GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXVIII **N.° 105-108** JANEIRO-DEZ. 1967

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração – Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 – Lisboa-2

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo *prévio* entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2

MANUEL AUGUSTO ZALUAR NUNES

No dia 30 de Outubro de 1967 faleceu, em Lisboa, o nosso companheiro de trabalho, o Professor Dr. Manuel Augusto Zaluar Nunes.

Natural de Lisboa, onde nasceu em 29 de Abril de 1907, desde muito novo deu provas das suas grandes capacidades e se mostrou trabalhador incansável, professor notável e homem honesto e coerente.

De 1918 a 1924 frequenta o Liceu de Pedro Nunes, em Lisboa. Em 1924 matricula-se na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa onde conclui, em 1929, a licenciatura em Ciências Matemáticas. A sua carreira de professor cedo começa. Quando ainda aluno da Universidade, em 31-X-1928 é nomeado 2.º assistente do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras tendo aí regido cursos práticos da 1.ª e 2.ª cadeiras. Em 1930 concorre ao lugar de 2.º assistente do 2.º grupo da 1.ª secção da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e foi nomeado assistente livre. Em 1931-32 presta serviço nos cursos práticos de Análise Superior, Geometria Projectiva, Geometria Superior e Complementos de Álgebra. Em Novembro de 1933 obteve da Junta Nacional de Educação uma bolsa de estudo que lhe permite frequentar a Faculdade de Ciências de Paris, até fins de Agosto *de 1937. Aí trabalha sob a orientação dos professores Maurice Fréchet e Darmois, nos Instituto Henri Poincaré e Instituto de Estatística da Universidade de Paris. Estes estágios vão influenciar decisivamente toda a sua actividade futura como professor de Estatística. Logo no seu regresso a Portugal retoma as suas actividades como professor na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras.*

No período de 1937 a 1940, Manuel Zaluar juntamente com A. Monteiro, que também como bolseiro tinha sido seu companheiro em Paris, com Bento Caraça e outros consegue reunir um grupo de professores jovens e de recem-licenciados que vai trabalhar para o renovamento e expansão dos estudos da matemática em Portugal. Influenciados pelo movimento Bourbaki que então se desenhava em França (J. Dieudonné fora contemporâneo de Zaluar e Monteiro na Universidade de Paris) promovem na Universidade de Lisboa, e depois na do Porto cursos de modernisação do estudo da matemática e procuram formar investigadores. Criam-se as duas revistas «Portugaliae Mathematica» e «Gazeta de Matemática», a que Zaluar Nunes se vai dedicar intensamente. Pode mesmo afirmar-se que a continuidade das duas revistas, em especial de «Portugaliae Mathematica», se deve, a partir de 1944, inteiramente a Zaluar Nunes. Sem êle as duas revistas não teriam sobrevivido à saída, de Portugal, de A. Monteiro. A partir do n.º 4 de «Gazeta de Matemática» é Zaluar Nunes quem toma conta de toda a sua direcção e organização; quanto a «Portugaliae Mathematica» foi seu editor desde início e chamou a si, mesmo quando foi forçado a aceitar no estrangeiro o trabalho que, como professor, lhe era negado em Portugal, toda a organização que permitiu a continuação da vida de «Portugaliae Mathematica».

Foi também um dos fundadores da Sociedade Portuguesa de Matemática e seu presidente em 1947, sendo também fundador do Instituto de Actuários Portugueses.

Em 1939 é nomeado professor auxiliar contratado da Faculdade de Ciências de Lisboa e professor catedrático do Instituto Superior de Agronomia, onde continua como professor até 1947, ano em que foi desligado do serviço, por motivos políticos, conjuntamente com outros vinte professores universitários.

Afastado do professorado em Portugal, o Governo francês, por convite do Ministério dos Negócios Estrangeiros, concede-lhe uma bolsa nos anos de 1948-1949.

Em 1949, o prof. Zaluar Nunes é nomeado «attaché de recherches» funções que desempenha no «Centre National de Recherches Scientifiques» nos anos de 1949 e 1950.

Em 1953 a Universidade do Recife convida-o a ingressar no Corpo Docente da sua Faculdade de Filosofia e na Escola de Engenharia, e aí se conserva até ao fim, desenvolvendo como professor grande actividade que leva mesmo a várias cidades do Brasil onde regeu cursos de férias em especial em Fortaleza, Curitiba, Campina Grande e São José dos Campos.

Na Universidade do Recife impulsionou a renovação dos estudos de matemática no movimento iniciado pelos professores brasileiros Newton Maia, Siqueira Neto e Luís Freire.

Contribue poderosamente para a criação do Instituto de Física e Matemática, de que veio a ser director, lutando pela fundação do Centro de Computação, a que a Universidade do Recife, como preito de homenagem às suas qualidades de grande professor, decidiu dar o seu nome.

A sua actividade prodigiosa de professor e em especial a de Director das revistas de matemática pouco tempo lhe deixavam para outros escritos além dos artigos que deixou nas duas revistas e a colaboração esclarecida que prestou à «Grande Enciclopédia Luso-Brasileira». Publicou ainda em 1931, «Exercícios de Álgebra Superior» vol. 1, em colaboração com A. Monteiro e C. F. Carvalho, em 1933 «Elementos das Probabilidades e de Estatística Matemática» em colaboração com Mário Santos, e no Brasil em 1956 «Elementos de Cálculo das Probabilidades».

ANO XXVIII – N.os 105-108 **GAZETA DE MATEMÁTICA** JANEIRO/DEZ. – 1967

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA

Sôbre os ideais da soma directa de uma família finita de anéis

por **M. Eulália Coutinho e José Morgado**

Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. Introdução

Sabe-se que, se $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$ é a soma directa dos anéis $S_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, cada um dos quais com elemento um, então os ideais direitos (esquerdos, bilaterais) de S são precisamente os ideais direitos (resp. esquerdos, bilaterais) da forma $J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_n$, onde J_i é um ideal direito (resp. esquerdo, bilateral) de S_i (ver, por exemplo, [1], p. 57, ex. 1).

No entanto, a condição de que cada S_i tenha elemento um não é necessária para que cada ideal J de S seja soma directa de ideais J_i de S_i.

Assim, por exemplo, seja $S = S_1 \oplus S_2$ e suponhamos que S_1 possui a seguinte propriedade: *para cada elemento* $a \in S_1$, *existe unidade direita local*, isto, é, existe um elemento $e_a \in S_1$ tal que $a e_a = a$. Seja J um ideal de S e seja $(a, b) \in J$. Como

$$a, 0) = (a, b) \cdot (e_a, 0)$$
$$\text{e} \ (0, b) = (a, b) - (a, 0),$$

conclui-se que $(a, 0)$ e $(0, b)$ estão em J.

Se J_1 designa o conjunto dos elementos $a \in S_1$ tais que se tem $(a, b) \in J$ para algum $b \in S_2$ e J_2 designa o conjunto dos elementos $b \in S_2$ tais que $(a, b) \in J$ para algum $a \in S_1$, vê-se que J_1 e J_2 são ideais direitos de S_1 e S_2, respectivamente, e que, além disso, $J = J_1 \oplus J_2$.

Surge naturalmente o problema de formular uma condição necessária e suficiente sôbre os anéis S_i para que todo ideal direito (esquerdo, bilateral) de S seja soma directa de ideais direitos (resp. esquerdos, bilaterais) dos anéis S_i.

O objectivo desta nota é precisamente formular uma tal condição.

Limitamo-nos a considerar somas directas com dois somandos; a extensão dos resultados obtidos ao caso de n somandos é imediata.

1. Comecemos por estabelecer o seguinte

LEMA: *Se* J *é um ideal direito (esquerdo, bilateral) da soma directa* $R \oplus S$ *dos anéis* R *e* S, *então existem ideais direitos (resp. esquerdos, bilaterais)* J_1 *e* J_2 *de* R *e* S, *respectivamente, tais que*

$$J = J_1 \oplus J_2,$$

se e sòmente se J *possui a seguinte propriedade:*

(1) $(a,b) \in J$ *implica* $(a,0) \in J$.

Dem.: A condição é necessária, porque, de $(a,b) \in J_1 \oplus J_2$, resulta $a \in J_1$ e, como $0 \in J_2$, tem-se $(a,0) \in J_1 \oplus J_2 = J$.

Para mostrarmos que a condição é também suficiente, consideremos os epimorfismos

$$\theta_1 : R \oplus S \to R \quad \text{e} \quad \theta_2 : R \oplus S \to S,$$

definidos por

$$(x,y)\,\theta_1 = x \quad \text{e} \quad (x,y)\,\theta_2 = y$$

para todo $(x,y) \in R \oplus S$, e sejam J_1 e J_2 os ideais de R e S, respectivamente, definidos por

$$J_1 = (J \cap (R \oplus \{0\}))\,\theta_1$$
$$\text{e} \quad J_2 = (J \cap (\{0\} \oplus S))\,\theta_2 .$$

Vejamos que

$$J = J_1 \oplus J_2 .$$

Com efeito, se $(a,b) \in J_1 \oplus J_2$, então $a \in J_1$ e da definição de J_1 resulta que $(a,0) \in J$. De modo análogo se vê que $(0,b) \in J$ e, por consequência, $(a,b) \in J$, i. e., $J_1 \oplus J_2 \subseteq J$.

Inversamente, se $(a,b) \in J$, então $(a,0) \in J$, em virtude da condição (1); como $(0,b) = (a,b) - (a,0)$, tem-se também $(0,b) \in J$. Ora

$$a = (a,0)\,\theta_1 \in (J \cap (R \oplus \{0\}))\,\theta_1 = J_1$$
$$b = (0,b)\,\theta_2 \in (J \cap (\{0\} \oplus S))\,\theta_2 = J_2 ,$$

donde $(a,b) \in J_1 \oplus J_2$, i. e., $J \subseteq J_1 \oplus J_2$, o que completa a demonstração.

2. Suponhamos agora que a condição (1) é válida para todo ideal direito de $R \oplus S$. Então, em particular, é válida para todo ideal *principal* direito de $R \oplus S$.

Inversamente, se a condição (1) é válida para todo ideal *principal* direito de $R \oplus S$, então é válida para todo ideal direito de $R \oplus S$.

Na verdade, se $(a,b) \in J$, então como $(a,b) \in ((a,b))$, onde por $((a,b))$ designamos o ideal principal direito gerado por (a,b), resulta que se tem $(a,0) \in ((a,b)) \subseteq J$.

Conclusão análoga se obtém para ideais esquerdos e para ideais bilaterais.

Por consequência, os ideais direitos de $R \oplus S$ são somas directas de ideais direitos de R e S, respectivamente, se e sòmente se R e S são tais que, para todo $(a,b) \in R \oplus S$, se tem $(a,0) \in ((a,b))$, quer dizer, se e sòmente se existem elementos $x \in R$ e $y \in S$ e um inteiro n tais que

$$(2) \qquad \begin{cases} a\,x + n\,a = a \\ b\,y + n\,b = 0 . \end{cases}$$

Vamos mostrar que o sistema (2) é solúvel em $x \in R, y \in S$ e n inteiro, se e sòmente se existem inteiros p e q primos entre si tais que

$$(3) \qquad p\,a \in a\,R \quad \text{e} \quad q\,b \in b\,S .$$

Com efeito, se o sistema (2) é solúvel, então a condição (3) é satisfeita pondo $p = n - 1$ e $q = n$.

Recìprocamente, se existem inteiros p e q primos entre si tais que a condição (3) se verifica e se p' e q' são inteiros tais que

$$p'p + q'q = 1 ,$$

então, pondo $n = q'q$, vem

$$(n-1)\,a = -p'p\,a \in a\,R$$
$$n\,b = q'q\,b \in b\,S .$$

Isto significa que existem $z \in R$ e $t \in S$ tais que

$$(n-1)\,a = a\,z \quad \text{e} \quad n\,b = b\,t$$

e, portanto, o sistema (2) é solúvel.

Anàlogamente se vê que os ideais esquerdos de $R \oplus S$ são somas directas de ideais esquerdos de R e S, respectivamente, se e sòmente se, para todo $(a, b) \in R \oplus S$, existem inteiros p e q primos entre si tais que

$$p a \in R a \quad \text{e} \quad q b \in S b .$$

Seja R um anel qualquer e seja a um elemento de R. Pode acontecer que exista algum inteiro não nulo m tal que $m a \in a R$ (resp. $m a \in R a$). Se um tal inteiro m existe, então existe pelo menos um inteiro positivo m' ($m' = m$ ou $m' = -m$) tal que $m' a \in a R$ (resp. $m' a \in R a$); ao menor inteiro positivo n_a tal que $n_a a \in a R$ (resp. $n_a a \in R a$), chamaremos *semiordem direita* (resp. *semiordem esquerda*) do elemento a. Se um tal inteiro não nulo m não existe, diremos que a semiordem direita n_a (resp. semiordem esquerda) do elemento a é zero.

É imediato que, *se $m a \in a R$, então n_a divide m.*

Na verdade, se $n_a = 0$, então $m = 0$ e o resultado é trivial.

Se $n_a \neq 0$, então de

$$m = n_a q + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < n_a ,$$

resulta

$$m a - n_a q a = r a$$

e, portanto, $r a \in a R$

Daqui resulta, pela minimalidade de n_a, que $r = 0$, como pretendíamos.

Conclusão análoga para a semiordem esquerda.

É agora fácil estabelecer o seguinte

TEOREMA 1: *É condição necessária e suficiente para que todo ideal direito de* R⊕S *seja soma directa de um ideal direito de* R *e um ideal direito de* S, *que todo elemento de* R⊕S *tenha componentes cujas semiordens direitas sejam primas entre si.*

DEM.: A condição é suficiente. Na verdade, se, para todo elemento $(a, b) \in R \oplus S$, as semiordens direitas n_a e n_b são inteiros primos entre si, então a condição (3) é satisfeita pondo $p = n_a$ e $q = n_b$, quer dizer, o sistema (2) é solúvel.

A condição é necessária. Na verdade, suponhamos que existem inteiros p e q primos entre si tais que

$$p a \in a R \quad \text{e} \quad q b \in b S .$$

Então p e q não são ambos nulos e, segundo o que anteriormente demonstrámos, n_a divide p e n_b divide q, donde o máximo divisor comum de n_a e n_b divide o máximo divisor comum de p e q, quer dizer, as semiordens direitas n_a e n_b são inteiros primos entre si, como queríamos mostrar.

Deste teorema resulta imediatamente o seguinte

COROLÁRIO: *É condição necessária e suficiente para que todo ideal direito de* R⊕R *seja soma direta de dois ideais direitos de* R, *que para cada elemento de* R, *exista alguma unidade direita local.*

DEM.: Suponhamos, com efeito, que todo ideal direito de $R \oplus R$ é soma directa de dois ideais direitos de R. Como, para todo $a \in R$, se tem $(a, a) \in R \oplus R$, do terema 1 resulta que todo elemento $a \in R$ tem semiordem direita $n_a = 1$, o que significa que, para todo elemento $a \in R$, existe alguma unidade di-direita local.

Inversamente, se para cada $a \in R$ existe alguma unidade direita local, então todo elemento de R tem semiordem direita igual a 1, quer dizer, todo elemento de $R \oplus R$ satisfaz à condição do teorema 1, donde resulta que todo ideal direito de $R \oplus R$ é soma directa de dois ideais direitos de R.

Conclusões análogas para ideais esquerdos.

3. O caso de ideais bilaterais de $R \oplus S$ pode ser tratado de modo semelhante ao caso dos ideais direitos.

Seja R um anel qualquer e seja a um elemento de R. Se existe um inteiro não nulo m tal que

$$m a \in a R + R a + \Sigma R a R ,$$

(onde por $\Sigma R a R$ designamos uma soma de um número finito de elementos da forma $x a y$, com $x , y \in R$), chamaremos *semiordem* do elemento a ao menor inteiro positivo p_a tal que que

$$p_a a \in a R + R a + \Sigma R a R .$$

Se não existe um tal inteiro não nulo m, diremos que a semiordem de a é zero.

Mostra-se que, se

$$m a \in a R + R a + \Sigma R a R ,$$

então a semiordem de a divide m.

De um modo inteiramente análogo ao visto anteriormente se estabelece o seguinte

TEOREMA 2: *É condição necessária e suficiente para que todo ideal bilateral de* $\mathrm{R} \oplus \mathrm{S}$ *seja soma directa de um ideal bilateral de* R *e um ideal bilateral de* S, *que todo elemento de* $\mathrm{R} \oplus \mathrm{S}$ *tenha componentes cujas semiordens sejam primas entre si.*

BIBLIOGRAFIA

[1] NEAL McCOY, *The Theory of Rings*, MacMillan Mathematics Paperbacks, 1965.

