par la mise en évidence de la structure de vectoriel euclidien plan et se *termine* par son utilisation systématique.

Clase de troisième scientifique

(15-16 ans) (7 périodes hebdomadaires de 45 minutes)

Les élèves ont eu l'occasion de se rendre compte de l'importance de la structure de vectoriel ce qui motive une petite étude intrinsèque dont le point crucial est le théorème de la base:

Si un vectoriel admet une base de n éléments
Alors toute base de ce vectoriel comprend n éléments.

Ce théorème est mis à la portée des élèves de 15 ans grâce à un moyen pédagogique qui matérialise les subtitutions dans le passage d'une base à une autre. Ce procédé est décrit de manière schématique dans [F2] pp 32-33.

Ce point acquis, le moment est venu d'effectuer le retournement psychologique auquel nous avons déjà fait allusion. La fin des cours des clases de cinquième et de quatrième a déjà appris à se servir, en fait, des axiomes de définition de la structure de vectoriel euclidien plan.

Les élèves qui ont parcouru avec nous le chemin menant des axiomes originels à cette structure ont souvent une certaine angoisse à l'idée de ne pas retenir le détail de l'itinéraire parcouru. Le retournement psychologique vient à son heure: il est apaisant et réconfortant de savoir que l'on a le droit de ne plus retenir que les axiomes de définition des réels et ceux de la structure de vectoriel euclidien plan.

La dimension n'intervient pas dans les démonstrations concernant le carré scalaire d'une somme et le théorème de PYTHAGORE. On fait d'une pierre deux coups, puisque ces résultats restent valables dans l'espace.

La plus grande partie du cours de troisième, en ce qui concerne la géométrie, est néanmoins consacrée à une étude plus systématique du vectoriel euclidien plan. Il serait navrant de n'utiliser cette importante structure que pour établir de manière nouvelle des résultats déjà acquis dans l'enseignement antérieur et notamment dans la classe de quatrième. Le déroulement du cours de troisième doit convaincre les élèves que le vectoriel euclidien plan est une formidable base de départ pour la conquête de notions absolument fondamentales de la mathématique de toujours.

La linéarité des projections parallèles, des homothéties et des symétries parallèles (et orthogonales) mise en évidence dans les classes de 5ème et 4ème, motive l'étude des transformations linéaires du vectoriel plan.

Toute transformation linéaire est déterminée par l'image des éléments d'une base. On devine aussitôt le bénéfice que l'on pourra tirer d'une utilisation adéquate de la méthode des graphes, dont l'intérêt rebondit ici de manière subite. A chacun de ces graphes partiels est associée la matrice de la transformation dans la base considérée. Cette étude met en évidence l'anneau des transformations linéaires (et subsidiairement celui des matrices $R^{2\times 2}, +, \cdot$) et le groupe linéaire général (voir [A7], Ch 2).

On a vu, dans les classes antérieures, que les isométries centrées sont linéaires. D'où le problème inverse : quelles sont les transformations orthogonales (ou transformations linéaires qui conservent le produit scalaire)? On est heureux d'établir que les seules transformations orthogonales sont celles que l'on connait déjà : symétries et rotations. L'étude des matrices de ces transformations dans une base orthonormée conduit au cosinus d'une rotation ainsi qu'au demi-tour et aux *deux* quarts de tour.

Le groupe des similitudes et le sous-groupe des similitudes directes s'obtiennent en composant homothéties et transformations orthogonales. On établit enfin que l'ensemble des similitudes directes est un champ (ou corps commutatif).

Une des manières d'*orienter* le vectoriel consiste à décider d'appeler i l'un des quarts de tour. Toute similitude directe s'identifie au nombre complexe $a+bi$. La partie réelle a ne dépend pas de l'orientation contrairement au signe de sa partie imaginaire b. Dans le plan orienté, on définit le sinus d'une rotation ou d'un angle.

Les angles sont introduits comme éléments d'un groupe additif isomorphe au groupe compositionnel des rotations ou au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Il est facile de déduire les quelques formules trigonométriques importantes des propriétés des nombres complexes.

Pour plus de détails, nous renvoyons au bel ouvrage [D] de JEAN DIEUDONNÉ écrit à l'intention des enseignants intrépides et à [GP] directement destiné aux élèves.

Dans la classe de seconde (16-17 ans), la géométrie dans l'espace est développée à partir du vectoriel euclidien de dimension trois.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages

1. [A] ARTIN, *Géometrie Algebra*. (Interscience Publishers, New-York, 1957).
— *Algèbre Géométrique*. (Gauthier-Villars, 1962).

2. [D1] DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis*. (Academic Press inc., New-York, 1960).
— *Fondements de l'Analyse Moderne*. (Gauthier-Villars, Paris, 1963).

3. [D 2] Dieudonné, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*. (Herman, Paris, 1964).

4. [G] Papy, *Groupes*. (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles — Dunod, Paris, 1961).
— *Groups*. (Macmillan, London, 1964).
— *I gruppi*. (Feltrinelli Editore, Milano, 1964).

5. [EE] Papy, *Erste Elementen der Moderne Mathematik*. (Otto Salle Verlag, Frankfurt-Hamburg, 1962-1963).

6. [F 1] Papy-Debbaut, *Géométrie affine plane et nombres réels*. (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles — Gauthier-Villars, Paris, 1962).
— *Ebene Affine Geometrie und reelle Zahlen*. (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965).

7. [F 2] Papy, *Initiation aux Espaces Vectoriels*. (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles — Gauthier-Villars, Paris, 1963).
— *Einführung in die Vectorraumlehre*. (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965).

8. [MM 1] Papy, *Mathématique Moderne 1*. (Editions Didier, Bruxelles — Paris, 1963).
— *Moderne Wiskunde 1*. (Didier, Bruxelles — Paris, 1965).
— *Matematica Moderna 1*. (Edutura Tineretului, Bucaresti, 1965).
— *Modern Mathematics 1*. (Collier-Macmillan, London — New-York, 1965).

9. [MM 2] Papy, *Mathématique Moderne 2*. (Didier, Bruxelles — Paris, 1965).

10. [A 7] Papy, (avec la collaboration des Assistants du C. B. P. M.).
— *Arlon 7. Documentation pour l'enseignement du Vectoriel euclidien plan*. (Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique—183, Avenue Brugmann, Bruxelles 6).

11. [GP] Papy, *Géométrie Plane*. (Labor Bruxelles — Nathan, Paris, 1966).

12. [MM 3] Papy, *Mathématique Moderne 3*. (Didier, Bruxelles — Paris, 1966).

Articles

13. Papy, *Introduction aux espaces vectoriels*. (La math. du 20e siècle. Vol. II, Bruxelles, 1961) (33 pages).

14. Papy, *Méthodes et techniques de présentation des nouveaux concepts de mathématiques dans les classes du premier cycle de l'enseignement secondaire*. (Mathématique moderne. OCDE Athènes, 1963).
— *Médios y técnicas para exponer los conceptos de matemática moderna*. (Elementos n.º 9, Nov. Dic. 1964, pp. 73-80, n.º 10, En. Feb. 1965, pp. 99-104, n.º 11, Mar. Abr. 1965, pp. 127-130).
— *Methods and techniques of explaining new mathematical concepts in the lower forms of secondary schools*. (The Mathematics Teacher, Vol. LVIII, n.º 4, April, 1965, pp. 345-352, n.º 5, May, 1965, pp. 448-453).

15. Papy, *Comment introduire les notions d'ensembles et de relations*. (Publications de l'Unesco).

16. Papy, *L'enseignement de la géométrie aux enfants de 12 à 15 ans*. (Publications de l'Unesco).

NOTES METHODOLOGIQUES RELATIVES AU PROGRAMME DE 6ème (11-12 ans)

Le passage des élèves de l'enseignement primaire à l'enseignement moyen marque pour eux une étape importante. Ils ont l'impression d'entrer dans une phase nouvelle au cours de laquelle on leur enseignera des choses nouvelles sur des sujets nouveaux. Ceux d'entre eux qui conservent un souvenir amer de certains points du programme de l'enseignement primaire ont l'impression vivifiante qu'il prennent un nouveau départ et que leurs insuccès passés n'hypothèquent pas leur avenir scolaire. Ils se trouvent ainsi dans une disposition d'esprit réceptive pour les idées nouves.

Leur âge est celui de l'imagination. Dans la vie courante, ils affectionnent enrichir leur langage de vocables appartenant à des domaines dans lesquels ils pénètrent avec joie.

C'est l'âge aussi où le raisonnement abstrait prend plus de vigueur et où l'expression verbale, qui a gardé toute sa fraîcheur, s'adapte aisément à l'expression spontanée.

Quelle déception pour ces enfants d'aborder cette phase de l'enseignement de la mathématique par une revision des notions déjà étudiées à l'école primaire! Une telle revision, conduite par des maîtres expérimentés, connaissant les lacunes de leurs recrues habituelles, s'attache fatalement aux notions points douloureux de l'enseignement primaire, et tout spécialement aux notions qui inhibent et bloquent les élèves.

Nous suggérons en conséquence d'éviter autant que possible dans le programme de sixième un rappel explicite et une utilisation systématique des notions rencontrées à l'École Primaire. Les méthodes qui ont échoué pour certains élèves dans le primaire ont décidément peu de chances d'être efficaces pour ces mêmes élèves dans le secondaire.

Nous suggérons donc de partir de bases nouvelles et d'aborder éventuellement certaines notions déjà rencontrées, sous un angle nouveau, ce qui donnera aux moins favorisés une nouvelle chance de mieux comprendre.

L'acquisition et la fixation des notions mathématiques se font non seulement par l'exercice de démarches rationnelles, mais encore par le canal des activités sensori-motrices. Enseigner de la mathématique, c'est cependant toujours enseigner une abstraction, et finalement, faire comprendre et dominer une situation abstraite aux possibilités infinies par la connaissance d'un nombre fini des résultats. On fournira donc aux enfants des modèles concrets pour autant qu'ils y puissent substituer des modèles abstraits, qui soient les supports d'un raisonnement effectif.

Nous allons entrer maintenant dans le détail de nos suggestions. Est-il besoin de dire que si l'on ne peut à plaisir modifier l'ordre d'enseignement de tous les sujets que nous proposons, l'enchaînement que nous suivrons ci-dessous n'a dans notre esprit rien d'absolu. De plus, bien souvent, le professeur pourra faire empiéter l'enseignement de certaines des notions. Ceci est même à conseiller fortement et nous semble inévitable dans un enseignement actif. Chaque fois que l'occasion s'en présentera, on isolera les concepts le plus importants.

Si l'espace d'EUCLIDE a pu pendant longtemps servir de cadre à une exposé unifié de la mathématique de base, il n'en est plus ainsi aujourd'hui et ce rôle peut être rempli maintenant par l'*univers ensemblistes*.

Comme il a été prouvé d'autre part, par des expériences effectuées tant en Amérique, en Angleterre, en Russie, en Pologne, que dans notre pays, que l'enseignement des *notions élémentaires sur la théorie naïve des ensembles* intéresse vivement les jeunes élèves, il semble inévitable de proposer ce sujet comme *point de départ* dans l'enseignement secondaire. On partira d'exemples concrets, mais on fera acquérir les véritables notions abstraites sans utiliser cependant aucun jargon pédant.

Tous les élèves du début du secondaire ont une notion vague d'ensemble. Il ne s'agit donc pas de leur inculquer cette notion mais de l'affiner de façon à en faire un concept mathématique naïf que l'on utilisera immédiatement pour fonder la géometrie.

On mettra bien en évidence la notion d'appartenance d'un élément à un ensemble. On insistera sur le fait qu'un ensemble est défini quand on sait pour tout objet s'il est ou non un élément de cet ensemble et qu'un «morceau» d'un élément de cet ensemble n'est pas nécessairement un élément de cet ensemble.

Les diagrammes de VENN permettent de mettre ce fait en évidence de manière frappante.

Les diagrammes de VENN qui s'introduisent d'une manière presque spontanée constituent un moyen pédagogique fondamental, d'ailleurs utilisé de manière courante par tous les mathématiciens.

Nous conseillons de faire dessiner aux enfants des diagrammes où la couleur est utilisée de manière suggestive. Ces dessines doivent être grands et l'utilisation des crayons à mèche est recommandée.

On introduira les symboles $\in$ et $\subset$. Des situations familières conduisent tout naturellement au singleton et à l'ensemble vide qui sera noté $\emptyset$.

Des exemples simples révèleront qu'il est naturel de regarder certains ensembles comme des éléments. Toute droite est un ensemble de points, et un élément de l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites du plan.

On pourra parler de *l'ensemble des parties d'un ensemble et rechercher* l'ensemble des parties de certains ensembles sans s'attarder sur la définition formalisée.

Si l'on prend soin d'écrire l'ensemble des parties de l'ensemble de quatre éléments distincts $\{a, b, c, d\}$ sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \\ \quad \{a,b,c\}, \{d\}, \{a,d\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}, \\ \quad \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\} \end{array}\right.$$

on révèlera naturellement la formule du nombre de parties d'un ensemble de n éléments (2^n).

