GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXVII **N.° 103-104** JULHO-DEZ. 1966

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

COMUNICADO(*)

O Departamento de Matemática e Estatística da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Araraquara (Instituto Isolado do Ensino Superior do Estado de São Paulo), comunica o seu interesse na contratação, ainda para 1968, de Professores para *regentes das Cadeiras de:*

a) Análise Algébrica e Infinitesimal.
b) Fundamentos de Matemática.

Condições de Contratos:

a) Por 730 dias (renováveis).
b) Em Regime de Dedicação Integral à Docência e Pesquisa (RDIDP), preferivelmente, ou em Regime de Trabalho Parcial (RTP).
c) Salários actuais: NCr$ 2.475,48 em RDIDP, NCr$ 1.114,68 em RTP.

Os professores interessados deverão comunicar até o dia 30 de Junho de 1968 com o Departamento, enviando o seu Curriculum Vitae et Studiorum com os comprovantes anexados, para julgamento.

Dados Gerais:

Araraquara é cidade do Estado de São Paulo com mais de 100.000 habitantes, servida pela Companhia Paulista de Estradas de Ferro e Estrada de Ferro Araraquara, distando de São Paulo aproximadamente 270 km, por via férrea ou por rodovia asfaltada.

O Departamento ministra aulas para os Cursos de Matemática, Química, Pedagogia e Ciências Sociais.

A cidade possui ainda as Faculdades de Farmácia e Odontologia (também do Governo do Estado), de Ciências Económicas e de Administração e Escola Superior de Agrimensura, de Fundações particulares.

O Departamento funciona actualmente em prédio que serve também ao Departamento de Química, mas está sendo construído um Bloco específico para o Departamento, que deverá ficar concluído em Novembro deste ano.

Endereço: Departamento de Matemática e Estatística
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Araraquara
Praça Santos Dumont, 43 — Araraquara — São Paulo — Brasil.

Araraquara, Maio de 1968

(*a*) assinatura irreconhecível
p/ Chefe do Departamento

(*a*) assinatura irreconhecível
Director da Faculdade

(*) Recebido para publicação em 29-6-68.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2.

ANO XXVII – N.os 103-104 GAZETA DE MATEMÁTICA JULHO/DEZ. – 1966

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA

Sur quelques équations différentielles non-linéaires du deuxième ordre

par Ivan Bandić

Beograd

1°. Il s'agit de l'équation différentielle

$$(1) \qquad F(x, \underbrace{y, \overset{p}{y'}, y''}_{m}) = 0 .$$

En supposant que x a la dimension λ et y la dimension ν, on a indiqué par le symbole $F(x, \underbrace{y, \overset{p}{y'}, y''}_{m})$ que tous les termes du polynome F sont de dimension p et que F est, en outre, homogène selon y, y' et y'' de degré m.

L'équation donnée on nomme ici, pour plus de brièveté, l'équation P du deuxième ordre.

On a demontré dans le présent travail que l'équation (1) est intégrable par quadratures. En vertu des résultats obtenus on résout, ensuite, deux problèmes: *a*) On résout certains cas connus de (1) au moyen d'une nouvelle méthode. (*b*) On forme de nouvelles classes, très larges, d'équations différentielles intégrables de forme (1).

(1.1) Au cours du travail on applique aussi les dérivées relatives de M. PETROVIĆ, [1]. La dérivée relative du n-ième ordre de la fonction $u = u(x)$ est introduite au moyen de la définition $\Delta_n(u) = u^{(n)}/u$, $(u^{(n)} = d^n u/d x^n)$.

De tous les nombreux relations entre les dérivées relatives, qui en résultent, on y a utilisé

$$\Delta_1(u\,v) = \Delta_1(u) + \Delta_1(v);$$

$$\Delta_1\left(\frac{u}{v}\right) = \Delta_1(u) - \Delta_1(v);$$

$$\Delta_1(u^n) = n\,\Delta_1(u); \quad \Delta_2(u) = \Delta_1'(u) + \Delta_1^2(u);$$

$$\Delta_1(\exp\textstyle\int u\,dx) = \exp\textstyle\int \Delta_1(u)\,dx = u,$$

où $u = u(x)$, $v = v(x)$.

(1.2) Dans le travail on a utilisé également les dérivées relatives partielles du premier ordre de la fonction à deux variables indépendantes, $u = u(x_1, x_2)$, qu'on a introduite par la définition, [2]

$$\Delta_1(u)_{x_\nu} = \frac{1}{u}\,\frac{\partial u}{\partial x_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2).$$

Si x_2 est la fonction de x_1, on arrive à la dérivée relative totale selon x_1

$$\nabla_1(u)_{x_1} = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx_1} = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot x'_2\right),$$

$$\left(x'_2 = \frac{dx_2}{dx_1}\right)$$

ou bien, en vertu de la définition précédente

$$\nabla_1(u)_{x_1} = \Delta_1(u)_{x_1} + \Delta_1(u)_{x_2}\,x'_2\,.$$

2°. Lorsqu'on introduit dans le polynome F de l'équation (1) la nouvelle variable indépendante t et la fonction inconnue $\eta=\eta(t)$ au moyen de la substitution

$$x = e^{\lambda t}\,,\quad y = \eta\, e^{\nu t}\,, \tag{2}$$

et que l'on prend en considération les caractéristiques sus-mentionnées de F, on obtient

$$F = F(1\,,1\,,[\Delta_1(\eta)+\nu]/\lambda\,,$$
$$[\Delta_2(\eta)+(2\nu-\lambda)\Delta_1(\eta)+\nu(\nu-\lambda)]/\lambda^2)\,\eta^m\exp(pt)\,.$$

En introduisant les fonctions z et ϑ par la substitution

$$\Delta_1(\eta)+\nu=\lambda z\,;\quad \Delta_2(\eta)+(2\nu-\lambda\vartheta)\Delta_1(\eta)+ + \nu(\nu-\lambda)=\lambda^2\vartheta\,, \tag{3}$$

d'où il résulte

$$z' = \lambda(\vartheta + z - z^2)\,,\qquad (z' = dz\,|\,dt) \tag{4}$$

la fonction F devient

$$F = F(1\,,1\,,z\,,\vartheta)\exp\int[m\lambda z + + (p-m\nu)]\,dt \tag{5}$$

Dans ce cas l'équation (1) se réduit à l'équation algèbrique

$$F(1\,,1\,,z\,,\vartheta)=0\,. \tag{6}$$

(**2.** 1) Soit $\vartheta=\vartheta(z)$ une solution de (6). Dans ce cas on trouve l'intégrale générale de l'équation (1) de (2), (3) et (4) dans la forme paramètrique

$$x = c_1\exp\int P(z)dz\,;\ \ y = c_2\exp\int zP(z)dz\,; \tag{7}$$
$$P(z) = (\vartheta(z)+z-z^2)^{-1}$$

où z est le paramètre.

(**2.** 2) L'intégrale générale de (1) peut être exprimée, à la base de (2), (3) et (4) sous la forme

$$x = c_1\exp\int Q(\vartheta)\,d\vartheta\,; \tag{8}$$
$$y = c_2\exp\int z(\vartheta)\,Q(\vartheta)\,d\vartheta\,;$$
$$Q(\vartheta) = z'(\vartheta)(\vartheta + z(\vartheta) - z^2(\vartheta))^{-1}$$

où ϑ joue le rôle de paramètre et $z=z(\vartheta)$ représente une solution de l'équation (6).

(**2.** 3) On applique ici les résultats obtenus aux quelques cas spéciaux de l'équation (1).

(**2.** 3. 1) L'équation différentielle, [3]

$$f(x\,,\underbrace{\overset{p_0}{y}\,,y'}_{m_0})\,y'' + \varphi(x\,,\underbrace{\overset{p_1}{y}\,,y'}_{m_1}) = 0 \tag{9}$$

appartient à la classe des équations P de forme (1) si

$$m_1 - m_0 = 1\,;\ \ p_1 - p_0 = \nu - 2\lambda\,. \tag{10}$$

L'intégrale générale de (9) on trouve, dans ce cas, de (7) où

(11) $\Im(z) = -\varphi(1,1,z)/f(1,1,z)$.

Exemple. On donne l'éqnation P de forme (9), [4]

(12) $(xy'-y)y''+4y'^2=0$,

où $m_0=1$, $p_0=\nu$, $m_1=2$, $p_1=2(\nu-\lambda)$, et la condition (10) est satisfaite. L'intégrale générale de (12) est donnée par (7), où

$$P(z)=(1-z)/z(1+z)^2.$$

(2. 3. 2) L'équation différentielle

(13) $f(x,\underbrace{\overset{p_0}{y,y''}}_{m_0})y'+\varphi(x,\underbrace{\overset{p_1}{y,y''}}_{m_1})=0$

est une équation P si

(14) $m_1-m_0=1$, $\quad p_1-p_0=\nu-\lambda$.

L'intégrale générale de (13) est donnée par les relations (8), où

(15) $z(\Im) = -\varphi(1,1,\Im)/f(1,1,\Im)$.

Exemple. On donne l'équation P de forme (13), [5]

(16) $$a x^5 y' y'' + b y^2 = 0, \quad (a=\text{const.},\ b=\text{const.})$$

où $m_0=1$, $p_0=\lambda+\nu$, $m_1=2$, $p_1=2\nu$. L'intégrale générale de (16), où la condition (14) est satisfaite, on trouve de (8), où $z(\Im)=-b/a\Im$.

(2. 4) En utilisant les résultats de 2°, on résout ici le problème b) de 1°.

On donne l'équation différentielle

(17) $$f(x,\underbrace{\overset{p_0}{y,y'}}_{m_0})y''+\varphi(x,\underbrace{\overset{p_1}{y,y'}}_{m_1})= \psi(x,\underbrace{\overset{q_0}{y,y'}}_{n_0})y''+\theta(x,\underbrace{\overset{q_1}{y,y'}}_{n_1}).$$

En supposant que

(18) $$m_1-m_0=n_1-n_0=1;\quad p_1-p_0=q_1-q_0=\nu-2\lambda,$$

on obtient à la base de (5)

(19) $$(f\Im+\varphi)\exp\int[m_1\lambda z+(p_1-m\nu)]dt= (\psi\Im+\theta)\exp\int[n_1\lambda z+(q_1-n_1\nu)]dt,$$

avec

$$f=f(1,1,z),\ \varphi=\varphi(1,1,z),\quad \psi=\psi(1,1,z),\ \theta=\theta(1,1,z),$$

ou bien

(20) $$R=\exp\int(\alpha z+\beta)dt,$$

où est posé, pour de brièveté

(21) $$R=(f\Im+\varphi)/(\psi\Im+\theta);\quad \alpha=(n_1-m_1)\lambda,\ \beta=(q_1-p_1)-(n_1-m_1)\nu.$$

En appliquant l'opérateur ∇_1 selon t aux deux côtés de (20), et en tenant compte que $\nabla_1(R)_z=\lambda(\Im+z-z^2)\nabla_1(R)_z$ on obtient

(22) $$\lambda(\Im+z-z^2)\nabla_1(R_z)=\alpha z+\beta.$$

Finalement, en éliminant la variable ϑ de (21) et (22), on arrive à l'équation d'ABEL

$$(23) \qquad \lambda\{[z(1-z)\psi-\theta]R - -[z(1-z)f-\varphi]\}R' = =(\alpha z+\beta)R(\psi R-f), \quad (R'=dR/dz).$$

Soit $R=R(z,c_1)$ l'intégral générale de (23). Dans ce cas on trouve de (21)

$$(24) \qquad \vartheta(z,c_1)=[\varphi-\theta R(z,c_1)]/ /[\psi R(z,c_1)-f]$$

et l'intégrale générale de (17), où la condition (18) est satisfaite, on obtient de (2), (3), (22) et (24) dans la forme paramètrique

$$(25) \qquad x=c_2\exp\int\frac{dz}{\vartheta(z,c_1)+z-z^2}, \qquad x^\beta y^\alpha=[R(z,c_1)]^\lambda,$$

où z est le paramètre.

(2. 4. 1) En supposant que

$$(26) \qquad z(1-z)f-\varphi=0,$$

l'équation (23) se réduit à l'équation linéaire

$$(27) \qquad \lambda[z(1-z)\psi-\theta]R'= (\alpha z+\beta)(\psi R-f),$$

dont l'intégrale générale est

$$(28) \qquad R=\varepsilon\left(c_1+\frac{1}{\lambda}\int\frac{f}{\varepsilon}\omega\,dz\right); \qquad \varepsilon=\exp\frac{1}{\lambda}\int\psi\,\omega\,dz, \qquad (\omega=(\alpha z+\beta)/[z(1-z)\psi+\theta]).$$

En tenant compte que, en vertu de (2) et (3)

$$(29) \qquad z=xy'/y,$$

et que

$$(30) \qquad f(1,1,z)=Af(x,y,y'), \qquad \varphi(1,1,z)=A\frac{x^2}{y}\varphi(x,y,y'), \qquad (A=x^{(\nu m_0-p_0)/\lambda}\,y^{-m_0})$$

la condition (26) devient

$$(31) \qquad xy\varphi(x,y,y')=y'(y-xy')f(x,y,y')$$

et l'équation intégrable (17) apparaît sous la forme

$$(32) \qquad \{xyy''+y'(y-xy')\}f(x,\underbrace{\overset{p_0}{y,y'}}_{m_0})= =xy\{\psi(x,\underbrace{\overset{q_0}{y,y'}}_{n_0})y''+\theta(x,\underbrace{\overset{q_1}{y,y'}}_{n_1})\},$$

où $n_1-n_0=1$, $q_1-q_0=\nu-2\lambda$.

L'intégrale générale de (32) on trouve de (25) où $R=R(z,c_1)$ est donné par (28).

LITTÉRATURE

[1] M. PETROVIĆ, *Un algorithme différentielle et ses applications*, Monographies de l'Académie Serbe des Sciences, Vol. XCI (1936), Beograd.

[2] I. BANDIĆ, *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre*, Bull. de la Soc. des Math. et phys. de la R. P. de Serbis, X 1-4 (1958), Beograd.

[3] I. BANDIĆ, *Sur une classe d'équations différentielles quasi-homogènes à deux dimensions du deuxième ordre*, Acad. roy. de Belgique, Bull. de la Classe des Sciences, 5 Serie, T. LI (1965), Bruxelles.

[4] FORSYTH-JACOBSTHAL, *Lehrbuch der Differentialgleichungen*, p. 144, 710, (1912), Braunschweig.

[5] E. KAMKE, *Differentialgleichungen*, I, p. 595, 6-229, (1943), Leipzig.

On abelian groups with the unique square root property

by José Morgado

Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. It is well known that, if G is a finite group (multiplicatively written), then each element of G has a square root, if and only if the order of G is odd ([1], Theorem 1, and [2]).

Recently, we have obtained a characterization of the groups which admit a JACOBI automorphism. We have stated that a group G has at most one JACOBI automorphism, and that such an automorphism exists, if and only if G is an abelian group having the unique square root property (i. e., for each element $x \in G$, there is exactly one element $y \in G$ satisfying the condition $y^2 = x$).

In this note we obtain some results about the abelian groups having the unique square root property.

2. Let us state the following

LEMMA 1. *If* x *is an element of odd order of a group* G *and* y *is a square root of* x, *then one has either* $\mathrm{ord\,y} = \mathrm{ord\,x}$ *or* $\mathrm{ord\,y} = 2 \cdot \mathrm{ord\,x}$.

PROOF. Indeed, let $ord\,x = 2n-1$. Since $y^2 = x$, one has

$$y^{2(2n-1)} = x^{2n-1} = 1$$

and so y is an element of finite order.

If $ord\,y$ is odd, say $2m-1$, then one has $(2m-1)\,|\,2(2n-1)$, hence

$$(2m-1)\,|\,(2n-1).$$

On the other hand, one has

$$x^{2m-1} = y^{2(2m-1)} = 1$$

and so $(2n-1)\,|\,(2m-1)$.

Consequently, $ord\,y = ord\,x$.

If $ord\,y$ is even, say $2m$, then from $y^2 = x$, it follows

$$y^{2(2n-1)} = x^{2n-1} = 1 = y^{2m} = x^m,$$

meaning that $2m\,|\,2(2n-1)$ and $(2n-1)\,|\,m$, hence $ord\,y = 2 \cdot ord\,x$, as wanted.

LEMMA 2. *If* x *is an element of odd order of a group* G, *then there is exactly one element* $\mathrm{y} \in \mathrm{G}$ *such that*

$$\mathrm{y}^2 = \mathrm{x} \text{ and } \mathrm{ord\,y} = \mathrm{ord\,x}$$

and this element y *belongs to the cyclic subgroup generated by* x.

PROOF. Let $ord\,x = 2n-1$. Then, since

$$(x^n)^2 = x^{2n-1} \cdot x = x$$

one sees that x^n is a square root of x and obviously x^n belongs to the cyclic subgroup generated by x. Moreover, if $y^2 = x$ and $ord\, y = ord\, x$, then

$$y = y^{2(2n-1)+1} = (x^n)^{2(2n-1)+1} = x^n,$$

proving the lemma.

THEOREM 1. *If* T *is the set af all elements of odd order of an abelian group* G, *then* T *is a subgroup of* G *having the unique square root property.*

PROOF. The set T is clearly non void, since $1 \in T$. Moreover, since $ord(a^{-1}) = ord\, a$ and $ord(ab) = ord\, a \cdot ord\, b$ for all a, b in T, on sees that T is a subgroup of G. By Lemma 2, for each $a \in T$ there is exactly one element x such that $x^2 = a$ and $ord\, x = ord\, a$ and this element belongs to the cyclic subgroup generated by a, hence $x \in T$.

If $ord\, x \neq ord\, a$, then, by Lemma 1, one has $ord\, x = 2 \cdot ord\, a$ and so x does not belong to T.

3. If G is a torsion free abelian group such that for each element $a \in G$ there is some x satisfying the condition $x^2 = a$, then G has the unique square root property. In fact, if $x^2 = y^2 = a$ with $y \neq x$, then $(xy^{-1})^2 = x^2(y^{-1})^2 = a \cdot a^{-1} = 1$, contradicting the hypothesis that G is torsion free.

Let G be a group with the unique square root property. Then, there his no element x in G with even order. In fact, from $ord\, x = 2m$ it follows $(x^m)^2 = 1$ and so 1 and $x^m \neq 1$ would be square roots of 1, against the hypothesis. Thus, the set T formed by all elements in G having odd order is the maximal torsion subgroup of G and, therefore, the quotient group G/T is torsion free. If $aT \in G/T$ and $x^2 = a$, then it is immediate that $(xT)2 = aT$.

Consequently, the following holds:

THEOREM 2: *If* G *is an abelian group with the unique square root property and* T *is the set of all elements in* G *having odd order, then* G/T *is a torsion free abelian group with the unique square root property.*

4. Now, let H be a torsion free abelian group having the unique square root property. We shall denote by $x^{1/2}$ the (unique) square root of x. More generally, we shall denote by $x^{m/2^n}$, m and n integers, the square root of $x^{m/2^{n-1}}$.

This notation is consistent, since

$$x^{m/2^n} \cdot x^{m'/2^{n'}} = x/^{m2^n + m'/2^{n'}}.$$

Let $a \in H$. It is immediate that the least subgroup of H containing a and having the unique square root property is the set of all elements a^r, where r is either 0 or a rational number of the form $\dfrac{2m+1}{2^n}$, where m and n are integers.

Let us denote this group by $S(a)$. It is immediate that this group is isomorphic to the additive group whose elements are 0 and the rational numbers of the form $\dfrac{2m+1}{2^n}$, with m and n integers.

THEOREM 3. *For each* a ∈ H, *the lattice of all subgroups of the group* S(a) *is distributive.*

PROOF. Indeed, as it was stated by ORE [4], the lattice of all subgroups of a group is distributive, if and only if the group is locally cyclic.

Let us see that the group $S(a)$ is locally cyclic, that is to say, if $x, y \in S(a)$, say

$$x = a^{(2m+1)/2^n} \text{ and } y = a^{(2r+1)/2^s}$$

then there is some $z \in S(a)$ such that x and y belong to the cyclic subgroup generated by z. It is sufficient to set $z = a^{1/2^p}$, where p is the greatest of the integers n and s.

THEOREM 4. *For each* $a \in H$, *the lattice of all subgroups of* $S(a)$ *having the unique square root property, is isomorphic to the lattice constituted by the set of all positive odd integers partially ordered by the relation* $m \leqq n$ *if and only if* m *is divisible by* n.

PROOF. Let A be a subgroup of $S(a)$ having the unique square root property. If $a^{(2m+1)/2^n} \in A$, then a^{2m+1} and $a^{-(2m+1)}$ belong to A. Let $2p+1$ be the least positive integer such that $a^{2p+1} \in A$. Then, if $x \in A$, one has $x = a^{(2p+1)(2q+1)/2^n}$ for some integers q and n.

This means that $A = S(a^{2p+1})$.

Thus, one sees that there is a one-one correspondence between the set of all subgroups of $S(a)$ having the unique square root property and the set of all positive odd integers.

Moreover, one has clearly

$$S(a^{2m+1}) \subseteq s(a^{2p+1})$$

if and only if

$$(2p+1) \mid (2m+1),$$

completing the proof.

The group H may be considered as a module over the ring R formed by all rational numbers $0, \dfrac{2m+1}{2^n}$, m and n integers, relatively to the ordinary addition and multiplication. The set $S(a)$ the cyclic submodule generated by a.

The theorem 4 above says that *the lattice of all submodules of* $S(a)$ *is isomorphic to the lattice of all positive odd integers,* $m \leqq n$ *meaning that* n *divides* m.

5. For each $a \in H$, let us denote by $C(a)$ the cyclic subgroup generated by a.

Let us consider the quotient group $S(a)/C(a)$ and let $a^{(2m+1)/2^n}$ be any element of $S(a)$. If $n \geqq 1$, by the division algorithm, one has

$2m+1 = 2^n \cdot q + (2r+1)$, with $0 < 2r+1 < 2^n$

q and r integers.