Sobre espaços normados de dimensão finita

por *Manuel Arala Chaves* (1)

Temos essencialmente em vista com este artigo apresentar uma demonstração «elementar» do seguinte resultado clássico — *num espaço vectorial real de dimensão finita todas as normas são equivalentes* — e ainda indicar algumas consequências importantes deste resultado.

Normalmente, num curso ou tratado de Análise estes resultados surgem após desenvolvimentos que tornam possível uma demonstração mais curta do que a que apresentamos (cf., p. ex.º, [1 — 5. 9. 1]). No entanto, atendendo ao condicionalismo actual das nossas licenciaturas, pareceu-nos de interesse redigir uma demonstração do resultado indicado que se torne acessível a um leitor com preparação equivalente à dada na cadeira de Matemáticas Gerais. É neste sentido mais preciso que entendemos o qualificativo de «elementar» que acima demos à demonstração apresentada. Ainda com o objectivo de nada pressupormos do leitor, além do que é tratado na cadeira de Matemáticas Gerais, começamos por indicar algumas definições e propriedades de que necessitamos.

§ 1. Espaços normados, convergência, continuidade, normas equivalentes

(1) Uma norma sobre um espaço vectorial real (2) E é uma função real de domínio $E , x \to \| x \|$ com as seguintes propriedades:

(1) Bolseiro do Instituto de Alta Cultura.

(2) É possível definir, mais geralmente, *norma* em espaços vectoriais sobre outros corpos.

I) para todo o $x \in E$, $\|x\| \geqq 0$;
II) para todo o $x \in E$, $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0_E$;
III) para todo o $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$;
IV) para todo o $x \in E$ e todo o $\lambda \in R$, $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

O espaço E, munido da norma $x \to \|x\|$ diz-se um *espaço normado* (notação: $(E, \| \|)$).

(2) Exemplos: Sobre R^m qualquer das três seguintes funções é uma norma:

$$(x_1, \cdots, x_m) \to \sup_i |x_i| \,;\, (x_1, \cdots, x_m) \to |x_1| + \cdots + |x_m|$$

e

$$(x_1, \cdots, x_m) \to \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}\,.$$

Sobre o espaço vectorial real $C([0, 1], R)$ das funções reais contínuas de domínio $[0, 1]$, a aplicação $f \to \sup |f(x)|$, $x \in [0, 1]$, é uma norma.

(3) Diz-se que uma sucessão $(x_p)_{p \in N}$, em $(E, \| \|)$, *converge para* $x_0 \in E$ ou que *tem limite* x_0 (notação: $(x_p)_{p \in N} \to x_0$ ou $\lim (x_p)_{p \in N} = x_0$) se a sucessão real $(\|x_p - x_0\|)_{p \in N}$ convergir para o número real 0. Toda a sucessão parcial de uma sucessão convergente ainda é convergente (e para o mesmo limite).

(4) Uma sucessão $(x_p)_{p \in N}$ diz-se *de Cauchy,* se, para todo o número real $\varepsilon > 0$, existir um número natural q, tal que, quaisquer que sejam r e s maiores que q, seja $\|x_r - x_s\| < \varepsilon$. $(x_p)_{p \in N}$ diz-se *limitada* se $(\|x_p\|)_{p \in N}$ for limitada.

(5) Se $(a_p)_{p \in N}, (b_p)_{p \in N}$ são sucessões reais convergentes respectivamente para a e b e se $(x_p)_{p \in N}$ e $(y_p)_{p \in N}$ são sucessões convergentes (em $E, \| \|$) respectivamente para x e y, então $(a_p x_p + b_p y_p)_{p \in N}$ é uma sucessão convergente para $a x + b y$. (Basta utilizar as propriedades (1)-III e (1)-IV).

(6) Se $(x_p)_{p \in N} \to x$, também $(\|x_p\|)_{p \in N} \to \|x\|$. (Atenda-se a que de (1)-III resulta $\|x_p\| = \|x + (x_p - x)\| \leqq \|x\| + \|x_p - x\|$ ou $\|x_p\| - \|x\| \leqq \|x_p - x\|$).

(7) Diz-se que f é *contínua no ponto* $x_0 \in E$ (sendo f uma aplicação do espaço vectorial normado $(E, \| \|)$ no espaço vectorial normado $(F, \| \|^*)$) se, para todo o número real $\varepsilon > 0$, existir um número real $\delta > 0$, de tal modo que, para todo o $x \in E$ que satisfaça a $\|x - x_0\| < \delta$ se tenha $\|f(x) - f(x_0)\|^* < \varepsilon$. E f diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos de E.

(8) Uma bijecção do espaço vectorial normado $(E, \| \|)$ sobre o espaço vectorial normado $(F, \| \|^*)$ diz-se *bicontínua* se for uma aplicação contínua e se a sua aplicação inversa também for uma aplicação contínua (de $(F, \| \|^*)$ sobre $(E, \| \|)$).

Seguindo raciocínios idênticos aos utilizados para funções reais de variável real conclui-se imediatamente que:

(9) A composta de duas aplicações f e g, a primeira contínua em x_0 e a segunda contínua em $f(x_0)$, é uma função $g \circ f$ contínua em x_0.

(10) Se $(x_p)_{p \in N} \to x_0$ e se $f: E \to F$ é contínua em x_0, então $(f(x_p))_{p \in N} \to f(x_0)$.

(11) Duas normas $\| \|$ e $\| \|^*$ sobre um mesmo espaço vectorial E dizem-se *equivalentes* [1] se existirem dois números reais k e K tais que, para todo o $x \in F$,

$$\|x\| \leqq k \|x\|^* \quad \text{e} \quad \|x\|^* \leqq K \|x\|.$$

---

[1] É fácil provar que a relação assim definida no conjunto das normas sobre um espaço vectorial E é uma relação de equivalência, isto é, provar que: 1) uma norma é equivalente a si própria; 2) se $\| \|_1$ é equivalente a $\| \|_2$ também $\| \|_2$ é equivalente a $\| \|_1$; 3) se $\| \|_1$ é equivalente a $\| \|_2$ e se $\| \|_2$ é equivalente a $\| \|_3$ também $\| \|_1$ é equivalente a $\| \|_3$.

O significado desta definição pode ser melhor compreendido a partir das seguintes duas proposições ((12) e (13)):

(12) As normas $\| \|$ e $\| \|^*$, sobre E, são equivalentes se e só se a aplicação I de $(E, \| \|)$ sobre $(E, \|^*)$, definida por $I(x) = x$, for bicontínua.

A demonstração de que I é bicontínua se as normas forem equivalentes é imediata. Provemos então o recíproco. A não existência de um número K nas condições de (11) implica a existência, para cada $p \in N$, de um vector x_p, diferente de 0_E, com $\| x_p \|^* > p^2 \cdot \| x_p \|$. (Se não existisse um tal x_p para um certo $p \in N$, seria, para todo o $x \in E, \| x \|^* \leq p^2 \cdot \| x \|$). A sucessão $(y_p)_{p \in N} = (x_p / p \| x_p \|)_{p \in N}$ converge para 0_E, relativamente à norma $\| \|$, porque, para todo o $p \in E$, $\| y_p \| = \| x_p \| / p \cdot \| x_p \| = 1/p$; mas $(y_p)_{p \in N}$ não converge relativamente à norma $\| \|^*$, visto que, para todo o $p \in N, \| y_p \|^* = \| x_p \|^* / p \cdot \| x_p \| > p$.

A existência de uma sucessão em E, nas condições indicadas, permite afirmar que I não é contínua (se atendermos a (10)). Ànàlogamente se mostraria que a não-existência de um k nas condições de (11) implica que I^{-1} não é contínua.

De (10) e da demonstração de (12) resulta imediatamente que:

(13) Dadas duas normas $\| \|$ e $\| \|^*$ sobre E, o conjunto das sucessões convergentes em $(E, \| \|)$ é igual ao conjunto das sucessões convergentes em $(E, \| \|^*)$ se e só se as duas normas forem equivalentes; se esta condição for satisfeita, cada sucessão convergente tem o mesmo limite em $(E, \| \|)$ e em $(E, \| \|^*)$.

(14) Dadas duas normas equivalentes $\| \|_1$ e $\| \|_2$ sobre E e duas normas equivalentes $\| \|_1^*$ e $\| \|_2^*$ sobre F, uma aplicação $f: E \to F$ é contínua em $a \in E$ relativamente a $\| \|_1$ e $\| \|_1^*$ se e só se o for relativamente a $\| \|_2$ e $\| \|_2^*$.

Isto resulta imediatamente de (9) e (12).

Obs. 1 — Dados um espaço vectorial E de dimensão finita (não nula) — m —, uma base $(e_1, \cdots, e_m)$ de E e uma função f tomando valores em E (e de domínio X), existem m funções reais $-f_1, \cdots, f_m$ — (de domínio X) tais que, para todo o $x (\varepsilon X), f(x) = \sum_{r=1}^{m} f^i(x) \cdot e_i$. Chamar-lhes-emos as «funções coordenadas» de f relativamente à base fixada. Note-se que a aplicação $f \to (f_1, \cdots, f_m)$ é linear.

Obs. 2 — Salvo indicação em contrário suporemos em R^m definida a norma indicada no 1.º exemplo de (2).

(15) Dado um espaço vectorial normado $(E, \| \|)$ e uma aplicação $f: E \to R^m$, f é contínua no ponto a de E se e só se as suas m funções coordenadas f^i (relativamente à base canónica de R^m) o forem. (Sobre a norma de R^m cf. Obs. 2). A demonstração faz ùnicamente intervir as definições de continuidade e da norma de R^m.

(16) Uma sucessão $(a_p^1, \cdots, a_p^m)_{p \in N}$ em R^m é convergente (resp. limitada) se e só se, para todo o $j = 1, \cdots, m$, a sucessão numérica $(a_p^j)_{p \in N}$ for convergente (resp. limitada). E, se para todo o j, $(a_p^j)_{p \in N} \to a^j$, então $((a_p^1, \cdots, a_p^m))_{p \in N} \to (a^1, \ldots, a^m)$. (Basta atender às definições).

(17) Toda a sucessão limitada de R^m (cf. Obs. 2) admite uma sucessão parcial convergente.

Vamos reduzir a demonstração desta proposição à do caso particular $m = 1$ (esta última feita em Matemáticas Gerais). Para provarmos a existência de uma função estrictamente crescente $\varphi: N \to N$ tal que, para todo o $j=1,\cdots,m$, a sucessão real $(a^j_{\varphi(p)})_{p\in N}$ seja uma sucessão parcial convergente de $(a^j_p)_{p\in N}$, podemos, por recorrência, provar a existência de m funções $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ estrictamente crescentes, tais que, para todo o $k\leqq m$ e todo o $j=1,\cdots,k$, $(a^j_{\varphi_k(p)})_{p\in N}$ seja convergente; é evidente que podemos então pôr $\varphi=\varphi_m$. Resta provar a existência de $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$: 1) a existência de φ_1 tal que $(a^1_{\varphi_1(p)})_{p\in N}$ seja convergente decorre da limitação de $(a^1_p)_{p\in N}$ — é o caso $m=1$ da proposição a provar; 2) supondo que existe φ_r tal que, para $j=1,\cdots,r$, $(a^j_{\varphi_r(p)})_{p\in N}$ é convergente, escolhêmos uma sucessão parcial convergente $(a^{k+1}_{\varphi_r(\psi_r(p))})_{p\in N}$ da sucessão real limitada $(a^{r+1}_{\varphi_r(p)})_{p\in N}$ e pomos $\varphi_{r+1}=\varphi_r\circ\psi_r$.

§ 2. Espaços normados de dimensão finita

TEOREMA. *Sejam* E *um espaço vectorial real de dimensão finita* (não nula), $x\to\|x\|$ *uma norma definida sobre* E *e* $(e_i)_{i=1,\dots,m}$ *uma base de* E. *Para cada* $x\in E$ *e cada* $j\in\{1,\cdots,m\}$, *designe* x^j *a coordenada de índice* j *de* x *naquela base. As funções reais* n *e* $\mathfrak{N}$, *de domínio* E, *definidas por* $n(x)=\sup_j(|x^j|\cdot\|e_j\|)$ *e* $\mathfrak{N}(x)=\sup_j|x^j|$ *são ambas normas equivalentes à dada.*

DEMONSTRAÇÃO. (A) — A verificação de que n e $\mathfrak{N}$ são normas não oferece dificuldades.

(B) — Comecemos por provar que n e $\mathfrak{N}$ são equivalentes entre si. Designando por P e Q, respectivamente, os números $\sup_i\|e_i\|$ e $\inf_i\|e_i\|$, é evidente que podemos escrever, para todo o $x\in E$, e todo o $i\in\{1,\cdots,m\}$ $|x^i|\cdot\|e_i\|\leqq|x^i|\cdot P$ e, portanto $n(x)\leqq P\cdot\mathfrak{N}(x)$ e $Q\cdot|x^i|\leqq|x^i|\cdot\|e_i\|$ e, portanto, $\mathfrak{N}(x)\leqq Q^{-1}\cdot n(x)$.

(C) — Provemos agora que n e $\|\;\|$ são equivalentes. Notemos que, pelas propriedades III e IV das normas, podemos escrever

$$\|x\|=\left\|\sum_{i=1}^m x^i e_i\right\|\leqq\sum_{i=1}^m\|x^i e_i\|=\sum_{i=1}^m|x^i|\cdot$$
$$\cdot\|e_i\|\leqq m\cdot\sup_i(|x^i|\cdot\|e_i\|)=m\cdot n(x).$$

A demonstração de (C) e, portanto, do teorema, ficará então concluída se provarmos que existe um número real K tal que, para todo o $x\in E$, $n(x)\leqq K\|x\|$. Note-se, porém, que, por definição de $n(x)$, será $n(x)\leqq\leqq K\cdot\|x\|$ se e só se, para todo o $i\in\{1,\cdots,m\}$, for $|x^i|\cdot\|e_i\|\leqq K\cdot\|x\|$; e é simples de verificar que o que resta provar é então equivalente ao seguinte:

LEMA. Para todo o $i\in\{1,\cdots,m\}$ existe um número real K_i, tal que, para todo o $x\in E$, $|x^i|\cdot\|e_i\|\leqq K_i\cdot\|x\|$.

Demonstremos o lema por indução relativamente à dimensão m de E.

Para $m=1$ a afirmação é trivial: basta tomar $K=1$ e atender à propriedade III da norma — $|x^1|\cdot\|e_1\|=\|x^1\cdot e_1\|=\|x\|$.

Suponhamos a afirmação válida em dimensão r e seja E um espaço vectorial de dimensão $r+1$.

i) Se $x^i=0$, teremos $|x^i|\cdot\|e_i\|\leqq K_i\cdot\|x\|$, qualquer que seja $K_i\geqq0$ (K_i, a existir, terá de ser maior que zero).

ii) Suponhamos então $x^i\neq0$. Poderemos escrever

$$\frac{|x^i|\cdot\|e_i\|}{\|x\|}=\frac{|x^i|\cdot\|e_i\|}{\|x^1e_1+\cdots+x^{r+1}e_{r+1}\|}=$$
$$=\frac{\|e_i\|}{\left\|\dfrac{x^1}{x^i}e_1+\cdots+\dfrac{x^{r+1}}{x^i}e_{r+1}\right\|}\leqq$$
$$\leqq[\|e_i\|/(\inf\|a^1e_1+\cdots+a^{r+1}e_{r+1}\|,$$
$$(a^1,\cdots,a^{r+1})\in R^{r+1},\ a_i=1)]=K_i$$

ou $|x^i|\cdot\|e_i\|\leq K_i\|x\|$, se provarmos que aquele ínfimo é maior que zero. Ora, se o ínfimo deste conjunto de números reais (maiores que zero) fosse nulo, haveria nele uma sucessão convergente para zero, i. e., existiria, para cada $j\in(\{1,\cdots,r+1\}-\{i\})$, uma sucessão de números reais — $(a_p^j)_{p\in N}$, tal que, (pondo $a_p^i=1$, por comodidade de de notação) a sucessão real $\left(\left\|\sum_{j=1}^{r+1}a_p^j e_j\right\|\right)_{p\in N}$ fosse convergente para zero. Seria então $\left(\sum_{j=1}^{r+1}a_p^j e_j\right)_{p\in N}$ convergente para 0_E ou, por 1. (5), $\left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r+1}a_p^j e_j\right)_{p\in N}\to -e_i$, uma vez que $\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r+1}a_p^j e_j=\sum_{j=1}^{r+1}a_p^j e_j-e_i$; portanto, por (1. 6), também $\left(\left\|\sum_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{r+1}a_p^j e_j\right\|\right)_{p\in N}\to\|e_i\|$. Em particular, esta última sucessão seria limitada. Deste facto resultaria que, para todo o $j\in\{1,\cdots,r+1\}$, a sucessão $(a_p^j)_{p\in N}$ seria limitada; com efeito, o sub-espaço gerado pelos vectores $e_j, j\in(\{1,\cdots,r+1\}-\{i\})$ tem dimensão r e, por hipótese indutiva, para todo o $j\neq i$ existiria então um K_j^i tal que, para todo o $p\in N$, $|a_p^j|\cdot\|e_j\|\leq K_j^i\cdot\left\|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r+1}a_p^j e_j\right\|$. Mas, se para cada j, $(a_p^j)_{p\in N}$ fosse limitada, poderíamos, por 1. (16) e 1. (17), definir uma função estrictamente crescente $\varphi: N\to N$ tal que, para todo o j, a sucessão $(a_{\varphi(p)}^j)_{p\in N}$ fosse uma sucessão parcial de $(a_p^j)_{p\in N}$, convergente para um certo a^j. A sucessão $\left(\sum_{j=1}^{r+1}a_{\varphi(p)}^j e_j\right)_{p\in N}$ seria então convergente para $\sum_{j=1}^{r+1}a^j e_j$; por outro lado, como esta sucessão seria uma sucessão parcial da sucessão $\left(\sum_{j=1}^{r+1}a_p^j e_j\right)_{p\in N}$, convergiria para 0_E, e, então $\sum_{j=1}^{r+1}a^j e_j=0_E$, com $a^i=1$, o que é absurdo, pois os vectores $e_1,\cdots e_m$ são linearmente independentes.