Les situations concrètes et les diagrammes de VENN introduisent tout naturellement les opérations d'*intersection, de réunion, de différence* de deux ensembles. On utilisera les signes $\cap$, $\cup$, $\setminus$

Des situations comprenant un grand nombre d'ensembles conduisent à représenter un ensemble par des assemblages différents ne comportant que des lettres désignant les ensembles initiaux et les signes $\cap$, $\cup$, $\setminus$.

C'est un moment propice pour introduire les signe $=$ et pour souligner la signification de *l'égalité* dans tous les cas où elle a été rencontrée. En utilisant les diagrammes de VENN, on établira les lois *d'associativité*, de *commutativé*, de *distributivité*, ainsi que le rôle de l'*ensemble vide*.

Il nous semble dangereux de vouloir formaliser des démonstrations de telles propriétés. Sans doute est-il préférable de considérer ces résultats comme fournis par des diagrammes, ce qui permettra beaucoup plus tard de regarder la logique elle-même comme une extrapolation d'un jeu de propositions fournies ici par l'expérience.

Néanmoins, il será particulièrement fécond de désigner l'*implication* par le symbole $\Rightarrow$ (entraîne ou implique) et la bi-implication ou équivalence logique par le signe $\Leftrightarrow$ (si et seulement si) qui seront introduits comme de simples abréviations sténographiques. Quand l'occasion s'en présentera, on pourra utiliser les quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe), $\exists!$ (il existe un et un seul).

A titre d'exercice, on pourra introduire la *différence symétrique*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

On remarque que $A \triangle B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à un et un seul des ensembles A, B: autrement dit,

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

On recherchera les propriétés de $\triangle$ et l'on remarquera (sans parler explicitement de *groupe*) que $\triangle$ érige l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E en un *groupe commutatif*. Sans doute s'agit-il d'un des exemples de groupes les plus simples.

On sait que la mathématique actuellement enseignée dans le secondaire ne peut éviter l'utilisation explicite des notions de *relation*, *fonction*, *bijection*, *équivalence*, *ordre*.

N'est-il pas étrange que nos exposés traditionnels de signalent pas aux élèves que l'homothétie est une fonction (d'ailleurs continue). La relation «a comme père» est un autre exemple de fonction. Porquoi superposer aux difficultés du début de l'analyse celle de l'acquisition de la notion de fonction?

Nous suggérons d'introduire la *notion de relation* à partir d'exemples concrets. Certains situations suggérent elles-mêmes aux élèves de représenter les relations par des graphes (une flèche va du point a vers le point b chaque fois que le couple (a, b) est dans la relation considérée).

Quand les graphes de plusieurs relations ont été dessinés, certains élèves feront des comparaisons et émettront des commentaires qui sont un début de classification. Les diagrammes de VENN et les graphes ne sont pas des modèles intuitifs approchés mais un langage rigoureux et clair traduisant une situation mathématique. Les propriétés de réflexité, de symétrie, de transitivité, de antiréflexivité et d'antisymetrie s'enseignent aisément au moyen des graphes.

La notion d'équivalence liée à celle de partition est fondamentale dans toute activité rationnelle.

Les notions de fonctions et les notions satellites telles que les permutations, qui jouent un rôle fondamental dans toute la mathématique aussi bien en géometrie qu'en analyse ou en calcul combinatoire, seront dégagés à partir de situations familières.

Il faut bien admettre que la terminologie concernant les fonctions n'est pas entièrement fixée. Nous suggérons d'appeler fonction toute relation dont 2 couples distints n'ont jamais même origine. Autrement dit, est fonction, toute relation telle que de tout point du graphe part au plus une flèche.

Un avantage de cette définition réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas la mise en évidence souvent artificielle d'ensemble de départ et d'en ensemble d'arrivée.

On appellera «application de A dans B», en notation $f: A \to B$ toute relation f dont le graphe jouit des propriétés suivantes:

1) Toutes les flèches partent de points de A et aboutissent en des points de B.
2) de tout point de A part une et une seul flèche.

L'expression

«f est une fonction de A dans B»

est synonime de l'expression

«f est une application de A dans B».

En mathématique, comme dans le langage courant, il est parfois inévitable et souvent commode de disposer de synonimes.

Le mot application a l'avantage d'être doublé du verbe appliquer mais l'usage mathématique impose le mot fonction dans certains circonstances.

On appelera transformation de l'ensemble A, toute application $A \to A$.

On consacrera un soin tout particulier aux notions à la fois riches et simples d'ordre et d'ordre total.

On sait que l'édificie d'EUCLIDE péchait surtout par l'absence de références à ces notions. Il en est résulté que dans l'enseignement traditionnel, toutes les notions relatives à l'ordre et en particulier au calcul des inégalités, constituent une pierre d'achoppement.

Dégagées des notions familières, les notions d'ordre et d'ordre total seront utilisées de manière systematique en géometrie.

Un graphe étant donné, il est tout naturel de considérer le graphe obtenu en retournant toutes ses flèches, ce qui conduit à la notion tout à fait simple et fondamental de réciproque d'une relation.

On notera que la représentation des relations par des tableaux ou par les méthodes cartésiennes rend cette notion plus difficile. L'avantage des graphes est ici très net.

Aprés l'assimilation de ces importants notions, on veillera à en traduire la définition sous les formes les plus diverses, en langage ordinaire et en langage plus ou moins formalisé.

Les relations de parenté conduisent tout naturellement à la composition des relations, dont la composition des fonctions et des applications est un cas particulier.

La construction du graphe de la composée de 2 relations représentées par des graphes de couleurs différentes est un excellent exercice.

Le comportement des élèves devant ces problèmes élémentaires est extrêmement instructif. L'expression du résultat s'effectue ici sans recours au langage verbal. Ce facteur est donc éliminé dans les causes d'échec.

Tous ceux qui ont utilisé les graphes comme moyen pédagogique signalent le lien affectif des enfants pour ces dessins abstraits et multicolorés.

Comme est instructive aussi pour les élèves la situation fournie par un ensemble de points représentatifs et que structure peu à peu l'apparition successive des diverses flèches du graphe.

La composition successive de 3 relations pose aussitôt le problème immédiatement résolu de l'associativité de la composition. Il est essentiel de rendre les enfants conscients le plus tôt possible de l'associativité de la composition des relations qui est utilisée sans cesse dans tout exposé mathématique.

Deux ensembles A et B étant donnés, on recherchera quelle est la plus grande relation de A vers B, ce qui fournit le *produit* $A \times B$. On *établira la distributivité de ce produit par rapport à la réunion.*

Les bijections entre ensembles introduisent les notions d'équipotence et de cardinal (ou nombre d'éléments d'un ensemble). Les ensembles finis fournissent les nombres naturels.

Les ribambelles mettent en évidence, de manière intuitive, la notion d'ensemble infini.

Les enfants connaissent les propriétés essentielles de l'addition et de la multiplication des entiers naturels.

On éveille leur intérêt en leur demandant de déduire ces propriétés des notions ensemblistes ce qui leur imposera de rechercher une définition ensembliste de l'addition et de la multiplication.

Les propriétés fondamentales des nombres naturels se déduisent alors sans formalisme superflu des propriétés des opérations ensemblistes. Cette méthode de présentation ouvre la voie à des généralisations ultérieures et facilitera plus tard l'étude de l'analyse combinatoire.

Les problèmes de dénombrement posant celui *des systèmes de numération*, il nous a toujours semblé très difficile d'intéresser les élèves à étudier une nouvelle fois le système décimal avec les chiffres arabes.

Nous suggèrons d'étudier le système utilisé par les grandes calculatrices électroniques: le *système binaire*.

Des actions antagonistes présentées dans certaines situations simples, permettent d'introduire tout naturellement le groupe $Z, +$.

Ainsi que Caleb Gattegno l'a fait remarquer, les élèves proposent spontanément ou admettent volontiers *l'extension de la multiplication* de ω à Z par une sorte d'extension de la loi d'associativité qui permet d'écrire $(-a)b = -(ab)$. On établira les propriétés qui traduisent le fait que $Z, +, \cdot$ *est un anneau*.

Comme les élèves ont été habitués dès le début de cet enseignement à représenter les objets les plus divers et les ensembles par des lettres, la signification du calcul algébrique littéral leur apparaît immédiatement. Dans l'anneau $Z, +, \cdot$ on effectuera des calculs gradués et variés qui permettent d'introduire puissances et exposants, et notamment les produits remarquables dans

$Z, +, \cdot$ On attachera un soin tout particulier à la résolution d'équations dans $Z, +, \cdot$ On soulignera que la solution d'une équation fournit, en fait, la même information que l'équation elle-même. Le progrès unique, mais important réside dans la forme de cette information.

Géométrie.

La connaissance à la fois logique et intuitive de la géométrie plane reste fondamentale dans la mathématique actuelle.

Grâce aux notions ensemblistes et relationnelles que possèdent les élèves, l'étude de la géométrie pourra se faire de manière nette. L'intuition géométrique aidera le raisonnement sans jamais se substituer insidieusement à lui.

Chaque fois qu'un ensemble d'informations est donné, on peut distinguer les premières informations communiquées et toutes celles qui s'en déduisent. On appelle les premières, axiomes et les autres, propositions ou théorèmes. Il est facile de faire voir aux enfants q'un même ensemble d'informations peut résulter de systèmes d'axiomes différents.

A partir des notions empiriques de géométrie déjà acquises par les élèves et de l'observation de situations adéquates, on mettra en évidence les informations parmi lesquelles on choisira les axiomes.

Une fois les axiomes d'incidence acquis, il importe de les utiliser dans le raisonnement déductif. Or les enfants raisonnent difficilement sur les propriétés d'incidence à partir d'un dessin sur lequel on *voit* d'emblée les réponses aux questions posées. Ici, les diagrammes de Venn viennent utilement en aide. Ils constituent un support intuitif à la structure logique de la géométrie et obligent les enfants à raisonner pour fournir les réponses aux questions posées. Le passage à la représentation graphique usuelle (et vice-versa) est fondamental.

A partir des axiomes d'incidence, on introduit la notion de parallélisme et l'axiome d'Euclide que l'on présentera avantageusement sous forme globale: toute direction est une partition du plan.

A partir du double pliage, s'introduit l'axiome des directions perpendiculaires. La présentation globale de ces axiomes permet d'établir d'emblée toutes les propriétés classiques sur les parallèles et perpendiculaires.

Les élèves familiarisés avec la notion d'ordre reconnaissent volontiers que six ordres totaux peuvent être définis dans tout ensemble de trois objets, et qu'une infinité d'ordres totaux peuvent être définis dans tout ensemble infini. Dans le contexte d'une société possédant un alphabet, tout ensemble de trois lettres est muni de deux ordres totaux réciproques privilégiés: l'ordre alphabétique et l'ordre alphabétique réciproque des trois lettres. Comme toute droite est un ensemble infini, il existe une infinité d'ordres totaux sur chacune d'elles. Dans le contexte de la situation graphique intuitive, il apparaît qu'ici aussi deux de ces ordres totaux (réciproques l'un de l'autre) sont privilégiés. Ces ordres sont appelés ordres naturels. Un axiome consignera cette information: toute droite est munie de deux ordres totaux réciproques appelés ordres natureles de la droite. Orienter une droite, c'est désigner l'un de ces ordres natureles par $\leq$.

A partir des axiomes d'incidence, on aura défini les projections parallèles du plan sur une droite et d'une droite sur une droite.

Par une nouvelle démarche intuitive, on constate que toute projection parallèle d'une droite orientée sur une droite orientée est toujours strictement croissante ou strictement décroissante. Cette information qui sera consignée dans un nouvel axiome est équivalente à l'axiome de Pasch.

Il est possible, à partir des axiomes précédents, d'établir qu'étant données deux droites parallèles orientées, toutes les projections parallèles sont simultanément croissantes ou simultanément décroissantes. Nous suggérons d'admettre ce résultat comme axiome supplémentaire.

A partir des notions d'ordre, s'introduisent tout naturellement celles de segments ouverts, fermés, semi-ouverts, de demi-droites ouvertes ou fermées, de demi-plans fermés ou ouverts.

Disposant de la notion de segment et de celle d'inclusion, nous introduirons de manière extrêmement simple celle d'ensemble convexe. Un ensemble este convexe si et seulement si tout segment joignant deux de ses points est inclus dans l'ensemble. On étudiera de nombreux exemples d'ensembles convexes et non convexes.

Un exercice fécond consiste à construire l'enveloppe convexe de certaines parties du plan.

Ainsi que l'a fait remarquer Gustave Choquet, la trop grande importance accordée par les exposés traditionnels aux propriétés métriques du triangle dissimulait le rôle du parallélogramme.

A partir des notions de parallélisme et d'incidence, on comprend aisément ce qu'il faut entendre par deux couples de points liés par un parallélogramme. Deux couples seront dits équipollents si et seulement s'ils sont liés par un ou deux parallélogrammes. On établit aisément que l'équipollence est réflexive et symétrique. Une nouvelle démarche intuitive révèle la transitivité de l'équipollence (à consigner en axiome).