From this it follows

$$(1) \qquad \frac{2m+1}{2^n} = q + \frac{2r+1}{2^n}, \quad \text{with } 0 < 2r+1 < 2^n$$

and hence

$$a^{(2m+1)/2^n} = a^q \cdot a^{(2r+1)/2^n} \in a^{(2r+1)/2^n} C(a)$$

If $n < 1$, then $\dfrac{2m+1}{2^n}$ is an integer and so $a^{(2m+1)/2^n} \in C(a)$.

Thus, the elements of the group $S(a)/C(a)$ are $C(a)$ and the cosets of the form

$$a^{(2r+1)/2^n} C(a)$$

where n is a positive integer and r is an integer such that $0 < 2r+1 < 2^n$.

Let us consider the group $Z(2^\infty)$ ([5], p. 4). The elements of the group $Z(2^\infty)$ are

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \ldots, \frac{2r+1}{2^n}, \ldots$$

with $0 < 2r+1 < 2^n$, the group operation being the addition modulo one.

Since the integers q and r in (1) are uniquely determined, one concludes the following

THEOREM 5. *For each* $a \in H$, *the quotient group* $S(a)/C(a)$ *is isomorphic to the group* $Z(2^\infty)$.

BIBLIOGRAPHY

[1] W. R. UTZ, *Square roots in groups,* Amer. Math. Monthly, **60** (1953), pp. 185-186.

[2] E. A. FAY, *Solution of the problem E 1794* [*1965, 545*], Amer. Math. Monthly, **73** (1966), pp.892-893.

[3] JOSÉ MORGADO, *Note on Jacobi endomorphisms,* in preparation.

[4] OYSTEIN ORE, *Structures and group theory II,* Duke Math. J., **4** (1938), pp. 247-269.

[5] IRVING KAPLANSKY, *Infinite abelian groups,* Ann Arbor, 1954.

Entropic groupoids and abelian groups

by **José Morgado**

Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. Following ETHERINGTON [1], a groupoid G is said to be *entropic,* if the following condition holds:

$ab \cdot cd = ac \cdot bd$ for all a, b, c, d in G.

ORRIN FRINK [2] observed that every entropic groupoid G has additive endomorphisms, that is to say, if α and β are endomorphisms of G, then the mapping $\alpha + \beta : G \to G$, defined by

$(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x)$ for every $x \in G$,

is an endomorphism of G.

In [1], ETHERINGTON remarked that the converse is not true and gave some examples to show that a groupoid can have additive endomorphisms without satisfying the entropic law.

In [3], TREVOR EVANS proved that if, instead of endomorphisms of G, one considers homomorphisms of the direct product $G \otimes G$ into G, then the property that the sum of two homomorphisms of $G \otimes G$ into G is again a homomorphism, is equivalent to the entropic law.

As an immediate consequence, he stated that, if a loop G has that property, then G is an abelian group.

Thus, it was stated that, *if* G *is an entropic groupoid satisfying the conditions*

(I) *for all* a, b *in* G, *the equations* $ax = b$ *and* $ya = b$ *have unique solutions in* G,

(II) *there exists in* G *an element* e *such that* $ae = ea = a$ *for every* $a \in G$,

then G *is an abelian group.*

The purpose of this note is to show that the conditions (I) and (II) may be weakened.

2. We are going to state the following

THEOREM 1: *Let* G *be an entropic groupoid satisfying the following conditions:*

(i) *For two any elements* $x, y \in G$, *there are elements* $e, f \in G$ *such that*

$$xe = x = fx \quad \textit{and} \quad ye = y = fy;$$

(ii) *For each element* $x \in G$ *and each element* $e \in G$ *such that* $xe = x$, *there is an element* x'_e *(dependent on* e*) such that*

$$xx'_e = e.$$

Then G *is an abelian group.*

PROOF. Indeed, let $x, y \in G$ and let e, f be elements of G satisfying condition (i). Then, by the entropic law, one has

$$xy = fx \cdot ye = fy \cdot xe = yx,$$

that is to say, the groupoid G is commutative.

Moreover, if g denotes any element of G such that

$$xg = x \quad \text{and} \quad zg = z,$$

then, by the entropic law and the commutativity, one has

$$xy \cdot z = xy \cdot zg = xy \cdot gz = xg \cdot yz = x \cdot yz .$$

Consequently, every entropic groupoid satisfying condition (i) is commutative and associative.

Now, we are going to see that, under the conditions of the theorem, for each element $x \in G$, there is only one local identity, i. e., there is only one element $e \in G$ such that

$$xe = ex = x .$$

In fact, let e and f be elements of G such that

$$xe = xf = x$$

and let x'_e and x'_f be elements of G such that

$$xx'_e = e \text{ and } xx'_f = f .$$

Then, since G is associative and commutative, one has clearly

$$\begin{aligned} e &= xx'_e = xf \cdot x'_e = x \cdot fx'_e = x \cdot x'_e f = \\ &= xx'_e \cdot f = ef = e \cdot xx'_f = ex \cdot x'_f = \\ &= xe \cdot x'_f = xx'_f = f . \end{aligned}$$

It is immediate that e is an identity element of the groupoid G, for, if y is any element of G, from (i) it follows that there is some element f such that $xf = x$ and $yf = y$ and so, by the argument above, one concludes that $f = e$, i. e., one has $ye = ey = y$ for every $y \in G$, meaning that e is an identity element of G.

Now, condition (ii) and commutativity say that every element of G has an inverse element and so G is an abelian group.

Conversely, if G is an abelian group, then G is clearly an entropic groupoid satisfying the conditions (i) and (ii). Thus, an abelian group may be characterized as an entropic groupoid satisfying these conditions.

Remark 1: It is interesting to observe that, if condition (i) is replaced by the condition

(i') *for each element of* G, *there is in* G *one local identity element,*

then G need not be a group.

Indeed, let Q be the set of all rational numbers and let us define in Q the operation $\odot$ by the condition

$$x \odot y = \frac{x+y}{2} \text{ for all } x, y \text{ in } Q .$$

It is immediate that the groupoid $\langle Q, \odot \rangle$ is entropic and, moreover, for each $x \in Q$, there is one local identity which is x and there is one local inverse element which is x again.

In spite of that, the groupoid $\langle Q, \odot \rangle$ is not a group.

3. In this section, we obtain another characterization of the abelian groups as entropic groupoids, by using the notion of a center associative element.

Let us recall that an element a of the groupoid G is said to be a *center associative element* (Garrison [4]), if and only if one has

$$x \cdot ay = xa \cdot y \text{ for all } x, y \text{ in } G .$$

Theorem 2. *Let* G *be an entropic groupoid satisfying the following condition:*

(C): *There is in* G *some center associative element a such that, for every* $b \in G$, *the equations* $ax = b$ *and* $ya = b$ *are soluble in* G. *Then the groupoid* G *is a commutative monoid.*

Proof. One has to prove that G is associative and commutative and, moreover there is in G an identity element.

Let e be a solution of the equation $ax = a$ and let b be any element of G. Since $b = ya$ for some $y \in G$ and a is center associative, one has

$$be = ya \cdot e = y \cdot ae = ya = b,$$

and this means that e is a right identity of the groupoid G.

On the other hand, let e' be a solution of the equation $ya = a$.

Since every $b \in G$ may be written under the form $b = xa$ for some $x \in G$, one has

$$e'b = e' \cdot ax = e'a \cdot x = ax = b$$

and hence e' is a left identity of G.

From $e' = e'e = e$, one concludes that e is an identity element of G.

Now, since G is entropic, it results

$$xy = ex \cdot ye = ey \cdot xe = yx$$

and

$$xy \cdot z = xy \cdot ez = xe \cdot yz = x \cdot yz$$

for all x, y, z in G, which completes the proof.

REMARK 2. The hypothesis that G is entropic was not used to show that G has an identity element. Consequently, *every groupoid satisfying condition* (C) *has an identity element.* In particular, *every quasigroup having a center associative element is a loop.*

THEOREM 3. *Let* G *be an entropic groupoid satisfying the following condition:*

(D): *There is in* G *some center associative element* a *such that, for every* $\mathrm{b} \in \mathrm{G}$, *the equations* $\mathrm{ax} = \mathrm{b}$, $\mathrm{ya} = \mathrm{b}$ *and* $\mathrm{bz} = \mathrm{a}$ *are soluble in* G. *Then the groupoid* G *is an abelian group.*

PROOF. Since, by theorem 2, G is a commutative monoid, it suffices to show that, for each $b \in G$, there is in G some element b' such that $bb' = e$, where e denotes the identity element.

Let b' be a solution of the equation

$$ab \cdot x = a.$$

Then, one has

$$a = ab \cdot b' = a \cdot bb'.$$

Now, if a' denotes a solution of the equation $ya = e$, one has

$$e = a'a = a'(a \cdot bb') = a'a \cdot bb' = e \cdot bb' = bb',$$

as wanted.

Conversely, if G is an abelian group, then G is obviously an entropic groupoid satisfying condition (D). Thus, by using theorem 3, one obtains another characterization of the abelian groups as entropic groupoids.

BIBLIOGRAPHY

[1] I. M. H. ETHERINGTON, *Groupoids with additive endomorphisms,* Amer. Math. Monthly, **65** (1958), pp. 596-601.

[2] ORRIN FRINK, *Symmetric and self-distributive systems,* Amer. Math. Monthly, **62** (1955), pp. 697--707.

[3] TREVOR EVANS, *A condition for a group to be commutative,* Amer. Math. Monthly, **68** (1961), pp. 898-899.

[4] G. N. GARRISON, *Quasigroups,* Ann. of Math., **41** (1940), pp. 474-487.

Another definition of a group by means of a single axiom

by José Morgado

Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

Introduction

In [1], MICHAEL SLATER characterizes a group by means of a single axiom of the form p *implies* q, p and q being equations, in terms of two operations: a binary operation $\cdot$ (multiplication) and a unary operation $'$ (inversion). He proves that the system $< G, \cdot, ' >$ is a group, if and only if

$$ab \cdot c = ad \cdot e \text{ implies } b = d \cdot ec' .$$

In [2], p. 6, MARSHALL HALL gives a definition of a group in terms of one of the inverse operations of the multiplication by using four axioms.

In [3], it is observed that these axioms are not independent and one defines a group in terms of the same operation by using two axioms.

In [4], one obtains a definition of a group in terms of the same operation by means of one axiom of the form p *implies* q, where p and q are equations. It is shown that, if the groupoid $< G, \cdot >$ satisfies the condition

$$a(bb \cdot b) \cdot (cc \cdot c) = a(dd \cdot d) \cdot (ee \cdot e) \quad \text{implies} \quad b = d \cdot ce ,$$

then, if one defines the operation $\odot$ in G by the condition

$$a \odot b = a(bb \cdot b) ,$$

the groupoid $< G, \odot >$ is a group.

The purpose of this note is to characterize a group by means of one universal axiom, written in terms of one binary operation (one of the inverse operations of the multiplication).

This problem was solved for the abelian groups by MARLOW SHOLANDER in [5]. He stated that, if the groupoid $< G, - >$ satisfies the condition

$$y = x - [(x - z) - (y - z)] \text{ for all } x, y, z \text{ in } G,$$

then the groupoid $< G, + >$, where $x + y = x - [(y - y) - y]$, is an abelian group.

§ 1. We are going to state the following

THEOREM: *Let* $< \mathrm{G}, \cdot >$ *be a groupoid satisfying the following condition:*

$$\text{(C)} \quad \mathrm{a} = \mathrm{b}\,\{[(\mathrm{dd} \cdot \mathrm{a})\mathrm{c}][(\mathrm{dd} \cdot \mathrm{b})\mathrm{c}]\} \textit{ for all } \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d} \textit{ in } \mathrm{G}.$$

Then, if one defines the binary operation $\odot$ *in* G *by the condition*

$$\mathrm{a} \odot \mathrm{b} = \mathrm{a}(\mathrm{bb} \cdot \mathrm{b}) \textit{ for all } \mathrm{a}, \mathrm{b} \textit{ in } \mathrm{G},$$

the groupoid $< \mathrm{G}, \odot >$ *is a group.*

PROOF: One has clearly

(1) $a = a\{[(dd \cdot a)c][(dd \cdot a)c]\}$ for all

a, c, d in G.

Let us set

$$c = [(dd \cdot b)b][(dd)(dd \cdot a)]b .$$

Since, by condition (C), one has

$$(dd \cdot a)c = (dd \cdot a)(\{[(dd \cdot b)b] \cdot \cdot [(dd)(dd \cdot a)]b\}) = b ,$$

it follows from (1) that

(2) $a = a \cdot bb$ for all a, b in G.

Then, by putting $c = ee$ in (C), one obtains

$$a = b\{[(dd \cdot a)(ee)][(dd \cdot b)(ee)]\}$$

and hence, by (2), one has

$a = b[(dd \cdot a)(dd \cdot b)]$ for all a, b, d in G.

Consequently,

$$aa = (bb)[(dd \cdot aa)(dd \cdot bb)] .$$

From here and (2), it follows

$$aa = (bb)[(dd)(dd)] = (bb)(dd) = bb$$

for all a, b, d in G.

This means that the element bb does not depend on b.

Let us set $i = bb$; then one has

(3) $a = ai$ for every $a \in G$,

that is to say, i is a right identity for the grupoid $< G, \cdot >$.

Thus, the condition (C) may be written

(C′) $a = b[(ia \cdot c)(ib \cdot c)]$ for all

a, b, c in G.

By setting $b = c = i$ in (C′), one obtains

$$a = i[(ia \cdot i)(ii \cdot i)]$$

and hence, by (3),

(4) $a = i \cdot ia$ for every $a \in G$.

From (C′) and (4), it results

(5) $ia = (ib)(ac \cdot bc)$ for all a, b, c in G

and, by setting $c = b$, one obtains

(6) $ia = ib \cdot ab$ for all a, b in G.

From (5) it follows, by taking $b = i$,

$$ia = (ii)(ac \cdot ic) = i(ac \cdot ic)$$

and hence, by (4),

(7) $a = ac \cdot ic$ for all a, c in G.

Let us see that one has

(8) $i \cdot ab = ba$ for all a, b in G.

In fact, by (7), (4) and (6), one has

$$ba = b(ab \cdot ib) = (i \cdot ib)(ab \cdot ib) = i \cdot ab .$$

Then, from (4), (5) and (8), one concludes

$$a = i \cdot i\,a = i[(i\,b)\,(a\,c \cdot b\,c)] = (a\,c \cdot b\,c)(i\,b)$$

and consequently

$$\begin{aligned} a\,b &= [(a\,c \cdot b\,c)\,(i\,b)]\,b = \\ &= [(a\,c \cdot b\,c)\,(i\,b)](i \cdot i\,b)\,. \end{aligned}$$

Hence, by (7) and (3), one gets

(9) $a\,b = a\,c \cdot b\,c$ for all $a\,,b\,,c$ in G

and this result contains, as particular cases, the results (6), (7) and (8).

Now, we are going to state that the groupoid $< G\,, \odot >$ is a group.

We may write $a \odot b = a(b\,b \cdot b) = a \cdot i\,b$

a) One has clearly

$a \odot i = a \cdot i\,i = a\,i = a$ for every $a \in G$,

that is to say, the element i is a right identity for the groupoid $< G\,, \odot >$.

b) Furthermore, one has

$a \odot (i\,a) = a\,(i \cdot i\,a) = a\,a = i$ for every $a \in G$,

meaning that, in the groupoid $< G\,, \odot >$, for each element a, there is a right inverse element $i\,a$.

c) Finally, from (8) and (9), one concludes that

$$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= a \cdot i(b \cdot i\,c) = a\,(i\,c \cdot b) = \\ &= (a \cdot i\,b)[(i\,c \cdot b)\,(i\,b)] = (a \cdot i\,b)\,(i\,c \cdot i) = \\ &= (a \cdot i\,b)\,(i\,c) = (a \odot b) \odot c\,, \end{aligned}$$

proving that the operation $\odot$ is associative.

Consequently, the groupoid $< G\,, \odot >$ is a group, as it was claimed.

§ **2**. Now, let us suppose that the groupoid $< G\,, \odot >$ is a group and let us define the binary operation $\cdot$ in G, by the condition

$$a \cdot b = a \odot b^{-1} \text{ for all } a\,, b \text{ in } G\,,$$

b^{-1} being the inverse of b in the group $< G\,, \odot >$.

Then, one has obviously

$$a \odot b = a(b\,b \cdot b) \text{ for all } a\,, b \text{ in } G\,,$$

since $b \cdot b\,(= b\,b)$ is the identity element of the group $< G\,, \odot >$.

One sees that

$$\begin{aligned} & b\,\{[(d\,d \cdot a)\,c]\,[(d\,d \cdot b)\,c]\} = \\ &= b \odot [(a^{-1} \odot c^{-1}) \odot (b^{-1} \odot c^{-1})^{-1}]^{-1} = \\ &= b \odot [(a^{-1} \odot c^{-1}) \odot (c \odot b)]^{-1} = \\ &= b \odot (a^{-1} \odot b)^{-1} = a\,, \end{aligned}$$

for all $a\,, b\,, c\,, d$ in G.

This means that the group axioms imply the single axiom above for one of the inverse operations of the operation of the group. On the other hand, we have proved that this axiom implies the group axioms.

Consequently, the single axiom above may be used in order to define a group.

BIBLIOGRAPHY

[1] Slater, Michael, *A single postulate for groups*, Amer. Math. Monthly, **68**, 346-347 (1961).

[2] Hall Jr., Marshall, *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.

[3] Morgado, José, *Nota sobre quasigrupos subtractivos*, Gaz. Mat. (Lisboa), **92-93**, 11-17 (1963).

[4] ———, *A single axiom for groups*, Amer. Math. Monthly, **72**, 981-982 (1965).

[5] Sholander, Marlow, *Postulates for commutative groups*, Amer. Math. Monthly, **66**, 93-95 (1959).

Outra demonstração de um teorema de A. H. Stone

por O. T. Alas
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Universidade de São Paulo, Brasil

O prof. Dr. Edison Farah (professor catedrático de Análise Superior da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo) nos propôs procurar uma demonstração do Teorema de A. H. Stone [1] que utilizasse o Teorema de Zorn ao invés da Indução Transfinita. Uma demonstração nestas condições teria importância didática. Daremos aqui um prova do referido teorema, usando o Teorema de Zorn e, procurando seguir, tanto quanto possível, a ordem de ideias da demonstração original [1].

Antes, porém, recordaremos algumas definições e introduziremos certas notações.

1 — Seja $(E, \mathfrak{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{U}$ um recobrimento aberto de E (1). Para todo subconjunto Y de E indicaremos por $(Y; \mathcal{U})$ o conjunto dos $X \dot{\in} \mathcal{U}$ tais que $X \cap Y \neq \phi$ e por $(Y; -\mathcal{U})$ o conjunto dos $x \in Y$ tais que $(\{x\}; \mathcal{U}) \subset Y$.

No caso de trabalharmos com uma sequência, $(\mathcal{U}_n)$, de recobrimentos abertos, simplificaremos a notação pondo, para todo $Y \subset E$ e para todo $n \geq 1$,

$$(Y; \mathcal{U}_n) = (Y; n) \quad \text{e} \quad (Y; -\mathcal{U}_n) = (Y; -n).$$

(1) Sendo $(E, \mathfrak{T})$ um espaço topológico, dizemos que $\mathcal{U}$ é um recobrimento aberto de E se $\mathcal{U}$ é uma família de conjuntos abertos cuja reunião é E. Indicaremos por $X \dot{\in} \mathcal{U}$ o fato de ser X um têrmo da família $\mathcal{U}$.

2 — Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ dois recobrimentos abertos de um espaço topológico $(E, \mathfrak{T})$. Dizemos que $\mathcal{W}$ é um Δ-refinamento de $\mathcal{U}$ se para todo $x \in E$, existe $U \dot{\in} \mathcal{U}$, verificando

$$(\{x\}; \mathcal{W}) \subset U.$$

3 — Um espaço topológico se diz totalmente normal («fully normal») se todo seu recobrimento aberto admite um Δ-refinamento aberto que recobre o espaço.

4 — Um espaço topológico $(E, \mathfrak{T})$ é paracompacto se para todo recobrimento aberto de E, existe um recobrimento aberto de E, que o refina e é localmente finito.

Nota — Se num espaço topológico $(E, \mathfrak{T})$, totalmente normal, para um recobrimento aberto $\mathcal{U}$ de E, existe $\mathcal{W}$, recobrimento localmente finito de E (não necessàriamente aberto) que o refina, então existe um recobrimento aberto de E, localmente finito, que refina $\mathcal{U}$.

Pôsto isto, passaremos à demonstração do

Teorema de Stone. *Todo espaço topológico totalmente normal é paracompacto.*

Demonstração. Seja $(E, \mathfrak{T})$ um espaço topológico totalmente normal e seja $(W_i)_{i \in I}$ um recobrimento aberto de E; tomemos uma sequência $(\mathcal{U}_n)$ de recobrimentos abertos de E tal que

1) $\mathcal{U}_1$ é Δ-refinamento de $(W_i)_{i\in I}$;
2) $\mathcal{U}_{n+1}$ é Δ-refinamento de $\mathcal{U}_n$, $\forall n \geq 1$.

Para cada $i \in I$, ponhamos

$$V_i^1 = (W_i; -1), \quad V_i^n = (V_i^{n-1}; n), \quad \forall n \geq 2$$

e

$$V_i = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} V_i^\nu .$$

Ora, $\bigcup_{i\in I} V_i^1 = E$ e se $x \in V_i$, então $x \in V_i^m$ (para um m conveniente) e $(\{x\}; m) \subset V_i$.