Corolários do Teorema 1:

1.°) *Num espaço vectorial de dimensão finita* E, *quaisquer duas normas são equivalentes.*

Com efeito, fixada uma base em E, podemos afirmar que ambas as normas são equivalentes à norma $\mathfrak{N}$ associada a essa base (as notações são as do teorema anterior).

2.°) *Se* f *é uma aplicação linear do espaço vectorial normado* E *no espaço vectorial normado* F *e se* E *tem dimensão finita,* f *é contínua.*

Pelo teorema e por 1. (14) podemos supor em E definida a norma $\mathfrak{N}$ associada a uma base $(e_1,\cdots,e_m)$ de E. Designe $\|\,\|$ a norma de F. Será então $\|f(x)-f(a)\|=$ $=\|f(x-a)\|=\left\|\sum_{i=1}^{m}(x^i-a^i)\cdot f(e_i)\right\|\leq$ $\leq m\cdot\mathfrak{N}(x-a)\cdot\sup_i\|f(e_i)\|$ ou $\|f(x)-f(a)\|\leq$ $\leq K\cdot\mathfrak{N}(x-a)$, em que $K=m\cdot\sup_i\|f(e_i)\|$. Desta desigualdade decorre imediatamente a continuidade de f no ponto a: para todo o número real $\varepsilon>0$ existe um número real $\delta=\varepsilon/K$, tal que $x\in E$ e $\mathfrak{N}(x-a)<\delta$ implicam $\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$.

3.°) *Qualquer isomorfismo (linear) entre espaços vectoriais normados de mesma dimensão finita é uma aplicação bicontínua.*

É consequência imediata do corolário anterior. Em particular:

4.º) *Se* E *é um espaço vectorial normado de dimensão finita* (>0), $(e_1, \cdots, e_m)$ *uma base de* E, *a aplicação* $\varphi : E \to R^m$ *definida por* $\varphi(x^1 e_1 + \cdots + x^m e_m) = (x^1, \cdots, x^m)$ *é uma aplicação bicontínua de* E *sobre* R^m.

5.º) *Uma aplicação* f *de um espaço vectorial normado* F *num espaço vectorial normado* E *de dimensão finita é contínua num ponto* a *de* F *se e só se as funções coordenadas de* f *relativamente a uma base* $(e_1, \cdots, e_m)$ *de* E *o forem.*

Com efeito, designando φ a aplicação definida no cor.º 4.º, é imediato concluir (por 1. (8) e 1. (9)) que f é contínua em a se e só se $\varphi \circ f$ o for. Ora as funções coordenadas de f (relativamente a $(e_1, \cdots, e_m)$) e de $\varphi \circ f$ (relativamente à base canónica de R^m) são as mesmas. Então a afirmação a provar resulta de 1. (15).

6.º) *Num espaço vectorial normado* E, *de dimensão finita, toda a sucessão de* CAUCHY *é convergente.*

Comecemos por observar que se uma sucessão num espaço vectorial E é de CAUCHY (resp. convergente) relativamente a uma norma $\| \|$ sobre E, também é uma sucessão de CAUCHY (resp. uma sucessão convergente) relativamente a qualquer outra norma equivalente à primeira. Podemos então supor, pelo teorema, que sobre E está definida a norma $\mathfrak{N}$ associada a uma base $(e_1, \cdots, e_m)$. Então, se $(x_p)_{p \in N}$ é de CAUCHY, é imediata a verificação de que, para todo o $j \in \{1, \cdots, m\}$ $(x_p^j)_{p \in N}$ é uma sucessão real de CAUCHY e, como tal, convergente para um certo a^j. De 1. (5) resultará então a convergência de $(x_p)_{p \in N}$ para $\sum_{i=1}^{m} a^i e_i$.

DEFINIÇÕES. Um espaço vectorial normado diz-se *completo* precisamente se todas as sucessões de CAUCHY forem convergentes e neste caso coincide o conjunto das sucessões de CAUCHY com o das sucessões convergentes, visto que uma sucessão convergente é sempre de CAUCHY. Chama-se *espaço de Banach* a um espaço vectorial normado completo.

Com estas definições podemos indicar duas afirmações equivalentes à do cor.º 6.º:

6') *Todo o espaço vectorial normado de dimensão finita é completo.*

6'') *Todo o espaço vectorial normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

7.º) *Num espaço vectorial normado de dimensão finita toda a sucessão limitada* $(x_p)_{p \in N}$ *admite uma sucessão parcial convergente.*

Notemos primeiro que uma sucessão definida num espaço vectorial E é limitada relativamente a uma norma, se e só se o for relativamente a qualquer norma equivalente. Podemos então, atendendo a 1. (13) supor definida sobre E a norma $\mathfrak{N}$ associada (cf. teorema) a uma base qualquer $(e_1, \cdots, e_m)$ de E. Para cada $j = 1, \cdots, m$, $(x_p^j)_{p \in N}$ será então uma sucessão real limitada. Por 1. (16) e 1. (17), existirá φ tal que, para $j = 1, \cdots, m$ $(x^j_{\varphi(p)})_{p \in N}$ é uma sucessão parcial convergente de $(x_p^j)_{p \in N}$. Então, por 1. (5), a sucessão $(x_{\varphi(p)})_{p \in N} = \left(\sum_{j=1}^{m} x^j_{\varphi(p)} e_j\right)_{p \in K}$ convergirá também. Ora $(x_{\varphi(p)})_{p \in N}$ é uma sucessão parcial de $(x_p)_{p \in N}$.

Designando, num espaço vectorial normado $(E, \| \|)$, para cada $r > 0$, por B_r (resp. S_r) o conjunto dos $x \in E$, tais que $\|x\| \leq r$ (resp. tais que $\|x\| = r$), podemos afirmar que

8.º) *Se* E *tem dimensão finita, toda a função real contínua* f *definida em* B_r *(resp.* S_r*) é limitada.*

Com efeito, se f não fosse limitada, existiria em B_r (resp. S_r) uma sucessão $(x_p)_{p \in N}$, tal que, para todo o $p \in N$, $p < |f(x_p)|$. Ora $(x_p)_{p \in N}$ admitiria, pelo cor.° anterior, uma sucessão parcial $(x_{\varphi(p)})_{p \in N}$ convergente para um ponto a, necessàriamente pertencente a B_r (resp. S_r), porque, para todo o $p \in N$, $\|x_p\| \leqq r$ (resp. $\|x_p\| = r$). Então $\|f(x_{\varphi(p)})\|_{p \in N}$ convergiria para $\|f(a)\|$, o que é absurdo.

§ 3. Espaços normados de dimensão infinita

No § 2 supusemos os espaços normados de dimensão finita; vejamos agora se algum dos resultados desse parágrafo ainda é válido sem essa hipótese.

Em [2 — 3. 5], utilizando o teorema «todo o espaço vectorial tem uma base», demonstra-se não só a impossibilidade de generalizar o cor.° 1 a espaços vectoriais normados de dimensão infinita, como ainda se prova que, para *qualquer* espaço vectorial real de dimensão infinita, existe um conjunto infinito de normas não equivalentes duas a duas.

Se E tem dimensão infinita, por [2—3. 5], existem pois, duas normas não equivalentes $\| \|$ e $\| \|^*$ em E. A aplicação I de $(E, \| \|)$ em $(E, \| \|^*)$ definida por $I(x) = x$ não é bicontínua, por 1. (12); isto é, pelo menos um dos isomorfismos lineares, I de $(E, \| \|)$ em $(E, \| \|^*)$ ou I^{-1} de $(E, \| \|^*)$ em $(E, \| \|)$, não é contínuo, o que mostra que são falsas as generalizações a dimensão infinita dos corolários 2.° e 3.°.

Em relação com o cor.° 6.° (e 6', 6''), podemos afirmar que existem espaços vectoriais normados de dimensão infinita que são completos e outros que não são.

Exemplo 1. O espaço normado de dimensão infinita considerado no último exemplo de 1. (2) é completo. Com efeito, notemos que afirmar que nesse espaço uma sucessão de funções $(f_p)_{p \in N}$ é de Cauchy equivale a afirmar que

(C_1) para todo o $\varepsilon > 0$, existe um número natural q_0 tal que, para quaisquer números naturais r e s maiores que q_0 e para qualquer $x \in [0, 1]$, $|f_r(x) - f_s(x)| < \varepsilon$. Ora prova-se — e a demonstração é feita em certos cursos de Matemáticas Gerais — que

(P) se $(f_p)_{p \in N}$ satisfaz a (C_1), existe uma função contínua f para a qual $(f_p)_{p \in N}$ converge uniformemente;

e dizer que $(f_p)_{p \in N}$ converge uniformemente para f equivale precisamente a dizer que $(f_p)_{p \in N} \to f$ no espaço normado que estamos a considerar. Portanto (P) traduz precisamente que este espaço normado é completo.

Exemplo 2. Designando por S o sub-espaço [1] de $\mathcal{C}([0, 1], R)$ constituido pelas funções cujos gráficos são reuniões de um número finito de segmentos de recta, considere-se sobre S a norma-restrição da definida sobre $\mathcal{C}([0, 1], R)$. É possível provar (a demonstração é deixada ao leitor como exercício) que existe em S uma sucessão — $(f_p)_{p \in N}$ — que converge (uniformemente) para o elemento g de $\mathcal{C}([0, 1], R)$, definido por $g(x) = x^2$. Ora $g \notin S$; a sucessão $(f_p)_{p \in N}$ é de Cauchy e não converge para nenhum elemento de S. Logo S é um espaço normado não completo.

Quanto ao corolário 7.°, não só é impossível generalizar as suas conclusões ao caso de dimensão infinita, como podemos provar mesmo o seguinte:

---

[1] Como exercício, poder-se-á provar directamente que S é um sub-espaço vectorial de dimensão infinita de $\mathcal{C}([0, 1], R)$. Aliás, também se pode concluir *a posteriori* que a sua dimensão é infinita, notando que, se fosse finita, pelo teorema do § 2, S seria completo.

TEOREMA: *Em qualquer espaço vectorial real normado de dimensão infinita existe uma sucessão* $(x_p)_{p \in N}$ *tal que: 1.º) para todo o* $p \in N, \|x_p\| = 1$; *2.º)* $(x_p)_{p \in N}$ *não tem nenhuma sucessão parcial convergente.*

DEMONSTRAÇÃO. Designe S o conjunto dos elementos de E de norma 1. Vamos mostrar a existência de uma sucessão $(x_p)_{p \in N}$ em S tal que, para quaisquer dois números naturais r e s $(r \neq s)$, seja $\|x_r - x_s\| \geq 1/2$. É evidente que uma sucessão com esta propriedade não admite nenhuma sucesssão parcial convergente e a demonstração do teorema ficará feita.

Definamos $(x_p)_{p \in N}$ por recorrência. Seja x_1 um elemento qualquer de S. Sejam $x_1, \cdots, x_r$ elementos de S, tais que, para quaisquer i e j satisfazendo a $1 \leq i < j \leq r$, seja $\|x_i - x_j\| \geq 1/2$. Vamos mostrar que existe $x_{r+1} (\in S)$ por forma que, para todo o $i \leq r, \|x_i - x_{r+1}\| \geq 1/2$. Para tal, designemos por V_r o espaço vectorial (de dimensão finita) gerado por $x_1, \cdots, x_r$. Como por um lado S gera E, e por outro E tem dimensão infinita, S não está contido em V_r; seja y_r um elemento de S, não pertencente a V_r. Ponhamos $a_r = \inf_{v \in V} \|y_r - v\|$. É $a_r > 0$, pois se fosse $a_r = 0$, existiria em V_r uma sucessão $(v_p)_{p \in N}$ tal que $(\|y_r - v_p\|)_{p \in N}$ convergisse para 0. Como para todo o $p \in N$ é $\|v_p\| \leq \|y_r - v_p\| + \|y_r\|$, $(v_p)_{p \in N}$ seria uma sucessão limitada de V_r e, visto que V_r tem dimensão finita, essa sucessão admitiria uma sucessão parcial $(v_{\varphi(p)})_{p \in N}$ convergente em V_r (por $2 \cdot 7^\circ$). Ora isto é absurdo, pois $(v_p)_{p \in N}$ converge para $y_r \notin V_r$; portanto $a_r > 0$. Mas então, por definição de a_r, existirá um $u_r \in V_r$ tal que $a_r \leq \|y_r - u_r\| < 3a_r/2$. Ponhamos

$$x_{r+1} = (y_r - u_r)/\|y_r - u_r\| \in S.$$

Para todo o $v \in V_r$,

$$\|x_{r+1} - v\| = (\|y_r - u_r\|)^{-1} \cdot \|(y_r - u_r - \|y_r - u_r\| \cdot v)\| > \frac{2}{3a_r} \|y_r - (u_r + \|y_r - u_r\| \cdot v)\|;$$ mas $u_r + \|y_r - u_r\| \cdot v \in V_r$ e, portanto:

$$\|x_{r+1} - v\| > \frac{2}{3a_r} \cdot a_r = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}.$$

Em particular, será, para todo o $i \leq r, \|x_{r+1} - x_i\| > \frac{1}{2}$.

N. B. Na demonstração que acabamos de indicar servimo-nos da ideia da demonstração do teorema de RIESZ, dada em [1 — 5.9.4].

Finalmente, também não é possível estender o corolário 8º a espaços normados de dimensão infinita. Vamos até mostrar que, designando por B (resp. S) o conjunto dos vectores de um espaço vectorial normado qualquer de dimensão infinita E, que têm norma ≤ 1 (resp. $= 1$), existe sempre uma função real contínua não majorada de domínio B (resp. S).

Seja $(x_p)_{p \in N}$ uma sucessão construida pelo modo indicado na demonstração precedente e, para cada $p \in N$, designe U_p o conjunto dos vectores x de B (resp. S) tais que $\|x - x_p\| \leq 1/8$. A função real de domínio B, (respectivamente S) definida por $f(x) = p - 8p\|x - x_p\|$ se $x \in U_p$ e $f(x) = 0$ se $x \notin \bigcup_{p \in N} U_p$, é contínua e não majorada. (Deixa-se como exercício ao leitor a demonstração de que f é contínua).

BIBLIOGRAFIA

[1] J. DIEUDONNÉ, *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris, 1963.

[2] J. C. FERREIRA, *Sobre a equivalência de normas em espaços vectoriais*, «Gazeta de Matemática» n.º 58 (1954), 5-9.

NOTA DE AULA

Sobre semigrupos regulares à esquerda e à direita

por José Morgado
Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. Introdução

Diz-se que o semigrupo S é *regular à esquerda*, se, para todo $a \in S$, existe algum $x \in S$ tal que

(1) $$x\,a\,a = a\,.$$

Diz-se que S é *regular à direita*, se, para todo $a \in S$, existe algum $y \in S$ tal que

(2) $$a\,a\,y = a\,.$$

Na revista *The American Mathematical Monthly*, vol 72 (1965), p. 1021, foi proposto por Michael Gemignani o seguinte exercício:

Seja S um semigrupo regular à esquerda e à direita. Mostre que:

(i) Todo elemento $a \in S$ tem pelo menos uma identidade local, i. e., para todo $a \in S$ existe algum elemento $e_a \in S$ tal que

$$e_a\,a = a\,e_a = a\,;$$

(ii) Para todo elemento $a \in S$ existe pelo menos um elemento inverso, i. e., para todo $a \in S$ existe algum $b_a \in S$ tal que

$$b_a\,a = a\,b_a = e_a\,,$$

onde e_a designa alguma identidade local de a.