Certains élèves hésitent à admettre que les projections parallèles de couples équipollents soient équipollents. C'est l'occasion de la première démonstration digne de ce nom, par le nombre des étapes qu'elle comporte. Les bandes dessinées constituent un moyen didactique non verbal qui met en évidence de façon frappante tous les pas de la démonstration. Elles font apparaître aux élèves qu'une démonstration se développe souvent par des éclairages successifs d'une même situation.

A partir du théorème de la projection, on déduit les propriétés affines du parallélogramme et le «petit théorème de Thalès».

Les translations sont définies comme les classes d'équivallence de l'équipollence. On établit que les translations sont des permutations du plan.

Chaque fois, qu'une transformation importante est introduite en géométrie il convient de familiariser les élèves avec celles-ci par des exercices variés choisis de manière à mettre en évidence les aspects intuitifs de la transformation introduite. En ce qui concerne les translations, on demandera notamment de rechercher l'image de certaines parties du plan. Une translation et une partie P du plan étant données, on demandera quel est le plus petit ensemble du plan contenant P et qui soit égal à son image par t, ce qui donne lieu à la notion de frise. Le problème analogue pour une partie du plan et deux translations conduit aux tapisseries.

PROBLEMES

La mathématique est aujourd'hui indispensable dans des domaines de plus en plus nombreux, comme langage, support de la pensée, moyen d'investigation et de résolution.

Tout élève de l'Enseignement Moyen est aujourd'hui susceptible de devoir utiliser et appliquer de la Mathématique au cours de la poursuite de ses études et dans sa profession.

L'enseignement devra, non seulement faire connaître les éléments fondamentaux de la Mathématique actuellement utilisée dans des applications mais encore apprendre à l'appliquer dans les situations les plus diverses.

On se gardera de l'illusion que l'on puisse, même après un cycle complet d'humanités, munir les élèves d'un bagage mathématique, apte a leur fournir automatiquement des solutions toutes faites aux problèmes qui leur seront effectivement posés. Dans la pratique; la difficulté primordiale consiste à mathématiser une situation, et à formuler les problèmes qu'elle pose. Pour les résoudre, on essayera autant que possible de reconnaître l'une ou l'autre des grandes structures de la mathématique.

Les problèmes traditionnels concernant l'intérêt, les mélanges, les robinets, les alliages et les invraisemblables partages d'héritages n'ont aucune portée pratique, et ne familiarisent pas avec les démarches qu'imposent les véritables applications.

Conformément aux conclusions de la réunion de St Andrews, de la Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'Enseignement de la Mathématique, dirigée par Gustave Choquet et Caleb Gattegno, on préférera aux problèmes stéréotypés à solution unique, des problèmes ouverts qui font passer l'élève à un niveau plus élevé de compréhension.

On abandonnera, en conséquence, les leçons de problèmes artificiels. Au contraire, tout l'enseignement se développera par la mise en évidence progressive des problèmes ouverts, et la recherche de leurs solutions.

On habituera systématiquement les élèves à mathématiser des situations tant dans l'organisation du cours lui-même, que dans des exercices présentant des situations problématiques.

On fera appel, autant que possible, à leurs connaissances dans des domaines variés. Il est clair cependant qu'au niveau de la sixième, on recourra davantage à leurs connaissances communes qu'à un acquis dans d'autres sciences. Ainsi que l'a fait remarquer Dienes, il est indispensable à ce niveau, que le cours de Mathématique trouve en lui-même sa propre motivation, car peu d'applications extérieures impressionnantes sont à ce moment à la portée des élèves.

GAZETA DE MATEMATICA
N.º 100 — Julho-Dezembro 1965

Ensino da matemática para outras ciências

Yasuo Akizuki
Toquio

SUMÁRIO

Actualmente, devido ao progresso da matemática, das outras ciências e da engenharia, as aplicações da matemática aumentaram numa escala muito vasta, sofrendo ao mesmo tempo uma modificação essencial, mesmo em qualidade. Nasceram muitos ramos novos da ciência matemática. O novo estilo do pensamento matemático permitiu novas e numerosas aplicações. O computador electrónico, por exemplo, revolucionou os processos de cálculo. Por todas estas razões devemos reformar o ensino matemático actual.

Por outro lado, a estreita relação existente entre a matemática e as outras ciências teóricas, tal como existia no princípio deste século, desapareceu. O progresso principal realiza-se, em cada campo, independentemente do outro. Mas parece que já vão aparecendo pessoas, não muitas, que pretendem o regresso ao estado harmónico anterior e a construção da nova «ciência matemática». Com este objectivo também, é urgente reformar o ensino da matemática.

Assim, todos reconhecem de boa vontade a necessidade de uma tal reforma. Mas sobre o modo de realizá-la actualmente as opiniões não coincidem e quase sempre uma delas está em oposição com as outras. A dificuldade pode ter origem no facto de os cientistas não conhecerem suficientemente a matemática moderna e de os matemáticos não conhecerem suficientemente o desenvolvimento da ciência e da engenharia, tão vasto é o progresso em cada um destes campos.

Examinemos em primeiro lugar os reparos e as aspirações dos cientistas a respeito do ensino da matemática. Eu reuni opiniões de alguns destacados físicos e engenheiros japoneses.

Os bons físicos teóricos reconhecem plenamente a eficácia dos métodos matemáticos aplicados à sua ciência e apreciam a exacta formulação matemática das suas teorias, como objectivo final da investigação. Reconhecem plenamente também, como muito eficazes, as poderosas influências da matemá-

* «High school level» designa os dois últimos graus do ensino secundário.

tica moderna, tais como os conceitos de matriz-S, do observável, etc.. Mas afigura-se-lhes que esta formulação matemática moderna se apresenta demasiadamente abstracta e formal e lamentam que a verdadeira feição da natureza possa dissimular-se detrás da teoria matemática. Alguns deles perguntam-se porque os matemáticos chegaram a raciocinar de uma maneira tão abstracta. E desejam ardentemente compreender a essência de tal pensamento e a substância de conceitos tão abstractos. Por exemplo, o notável físico YUKAWA disse-me que, para os físicos, é mais fácil compreender uma estrutura em termos de números reais do que em termos de números complexos.

Há naturalmente muitos físicos que consideram a matemática mero instrumento dos seus estudos especializados, como meio auxiliar ou acabamento dos resultados dos seus trabalhos. Eles dizem: se compararmos um matemático com a pessoa que projecta um automóvel, então o físico deve ser comparado com o condutor. Anàlogamente, a formulação muito elaborada de um conceito e a prova extremamente rigorosa de um teorema não lhes parecem de modo algum necessárias. E acrescentam: nas classes habituais de matemática encontramos meras cadeias de demonstrações e um tal ensino não é conveniente para nós.

Deve notar-se que existem físicos, muito poucos, que afirmam: «A matemática moderna é absolutamente inútil à física porque não conduziu a nenhum progresso essencial desta. A contribuição actual dos matemáticos contemporâneos à física reduz-se à invenção dos computadores!». Por outro lado existem físicos, também muito poucos, com opiniões como esta: «No ensino da matemática, mesmo ao nível universitário, é mais importante permitir aos estudantes que adquiram o espírito matemático e o sentido da matemática moderna. Não devemos contar com um efeito imediato sobre as aplicações actuais!».

Parece que quase todos os cientistas desejam que haja, no ensino da matemática, a preocupação de ser mais intuitivo e um contacto mais estreito com as outras ciências.

Devia haver muita discussão acerca destes temas entre os quais nós, matemáticos, temos muitos pontos a considerar. Contudo, se estamos de acordo com a opinião de que o ensino da matemática deve ser diferente para os que a utilizam e para os matemáticos, também é verdade que a principal matéria a ministrar é ainda a própria matemática.

Devem ser debatidos os problemas: «raciocínio intuitivo e dedução lógica», «rigor e evidência intuitiva», «abstracto e concreto». Deve ser debatida, em particular, a forma de introduzir o sistema dedutivo e o raciocínio abstracto e como iniciar o aluno no tratamento rigoroso dos assuntos.

A matemática é, naturalmente, uma teoria abstracta. Até mesmo uma operação primária como a contagem $1, 2, 3, \cdots$, tem já essencialmente este caracter. Mas neste nível a abstracção é *inconsciente*. O primeiro curso de álgebra é também considerado abstracto, mas de uma abstracção comparável à da linguagem. Esta abstracção inconsciente deveria ser bem diferenciada da que caracteriza a matemática moderna.

A primeira teoria que se tornou *consciente*, na própria matemática, foi a geometria euclidiana. Construiu-se a teoria *dedutivamente*, configurando o espaço físico como uma entidade harmónica, isenta de contradição. Podemos afirmar que esta atitude é fundamental nas matemáticas aplicadas e na ciência em geral, o que deveria ser posto em destaque já no ensino elementar.

NEWTON prosseguiu com a edificação da teoria do universo dinâmico, introduzindo a massa e o tempo no espaço euclidiano estático. Pode considerar-se que a teoria de NEWTON configurou a natureza no mesmo espírito que animou EUCLIDES. Com a análise infinitesimal conseguiu interpretar as relações funcionais dissimuladas na matéria. Filosòficamente falando, como KANT afirmou, a mecânica newtoniana não é ontológica mas construtiva. Contudo, a teoria é categórica e fundada na noção intuitiva do contínuo.

Após NEWTON numerosos continuadores, por exemplo EULER, estudaram a determinação dos valores das funções desenvolvendo-as em série, mas deparámos mais tarde com perigos que geraram a crítica do último século. Constatámos além disso que certas formulações consideradas intuitivamente claras nem sempre oferecem uma representação suficientemente exacta do objecto, como no caso da curva de PEANO.

Assim, foram vivamente reclamadas a formulação exacta e a fundamentação rigorosa dos objectos matemáticos. O conceito de número real foi primeiramente clarificado por DEDEKIND, independentemente da sua base intuitiva. Seguidamente, por intermédio da teoria dos conjuntos de CANTOR, atingimos os fundamentos da matemática de HILBERT.

Estas manifestações críticas podem ser divididas em duas tendências, segundo creio: a primeira procura ser rigorosamente exacta e a segunda construtiva; como é natural, por vezes encontram-se as duas tendências estreitamente relacionadas.

Recentemente, já no século actual, descobriu-se que existem teorias matemáticas desenvolvidas que podem ser construídas, sem dificuldade, a partir de poucos postulados fundamentais simples. O método axiomático adquiriu assim um carácter não categórico e metodológico, em vez de categórico e de fundamento. Com este carácter provou já a sua eficiência e unificou muitos domínios aparentemente diferentes e a matemática moderna tornou-se muito mais acessível do que a clássica. Além disso, permitiu realizar grandes desenvolvimentos em cada direcção da matemática e das suas aplicações. A razão pela qual este método é tão poderoso reside, creio eu, em que ele penetra na própria essência do pensamento matemático; nomeadamente, ele trouxe-nos a auto-consciência da abstracção, actividade primordial da matemática que existiu, ainda que inconscientemente, desde o princípio, na própria operação de contagem $1, 2, 3, \cdots$.

Posto que seja desejável introduzir o método axiomático moderno (não categórico) tão depressa quanto possível, considero que no ensino deveria ter prioridade o método dedutivo clássico (categórico), porque doutro modo o estudante pode não saber onde aplicar os métodos modernos aprendidos. Na minha opinião, a geometria dedutiva é preferível ao iniciar o ensino do método axiomático, porque mostra claramente quais os factos fundamentais da intuição que devem ser formulados como base das deduções lógicas. Em todos os graus de ensino do método dedutivo ou do método axiomático deveríamos insistir na interacção da intuição geométrica com a dedução lógica, nunca deixando o aluno pensar erradamente que intuição e dedução são independentes uma da outra.

Seguidamente, deveríamos introduzir os sistemas dedutivos não categóricos, permitindo ao aluno tomar consciência do processo e compreender como se abstrai da aparência exterior do objecto. Naturalmente, isto deveria ser ilustrado, a princípio, com diversos exemplos simples.

No que concerne à iniciação ao ensino da análise matemática, acho preferível introduzir os conceitos, numa primeira etapa, com recurso à intuição geométrica, só entrando numa formulação mais rigorosa quando encontrarmos um problema que não podemos analisar sem uma tal formulação. É importante, mesmo para aqueles que aplicam a matemática, apresentar alguns contra-exemplos, porque isso contribuirá para torná-los cuidadosos neste e naquele ponto, mas aprofundá-los demais poderia ser nocivo. De toda a maneira, o raciocínio geométrico deveria ser encorajado no curso de análise, penso eu.

Como acima se disse, é muito desejável que a significação do método dedutivo (ou método axiomático) seja esclarecida relativamente à aplicação às ciências. E pelo estudo do sistema dedutivo deve-se compreender de que modo propriedades diversas estão lógica e estreitamente relacionadas entre si, formando uma arquitectura. O ensino não deve nunca conduzir ao erro de que a dedução matemática é uma cadeia linear de proposições.

Cada novo conceito deveria ser introduzido de maneira que o aluno pudesse apreendê-lo naturalmente. Deveríamos fazer por explicar tão claramente quanto possível a essência do conceito, para além da sua definição formal. Deveríamos esclarecer também o motivo pelo qual o conceito é definido de uma certa maneira, mostrando a eficiência desta por meio de vários exemplos.