Indiquemos por $\mathcal{C}$ a classe das famílias *abertas* (H_{ni}) (1) tais que, sendo,

$$J_H = \{i \in I \mid (\exists\, n \geq 1)(H_{ni} \neq V_i)\},$$

verificam

1) $(H_{ni}; n+1) \subset V_i$, $\forall n \geq 1$, $\forall i \in J_H$;
2) $\bigcup_{i\in J_H} V_i = \bigcup_{\substack{n\geq 1\\ i\in J_H}} H_{ni}$;
3) $\forall n \geq 1$, $\forall U_{n+3} \in \mathcal{U}_{n+3}$, U_{n+3} encontra, no máximo, um conjunto H_{ni} com $i \in J_H$.

Em particular, as famílias de $\mathcal{C}$ são recobrimentos abertos de E. $\mathcal{C}$ é não vazia (pois $E \neq \phi$). Ordenemos $\mathcal{C}$ do seguinte modo, sendo (H_{ni}) e (H'_{ni}) pertencentes a $\mathcal{C}$,

$$(H_{ni}) \leq (H'_{ni}) \Longleftrightarrow J_H \subset J_{H'}$$

e

$$H'_{ni} = H_{ni}, \ \forall n \geq 1, \ \forall i \in J_H .$$

---

(1) Para simplificar a notação, uma família genérica

$$(T_{(n,i)})_{(n,i)\in N\times I}$$

será indicada por (T_{ni}).

É fácil verificar que $(\mathcal{C}, \leq)$ é indutivo.

Pelo Teorema de Zorn, $\mathcal{C}$ admite um elemento maximal que denotaremos por (H^*_{ni}). Mostremos que $\bigcup_{i\in J_{H^*}} V_i = E$. Caso isso não fôsse verdade, existiria $x \in E$, pertencente a um certo V_j, com $j \notin J_{H^*}$.

Ponhamos, então,

$$H'_{ni} = H^*_{ni}, \ \forall n \geq 1, \ \forall i \in J_{H^*},$$

$$H'_{nj} = (((V_j; -n) - \bigcup_{i\in J_{H^*}} V_i); n+3), \ \forall n \geq 1 \ (1)$$

$$H'_{nk} = V_k, \ \forall n \geq 1, \ \forall k \in I - (J_{H^*} \cup \{j\}).$$

A família (H'_{ni}), assim construída, pertence a $\mathcal{C}$ e é estritamente maior do que (H^*_{ni}), o que é absurdo.

Finalmente, vamos construir a partir do elemento maximal (H^*_{ni}) um recobrimento localmente finito de E, o que, levando-se em consideração a nota, termina a demonstração.

Para todo $(n, i) \in N \times J_{H^*}$ pomos

$$G_{ni} = H^*_{ni} - \bigcup_{\substack{1\leq m\leq n-1\\ j\in J_{H^*}}} H^*_{mj} .$$

A família (G_{ni}) assim construída é um recobrimento localmente finito de E.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. H. Stone, *Paracompactness and Product Spaces,* Bulletin of the American Mathematical Society, Outubro de 1948.

[2] Edison Farah, *Teoria dos conjuntos,* São Paulo, 1961.

[3] William J. Pervin, *Foundations of General Topology,* Academic Press, New York, 1964.

---

(1) Se $H'_{1j} = V_j$, então, tomamos

$$H'_{nj} = \phi, \ \forall n \geq 2 .$$

Sobre Medidas de Probabilidade Geradas por Fracções Contínuas Regulares

por J. Marques Henriques

Lisboa

1. Introdução

É um facto bem conhecido que qualquer número irracional admite um desenvolvimento *único* em fracção contínua regular. Se o número em questão é o resultado de uma experiência aleatória efectuada sobre os números de um intervalo de medida unitária, então os seus termos podem considerar-se como variáveis aleatórias susceptíveis de gerarem medidas de probabilidade. No decorrer deste trabalho apresentamos algumas propriedades notáveis destas medidas de probabilidade.

Seja então Ω o conjunto dos números *irracionais* do intervalo $(0,1)$, $\mathfrak{A} := \Omega \cap \mathfrak{B}^1$ a σ-álgebra dos sub-conjuntos borelianos de Ω, e λ a clássica medida de Lebesgue. Deste modo, $(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda)$ é um espaço de probabilidade completo. Consideremos ω como sendo o ponto genérico de Ω. Então, o desenvolvimento de ω em fracção contínua regular será designado do seguinte modo (compare-se, e. g. com [6], [7], ou [14]):

$$(1.1) \qquad \omega = [0;\ a_1(\omega),\ a_2(\omega), \cdots].$$

Os *termos* da fracção contínua são funções de ω, e por isso os designamos por $a_i(\omega)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$.

Como $\omega \in \Omega$, então necessàriamente que $a_0(\omega) = 0$.

Além disso, $a_i(\omega)$ $(i \geqslant 1)$ é sempre um inteiro positivo.

Não é completamente evidente o facto de as funções $a_i(\omega)$ serem variáveis aleatórias definidas sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda)$, mas tal facto será justificado mais adiante.

Em todo este artigo utilizaremos as notações clássicas usadas na teoria das fracções contínuas, de que fazemos aqui apenas um breve resumo.

A *reduzida* (ou *convergente*) de ordem n de ω é o número (racional)

$$(1.2) \qquad \frac{A_n(\omega)}{B_n(\omega)} = [0;\ a_1(\omega), \cdots, a_n(\omega)],$$

cujas *constituintes* $A_n(\omega)$ e $B_n(\omega)$ se podem calcular pelo processo iterativo seguinte:

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} A_{n+1}(\omega) &= a_{n+1}(\omega) \cdot A_n(\omega) + A_{n-1}(\omega) \\ B_{n+1}(\omega) &= a_{n+1}(\omega) \cdot B_n(\omega) + B_{n-1}(\omega) \end{aligned} \qquad (n \geqslant 0)$$

onde se estabelece a convenção:

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} A_{-1} &:= 1, & A_0 &:= 0 \\ B_{-1} &:= 0, & B_0 &:= 1. \end{aligned}$$

A *relação modular* seguinte (veja-se, e. g. [6], [7], ou [14]) será utilizada mais abaixo:

$$(1.5) \qquad A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \quad (n \geqslant 0).$$

(Sempre que não seja necessário, omitiremos os argumentos). De grande importância é a seguinte

DEF. (KHINCHIN [7, pág. 56]). *Intervalo fundamental de ordem* n, é o conjunto

$$(1.6)\qquad \Delta^{(n)}_{k_1,\ldots,k_n} := \\ = \{\omega : a_i(\omega) = k_i\,;\ \ i = 1,\cdots,n\},$$

onde os k_i's são todos inteiros positivos, ou seja, $k_i = 1, 2, \cdots$.

Nota: De facto, $\Delta^{(n)} \subset \Omega$, de modo que a designação de *intervalo* é utilizada aqui apenas por razões de consistência com a terminologia usada quando se admitem também os números racionais no conjunto fundamental Ω.

Se puzermos $A_n/B_n := [0\,;\, k_1,\cdots,k_n]$, então é um facto conhecido que

$$(1.7)\qquad \Delta^{(n)}_{k_1,\ldots,k_n} = \begin{cases} \left(\dfrac{A_n}{B_n}, \dfrac{A_n + A_{n-1}}{B_n + B_{n-1}}\right) \cap \Omega, & \text{se } n = 2\nu \\[2ex] \left(\dfrac{A_n + A_{n-1}}{B_n + B_{n-1}}, \dfrac{A_n}{B_n}\right) \cap \Omega, & \text{se } n = 2\nu + 1. \end{cases}$$

Nota: A_n/B_n é um número racional, quaisquer que sejam os k_i's (inteiros positivos), de modo que $\Delta^{(n)}$ pode considerar-se de facto como um intervalo aberto, na topologia induzida por Ω nos sub-conjuntos de $(0, 1)$.

Um aspecto importante que salientamos aqui, e que se prova fàcilmente, é que os intervalos fundamentais de todas as ordens geram a σ-álgebra $\mathfrak{A}$.

DEF. Chamaremos *rede* (de $(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda)$) a toda a sucessão $\{\mathfrak{N}_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ de sub-classes de $\mathfrak{A}$, tal que:

(*i*) os conjuntos de $\mathfrak{N}_n$ são disjuntos dois a dois e $\bigcup \mathfrak{N}_n = \Omega$;

(*ii*) se $A \in \mathfrak{N}_n$, então $\lambda(A) > 0$;

(*iii*) se $A \in \mathfrak{N}_n$, então é

$$A = \bigcup \{B : B \in \mathfrak{N}_{n+1} \text{ e } B \subset A\}.$$

Uma consequência imediata é o seguinte

TEOREMA 1. *A sucessão das classes*

$$\mathfrak{N}_n = \{\Delta^{(n)}_{k_1,\ldots,k_n}\,;\ k_i = 1, 2, \cdots\}\ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

é uma rede.

DEM. (*ii*) é de verificação imediata, atendendo às relações (1.5) e (1.7). De facto, tem-se

$$(1.8)\qquad \lambda(\Delta^{(n)}_{k_1,\ldots,k_n}) = \frac{1}{B_n(B_n + B_{n-1})} > 0,$$

qualquer que seja $n = 1, 2, \cdots$.

(*i*) e (*iii*) são uma consequência directa de (1.6), pois que fixados $k_1, \cdots, k_n$ se tem

$$(1.9)\qquad \Delta^{(n)}_{k_1,\ldots,k_n} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta^{(n+1)}_{k_1,\ldots,k_n,\nu}$$

com uma união disjunta de intervalos fundamentais de ordem $n+1$ (RICHTER [12]). Q. E. D.

As medidas de probabilidade geradas por $a_i(\omega) = k_i$, $i = 1, \cdots, n$ (consideradas sobre o espaço mensurável $(\Omega, \mathfrak{A})$) são definidas sobre os intervalos fundamentais de ordem n, por relações do tipo:

$$(1.10)\qquad P(\Delta^{(n)}_{k_1,\ldots,k_n}) =: p(k_1, \cdots, k_n).$$

Compare-se com BILLINGSLEY [3, (3.12)].

E agora é evidente que as funções $a_n(\omega)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ são variáveis aleatórias relativamente aos dois espaços de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda)$ e $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, i. e. são $\mathfrak{A}$-mensuráveis (e portanto também P- e λ-mensuráveis), uma vez que são funções simples definidas em Ω, ou seja, para $\omega \in \Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n}$ tem-se

$$(1.11) \qquad a_n(\omega) = k_n .$$

2. Uma condição necessária e suficiente para que P seja singular

Nesta secção demonstraremos o seguinte

TEOREMA 2. $\mathrm{P} \perp \lambda \Longleftrightarrow$

$$(2.1) \qquad \lambda\left(\omega : \lim_{n \to \infty} \mathrm{B}_n^2(\omega) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{a}_1(\omega), \cdots \cdots, \mathrm{a}_n(\omega)) = 0\right) = 1 .$$

Nota: Usamos a notação $P \perp \lambda$ para denotar que P é uma medida *singular* relativamente à medida de LEBESGUE, i. e. admite um *suporte* (conjunto $A \in \mathfrak{A}$, tal que $P(A) = 1$), disjunto de algum suporte de λ.

DEM. Fixemos n. Então a função

$$(2.2) \qquad x_n(\omega) := \sum_{\Delta^{(n)} \in \mathfrak{N}_n} I_{\Delta^{(n)}} \frac{P(\Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n})}{\lambda(\Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n})},$$

é definida para todos os $\omega \in \Omega$; mais concretamente, para $\omega \in \Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n}$, é:

$$(2.3) \qquad x_n(\omega) = P(\Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n}) / \lambda(\Delta^{(n)}_{k_1, \ldots, k_n}) = B_n(\omega) \cdot [B_n(\omega) + B_{n-1}(\omega)] \cdot p(a_1(\omega), \cdots a_n(\omega)),$$

onde usamos as relações (1.8), (1.10) e (1.11). Ora, como em virtude do Teorema 1, $\{\mathfrak{N}_n\}$ é uma rede, logo se conclui que (cf. DOOB [4, pg. 612 e 343] e HEWITT and STROMBERG [5, pg. 343]):

(*i*) $\lim_{n \to \infty} x_n(\omega) =: x_\infty(\omega)$ existe p. p.; e,

(*ii*) $P \perp \lambda \Longleftrightarrow x_\infty(\omega) = 0 [\lambda]$,

uma vez que, por definição, $x_\infty(\omega)$ é a derivada de P em ordem a λ, relativamente à rede $\{\mathfrak{N}_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Ora, como (1.3) implica

$$0 < B_{n-1}(\omega) < B_n(\omega),$$

segue-se que

$$B_n^2(\omega) \cdot p(a_1(\omega), \cdots, a_n(\omega)) < x_n(\omega) < 2 B_n^2(\omega) \cdot p(a_1(\omega), \cdots, a_n(\omega))$$

e por isso (*i*) e (*ii*) acarretam a veracidade do TEOREMA. Q. E. D.

Nota: Uma outra demonstração deste TEOREMA usa a propriedade da sucessão (2.2) ser uma *martingala* (cf. DOOB [4, Cap. VII]). De facto,

$$E(x_n \mid x_1, \cdots, x_{n-1}) = E(x_n \mid a_1, \cdots, a_{n-1}) = x_{n-1} [\lambda],$$

onde $E(.|.)$ designa o valor esperado da primeira variável aleatória, condicionado pelas seguintes, tomado relativamente a P.

3. A singularidade de P, no caso das variáveis aleatórias $a_i(\omega)$ serem independentes

Consideremos agora o caso seguinte:

$$(3.1) \qquad p(k_1, \cdots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(k_i),$$

onde $p_i(k) > 0$ e $\sum_{k=1}^{\infty} p_i(k) = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots)$.

Isto é, por definição, o que sucede quando as variáveis aleatórias $a_i(\omega)$ são independentes (relativamente a P), ou seja,

$$(3.2) \quad P(\omega : a_i(\omega) = k_{i'} \ \& \ a_j(\omega) = k_{j'}) = \\ = P(\omega : a_i(\omega) = k_{i'}) \cdot P(\omega : a_j(\omega) = k_{j'}),$$

para todos os $i \neq j$. Para simplificar a notação escreveremos:

$$(3.3) \qquad p_i(k) := P(\omega : a_i(\omega) = k),$$

onde, evidentemente, $i \geq 1$ e $k = 1, 2, \cdots$.

Em primeiro lugar provaremos o seguinte

Lema. $a_i(\omega)$'s *independentes* $\Rightarrow$ *a medida de probabilidade* P *é:*

α) *puramente atómica; ou,*

β) *não-atómica e singular; ou,*

γ) *absolutamente contínua.*

Dem. A demonstração deste Lema envolve algumas dificuldades. Por isso, após algumas extensões da teoria desenvolvida, provaremos sucessivamente:

1.º Que, em certas condições, P satisfaz α);

2.º Que se P não satisfaz nem α) nem γ), então satisfaz β);

3.º O caso γ) não será demonstrado ($P \ll \lambda$ é, até mesmo, impossível, como se verá pelo Teorema 3), uma vez que se P não satisfizesse nem α), nem β), então necessàriamente (aplicando o clássico teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym) teria de satisfazer γ).

I. Dada a probabilidade P, suponhamos que $P(A) > 0$ para um certo $A \in \mathfrak{A}$ (um tal conjunto existe sempre, pois que $P(\Omega) = 1$). Associemos a A o conjunto A^* dos irracionais *equivalentes* (cf. Vicente Gonçalves [14, pg. 129] ou Hardy and Wright [6, (10. 11)]), aos irracionais de A, i. e.

$$(3.4) \qquad A^* := \{\omega : \exists\, n_0 = n_0(\omega) \text{ e } \\ \omega_0 \in A \ni a_i(\omega) = a_i(\omega_0), \ i > n_0\}.$$

Se introduzirmos o *resto de ordem n* de ω,

$$(3.5) \qquad r_n(\omega) := [a_n(\omega); a_{n+1}(\omega), \cdots]$$

é

$$A^* = \{\omega : r_{n_0}(\omega) = r_{n_0}(\omega_0), \omega_0 \in A\}.$$

Nota: $r_n(\omega)$ é, para cada ω, um número irracional do intervalo $(1, \infty)$. De facto, $a_n(\omega) \geq 1$, e $[0; a_{n+1}(\omega), \cdots] \in \Omega)$.

É claro que $A \subset A^*$ e como A^* é *o conjunto dos pontos* ω *para os quais a sucessão de variáveis aleatórias independentes* $a_1(\omega)$, $a_2(\omega), \cdots$ *é convergente,* usando a lei de Kolmogorov (cf. Richter [12]), logo se conclui que $P(A^*) = 0$ ou $P(A^*) = 1$; mas como $P(A) > 0$ é então, necessàriamente,

$$(3.6) \qquad P(A^*) = 1.$$

Por outro lado (cf. Hardy and Wright [6]), $\omega \in A^* \Leftrightarrow$ para algum $\omega_0 \in A$ se encontram inteiros positivos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tais que $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ e $\omega = (\alpha\omega_0 + \beta)/(\gamma\omega_0 + \delta)$.

Se definirmos (*sempre* com $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$)

$$(3.7) \quad A_{\alpha\beta\gamma\delta} := \{\omega : \omega = (\alpha\omega_0 + \beta)/ \\ /(\gamma\omega_0 + \delta), \omega_0 \in A\},$$

então fàcilmente se vê que

$$(3.8) \qquad A^* = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} A_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

onde os conjuntos $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ constituem as diferentes classes de equivalência.

II. Passemos agora à demonstração do Lema pròpriamente dito:

1.º Suponhamos que o conjunto A, considerado em I é numerável. Então, evidentemente que os $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ são também todos numeráveis e por consequência A^* é numerável. Então P é medida puramente atómica, pois que

$$(3.9)\quad P(A^*) = 1 \Rightarrow P(\Omega - A^*) = 0,$$

com A^* numerável, e α) está demonstrada.

2.º Suponhamos agora que P não satisfaz α) (i. e., em virtude de 1.º, que A não é numerável). Suponhamos ainda que P não é absolutamente contínua. Então, para um certo $A \in \mathfrak{A}$ será $P(A) > 0$ com $\lambda(A) = 0$, e portanto $P(A^*) = 1$, tal como em I. Mas $\lambda(A) = 0$ implica $\lambda(A_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0$ para todos os $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ satisfazendo a condição $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, uma vez que a medida de LEBESGUE é invariante relativamente a transformações lineares. E por conseguinte, (3. 8) implica

$$(3.10)\qquad \lambda(A^*) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \lambda(A_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0.$$

O teorema de LEBESGUE-RADON-NIKODYM aplicado a P implica então que P é medida não-atómica (se A fosse um átomo de $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ então necessàriamente A seria um destes conjuntos, acarretando uma contradição, pois A teria de ser ou numerável, ou conjunto de continuidade de P), demonstrando β).

3.º Evidentemente que se P não satisfaz α) nem β), então necessàriamente tem de ser tal que $P \ll \lambda$, pois $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ é òbviamente um espaço de probabilidade regular (cf. HEWITT and STROMBERG [5, (12. 39)]), relativamente à topologia induzida por Ω. Q. E. D.

E posto isto passamos finalmente ao

TEOREMA 3. (CHATTERJI). $\mathrm{a}_i(\omega)$*'s independentes* $\Rightarrow$

a) $\mathrm{P} \perp \lambda$;

b) *a medida de probabilidade* P *é*:

   α) *puramente atómica; ou*

   β) *não-atómica.*

DEM.: Atendendo ao Lema, basta provar a impossibilidade de $P \ll \lambda$, pois que tanto nos casos 1.º como 2.º (cf. (3. 9) e (3. 10) resp.) do Lema se encontraram sempre suportes A^* para P, com $\lambda(A^*) = 0$, provando a).

A demonstração vai fazer-se por redução ao absurdo, admitindo que de facto se pode ter $P \ll \lambda$.

Recapitulemos aqui o seguinte TEOREMA, devido a GAUSS (veja-se e. g. BILLINGSLEY [3, (4. 11)] ou KHINCHIN [7, pg. 72]):

Com $\omega \in \Omega$, *tem-se* $(0 < x < 1)$:

$$(3.11)\qquad \lim_{n\to\infty} \lambda(\omega : r_n(\omega)^{-1} < x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

Este teorema, formulado por GAUSS pela primeira vez em 1812, numa carta dirigida a LAPLACE (reproduzida no livro de J. V. USPENSKI (1937), *Introduction to Mathematical Probability,* New York: MC-GRAW-HILL), só foi demonstrado em 1928 por R. O. KUZMIN e, independentemente, em 1929 por P. LÉVY, a quem se deve uma generalização que iremos utilizar abaixo.

Ora, do teorema de GAUSS conclui-se que:

$$(3.12)\qquad \lim_{n\to\infty} \lambda(\omega : r^n(\omega) < t) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \lambda(\omega : r^n(\omega)^{-1} < t^{-1}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\log 2}\log\left(1 + \frac{1}{t}\right) =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\log\frac{2t}{1+t}\,.$$

Até aqui nada concluimos de novo. O facto que aqui utilizamos é o seguinte

TEOREMA DE LÈVY. *Se* $P << \lambda$, *então* (3. 12) *é válida com* P *em lugar de* λ.

Este teorema foi demonstrado pela primeira vez em 1937 ([10]), utilizando complicados métodos analíticos. No entanto, existem actualmente outras demonstrações mais simples, em especial as que utilizam o teorema ergódico, de que não nos ocuparemos aqui.