Na mesma revista, vol. 74 (1967), p. 325, é publicada a seguinte solução de D. Dawson:

(i) Fazendo

$$e_a = x\,a = x\,a\,a\,y = a\,y\,,$$

vem

$$e_a\,a = x\,a\,a = a = a\,a\,y = a\,e_a\,.$$

(ii) Fazendo

$$b_a = x\,x\,a = x\,a\,y = a\,y\,y\,,$$

vem

$$b_a\,a = x\,x\,a\,a = x\,a = e_a = a\,y = a\,a\,y\,y = a\,b_a\,.$$

Nesta nota daremos condições necessárias e suficientes para que um semigrupo regular à esquerda e à direita seja um grupo.

2. Observações

1) É interessante notar que *as condições* (i) *e* (ii) *são suficientes para que um semigrupo* S *seja regular à esquerda e à direita.*

Na verdade, se S satisfaz às condições (i) e (ii), tem-se

$$b_a\,a\,a = e_a\,a = a = a\,e_a = a\,a\,b_a\,,$$

o que prova (1) e (2) com $x = y = b_a$.

2) Num semigrupo regular à esquerda e à direita S, *pode acontecer que não exista inverso do elemento a com respeito a uma dada identidade local e_a de a.*

Seja, por exemplo, $S = \{0, 2, 4\}$ e seja a operação definida em S o produto de inteiros módulo 6. Como se tem

$$a\,a\,a = a \text{ para todo } a \in S,$$

o semigrupo S é regular à esquerda e à direita. Verifica-se que 4 é identidade local de 0 e, no entanto, não existe inverso de 0 com respeito a 4.

3) Num semigrupo regular à esquerda e à direita, *pode acontecer que uma identidade local não seja idempotente.*

Assim, no exemplo anterior, o elemento 2 é uma identidade local de 0 e não é idempotente.

A este respeito podemos estabelecer o seguinte

Teorema 1: *Se* S *é um semigrupo regular à esquerda e à direita e se o elemento* $e \in S$ *é uma identidade local, então* e *é idempotente se e só se existem em* S *elementos* a *e* x *tais que*

$$e\,a = a\,e = a, \quad e = x\,a. \tag{3}$$

Dem. Com efeito, se e é idempotente, então as condições (3) são satisfeitas, pondo $a = x = e$. Inversamente, se as condições (3) são satisfeitas, então tem-se

$$e\,e = x\,a\,e = x\,a = e,$$

como se pretendia mostrar.

Em particular, se x e y são tais que $x\,a\,a = a = a\,a\,y$, então a identidade local de a dada por $e_a = x\,a = a\,y$ é idempotente.

3. Grupos encarados como semigrupos regulares à esquerda e à direita

Há semigrupos regulares à esquerda e à direita que possuem elemento neutro e, no entanto, não são grupos. O semigrupo $S = \{0, 2, 4\}$ acima considerado é um exemplo de um tal semigrupo; o elemento neutro é 4. Este semigrupo tem dois elementos idempotentes, 0 e 4.

Do teorema anterior resulta imediatamente o seguinte

Corolário. *Um semigrupo regular à esquerda e à direita é um grupo, se e só se contém um único idempotente.*

Uma outra caracterização de um grupo como semigrupo regular à esquerda e à direita é dada pelo seguinte

Teorema 2. *É condição necessária e suficiente para que um semigrupo regular à esquerda e à direita* S *seja um grupo que*

(I) *Para cada* $a \in S$, *se* e_a *é uma identidade local de* a *e* i *é uma identidade local de* e_a, *então exista inverso de* e_a *relativo a* i;

(II) *Se* $a, b \in S$ *e* e_a *e* e_b *são identidades locais de* a *e* b, *respectivamente, então*

$$e_a\,e_b = e_a\,e_b.$$

Dem. As condições (I) e (II) são evidentemente necessárias. Vejamos que são também suficientes.

Seja, com efeito, a um elemento qualquer de S e sejam x e y elementos de S tais que

$$x\,a\,a = a = a\,a\,y.$$

Então sabemos que o elemento $e_a = x\,a = a\,y$ é uma identidade local de a. Se i designa também uma identidade local de a, tem-se

$$i\,e_a = i\,a\,y = a\,y = e_a = x\,a = x\,a\,i = e_a\,i,$$

o que mostra que i é também uma identidade local de e_a.

Daqui resulta, pela condição (II), que existe algum elemento $z \in S$ tal que

$$i = z\,e_a = z\,x\,a. \tag{4}$$

Pelo teorema 1, concluimos que i é um idempotente e, por consequência, tem-se, em virtude de (4),

$$i = ii = zxazxa = zayzay = \\ = ze_a ayze_a ay = iayiay = \\ = ayay = e_a e_a = e_a .$$

Isto significa que, para cada elemento, existe uma única identidade local, e tal identidade é idempotente.

Sejam agora e_a e e_b as identidades locais de a e b, respectivamente.

Então, em virtude da condição (II), tem-se, atendendo à idempotência de e_a e e_b,

$$e_a e_a e_b = e_a e_b = e_b e_a = e_b e_a e_a ,$$
$$e_a e_b e_b = e_a e_b = e_b e_a = e_b e_b e_a = e_b e_a e_b ,$$

quer dizer, e_a e e_b são identidades locais do elemento $e_a e_b$, sendo, por consequência,

$$e_a = e_b .$$

Concluimos assim que existe em S um elemento neutro $e = e_a = e_b$.

Ora, de (ii) resulta que, para cada a existe um elemento $a' = b_a$ tal que $aa' = a'a = e$, isto é, S é um grupo, como queríamos provar.

É fácil ver que as condições (I) e (II) são independentes em semigrupos regulares à esquerda e à direita.

Assim, seja $S = \{0, 2, 4\}$ o semigrupo acima considerado e seja T um semigrupo com mais de um elemento, em que a operação é definida por

$$xy = y \text{ quaisquer que sejam } x, y \in T .$$

Tanto S como T são semigrupos regulares à esquerda e à direita e, além disso, S verifica a condição (II) e não a condição (I), enquanto que T verifica a condição (I) e não a condição (II).

BIBLIOGRAFIA

[1] Michael Gemignani, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), p. 1021.

[2] D. F. Dawson, Amer. Math. Monthly, **74** (1967), p. 325

[3] José Morgado, *Note on the definition of a group*, Gazeta de Matemática, **101-102**, (1966), pp. 11-12.

Regularidade segundo Von Neumann e regularidade à esquerda e à direita em semigrupos

por *Maria Eulália Coutinho* (*)

1. Introdução

Seja S um semigrupo.

Diz-se que S é *regular* (no sentido de Von Neumann) se, para todo $a \in S$, existe algum $z \in S$ tal que

$$aza = a .$$

Diz-se que S é *regular à direita*, se, para todo $a \in S$, existe algum $x \in S$ tal que

$$aax = a .$$

Diz-se que S é *regular à esquerda* se, para todo $a \in S$, existe algum $y \in S$ tal que

$$yaa = a .$$

Em recente seminário realizado no Instituto de Matemática, o Prof. José Morgado pôs a

(*) Estudante do Mestrado no Instituto de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

questão de relacionar a regularidade segundo VON NEUMANN com a regularidade à esquerda e à direita em semigrupos. O objectivo desta nota é precisamente estudar tais relações.

2. Seja S um semigrupo regular.

Então para todo $a \in S$ existe $y \in S$ tal que

(1) $$a y a = a \quad \text{e} \quad y a y = y .$$

Realmente, supondo $axa=a$, seja $y=xax$; teremos

$$a y a = a x a x a = a x a = a$$

$$y a y = x a x a x a x = x a x a x = x a x = y .$$

Um elemento $y \in S$ diz-se um *inverso relativo de* a se verifica (1). Para cada $a \in S$, se X é o conjunto de todos os elementos $x \in S$ tais que $a x a = a$, então o conjunto Y de todos os inversos relativos de a é

$$Y = X a X .$$

De facto, se $y \in Y$, de $a y a = a$ resulta que $y \in X$ e de $y a y = y$ resulta que $y \in X a X$, donde $Y \subseteq X a X$.

Por outro lado, seja $y \in X a X$, isto é,

$$y = x a x', \quad \text{com} \quad a x a = a = a x' a .$$

Tem-se então

$$a y a = a x a x' a = a x' a = a$$

$$y a y = x a x' a x a x' = x a x a x' = y ,$$

ou seja, $y \in Y$, donde resulta, como pretendíamos, $X a X \subseteq Y$.

TEOREMA 1. *Seja* S *um semigrupo regular à esquerda e à direita. Então,*

(i) *Para todo elemento* $a \in S$ *existe um e um só inverso relativo* a' *de* a *que comuta com* a.

(ii) *Se* D *é o conjunto de todos os elementos* $x \in S$ *tais que* $a a x = a$ *e se* E *é o conjunto de todos os elementos* $y \in S$ *tais que* $y a a = a$, *então o conjunto* I *de todos os inversos relativos de* a *é precisamente*

$$I = D a E .$$

DEM.:

(*i*) Como S é regular à esquerda e à direita, para todo $a \in S$ existem $x, y \in S$ tais que

$$a a x = a = y a a .$$

Logo,

$$y a = y a a x = a x ,$$

donde

(2) $$a x a = y a a = a = a a x = a y a .$$

Pondo $a' = y a x$, tem-se, utilizando (2),

$$a a' a = a y a x a = a x a = a$$

$$a' a a' = y a x a y a x = y a y a x = y a x = a'$$

e ainda, novamente utilizando (2),

$$a a' = a y a x = y a a x = y a x a = a' a .$$

Suponhamos agora que a'' é um inverso relativo de a que comuta com a, isto é, tem-se

$$a a'' a = a \quad \text{e} \quad a'' a a'' = a''$$

$$a a'' = a'' a .$$

Teremos

$$a'' a = a'' a a' a = a'' a a a' = a a'' a a' = a a',$$

e, portanto,

$$a a'' = a'' a = a a' = a' a ,$$

donde finalmente

$$a'' = a'' a a'' = a' a a'' = a' a a' = a' .$$

Observemos que a' é qualquer elemento de $E\,a\,D$, e, por isso, ficou demonstrado que, para cada $a \in S$, o conjunto $E\,a\,D$ tem um único elemento e que este elemento é precisamente o único inverso relativo de a comutável com $a : E\,a\,D = \{a'\}$.

(ii) Seja agora um elemento $z \in D\,a\,E$, isto é,

$$z = x\,a\,y\,, \quad \text{com} \quad a\,a\,x = a = y\,a\,a\,.$$

Então, utilizando (2), virá

$$a\,z\,a = a\,x\,a\,y\,a = a\,y\,a = a$$

$$z\,a\,z = x\,a\,y\,a\,x\,a\,y = x\,a\,x\,a\,y = x\,a\,y = z\,,$$

logo, $z \in I$, o que prova que $D\,a\,E \subseteq I$.

Para mostrar a inclusão inversa, seja t um elemento qualquer de I, isto é,

$$a\,t\,a = a \quad \text{e} \quad t\,a\,t = t\,;$$

e consideremos os elementos

$$x = t\,a\,a' \quad \text{e} \quad y = a'\,a\,t\,.$$

Teremos então

$$a\,a\,x = a\,a\,t\,a\,a' = a\,a\,a' = a\,a'\,a = a = \\ = a'\,a\,a = a'\,a\,t\,a\,a = y\,a\,a\,,$$

donde $x \in D$ e $y \in E$. Mas

$$t = t\,a\,t = t\,a\,a'\,a\,t = t\,a\,a'\,a\,a'\,a\,t = x\,a\,y\,,$$

o que prova que $t \in D\,a\,E$, como pretendíamos.

3. Diz-se que um semigrupo regular S *tem a propriedade do inverso* se todo elemento a de S tem um e um só inverso relativo a'.

Um semigrupo regular à esquerda e à direita não tem necessàriamente a propriedade do inverso, em virtude de, em geral, haver conjuntos da forma $D\,a\,E$ com mais de um elemento.

Por exemplo, seja S um semigrupo com mais de um elemento em que o produto é definido por

$$x\,y = x \qquad \forall\, x\,,y \in S\,.$$

S é evidentemente regular à esquerda e à direita, em virtude de ser $x\,x\,x = x \;\forall\, x\,, y \in S$ e, no entanto, para cada $a \in S$ tem-se $a\,x\,a = a$ e $x\,a\,x = x$ *para todo* $x \in S$, e, portanto, S não tem a propriedade do inverso.

Por outro lado, *um semigrupo com a propriedade do inverso não é necessàriamente regular à esquerda e à direita.*

Por exemplo, consideremos as seguintes aplicações do conjunto $\{0\,,1\,,2\}$ em si mesmo:

$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = \varepsilon(2) = 0} \\ \alpha(0) = \alpha(1) = 0\,, & \alpha(2) = 1 \\ \beta(0) = \beta(1) = 0\,, & \beta(2) = 2 \\ \gamma(0) = \gamma(2) = 0\,, & \gamma(1) = 1 \\ \delta(0) = \delta(2) = 0\,, & \delta(1) = 2 \end{array}$$

e seja S o semigrupo formado pelo conjunto $\{\varepsilon\,,\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\delta\}$ munido da operação de composição de aplicações.

Verifica-se fàcilmente que este semigrupo tem a propriedade do inverso; representando por ξ' o inverso relativo do elemento $\xi \in S$, tem-se

$$\varepsilon' = \varepsilon\,, \ \beta' = \beta\,, \ \gamma' = \gamma\,, \ \alpha' = \delta\,, \ \delta' = \alpha\,.$$

No entanto, S não é regular à esquerda nem à direita, pois

$$\alpha \neq \alpha\,\alpha\,\xi = \varepsilon\,\xi = \varepsilon = \xi\,\varepsilon = \xi\,\alpha\,\alpha \neq \alpha\,,$$

para todo $\xi \in S$.

Do teorema 1, resulta que, se um semigrupo S com a propriedade do inverso é regular à esquerda e à direita, então todo $a \in S$ comuta com o seu inverso relativo a'. Por outro lado, se S tem a propriedade do inverso e se todo elemento de S comuta com o seu inverso relativo, então S é evidentemente regular à esquerda e à direita, pois

$$a a a' = a a' a = a \quad \text{e} \quad a' a a = a a' a = a .$$

Podemos resumir as considerações feitas enunciando o seguinte

TEOREMA 2. *Um semigrupo regular à esquerda e à direita tem a propriedade do inverso se e sòmente se o conjunto* D a E *contém um único elemento.*

Um semigrupo S *com a propriedade do inverso é regular à esquerda e à direita se e sòmente se cada elemento de* S *comuta com seu inverso relativo.*

4. É claro que todo semigrupo regular à esquerda e à direita é regular (ver (2)), mas a recíproca não é válida. Assim, o semigrupo de aplicações acima considerado é regular e não é regular à esquerda nem é regular à direita. Também o semigrupo multiplicativo das matrizes 2×2 com elementos num corpo é regular mas não é regular à esquerda nem regular à direita (visto que tem elementos nilpotentes não nulos).

Vamos estabelecer o seguinte

TEOREMA 3. *Um semigrupo regular* S *é regular à esquerda e à direita, se e sòmente se, para cada* $a \in S$, *algum dos* $z \in S$ *para os quais se tem* $aza = a$ *é tal que*

$$az = z^2 a^2 .$$

DEM. A condição é suficiente, pois se

$$a z a = a \quad \text{e} \quad a z = z^2 a^2 ,$$

teremos, pondo $y = z^2 a$,

$$y a a = z^2 a^3 = z^2 a^2 a = a z a = a ,$$

e teremos também

$$a a z = a z^2 a^2 = a z \cdot z a^2 = z^2 a^2 \cdot z a^2 =$$

$$= z^2 a \cdot a z \cdot a^2 = z^2 a \cdot z^2 a^2 \cdot a^2 =$$

$$= z^2 a \cdot z^2 a^3 \cdot a = z^2 a \cdot a \cdot a = z^2 a^3 = a ,$$

o que prova ser S regular à esquerda e à direita.

A condição é necessária, pois, se S é regular à esquerda e à direita, então, de acordo com o teorema 1, para cada $a \in S$ existe um $z \in S$ que comute com a e para o qual se tem

$$a = a z a = z a a .$$

Logo

$$a z = z a = z \cdot z a a = z^2 a^2 ,$$

o que completa a prova.

Uma proposição análoga pode ser estabelecida substituindo no teorema 3 a condição $az = z^2 a^2$ por $za = a^2 z^2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] JOSÉ MORGADO, *Sobre Semigrupos Regulares à Esquerda e à Direita*, em publicação, «Gazeta de Matemática», Lisboa.

[2] RICHARD H. BRUCK, *A Survey of Binary Systems*, Berlim, 1958.

Grupos cíclicos de Jacobi

por **Aron Simis** (1)

I. Num trabalho recente [1], B. M. PUTTASWAMAIAH afirmou que um grupo tem quando muito um endomorfismo não nulo de JACOBI.