Deste modo, o ensino da matemática deve ter em vista permitir aos alunos compreender correctamente a matemática e a essência do pensamento matemático.

Na realidade, contudo, ela não tem sido ensinada desta maneira. Parece que o ensino matemático no passado consistiu principalmente na manipulação de técnicas de cálculo. Certamente, as técnicas são muito importantes na matemática, porque sem elas nada poderíamos fazer. Entendeu-se durante muito tempo que a matemática aplicada é o estudo das aplicações da matemática prèviamente elaborada ou o estudo de artifícios de cálculo necessários às aplicações práticas. Os antigos professores de engenharia costumavam interrogar os alunos, a respeito dos conhecimentos matemáticos adquiridos, tendo em vista ùnicamente a perícia em técnicas (mecânicas) de cálculo.

Mas hoje existem computadores muito rápidos. Podemos deixar os cálculos ao computador. A matemática aplicada tornou-se agora uma ciência na qual se estuda a maneira de aplicar o raciocínio matemático. Os jovens engenheiros de hoje não pensam como os antigos. Mesmo assim, um jóvem engenheiro, com excelente preparação matemática, foi de opinião que os engenheiros poderiam estudar matemática sòmente no âmbito da sua especialidade e que as chamadas matemáticas puras não têm utilização. E acrescentou: «eu não encontro interesse na matemática desde que os matemáticos façam dela brinquedo». Ora a matemática é algo que se faz e não algo que se sabe. É muito bem que os engenheiros estudem matemática no âmbito do seu próprio trabalho. Devemos de preferência ensinar os engenheiros de modo que se tornem aptos a trabalhar com matemática dessa maneira. Mas isto não significa que é suficiente para um estudante de engenharia estudar matemática resolvendo sòmente problemas práticos eventuais. Ao pretender que ele seja um matemático, não quero aqui tomar a palavra «matemático» no sentido de profissional, mas refiro-me a um cidadão capaz de pensar matemàticamente. Nomeadamente, deveria permitir-se ao aluno compreender o pensamento matemático e aprender a formular matemàticamente objectos ainda não formalmente definidos. A matemática não é qualquer coisa para se contemplar. Mas para se utilizar correctamente a matemática é necessário ter em vista o que se está a estudar e o que já foi estudado.

Seria muito importante permitir ao aluno compreender o sentido da matemática moderna antes de entrar nos seus estudos especializados, posto que o motivo pelo qual o método matemático se tornou recentemente tão poderoso reside em que, como já se explicou, o moderno pensamento matemático atinge a própria essência da matemática. Hoje os engenheiros consideram a teoria dos grupos como um dos ramos mais úteis da matemática. Mas existiam há trinta anos engenheiros que discordavam, dizendo: «Teoria dos grupos! Tal como a teologia, essa matemática é completamente inútil para os engenheiros».

Certamente, há muitos pontos que devem ser especialmente tomados em consideração no ensino da matemática àqueles que a utilizam. Em muitos casos, a significação de um teorema sòmente pode ser aclarada depois de bem compreendida a demonstração. Contudo, há também teoremas dos quais se pode omitir a demonstração sem prejuízo para as aplicações (por exemplo, o teorema de TITSCHMARSH, no cálculo operacional de MIKUSINSKI). Nestes casos seria preferível omitir a prova e em alguns poderá ser suficiente esquematizá-la.

Se os exemplos que ilustram os textos e os exercícios práticos forem tomados de aplicações *reais* interessantes, em vez de formais, poderiam ser atraídos e estimulados para outras ciências muitos estudantes.

Deste modo e em minha opinião, o objectivo do nosso ensino, tanto para os matemáticos como para aqueles que aplicam a matemática, deve ser o Renascimento da Ciência Matemática.

Nas regiões subdesenvolvidas é normal pretender-se veementemente perseguir e alcançar tão depressa quanto possível o progresso industrial dos países mais avançados. Nesta situação pode correr-se o perigo de se acelerar sòmente a aprendizagem das técnicas sem se estudar o fundamental. Nós, japoneses, tivemos essa experiência nos últimos oitenta anos. Parece que fomos bem sucedidos em perseguir e de algum modo alcançar os países avançados. Mas estamos ainda, certamente, atrasados em relação a estes, o que se pode inferir do facto seguinte: no Japão, a relação entre o número de estudantes de ciências e de engenharia é presentemente 3/17, enquanto que na Inglaterra é 4/3.

Contudo, nós no Japão atribuímos grande importância ao ensino da matemática desde o início da era Meiji, particularmente com a modernização do Japão, estando a matemática presentemente tão desenvolvida como nos países mais evoluídos.

Esperamos que os países africanos considerem também importante, entre todos, o ensino da matemática, posto que a nossa era é por excelência a da ciência matemática.

Para terminar eu desejava insistir em mais um ponto. Qualquer pessoa deve especializar-se, mas como ser humano que ainda é, não deve tornar-se um mero especialista. Hoje em dia a ciência está especializada em diversos ramos e tornar-se-á, rápida e intensamente, cada vez mais automatizada. Existe o perigo de os seres humanos se tornarem peças de especialidades. Contra tal tendência científica e social, a matemática tem a faculdade de unificar os diversos ramos num todo. Penso que não se deveria esquecer nunca este carácter unificador da matemática em todo o ensino matemático. Penso que este problema é especialmente sério e importante nas regiões subdesenvolvidas.

II. Ensino nas escolas primária e secundária.

No ensino matemático devia ser lembrado desde o princípio que a matemática não é uma simples técnica do cálculo. Por meio do cálculo digital, em vez de demasiados exercícios de manipulação, a compreensão do algoritmo de cálculo deveria surgir apropriadamente.

Em relação com medições físicas seria possível introduzir o conceito de recta numérica em idade verdadeiramente precoce. Também poderiam ser introduzidos os números negativos e a noção de coordenadas, ainda na escola primária.

É desejável ter sempre em conta a aproximação numérica tanto na apreciação dos resultados dos cálculos como das medidas físicas. Mas esta questão não deve ser tratada com demasiado formalismo, que poderá ser nocivo.

Algumas observações estatísticas e o seu registo adequado deveriam ser efectuadas.

O conceito de conjunto (de conjunto finito naturalmente) deveria ser introduzido muito cedo. Por meio do conceito de conjunto podem ser aclarados alguns elementos de lógica, utilizando exemplos concretos apropriados. Mas seria aconselhável que no ensino elementar os elementos de lógica não fossem dados demasiado formalmente.

Na escola primária é importante aumentar, natural e gradualmente, a actividade matemática dos alunos.

Na escola secundária (7.º ao 12.º grau) é necessário aumentar, também gradualmente, o ritmo de progresso da actividade matemática.

O princípio (7.º e 8.º graus) seria consagrado a um curso introdutório de álgebra e a um curso de geometria semi-formal.

No curso introdutório de álgebra é muito importante exercitar os alunos a compreender e a usar a linguagem algébrica e a exprimir algèbricamente as questões. Esta etapa pode considerar-se como pertencente à linguística. A etapa seguinte consiste em resolver problemas muito simples de equações do 1.º e do 2.º grau, com raízes reais. Aqui é aconselhável considerar simultâneamente os gráficos das funções.

O curso de geometria deste período poderia ser parcialmente físico e parcialmente dedutivo (localmente dedutivo). É aconselhável introduzir a noção de vector (geométrico) e aplicá-la a alguns problemas de geometria plana e de mecânica elementar.

Nos graus 9.º a 12.º, elevando o nível, far-se-ia a introdução ao método dedutivo.

Em minha opinião, a geometria dedutiva é ainda a melhor matéria para este fim, porque é o primeiro modelo fundamental de matemática aplicada. É essencialmente importante permitir que o aluno compreenda como o espaço físico é configurado matemàticamente. Também é importante facultar ao estudante a compreensão do que é uma estrutura matemática. A este respeito devemos recordar que estas noções devem ser ministradas deixando o aluno compreendê-las por ele próprio, por meio de experiências pessoais. Mas como as aquisições deste género são muito difíceis para os alunos, é conveniente rever todo o curso depois de exposto, voltando atrás à primeira página do primeiro capítulo.

No curso de álgebra, assente na intuição da recta numérica, os postulados de domínio de integridade, de corpo e de ordem dos números reais seriam aclarados explìcitamente. E então seria introduzido o conceito de número complexo. Polinómios e funções racionais seriam tratados no mesmo espírito.

Seguidamente deve introduzir-se o conceito de espaço vectorial a 2 e a 3 dimensões e a sua estrutura algébrica com produto interno, aplicando depois às funções trigonométricas e aos números complexos. Assim se pode evidenciar este carácter da álgebra moderna: uma estrutura algébrica é um padrão comum de vários objectos aparentemente diferentes.

No último grau deveriam introduzir-se elementos de análise matemática. Seria aconselhável, em minha opinião, insistir na intuição dos números reais, quando muito apresentando o axioma de ARQUIMEDES e o axioma da continuidade sob a forma: uma sucessão monótona limitada de pontos tem um limite. Também é aconselhável conduzir o curso mais geomètricamente do que lògicamente. Mas é muito importante insistir nas discussões acerca de propriedades qualitativas, sem cair em meros cálculos técnicos. É absolutamente desejável introduzir equações diferenciais simples pelas quais se tem um exemplo de como a natureza pode ser expressa matemàticamente (Apêndice III).

Elementos de probabilidades e estatística seriam dados e com muito mais espírito matemático que presentemente. Este curso pode ser apontado como um dos melhores modelos de matemáticas aplicadas, que permite nomeadamente mostrar, se for exposto de modo insinuante, como é possível matematizar materiais toscos.

III. Curso preparatório universitário («College level»).

Os assuntos principais a este nível seriam ainda análise matemática (cálculo integral e diferencial, equações diferenciais), geometria analítica e álgebra linear. Naturalmente, todos estes assuntos seriam um tanto modernizados.

I. Análise matemática.

É de esperar que elementos de análise (de uma variável) tenham sido adquiridos, ainda que numa base intuitiva, na «high school» (11.° e 12.° graus do ensino secundário). Entrar-se-ia agora numa formulação mais exacta mas, de um modo geral, ter-se-ia sempre presente que o pensamento geométrico nunca deveria ser enfraquecido, antes reforçado por esta formulação exacta, no processamento de raciocínios rigorosos. É neste sentido, penso eu, que uma noção topológica como a de vizinhança deveria antepor-se à representação formal (ε, δ), porque a primeira é mais qualitativa e natural. Assim, é recomendável começar este curso pelo cálculo diferencial de funções de duas variáveis, definindo com rigor os conceitos fundamentais, do ponto de vista do espaço métrico. Só então, regressando ao caso de uma variável, estudar-se-ia o desenvolvimento da função em série de potências (aqui pôr-se-ia em destaque o carácter de «analiticidade», penso eu).

No curso de cálculo integral poderia ser nocivo tratar com precisão exagerada os exemplos patológicos. É desejável aplicar a diferenciação exterior (em relação com a álgebra exterior no curso de álgebra) aos integrais múltiplos.

Pensamento geométrico e consideração das propriedades qualitativas deviam ser encorajados através de todo o curso, especialmente na parte que trata as equações diferenciais. Um exercício aturado na resolução de equações não seria tão importante. Seria desejável também um mais estreito contacto com a mecânica analítica.

II. Geometria e Álgebra.

Para começar conviria retomar «polinómios e equações», domínios de integridade dos inteiros e dos polinómios e equação de Diofanto. Depois os corpos dos números racionais e das funções racionais, como corpos quocientes dos domínios de integridade respectivos. Relativamente às equações de Gauss citar-se-ia sem demonstração o teorema fundamental. Seria demonstrado o teorema fundamental sobre funções simétricas. Aqui recomenda-se introduzir a composição de permutações e depois o grupo simétrico.

Retomando o espaço vectorial ensinado na escola secundária, tratar primeiramente a dependência linear, equações de planos, ortogonalidade, etc., e tratar depois as transformações lineares no espaço a três dimensões. Aqui deveriam introduzir-se matrizes e representação de transformações lineares sob forma matricial.

Seguidamente introduzir-se-ia a álgebra exterior de dimensão dois e três relacionando com as noções de área e volume, generalizando depois ao caso da dimensão n. Definir-se-ia determinante utilizando a álgebra exterior.

Após esta parte introdutória seria abordada a construção do espaço vectorial de dimensão n e do espaço euclidiano. Seria também estudada a redução das formas quadráticas (matriz simétrica).

Para cultivar o pensamento geométrico deveriam introduzir-se elementos de geometria diferencial, nomeadamente o referencial móvel e rotações infinitesimais do ponto de vista dos grupos e álgebras de LIE.

Além destes cursos principais deveriam ministrar-se os cursos de opção seguintes.

III. Teoria das probabilidades e estatística.

(Ver apêndice).

IV. Análise numérica.

(Ver Student's European Record Booklet, pág. 24).

V. Espaços funcionais.

(Ver Student's European Record Booklet, pág. 30).

VI. Noções básicas.

Grupo, anel, corpo, teoria da representação, topologia geral.
(Ver Student's European Record Booklet, pág. 26).