Então, voltando à demonstração do TEOREMA 3, se fosse $P << \lambda$, utilizando (3. 12) com P em vez de λ, temos o seguinte resultado:

$$(3.13)\qquad \lim_{n\to\infty} P(\omega : a_n(\omega) = k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\omega : k < r_n(\omega) < k+1) =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\left[\log\frac{2(k+1)}{k+2} - \log\frac{2k}{k+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\log\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\,.$$

(Compare-se com BILLINGSLEY [3, pg. 45]). Por outro lado é

$$(3.14)\qquad \lim_{n\to\infty} P(\omega : a_n(\omega) = k_1 \;\&\; a_{n+1}(\omega) = k_2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\omega : k_1 + \frac{1}{k_2+1} < r_n(\omega) < k_1 + \frac{1}{k_2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\omega : \frac{k_1(k_2+1)+1}{k_2+1} < r_n(\omega) < \frac{k_1k_2+1}{k_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\left[\log\frac{2\,\frac{k_1k_2+1}{k_2}}{\frac{k_1k_2+1}{k_2}+1} - \log\frac{2\,\frac{k_1(k_2+1)+1}{k_2+1}}{\frac{k_1(k_2+1)+1}{k_2+1}+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\log\left[\frac{k_1k_2+1}{k_2(k_1+1)+1}\cdot\frac{(k_2+1)(k_1+1)+1}{k_1(k_2+1)+1}\right].$$

E da independência das variáveis aleatórias $a_i(\omega)$, usando (3. 2) e passando aos limites para $n \to \infty$, de (3. 13) e (3. 14) deverá vir

$$\prod_{i=1}^{2}\left[\frac{1}{\log 2}\log\frac{(k_i+1)^2}{k_i(k_i+2)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\log\left[\frac{k_1k_2+1}{k_2(k_1+1)+1}\cdot\frac{(k_2+1)(k_1+1)+1}{k_1(k_2+1)+1}\right].$$

Ora, esta igualdade é falsa. Punhamos, e. g. $k_1 = k_2 = 1$; viria

$$\left[\frac{1}{\log 2}\log\frac{4}{3}\right]^2 = \frac{1}{\log 2}\log\frac{10}{9}\,,$$

o que é uma contradição relativamente à hipótese de que $P << \lambda$. Q. E. D.

4. Aplicações.

O Teorema 3 é devido a Chatterji [2], cuja demonstração seguimos de perto, excepto no que respeita a uma condição necessária e suficiente de atomicidade de P, inicialmente devida a Van Kampen. Aquele Autor aplica o Teorema para demonstrar a singularidade da função de Minkowski, já antes provada por Kinney [9]. Um outro aspecto da teoria refere-se à dimensão de Hausdorff (generalizada por Billigsley; veja-se e. g. [3] e a bibliografia aí citada) dos suportes de P. De grande interesse neste domínio são os trabalhos recentes de Chatterji [1], Kinney and Pitcher [8] e Roos [13], tratando estes últimos várias questões que se prendem de perto com o expôsto aqui. O estudo de certas questões relativas à teoria das fracções contínuas usando métodos probabilísticos é apenas um exemplo das múltiplas aplicações da Teoria das Probabilidades à Análise Matemática e à Teoria dos Números.

Nota: Já depois deste trabalho ter sido submetido para publicação deparou-se-nos uma demonstração extremamente elegante da propriedade relativa às *martingalas*, a que nos referimos na *Nota* a seguir à demonstração do Teorema 2, no livro de Paul A. Meyer, *Probability and Potentials*, Blaisdell Publishing Co., Waltham, Massachusets (1966).

Para uma bibliografia mais extensa relativa às aplicações de métodos probabilísticos e das fracções contínuas à Análise, à Teoria dos Números Reais e à Teoria do Potêncial, consulte-se também: J. Marques Henriques, *Hausdorff-Besicovitch Dimension For Probability Product Spaces*, Master's Paper, Department of Statistics, The University of Chicago, Chicago, Illinois (1967).

BIBLIOGRAFIA

[1] Chatterji, S. D., *Certain induced measures and the fractional dimensions of their «supports»*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **3** 184-92, (1964).

[2] ———, *Masse, die von regelmässigen Kettenbrüchen induziert sind*, Math. Ann. **164** 113-7, (1966).

[3] Billingsley, P., *Ergodic Theory and Information*, John Wiley and Sons, New York, (1965).

[4] Doob, J. L., *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons, New York, (1953).

[5] Ewitt, E. and Stromberg, K., *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, (1965).

[6] Hardy, G. H. and Wright, E. M., *An Introduction to the Teory of Numbers*, 4th edition, Oxford University Press, London, (1959).

[7] Khinchin, A. Ya, *Continued Fractions*, 3rd edition. The University of Chicago Press, Chicago, (1964).

[8] Kinney, J. R. and Pitcher, T. S., *The dimension of some sets defined in terms of f-expansions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, **4** 294-315 (1966).

[9] Kinney, J. R., *Note on a singular function of Minkowski*, Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 788-94, (1960).

[10] Lévi, P., *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*. Gauthier-Villars, Paris, (1937).

[11] Perron, O., *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, **1**, 3. Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, (1954).

[12] Richter, H., *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, (1966).

[13] Roos, P. *Iterierte Resttransformationen von Zahldarstellungen*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, **4** 45-63, (1965).

[14] Vicente Gonçalves, J., *Curso de Álgebra Superior*, **1**, 3.ª edição, Lisboa, (1953).

Note sur un Lemme de Kronecker

par Luc M. Venet
Paris

Nous nous proposons d'étendre au cas continu une proposition attribuée à KRONECKER dont l'énoncé est le suivant:

PROPOSITION. Si $\{U_n, n \geqslant 1\}$ est une suite non-décroissante de réels positifs tendant vers $+\infty$, et si la suite de nombres réels $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ est telle que la limite $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \sum\limits_1^n U_m^{-1} Y_m$ existe et est *finie* alors:

$\lim\limits_{n\uparrow\infty} U_n^{-1} \sum\limits_1^n Y_m = 0$.

Dans le cas continu la proposition devient:

PROPOSITION. Si $g(x)$ est une fonction reelle non-décroissante, positive tendant vers $+\infty$ (et ne s'annulant en aucun point) et si la fonction reelle $f(x)$ est telle que la limite: $\lim\limits_{X\uparrow\infty} \int^X \frac{f(x)}{g(x)} dx$ existe et est *finie*.

Alors si $g'(x) = \frac{dg}{dx}$ existe et est continue

$$\lim_{X\uparrow\infty} \frac{1}{g(X)} \int_0^X f(x)\, dx = 0 .$$

DÉMONSTRATION. La proposition n'est pas absolument triviale car les inégalités classiques sur les intégrales n'aboutissent pas.

Notons d'abord que puisque $g'(x)$ existe et que $g(x)$ est non-décroissante, nous avons $g'(x) \geqslant 0$.

Le premier pas consiste à exprimer $\int_0^X f(x)\, dx$ d'une manière qui permette d'exploiter les hypothèses.

D'une manière évidente on a: $\int_0^X f(x)\, dx = \int_0^X \frac{f(x)}{g(x)} g(x)\, dx$.

Maintenant posant: $\frac{f(x)}{g(x)} dx = du$; $g(x) = v$; et en intégrant par parties:

$$\int_0^X f(x)\, dx = \left[g(x) \int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right]_0^X - \int_0^X g'(x) \left(\int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx = g(X) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt - \int_0^X g'(x) \left(\int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx .$$

Ajoutant et retranchant la quantité $g(0) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt$ nous obtenons:

$$\int_0^X f(x)\, dx = (g(X) - g(0)) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt - \int_0^X g'(x) \left(\int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx + g(0) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt = \int_0^X g'(x)\, dx \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt + \int_0^X g'(x) \left(\int_x^0 \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx + g(0) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt =$$

$$=\int_0^X g'(x)\left(\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)}dt\right)dx+$$
$$+g(0)\int_0^X \frac{f(t)}{g(t)}dt,$$

d'où (puisque g et g' sont positifs)

$$\left|\frac{1}{g(X)}\int_0^X f(x)\,dx\right|<$$
$$<\frac{1}{g(X)}\left|\int_0^X g'(x)\left(\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)}dt\right)dx\right|+$$
$$+\frac{g(0)}{g(X)}\left|\int_0^X \frac{f(t)}{g(t)}dt\right|.$$

Appelant $I(X)$ et $J(X)$ les deux parties du membre de droite et posant:

$$\operatorname*{Lim}_{X\uparrow\infty}\int_0^X \frac{f(x)}{g(x)}dx=M,$$

nous observons que:

$$\operatorname*{Lim}_{X\uparrow\infty}|J(X)|=\frac{g(0)}{g(\infty)}|M|=0;$$

maintenant séparant le domaine d'intégration de $I(X)$ en deux parties au point X_0 nous obtenons:

$$|I(X)|\leq\frac{1}{g(X)}\int_0^X g'(x)\left|\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)}dt\right|dx=$$
$$=\frac{1}{g(X)}\int_0^{X_0} g'(x)\left|\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)}dt\right|dx+$$
$$+\frac{1}{g(X)}\int_{X_0}^X g'(x)\left|\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)}dt\right|dx.$$

Le problème revient donc à montrer que les deux expressions du membre de droite tendent séparément vers 0 lorsque X tend vers $+\infty$.

Or pour tout X_0 l'intégrale

$$\int_0^{X_0} g'(x)\left|\int_x^\infty \frac{f(t)}{g(t)}dt\right|dx$$

existe et est finie car $\int_0^\infty \frac{f(t)}{g(t)}dt$ est finie.

Donc

$$\operatorname*{Lim}_{X\uparrow\infty}\frac{1}{g(X)}\int_0^{X_0} g'(x)\left|\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)}\right|dx=0;$$

D'autre part:

$$\int_{X_0}^X g'(x)\left|\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)}dt\right|dx\leq$$
$$\leq\operatorname*{Sup}_{\substack{x\\X_0\leq x\leq X}}\left|\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)}dt\right|\int_{X_0}^X g'(x)\,dx=$$
$$=\operatorname*{Sup}_{\substack{x\\X_0\leq x\leq X}}\left|\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)}dt\right|(g(X)-g(X_0)).$$

Maintenant divisant par $g(X)$ puis faisant tendre X vers $+\infty$ nous obtenons:

$$\operatorname*{Lim}_{X\uparrow\infty}\frac{1}{g(X)}\int_{X_0}^X g'(x)\left|\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)}\right|dx\leq$$
$$\leq\operatorname*{Sup}_{\substack{x\\X_0\leq x\leq\infty}}\left|\int_x^\infty \frac{f(t)}{g(t)}dt\right|\left(1-\frac{g(X_0)}{g(\infty)}\right)=$$
$$=\operatorname*{Sup}_{\substack{x\\X_0\leq x\leq\infty}}\left|\int_x^\infty \frac{f(t)}{g(t)}dt\right|.$$

Maintenant faisant tendre X_0 vers $+\infty$ nous obtenons:

$$\operatorname*{Lim}_{X_0\uparrow\infty}\operatorname*{Lim}_{X\uparrow\infty}\frac{1}{g(X)}\int_{X_0}^X g'(x)\left|\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)}\right|dx\leq$$
$$\leq\operatorname*{Lim}_{X_0\uparrow\infty}\operatorname*{Sup}_{\substack{x\\X_0\leq x\leq\infty}}\left|\int_x^\infty \frac{f(t)}{g(t)}dt\right|=0.$$

La dernière égalité étant déduite du fait que lorsque X_0 tend vers l'infini le domaine d'intégration devient de mesure nulle.

Nous avons donc démontré que les trois parties composants $\left|\frac{1}{g(X)}\int_0^X f(x)\,dx\right|$ tendent séparément vers 0 lorsque X tend vers $+\infty$ donc:

$$\operatorname*{Lim}_{X\uparrow\infty}\frac{1}{g(X)}\int_0^X f(x)\,dx=0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Introdução a um espaço complexo de fase

por F. Teixeira de Queiroz

Num artigo anterior, (G. M. n.º 96-97), mostrámos algumas propriedades dos operadores $\frac{D}{Dz}$ e $\frac{D}{D\bar{z}}$ que à função $f(z)$, definida nas vizinhanças do ponto z_0, faziam corresponder, sempre que os limites existiam, as funções que tomavam nesse ponto os valores

$$\frac{Df}{Dz}=\lim_{R\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$
$$\frac{Df}{D\bar{z}}=\lim_{R\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}dz$$

em que R era o raio do círculo Γ de centro z_0. Vimos em particular que para uma classe muito geral de funções (Funções de classe C_p) esse limite existia e, com $z=x+iy$ e $f(z)=X(x,y)+iY(x,y)$, era

$$\frac{Df}{Dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)$$
$$\frac{Df}{D\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Neste artigo aplicaremos duma forma sistemática esses dois operadores mostrando o seu interesse no estudo das variedades simpléticas.

I — O formalismo canónico.

Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ $2n$ variáveis conjugadas e $H(x_1, \cdots, y_n, t)$ uma função de HAMILTON que caracteriza um dado sistema mecânico. Como é sabido da mecânica analítica, a evolução do referido sistema é dada pelas $2n$ equações canónicas

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i}\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Associemos a todo o par de variáveis conjugadas x_j, y_j uma unidade imaginária i e formemos a variável complexa $z_j=x_j+iy_j$. Em tais condições o sistema de equações canónicas escrever-se-á

$$\frac{dz_j}{dt}=\frac{dx_j}{dt}+i\frac{dy_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_j}-i\frac{\partial H}{\partial x_j}$$

ou seja

$$(2)\qquad \frac{dz_j}{dt}=\frac{2}{i}\frac{DH}{D\bar{z}_i}$$

em que H é agora uma função real das variáveis complexas $z_1, \cdots, z_n$ e da variável real t.

Um outro sistema de equações canónicas é obtido de (2) por passagem às conjugadas:

$$(2')\qquad \frac{d\bar{z}_j}{dt}=-\frac{2}{i}\frac{DH}{Dz_j}.$$

Não o consideraremos distinto do anterior.

A partir dos sistemas de equações deduzidos vemos que

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{DH}{Dz_j}\,\frac{dz_j}{dt} + \\ &+ \sum \frac{DH}{D\bar{z}_j}\cdot\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned}$$

anulando-se o segundo membro sempre que H não dependa explicitamente de t.

Fazendo depender as n variáveis z_i de n novas variáveis u_i, passará H a ser função das novas variáveis e da variável t. É fácil determinar as condições para que o sistema de equações (2) continue a ser canónico. Seja $z_i = F_i(u_1, u_2, \cdots, u_n, t)$. Será então

$$\begin{aligned} \frac{dz_j}{dt} &= \frac{\partial z_j}{dt} + \sum \frac{Dz_j}{Du_k}\cdot\frac{du_k}{dt} + \\ &+ \sum \frac{Dz_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{D\bar{u}_k}{dt} = \frac{2}{i}\,\frac{DH}{D\bar{z}_j} \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}_j}{dt} &= \frac{\partial \bar{z}_j}{dt} + \sum \frac{D\bar{z}_j}{Du_k}\cdot\frac{du_k}{dt} + \\ &+ \sum \frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_k}\cdot\frac{d\bar{u}_k}{dt} = -\frac{2}{i}\,\frac{DH}{Dz_j}. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira destas equações por $\dfrac{D\bar{z}_j}{Du_r}$, e a segunda por $\dfrac{Dz_j}{Du_r}$ e subtraindo-as virá

$$\begin{aligned} &\sum_j \left(\frac{\partial z_j}{dt}\,\frac{D\bar{z}_j}{Du_r} - \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial t}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right) + \\ &+ \sum_j \left(\frac{Dz_j}{Du_k}\cdot\frac{D\bar{z}_j}{Du_r} - \frac{D\bar{z}_j}{Du_k}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right)\frac{du_k}{dt} + \\ &+ \sum_j \left(\frac{Dz_j}{D\bar{u}_k}\cdot\frac{D\bar{z}_j}{Du_r} - \frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right)\frac{d\bar{u}_k}{dt} = \\ &= \frac{2}{i}\,\frac{DH}{Du_r} \end{aligned}$$

o que conduz às condições

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\sum_j \left(\frac{\partial z_j}{\partial t}\,\frac{D\bar{z}_j}{Du_r} - \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial t}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right) = \\ &= -\frac{2}{i}\,\frac{D\varphi}{Du_r} \\ &\sum_j \left(\frac{Dz_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{D\bar{z}_j}{Du_r} - \frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right) = \\ &= -\,\delta_{\bar{k}r} \\ &\sum_j \left(\frac{Dz_j}{Du_k}\,\frac{D\bar{z}_j}{Du_r} - \frac{D\bar{z}_j}{Du_k}\,\frac{Dz_j}{Du_r}\right) = 0 \end{aligned}$$

que são equivalentes às deduzidas com colchetes de Lagrange, e onde φ é uma função real das variáveis u_i.

Por passagem às conjugadas deduziremos outras relações que serão equivalentes às anteriores. São elas

$$(4')\qquad \begin{aligned} &\sum_j \left(\frac{\partial \bar{z}_j}{\partial t}\,\frac{Dz_j}{D\bar{u}_k} - \frac{\partial z_j}{\partial t}\,\frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_k}\right) = \\ &= \frac{2}{i}\,\frac{D\varphi}{D\bar{u}_k} \\ &\sum_j \left(\frac{Dz_j}{Du_k}\,\frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_r} - \frac{D\bar{z}_j}{Du_k}\,\frac{Dz_j}{D\bar{u}_r}\right) = \delta_{k\bar{r}} \\ &\sum_j \left(\frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{Dz_j}{D\bar{u}_r} - \frac{Dz_j}{D\bar{u}_k}\,\frac{D\bar{z}_j}{D\bar{u}_r}\right) = 0. \end{aligned}$$

Duma forma análoga deduzem-se as igualdades que correspondem às obtidas com os parentesis de Poisson. Para isso basta tratarem-se os segundos membros de (2) e (2') duma forma análoga à que usamos com os primeiros membros na dedução das igualdades anteriores. Obtém-se como resultado final

(5)
$$\sum_j\left(\frac{D\varphi}{D\bar u_j}\frac{Dz_k}{Du_j}-\frac{D\varphi}{Du_j}\frac{Dz_k}{D\bar u_j}\right)+ \\ +\frac{\partial z_k}{\partial t}=0\,.$$
$$\sum_j\left(\frac{Dz_k}{D\bar u_j}\frac{Dz_r}{Du_j}-\frac{Dz_k}{Du_j}\frac{Dz_r}{D\bar u_j}\right)=0$$
$$\sum_j\left(\frac{D\bar z_k}{D\bar u_j}\frac{Dz_r}{Du_j}-\frac{D\bar z_k}{Du_j}\frac{Dz_r}{D\bar u_j}\right)=\delta_{\bar k r}$$

e três outras igualdades dadas por conjugação.

Por último a condição de Poincaré transcrever-se-á da seguinte forma:

É condição necessária e suficiente para que uma dada transformação seja canónica que exista uma função ψ tal que

$$(6)\quad D\psi=\bar z_j\,Dz_j-\bar u_j\,Du_j+\frac{2}{i}(\bar H-H)\,dt$$

em que $\bar H$ é o novo Hamiltoneano.

Para o verificarmos basta reparar que a condição necessária e suficiente para que exista uma função ψ tal que

$$D\psi=\sum_j(A_j\,D\bar z_j+B_j\,Dz_j)$$

é que

$$w_{\bar i\bar j}=\frac{DA_i}{D\bar z_j}-\frac{DA_j}{D\bar z_i}=0$$
$$w_{i\bar j}=\frac{DB_i}{D\bar z_j}-\frac{DA_j}{Dz_i}=0$$
$$w_{ij}=\frac{DB_i}{Dz_j}-\frac{DB_j}{Dz_i}=0\,.$$

No nosso caso poderemos dar a (6) a forma

(6')
$$D\varphi=\sum_j\left(\bar z_j-\sum_r\bar u_r\frac{Du_r}{Dz_j}\right)Dz_j-\sum_j\sum_r\bar u_r\cdot \\ \cdot\frac{Du_r}{D\bar z_j}D\bar z_j+\frac{2}{i}\left(\bar H-H-\bar u_r\frac{\partial u_r}{\partial t}\right)dt$$

e virá portanto

$$w_{jk}=\frac{D\bar z_j}{Dz_k}+\sum_r\left(-\frac{D\bar u_r}{Dz_k}\cdot\frac{Du_r}{Dz_j}-\right. \\ -\bar u_r\frac{D^2u_r}{Dz_j\,Dz_k}-\frac{D\bar z_k}{Dz_j}+\frac{D\bar u_r}{Dz_j}\frac{Du_r}{Dz_k}+ \\ \left.+\bar u_r\frac{D^2u_r}{Dz_k\,Dz_j}\right)= \\ =\sum_r\left(\frac{D\bar u_r}{Dz_j}\frac{Du_r}{Dz_k}-\frac{Du_r}{Dz_j}\frac{D\bar u_r}{Dz_k}\right)$$

$$w_{j\bar k}=\delta_{j\bar k}+\sum_r\left(-\frac{D\bar u_r}{D\bar z_k}\frac{Du_k}{Dz_j}+\right. \\ \left.+\frac{D\bar u_r}{Dz_j}\frac{Du_r}{D\bar z_k}\right)$$

$$w_{\bar j\bar k}=\sum_r\left(-\frac{D\bar u_r}{D\bar z_k}\frac{Du_k}{\partial\bar z_j}+\frac{D\bar u_r}{D\bar z_j}\frac{Du_r}{D\bar z_k}\right)$$

e, de (6)

$$\frac{d\bar z_i}{dt}+\frac{2}{i}\frac{\partial H}{\partial z_i}=0\qquad\frac{d\bar u_j}{dt}+\frac{2}{i}\frac{\partial H}{\partial u_j}=0\,.$$

Vê-se que o anulamento de $w_{ij}, w_{i\bar j}$, e $w_{\bar i\bar j}$ é verificado sempre que se verifiquem as condições (4) e (4'). Em tais condições as transformações que verificam (6) são canónicas.