Isto não é, contudo, verdade, como foi demonstrado por J. MORGADO [2], estabelecendo que um grupo tem, quando muito, um automorfismo de JACOBI e mostrando ainda que um grupo G tem um endomorfismo não nulo de JACOBI se e sòmente se G é o produto semi-directo de um subgrupo normal próprio por um subgrupo abeliano com a propriedade da raiz quadrada única ([2], Th. 4).

Num seminário originado dos trabalhos acima, realizado no Instituto de Matemática do Recife (Abril, 1967), foi posta a questão de se determinar todos os grupos cíclicos que têm algum endomorfismo não nulo de JACOBI e apontar todos os endomorfismos de JACOBI dêsses grupos.

Nosso objectivo, neste trabalho, é resolver essa questão.

II. Lembramos que um *endomorfismo de Jacobi* de um grupo G é um endomorfismo σ de G tal que:

$$((ab)^\sigma c)^\sigma ((bc)^\sigma a)^\sigma ((ca)^\sigma b)^\sigma = 1, \forall\, a, b, c \in G.$$

É imediato que o endomorfismo nulo θ, definido por

$$a^\theta = 1, \forall\, a \in G,$$

é um endomorfismo de JACOBI.

(1) Estudante do Mestrado em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

Um grupo diz-se *de Jacobi* se admite pelo menos um endomorfismo não nulo de JACOBI.

Verifica-se, fàcilmente, que o grupo aditivo dos inteiros Z não é um grupo de JACOBI.

Com efeito, os únicos subgrupos de Z são $nZ = \{nx, x \in Z\}$, com n natural, os quais não possuem a propriedade seguinte:

$$\forall\, nx, \exists\, ny : ny + ny = nx$$

(esta é a «propriedade da raiz quadrada» traduzida em termos de uma operação aditiva).

Anàlogamente, o grupo cíclico $Z(2^n)$ dos inteiros mod 2^n não possui a propriedade da raiz quadrada, uma vez que qualquer de seus subgrupos não reduzido à identidade tem ordem igual a uma potência de 2 [3].

TEOREMA 1. *Os únicos grupos cíclicos de Jacobi são os grupos isomorfos a* $\mathrm{Z}(2^n(2m+1))$, m *e* n *inteiros,* $n \geq 0, m \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $2m+1 = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ a decomposição canónica de $2m+1$ em factores primos; então $p_i \neq 2, i = 1, \cdots, s$.

Tem-se ([4], pg. 148, por exemplo)

$$\begin{aligned} Z(2^n(2m+1)) &= Z(2^n) \oplus Z(p_1^{e_1}) \oplus \cdots \oplus Z(p_s^{e_s}) \\ &= (Z(2^n) \oplus Z(p_1^{e_1}) \oplus \cdots \oplus \\ &\quad \oplus Z(p_{s-1}^{e_{s-1}})) \oplus Z(p_s^{e_s}), \end{aligned}$$

onde $\oplus$ indica soma directa.

O subgrupo $Z(p_s^{e_s})$ possui a propriedade da raiz quadrada única, por ser de ordem ímpar ([2], Corollary to Th. 3). Por outro lado, o subgrupo $Z(2^n) \oplus Z(p_1^{e_1}) \oplus \cdots \oplus \oplus Z(p_{s-1}^{e_{s-1}})$ é próprio e normal; segue-se ([2], Th. 4) que $Z(2^n(2m+1))$ é um grupo de JACOBI.

A seguir veremos uma maneira de construir, efectivamente, todos os endomorfismos de JACOBI de $Z(2^n(2m+1))$.

Como $Z(2^n(2m+1))$ é cíclico, qualquer de seus endomorfismos é da forma

$$\sigma : x \to rx, r \in Z.$$

Por outro lado, σ é um endoformismo de JACOBI de $Z(2^n(2m+1))$, se e sòmente se $(2r^2+r)x=0$, $x \in Z(2^n(2m+1))$ ([2], Lemma 2). Portanto, encontrar todos os endomorfismos de JACOBI de $Z(2^n(2m+1))$ significa encontrar as soluções da congruência

$$(1) \qquad 2r^2+r \equiv 0 \mod 2^n(2m+1),$$

ou, equivalentemente, as soluções inteiras r da equação

$$(2) \quad r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2^{3+n}(2m+1)k}}{4},$$

para k inteiro positivo.

É imediato que $1+2^{3+n}(2m+1)k \geq 25$, para $n \geq 0, m \geq 1, k > 0$; portanto, se $1+2^{3+n}(2m+1)k$ admite uma raiz quadrada inteira, então (2) tem uma e uma só solução inteira. Trata-se, por conseguinte, de resolver a congruência

$$(3) \qquad u^2 \equiv 1 \mod 2^{3+n}(2m+1),$$

a qual tem solução, se e sòmente se são solúveis as congruências

$$(4) \qquad u^2 \equiv 1 \mod 2^{3+n}$$

e

$$(5) \qquad u^2 \equiv 1 \mod p_i^{e_i}, i=1,\cdots,s,$$

onde $2m+1 = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ é a decomposição canónica de $2m+1$.

Não é difícil ver que as soluções de (4) são $1, 2^{3+n}-1, 2^{2+n}+1$ e $2^{2+n}-1$ e as de (5), 1 e $p_i^{e_i}-1$ (entendendo-se por todas as soluções aquelas contidas num conjunto completo de resíduos). As soluções de (3) são obtidas a partir dessas por meio de combinações determinadas (v. [5], por exemplo).

Adiante veremos que o número de endomorfismos de JACOBI do grupo $Z(2^n(2m+1))$ é precisamente 2^s. Para o momento, verificaremos que tal número é $\geq 2^s$. Neste sentido, tem-se o seguinte

LEMA. *Os únicos subgrupos de* $Z(2^n(2m+1))$ *que são imagens de algum endomorfismo não nulo de* JACOBI *são os* p_i*-subgrupos de Sylow e somas directas destes subgrupos, onde* $2m+1 = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ *é a decomposição canónica de* $2m+1$.

DEMONSTRAÇÃO. É imediato que os p_i-subgrupos de SYLOW e somas directas arbitrárias dos mesmos são imagens de algum endomorfismo não nulo de JACOBI [2]; isto é o que, em essência, mostrou-se no Teorema I.

Suponhamos que existe um primo p que divide $2m+1$ tal que existe algum p-subgrupo não de SYLOW que é imagem de algum endomorfismo de JACOBI; ter-se-ia, então

$$\begin{aligned} Z(2^n(2m+1)) &= Z(p^{e-j}) \oplus (Z(p^j) \oplus G), \\ &\qquad 0<j<e, \\ &= (Z(p^{e-j}) \oplus Z(p^j)) \oplus G, \end{aligned}$$

onde G é um subgrupo de ordem

$$2^n(2m+1)/p^e.$$

Como só existe um subgrupo de ordem p^e, resulta

$$Z(p^e) = Z(p^{e-j}) \oplus Z(p^j),$$

o que constitui um absurdo, uma vez que os únicos subgrupos de $Z(p^e)$ são

$$Z(p^e) \supseteq Z(p^{e-1}) \supseteq \cdots \supseteq Z(p) \supseteq \{0\}.$$

COROLÁRIO. *O número de endomorfismos de* JACOBI *de* $Z(2^n(2m+1))$ *é* $\geq 2^s$.

TEOREMA 2. *O número de endomorfismos de* JACOBI *de* $Z(2^n(2m+1))$ *é precisamente* 2^s, *onde* s *é o número de factores primos de* $2m+1$.

DEMONSTRAÇÃO. Vimos acima que o número de endomorfismos de JACOBI de $Z(2^n(2m+1))$ é $\geq 2^s$. É suficiente mostrar agora que não se pode ter

$$Z(2^n(2m+1))^\sigma = Z(2^n(2m+1))^\tau,$$

com $\sigma \neq \tau$, σ e τ endomorfismos de JACOBI de $Z(2^n(2m+1))$.

Ponhamos $G = Z(2^n(2m+1))$. Tem-se então ([2], Th 4):

$$\begin{aligned} G &= N_\sigma \oplus G, \quad N_\sigma = \ker \sigma \\ &= N_\tau \oplus G, \quad N_\tau = \ker \tau . \end{aligned}$$

Como G é cíclico finito e $G^\sigma = G^\tau$, resulta $N_\sigma = N_\tau$.

Seja $x \in G$; então tem-se ([2], Th 4):

$$\begin{aligned} x &= x_\sigma - 2rx, \quad x_\sigma \in N_\tau, \quad 2rx \in G^\sigma \\ &= x_\tau - 2sx, \quad x_\tau \in N_\tau, \quad 2sx \quad G^\tau, \end{aligned}$$

onde $\sigma : x \to rx$ e $\tau : x \to sx$. Das considerações acima resulta $rx = sx, \forall x \in G$; logo, $\sigma = \tau$.

III. Resumindo, obtivemos que os únicos grupos cíclicos de JACOBI são os isomorfos a $Z(2^n(2m+1))$, $m \geq 1$, $n \geq 0$; além disso, se s é o número de primos distintos que dividem $2m+1$, então $Z(2^n(2m+1))$ admite 2^s endomorfismos de JACOBI.

Observemos que o grupo $Z(p_i^{e_i})$, p_i ímpar, possui exactamente um endomorfismo não nulo de JACOBI (que é um automorfismo). Com efeito, $Z(p_i^{e_i})$ tem um e um só *automorfismo* de JACOBI ([2], Corol. to Th 3). Suponhamos que σ fosse outro endomorfismo não nulo de JACOBI; então, como σ não é um automorfismo, resulta que é sua imagem um factor directo próprio. Mas, isto é absurdo, uma vez que $Z(p_i^{e_i})$ é indecomponível.

Como consequência obtemos uma maneira simples de escrever todos os endomorfismos de $Z(2^n(2m+1))$ a partir do endomorfismo não nulo de $Z(p_i^{e_i})$, $i = 1, \cdots, s$ e do endomorfismo nulo. Com efeito, a aplicação

$$\sigma : (x_0, x_1, \cdots, x_s) \to (0, x_1^{\sigma_1}, \cdots, x_s^{\tau_s}),$$

onde σ_i ou é o automorfismo de JACOBI de $Z(p_i^{e_i})$ ou o endomorfismo nulo, é evidentemente um endomorfismo de JACOBI de $Z(2^n(2m+1))$. Obtemos, por este processo, 2^s endomorfismos de JACOBI distintos de $Z(2^n(2m+1))$. Pelo Teorema 2, estes são realmente todos os endomorfismos de JACOBI de $Z(2^n(2m+1))$.

Convém, talvez, observar que o processo de construir um endomorfismo de JACOBI para o grupo todo a partir de endomorfismos de JACOBI dos factores directos é válido para um grupo decomponível qualquer. Recìprocamente, dado um endomorfismo de JACOBI σ de um grupo decomponível, poderíamos pensar em verificar se ele induz um endomorfismo de JACOBI em cada factor directo. A resposta é afirmativa para os grupos cíclicos (o endomorfismo induzido podendo ser o endomorfismo nulo), uma vez que nesse caso tem-se $\sigma(H) \subseteq H$, onde H é um factor qualquer. Se a restricção $\bar{\sigma}$ de σ ao factor directo H comuta com a projecção ε sobre H, então $\bar{\sigma}$ é um endomorfismo de JACOBI de H.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. M. PUTTASWAMAIAH, *Jacobi Endomorphisms,* Amer. Math. Monthly, **73** (1966), pp. 741-4.

[2] J. MORGADO, *Note on Jacobi Endomorphisms,* a ser ser publicado.

[3] E. A. FAY, *Solution of the Problem E 1974, 1965, 545,* Amer. Math. Monthly, **73** (1966), p. 892.

[4] N. JACOBSON, *Lectures in Abstract Algebra,* Vol. I, D. Van Nostrand, N. Y., 1951.

[5] NIVEN and ZUCKERMAN, *An Introduction to the Theory of Numbers,* p. 38.

Nota a «Um novo método numérico de extração da raiz quadrada»

por ***Ruy Madsen Barbosa***

Preliminares

Apresentamos no artigo acima, publicado *In* «Gazeta de Matemática», 98-99/1965, um algoritmo e seu ensino, baseado em propriedades das sucessões de ímpares e de pares.

O propósito desta Nota é apresentar uma modificação do algoritmo, utilizando sòmente a sucessão de ímpares: soma e ímpar sucessivo; e, ao final, provar que desta forma se chega ao algoritmo tradicional.

Modificações

Sejam Z ímpares no primeiro intervalo.

No segundo intervalo separemos a sucessão de ímpares da seguinte maneira:

$$2Z+1,\quad 2Z+3,\quad 2Z+5,\cdots$$

de onde teremos, no segundo intervalo, além das quantidades fixas $2Z$, uma nova sucessão de ímpares, também iniciando com a unidade.

Dividamos a diferença D (do segundo intervalo) por $2Z$, obtendo-se um número q possível de ímpares do intervalo, cuja soma é q^2.

Desde que $D = 2Z \cdot q + r$, o resto r deverá ser maior ou igual a q^2.

Satisfazendo essa condição, a raiz quadrada será $Z+q$ e o resto $R = r - q$.

Em caso contrário, diminue-se o valor de q.

EXEMPLO:

$$\sqrt{3351}$$

	1	3	
50 ímpares	100	100...	
2500	⟵ $D = 851$	⟶	3351

$851 : 100$ é $q = 8$ e sobra $r = 51$; mas $q^2 = 64 > 51$; reduzimos q para 7 e sobra $r = 151$, e, o resto será $R = 151 - 49 = 102$.

Conclusão: $\sqrt{3351} = 50 + 7 = 57$.

Algoritmo Modificado

$\sqrt{3351}$	50	
2500	$\times$ 2	
851	$100\times8=800$	$100\times7=700$
800	Teste : $8^2=64$	Teste : $7^2=49$
51	(não serve)	Raiz $=50+7=57$
100+		
151		
49−		
R = 102		

Prova da identificação dos algoritmos

Da exposição resulta que para a extração da raiz quadrada de um número N, subtrae-se de N o quadrado de Z, procura-se um número q tal que seja o quociente de N pelo *dôbro de* Z, e ainda faz-se o teste da nova sucessão de ímpares, cuja soma é q^2, isto é, q é tal que $2Z\cdot q+q^2$ é o maior número inferior ao resto $N-Z^2$, que é justamente o que se faz no algoritmo tradicional: $(2Z+q)\,q$.

O que se fêz foi simplesmente separar o cálculo q^2 do teste para uma melhor aprendizagem.

Exemplo :

$\sqrt{3331}$	50		
2500	$\times$ 2		
851	100	100	Raiz $=50+7=57$
749	8+	7+	
102	108	107	
	$\times$ 8	$\times$ 7	
	864	749	

Ordered semigroups which contain zeroid elements

by **C. W. Leininger**

In [1] Clifford and Miller show that if a semigroup S has a zeroid element, then then its kernel is the subgroup K of zeroids of S. Furthermore K determines a partition G of S in a certain way. The purpose of this paper is to consider such a semigroup under the suppositions that K is a nondegenerate subset of S and there is a comparable pair of elements of S not both in the same set of G. We find that K inclndes a subchain Q of S which is o-isomorphic to the additive group of integers. Some aspects of the structure of ordered semigroups with zeroids elements are then investigated.

1. Introduction.

If z denotes the identity element of K, then the subsemigroug J such that

$$J=\{x:x\in S,\ xz=zx=z\}$$

is called the core of S and the set $J\cup K$ is called the frame of S. For convenience we summarize from [1, p. 121] the following properties pertaining to the gross structure of S:

P1. If $J(u) = \{x : x \in S,\ u \in K,\ xz = = zx = u\}$, then the collection of the sets $J(u)$ is the partition G (note $J(z) = J$).

P2. If $a \in J(u)$ and $b \in J(v)$, then $ab \in J(uv)$.

P3. If $a \in J(u)$ and $v \in K$, then $av = uv$ and $va = vu$.

If S is ordered, it is apparent that it also possesses the following properties:

P4. If $a \in J(u)$, $b \in J(v)$ and $u < v$, then $b \nleq a$.

P5. If $a \in J(u)$, $b \in J(v)$, $u \neq v$ and $a < b$, then $u < v$.

P6. If a and b are in $J(u)$ and $a < c < b$, then $c \in J(u)$.

2. Semigroups with the comparability condition.

It is readily established that no finite semigroup with zeroid elements has this property.

THEOREM 1. *Suppose* S *is an ordered semigroup containing zeroids* u *and* v, *and there is a pair* a, b *of elements of* S *such that* a *is in* J(u), b *is in* J(v) *and* a < b. *Then there is an infinite, cyclic and totally ordered subgroup* Q *of the kernel* K *of* S *and a subsemigroup* T *of* S *such that* Q *is the kernel of* T.