IV. Curso universitário.

Cada secção, de física, de química, etc., pode ter, se for necessário, cursos especiais de matemática aplicada, ministrados por professores de cada especialidade, tendo em vista as aplicações práticas. Mas além destes cursos especiais é indispensável um curso de matemáticas gerais, que seria dado por professores de matemática.

Este curso geral compreenderia pelo menos a análise funcional superior (espaços funcionais, equações diferenciais, cálculo de variações, distribuições), teoria das probabilidades a nível também superior e análise numérica. O programa das lições normalmente deveria ser decidido por cada professor, pelo que não é necessário resumi-lo aqui.

V. Ensino para técnicos.

(i) *Técnicos sem curso preparatório.*

Além do curso geral secundário, omitindo algumas partes dos últimos graus, se fosse necessário, estudariam elementos de álgebra linear (incluindo matrizes e determinantes), e elementos de análise numérica (incluindo exercícios práticos de computadores).

(ii) *Técnicos de formação universitária.*

(*a*) Técnicos de engenharia:
Tal como foi descrito em III e IV.

(*b*) Técnicos de ciências sociais.

Cada curso de análise, geometria e álgebra referido em III poderá ser dado com caracter intuitivo. Como alternativa poderia dar-se a preferência a um curso de probabilidades e estatística (apêndice I).

É também desejável que haja um curso sobre computadores, incluindo exercícios práticos.

VI. Preparação de professores.

Os professores das escolas secundárias (dos graus 9.° a 12.° especialmente) deveriam ser de formação universitária.

O aluno destinado a professor daqueles graus de ensino secundário estudaria na universidade os seguintes cursos, além do de matemáticas gerais:

1. Conceitos fundamentais da matemática
2. História do pensamento matemático
3. Psicologia da aprendizagem e da invenção.

1. *Conceitos fundamentais da matemática.* (apêndice 2)

É indispensável que compreendam claramente a distinção entre axiomáticas categóricas e não categóricas.

Para isso é muito apropriado construir os números naturais pelos axiomas de PEANO e obter, por extensão, os números inteiros, os números racionais e os números reais. Assim se expõe um modelo de axiomática categórica e se evidencia a firme fundamentação dos números reais.

Demais, no processo de extensão dos números naturais aos inteiros e dos inteiros aos racionais procede-se à construção não-categórica de um grupo a partir de um semi-grupo.

No processo de construção dos números reais por meio de cortes nos números racionais podemos introduzir noções fundamentais de topologia.

Após esta construção de um sistema categórico de números tratar-se-iam os polinómios comutativos (ou livres), destacando o carácter não-categórico dos axiomas do domínio de integridade. Utilizando homomorfismos de aneis introduzir-se-iam aneis e corpos-quocientes. Assim se obtem um corpo de característica p por um lado e a extensão algébrica de um corpo, por outro.

Como corolário temos o corpo dos números complexos, com respeito aos quais é aconselhável examinar a impossibilidade de o tornar um corpo ordenado.

Seguidamente seria interessante aplicar a existência de um corpo com p^f elementos à prova da existência de um polinómio irredutível no corpo dos números racionais, para cada grau f dado. Este seria um bom exemplo de aplicação da teoria local (pensamento abstracto) à teoria global (problema clássico). E então, indagando se existe um polinómio irredutível de grau >1 no corpo dos números complexos, obtem-se o teorema fundamental de GAUSS sobre as equações.

A distinção entre axiomáticas categóricas e não-categóricas seria bem ilustrada também expondo os axiomas da geometria projectiva e da geometria euclidiana. Seria muito instrutivo confrontar as geometrias euclidiana e não-euclidianas.

2. *História do pensamento matemático.*

Para uma sã e perfeita educação matemática é extremamente desejável que os professores tenham um bom conhecimento de como o pensamento matemático se desenvolveu através da história.

É muito importante saber como a matemática se desenvolveu em relação com as outras ciências e como foi aplicada. É também importante apreciar o progresso da matemática em diferentes épocas, estudar as características da matemática surgida em cada época e as razões pelas quais essa matemática surgiu. De toda a maneira é absolutamente desejável que os professores obtenham uma boa perspectiva, ainda que resumida, da história da matemática. Isto não significa, de modo algum, que devam estudar em que ano foi descoberto tal ou tal teorema.

3. *Psicologia da aprendizagem e da invenção.*

É muito difícil encontrar um psicologista que tenha um conhecimento suficiente da matemática moderna. Mas quem não apreendeu o sentido da matemática moderna não pode encontrar solução para o problema psicológico actual da pedagogia da matemática e muito menos da invenção. Entretanto, o aspecto psicológico é naturalmente muito, muito importante no ensino da matemática.

Por conseguinte os professores de matemática devem estudar tais problemas por eles próprios, nas suas práticas de ensino futuras. Para isso é necessário facultar-lhes elementos de psicologia no âmbito aqui considerado, durante o seu curso. Mas deve notar-se bem que qualquer sucesso no estudo de tais problemas não pode ser obtido senão pela prática corrente de cada professor, guiado pelo sentido agudo da matemática moderna.

APÊNDICE I

Teoria das probabilidades e estatística (Curso preparatório universitário).

(Proposto pelo Prof. S. Furuya em Setembro de 1954).

I. Curso de um ano.

1. *Estatística descritiva*

   Dados estatísticos, curvas de frequência, ordem, mediana, média, dispersão, momentos, correlação, regressão.

2. *Probabilidade*

   Combinações e permutações, probabilidade, probabilidade condicional, teorema de Bayes, população, números aleatórios, amostragem aleatória.

3. *Funções de distribuição*

   Caso discreto, caso contínuo, variáveis aleatórias, distribuições multivariadas, momentos, distribuições binomial e de Poisson, distribuição normal.

4. *Distribuições de amostragem*

   Estatística, distribuição da média (da amostra), lei dos grandes números, teorema limite central, distribuições t e F.

5. *Inferência estatística*

   Testes de hipótese estatística, estimativas pontuais e por intervalos, máxima verosimilhança, testes χ^2, uso das distribuições t e F.

6. *Aplicações da inferência estatística*

   Controle de qualidade, inspecção por amostragem, planeamento de experiências.

Enquanto que os aspectos respeitantes aos conceitos e às aplicações são tratados cuidadosamente, os teoremas mais difíceis são apresentados sem demonstração.

II. Curso de dois anos.

Primeiro ano (30 semanas, 2 horas por semana).

1. *Introdução*

   Combinações e permutações, fórmula do binómio, fórmula de Stirling.

2. *Espaço das amostras*

   Exemplos, acontecimentos, probabilidade, definições e regras.

3. *Problemas combinatórios*

   Subpopulações e partições, problemas de ocupação, sequências, passeios ao acaso, lançamentos de moeda, lei do arc sen.

4. *Intersecção de acontecimentos, probabilidade condicional*

União de acontecimentos, aplicações, probabilidade condicional, independência, modelos de urnas, regra de BAYES, tiragens repetidas, amostragem com e sem reposição.

5. *Distribuições*

Distribuições binómia e de POISSON, distribuição multinómia, distribuição normal, teorema limite central.

6. *Variáveis aleatórias*

Média, variância, covariância, exemplos e aplicações, desigualdade de TCHEBYCHEV, lei dos grandes números.

7. *Variáveis (aleatórias) inteiras, funções geradoras*

Convoluções, desenvolvimento em fracções simples, distribuições compostas.

8. *Acontecimentos recorrentes*

Definições, exemplos, equações de renovação.

9. *Cadeias de Markov*

Definições, exemplos, classificação de estados.

10. *Elementos de teoria da informação*

Entropia, teorema de codificação.

Segundo ano (30 semanas, 2 horas por semana).

1. *Distribuições contínuas*

2. *Distribuições de amostragem*

Estatística, distribuição da média da amostra, distribuições t, x^2 e F, aplicações.

3. *Inferência estatística*

Testes de significância para parâmetros, testes χ^2, testes de bondade de ajustamento, estimativas, eficiência, método da máxima verosimilhança, intervalos de confiança.

4. *Aplicações*

Análise de variância, controle estatístico de qualidade, inspecção por amostragem, método de Monte-Carlo.

5. *Jogos (de duas pessoas)*

Definições, estratégias pura e mista, valor de um jogo, estratégias óptimas, teorema minimax, solução extrema.

6. *Programação linear*

Exemplos, método do simplex, caso degenerado, teorema de dualidade, relação entre jogos e programação linear, problemas de transporte, fluxos em circuitos.

APÊNDICE II

Conceitos fundamentais (Curso preparatório universitário e curso de preparação de professores).

(Sistemas de números, por S. LYANAGA e Y. AKISUKI, Setembro de 1964).

1. *Conjuntos e aplicações*

Conjuntos, subconjuntos, reunião e intersecção, produto cartesiano de dois conjuntos, aplicações, injecções, sobrejecções e bijecções.

2. *Números naturais*

Axiomas de PEANO, noções de grupo (comutativo) ordenado, semi-grupo e semi-anel, N como semi-anel comutativo.

3. *Inteiros*

Extensão de um semi-grupo (semi-anel) comutativo, com lei do corte, a um grupo (anel) comutativo.
Noções de grupo, anel e domínio de integridade (ordenados, comutativos).
Z como domínio de integridade ordenado e comutativo.

4. *Números racionais*

Extensão de um domínio de integridade comutativo a um corpo comutativo.
Noção de corpo (ordenado, comutativo).
Q como corpo ordenado (comutativo).

5. *Teoria elementar dos números*

Noção de ideal em aneis comutativos.
Teorema fundamental da teoria elementar dos números.
Z_p como corpo finito.

6. *Extensões de corpos*

Anel dos polinómios numa variável sobre um corpo.
Analogia com Z.
Polinómios irredutiveis.
Corpo de decomposição de um polinómio.
Existência de polinómio irredutível de grau dado sobre Z_p e Q.

7. *Números reais*

Topologia de Q (Noções topológicas: conjuntos abertos e fechados, pontos interiores e exteriores a um conjunto, fronteira, aplicações contínuas, conexão, compacidade e compacidade local).
Não-conexão e não-compacidade local de Q.
Completação de Q em R.
Densidade de Q em R.
Conexão e compacidade local de R.

8. *Números complexos*

Teorema fundamental da álgebra.

9. Polinómios livres, existência de álgebras de GRASSMANN, álgebras de GRASSMANN.

10. Z^n e grupos geradores abelianos finitos.

11. R^n como espaço métrico completo.
Noção de espaço métrico (completo).

APÊNDICE III

Conceito de função no ensino secundário (11.° e 12.° graus).
Função exponencial.

Na «high school» (11.° e 12.° graus) o conceito de função seria introduzido como uma aplicação $f: x \to f(x)$. No princípio deve ser dito que esta aplicação pode ser definida analiticamente por uma expressão analítica em x, geomètricamente por uma curva (gráfico), ou por uma certa regra (relação funcional).

As funções trigonométricas (seno e coseno) seriam definidas como aplicações de pontos da circunferência unidade na recta real.

É recomendável, em minha opinião, introduzir a função exponencial como uma aplicação contínua que faz corresponder a multiplicação à adição. Porque segundo esta definição pode-se compreender a razão pela qual a função exponencial deve ser considerada a mais importante função elementar. Além disso, se admitirmos a existência da função, podemos estabelecer fácil e naturalmente a lei dos expoentes. Põe-se também muito naturalmente o problema de saber se uma tal função existe, nomeadamente o problema da existência no sentido moderno. E pode-se demonstrar a existência compreensivamente com base no axioma da continuidade sob a forma: uma sucessão monótona limitada tem um limite.

Ainda com respeito à função exponencial, é desejável que se estude a sua convexidade, podendo assim o estudo incidir nas propriedades qualitativas. Posteriormente aplicar-se-ão estes resultados à diferenciação da função exponencial.

GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 100 — Julho-Dezembro 1965

Actualizações no ensino da Astronomia [1]

Prof. M. Minnaert
Utrecht

I. Observações preliminares.

A Astronomia anterior a 1890 reduzia-se pràticamente à parte da *Mecânica Celeste* que estuda os planetas a as estrelas duplas. Mais tarde, a fotografia astronómica permitiu o desenvolvimento da *Astronomia Estatística* e a física da radiação, o modelo de BOHR, as físicas atómica e nuclear permitiram um enorme desenvolvimento da *Astrofísica*. Gradualmente a actividade dos astrónomos foi-se concentrando no estudo da *Estrutura do Universo* e, finalmente, nos últimos anos tem sido dedicada cada vez maior atenção aos problemas da *Evolução do Universo* afim de explicar a actual estrutura do Universo pelo seu desenvolvimento histórico.

Hoje a Astronomia é uma ciência em rápida evolução. O presente período é também caracterizado pela utilização de resultados de hidrodinâmica, magnetohidrodinâmica, física dos plasmas e ainda das modernas técnicas da rádioastronomia e da investigação espacial, tendo a utilização de tais resultados e técnicas influenciado especialmente a astrofísica. É, pois, claro que a importância que têm hoje para a Astronomia diversos assuntos é muito diferente da que tinham há um século. Assim, a Astronomia actual não se baseia principalmente na mecânica mas faz largo uso das outras partes da Física. A mecânica celeste, por exemplo, só recentemente tornou a ocupar lugar de certo relevo entre os outros ramos da Astronomia devido às suas aplicações ao cálculo de órbitas para experiências espaciais. Além de tudo isto, o uso de computadores electrónicos modificou profundamente os métodos de tratamento matemático dos problemas da Astronomia.