A dedução do método de Jacobi para a integração das equações do movimento (2) não oferece dificuldade. Pelo que vimos anteriormente, o hamiltoneano num espaço complexo de configuração é obtido por meio da substituição $q_i=\dfrac{z_i+\bar z_i}{2}$ e $p_i=\dfrac{z_i-\bar z_i}{2i}$. A partir de H formemos a equação diferencial

$$(7)\qquad H\left(z_i,\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)=E$$

ou

$$(7') \qquad H\left(t, z_i, \frac{\partial S}{\partial z_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

conforme H dependa ou não de t e onde $\bar{z}_j$ é substituído por $\frac{\partial S}{\partial z_i}$. Se designarmos por $S(z_i, \alpha_i)$ ou $S(t, z_i, \alpha_i)$ o integral geral da equação, que será uma função holomorfa de z_i e de α_i, vemos de (7), que ele satisfaz às equações

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\frac{DH}{Dz_i} + \sum_j \frac{DH}{D\bar{z}_j} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial z_j} = 0 \\ &\sum_j \frac{DH}{D\bar{z}_j} \cdot \frac{\partial S}{\partial \alpha_i \partial z_j} = 0 \end{aligned}$$

ou, por (2), a

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\frac{2}{i} \frac{DH}{Dz_i} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial z_j \partial z_i} \frac{dz_i}{dt} = 0 \\ &\sum \frac{\partial^2 S}{\partial z_j \partial \alpha_i} \cdot \frac{dz_j}{dt} = 0 \end{aligned}$$

que mostram que

$$(10) \qquad \bar{z}_i = \frac{\partial S}{\partial z_i}$$

satisfaz às equações (2′) e em que α_i são constantes de integração. A demonstração no caso (7′) em que H depende explìcitamente de t não difere da anterior.

3) — O espaço Z_n.

Seja $\mathcal{V}_n$ um espaço vectorial sobre o corpo dos números complexos referido a uma base (e_i). Todo o vector de $\mathcal{V}_n$ é determinado por n números complexos $x^1, x^2, \cdots, x^n$. Evidentemente, o mesmo vector ficará igualmente determinado se em vez dos n valores x^i, conhecermos os seus conjugados $\bar{x^i}$.

Dada uma mudança de bases, as novas componentes dos vectores de $\mathcal{V}_n$ estão relacionadas com as antigas por uma transformação da forma

$$(1) \qquad x'^i = \sum_j \alpha^i_j x^j .$$

Por passagem à conjugada, vemos que a mesma transformação dá origem às transformações

$$(1') \qquad \bar{x}'^i = \sum_j \bar{\alpha}^i_j \bar{x}^j .$$

entre as conjugadas das componentes. Diremos que tanto os n números complexos x^i como os seus conjugados são componentes do mesmo vector, sendo as primeiras de primeira espécie e as segundas de segunda espécie. Representaremos as primeiras por x^i e as segundas por $x^{\bar{i}}$. As leis de transformação duma e de outras numa mudança de bases são dadas por (1) e (1′). Da definição dada verifica-se a identidade

$$(2) \qquad \bar{x}^i \equiv x^{\bar{i}} .$$

As transformações (1) e (1′) não constituem as transformações mais gerais que que conservam o conceito de componentes de primeira e de segunda espécie (ou seja a identidade (2)). Com efeito elas não são mais do que um caso particular das transformações do tipo

$$(3) \qquad \begin{aligned} x'^i &= \sum_j \alpha^i_j x^j + \sum_{\bar{j}} \alpha^i_{\bar{j}} x^{\bar{j}} \\ x'^{\bar{i}} &= \sum_j \alpha^{\bar{i}}_j x^j + \sum_{\bar{j}} \alpha^{\bar{i}}_{\bar{j}} x^{\bar{j}} \end{aligned}$$

com

$$(3') \qquad \bar{\alpha}^i_j = \alpha^{\bar{i}}_{\bar{j}} \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}^i_{\bar{j}} = \alpha^{\bar{i}}_j .$$

Esta última transformação depende de $2n$ parâmetros. Não pode ser identificado com uma mudança de bases do espaço $\mathcal{V}_n$ visto que sempre que algum $\alpha_{\bar{j}}^{i}$ seja diferente de zero, os novos vectores de base não dependem linearmente dos antigos. Apesar disso, as novas componentes $x'^{\bar{i}}$ ou x'^{i} determinam ainda unìvocamente os vectores de $\mathcal{V}_n$.

No formalismo que agora desenvolvemos vamos considerar a família de objectos (a que damos o nome de vectores) determinados por $2n$ números complexos, verificando a igualdade (2), sobre os quais definimos as operações adição de vectores e multiplicação por um escalar real por tal forma que aos vectores x^i, y^i corresponda, por adição o vector $x^i + y^i$ e ao vector x^i, corresponda por multiplicação pelo escalar real α, o vector αx^i e, além disso, que se transformam numa mudança de bases, segundo transformações (3).

Conservaremos para as transformações (3) (3') o nome de mudança de bases. Como o leitor fàcilmente vê, os conceitos dados de adição de vectores e multiplicação por escalar real são consistentes para uma tal família de transformações.

O conceito de vector pode ser generalizado pelo abandono da propriedade (2). Chamaremos tensores monovalentes aos objectos geométricos determinados por $2n$ complexos sobre os quais são definidas do modo usual a adição e multiplicação por um escalar complexo e que se transforma numa mudança de bases segundo (3).

A partir do conceito de tensor podemos formar o conceito de produto tensorial e o de tensor polivalente. Importa salientar que, no formalismo aqui desenvolvido, um tensor bivalente, além das componentes U_{ij} e $U_{\bar{i}\bar{j}}$, tem ainda as componentes $U_{\bar{i}j}$ e $U_{i\bar{j}}$. Diremos que um tensor bivalente tem quatro folhas de índices.

A partir da lei de transformação das componentes dum tensor monovalente numa mudança de bases podemos deduzir a lei de transformação dum tensor de valência qualquer. Assim, a lei de transformação dum tensor bivalente será

$$(4)\qquad \begin{aligned}
{}'U_{ij} &= \alpha_i^r \alpha_j^s U_{rs} + \alpha_i^{\bar{r}} \alpha_j^s U_{\bar{r}s} + \\
&+ \alpha_i^r \alpha_j^{\bar{s}} U_{r\bar{s}} + \alpha_i^{\bar{r}} \alpha_j^{\bar{s}} U_{\bar{r}\bar{s}} \\
{}'U_{\bar{i}j} &= \alpha_{\bar{i}}^r \alpha_j^s U_{rs} + \alpha_{\bar{i}}^{\bar{r}} \alpha_j^s U_{\bar{r}s} + \\
&+ \alpha_{\bar{i}}^r \alpha_j^{\bar{s}} U_{r\bar{s}} + \alpha_{\bar{i}}^{\bar{r}} \alpha_j^{\bar{s}} U_{\bar{r}\bar{s}} \\
{}'U_{i\bar{j}} &= \alpha_i^r \alpha_{\bar{j}}^s U_{rs} + \alpha_i^{\bar{r}} \alpha_{\bar{j}}^s U_{\bar{r}s} + \\
&+ \alpha_{\bar{i}}^r \alpha_{\bar{j}}^{\bar{s}} U_{r\bar{s}} + \alpha_i^{\bar{r}} \alpha_j^{\bar{s}} U_{\bar{r}\bar{s}} \\
{}'U_{\bar{i}\bar{j}} &= \alpha_{\bar{i}}^r \alpha_{\bar{j}}^s U_{rs} + \alpha_{\bar{i}}^{\bar{r}} \alpha_{\bar{j}}^s U_{\bar{r}s} + \\
&+ \alpha_{\bar{i}}^r \alpha_{\bar{j}}^{\bar{s}} U_{r\bar{s}} + \alpha_{\bar{i}}^{\bar{r}} \alpha_{\bar{j}}^{\bar{s}} U_{\bar{r}\bar{s}}
\end{aligned}$$

em que os coeficientes α_i^j, $\alpha_{\bar{i}}^j$, $\alpha_i^{\bar{j}}$ e $\alpha_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ verificam ainda a igualdade (3'). Em consequência um tensor que verifique as igualdades

$$(5)\qquad U_{ij} = \overline{U}_{\bar{i}\bar{j}} \quad \text{e} \quad U_{i\bar{j}} = \overline{U}_{\bar{i}j}$$

numa base verificá-las-á em todas as outras. O mesmo se pode dizer dum tensor que verifique em alguma base alguma das coleções de igualdades

$$(6)\qquad U_{ij} = U_{ji},\ U_{\bar{i}\bar{j}} = U_{\bar{j}\bar{i}},\ U_{\bar{i}j} = U_{j\bar{i}}$$

$$(7)\qquad U_{ij} = -\overline{U}_{\bar{i}\bar{j}},\ U_{\bar{i}j} = -\overline{U}_{i\bar{j}}$$

$$(8)\qquad U_{ij} = -U_{ji},\ U_{\bar{i}\bar{j}} = -U_{\bar{j}\bar{i}},\ U_{\bar{i}j} = -U_{j\bar{i}}$$

$$(9)\qquad U_{ij} = \overline{U}_{\bar{j}\bar{i}},\ U_{\bar{i}j} = \overline{U}_{\bar{j}i}.$$

Fica ao cuidado do leitor fazer a demonstração da consistência de tais igualdades.

As considerações de natureza algébrica que temos vindo a fazer ser-nos-ão úteis no estudo da variedade Z_n que passamos a fazer.

Em I, referimo-nos a um espaço geométrico em que cada ponto era definido por n números complexos. Vimos também a importância que tinha para nós uma função H, definida nesse espaço, e que aí tomava valores reais. Designemos então por $\mathcal{F}$ a família de funções de classe C_p definidas no espaço referido e que aí tomam valores reais.

Designemos, além disso, por $\mathcal{A}$ a família de aplicações biunívocas e contínuas do intervalo real $(0, T)$ sobre o referido espaço.

A cada função de $f \in \mathcal{F}$ e cada aplicação $a \in \mathcal{A}$ corresponde então uma função real de variável real definida no intervalo $(0, T)$. É a função de função que resulta da composição delas e que designamos por (f, a). Diremos que uma aplicação de $\mathcal{A}$ admite tangente em P_0 (ponto que corresponde ao valor t_0 da variável definida no intervalo $(0, T)$), se e só se existir em t_0 a derivada da função composta (f, a) acima definida, qualquer que seja a função $f \in \mathcal{F}$.

Podemos agora definir dois operadores de grande importância para o estudo da variedade Z_n.

Consideremos a subfamília de $\mathcal{A}_p$ constituida pelas aplicações de $\mathcal{A}$ que têm tangente em P. Podemos introduzir numa tal família uma relação de equivalência $\sim$ tal que dadas $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ será $a_1 \sim a_2$ se e só se for

$$(f, a_1)' = (f, a_2)'$$

para toda a função $f \in \mathcal{F}$. Às classes de equivalência definidas pela relação $\sim$ daremos o nome de vectores contravariantes definidos em P.

Duma maneira idêntica, podemos definir uma relação de equivalência $\doteq$ entre os elementos da família $\mathcal{F}$. Dadas as funções $f_1, f_2 \in F$ será $f_1 \doteq f_2$ se e só se for

$$(f_1, a)' = (f_2, a)'$$

para toda a aplicação $a \sim \mathcal{A}_p$. Às classes de equivalência definidas por $\doteq$ daremos o nome de vectores còvariantes.

Das definições dadas vemos que a todo o par de vectores cò e contravariantes podemos fazer corresponder um número complexo que será o valor da derivada $(f, a)'$ onde f, a são dois elementos quaisquer das classes de equivalência referidas: Diremos que é o producto escalar dos dois vectores.

Vemos ainda das definições dadas que um vector contravariante pode ser considerado um operador que actua nas funções de $\mathcal{F}$ para dar um número complexo e que um vector covariante pode ser considerado como um operador que aplicado a uma aplicação de $\mathcal{A}_p$ dá um número complexo.

Caracterizemos, agora, mais completamente a variedade Z_n, com que temos vindo a lidar. Vimos já que cada ponto da referida variedade era determinado por n números complexos (ou seja por um ponto do espaço $Z^n = Z_1 Z_2 \cdots Z_n$). Definimos então o espaço Z_n como um espaço conexo tal que cada ponto está contido num aberto homeomorfo a um aberto de Z^n (ao qual daremos o nome de carta local de Z_n), por uma forma tal que dadas duas cartas de Z_n de intersecção não vasia entre as coordenadas dos pontos dessa intersecção numa e noutra carta existe uma transformação constituida por n funções de classe não inferior a C_p. A uma tal transformação dá-se o nome de transformação admissível de cartas.

A uma família de cartas que cobre Z_n dá-se o nome de atlas. Entre as cartas de dois atlas duma mesma variedade existem famílias de transformações admissíveis e com uma transformação admissível é sempre possível introduzir uma nova carta local num dado atlas.

Representada uma variedade Z_n com auxílio dum atlas, toda a aplicação de $\mathcal{A}$ será representada localmente por n funções contínuas $Z^j(t) = X^j(t) + i\, Y^j(t)$ em que t é uma variável definida no intervalo real $(0, T)$. Se ao ponto t_0 interior a $(0, T)$ corresponder o ponto P da variedade a aplicação terá tangente nesse ponto se existir $Z^{j'}(t)$.

Com efeito, qualquer que seja $f \epsilon F$ será

$$(10) \quad \frac{df}{dt} = \sum \frac{Df}{Dz_i} \cdot \frac{dz^i}{dt} + \frac{Df}{D\bar{z}} \cdot \frac{d\bar{z}}{dt}$$

e, pela definição dada anteriormente, a tangente existe. Além disso, vemos por esta igualdade, que o vector em P definido pela classe de equivalência que corresponde à tangente referida, ficará determinado no sistema de coordenadas local pelos $2n$ operadores

$$\frac{dz^i}{dt}\,\frac{D}{Dz^i} \quad \text{e} \quad \frac{d\bar{z}^i}{dt} \cdot \frac{D}{D\bar{z}^i} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

$\frac{dz^i}{dt}$ e $\frac{d\bar{z}^i}{dt}$ serão então as componentes do vector nas bases $\frac{D}{Dz^i}$ e $\frac{D}{D\bar{z}^i}$. Vemos, por t ser real, que as componentes dum vector são duas a duas conjugadas.

Podemos definir adição de dois vectores ao vector cujas componentes são a soma das componentes desses vectores e produto dum escalar real por um vector ao vector que se obtem multiplicando as componentes do vector pelo escalar real.

Utilizando um sistema de coordenadas local, dados o vector v, os escalares reais α e β, qualquer que aeja $f, g \epsilon \mathcal{F}$ vemos que se tem

$$v(\varphi \cdot f) = \varphi\, v(f) + f\, v(\varphi)$$

e que

$$v(\alpha\varphi + \beta f) = \alpha\, v(\varphi) + \beta\, v(f).$$

De (10) e das definições dadas vemos ainda que o vector còvariante, classe de equivalência associado a f, tem por componentes $\frac{Df}{Dz^i}$ e $\frac{Df}{D\bar{z}^i}$. Além disso por f tomar valores reais vemos que as suas componentes são conjugadas duas a duas.

Dadas duas cartas U e V que contenham o ponto P, existirá uma transformação de coordenadas locais nas vizinhanças de P dada por

$$u^i = f^i(z^j) \qquad (i, j = 1 \cdots u)$$

em que f^i são funções de classe C_p. As componentes do vector còvariante no novo sistema de coordenadas serão dadas por $\frac{Df}{Du^i}$ e $\frac{Df}{D\bar{u}^i}$

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{Df}{Du^i} &= \sum \left(\frac{Df}{Dz^j}\,\frac{Dz^j}{Du^i} + \frac{Df}{D\bar{z}^j}\,\frac{D\bar{z}^j}{Du^i} \right), \\ \frac{Df}{D\bar{u}^i} &= \sum \left(\frac{Df}{D\bar{u}^i}\,\frac{Dz^j}{D\bar{u}^i} + \frac{Df}{D\bar{z}^j}\,\frac{D\bar{z}^j}{D\bar{u}^i} \right). \end{aligned}$$

Anàlogamente as novas componentes dum vector contravariante serão

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{du^i}{dt} &= \sum \left(\frac{dz^j}{dt}\,\frac{Du^i}{Dz_j} + \frac{d\bar{z}^j}{dt}\,\frac{Du^i}{d\bar{z}^j} \right), \\ \frac{d\bar{u}^i}{dt} &= \sum \left(\frac{dz^j}{dt}\,\frac{D\bar{u}^i}{Dz^j} + \frac{d\bar{z}^j}{dt}\,\frac{D\bar{u}^i}{d\bar{z}^j} \right). \end{aligned}$$

A partir dos conceitos de vectores cò e contravariante podemos sem dificuldade introduzir o conceito de tensor.

Estudado o conceito de variedade Z_n voltemos agora ao de espaço complexo de configuração.

Um exame das transformações canónicas mostra-nos que um espaço complexo de configuração não é mais do que uma variedade Z_n onde é definido um tensor bivalente

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{\bar{j}\bar{k}} = 0$$
$$\varepsilon_{j\bar{k}} = \overline{\varepsilon_{\bar{j}k}} = i\,\delta_{jk}$$

invariante nas transformações de coordenadas locais e onde δ_{ij} é o símbolo de KRO-

NEKER. Somos assim conduzidos como era de esperar ao grupo de transformações simpléticas.

Até aqui temos considerado apenas uma colecção de variáveis z_i que tomam valores no corpo dos números complexos. Porém, pode ver-se que a cada par de variáveis canónicas se associa um e_i tal que $e_i^2 = -1$. É portanto possível associar ao conjunto de variáveis canónicas um grupo de quaterniões G e a cada par de variáveis canónicas x_i y_i um elemento e_i tal que

$$e_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}\,\alpha_j \qquad \alpha_j \in G$$

com

$$\sum_{j=1}^{m} k_{ij}^2 = 1\,.$$

Desta forma cada uma das variáveis z_i toma valores numa algebra de CLIFFORD e as equações (1) tomam a forma

$$\frac{d z_i}{d t} = \frac{1}{2 e_i}\,\frac{\partial H}{\partial \bar{z}_i}.$$

As equações anteriormente estudadas serão então um caso completamente degenerado das agora introduzidas.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

NOTICIÁRIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

Summa Brasiliensis Mathematicae — Trata-se de uma revista especializada, publicada pelo IMPA e destinada exclusivamente à divulgação de trabalhos de pesquisas originais, de nível elevado. O IMPA continuou recebendo cerca de 200 publicações estrangeiras e nacionais por permuta com «Summa Brasiliensis Mathematicae».

Notas de Matemática — Como parte da coleção de monografias «Notas de Matemática» que vêm sendo publicadas pelo IMPA, apareceram em 1965 os seguintes volumes:

1) O. ENDLER, «Teoria de Galois infinita» (n.º 30).

2) L. A. MEDEIROS, «Temporally inhomogeneous non linear wave equations in Hilbert spaces» (n.º 31).

3) E. L. LIMA, «Cálculo tensorial» (n.º 32).

4) L. NACHBIN, «Elements of approximation theory» (n.º 33).

Elementos de Matemática — O IMPA dará início a uma série de livros impressos, com êsse título geral, a serem financiados pelo Conselho Nacional de Pesquisas e pela Diretoria do Ensino Superior do Ministério da Educação e Cultura. Dentro dêsse programa, já foram assinados contratos para a elaboração dos seguintes textos:

1) «Conjuntos e funções», por LEOPOLDO NACHBIN (Rio de Janeiro).

2) «Topologia dos Espaços Métricos», por ÉLON LAGES LIMA (Brasília).

3) «Algebra Moderna», por LUIZ HENRIQUE JACY MONTEIRO (São Paulo).

4) «Geometria Diferencial», por MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO (Brasília).

Quinto Colóquio Brasileiro de Matemática — Teve lugar na cidade de Poços de Caldas, Minas Gerais, no período de 4 a 24 de Julho de 1965, o Quinto Colóquio Brasileiro de Matemática. Êsse Colóquio, organizado pelo IMPA como todos os demais, foi o que maior movimento apresentou, tendo comparecido ao mesmo mais de 200 pessoas.

A realização do Colóquio foi possível graças às substanciais contribuições do Conselho Nacional de Pesquisas, da CAPES e da Fundação de Amparo à Pesquisa, além dos auxilios dados pelos diversos centros universitários do país.

Foi publicado o volume «Atas do Quinto Colóquio Brasileiro de Matemática», distribuido pelo IMPA.

J. M. H.

ANTOLOGIA

A partir do n.º 100 resolveu a Gazeta de Matemática *registar nas suas colunas alguns documentos de interesse, inéditos ou de difícil acesso.*

ESTATUTOS DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA *

I — Denominação, sede e fins

Artigo 1.º A Sociedade Portuguesa de Matemática (S. P. M.) tem por objectivo cultivar e promover o estudo das ciências matemáticas, puras e aplicadas.

Art.º 2.º A Sociedade Portuguesa de Matemática, tem a sua sede em Lisboa.

§ único. Poderão ser constituídos núcleos da S. P. M. em qualquer localidade do território nacional, devidamente legalizados por quem de direito.

Art. 3.º Os meios de que dispõe a S. P. M. para atingir os seus fins são:

a) Reuniões de estudo, conferências e cursos públicos;

b) Publicação dum boletim e outros estudos matemáticos;

c) Colaboração em congressos e publicações nacionais e internacionais.

Art. 4.º A S. P. M. pode filiar-se em organismos internacionais da sua especialidade, nos termos da legislação em vigor.

Art. 5.º A S. P. M. será federada na Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências (A. P. P. C.), nos termos dos estatutos desta.

II — Dos sócios

Art. 6.º A S. P. M. compreende quatro categorias de sócios:

a) Sócios ordinários;

b) Sócios vitalícios;

c) Sócios honorários;

d) Sócios colectivos.

§ 1.º Não há limitação para o número de sócios em qualquer das categorias.