PROOF. As the conditions of P5 are met, we have $u < v$. Since $u^{-1} \neq v^{-1}, z = uu^{-1} < vu^{-1}$. Let q denote vu^{-1}. Then $z < q$ implies $q < q^2$ since q is not idempotent. It follows that for each positive integer $n, q^n \in K$ and $q^n < q^{n+1}$, and since $q^{-1} < z$, it also follows that $q^{-n} \in K$ and $q^{-(n+1)} < q^{-n}$. If Q denotes the chain generated by q and $T = \{x : x \in J(v), v \in Q\}$, then by [1, pp. 121-123], T is a semigroup with Q its kernel.

An example of a totally ordered semigroug which is not a group is given by $(S, +, <)$, where $S = I \cup x$, I is the additive group of integers with the natural ordering, $x + x = x, x + n = n + x = n$ for each integer n, and $0 < x < 1$.

3. Structure theorems.

It follows from P3 that the frame of S is a subsemigroups of S. Hence if S satisfies the conditions of Theorem 1 and J is a subchain of S, it follows from P6 that $J \cup Q$ is also a suchain of S. It is known [1, p. 120, Theorem 3] that the mapping $a \to za(za)$, $a \in S$, is a homomorphism μ of S onto K. We apply the latter concept to an ordered semigroup.

THEOREM 2. *If* S *is an ordered semigroup containing zeroid elements, and if its kernel* K *is a subchain* Q *of* S *which is generated by the zeroid* q, *then* μ *is the only* o*-homomorphism of* S *onto* K.

PROOF. Denote by λ an *o*-homomorphism of S onto K. Since $\lambda(z) = z$, if $u \in Q$ and $a \in J(u)$, then $\lambda(u) = \lambda(za) = z\lambda(a) = \lambda(a)$. Furthermore, since Q is *o*-isomorphic to the additive group I of integers and the identity mapping is the only *o*-automorphism of I, it follows that $\lambda(a) = za$.

We note that in the above example S is not Archimedean and contains no anomalous pair as defined by [2, p. 162].

THEOREM 3. *Suppose* S *is a totally ordered Archimedean semigroup containing zeroid elements. Then* (i) J (z) = z *and* (ii) if S≠K, *then* S *contains an anamalous pair.*

PROOF. (*i*) If $x \in J(x), x \neq z$, then by P2, $x^n \in J(z^n) = J(z), n = 1, 2, 3 \cdots$. According to P6 and Theorem 1 no interval of $J(z)$ contains the generator q of the subgroup Q of K. But there is an interval of $J(z)$ which contains z and x^n. Hence $x^n < q$.

(*ii*) Since $J(z) = z$, P4 implies that a, b is an anomalous pair if there is a u in K such that $a \in J(u)$ and $b \in J(u)$.

It may be observed that if $K = Q$, as in the example, then Theorem 3 (*i*) takes the following stronger form.

THEOREM 4· *Suppose* S *is a totally ordered semigroup containing zeroid elements and the kernel* K *of* S *is cyclic. Then* S *is Archimedean if and only if* J(z) = z.

PROOF. If S is Archimedean, then $J(z) = z$ according to Theorem 3. Suppose $J(z) = z$. It follows from Theorem 1 that K is an infinite subchain of S. Hence if $u \in K$, $u > z$ and m is a positive integer, there is a positive integer n such that $u^n > u^m$. Since if $a \in J(u)$, then $a^n \in J(u^n)$, it follows from P4 that $a^n > u^m$. If $u < z$, it can be shown similarly that $a^{-n} < u^{-m}$.

REFERENCES

[1] A. H. CLIFFORD and D. D. MILLER, *Semigroups having zeroid elements*, Amer. J. Math. **70** (1948), pp. 117-125.

[2] L. FUCHS, *Partially ordered algebraic systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., U. S. A., 1963.

Matrices whose sum is the identity matrix

by G. N. de Oliveira
Coimbra

1. Let $A_i (i = 1, \cdots, m)$ be $n \times n$ complex matrices and let n_i denote the rank of A_i. In [1], p. 68 the following problem is posed:

If the matrices $A_i (i = 1, \cdots, m)$ *are symmetric and* $\sum_{i=1}^{m} A_i = E$ (*E denotes the* $n \times n$ *identity matrix*), *show that the following statements are equivalent:*

a) $A_i^2 = A_i \qquad (i = 1, \cdots, m)$

b) $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$

c) $A_i A_j = 0 \qquad (i, j = 1, \cdots, m;\ i \neq j)$.

In [3] it is asked whether it is possible to drop the condition that the matrices $A_i (i = 1, \cdots, m)$ should be symmetric. In the present note we answer this question in the affirmative. So we no longer assume that the matrices $A_i (i = 1, \cdots, m)$ are symmetric.

We prove first that *a*) implies *b*).

If A_i is idempotent there exists a nonsingular matrix T_i such that (see [2], Vol. I, p. 226)

$$(1) \qquad A_i = T_i \operatorname{diag}(\overbrace{1, \cdots, 1}^{n_i}, \overbrace{0, \cdots, 0}^{n-n_i}) T_i^{-1}.$$

This can be proved very easily if we note that A_i is idempotent if and only if each diagonal block in its JORDAN normal form is idempotent. Let $tr\,A$ denote the trace of A. Then (1) gives

$$tr\,A_i = tr\,\mathrm{diag}(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0) = n_i .$$

On the other hand we have $tr\,E = \sum_{i=1}^{m} tr\,A_i$ and so $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

We show now that b) implies c). This has been proved by DJOKOVIČ, LANGFORD and others (see [3], where a stronger result due to R. C. THOMPSON is mentioned). For the sake of completeness we repeat a proof here.

Let $x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}$ be a basis for the range of A_i. Let x be any n dimensional vector. We have

$$x = E\,x = \sum_{i=1}^{m} A_i\,x$$

which proves that any x can be expressed as a linear combination of the vectors $x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, m)$. As $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, the number of these vectors is exactly n and so they must be linearly independent. It follows that any x can be expressed uniquely in the form $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$ with x_i belonging to the range of A_i, namely $x_i = A_i\,x$. Therefore $A_j\,A_i\,x = 0$ $(i \neq j, x$ arbitrary) and so $A_j\,A_i = 0$ $(i \neq j)$.

Finally we show that c) implies a).

Multiplying $\sum_{i=1}^{m} A_i = E$ by A_j we get

$$A_j^2 = A_j$$

and the proof is complete

REFERENCES

[1] BELLMAN, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw — Hill, New York, (1960).

[2] GANTMACHER, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, (1960).

[3] KESTELMAN, *A generalization of Cochran's Theorem*. The Am. Math. Monthly, **75**, N.º 3 (1968), p. 301-303.

Sôbre os teoremas de Zorn, de Zermelo e de Bernstein-Cantor

por **Constantino M. de Barros**

Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, Brasil

Os teoremas referidos acima são deduzidos fàcilmente de um bem conhecido lema que assegura a existência de partes bem ordenadas compatíveis com uma função dada. De passagem dá-se uma demonstração simplificada dêsse lema.

1. Sejam E e F conjuntos. Uma relação *unívoca* de E para F é um subconjunto f do produto cartesiano $E \times F$ tal que se $(x, y), (x', y') \in f$ e $x = x'$, então $y = y'$. Diz-se que f é uma *função* de E para F se f é uma relação unívoca de E para F verificando a seguinte condição suplementar: para todo $x \in E$ existe pelo menos um $y \in F$ tal que $(x, y) \in f$. Se f é uma função de E para F, então para todo $x \in E$ existe um único elemento de F, indicado por

$f(x)$, tal que $(x, f(x)) \in f$. Uma *aplicação* é um terno (F, f, E) tal que f seja uma função de E para F. Uma função f de E para F, resp. uma aplicação (F, f, E), é dita *bijetiva* se para todo $y \in F$ existe um único elemento $x \in E$ tal que $y = f(x)$.

Diz-se que $\leqq$ é uma relação de *ordem* sôbre o conjunto E se $\leqq$ é um subconjunto de $E \times E$ satisfazendo os três seguintes axiomas:

(R 01) Se $x \in E$, então $x \leqq x$;

(R 02) Se $x \leqq y$ e $y \leqq z$, então $x \leqq z$;

(R 03) Se $x \leqq y$ e $y \leqq x$, então $x \leqq y$;

onde $x \leqq y$ significa $(x, y) \in \leqq$.

Seja $(E, \leqq)$ um sistema ordenado, isto é, $\leqq$ é uma relação de ordem sôbre E. Para cada $x \in E$ põe-se

$$\Lambda_x =]\leftarrow, x] = \{w \mid w \in E \text{ e } w \leqq x\}.$$

Por Λ indica-se a função de E para $\beta(E)$ tal que $\Lambda(x) = \Lambda_x$ se $x \in E$. Por $\beta(E)$ nota-se o conjunto formado por todas as partes de E.

Proposição 1. Se $\leqq$ é uma relação de ordem sôbre E, então existe uma única função Λ de E para $\beta(E)$ tal que

(F 01) Se $x \in E$, então $x \in \Lambda_x$, onde $\Lambda_x = \Lambda(x)$;

(F 02) Se $(x, y) \in E \times E$ e $x \in \Lambda_y$, então $\Lambda_x \subset \Lambda_y$;

(F 03) Se $(x, y) \in E \times E$ e $\Lambda_x = \Lambda_y$, então $x = y$;

(F 04) Se $(x, y) \in E \times E$, então $x \leqq y$ se, e sòmente se $x \in \Lambda_y$.

Recìprocamente, se Λ é uma função de E para $\beta(E)$ satisfazendo (F 01), (F 02) e (F 03), então existe uma única relação de ordem $\leqq$ sôbre E tal que $\Lambda(x) = \Lambda_x =]\leftarrow, x]$ para todo $x \in E$.

Seja $a \in E$. Diz-se que a é *maximal* se o conjunto $\{x \mid x \in E$ e $a < x\}$ é vazio. Seja $X \subset E$. Diz-se que a é uma *cota superior* (resp. *inferior*) de X se $x \leqq a$ (resp. $a \leqq x$) para todo $x \in X$. Diz-se que a é *primeiro* elemento de X se $a \in X$ e a é cota inferior de X. Indica-se por X^+ o conjunto das cotas superiores de X. Designa-se por Pri a relação únivoca de $\beta(E)$ para E tal que $(X, a) \in \text{Pri}$ se, e sòmente se a é primeiro elemento de X. Diz-se que X possui primeiro elemento se existe $a \in E$ tal que $(X, a) \in \text{Pri}$. Indica-se por Sup a relação unívoca de $\beta(E)$ para E tal que $(X, a) \in \text{Sup}$ se, e só se $(X^+, a) \in \text{Pri}$. Diz-se que X admite supremo se existe $s \in E$ tal que $(X, s) \in \text{Sup}$. Se X admite supremo indica-se por $\text{Sup}\, X$ o elemento de E tal que $(X, \text{Sup}\, X) \in \text{Sup}$ e diz-se que $\text{Sup}\, X$ é o *supremo* de X.

Seja K um subconjunto de E. Diz-se que K é *bem ordenado* (por $\leqq$) se todo o subconjunto X de K possui primeiro elemento. Portanto K é bem ordenado se, e só se para todo $X \subset K$ existe $w \in X$ tal que $w \in \bigcap_{x \in X} \Lambda_x$.

Diz-se que $(E, \leqq)$ é bem ordenado se E é bem ordenado por $\leqq$.

Por $\beta_*(E)$ indica-se a coleção constituida por todas as partes não vazias de E. Uma *função escolha* sôbre E é uma função σ de $\beta_*(E)$ para E tal que $\sigma(X) \in X$ para todo $X \in \beta_*(E)$.

2. Seja $(E, f, \leqq)$ tal que (E, f, E) seja uma aplicação e $(E, \leqq)$ seja um sistema ordenado.

Lema 1. *Se* $(x, a) \in E \times E$ *verifica*

(C_a^f) $x \leqq a$ *ou* $f(a) \leqq x$,

então (x, a) *verifica também a condição:*

(N_a^f) *se* $a < x$, *então* $f(a) \leqq x$.

Se além do mais $a \leqq f(a)$, *então*

(C) $a < x$ ou $x \leqq a$.

Recìprocamente, se um par $(x, a) \in E \times E$ *verifica* (N^f) *e* (C), *então* (x, a) *satisfaz* (C^f).

Demonstração. $(C^f) \Rightarrow (N^f)$. Se $a < x$, então $x \not\leqq a$, logo $f(a) \leqq x$ por (C^f).

$(C^f) \Rightarrow (C)$. De facto, se $x \not\leqq a$, então $a \leqq f(a) \leqq x$. A recíproca é trivial.

Lema 2. *Se* $(x, a) \in E \times E$ *satisfaz a condição* (C^f), *e se* $x \leqq f(x)$, *então* $(f(x), a)$ *também sattisfaz* (C^f).

Demonstração. Se $x < a$, então $f(x) \leqq a$ pelo lema 1. Se $x = a$, então $f(a) \leqq f(x)$. Se $f(a) \leqq x$, então $f(a) \leqq x \leqq f(x)$. Logo $f(x) \leqq a$ ou $f(a) \leqq f(x)$.

Seja K uma parte de E. Para cada subconjunto A de K se escreverá

$$C_K^f A = \{x \mid x \in K \text{ e se } a \in A, \text{ então } x \leqq a \text{ ou } f(a) \leqq x\},$$

$$C_K^f A = \{x \mid x \in K \text{ e se } a \in A, \text{ então } x \leqq a \text{ ou } a \leqq x\},$$

$$N_K^f A = \{x \mid x \in K \text{ e se } a \in A \text{ e } a < x, \text{ então } f(a) \leqq x\}.$$

Tem-se

$$C_K^f A = K \cap C_E^f A \quad \text{e} \quad N_K^f A = K \cap N_E^f A.$$

Do lema 1 resulta: $C_K^f A \subset N_K^f A \cap C_K A$. Se além do mais $a \leqq f(a)$ para todo $a \in A$, então $C_K^f A = N_K^f A \cap C_K A$.

Lema 3. *Se* $A \subset K \subset E$, *então*

(C 1) *Se* w *é primeiro elemento de* K, *então* $w \in C_K^f$;

(C 1) *Se* $B \subset C_K^f A$, *se* B *admite supremo e se* $(Sup\, B) \in K$, *então* $(Sup\, B) \in C_K^f A$.

Demonstração de (C 2). De fato, seja $a \in K$. Se a é uma cota superior de B, então $(\mathrm{Sup}\, B) \leqq a$. Se a não é cota superior de B, então existe $x \in B$ tal que $x \not\leqq a$, logo $f(a) \leqq x$. Portanto $f(a) \leqq x \leqq \mathrm{Sup}\, B$. Consequentemente $(\mathrm{Sup}\, B) \leqq a$ ou $f(a) \leqq \mathrm{Sup}\, B$. Logo $(\mathrm{Sup}\, B) \in C_K^f A$.

Uma parte K de E será dita uma *corrente* em w se (K, w) satisfazer os três axiomas seguintes:

(C 1) $f(K) \subset K$;

(C 2) $w \in K$;

(C 3) Se $A \subset K$ e se A admite supremo, então $(\mathrm{Sup}\, A) \in K$.

Se além do mais (K, w) satisfizer

(C 4) Se $x \in K$, então $w \leqq x$,

diz-se que K é uma corrente de *origem* w.

Para todo $w \in E$ tem-se: (*i*) E é uma corrente em w; (*ii*) a interseção de todas as correntes em w é uma corrente em w.

Por $K[w]$ indica-se a interseção de todas as correntes em w e $K[w]$ será dita a a corrente *gerada* por w.

Da definição de $K[w]$ resulta o seguinte princípio de indução: se $X \subset E$ e se $K[w] \cap X$ é uma corrente em w, então $K[w] \subset X$.

Diz-se que $(E, f, \leqq)$ é uma *dilatação* se $(E, \leqq)$ é um sistema ordenado e f é uma função de E para E tal que

(D) Se $x \in E$, então $x \leqq f(x)$;

ou equivalentemente

$(\tilde{D})$ Se $w \in E$, então $[w, \rightarrow[= \{x \mid x \in E$ e $w \leqq x\}$ é uma corrente em w.

Se $(E, f, \leqq)$ é uma dilatação e $w \in E$, então $K[w] \subset [w, \rightarrow[$, logo w é primeiro elemento de $K[w]$. Portanto $K[w]$ é uma corrente de origem w.

LEMA 4. *Seja* $(\mathrm{E}, \mathrm{f}, \leqq)$ *é uma dilatação Se* $\mathrm{w} \in \mathrm{E}$ *e se* $\mathrm{K}[\mathrm{w}] \subset \mathrm{N}^{\mathrm{f}}\mathrm{K}[\mathrm{w}]$, *então* $\mathrm{K}[\mathrm{w}]$ *é uma parte bem ordenada de* $(\mathrm{E}, \leqq)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $X \subset K[w]$ tal que $X \neq \phi$, onde ϕ é o conjunto vazio. Suponhamos que X não possui primeiro elemento. Então $X^{-} \cap X = \phi$, onde X^{-} é a parte de E formada por todas as cotas inferiores de X.