No que se segue indicaremos incidências que o rápido desenvolvimento da Astronomia deve ter no ensino desta ciência nas escolas secundárias e nas universidades.

II. A Astronomia nas escolas secundárias.

Em muitos países a Astronomia não é ensinada nas escolas secundárias, e, em muitos outros, o seu ensino reduz-se a algumas noções elementares sobre a Terra, a Lua e o Sistema Solar. Comparado com o estado actual da Astronomia, o ensino desta está atrasado de quase um século!

Notemos que não é estranho a este atraso o facto de a maior parte das autoridades

---

[1] Tradução do artigo do Prof. MINNAERT intitulado «On Modernizations in the teaching of Astronomy — specially in relation to other exact sciences» escrito para a C. I. E. S. (Commission Interunions de l'Enseignement des Sciences) — Congresso de Dakar (Doc. E — 1 — revisto em Junho de 1964).

educacionais não ter estudado ciências exactas ou, se estudaram, recordarem a Astronomia como uma parte secundária do seu curriculum constituída mormente por tópicos com pouca afinidade com os problemas que nos preocupam hoje em dia.

Na realidade, a Astronomia interessa hoje o grande público, os jornais, a rádio, a televisão, o cinema e, o que é mais importante, deve ter a maior influência na formação intelectual do homem contemporâneo. A Astronomia mostra-nos quão erróneas podem ser as conclusões sobre o mundo exterior baseadas em observações superficiais e como, pelo contrário, podem processos justos de raciocínio conduzir a pontos de vista correctos. A Astronomia revela-nos a inimaginável extensão do Universo no espaço e no tempo e oferece-nos dele um modelo que é um referencial para todas as nossas descobertas acerca da Natureza. A Astronomia mostra-nos como pode o estudo da evolução do Universo, onde nós não disfrutamos de uma posição particularmente importante, explicar a constituição actual do mesmo. Por outro lado, o estudo da Astronomia enche de orgulho a razão humana por ela ter sido capaz de investigar o espaço infinito, dá-nos confiança no futuro progresso da Ciência e, finalmente, mostra-nos a objectividade das leis naturais aplicáveis não só no laboratório mas também ao estudo das mais longínquas regiões do Universo.

As concepções mais importantes da Astronomia contemporânea podem ser ensinadas num pequeno número de horas a alunos de classes muito elementares o que não sucede, provàvelmente, com nenhuma outra ciência.

A escola pode, de resto, tirar vantagens do interesse dos alunos pela Astronomia que é espontâneo e geral, tendo enorme valor educativo o facto de estes virem a ser capazes de formular perguntas para as quais a nossa ciência ainda não possui resposta.

Os alunos deverão aprender o suficiente para poderem compreender artigos de divulgação de jornais e revistas de cultura geral, parecendo razoável não especializar demais o ensino. Assim, nas escolas primárias e nos primeiros anos das secundárias o ensino deve limitar-se a conceitos elementares baseados em observações simples, podendo um curso sistemático ser feito mais tarde numa fase em que os alunos tenham maior maturidade intelectual e mais conhecimentos de Matemática e Física.

Os programas devem ser profundamente modificados afim de reflectirem os progressos da Ciência e a Astronomia deve ser ensinada por um professor especializado em Astronomia ou em Física e não por um matemático. Durante muito tempo os alunos que começam o estudo da Astronomia têm sido decepcionados pela predominância de assuntos de matemática e mecânica antiquados tais como os sistemas de coordenadas e os tédios problemas sobre a esfera celeste. Estes assuntos são designados habitualmente pelos nomes escolásticos de «Cosmografia» ou «Geografia Matemática». Sugerimos a abolição de tais designações e que sejam versados sob a designação de «Astronomia» os assuntos constantes das duas secções que seguem, atribuindo a cada uma delas o mesmo número de horas total.

a) A estrutura do Sistema Solar: forma, dimensões e movimentos da Terra, a revolução de Copérnico, concepções modernas acerca da superfície da Lua, cometas, meteoros.

Tendo a transição do sistema geocêntrico para o sistema heliocêntrico desempenhado na história da civilização um papel tão importante, uma tal revolução deve também ter lugar no espírito dos alunos.

Recomendamos que se comece por observações directas no campo interpretadas do ponto de vista geocêntrico e se mostre, depois, a necessidade de passar a interpretar os factos do ponto de vista heliocêntrico e como fazê-lo. Esta parte do curriculum não pode ser suprimida apesar de datar já de alguns séculos. Ela dará aos alunos a possibilidade de fazer observações e medidas simples com os seus próprios olhos e mãos. Devem ser feitas visitas a um planetário, se possível. De qualquer modo, podem ser construídos instrumentos muito baratos e simples, pode até ser construído um planetário óptico simplificado com recursos financeiros modestos o que é, em geral, desconhecido.

b) A estrutura do Universo: O Sol, as estrelas, a Galáxia, nebulosas e sistemas extragalácticos. Esta secção não é mais difícil que a anterior. Pelo contrário, para muitos alunos é bastante mais difícil visualizar as relações geométricas entre os círculos em astronomia esférica sendo por outro lado, extremamente excitante ensinar estes modernos assuntos pelos quais os alunos nutrem o maior interesse. Embora um astrónomo profissional necessite de conhecer perfeitamente os métodos e fórmulas da astronomia esférica, o mesmo não sucede aos alunos das escolas secundárias as quais não têm por missão prepará-los para uma carreira profissional mas sim educar o futuro cidadão para a vida.

Toda a escola secundária deve possuir um telescópio modesto com uma objectiva de 7 cm (por exemplo) devendo ter-se o maior cuidado em montá-lo de maneira estável e protegê-lo das condições atmosféricas adversas.

É natural que o interesse dos alunos seja tão grande que possam ser encorajados a formar clubes de estudo, a ler livros de divulgação sobre Astronomia e a construir o seu próprio telescópio; existem excelentes livros para estes fins.

Os assuntos que indicámos oferecem uma excelente oportunidade de mostrar como a Matemática e a Física podem ser aplicadas ao estudo da natureza; insistimos, contudo, em que o estudo da Astronomia é, aqui, a finalidade desempenhando a Matemática e a Física o papel de auxiliares.

Neste nível requerem-se os seguintes conhecimentos:

1) de Matemática: conceito de função, funções exponenciais e logarítmicas, as fórmulas mais simples da trigonometria plana, aproximação de primeira ordem, perímetro e área do círculo, área e volume da esfera, derivação e integração de funções simples;
2) de Física: mecânica elementar, teoria cinética dos gases, lentes, prismas, redes de difracção, análise espectral, teoria da difusão (Rayleigh), efeito Doppler, leis da radiação (incluindo as de Planck), efeito Zeeman, física atómica (modelo de Bohr, excitação, ionização), síntese nuclear, electrostática, força de Lorentz, ondas electromagnéticas.

Existem poucos livros sobre o ensino da Astronomia; citamos contudo os seguintes:

E. A. Beet: *Teaching Astronomy in Schools*. Cambridge, 1956;

H. Seitz: *Methode und Praxis des Unterrichts in der Himmelskunde*, Heidelberg, 1957;

J. Russel Smith: *Teaching a Unit in Astronomy*, Washington, 1960;

Astronomieunterricht. Berlin — O. Verlag Volk und Wissen VEV, 1962;

Praktische Schülerübungen f. d. Astronomieunterricht. Berlin — O. Verlag Volk und Wissen, 1962;

M. E. NABOKOV: *Metodika Prepodavaniya Astronomii,* Moskva, 1955.

Nos *países em vias de desenvolvimento* existe a tendência de restringir os programas ao ensino de ciências que conduzem directamente a «aplicações práticas».

A experiência mostra, contudo, que a inclusão da Astronomia nos programas (o que toma apenas um pequeno número de horas aos alunos) tem uma influência estimulante sobre estes sobretudo em tais países. Ela proporcionará aos alunos uma firme crença no poder do senso comum e da Ciência, mesmo quando aplicados ao estudo das imensas regiões do Universo e lhes aumentará o sentido da dignidade humana, sentido que lhes é necessário afim de que os seus países tomem o seu lugar entre as outras nações.

III. Ensino Propedeutico da Astronomia na Universidade (para pré-graduados).

A organização dos estudos Universitários difere muito de país para país e para fixar a posição da Astronomia nos programas deve, pois, levar-se em conta tais diferenças. Em qualquer caso, é essencial que a Astronomia seja reconhecida como uma ciência entre as demais ciências, naturais ou exactas. Em cada universidade devem ser feitos cursos de Astronomia para pré-graduados de um dos dois tipos seguintes:

a) *cursos em que a Astronomia é considerada como uma disciplina principal.*

Sendo hoje tão vasto o escopo de cada ciência, a especialização torna-se inevitável. Todavia, atendendo a que descobertas importantes são frequentemente feitas graças à concorrência dos mais diversos ramos de diferentes ciências e a que os componentes de uma equipe de trabalho devem estar em condições de se compreenderem mùtuamente, é necessário que os estudantes possuam uma cultura geral satisfatória. Assim, devem os primeiros anos de estudo ser dedicados a adquirir conhecimentos de ordem geral e os últimos a obter uma especialização, devendo, finalmente, o estudante concentrar-se sobre um assunto restrito afim de preparar uma tese.

O estudo da Astronomia deve começar no primeiro ano, sendo erróneo limitar a primeira parte dos estudos à Matemática e à Física. O estudante que escolhe uma carreira não pode esperar um ou dois anos para começar a estudar a ciência a que pensa dedicar-se (este ponto de vista tem, de resto, cada vez maior aceitação da parte dos responsáveis pelo ensino universitário de engenharia e de medicina).

Não sendo pràticamente ensinada nas escolas secundárias, a programação do ensino da Astronomia na Universidade tem de ser diferente (mesmo que a situação melhore) daquela que costuma fazer-se para a Matemática e a Física, por exemplo. Parece-nos, pois, necessário incluir nos programas um curso sistemático de astronomia geral.

Nenhuma ciência da natureza deve ser ensinada sem que o seu ensino seja acompanhado de trabalho experimental não tanto para desenvolver o espírito de observação como, sobretudo, para apresentar aos estudantes a realidade dos conceitos introduzidos nas lições teóricas. Os estudantes de Astronomia não podem fugir a esta regra devendo os seus trabalhos práticos consistir em observações, estudo de fotografias astronómicas e prática de cálculos astronómicos.

Paralelamente aos estudos de ordem geral é útil para os pré-graduados frequentar um curso sobre um tema mais especializado (por exemplo, órbitas dos cometas, transferência radioactiva, espectroscopia estelar) afim de se lhes poder mostrar como se trata cientìficamente um problema de Astronomia.

b) *A Astronomia considerada como uma disciplina secundária.*

Atendendo a que os estudantes possuem poucos conhecimentos de Astronomia, Física e Matemática superior aquando da sua entrada na Universidade, é conveniente não especializar demais o ensino destas ciências, inicialmente, afim de lhes permitir uma mudança de carreira se as suas predilecções se modificarem.

Alguns conhecimentos de Astronomia não deixarão, aliás de ter um alto valor formativo para o futuro matemático ou físico. Para ambos será de grande interesse verificar como as ciências a que se dedicam são aplicadas a uma ciência da natureza que mais do que qualquer outra atingiu um elevado nível de precisão quantitativa.

A Astronomia foi sempre fonte de inspiração para o físico porque lhe dá a possibilidade de estudar a matéria em circunstâncias que excedem as possibilidades laboratoriais estimulando-o, além disso, as necessidades técnicas da Astronomia a encontrar novas soluções para o projecto de aparelhos.

Pode ainda suceder que muitos destes estudantes venham a estar mais tarde interessados em dedicar-se a algum capítulo especial da Astronomia. Assim, nos E. U. A. os estudantes pré-graduados têm uma larga possibilidade de escolha dos seus cursos. A Astronomia Geral elementar é aí ensinada por forma que possa ser compreendida por estudantes das mais diversas carreiras e, em muitos outros países, onde os primeiros cursos na Universidade são ministrados a um nível bastante elevado, existe um «Studium Generale» para estudantes de todas as faculdades onde tópicos de Astronomia são incluídos.

IV. A Astronomia na Universidade (para graduados) (²).

Há uma grande variedade de ramos da Astronomia que podem ser escolhidos como temas de cursos para graduados e, quando se estabelece um programa de estudos de Astronomia para estes estudantes, deve levar-se em conta não só as possibilidades e a orientação geral da investigação na escola como as preferências dos estudantes. Não é de aconselhar que se obrigue o estudante a conhecer um grande número de assuntos pois isso privá-lo-ia da possibilidade de desenvolver a sua iniciativa pessoal e de começar a fazer investigação científica. Muito mais importante do que o saber enciclopédico é o interesse pela Ciência e a capacidade de uma familiarização rápida com um assunto novo no qual se tenha de trabalhar inesperadamente. Se notáveis astrónomos fossem sub-

(²) Cf. também o relato do Dr. CHAMBERLAIN sobre a U. S. Conference em Indiana (Astron. Journal 68, 215, 1963).

metidos a exames sobre os diversos ramos da Astronomia, da Física ou da Matemática, os examinadores ficariam desagradàvelmente surpreendidos!