§ 2.º São considerados sócios fundadores os que se inscreveram até 31 de Janeiro de 1941, sem que tal qualidade envolva regalia especial.

Art. 7.º Pode ser admitido como sócio ordinário qualquer indivíduo, de nacionalidade portuguesa ou estrangeira, nos termos dos parágrafos seguintes:

§ 1.º Mediante proposta, assinada por dois sócios ordinários ou vitalícios, que estará patente na sede da S. P. M., pelo prazo de quinze dias.

§ 2.º Sem objecções, formuladas por escrito, da parte de qualquer sócio, será a proposta submetida à Direcção, de cujo parecer desfavorável há recurso para a Assembleia Geral que resolverá, ouvida a informação da Direcção.

§ 3.º Com objecções, formuladas por escrito, da parte de qualquer sócio, será a proposta submetida à Assembleia Geral.

Art. 8.º São considerados sócios vitalícios os sócios ordinários que efectuarem, duma vez só ou em três prestações anuais, o pagamento da importância indicada pelo Regulamento Interno, em substituição da quotização anual.

§ único. Se o pagamento em prestações não for completado, voltará o sócio à categoria de ordinário. considerando-se as prestações pagas como adiantamento do pagamento de quotas anuais.

Art. 9.º O título de sócio honorário será concedido a indivíduos de reconhecido mérito científico que a S. P. M., por meio da Assembleia Geral e perante proposta justificada da Direcção, entenda dever distinguir desta forma.

Art. 10.º Podem ser sócios colectivos, quaisquer entidades nacionais ou estrangeiras de carácter científico ou económico que como tais sejam aceites pela Direcção.

Art. 11.º A qualidade de sócio caduca:

a) Por pedido escrito de demissão do sócio dirigido à Direcção;

---

* Discutidos e aprovados em Assembleia Geral da Sociedade Portuguesa de Matemática e aguardando aprovação Superior.

Cf.: Gaz. Mat., n.º 5, 1941.

b) Por atraso de um ano no pagamento das quotas;

c) Por irradiação deliberada pela Assembleia Geral, como consequência da falta de cumprimento de obrigações morais para com a S. P. M. mediante processo organizado pela Direcção.

§ único. O indivíduo cuja qualidade de sócio for perdida por força do disposto na alínea *b*), só poderá ser readmitido mediante o pagamento de nova jóia.

Art.º 12.º São obrigações dos sócios ordinários:

a) Colaborar nos trabalhos da S. P. M. e aceitar os cargos para que forem eleitos ou nomeados;

b) Pagar a jóia fixada pelo Regulamento Interno;

c) Pagar a quota anual fixada pelo Regulamento Interno.

Art. 13.º É obrigação dos sócios vitalícios colaborar nos trabalhos da S. P. M. e aceitar os cargos para que forem eleitos ou nomeados.

Art. 14.º É obrigação dos sócios colectivos o pagamento da quota anual mínima fixada pelo Regulamento Interno.

Art. 15.º Os sócios ordinários e vitalícios têm direito a:

a) Fazer parte da Assembleia Geral, emitir nela a sua opinião, votar para a eleição dos corpos gerentes da S. P. M. e apresentar quaisquer propostas que julguem de interesse colectivo;

b) Requerer a convocação da Assembleia Geral nos termos destes estatutos;

c) Examinar na época competente o relatório anual, as contas e os livros de escrituração da S. P. M.;

d) Reclamar, perante a Direcção, dos actos que julguem lesivos dos seus direitos;

e) Assistir a todas as manifestações científicas da S. P. M.

Art. 16.º Os sócios honorários e colectivos têm direito a receber todas as publicações da S. P. M.

III — Da Organização

Art. 17.º São órgãos da S. P. M.:

a) A Assembleia Geral;

b) A Direcção;

c) Os organismos permanentes previstos no Regulamento Interno da S. P. M.;

d) As comissões temporárias constituídas pela Assembleia Geral ou pela Direcção;

e) Os núcleos, segundo o Regulamento Interno.

a) — Da Assembleia Geral

Art. 18.º A Assembleia Geral é constituída pelos sócios ordinários e vitalícios no gozo dos seus direitos e reune-se, ordinàriamente, na primeira quinzena de Janeiro e extraordinàriamente, em qualquer época, por decisão do Presidente da Assembleia Geral, a pedido da Direcção ou a requerimento dum terço dos sócios ordinários e vitalícios da S. P. M.

Art. 19.º Os sócios ordinários e vitalícios impedidos de comparecer poderão delegar os seus poderes noutros consócios em carta dirigida ao Presidente da Assembleia Geral.

Art. 20.º Para efeitos da eleição bienal dos membros da Mesa da Assembleia Geral, da Direcção e dos delegados à A. P. P. C. os sócios ordinários e vitalícios impedidos de comparecer poderão votar com lista em sobrescrito fechado, dirigido ao Presidente da Assembleia Geral, com a indicação exterior do seu conteúdo e a assinatura do votante.

§ único. No caso de empate, os escrutínios seguintes realizam-se imediatamente com os sócios presentes, sendo contada para cada candidato toda a votação feita a seu favor em carta, nos termos deste artigo.

Art. 21.º Os sócios honorários têm assento na Assembleia Geral, sem direito de voto e podem intervir nas discussões de carácter científico.

Art. 22.º As convocações serão feitas com a antecedência mínima de oito dias, por meio de anúncio num dos jornais mais lidos, ou por aviso dirigido a cada sócio, sem o que a Assembleia Geral não poderá reunir-se vàlidamente.

Art. 23.º Da ordem dos trabalhos da reunião ordinária da Assembleia Geral constará a discussão e aprovação do relatório anual da Direcção, contas, assuntos de expediente, eleições quando as houver e os assuntos que a Direcção entenda dever submeter à sua apreciação.

§ único. O relatório anual e as contas estarão patentes na sede da S. P. M. durante os oito dias que antecedem a reunião ordinária da Assembleia Geral.

Art. 24.º A Assembleia Geral funcionará com qualquer número de sócios, salvo para rever os Estatutos e promover a dissolução da S. P. M. para o que é exigida a presença de um terço dos sócios ordinários e vitalícios.

Art. 25.º A Mesa da Assembleia Geral será constituída por um Presidente e dois Secretários, eleitos por dois anos e podendo ser reeleitos.

Art. 26.º Compete ao Presidente da Assembleia Geral:

a) Convocar as reuniões da Assembleia Geral;

b) Dirigir os trabalhos, manter a ordem, respeitando e fazendo respeitar os Estatutos e demais disposições em vigor;

c) Assinar as actas das sessões e validar com a sua rubrica todas as páginas numeradas do livro de actas;

d) Designar qual dos sócios presentes deve substituir um Secretário, impedido de comparecer.

§ único. Nos impedimentos do Presidente da Assembleia Geral assumirá a presidência o mais velho dos sócios presentes.

Art. 27.° Compete aos secretários da Mesa da Assembleia Geral:

a) Redigir as actas transcrevendo-as no respectivo livro e rubricando-as;

b) Arquivar todos os documentos da Assembleia Geral, respondendo por eles;

c) Fazer todo o expediente da Mesa da Assembleia Geral.

Art. 28.° Compete à Assembleia Geral:

a) Eleger, por escrutínio secreto, a sua Mesa, a Direcção e os delegados à A. P. P. C.;

b) Nomear os sócios honorários;

c) Pronunciar-se pela admissão e expulsão de sócios nos termos destes Estatutos;

d) Decidir sobre questões apresentadas pela Direcção e nos casos de que esta considerar omissos os Estatutos;

e) Discutir e aprovar o Regulamento interno;

f) Rever os Estatutos e promover a dissolução da S. P. M.;

g) Resolver sobre a filiação da S. P. M. em organismos internacionais da sua especialidade.

b) — Da Direcção

Art. 29.° A S. P. M. será dirigida e administrada por uma Direcção de sete membros: Presidente, Vice-Presidente, Secretário Geral, Tesoureiro, 1.° Secretário, 2.° Secretário e Vogal.

§ 1.° Os membros da Direcção serão sócios residentes em Lisboa, não poderão delegar as suas funções e exercê-las-ão gratuitamente.

§ 2.° A Direcção é eleita por dois anos e todos os seus membros poderão ser reeleitos.

Art.° 30.° Compete à Direcção:

a) Organizar e convocar as reuniões de carácter científico;

b) Elaborar, ouvidos os organismos permanentes, um plano de trabalhos que será comunicado aos sócios 60 dias a contar da data da posse;

c) Gerir os fundos da S. P. M.;

d) Cumprir e fazer cumprir as disposições destes Estatutos, do Regulamento Interno e as que forem tomadas pela Assembleia Geral;

e) Admitir os sócios e propor a sua irradiação nos termos destes Estatutos;

f) Redigir o relatório anual, elaborar o orçamento e respectivas contas;

g) Pedir a convocação extraordinária da Assembleia Geral.

Art. 31.° As deliberações da Direcção consideram-se válidas quando forem tomadas por maioria dos votos.

§ único. O Presidente da Direcção tem voto de desempate.

Art. 32.° Compete ao Presidente da Direcção:

a) Representar a S. P. M.;

b) Convocar as reuniões da Direcção;

c) Designar qualquer dos membros da Direcção para a comissão que for mister executar para o pleno cumprimento de resoluções tomadas;

d) Validar com a sua rubrica todas as páginas do livro de actas das reuniões da Direcção.

Art. 33.° Compete ao Vice-Presidente substituir o Presidente nos seus impedimentos.

Art. 34.° Compete ao Secretário Geral:

a) Dirigir o expediente da S. P. M., assinando a correspondência, sempre que o Presidente não julgue dever fazê-lo;

b) Dirigir a publicação de todos os trabalhos da S. P. M.;

c) Redigir as actas das reuniões da Direcção.

Art. 35.° Compete ao 1.° e 2.° Secretários coadjuvar o Secretário Geral e substituí-lo nos seus impedimentos, nos termos do Regulamento Interno.

Art. 36.° Compete ao Tesoureiro:

a) Arrecadar as receitas da S. P. M.;

b) Pagar as despesas da S. P. M.;

c) Executar, ou mandar executar, sob a sua responsabilidade, a escrita da S. P. M.;

d) Arquivar ou mandar arquivar os documentos de despesa;

e) Assinar os recibos das receitas da S. P. M.

Art. 37.° A Direcção é solidàriamente responsável por qualquer acto da sua gerência prejudicial à S. P. M.

§ único. Ficam isentos desta responsabilidade os membros da Direcção que:

a) Votarem contra a deliberação de que se trata, com expressa declaração de voto;

b) Não tendo participado na deliberação, protestarem por escrito até à reunião seguinte.

Art. 38.º A Direcção reunirá, pelo menos, uma vez por trimestre.

IV — **Disposições diversas**

Art. 39.º Os delegados da S. P. M. à A. P. P. C. poderão simultâneamente fazer parte da Mesa da Assembleia Geral ou da Direcção.

Art. 40.º Em caso de dissolução da S. P. M proceder-se-á à liquidação dos seus haveres pela forma seguinte: pagas as dívidas ou consignadas as quantias necessárias para o seu pagamento, partilhar-se-á o remanescente por instituições, entidades ou organismos científicos designados pela Assembleia Geral.

REGULAMENTO INTERNO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

I — **Da Direcção**

Artigo 1.º De acordo com os Estatutos a Direcção reunir-se-á uma vez pelo menos em cada trimestre, nos dias 15 de Janeiro, 15 de Abril, 1 de Julho e 15 de Outubro, ou um dia depois quando alguma daquelas datas não for útil.

Art. 2.º À Direcção compete cumprir e fazer cumprir o Regulamento Interno.

Art. 3.º Qualquer membro da Direcção poderá assistir às reuniões das Comissões permanentes ou temporárias.

Art.º 4.º A cobrança das quotas será feita de 1 a 15 de Janeiro para as anuais, de 1 a 15 de Janeiro e de 1 a 15 de Junho, para as semestrais e de 1 a 15 de Janeiro, de 1 a 15 de Maio e de 1 a 15 de Outubro para as quadrimestrais.

Art. 5.º As duas prestações em que pode ser paga a jóia têm vencimento com as duas primeiras quotas.

II — **Dos Sócios**

Art. 6.º É de Esc. 900$00 a importância a que se refere o art. 8.º dos Estatutos.

Art. 7.º A jóia prevista na alínea *b*) do art. 12.º dos Estatutos é de Esc. 20$00 e o seu pagamento poderá fazer-se duma só vez ou em duas prestações, sendo dispensados do pagamento de jóia os sócios estudantes.

Art. 8.º A quota anual prevista na alínea *c*) do art. 12.º dos Estatutos é de Esc. 60$00 e poderá ser dividida em duas ou três prestações.

§ único. A quota anual será de Esc. 18$00 para os sócios estudantes.

Art. 9.º A quota anual mínima dos sócios colectivos prevista no art. 14.º dos Estatutos é de Esc. 500$00.

Art. 10.º Os sócios ordinários e vitalícios receberão gratuitamente o Boletim da S. P. M.

III — **Das Comissões Permanentes**

Art. 11.º As Comissões Permanentes são mais do que organismos meramente consultivos porque são os órgãos através dos quais a S. P. M. procurará atingir os seus objectivos. O resultado da actividade da S. P. M. será em larga medida o que as Comissões Permanentes realizarem.

Art. 12.º As Comissões Permanentes da S. P. M. são as seguintes:

1) Comissão Pedagógica, composta de cinco membros;

2) Comissão Matemática Pura, composta de três membros;

3) Comissão de Matemática Aplicada, composta de cinco membros, entre os quais especialistas de Mecânica, Astronomia, Estatística e Cálculo Actuarial;

4) Comissão de História e Filosofia da Matemática, composta de três membros;

5) Comissão de História da Astronomia Náutica, composta de três membros;

6) Comissão do Centro de Documentação, composta de cinco membros, entre os quais um dos secretários da Direcção por esta designado;

7) Comissão de Redacção do Boletim, composta de três membros, entre os quais um dos secretários da Direcção por esta designado;

8) Comissão de Propaganda de Lisboa, composta de cinco membros;

9) Comissão de Propaganda do Porto, composta posta de três membros.

10) Comissão de Propaganda de Coimbra, composta de três membros

§ único. As Comissões Permanentes poderão agregar a si temporàriamente outros sócios que possam colaborar eficazmente nos trabalhos em curso.

Art. 13.º A nomeação e exoneração dos membros das Comissões Permanentes compete à Direcção.

Art. 14.º Todas as nomeações caducam no termo do mandato da Direcção que as levou a efeito, mas pode haver recondução.

Art. 15.º São incompatíveis os cargos de membros das Comissões do Centro de Documentação, de Redacção do Boletim e de Propaganda.

Art. 16.º Dentro de trinta dias a partir da sua constituição as Comissões Permanentes submeterão à aprovação da Direcção o plano de trabalhos a realizar até ao fim do seu mandato. Do plano de trabalhos fará parte o orçamento da despesa a que a sua execução dará lugar.

Art. 17.º A aprovação do plano de trabalhos implica a autorização da realização da despesa correspondente cujo pagamento será feito pelo Tesoureiro mediante a apresentação dos documentos justificativos visados por dois membros da Comissão respectiva.

Art. 18.º Até ao dia 15 de Dezembro de cada ano as Comissões Permanentes apresentarão à Direcção o relatório da sua actividade.

Art. 19.º Na primeira reunião de cada Comissão Permanente os seus membros designarão entre si um delegado, cujo nome será comunicado à Direcção, e através do qual serão estabelecidas as relações entre esta e aquela.

Art. 20.º À Comissão de Propaganda de Lisboa caberá:

1.º A organização e actualização do cadastro dos licenciados em ciências matemáticas pelas universidades portuguesas e dos professores de matemática portugueses;

2.º Realizar a propaganda das ciências matemáticas e da actividade da S. P. M.;

3.º Coordenar a acção das Comissões de Propaganda do Porto e de Coimbra.

Art. 21.º Às Comissões de Propaganda do Porto e de Coimbra compete:

1.º Fornecer à Comissão de Propaganda de Lisboa elementos para a organização e actualização do cadastro dos licenciados em ciências matemáticas pelas respectivas universidades e dos professores de matemática;

2.º Realizar a propaganda das ciências matemáticas e da actividade da S. P. M. nas respectivas circunscrições universitárias.

IV — Das Comissões Temporárias

Art. 22.º A Direcção poderá constituir Comissões Temporárias com atribuições determinadas.

Art. 23.º As Comissões Temporárias são dissolvidas por deliberação da Direcção ou pela apresentação dos respectivos relatórios ou pareceres.

V — Dos Núcleos

Art. 24.º Os sócios residentes no Porto e em Coimbra poderão constituir núcleos cientificamente autónomos.

Art. 25.º Os sócios residentes em qualquer localidade do território nacional poderão solicitar da Direcção autorização para constituirem um Núcleo.

Art. 26.º Quando o julgue conveniente poderá a Direcção conceder autonomia científica a determinado Núcleo.

Art. 27.º Necessita de prévia autorização da Direcção a realização de cursos ou conferências pelos Núcleos não autónomos.

Art. 28.º Os Núcleos poderão ter regulamentos próprios, mas estes não deverão contrariar os Estatutos e o Regulamento Interno da S. P. M.

Art. 29.º Cada Núcleo elegerá um secretário através do qual manterá relações com a Direcção.

Art. 30.º Até 15 de Dezembro de cada ano os Núcleos apresentarão os respectivos relatórios.

VI — Do Centro de Documentação

Art. 31.º O Centro de Documentação abrange a Biblioteca e o Arquivo da S. P. M.

Art. 32.º À Comissão do Centro de Documentação compete:

a) Organizar e dirigir a Biblioteca e o Arquivo da S. P. M.

b) Organizar e dirigir os serviços de expedição e permuta do Boletim da S. P. M.;

c) Organizar e coordenar os documentos que possam servir à informação da actividade científica no ramo da matemática, tanto no estrangeiro como no país.

VII — Do Boletim

Art. 33.º A S. P. M. editará um Boletim do qual publicará um número por ano, pelo menos.

Art.º 34.º A publicação de cada número terá lugar dentro de 90 dias a contar do final do período a que diz respeito.

Art. 35.º O Boletim constituirá um arquivo da actividade da S. P. M.

Art. 36.° A Comissão de Redacção do Boletim depois de organizado o original submetê-lo-á à Direcção com uma proposta para a sua publicação da qual constará uma previsão fundamentada da respectiva despesa.

Art. 37.° Depois de aprovada a proposta da Comissão de Redacção do Boletim deverá esta dar início aos trabalhos tipográficos correspondentes, que dirigirá.

Art. 38.° A Direcção da S. P. M. fixará o preço de venda de cada número do Boletim, e autorizará as ofertas que a Comissão de Redacção propuser.

VIII — Das Reuniões

Art. 39.° As reuniões da S. P. M. terão lugar às segundas e quartas segundas-feiras de cada mês excepto nos meses de Julho, Agosto e Setembro, às 18 horas.

Art. 40.° O sócio que pretenda fazer uma comunicação deverá remeter uma cópia desta ou o seu resumo à Direcção.

Art. 41.° A Direcção só poderá recusar uma comunicação em face do parecer desfavorável da respectiva Comissão Permanente.

Art. 42.° A Direcção dará conhecimento ao sócio da reunião em que terá lugar a leitura da sua comunicação.

Art. 43.° As reuniões para a leitura de comunicações serão presididas pela Direcção.

Art. 44.° Terminada a leitura de cada comunicação será dada a palavra aos sócios presentes que queiram pronunciar-se sobre o assunto.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Matemáticas Gerais — 1.° ponto de informação e 1.° exame de frequência (2.ª chamada) — 25-2-1966.

I

5659 — 1) Sejam A, B e C subconjuntos do conjunto fundamental U. Tomando $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$, demonstre que $A \Delta B = A \Delta C \Longrightarrow B = C$.

2) Diga qual é o lugar geométrico de $M(x, y)$, afixo do complexo z, tal que $z\bar{z} + 5(z+\bar{z}) = 6$.

R: 1) *Fazendo* $p = x \in A$, $q = x \in B$, $r = x \in C$ *a propriedade consiste em provar que* $\{[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim p)]\} \Longrightarrow (q \Longleftrightarrow r)$ *é uma tautologia.*

p	q	r	$\{[(p \wedge \sim q)$	$\vee$	$(q \wedge \sim p)]$	$\Longleftrightarrow$	$[(p \wedge \sim r)$	$\vee$	$(r \wedge \sim p)]\}$	$\Longrightarrow$	$(q \Longleftrightarrow r)$
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
Etapas			1	2	1	3	1	2	1	4	1

2) *Sendo* $z = x + i y$, *vem* $z \bar{z} = x^2 + y^2$ *e* $z + \bar{z} = 2x$. *A equação proposta é equivalente a* $x^2 + y^2 + 10x = 6$ *ou* $(x+5)^2 + y^2 = 31$ *que é a equação de uma circunferência com centro em* $(-5, 0)$ *e raio igual a* $\sqrt{31}$.

II

5660 — 1) Mostre que:

a) $X_n =]1/n, 1[\ (n = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \supset]0,1[$ e não existe nenhuma subcolecção finita de X_n $(n = 1, 2, \cdots)$ que cubra $]0,1[$.

b) $X_1 = [-1, 0], X_{n+1} = [1/n+1, 1/n] \ (n = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \supset [0,1]$ e não existe nenhuma subcolecção finita de X_n $(n = 1, 2, \cdots)$ que cubra $[0,1]$.

Que esclarecimentos trazem estes exemplos ao lema de Borel-Lebesgue? Justifique.