(*a*) Seja $a \in X^{-}$, então $a < x$ para todo $x \in X$, logo $f(a) \leqq x$ para todo $x \in X$. Consequentemente $f(a) \in X^{-}$.

(*b*) $w \in X^{-}$ visto que w é o primeiro elemento de $K[w]$.

(*c*) Seja $A \subset X$ tal que A admita supremo. Então para todo $x \in X$ se tem $(\operatorname{Sup} A) \leqq x$. Logo $(\operatorname{Sup} A) \in X^{-}$.

De (*a*), (*b*) e (*c*) resulta que $X^{-} = K[w]$, logo $X = \phi$, o que é absurdo.

LEMA 5. *Se* $(\mathrm{E}, \mathrm{f}, \leqq)$ *é uma dilatação, então* $\mathrm{K}[\mathrm{w}] \subset \mathrm{C}^{\mathrm{f}}\mathrm{K}[\mathrm{w}]$.

DEMONSTRAÇÃO. Em virtude dos lemas 2 e 3 se $a \in K[w]$, então o conjunto $(K[w])_a = \{x \mid x \in K[w],\ x \leqq a \text{ ou } f(a) \leqq x\}$ é uma corrente em w. Portanto $K[w] = (K[w])_a$.

Dos lemas 4 e 5 e do fato de $C^f K[w] \subset N^f K[w]$ resulta

PROPOSIÇÃO 2. Se $(E, f, \leqq)$ é uma dilatação e se $w \in E$, então $K[w]$ é uma parte bem ordenada de E. Além do mais w é o primeiro elemento de $K[w]$ e $f(m) = m \in K[w]$ se $K[w]$ admite supremo e $m = \operatorname{Sup} K[w]$.

COROLÁRIO 1 (do ponto fixo para dilatações). Se $(E, f, \leqq)$ é uma dilatação e se tôda parte bem ordenada de E admite supremo, então para cada $w \in E$ existe $m \in E$ tal que $w \leqq m$ e $f(m) = m$.

3. TEOREMA DE ZORN (1.ª forma). *Seja* $(\mathrm{E}, \leqq)$ *um sistema ordenado tal que tôda parte bem ordenada de* E *admite supremo. Então para todo* $\mathrm{w} \in \mathrm{E}$ *existe um elemento maximal* $\mathrm{m} \in \mathrm{E}$ *tal que* $\mathrm{w} \leqq \mathrm{m}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja f a função de E para E definida pela formula:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \text{ é maximal,} \\ \sigma(]x, \rightarrow[) \text{ se } x \text{ não é maximal,} \end{cases}$$

onde σ é uma função escolha sôbre E. O teorema resulta do corolário 1.

4. Seja σ uma função escolha sôbre E. Indica-se por $\hat{\sigma}$ a função de $\beta(E)$ para $\beta(E)$ definida pela seguinte formula: se $X \subset E$, então

$$\hat{\sigma}(X) = \begin{cases} E \text{ se } X = E, \\ X \cup \{\sigma(E - X)\} \text{ se } X \neq E, \end{cases}$$

onde $E - X = \{w \mid w \in E \text{ e } w \notin X\}$. Tem-se que $(\beta(E), \hat{\sigma}, \subset)$ é uma dilatação Seja $K_\sigma[\phi]$ a corrente gerada pelo conjunto vazio. Por K_σ^* se indicará o conjunto $K_\sigma[\phi] - \{E\}$. Se $x \in E$, por Λ_x^* se indicara a reunião de todos os conjuntos $Y \in K_x^*$ tais que $x \notin Y$. Em virtude de definição de Λ_x^* resulta:

(O_σ^*) Se $Y \in K_\sigma^*$, então $x \notin Y$ se, e só se $Y \subset \Lambda_x^*$.

PROPOSIÇÃO 3. Para todo $x \in E$ existe um único subconjunto de E, indicado por Λ_x^*, tal que

(I^* 1) $\Lambda_x^* \in K_\sigma^*$;

(I^* 2) $x \notin \Lambda_x^*$;

(I^* 3) $\sigma(E - \Lambda_x^*) = x$.

Além do mais se $Y \in K_\sigma^*$, então $Y = \Lambda_{\sigma(E-Y)}^*$.

DEMONSTRAÇÃO. As propriedades (I* 1) e (I* 2) são consequências da caracterização de Λ_x^* por intermédio de (O_σ^*) e de definição de $K_\sigma[\phi]$. Resta mostrar apenas (I* 3). Se $\Lambda_x^* \cup \{\sigma(E-\Lambda_x^*)\} = E$, então $x=\sigma(E-\Lambda_x^*)$ pois $x \notin \Lambda_x^*$. Se $\hat{\sigma}(\Lambda_x^*) \in K_\sigma^*$ e $x \notin \hat{\sigma}(\Lambda_x^*)$, então $\hat{\sigma}(\Lambda_x^*) \subset \Lambda_x^*$, em virtude da definição de Λ_x^*; logo $\sigma(E-\Lambda_x^*) \in \Lambda_x^*$ o que é absurdo.

Seja Y tal que $Y \in K_\sigma^*$, $x \notin Y$ e $\sigma(E-Y) = x$. Da definição de Λ_x^* e de (I* 2) resulta que $Y \subset \Lambda_x^*$. Se $Y \neq \Lambda_x^*$, de (I* 1) e do lemma 1 resulta que $\hat{\sigma}(Y) \subset \Lambda_x^*$, logo $\sigma(E-Y) \in \Lambda_x^*$, portanto $\sigma(E-Y) \neq x$ pois $x \notin \Lambda_\sigma^*$, porém isto contraria a hipótese $\sigma(E-Y)=x$, logo $Y=\Lambda_x^*$.

Se $Y \in K_\sigma^*$ e se $x=\sigma(E-Y)$, então $x \in Y$, logo $Y=\Lambda_x^*$ pela unicidade.

COROLÁRIO 2. Se $x, y \in E$, então

$(\tilde{O}_\sigma^*)$ $x \notin \Lambda_y^*$ se, e só se $\Lambda_y^* \subset \Lambda_x^*$,

(O_σ) $x \in \Lambda_y$ se, e só se $\Lambda_x \subset \Lambda_y$,

onde $\Lambda_x = \Lambda_x^* \cup \{x\}$.

COROLÁRIO 3. Seja σ uma função escolha sôbre E. Se σ^* é a função de K_σ^* para E tal que $\sigma^*(Y)=\sigma(E-Y)$ se $Y \in K_\sigma^*$ e Λ^* é a função de E para K_σ^* tal que $\Lambda^*(x)=\Lambda_\sigma^*$ se $x \in E$, então σ^* é bijetiva e Λ^* é a inversa de σ^*, isto é, $\sigma^*\Lambda^*(x)=x$ se $x \in E$ e $\Lambda^*\sigma^*(Y)=Y$ se $Y \in K_\sigma^*$.

TEOREMA DE ZERMELO. *Seja σ uma função escolha sôbre* E. *Então existe uma única relação de boa ordem* $\underline{\angle}$ *sôbre* E *tal que:* (i) K_σ^* *é o conjunto cujos elementos são da forma* $]\leftarrow, x[$, *onde* $x \in E$; *ou* (ii) $\sigma(E-]\leftarrow, x[) = x$ *para todo* $x \in E$. *Além do mais* $\Lambda^*(x) =]\leftarrow, x[$ *para todo* $x \in E$, $\sigma(E-Y)$ *é o primeiro elemento de* $E-Y$ *se* $Y \in K_\sigma^*$ e $\Lambda_{\sigma(E)}^* = \phi$.

DEMONSTRAÇÃO. Pondo-se $x<y$ se $(x,y) \in E \times E$ e $\Lambda_x^* \subset \Lambda_y^*$, de Λ^* ser bijetiva resulta que $\underline{\angle}$ é uma relação de boa ordem sôbre E.

A unicidade é consequência do lema 6 abaixo aplicado à $K=K_\sigma[\phi]$ e à

$$K' = \Lambda^*(\phi) \cup \{E\} \quad \text{em} \quad (\beta(E), \hat{\sigma}, \subset).$$

LEMA 6. *Seja* $(E, \underline{\angle})$ *um sistema ordenado tal que tôda a parte bem ordenada admita supremo. Seja* f *uma função de* E *para* E. *Se* $w \in E$, *então existe no máximo um subconjunto* K *de* E *tal que*

(1) K *é uma corrente de origem em* w.

(2) *Se* $x \in K$, *então* $x \underline{\angle} f(x)$; *se* $(x,y) \in K \times K$ *e* $x \underline{\angle} y \underline{\angle} f(x)$, *então* $x=y$ *ou* $y=f(x)$;

(3) K *é bem ordenado;*

(4) *Se* $p \in K$ *e* $p=f(p)$, *então* $x \underline{\angle} p$ *para todo* $x \in K$.

Se além do mais $x \underline{\angle} f(x)$ *para todo* $x \in E$, *então* $K[w]$ *é a única parte de* E *verificando as condições* (1), (2), (3) *e* (4) *acima.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja K' uma outra corrente de origem w. Tem-se $K \subset K'$. De fato, em caso contrário $K-K' \neq \phi$. Nêste caso seja q o primeiro elemento de $K-K'$, o qual existe visto que K é bem ordenado. Seja $\Lambda_q^*(K) = \{x \in K \text{ e } x<q\}$. Da definição de q resulta $\Lambda_q^*(K) \subset K \cap K'$. Seja $s = \operatorname{Sup} \Lambda_q^*(K)$. Das duas uma: $s<q$ ou $s=q$.

Caso 1. Seja $s<q$. Como $s<q<f(s)$ é impossível, então $f(s) \underline{\angle} q$, pois $q, f(s) \in K$ e K é bem ordenado. Ora $f(s)<q$ implica $f(s)=s$ em virtude da definição de s e de (2). Se $f(s)=q$, então $q=f(s) \in K'$, pois $s \in K'$, o que também é absurdo pois $q \in K-K'$.

Caso 2. Seja $s=q$. Ora $\Lambda_q^*(K) \subset K'$ e K' é uma corrente, logo $q \in K'$, pois $q=s$, mas $q \in K-K'$. Portanto êste segundo caso é impossível.

Conseqüêntemente $K - K' = \phi$. Portanto $K \subset K'$. Pelas mesmas razões $K' \subset K$.

Das proposições 1, 2 e do lema 5 resulta que $K = K[w]$ satisfaz (1), (2) e (3). Resta apenas demonstrar (4). Se $p \in K[w]$ e $p = f(p)$, então $[w, p]$ é uma corrente em w, logo $K[w] \subset [w, p]$.

5. Diz-se que $(E, f, \trianglelefteq)$ é um sistema *crescente* se $(E, \trianglelefteq)$ é um sistema ordenado e f é uma função de E para E tal que

(F C) Se $(x, y) \in E \times E$ e $x \trianglelefteq y$, então $f(x) \trianglelefteq f(y)$.

LEMA 7 (do ponto fixo para funções crescentes). *Se* $(\mathrm{E}, \mathrm{f}, \trianglelefteq)$ *é um sistema crescente e tôda parte bem ordenada de* E *admite supremo, então existe* $\mathrm{m} \in \mathrm{E}$ *tal que* $\mathrm{m} = \mathrm{f}(\mathrm{m})$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $W = \{x \mid x \in E$ e $x \trianglelefteq f(x)\}$. O conjunto W é uma corrente de origem $\mathrm{O} = \mathrm{Sup}\,\phi$. Aplicando o corolário 1 à $(W, f_W, \trianglelefteq_W)$, onde $f_W(x) = f(x)$ para todo $x \in E$ e $\trianglelefteq_W = (W \times W) \cap \trianglelefteq$, resulta que existe um elemento $m \in W$ tal que $m = f(m)$.

TEOREMA DE BERNSTEIN-CANTOR. *Sejam* $(\mathrm{F}, \mathrm{g}, \mathrm{E})$ *e* $(\mathrm{E}, \mathrm{h}, \mathrm{F})$ *aplicações injetivas, i. e., se* $\mathrm{x}, \mathrm{x}' \in \mathrm{E}$, *se* $\mathrm{y}, \mathrm{y}' \in \mathrm{F}$ *e se* $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x}')$ *e* $\mathrm{h}(\mathrm{y}) = \mathrm{h}(\mathrm{y}')$, *então* $\mathrm{x} = \mathrm{x}'$ *e* $\mathrm{y} = \mathrm{y}'$. *Então existe uma função bijetiva* f *de* E *para* F.

DEMONSTRAÇÃO. Seja θ a função de $\beta(E)$ para $\beta(E)$ tal que para todo $X \in \beta(E)$ se tenha $\theta(X) = C(h(C(g(X))))$, onde $C(Y) = E - Y$ se $Y \subset E$. O terno $(\beta(E), \theta, \subset)$ é um sistema crescente. Pelo lema 7 existe um elemento $E_1 \in \beta(E)$ tal que $\theta(E_1) = E_1$. Seja $F_1 = g(E_1)$; então $C(E_1) = h(C(F_1))$. Seja f a função de E para F tal que para todo $x \in E$ se tenha $f(x) = g(x)$ se $x \in E_1$ e $h(f(x)) = x$ se $x \in C(E_1)$. Da definição de f e do fato de g e h serem injetivas decorre que f é bijetiva.

6. Nas demonstrações acima, dadas para os teoremas de ZORN, de ZERMELO e de BERNSTEIN-CANTOR usou-se fragmento (proposição 2 e lemas 6, 7) do seguinte resultado básico:

TEOREMA DA EXTRAÇÃO DE PARTES BEM ORDENADAS E DO PONTO FIXO. *Seja* $(\mathrm{E}, \mathrm{f}, \trianglelefteq)$ *uma dilatação ou um sistema crescente. Se tôda parte bem ordenada de* E *admite supremo, então existe uma única parte de* E, *indicada por* K, *tal que* (K, w) *verifica as condições* (1), (2), (3) *e* (4) *do lema 6, onde* $\mathrm{w} = Sup\,\phi$. *Além do mais* $\mathrm{f}(Sup\,\mathrm{K}) = Sup\,\mathrm{K}$.

7. Seja $(E, \trianglelefteq)$ um sistema ordenado. Seja X um subconjunto de E. Diz-se que X é

(t. o.) *totalmente ardenado* se para todo $(x, x') \in X \times X$ se tenha $x \trianglelefteq x'$ ou $x' \trianglelefteq x$:

(p. b. o.) *parcialmente bem ordenado* se tôda parte totalmente ordenada não vazia contida em X possui primeiro elemento;

(f. d.) *filtrante (à direita)* se para todo $(x', x'') \in (X \times X)$ existe um elemento $x \in X$ tal que $x' \trianglelefteq x$ e $x'' \trianglelefteq x$.

Por $X^{\#}$ indica-se o subconjunto de E constituido por todos os elementos $y \in E$ tais que $y \not\trianglelefteq x$ para todo $x \in X$. Tem-se $X^{+} \subset X^{\#}$.

Por $\subset^{\#}$, (resp. $\subset^{+}$) indica-se a relação de ordem sôbre $\beta(E)$ definida do seguinte modo:

$$X \subset^{\#} Y \text{ se, e só se } X \subset Y \text{ e } Y - X \subset X^{\#}.$$

(resp. $X \subset^{+} Y$ se, e só se $X \subset Y$ e $Y - X \subset X^{+}$).

A relação de ordem $\subset^{\#}$ (resp. $\subset^{+}$) será chamada a $(\#)$-*inclusão* (resp. $(\#)$-*inclusão*) associada à $(E, \trianglelefteq)$.

Proposição 4. Seja $\mathcal{F}$ um conjunto cujos elementos são partes de E. Se $\mathcal{F}$ é filtrante pela $(\#)$-inclusão (resp. pela $(+)$-inclusão), então $\mathcal{F}$ admite supremo com respeito à $\subset^{\#}$ (resp. $\subset^{+}$) e

$$\operatorname*{Sup}_{\#} \mathcal{F} = (\bigcup \mathcal{F}) \qquad (\text{resp. } \operatorname*{Sup}_{+} \mathcal{F} = (\bigcup \mathcal{F})),$$

onde $\operatorname*{Sup}_{\#} \mathcal{F}$ (resp. $\operatorname*{Sup}_{+} \mathcal{F}$) indica o supremo de $\mathcal{F}$ com respeito à $(\#)$-inclusão (resp. $(\#)$-inclusão).

Demonstração. Seja $X = \bigcup \mathcal{F}$.

(a) Tem-se $X_\alpha \subset^{\#} X$ para todo $X_\alpha \in \mathcal{F}$. De facto, seja $w \in X - X_\alpha$, então existe $X_\beta \in \mathcal{F}$ tal que $w \in X_\beta$, porém $\mathcal{F}$ é filtrante pela $(\#)$-inclusão, logo existe $X_\gamma \in \mathcal{F}$ tal que $X_\alpha \subset^{\#} X_\gamma$ e $w \in X_\gamma - X_\alpha$. Conseqüêntemente $w \in X_\alpha^{\#}$, portanto $X_\alpha \subset^{\#} X$.