Os colóquios, feitos com regularidade, são um excelente meio de apresentar assuntos que não figuram nos cursos normais:

Apresentamos em seguida uma lista de cursos possíveis para graduados que foram, em parte, sugeridos por uma nota do Prof. Bok ao Sydney Symposium de 1963. Os capítulos modernos de radioastronomia e investigação espacial são tratados em pé de igualdade com assuntos mais tradicionais.

Geofísica
Física dos planetas e satélites
Cometas
O espaço interplanetário
Investigação espacial
Mecânica celeste
O Sol
A coroa Solar
Atmosfera do Sol e das estrelas
Interior e evolução das estrelas
Espectroscopia estelar
Estrelas variáveis
Nebulosas gasosas
Espaço interestelar
Estrutura das Galáxias
Dinâmica das Galáxias
Estrelas duplas
Explosões de estrelas
Sistemas estragalácticos
Rádioastronomia
Raios Cósmicos
Cosmologia
Aparelhagem: projecto de aparelhos ópticos, electrónicos ou mecânicos, ajustamento de telescópios e acessórios.
Astronomia Prática: técnicas fotométricas (fotográficas, fotoeléctricas), movimentos próprios, paralaxes, velocidades radiais (medida e redução), óptica e electrónica avançadas, aparelhos e observação radioastronómica.

A U. S. Conference expressou o desejo de que os estudantes se familiarizem com pelo menos duas técnicas de observação e tenham um conhecimento geral sobre as outras. Além disto, foi acentuado que é muito útil aos estudantes graduados, especialmente aos melhores, ensinar, mesmo que seja apenas durante um curto período de tempo.

É um bom método permitir que os estudantes graduados trabalhem sucessivamente com pessoal especializado em diferentes campos, por exemplo, um mês em cada assunto; deste modo ficarão fazendo uma ideia do tipo de investigação que se faz nos diversos ramos da Astronomia. Deve então ser escolhido um tema restrito cujo estudo servirá como exercício de exploração da literatura a ele dedicada permitindo, ao mesmo tempo, ao estudante fazer investigação original. Se isto for bem sucedido, obter-se-á assim um bom ponto de partida para uma tese.

No que respeita à inclusão nos programas de assuntos de Matemática ou de Física, deve ter-se em conta o facto de que, durante os últimos cem anos, a importância para a Astronomia de vários ramos da Física cresceu imenso o mesmo não sucedendo aos diversos ramos de Matemática com excepção daqueles dos quais a *Física Matemática (indispensável para um astrónomo) necessita* e dos que dizem respeito aos computadores electrónicos. Deve ainda ter-se em consideração o facto de que, embora o escopo da Ciência aumente ràpidamente, a duração dos estudos permanece constante requerendo, pois, a inclusão de certos tópicos a exclusão de outros a menos que um método de ensino mais sintético seja descoberto. Nestas condições, evite-se que a importância atribuida nos programas à Matemática e à Física venha a prejudicar o ensino da Astronomia pròpriamente dita (corre-se neste sentido um risco muito sério em alguns países europeus). Deve ainda observar-se que, entre as descobertas importantes mais recentes em Astronomia, raras são as que exigiram conhecimentos de Matemática de nível muito elevado. Foi feito um teste neste sentido com base em 83 trabalhos publicados no Astrophysical Journal de 1962; 60% dos trabalhos não exigiram conhecimentos de Matemática de nível superior ao cálculo infinitesimal e das probabilidades usual, 20% requereram conhecimentos de Matemática mais avançados e 20% requereram capítulos de Física Teórica que exigem, por sua vez, conhecimentos avançados de Matemática.

Mostra a experiência que os estudantes são frequentemente incapazes de utilizar os seus conhecimentos de Matemática, por exemplo, no decorrer de um curso de Física Teórica. Parece-nos, pois, razoável que certos capítulos da Matemática sejam ensinados juntamente com capítulos de Física que deles especialmente necessitam. Em qualquer caso, parece-nos útil que, durante os cursos de Matemática, se façam frequentes aplicações a problemas de Astronomia e de Física. Deve-se procurar desenvolver nos estudantes de Astronomia a capacidade de formular matemàticamente os problemas astronómicos, devendo pedir-se a ajuda de um matemático se a resolução de algum problema se apresentar difícil.

Aconselhamos se incluam nos programas de Matemática para estudantes de Astronomia os seguintes tópicos que seleccionamos de acordo com uma importante comunicação de American Mathematical Society (Amer. Journal of Physics, **30**, 569, 1962): elementos de análise, álgebra linear, probabilidades e estatística (correlação, mínimos quadrados), funções de várias variáveis, cálculo vectorial e tensorial, equações diferenciais ordinárias (funções de Bessel e de Legendre), equações em derivadas parciais da física matemática, análise de Fourier e integral de Fourier, noções sobre equações integrais e integrodiferenciais, utilização e programação de máquinas de calcular.

A distribuição destes tópicos pelos diferentes anos do curso deve ser, em parte, determinada pela coordenação com os cursos de Física Teórica e pelos regulamentos da Universidade.

Como foi já observado a Física é hoje a ciência que mais valioso auxílio presta ao astrónomo. Assim, nos primeiros anos do seu curso ele deve estudar especialmente: mecânica, electromagnetismo, óptica, física atómica e, menos aprofundadamente, termodinâmica; depois da graduação importa que ele estude: teoria de relatividade, física das radiações, física quântica, física dos plasmas, hidro e aerodinâmica, teoria das partículas elementares. Naturalmente, deverá ser feita uma selecção destes tópicos de acordo com o campo da Astronomia onde o estudante pense vir a fazer investigação devendo, em qualquer caso, os estudos teóricos ser acompanhados de muito trabalho laboratorial.

Tal como sucede no caso da Matemática, os cursos clássicos de Física não estão bem adaptados às necessidades do Astrónomo pois certos temas são aí tratados com demasiado pormenor em detrimento de outros, importantes para aquele. Dois exemplos: a teoria da turbulência que é de grande importância para um astrónomo, raras vezes é tratada nos cursos de hidrodinâmica; poucas vezes no final de um curso de mecânica quântica os estudantes ficam em condições de poder calcular uma probabilidade de transição ou uma secção eficaz de interacção.

Enquanto preparam a tese ou depois de a terem feito, é conveniente que os estudantes façam um estágio noutro centro de actividade astronómica. Não é necessário para tal escolher um grande observatório porque a estadia num instituto de menores dimensões especializado num dado campo pode ser mais útil, encontrando aí o estudante estrangeiro uma assistência mais assídua. A International Astronomical Union oferece bolsas que incluem as despesas de viagem.

O trabalho de estudo de um astrónomo não termina após a aquisição do grau de doutor; para prosseguir a investigação e tornar útil o seu ensino ele deve estar a par dos progressos feitos no seu campo de especialização e ter um conhecimento geral dos resultados mais importantes conseguidos em outros campos. Quando certo assunto inteiramente novo se torna importante, deve-lhe ser facultada a possibilidade de seguir um curso especial sobre esse tópico. A importância deste tipo de estudo pósdoctural é reconhecida cada vez por maior número de cientistas seja qual for a sua especialidade.

É importante, sob muitos aspectos, estabelecer contactos entre estudantes graduados em Astronomia e em Física, podem ser feitos cursos especiais de Astronomia para físicos (com carácter de opção) e estabelecer relações com laboratórios de espectroscopia e de electrónica. Assim, o observatório de Greenwich, o Mt. Stromlo Observatory e os U. S. National Radio Observatory e Kitt Peak Observatory têm realizado eficientes cursos de Verão onde bons alunos de Matemática e Física têm tido a possibilidade de participar em investigações e servir como assistentes noturnos. Sucede frequentemente que alguns deles abraçam em seguida a carreira de astrónomo.

Nos *países em vias de desenvolvimento*, nem sempre é possível organizar cursos especializados em todas as Universidades por falta de aparelhagem ou de pessoal. Em tais casos, deve procurar-se concentrar o ensino da Astronomia numa ou várias Universidades ou, se mesmo isto for impossível, enviar os melhores alunos a centros estrangeiros como bolseiros. Deve-se contudo procurar que:

1. Os estudantes tenham uma preparação razoável em Matemática e, sobretudo, em Física;
2. Procurar que eles regressem ao seu país garantindo-lhes aí uma posição e condições de trabalho adequadas.

V. O ensino da Astronomia nas Escolas Técnicas.

Existem três tipos de técnicos que necessitam de possuir conhecimentos profissionais de Astronomia:

1. Pilotos de Aviões e Navios (pois a navegação astronómica é ainda útil apesar dos grandes progressos feitos pela radiolocalização).
2. Vigilantes.
   Em ambos os casos é necessário ensinar a astronomia esférica mas usando o mais possível modelos e métodos visuais.
3. Técnicos no campo da investigação espacial. Estes técnicos deverão possuir conhecimentos sobre os seguintes assuntos:
   - mecânica celeste elementar;
   - radiação solar e espectroscopia;
   - a ionosfera e o espaço interplanetário;
   - a Lua.

Mostra a experiência ser conveniente não limitar os cursos aos assuntos estritamente necessários para o exercício da profissão mas também incluir nos programas lições sobre temas mais gerais.

A Astronomia numa escola técnica superior costuma estar associada à Geodesia. Esta ciência que era inicialmente um belo exemplo de Matemática aplicada tem sido cada vez mais influenciada pela Geofísica e pela Astronomia. Podem ser incluídos no seu programa os seguintes assuntos que se estão tornando cada vez mais importantes: propagação de sinais de rádio, irregularidades da rotação da Terra, relógios de quartzo, prismas-astrolábios para medidas de tempo, determinação da forma da Terra com o auxílio de satélites artificiais, anomalias da gravidade, medição da gravidade no oceano, variação da gravidade com a latitude, etc.

VI. Perspectiva de evolução do ensino da Astronomia.

Não há dúvida de que a Astronomia, que se está desenvolvendo a um ritmo vertiginoso, obterá no futuro resultados de grande significado e interesse prático para a humanidade. O problema pedagógico mais importante que a Astronomia (ou qualquer outra ciência) tem de resolver consiste em encontrar um meio de ensinar às novas gerações os mais recentes resultados obtidos, num tempo limitado.

Esperemos, por outro lado, que uma especialização demasiado estreita não venha a excluir dos programas do ensino geral uma ciência como a Astronomia que mostra como pode o homem, com a sua inteligência maravilhosa, descobrir o Universo. A Astronomia pode, em certo sentido, ser comparada à Arte que permanecerá para sempre um tesouro da humanidade, tornando a vida digna de ser vivida.

GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 100 — Julho - Dezembro 1965

O papel da Cristalografia no ensino científico e no desenvolvimento económico

A. J. Frueh
(Montreal)

1. Evolução do ensino da Cristalografia

A Cristalografia, a ciência que estuda as propriedades químicas e físicas dos sólidos nos quais existe um arranjo regular e periódico dos átomos que os constituem, pode ser considerada uma ciência nova. Há pouco mais de 50 anos, antes da descoberta da difracção dos raios-X por MAX VON LAUE, considerava-se a Cristalografia como uma especialidade do ramo da Geologia conhecido por Mineralogia. A década que se seguiu à descoberta da difracção dos raios-X viu a determinação de muitas estruturas de cristais que forneceram uma enorme quantidade de indicações sobre distâncias interatómicas e ângulos de ligação. Estas indicações permitiram aos cientistas formular hipóteses sobre as ligações nos cristais e desenvolver teorias sobre as propriedades físicas e químicas dos sólidos cristalinos. Os cientistas ocupados neste trabalho deixaram de ser exclusivamente recrutados entre os mineralogistas passando a ser cada vez mais numerosos os provenientes dos diferentes campos da Física, da Química e, em anos recentes, da Biologia. Nos meados do século, a Cristalografia passou a constituir uma ciência que já não podia ser considerada como uma especialidade de qualquer dos ramos da ciência básica.

A evolução da educação dos cristalógrafos está ainda no início. A maior parte dos cientistas que trabalham neste campo são autodidatas na sua especialidade. Foram inicialmente educados como químicos, físicos ou mineralogistas e, só posteriormente ao seu treino básico, adquiriram os conhecimentos e as técnicas do seu campo. Embora esta diversidade tenha produzido a estimulante troca de ideias que é, em parte, responsável pelo rápido crescimento da Cristalografia, está, actualmente, a perder a sua utilidade. Diferenças na nomenclatura de alguns dos conceitos mais fundamentais têm surgido (por exemplo «rede») como consequência da diversidade de formações e estas diferenças têm conduzido a confusões e incompreensões. Por causa do tempo limitado de que se dispõe para a reeducação e da necessidade de utilizar parte desse tempo no estudo dos aspectos não cristalográficos das diferentes ciências, torna-se impossível, para o estudante que faz a aprendizagem da Cristalografia numa das ciências básicas, conseguir conhecimentos sobre os aspectos, mesmo os mais elementares, da Cristalografia em outras ciências. Por exemplo, é pouco vulgar um cristalógrafo de formação física ter conhecimentos de Morfologia ou Óptica Cristalográficas.