2) Discuta a natureza da sucessão cujo termo geral é

$$u_n = \left(\frac{n^2 + an + b}{n^2 + cn + d}\right)^{\alpha n^2 + \beta n + \gamma}$$

R: 1) *A solução das questões postas nas alineas a) e b) é imediata. Os exemplos mostram que o lema não é verdadeiro se o conjunto não é fechado ou se a cobertura não é aberta.*

2) $\log u_n = (\alpha n^2 + \beta n + \gamma) \log \left[1 + \frac{(a-c)n + (b-d)}{n^2 + cn + d}\right] =$

$= \eta (\alpha n^2 + \beta n + \gamma) \cdot \frac{(a-c)n + (b-d)}{n^2 + cn + d} \quad (\eta \to 1)$

Se $\alpha(a-c) > 0$ $\quad \log u_n \to +\infty$ *e* $u_n \to +\infty$

Se $\alpha(a-c) < 0$ $\quad \log u_n \to -\infty$ *e* $u_n \to 0$

Se $\alpha(a-c) = 0$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \wedge a - c \neq 0 & \log u_n \to \beta(a-c) \ \text{e} \ u_n \to e^{\beta(a-c)} \\ \alpha \neq 0 \wedge a - c = 0 & \log u_n \to \alpha(b-d) \ \text{e} \ u_n \to e^{\alpha(b-d)} \\ \alpha = 0 \wedge a - c = 0 & \log u_n \to 0 \quad \text{e} \ u_n \to 1. \end{cases}$$

III

5661 — 1) Estude a natureza da série $\Sigma \log \left(\frac{n^x + 1}{n^x + 2}\right)$.

2) Considere

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x < -1) \\ x^2 & (-1 \leq x \leq 1) \\ 2 & (x > 1). \end{cases}$$

Estude a sua continuidade e represente-a geomètricamente.

R: 1) *A série é visivelmente divergente para* $x \leq 0$ *pois nesse caso* u_n *não é evanescente. Com* $x > 0$, *tome-se* $\log \left(\frac{n^x + 1}{n^x + 2}\right) = \log \left(1 - \frac{1}{n^x + 2}\right) =$ $= -\eta \frac{1}{n^x + 2} \ (\eta \to 1)$. *A natureza da série dada será a da série de termos positivos* $\Sigma \eta \frac{1}{n^x + 2}$ *e como* $\lim \eta \frac{n^x}{n^x + 2} = 1$ *a série converge com* $x > 1$ *e diverge com* $x \leq 1$.

2) *A função é contínua em* $x = -\infty$ *e para todo o* $x < -1$, *descontínua para* $x = -1$, *contínua para* $-1 < x < 1$, *descontínua para* $x = 1$, *contínua para* $x > 1$ *e para* $x = +\infty$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º ponto de informação e 2.º exame de frequência (1.ª chamada) — Duração — 3 horas — 15-6-1966.

I

5662 — 1) Considere $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^2 + 1} \ (a \neq b)$ e mostre que $f(x)$ é contínua em $Z =]-\infty, +\infty[$. Verifique neste conjunto que $f(x)$ possui mínimo e máximo (teorema de Weierstrass).

Determine a e b, supondo que a oscilação de $f(x)$ em Z é igual a 2 e que $Y = 1$ é assíntota da imagem de $f(x)$.

2) Calcule $P\sqrt{e^x - 1}$.

R: 1) $f(x)$ *é contínua em* Z *pois é o cociente de duas funções contínuas nesse conjunto. Tem-se também* $f(-\infty) = f(+\infty) = a$ *e portanto* $f(x)$ *também é contínua no infinito.*

Como $f'(x) = \frac{2(a-b)x}{(x^2+1)^2}$, $f'(x)$ *anula-se com mudança de sinal em* $x = 0$ *e portanto este ponto é extremante de* $f(x)$. *Os extremos de* $f(x)$ *são pois* $f(0) = b$ *e* $f(-\infty) = f(+\infty) = a$.

A oscilação em Z *é* $\Omega = |a - b| = 2$ *e, como* $\lim_{x=\infty} f(x) = a = 1$, *em virtude* $Y = 1$ *ser assintota da imagem de* $f(x)$, *vem* $|1 - b| = 2$ *o que dá* $b = -1$ *ou* $b = 3$.

2) *Fazendo* $e^x - 1 = t^2$, *vem*

$$P\sqrt{e^x - 1} = P\, t \cdot \frac{2t}{1+t^2} = 2P\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) =$$

$$= 2t - 2 \operatorname{arctg} t = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}.$$

II

5663 — 1) Determine m e n por forma que $\lim_{x=0}\left[\frac{\cos x}{\log(1+x)}-\frac{m}{x}-n\right]=0$.

2) Supondo que as equações $F(x,y,z)=0$ e $G(x,y,z)=0$ definem duas funções diferenciáveis $y(x)$ e $z(x)$, calcule $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

Sugestão: derive em ordem a x ambos os membros das duas equações e resolva o sistema obtido em ordem a $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

R: 1) $$\lim_{x=0}\left[\frac{\cos x}{\log(1+x)}-\frac{m}{x}-n\right]=$$

$$=\lim_{x=0}\frac{x\cos x-m\log(1+x)-n\,x\log(1+x)}{x\log(1+x)}=$$

$$=\lim_{x=0}\frac{\cos x-x\operatorname{sen}x-\frac{m}{1+x}-n\log(1+x)-\frac{nx}{1+x}}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$$

$$=\frac{1-m}{0}.$$

Terá de ser $m=1$ *pois se fosse* $m\neq 1$ *o limite da expressão dada seria* ∞.

Com $m=1$, *vem*

$$\lim_{x=0}\frac{\cos x-x\operatorname{sen}x-\frac{1}{1+x}-n\log(1+x)-\frac{nx}{1+x}}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x=0}\frac{-\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x-x\cos x}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}+$$

$$+\lim_{x=0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{n}{1+x}-\frac{n}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{n}{(1+x)^2}}=$$

$$=\frac{1-2n}{2}=0$$

o que dá $n=1/2$.

2) $$\begin{cases}F'_x+F'_y\dfrac{dy}{dx}+F'_z\dfrac{dz}{dx}=0\\[2mm] G'_x+G'_y\dfrac{dy}{dx}+G'_z\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{F'_z G'_x-F'_x G'_z}{F'_y G'_z-F'_z G'_y}\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{F'_x G'_y-F'_y G'_x}{F'_y G'_z-F'_z G'_y}\end{cases}.$$

III

5664 — 1) Demonstre que o resto da divisão de um polinómio $P(x)$ pelo polinómio

$$\varphi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

é

$$R(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)}P(x_i),\ \text{com}\ \varphi_i(x)=\varphi(x)/(x-x_i).$$

2) Seja $A=\begin{bmatrix}1&3\\4&k\end{bmatrix}$. Determine todas as matrizes $B\neq 0$, de ordem 2, tais que $AB=0$. Indique o valor de k para o qual o problema é possível.

R: 1) R(x) *tem de ser um polinómio de grau inferior a* $n+1$ *que para* $x=x_i$ *toma o valor* $P(x_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$.

A teoria da interpolação (fórmula interpoladora de Lagrange) dá imediatamente o resultado.

2) *Tomando* $B=\begin{bmatrix}m&n\\p&q\end{bmatrix}$, *vem*

$$AB=\begin{bmatrix}m+3p&n+3q\\4m+kp&4n+kq\end{bmatrix}$$

e, portanto, terá de ser

$$\begin{cases}m+3p=0\\4m+kp=0\end{cases}\ e\ \begin{cases}4n+kq=0\\n+3q=0\end{cases},$$

sistemas homogéneos que deverão possuir soluções não nulas. Então $\begin{vmatrix}1&3\\4&k\end{vmatrix}=0$, *o que dá* $k=12$; *as soluções dos sistemas serão*

$$m=-3p\ e\ n=-3q$$

$$e\ B=\begin{bmatrix}-3p&-3q\\p&q\end{bmatrix}.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º ponto de informação e 2.º exame de frequência (2.ª chamada) — Duração — 3 horas — 18-6-1966.

I

5665 — 1) Seja $f(x)$ contínua em $[0,1]$ tal que $\forall x\in[0,1]\ 0\leq f(x)\leq 1$. Prove que $\exists c\in[0,1]$: $f(c)=c$.

Sugestão: Utilize na demonstração a função auxiliar $\varphi(x) = f(x) - x$.

2) Deduza a relação que deve existir entre m e n para que a fracção racional $\psi(x) = \dfrac{m x^2 + n}{(x^2-1)^3}$ admita a decomposição em elementos simples da forma $\dfrac{\lambda}{(x-1)^3} + \dfrac{\mu}{(x+1)^3}$ onde λ e μ são constantes. Qual é nesse caso o valor das constantes λ e μ? Calcule $P\,\psi(x)$.

R: 1) *Tomando* $\varphi(x) = f(x) - x$, *vem* $\varphi(0) = f(0) \geqq 0$ *e* $\varphi(1) = f(1) - 1 \leqq 0$. *Ora*

$$\varphi(0) = 0 \Longrightarrow \exists\, 0 : f(0) = 0$$
$$\varphi(1) = 0 \Longrightarrow \exists\, 1 : f(1) = 1$$
$$\varphi(0) > 0 \wedge \varphi(1) < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in]0,1[:$$
$$\varphi(c) = 0 \Longleftrightarrow \exists\, c \in]0,1[: f(c) = c .$$

2) $$\frac{m x^2 + n}{(x^2-1)^3} = \frac{\lambda}{(x-1)^3} + \frac{\mu}{(x+1)^3} =$$
$$= \frac{(\lambda+\mu)x^3 + 3(\lambda-\mu)x^2 + 3(\lambda+\mu)x + (\lambda-\mu)}{(x^2-1)^3}.$$

Então,

$$\lambda + \mu = 0 \Longrightarrow \lambda = -\mu$$
$$3(\lambda - \mu) = m \Longrightarrow 6\lambda = m$$
$$\lambda - \mu = n \Longrightarrow 2\lambda = n$$

donde $\dfrac{m}{3} = n$ *e* $\lambda = -\mu = \dfrac{n}{2}$.

$$P\,\psi(x) = \frac{n}{2} P\,(x-1)^{-3} - \frac{n}{2} P\,(x+1)^{-3} =$$
$$= -\frac{n}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}.$$

II

5666 — 1) Utilize o desenvolvimento em série de Mac Laurin de $\log^2(1+x)$ para calcular

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 - \log^2(1+x)}{x^3}.$$

2) Sendo $g(x)$ e $h(y)$ diferenciáveis, respectivamente, em $x = a$ e $y = b$, demonstre que $F(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ é diferenciável em $P(a,b)$.

R: 1) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad |x| < 1$$
$$\log^2(1+x) = x^2 - x^3 + \cdots \quad |x| < 1 .$$

Então,

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 - \log^2(1+x)}{x^3} = \lim_{x=0} \frac{x^2 - (x^2 - x^3 + \cdots)}{x^3} = 1 .$$

2) *Por hipótese,*

$$g(a+h) - g(a) = h\,A \quad \textit{com} \quad \lim_{h=0} A \quad \textit{finito}$$
$$h(b+k) - h(b) = k\,B \quad \textit{com} \quad \lim_{k=0} B \quad \textit{finito}.$$

Então,

$$F(a+h, b+k) - F(a,b) = g(a+h)\,h(b+k) -$$
$$- g(a) \cdot h(b) = h(b)\,[g(a+h) - g(a)] +$$
$$+ g(a+h)\,[h(b+k) - h(b)] = h\,[A\,h(b)] +$$
$$+ k\,[B\,g(a+h)] = h\,M + k\,N$$

com $\lim\limits_{h=0} M$ *finito e* $\lim\limits_{\substack{h=0\\k=0}} N$ *finito, o que exprime a diferenciabilidade de* $F(x,y)$ *em* $P(a,b)$.

III

5667 — 1) Deduza a relação que deve ligar a, b, c, e d para que as raízes r_1, r_2 e r_3 do polinómio $a x^3 + 3 b x^2 + 3 c x + d$ satisfaçam à condição $r_1^2 = r_2 \cdot r_3$.

2) Seja $S)\ A X = B$ um sistema de m equações lineares a n incógnitas, com $m > n$.

Indique, justificando as respostas, sob que condições o sistema $S)$ é (a) possível determinado, (b) possível indeterminado e (c) impossível.

R: 1) $$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{3b}{a} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \dfrac{3c}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{3b}{a} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1^2 = \dfrac{3c}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{3b}{a} \\ r_1 (r_1 + r_2 + r_3) = \dfrac{3c}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{3b}{a} \\ r_1 \left(-\dfrac{3b}{a}\right) = \dfrac{3c}{a} \end{cases}$$

donde $r_1 = -\dfrac{c}{b}$. Substituindo no polinómio, vem

$$-\frac{a\,c^3}{b^3}+\frac{3\,b\,c^2}{b^2}-\frac{3\,c^2}{b}+d=0 \quad \text{ou} \quad d=\frac{a\,c^3}{b^3}.$$

2) *Sendo* $A' = [A \,|\, B]$, *tem-se:*

(a) *possível determinado:* $r = c(A) = c(A')$ *e* $n = r$
(b) *possível indeterminado:* $r = c(A) = c(A')$ *e* $n > r$
(c) *impossível:* $r = c(A) < c(A')$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — Prova escrita — 13-7-1966.

5668 — 1) Se, num grupo multiplicativo G
$$\forall\, a, b \in G \quad (a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2,$$
mostre que o grupo é comutativo.

R: $$(a\cdot b)^2 = (a\,b)(a\,b) = a\,a\,b\,b$$
$$a\,b\,a\,b = a\,a\,b\,b.$$

Multiplicando à direita ambos os membros desta igualdade por b^{-1} *vem*

$$a\,b\,a = a\,a\,b$$

e, multiplicando à esquerda ambos os membros desta por b^{-1} *vem logo*

$$b\,a = a\,b.$$

2) Utilize os conhecimentos sobre derivação e primitivação de séries para calcular a soma da série
$$x+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\cdots.$$

R: *A série das derivadas é* $1+x^4+\cdots+x^{4n}+\cdots$, *progressão geométrica de razão* x^4, *cuja soma e* $\dfrac{1}{1-x^4}$ *para* $|x|<1$.

A soma da série proposta é

$$P\frac{1}{1-x^4}=P\frac{1}{(1-x^2)(1+x^2)}=-$$
$$-P\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=$$
$$=-P\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)=$$
$$=-\frac{1}{4}\log|x-1|+\frac{1}{4}\log|x+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

3) Mostre que $f(x)=e^{-x}\sqrt{x}$ é contínua em $[0,+\infty[$. Estude a variação (intervalos de monotonia e extremos) de $f(x)$ neste conjunto. A imagem da função tem alguma assíntota? Justifique.

R: *A função é visivelmente contínua em todo o ponto próprio de* $[0,+\infty[$. *Como* $\lim_{x=+\infty} f(x)=0$, *a função também é contínua para* $x=+\infty$.

$$f'(x) = -e^{-x}\sqrt{x}+e^{-x}\frac{1}{2\sqrt{x}}=e^{-x}\cdot\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(x)>0 \Rightarrow 1-2x>0 \Rightarrow x<\frac{1}{2}$$
$$f'(x)<0 \Rightarrow 1-2x<0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-2x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

A função é crescente em $[0, {}^1/_2[$, *decrescente em* $]{}^1/_2, +\infty[$ *e tem os extremos:*

Máximo: $f({}^1/_2)=e^{-1/2}\sqrt{{}^1/_2}$
Mínimos: $f(0)=0$ *e* $f(+\infty)=0$.

A imagem da função admite a assíntota $Y=0$ *porque* $f(+\infty)=0$.

4) Sendo $z = x\,y\,f\left(\dfrac{x+y}{x\,y}\right)$, mostre que z satisfaz a uma relação da forma

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z\cdot g(x,y).$$

Ache $g(x,y)$.

R: $$\frac{\partial z}{\partial x}=y\,f\left(\frac{x+y}{x\,y}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{x+y}{x\,y}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\,f\left(\frac{x+y}{x\,y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x+y}{x\,y}\right)$$
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\,y\,f\left(\frac{x+y}{x\,y}\right)-$$
$$-x\,y\,f'\left(\frac{x+y}{x\,y}\right)-x\,y^2 f\left(\frac{x+y}{x\,y}\right)+$$
$$+x\,y\,f'\left(\frac{x+y}{x\,y}\right)=x\,y\,(x-y)\,f\left(\frac{x+y}{x\,y}\right).$$
$$g(x,y)=x-y.$$

5) Utilize a teoria da interpolação para achar o polinómio $P(x)$ de grau mínimo que satisfaz às condições: $P(-2)=-5$, $P(-1)=-1$, $P(1)=1$ e $P'(0)=-1$.

R:

x	y	δy	$\delta^2 y$
-2	-5	4	-1
-1	-1	1	
1	1		

O polinómio interpolador é

$$\begin{aligned} I(x) &= -5 + 4(x+2) - (x+2)(x+1) = \\ &= -x^2 + x + 1. \\ P(x) &= I(x) + a(x+2)(x+1)(x-1) = \\ &= a x^3 + (2a-1)x^2 + (1-a)x - 2a + 1 \\ P'(x) &= 3ax^2 + 2(2a-1)x + 1 - a \\ P'(0) &= 1 - a = -1 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

e portanto

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 3.$$

6) Sejam $A = |a_{ik}|$ e $B = |b_{jk}|$ duas matrizes dos tipos $(m \times n)$ e $(p \times n)$, respectivamente, e considere a matriz $P = A \theta B$ de termo geral $p_{ij} = a_{ih} b_{jh}$ (h mudo corrente de 1 a n).

Como se forma a matriz P? Qual é o seu tipo? Escreva P sob a forma de um produto de matrizes. Mostre que a operação θ não é associativa.

R: *A matriz* P *obtém-se multiplicando linhas de* A *por linhas de* B *e portanto é do tipo* $(m \times p)$.

Como $p_{ij} = a_{ih} b^*_{hj}$, *tem-se* $P = A \cdot B^*$.

$(A \theta B) \theta C = (A \cdot B^*) \cdot C^* = A B^* C^*$

$A \theta (B \theta C) = A \cdot (B \theta C)^* = A \cdot (B \cdot C^*)^* = A C B^*$

e portanto a operação θ *não é associativa.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Julho (2.ª chamada) — Prova escrita — Duração 3 horas — 16-7-1666.

5669 — 1) Empregue a fórmula de Taylor para provar que $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2}\xi$, com $\lim\limits_{x=0} \xi = 1$.

Utilize o resultado para estudar a natureza da série cujo termo geral é $u_n = n\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)$.

R: *Pela fórmula de Taylor, com resto de Lagrange, vem*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}\cos\theta x \quad (0 < \theta < 1)$$

e, fazendo $\xi = \cos\theta x$, *vem imediatamente o resultado.*

$$n u_n = n^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = n^2 \frac{1}{2n^2}\xi \rightarrow 1/2 \text{ e portanto}$$

Σu_n *é divergente.*

2) Calcule $P \dfrac{x^4}{1+x^2} \operatorname{arctg} x$.

R: *Notando que* $\dfrac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$, *vem*

$$P\frac{x^4}{1+x^2}\cdot arctg\, x = P\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) arctg\, x =$$
$$= P\, x^2\, arctg\, x - P\, arctg\, x + P\frac{arctg\, x}{1+x^2}.$$

Como

$$\begin{aligned} P\, x^2\, arctg\, x &= \frac{x^3}{3} arctg\, x - \frac{1}{3} P \frac{x^3}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^3}{3} arctg\, x - \frac{1}{3} P\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) = \\ &= \frac{x^3}{3} arctg\, x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\log(1+x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\, arctg\, x &= x\, arctg\, x - P\frac{x}{1+x^2} = \\ &= x\, arctg\, x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) \end{aligned}$$

$$P\frac{arctg\, x}{1+x^2} = \frac{(arctg\, x)^2}{2},$$

vem

$$P\frac{x^4}{1+x^2}\cdot arctg\, x = \frac{x^3}{3} arctg\, x + x\, arctg\, x -$$
$$- \frac{1}{3}\log(1+x^2) - \frac{1}{6}x^2 + \frac{(arctg\, x)^2}{2}.$$

3) Estude a variação (intervalos de monotonia e extremos) e a convexidade de $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$.

R: $f'(x) = \dfrac{1 - 2\log x}{x^3}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - 2\log x > 0 \Rightarrow \log x < 1/2 \Rightarrow x < \sqrt{e}$

$f'(x) < 0 \Rightarrow 1 - 2\log x < 0 \Rightarrow \log x > 1/2 \Rightarrow x > \sqrt{e}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\log x = 0 \Rightarrow \log x = 1/2 \Rightarrow x = \sqrt{e}$

A função é crescente em $]0, \sqrt{e}[$, *decrescente em* $]\sqrt{e}, +\infty[$ *e possui os máximos* $f(\sqrt{e}) = 1/2$ *e* $f(+\infty) = 0$.

Como

$$f''(x) = \frac{-5 + 6\log x}{x^4},$$

$$f''(x) \geqq 0 \Rightarrow x > \sqrt[6]{e^5}$$
$$f''(x) \leqq 0 \Rightarrow x < \sqrt[6]{e^5}$$

isto é, a função é convexa em $[\sqrt[6]{e^5}, +\infty[$ *e côncava em* $]0, \sqrt[6]{e^5}]$. *Existe um ponto de inflexão para* $x = \sqrt[6]{e^5}$.

4) Sendo $z = f(x, y)\cdot e^{mx+ny}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, determine m e n por forma que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0 .$$

R:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} e^{mx+ny} + f(x, y)\cdot e^{mx+ny} m$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} e^{mx+ny} + f(x, y)\, e^{mx+ny} n$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} e^{mx+ny} n + m\frac{\partial f}{\partial y} e^{mx+ny} + m f(x, y)\, e^{mx+ny} n .$$

Logo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = \frac{\partial f}{\partial x}(n-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(m-1) + f(x, y)(1 + mn - n - m)$$

e a condição proposta implica $m = n = 1$.

5) **Sendo** $\varphi(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$, $\varphi_i(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)_{j \neq i}$ e $L_i(x) = \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)}$, com $x_i \neq x_j$, prove que:

a) $L_i(x) = \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi'(x_i)}$ *b)* $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$.

R: *a)* $\varphi(x) = (x - x_i)\,\varphi_i(x) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \varphi'(x) = \varphi_i(x) + (x - x_i)\,\varphi_i'(x) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \varphi'(x_i) = \varphi_i(x_i)$.

Logo $\dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)} = \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi'(x_i)}$.

b) $\dfrac{1}{\varphi(x)} = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{\varphi_i(x_i)(x - x_i)}$ *e, multiplicando ambos os membros desta igualdade por* $\varphi(x)$, *vem imediatamente o resultado pretendido.*

6) Determine α, β e γ por forma que o sistema

$$S)\ \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = \alpha \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = \beta \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = \gamma \end{cases}$$

seja equivalente ao sistema

$$S')\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 . \end{cases}$$

R: *Para* S') *vem* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ *e o sistema é possível indeterminado de grau* 1 *com a solução* $x_1 = 2 - x_3$ *e* $x_2 = 1 + x_3$.

O sistema S) *também é possível indeterminado de grau* 1 *e, para que tenha a mesma solução de* S'), *basta substituir* x_1 *e* x_2 *por* $2 - x_3$ *e* $1 + x_3$, *respectivamente. Obtém-se imediatamente* $\alpha = 9$, $\beta = 5$ *e* $\gamma = 0$.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Matemáticas Gerais — Exame final—Época de Outubro—Prova escrita— 1-10-1966.

5670 — 1) A imagem M do complexo $4 + 3i$ descreve um arco de circunferência de 45° com centro na origem dos eixos coordenados. Qual é o complexo cujo afixo é a nova posição do ponto M? Justifique.

R: *Tem-se* $4 + 3i = 5(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, *com* $\cos\alpha = 4/5$ *e* $\operatorname{sen}\alpha = 3/5$. *O complexo pedido é*

$$z_1 = 5[\cos(\alpha + 45^\circ) + i \operatorname{sen}(\alpha + 45^\circ)]$$

ou

$$z_2 = 5[\cos(\alpha - 45^\circ) + i \operatorname{sen}(\alpha - 45^\circ)] .$$

Tem-se, evidentemente,

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{7\sqrt{2}}{2} \quad ou \quad z_2 = \frac{7\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{5} .$$

2) Sendo $f(x) = e^{-1/x^2}\ (x \neq 0)$, diga que valor deve atribuir a $f(0)$ para que $f(x)$ fique contínua em R. Justifique.

Considerando $f(x)$ já assim definida, prove que $f(x)$ é derivável para todo o valor de x e que a derivada é contínua em R. Determine os intervalos de monotonia e os extremos de $f(x)$.

R: *Como* $\lim_{x=0} f(x) = 0$, *deve tomar-se* $f(0) = 0$.

Para $x \neq 0$ *tem-se* $f'(x) = e^{-1/x^2}\cdot\dfrac{2}{x^3}$ *e* $f'(0) = = \lim \dfrac{e^{-1/x^2}}{x} = 0$.

Dado que

$$f'(x) > 0 \quad para \quad x > 0$$
$$f'(x) < 0 \quad para \quad x < 0$$
$$f'(x) = 0 \quad para \quad x = 0 ,$$

a função $f(x)$ *é crescente em* $]0, +\infty[$, *decrescente em* $]-\infty, 0[$ *e possui mínimo local para* $x=0$: $f(0)=0$. *Os outros extremos locais (máximos) são* $f(-\infty)=1$ *e* $f(+\infty)=1$.

3) Calcule $P\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$.

R: *Fazendo* $\sqrt{x^2+a^2}=x+t$, *vem* $x=\dfrac{a^2-t^2}{2t}$, $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{t^2+a^2}{2t^2}$ *e tem-se*

$$P\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{1}{2}P\frac{1}{\dfrac{a^2-t^2}{2t}+\dfrac{a^2-t^2}{2t}+t}\cdot$$

$$\cdot\frac{t^2+a^2}{t^2}=-\frac{1}{2a^2}P\frac{t^2+a^2}{t}=-\frac{1}{2a^2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4a^2}t^2-\frac{1}{2}\log|t|=-\frac{1}{4a^2}(\sqrt{x^2+a^2}-x)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\log|\sqrt{x^2+a^2}-x|.$$

4) Suponha $g(x,y)$ contínua no ponto $P(a,b)$. Mostre que, sendo $g(a,b)>C$ (ou $g(a,b)<C$), existe uma vizinhança de $P(a,b)$ na qual $g(x,y)>C$ (ou $g(x,y)<C$).

R: *Sendo, por exemplo,* $g(a,b)>C$, *tome-se* $\delta\leqslant g(a,b)-C$. *Em virtude da continuidade de* $g(x,y)$ *em* $P(a,b)$, *tem-se* $C\leqslant g(a,b)-\delta<g(x,y)$ *para* $(x,y)\in V_\varepsilon(P)$ *o que prova o resultado.*

5) Calcule as raízes do polinómio $8x^3-x^2-24x+3$, sabendo que ele possui uma raiz da forma $\sqrt{n}$, onde n designa um inteiro positivo que não é quadrado perfeito.

R: *Fazendo no polinómio* $x=\sqrt{n}$, *vem* $8n\sqrt{n}-n-24\sqrt{n}+3=0$ *ou* $8\sqrt{n}(n-3)=n-3$, *relação que só é satisfeita com* $n=3$.

Utilizando a regra de Ruffini, vem

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & -1 & -24 & 3 \\ \sqrt{3} & & 8\sqrt{3} & 24-\sqrt{3} & -3 \\ \hline & 8 & 8\sqrt{3}-1 & -\sqrt{3} & \underline{|0} \end{array}$$

e as restantes raízes são as do polinómio $8x^2+(8\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}$. *Tem-se então* $r_1=\sqrt{3}$, $r_2=-\sqrt{3}$ *e* $r_3=1/8$.

6) Discuta o sistema

$$\begin{cases} x_1-k\,x_2+k^2x_3=k \\ k\,x_1-k^2x_2+k\,x^3=1 \\ k\,x_1+\ \ x_2+k^3x_3=1 \end{cases}$$

segundo os valores do parâmetro k.

R: *Como* $\begin{vmatrix} 1 & -k & k^2 \\ k & -k^2 & k \\ k & 1 & k^3 \end{vmatrix}=k(k-1)(k+1)(k^2+1)$

o sistema é possível determinado se $k\neq 0, 1, -1$.

Verifica-se fàcilmente que o sistema é impossível se $k=0$, *possível indeterminado de grau* 1 *se* $k=1$ *e* $k=-1$.

Enunciados e soluções dos N.os 5659 a 5670
de Fernando de Jesus

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redação

161 — A. G. Kurosh — **Algébre Générale** — Dunod — Paris 48 F.

O leitor encontrará nesta obra da Colecção Universitária de Matemática da Editora Dunod—a fisionomia actual da álgebra geral tal como a apresenta o célebre matemático soviético, autor de não menos célebres tratados sobre teorias dos grupos.

O livro destina-se aos estudantes que já adquiriram sólidos conhecimentos sobre álgebra superior e faz uma exposição em que são indicadas as divisões fundamentais da álgebra geral contemporânea e postos em evidência os teoremas mais significativos e potentes, deixando para o estudante o cuidado de procurar, para o pormenor, as monografias e tratados mais desenvolvidos. Alguns temas, que até aqui não figuravam nas obras destinadas ao ensino são expostos na obra. São por exemplo: anéis não associativos, álgebra universal, grupos com multi-operadores.

A obra trata sucessivamente dos pontos seguintes: relações; grupos e anéis; álgebras universais; grupos com multi-operadores; reticulados; grupos e anéis com operadores; módulos, álgebras lineares; grupos e anéis ordenados e topológicos, anéis normados.

Termina com bibliografia bastante completa e índice alfabético de assuntos.

162 — J. Lelong-Ferrand, F. Combes, D. Leborgue M. Viallard — **Problèmes de l'Analyse** *Maitrises de mathématiques, C 1* — Dunod — Paris 32 F.

Na colecção «Problèmes de licence et de maitrise» a editora Dunod publicou um repositório de exercícios de análise matemática, com cerca de duzentos problemas, resolvidos pormenorizadamente e com notas adicionais sobre assuntos contidos nos problemas do novo certificado C 1, seja segundo ciclo das Faculdades de Ciências Francesas. São catorze os capítulos em que os problemas se agrupam.

Espaços topológicos. Espaços vectoriais normados. Derivação de funções vectoriais de uma ou várias variáveis numéricas. Diferenciais. Aplicações recíprocas, funções implícitas. Integração de funções reguladas. Equações diferenciais. Equações diferenciais lineares. Equações lineares e quase lineares às derivadas parciais de primeira ordem. Cálculo das variações. Formas diferenciais. Funções holomorfas de uma variável complexa. Equações diferenciais no domínio complexo. Espaços funcionais.

Cada capítulo inicia-se por um resumo dos assuntos essenciais nele versados. Os problemas têm carácter teórico e compreendem exercícios de cálculo e de aplicações.

É inútil insistir no interesse que um livro desta natureza tem para os estudantes de matemática.

163 — R. Silber — **Étude et trace des écoulements permanents en canaux et rivières** — Dunod — Prais 40 F.

Os estudo dos escoamentos em superfície livre é particularmente difícil devido ao facto de existirem, na equação do movimento, parâmetros que são funções não analíticas da altura da água, mesmo nos casos mais simples. No trabalho que apresentamos, o autor, R. Silber, professor da Faculdade de Ciências de Grenoble, faz uma análise completa dos métodos clássicos. Alguns são longos e laboriosos, outros são simplificados pela introdução de funções admitidas empìricamente pela adopção de hipóteses suplementares; o problema posto determina em princípio o método a empregar.

A segunda edição desta obra comporta, além de certo número de correcções e complementos, um capítulo inteiramente novo que considera os casos de um canal com leito de inclinação variável e de um canal com caudal progressivamente variável por fontes ou perdas contínuas laterais.

Na exposição adopta-se uma *equação universal* de natureza perfeitamente analítica (cap. II) em substituição da equação de parâmetros não analíticos, de valores e de evoluções variáveis com a natureza do canal ou do curso de água considerados. A nova equação permite o traçado de um diagrama universal que dá a evolução da *profundidade reduzida* em função do *caudal reduzido* sob a forma de características graduadas em *energia reduzida.*

Este diagrama, aplicável tanto aos cursos de água naturais como aos canais prismáticos, fornece um método de traçado absolutamente geral, mais rápido e menos fastidioso que os métodos que utilizam funções empíricas e não resulta da exigência de novas hipóteses simplicadoras. Fornece ainda um método geral de estudo qualitativo e quantitativo, permitindo em particular evidenciar as particularidades do escoamento e seguir a evolução: formação da secção de controlo, aparecimento de regolfo, efeitos de singularidades como variações de inclinação, abaixamento ou elevação do leito, estreitamento ou alargamento, pilar de ponte.

A publicação tem interesse especial a todos os engenheiros ou alunos de engenharia hidráulica e de uma maneira geral a todos os gabinetes de estudo da especialidade ou de ramos afins.

164 — J. Bass — **Cours de Mathématiques** — Tomo I e Tomo II — Quatrième édition revue et corrigée — Masson et C^ie Paris.

Este curso de matemática dedicado aos alunos das Grandes Escolas de Engenheiros versa assuntos que se integram em determinados programas das Faculdades de Ciências. Serve particularmente os estudantes que preparam a sua «maîtrise» em física (matemática dos certificados C_1 e C_2) e a «maîtrise» em mecânica. Alguns capítulos poderão igualmente ser utilizados no segundo ano do primeiro ciclo (*M P* e *P C*).

Entretanto a sua leitura exige conhecimentos prévios de álgebra, de análise e de geometria analítica que, fazendo parte dos antigos programas de propedêutica são actualmente ensinados em matemáticas especiais e repartidos pelos dois anos do primeiro ciclo das Faculdades.

A quarta edição difere substancialmente das precedentes em muitos pontos. Se bem que o plano da obra se mantenha o mesmo no seu conjunto, a ordem seguida foi por vezes modificada. Certos capítulos cujo ensino passou ao nível do primeiro ciclo, foram fundidos (por exemplo os dois capítulos sobre integrais duplos e múltiplos) e outros novos foram introduzidos: quaterniões, integrais de Lebesgue, complementos sobre séries e integrais de Fourier, definição das distribuições (sem grande desenvolvimento) formas diferenciais exteriores, campos de tensores e noções de análise tensorial, noções sobre séries duplas. Os parágrafos sobre métodos numéricos, sem ocuparem extensão exagerada, foram regrupados numa oitava parte do curso, e sensìvelmente aumentados. Aí se encontram métodos um pouco mais actualizados para a resolução dos problemas de valores próprios, de equações algébricas e de inversão de matrizes, para a soma de séries numéricas, cálculo de integrais definidos, integração de equações diferenciais e tratamento de alguns problemas relativos às equações de derivadas parciais.

Os capítulos sobre nomografia e planímetros foram sensìvelmente conservados.

Fste curso tem a preocupação de apresentar uma formulação matemática correcta.

É porém evidente que para redigir em 1 200 páginas os elementos que constituem a *cultura matemática mínima do engenheiro ou do físico*, tornou-se necessário reduzir a importância de desenvolvimentos abstratos, enunciar sem demonstração certos resultados e recorrer por vezes, explicita ou implicitamente, à intuição.

Os exercícios propostos tem as soluções desenvolvidas publicadas em outro volume da mesma editora (J. Bass — Exercices de mathématiques).

A obra divide-se em dois volumes: o primeiro comporta aproximadamente as matérias relativas ao ensino da matemática do certificado C_1 de física e algumas das matérias de C_2. O segundo comporta as do certificado C_2 de física, diversos complementos e a teoria das funcões analíticas.

Podendo ser adquiridos independentemente um do outro, os dois volumes formam um todo com paginação única.

165 — J. Bass — Eléments de Calcul des Probabilités — Théorique et Pratique — Deuxième édition, révue et augmentée — Masson et C^ie Paris.

Estes «elementos de cálculo das probabilidades» destinam-se aos alunos das Grandes Escolas de Engenharia e aos utilizadores, engenheiros e físicos. Mas podem igualmente prestar valiosos serviços aos estudantes do segundo ciclo das Faculdades de Ciências que estudaram o cálculo das probabilidades, a estatística e a física. A sua leitura não exige profundos conhecimentos de matemática moderna mas apenas um razoável treino da matemática clássica que se ensina no primeiro ciclo francês: elementos de álgebra linear cálculo dos integrais simples e múltiplos com alguns complementos que serão úteis mas não indispensáveis numa primeira leitura (integrais de Fourier, funções de Euler, funções de variável complexa).

A segunda edição difere da primeira por alguns capítulos adicionais, noções elementares sobre a teoria da medida, cadeias de Markov. Foi revista e corrigida até o pormenor, tendo em consideração várias sugestões apresentadas por numerosos utilizadores.

A obra comporta sete capítuos de cálculo das probabilidades pròpriamente dito, redigidos de forma tão intuitiva quanto possível mas com a preocupação constante de precisão e de exactidão. Eles terminam com a lei fraca dos grandes números e a tendência para a lei normal nas suas hipóteses mais simples. Os três capítulos seguintes constituem uma introdução elementar ao estudo das funções aleatórias: diversos modelos de definição, exemplos, processos de Poisson, funções aleatórias estacionárias, covariância e espectro, ergodismo, cadeias de Markov. Enfim, os dois últimos capítulos são consagrados a alguns problemas estatísticos e mais particularmente ao texte do χ^2 e a algumas das suas aplicações.

No texto são apresentados numerosos exemplos teóricos ou numéricos.

Além disso, no fim do livro, encontram-se 56 exercícios não resolvidos, referindo-se aos diversos capítulos de curso. A maior parte deles têm indicação da resposta e, para os mais difíceis, do método a empregar na resolução.

A obra termina por seis tabelas numéricas, bibliografia e índice alfabético.

166 — B. Sz. Nagy — C. Foias — Analyse hamonique des opérateurs de l'espace de Hilbert.

Na teoria dos operadores dos espaços de Hilbert, há já muito tempo se obtiveram resultados definitivos pelos operadores auto-adjuntos, unitários ou normais, casos particulares mas de importância fundamental nos diferentes ramos da matemática e da física teórica. A teoria dos operadores não normais, se bem que tenha sido abordada desde há muito sob diversos aspectos ainda não atingiu uma forma definitiva semelhante. O desenvolvimento actual desta teoria está intimamente ligado aos trabalhos de certos matemáticos soviéticos e americanos. Os trabalhos da da primeira escola são relativos em primeiro lugar às funções características dos operadores e aos modelos triangulares que destes operadores resultam, ao passo que os da segunda escola inspiram-se sobretudo sobre a teoria da predição pelos processos estocásticos estacionários. Finalmente existe uma orientação de pesquisas sugerida pelo teorema sobre a dilatação unitária das contracções do espaço de HILBERT (Sz. NAGY, 1953) e desenvolvida pelos Autores da presente monografia e outros (SCHREIBER, HALPERIN, LANGER, MLAK, etc.).

Esta última orientação permite, entre outras, estabelecer um cálculo funcional para as contracções do espaço de HILBERT. Por outro lado interfere também, em certo sentido, com as outras duas orientações de pesquisas. Com efeito, a função característica de uma contracção T aparece, neste estudo, de forma absolutamente natural, particularmente pela «análise harmónica» da dilatação unitária de T, análise que é de resto inspirada pela teoria da predição.

O objectivo desta monografia é o de apresentar uma exposição pormenorizada das informações sobre uma contracção T que se pode deduzir a partir da sua dilatação unitária, reduzindo desta maneira o estudo dos operadores de tipo geral ao dos operadores unitários.

167 — HOCQUENGHEM, JAFFARD, CHENON — **Mathématiques** — *Calcul différentiel, et intégral* — 3ème édition revisée et completée — Masson et Cie Paris.

Trata-se de nova edição do já clássico tratado dos professores HOCQUENGHEM e JAFFARD aos quais se juntou agora CHENON, e destinado ao primeiro ano do curso de matemáticas gerais no Conservatório Nacional de «Arts et Métiers».

Os conhecimentos exigidos para o acesso a este curso estão contidos nos programas dos liceus e escolas nacionais profissionais franceses. Os alunos saídos destes liceus profissionais e escolas profissionais, depois de um ano normal de curso nocturno têm acesso normal às técnicas essenciais de cálculo diferencial e integral e aplicações geométricas que facilitam por sua vez a compreensão de teorias abstractas.

Este primeiro ano de estudo da matemática deve permitir aos estudantes da «Promotion Supérieur du Travail» a entrada natural em qualquer curso científico.

Nesta ordem de ideias os Autores incluiram nesta nova edição um apêndice contendo os conhecimentos necessários ao estudo dos quadripolos.

Além disso, o programa deste primeiro ano foi concebido por forma a poder preencher as lacunas na formação matemática dos indivíduos que basearam o início dos seus estudos em outros ramos da ciência — química e ciências naturais.

Os Autores, sem perderem de vista que os estudantes de Promoção Superior do Trabalho apenas consideram a matemática como um meio necessário à compreensão das outras ciências, dedicaram toda a atenção em fornecer *definições precisas* e em expor *raciocínios rigorosos*. Com efeito os perigos no tratamento matemático de um problema técnico residem menos no erro do cálculo que mais cedo ou mais tarde acaba por aparecer, do que na pequena falha no raciocínio que conduz a conclusões erradas. Os estudantes devem persuadir-se de que a subtileza aparente de certos factos matemáticos não é apenas um jogo de espírito mas a tradução de certas dificuldades que se apresentam ao técnico.

Referências dos N.os 161 a 167, por adaptação de bibliografia distribuida pelos Editores.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo *prévio* entre o Autor e a Redacção.

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor — **MASSON ET C.ie, Paris**

J. Bass — *Cours de Mathématiques — Troisième Édition Revue et Corrigée.*
— *Exercices de Mathématiques.*
M. Bouix — *Les Fonctions Géneralisées ou Distributions.*
M. A. Tonnelat — *Les Vérifications Experimentales de la Relativite Générale.*
A. Hocquenghem & P. Jaffard — *Mathématiques. Tome I. Éléments de calcul différential et intégral.*

Editor — **LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD — Paris**

Marcel Doligez — *Gravitation — Contribution à la théorie corpuscular de la gravitation.*
H. Laurent — *Théorie des Jeux de Hasard.*

Editor — **AKADÉMIAI KIADÓ — BUDAPEST**

Deuxième Congrès Mathématique Hongrois.
Medgyessy — *Decomposition of Superpositions of Distribution Functions.*

Editor — **IZDATELHSTVO AKADEMII NAUK SSSR — MOSKVA**

Lawrentjew, Juschkewitsch, Grigorjan — Leonhard Euler.

Editor — **DUNOD, Paris**

Claude Berge — *Espaces topologiques — fonctions multivoques.*
A. Doneddu — *Cours de Mathématiques Supérieures. Tome 1. Algèbre et géométrie.*
Lucienne Felix — *Exposé moderne des mathématiques élémentaires.*
C. Pisot et M. Zamansky — *Mathématiques générales — algèbre — analyse.*

Editor — **AKADEMIE-VERLAG, Berlin**

A. I. Lurje — *Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie.*

Os sócios da S. P. M., assinantes da «Gazeta de Mat.» e da «Portugaliae Math.», beneficiam para estas obras do desconto de 20 %.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1967 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local de cobrança

As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)		40$00
N.ºs 16 a 49, cada número		12$50
N.ºs 50, 76-77		60$00
N.ºs 51 a 75, 78 a 99, 101 a 104	cada número simples	17$50
	» » duplo	35$00
N.º 100		100$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º—LISBOA-2 — Telefone 369449