A evolução do ensino da Cristalografia e a aprendizagem dos cristalógrafos varia consideràvelmente de país para país através do mundo. Em França, por exemplo, a Cristalografia continua a ser da alçada da Mineralogia. Por outro lado, na Universidade de Cambridge, em Inglaterra, de há muito considerada como uma pioneira em Cristalografia, a responsabilidade é dividida. Desde 1935 que o ensino da Cristalografia no primeiro ano é feito no Departamento de Mineralogia e Petrologia, sendo da responsabilidade dos professores do grupo de Geografia e Geologia, enquanto que, nos anos posteriores, é feito no Laborório Cristalográfico, da responsabilidade dos professores do grupo de Física e Química.

Na América do Norte, até há pouco tempo, não havia ensino unificado da Cristalografia ao nível elementar. As secções de Ciências Geológicas proporcionavam cadeiras de Cristalografia Morfológica e Óptica Cristalográfica, as de Física, cadeiras de Física do Estado Sólido e, uma ou ambas destas secções, cadeiras de Difracção dos raios-X. Era, contudo, para o estudante, muito difícil encontrar o tempo necessário para frequentar cadeiras fora da sua própria secção. Um certo número de universidades norte-americanas oferecem licenciaturas em Cristalografia sendo, nelas, o ensino, em geral, ministrado por professores de mais do que uma secção.

Nos últimos anos tem-se reconhecido a necessidade de criar programas de Cristalografia compreendendo as várias ciências interessadas. A Universidade de Mc Gill, em Montreal, Canadá, por exemplo, oferece agora um programa em Cristalografia com contribuição equilibrada da Química, Física e Matemática incluindo, também, cadeiras de Mineralogia com interesse para a Cristalografia.

2. Contribuições da Cristalografia para o ensino de outras Ciências

É óbvio que na preparação dos cristalógrafos é necessário recorrer, em larga medida, a várias Ciências. É, também, evidente que uns certos conhecimentos de Cristalografia se tornaram indispensáveis à preparação de químicos, físicos, geólogos e metalurgistas. Também, julgando pelos recentes avanços feitos pelas Ciências Biológicas devidos à necessidade de elucidar as estruturas dos D. N. A. R. N. A. e de outros compostos bioquímicos, há poucas dúvidas que o biólogo virá a sentir a necessidade de possuir alguns conhecimentos de Cristalografia. Há, contudo, outras contribuições menos óbvias que a Cristalografia pode dar para o ensino de outras Ciências.

O Dr. A. L. Loeb chamou a atenção para uma importante contribuição que a Cristalografia pode dar ao ensino da Matemática. Assim, o estudante de Cálculo encontra na cadeira de Mecânica um excelente campo de treino no qual pode aplicar os conhecimentos matemáticos recentemente adquiridos. O cálculo de áreas e volumes, de figuras geométricas familiares, é outro método que o professor de Matemática usa para familiarizar o estudante com os princípios do Cálculo. Contudo, quando se chega ao ensino da Simetria e da Teoria dos Grupos, pouco esforço se faz para fornecer uma aplicação familiar destes conceitos. Ora, a Cristalografia está especialmente indicada para fornecer ao matemático um campo para aplicar e ilustrar a Teoria dos Grupos.

O Professor H. Lipson e o Dr. C. A. Taylor, têm advogado o uso de técnicas de difracção óptica como introdução à difracção dos raios-X visto que permite perceber os princípios físicos envolvidos muito mais ràpidamente que as introduções convencionais. Esta técnica é explicada numa recente comunicação do Dr. Taylor:

«Baseamos a nossa técnica na microscopia. Num microscópio óptico a imagem é conseguida em duas fases. Primeiro a luz é difractada pelo objecto. Depois é recombinada pelo sistema de lentes para formar a imagem.

Para ultrapassar o limite de resolução,

imposto pelo comprimento de onda da luz, é necessário usar comprimentos de onda mais curtos, daí o uso dos raios-X. Os raios-X, contudo, não podem ser focados e, portanto, só podemos executar a primeira das duas fases, isto é, a difracção. Consideramos o estudo da difracção dos raios-X como o equivalente da operação de focagem no microscópio óptico. Para uma distribuição completamente geral da matéria, o problema seria insolúvel mas, felizmente, a regularidade que se verifica nos cristais impõe uma certa regularidade ao espectro de difracção, tornando a interpretação possível.

Matemàticamente, começamos por considerar a difracção de qualquer radiação por uma distribuição geral de matéria e, assim, chegamos à expressão da transformada de Fourier. Consideramos, depois, uma distribuição da matéria idêntica à distribuição dos electrões no seio dum átomo e, daí, derivamos o factor de dispersão. Vários átomos são, então, considerados em conjunto para obter a transformada molecular e, finalmente, vários destes conjuntos ou moléculas são situados numa rede, para formar um cristal; a transformada correspondente é, agora, a expressão do factor de estrutura. Pensamos ser esta uma maneira mais lógica de iniciar o estudo destas questões porque conserva a atenção focada sobre o problema básico — o de obter uma imagem da configuração atómica — e também porque relega a introdução de conceitos hipotéticos, tal como o de rede cristalina, para as fases mais tardias. A difracção óptica fornece um paralelo exacto, que pode ser tratado matemàticamente da mesma maneira, e os «motivos» ópticos, que possuem um certo atractivo artístico, constituem uma excelente ajuda visual para a assimilação das ideias básicas. Do ponto de vista da investigação, consideramos as transformadas ópticas muito importantes porque realçam as ligações entre as reflexões dos raios-X. A técnica tradicional tende a sugerir que cada número, numa tabela de factores de estrutura observados, é uma entidade separada sem qualquer relação com os restantes. Além disso, a técnica visual permite verificar a concordância, entre factores de estrutura observados e calculados, visualmente e simultâneamente. Sustentamos ser possível reconhecer, desta maneira, quando uma estrutura calculada se aproxima da correcção, mesmo quando está, ainda, suficientemente errada para dar uma má concordância pelo cálculo.

O uso das técnicas de difracção óptica é de uma considerável ajuda no ensino da óptica para, incluindo aspectos tão modernos como a coerência parcial, e constitui uma útil introdução aos problemas de formação de imagens na teoria da informação. Usamo-la, também, para introduzir a transformação de Fourier em análise de transientes em teoria eléctrica e acústica. Pode, além disso, fornecer uma introdução qualitativa útil à ideia de convolução a qual, por seu lado, pode ser usada para ilustrar coisas como o princípio da indeterminação, a relação entre velocidade de onda e de grupo, e muitas outras ideias que são em geral introduzidas de uma maneira puramente matemática.»

3. Ensino da Cristalografia nos países em desenvolvimento

Os problemas do ensino da Cristalografia nos países em desenvolvimento são mais de ordem administrativa e de organização do que académicos. Do ponto de vista puramente pedagógico, deveria haver pequena diferença entre a Cristalografia ensinada num país em desenvolvimento ou num país que já atingiu a maturidade científica. A Cristalografia, contudo, como as outras ciências, tem os seus aspectos práticos a par dos aspectos teóricos.

Em geral faz-se pressão sobre os corpos académicos no sentido de se dedicarem à formação de técnicos puramente práticos, por vezes com exclusão dos cientistas teóricos ou de investigação. Esta tendência deve ser contrariada pelas organizações científicas, visto ser apenas através da colaboração íntima de ambos os tipos de cientistas que a preparação de cientistas práticos se pode manter actualizada.

Do ponto de vista administrativo e de organização, a Cristalografia, juntamente com outras ciências menos populares, tem um problema especial nos países em desenvolvimento. A Comissão para o Ensino da Cristalografia da União Internacional de Cristalografia tem visto com bons olhos a criação de Departamentos de Cristalografia, Institutos de Cristalografia e Cátedras independentes de Cristalografia nas grandes universidades do mundo. Contudo, nas universidades mais pequenas e nas universidades dos países em vias de desenvolvimento, esta solução não é nem prática nem financeiramente possível. É necessário, portanto, encontrar outra solução que garanta uma boa preparação cristalográfica dos estudantes.

A maneira mais directa de conseguir esta finalidade é garantir que as estruturas administrativas das principais secções se mantenham extremamente flexíveis, tão flexíveis que seja possível organizar cursos interdisciplinares. Para atrair bons professores de Cristalografia deve ser possível um professor ocupar posições em duas ou mais das Secções interessadas. Um cristalógrafo, nesta situação, estará na melhor posição para recomendar um plano de estudos para os estudantes. Também estará em boa posição para propor o ensino das cadeiras de Cristalografia que são consideradas necessárias na preparação de outros cientistas.

NOTA FINAL

Ao fechar o presente número da «Gazeta de Matemática», queremos manifestar pùblicamente o nosso maior reconhecimento a instituições e entidades que participaram por qualquer forma na sua realização:

Fundação Calouste Gulbenkian, concedendo um subsídio financeiro;
Departamento de Ciências Exactas e Naturais da UNESCO;
Comissão Interuniões para o Ensino das Ciências;
Academia Mexicana da Educação;
Instituto de Programação da Faculdade de Ciências de Paris;
Associação de Matemática «Bolyai Janos» e Instituto de Matemática da Academia das Ciências da Hungria;
Centro Belga de Pedagogia da Matemática e Sociedade Matemática Belga.

Mencionaremos ainda as colaborações de outro tipo mas igualmente fundamentais:

a dos Jovens matemáticos e físicos portugueses:
no trabalho de tradução de artigos e revisão de provas tipográficas,
na iniciativa e realização completa da árdua tarefa de compilação dos índices dos números 1 a 100.
a do Pessoal da Tipografia Matemátida Lda, sempre presente, desde há longos anos, em esforço diário e dedicação ao ensino da Matemática em Portugal.

A todos, a expressão da nossa maior gratidão.

31 de Outubro de 1967.

ÍNDICES

DOS

N.os 1 A 100

ÍNDICE DE AUTORES

(Números da «Gazeta de Matemática» em tipo itálico, número da página em tipo redondo)

ÍNDICE GERAL

(Números da «Gazeta de Matemática» em tipo negro, data em tipo itálico, número da página em tipo redondo)

(Continuação da pág. 2 da capa)

China

Guozi Shudian, PEKING
National Library of Peking

Espanha

Acta Salamanticensia, SALAMANCA
Colecção Científica KOEL, MADRID
Ediciones Hispano-Argentinas, MADRID
Ediciones Rialto, MADRID
Editorial Dossat, MADRID
José Ybarrola Solano, BILBAO
Librería Internacional de Romo, MADRID
Manuel Marín, BARCELONA
Patronato de Publicaciones de la Escuela Especial de Yngenieros Industriales, MADRID

França

A. Colin, PARIS
Albin Michel, PARIS
Centre National de la Recherche Scientifique, PARIS
Dunod, PARIS
Eyrolles Éditeur, PARIS
Gauthier-Villars, PARIS
Hermann & C.ie, PARIS
Librairie André Desvigne, LYON
Librairie Octave Doin, PARIS
Librairie Scientifique Albert Blanchard, PARIS
Librairie Vuibert, PARIS
Masson & C.ie, PARIS
Presses Universitaires de France, PARIS
Société d'Éditions d'Enseignement Supérieur, PARIS

Grã-Bretanha

Blackie & Son Ltd., LONDON
Cambridge University Press, CAMBRIDGE
Chapman and Hall, LONDON
Clarendon Press, OXFORD
Dennis Dobson, LONDON
G. Bell and Sons Ltd., LONDON
George Allen and Unwin Ltd., LONDON
George G. Harrap & Co. Ltd., LONDON
Hutchinson's University Library, LONDON
Iliffe & Sons Ltd., LONDON
Longmans, Green and Co., LONDON
Macmillan & Co. Ltd., LONDON
Methuen & Co. Ltd., LONDON
Oliver and Boyd Ltd., LONDON
Oxford University Press, OXFORD
Pergamon Press Ltd., LONDON
Scientific Computing Service Ltd., LONDON
University of London Press Ltd., LONDON
University Tutorial Press Ltd., LONDON

Holanda

P. Noordhoff, GRONINGEN
North-Holland Publishing Company, AMSTERDAM

Hungria

Akadémiai Kiadó, BUDAPEST

Itália

Casa Editrice R. Carabba, ROMA
Giulio Einaudi, TORINO
Macri, BARI — CITTÀ DI CASTELLO
Studium Urbis, ROMA
Tumminelli, ROMA

Suíça

Librairie Payot, LAUSANNE

U. S. A.

Columbia University Press
John Wiley & Sons Inc., NEW YORK
The Scripta Mathematica Studies, NEW YORK

U. R. S. S.

Izdatelhstvo Akademii Nauk SSSR, MOSKVA

Uruguai

Revista de la Facultad de Humanidades y Ciencias, MONTEVIDEU

Composição e impressão — Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1966 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local de cobrança As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 16 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 75 cada número simples	17$50
N.ºs 78 a 99 » » duplo	35$00
N.ºs 76-77	60$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 100$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — LISBOA-2 — Telefone 369449