(b) Seja W uma parte de E tal que $X_\alpha \subset^{\#} W$ para todo $X_\alpha \in \mathcal{F}$. Seja w um elemento de $W - X$; para todo $X_\alpha \in \mathcal{F}$ se tem: $w \in W - X_\alpha$, logo $w \in X_\alpha^{\#}$, portanto $w \in X^{\#}$. Conseqüêntemente $X \subset^{\#} W$.

Lema 8. *Seja $\mathcal{F}$ um conjunto cujos elementos são partes parcialmente bem ordenadas (resp. totalmente ordenadas) de* E *munido de $\trianglelefteq$. Se $\mathcal{F}$ é filtrante pela $(\#)$-inclusão, então $(\bigcup \mathcal{F}) = \operatorname*{Sup}_{\#} \mathcal{F}$ e $\operatorname*{Sup}_{\#} \mathcal{F}$ é parcialmente bem ordenado (resp. totalmente ordenado).*

Demonstração. Em virtude da proposição 4 resta apenas mostrar que $(\bigcup \mathcal{F})$ é parcialmente bem ordenado (resp. totalmente ordenado). Seja $X = (\bigcup \mathcal{F})$. Seja H uma parte totalmente ordenada não vazia de E e tal que $H \subset X$. Existe $X_\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $H \cap X_\alpha \neq \emptyset$. Seja a o primeiro elemento $H \cap X_\alpha$. Tem-se que a é também primeiro elemento de H. Com efeito, para todo $x \in H$ existe $X_\beta \in \mathcal{F}$ tal que $X_\alpha \subset^{\#} X_\beta$ e $x \in X_\beta$, pois $\mathcal{F}$ é filtrante pela $(\#)$-inclusão. Das duas uma: $x \in X_\alpha$ ou $x \in X_\beta - X_\alpha$. Se $x \in X_\alpha$, então $a \trianglelefteq x$. Se $x \in X_\beta - X_\alpha$, então $x \ntriangleleft a$ pois $X_\alpha \subset^{\#} X_\beta$, portanto $a \trianglelefteq x$, pois $a, x \in H$ e H é totalmente ordenado.

Corolário 4. Seja $\mathcal{F}$ um conjunto cujos elementos são partes bem ordenadas de E munido de $\trianglelefteq$. Se $\mathcal{F}$ é filtrante pela $(+)$-inclusão, então $(\bigcup \mathcal{F}) = \operatorname*{Sup}_{+} \mathcal{F}$ e $(\operatorname*{Sup}_{+} \mathcal{F})$ é uma parte bem ordenado de E.

8. Teorema de Zorn (2.ª forma). *Seja* (E, $\trianglelefteq$) *um sistema ordenado tal que tôda parte bem ordenada de* E *possui uma cota superior. Então para todo* w $\in$ E *existe um elemento maximal* m $\in$ E tal que w $\trianglelefteq$ m.

Demonstração. Seja $\mathfrak{X}_w$ o conjunto formado por tôdas as partes bem ordenadas de E que têm w por cota inferior. Do corolário 4 resulta que $\mathfrak{X}_w$ munido de $\subset^{+}$ satisfaz a seguinte condição: se $\mathcal{F} \subset \mathfrak{X}_w$ e $\mathcal{F}$ é bem ordenado pela $(+)$-inclusão, então $X = \operatorname*{Sup}_{+} \mathcal{F}$ e $X \in \mathfrak{X}_w$. Da 1.ª forma do teorema de Zorn resulta que existe $M \in \mathfrak{X}_w$ maximal em $\mathfrak{X}_w$ munido da $(+)$-inclusão. Logo $M = M \cup \{w\}$ se w fôr cota superior de M. Portanto $M^{+} = \{m\}$ e $m \in N$. Conseqüêntemente $w \trianglelefteq m$ e m é maximal em $(E, \trianglelefteq)$.

9. Seja $(E, \trianglelefteq)$ um sistema ordenado. Se M e A são partes de E diz-se que M é *cofinal* em A se $M \subset A$ e para cada $a \in A$

existe $w \in M$ tal que $a \leqq w$. Se M fôr cofinal em A, então $M^+ = A^+$ e A admite supremo se, e só se M admite supremo.

LEMA 9. *Para toda parte* A *de* E *existe* M *cofinal em* A *tal que* M *seja parcialmente bem ordenado.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathfrak{X}_A$ o conjunto das partes parcialmente bem ordenadas contidas em A. Pelo lema 8 e pela 1.ª forma do teorema de ZORN existe um elemento $M \in \mathfrak{X}_A$ maximal em $\mathfrak{X}_A$ munido da ($\#$)-inclusão. Resta apenas, mostrar que M é cofinal em A. Se M não fôsse cofinal em A, então para todo $a \in A - M$ se teria $a \in M^{\#}$, logo $M \cup \{a\}$ seria parcialmente bem ordenado e $M \cup \{a\} \subset A$, porém isto é absurdo visto que M é maximal em $\mathfrak{X}_A$.

Do lema 9 deduz-se:

PROPOSIÇÃO 5. Seja $(E, \leqq)$ um sistema ordenado. As seguintes condições abaixo são equivalentes

(BI) Tôda parte bem ordenada de E possui uma cota superior (resp. admite supremo);

(TI) Tôda parte totalmente ordenada de E possui uma cota superior (resp. admite supremo).

OBSERVAÇÃO. Se $X, Y \subset^+ W$, então $X \subset^+ Y$ ou $Y \subset^+ X$. Seja $\mathcal{F}$ um conjunto cujos elementos são partes de E. Com respeito a ($+$)-inclusão $\mathcal{F}$ é totalmente ordenado se, e só se $\mathcal{F}$ fôr filtrante.

10. Do lema 7, por relativisação, resulta:

COROLÁRIO 5. Seja $(E, f, \leqq)$ um sistema crescente tal que tôda parte não vazia e bem ordenada de E admita supremo. Para todo $w \in E$ tal que $w < f(w)$ existe $m \in E$ tal que $w < m$ e $f(m) = m$.

No corolário acima, a hipótese $w < f(w)$ é essencial como mostra o seguinte exemplo: seja $\Delta_E = \{(x, y) | (x, y) \in E \times E \text{ e } x = y\}$; se f é uma função de E para E a qual não admite ponto fixo, então (E, f, Δ_E) é um sistema crescente tal que tôda parte não vazia e totatmente ordenada de E admite supremo.

COROLÁRIO 6. Seja $(E, f, \leqq)$ um sistema crescente tal que E seja finito. Se E possui primeiro elemento ou se existe um elemento $w \in E$ tal que $w < f(w)$, então f possui ponto fixo.

Sobre a determinação do contradomínio de certas funções de matrizes

por G. N. de Oliveira
Coimbra

1. Seja $\mathfrak{S}$ um conjunto de matrizes e $\mathcal{F}$ um conjunto arbitrário. Seja $y = f(A)$ uma «função» que toma valores em $\mathcal{F}$ quando A percorre $\mathfrak{S}$. Suporemos que f pode ser multivalente, isto é, que a cada matriz A podem corresponder vários elementos de $\mathcal{F}$. Designemos por $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ o contradomínio de f, isto é, $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ é o subconjunto de $\mathcal{F}$ definido por

$y \in \mathcal{F}_f(\mathfrak{S}) \Longleftrightarrow \exists A \in \mathfrak{S}$ *tal que* y *é um dos elementos de* $\mathcal{F}$ *que* f *faz corresponder a* **A**.

O problema que aqui nos propomos tratar é o da determinação de $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ para várias concretizações de $\mathfrak{S}$, $\mathcal{F}$ e f. Problemas deste tipo têm, ùltimamente, sido tratados por vários autores embora nem sempre se lhes tenha dado esta formulação. Formulações bastante semelhantes podem encontrar-se em [8] e [16]. Vejamos alguns exemplos.

Seja $\mathfrak{S}$ o conjunto das matrizes simétricas reais de ordem n. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das sequências $y=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n;a_1,\cdots,a_n)$ em que os λ_i e a_i são números reais e se supõe que $\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_n$. Além disso, dois elementos de $\mathcal{F}$ que só difiram pela ordem dos a_i não são considerados distintos. Definamos agora uma função f em $\mathfrak{S}$ e que toma valores em $\mathcal{F}$ do seguinte modo:

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n;a_1,\cdots,a_n)=f(A)$$

se e só se $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ são os valores próprios de A e $a_1,\cdots,a_n$ são os elementos principais de A. Põe-se agora o problema: determinar o contradomínio desta função.

Sejam $\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n$ os números $a_1,\cdots,a_n$ mas escritos por uma tal ordem que $\bar{a}_1 \geqq \cdots, \geqq \bar{a}_n$. De acordo com Mirsky [14] $y \in \mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ se e só se

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{a}_i \leqq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \qquad (k=1,\cdots,n),$$

verificando-se a igualdade para $k=n$.

Graças a este resultado, dado um elemento y de $\mathcal{F}$, podemos sempre decidir se y pertence ou não a $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$.

Seja agora C uma matriz complexa, fixa do tipo $k \times k$. Designemos por $\mathfrak{S}$ o conjunto de todas as matrizes complexas, quadradas, de ordem n $(n>k)$ cuja submatriz contida nas primeiras k linhas e k colunas é C. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os polinómios de coeficientes complexos, de grau n e primeiro coeficiente unitário. Finalmente seja f a seguinte função: se $A \in \mathfrak{S}$, $f(A)$ é o polinómio característico de A. Qual o contradomínio de f? A solução deste problema, que aqui não apresentamos por ser demasiado longa, pode encontrar-se em [20] e [21].

Como estes dois exemplos deixam ver, um sem número de problemas do tipo considerado acima pode ser formulado. Como veremos, muitos deles são extremamente difíceis e então, em vez da determinação de $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$, podemos, simplesmente, procurar algumas propriedades deste conjunto. Assim pode-se perguntar: será $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ conexo, convexo, limitado etc., sempre que estas noções tenham sentido em $\mathcal{F}$. Podemos ainda procurar subconjuntos $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$ tais que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ ou $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_f(\mathfrak{S}) = \Phi$, onde Φ representa o conjunto vazio, etc.

Em [15] e [16] encontram-se interessantes exposições de problemas deste tipo. Estes dois artigos contêm uma boa parte dos resultados conhecidos na altura em que foram publicados. No presente trabalho concentraremos a nossa atenção nos casos em que $\mathfrak{S}$ é o conjunto das matrizes estocásticas de ordem n ou o conjunto das matrizes duplamente estocásticas da mesma ordem.

2. Uma matriz $A=[a_{ij}]$ do tipo $n \times n$ diz-se estocástica se

$$a_{ij} \geqq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}=1 \qquad (i,j=1,\cdots,n).$$

Estas matrizes têm importantes aplicações no Cálculo das Probabilidades. Seja então $\mathfrak{S}$ o conjunto das matrizes estocásticas de ordem n e $\mathcal{F}$ o conjunto dos números complexos. Seja $f(A)=$ um (qualquer) valor próprio de A. Neste caso especial designaremos $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$ por M_n. Segue-se pois que $z \in M_n$ se e só se existe uma matriz estocástica de ordem n de que z é uma das raízes características. O problema da determinação de M_n resulta dum outro um pouco mais geral, mas que a este se reduz, posto por KOLMOGOROV em 1937 (veja-se [10]). Se z é raiz característica da matriz estocástica $A = [a_{ij}]$, satisfará um sistema de equações do tipo

$$z x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

com um, pelo menos, dos x_i diferente de zero. Sendo $|x_r| = \max_i |x_i|$, teremos

$$|z| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{rj} \frac{|x_j|}{|x_r|} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{rj} = 1$$

e portanto a região M_n está contida no círculo de centro na origem e raio 1. Este primeiro resultado obteve-se com grande facilidade mas a determinação completa de M_n foi um problema bastante difícil resolvido em 1951 por KARPELEVIČ [9]. Mostrou este autor que M_n é a região limitada pelos pontos do círculo unitário da forma $e^{i 2\pi \frac{a}{b}}$, em que a e b são dois inteiros quaisquer tais que $0 \leq a < b \leq n$, e ainda por certos arcos (de equações complicadas, pelo que as não reproduzimos) ligando aqueles pontos.

Em 1949 SULEĬMANOVA propôs um outro problema de certo modo parecido com este: $\mathfrak{S}$ é o mesmo do problema anterior, $\mathcal{F}$ é o conjunto das sequências $(z_1, \cdots, z_n)$ em que os z_i são números complexos, sendo irrelevante a ordem por que se encontram escritos e $f(A) = (z_1, \cdots, z_n)$ se e só se $z_1, \cdots, z_n$ são os n valores próprios de A.

No seu primeiro artigo sobre o assunto SULEĬMANOVA determinou parte de $\mathcal{F}_f(\mathfrak{S})$, que neste caso designaremos por $\mathcal{M}_n$, mas o problema continua até hoje sem solução completa.

Uma condição necessária para que $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathcal{M}_n$ tira-se imediatamente. Com efeito, suponhamos que $(z_1, \cdots, z_n) = f(A)$ com $A \in \mathfrak{S}$. Teremos $(z_1^k, \cdots, z_n^k) = f(A^k)$ para qualquer inteiro positivo k. Como o traço de A^k tem de ser não negativo, por A^k não poder ter elementos negativos, teremos

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^k \geq 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

Sabe-se que se os z_i forem reais e se $n \leq 4$ aquela condição é também suficiente. Porém para $n > 4$, mesmo que os z_i sejam reais, aquela condição já não é suficiente. Com efeito, não é difícil provar que não existe nenhuma matriz estocástica de 5.ª ordem com as raízes características 1, 1, —1/2, —3/4, —3/4 embora estes números satisfaçam a condição acima. Este exemplo deve-se a H. PERFECT e podem encontrar-se pormenores em [19] e [24].

Em [19] introduzimos um processo para atacar este problema que conduziu a resultados novos com bastante simplicidade. Esse processo baseia-se na transformação L que a seguir definimos.

Seja A uma matriz arbitrária do tipo $n \times n$, X outra matriz do tipo $n \times 1$ e q um número complexo. Prolonguemos A com a coluna $\begin{bmatrix} X \\ q \end{bmatrix}$, à direita e com uma linha de zeros, em baixo. Designemos por B a matriz assim obtida. Seja T uma matriz qualquer não singular do tipo $(n \times 1) \times \times (n+1)$ e

$$B_1 = T B T^{-1}.$$

Representaremos B_1 por $L_T^{\binom{X}{q}}(A)$ e chamar-lhe-emos transformada L de A.

Seja agora $A_1 = [z_1]$ e

$$A_{i+1} = L_{T_i}^{\binom{X_i}{z_{i+1}}}(A_i) \qquad (i = 1, \cdots, n-1)$$

em que X_i e T_i são matrizes de tipo conveniente. Claro que as raízes características de A_n são os números $z_1, \cdots, z_n$ (ao passarmos de A_i a A_{i+1} «introduzimos» a raiz característica z_{i+1}) e A_n apresenta-se assim como extremo duma «cadeia»

$$A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_n$$

em que A_i é do tipo $i \times i$ e cada matriz é uma transformada L da anterior. A ideia do método é construir A_n e depois investigar em que condições se pode dispor das matrizes X_i e T_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ por forma que A_n seja estocástica. Uma das dificuldades aparentes do método é o aparecimento da inversa de T_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ no decorrer do processo. Felizmente foi-nos possível provar que toda a matriz A_n se pode «construir» pelo método acima usando só matrizes T_i do tipo

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \alpha_1^{(i)} & \alpha_2^{(i)} & \cdots & \alpha_i^{(i)} & 1 \end{bmatrix}$$

e efectuando, por vezes, certas permutações de linhas e as mesmas permutações de colunas em certas matrizes intermédias A_i. A inversa de T_i obtém-se, trocando simplesmente o sinal aos $\alpha_j^{(i)}$ $(j = 1, \cdots, i)$. Não é também difícil mostrar que se tomarmos $A_1 = [1]$ e as matrizes T_i por forma que

$$\sum_{j=1}^{i} \alpha_j^{(i)} = 1$$

a matriz A_n é tal que a soma dos elementos de qualquer das suas linhas é 1. Para que seja estocástica só temos, pois, a preocupar-nos com a não negatividade dos seus elementos! A título de exemplo damos uma proposição que se pode obter imediatamente com a transformação L e que tem como consequência quase imediata um outro teorema apresentado em [25] por H. PERFECT com uma demonstração bastante mais complicada.

TEOREMA 1. *Seja* $\mathrm{A} = [\mathrm{a}_{ij}]$ *uma matriz estocástica de ordem* n. *Seja* λ *um número negativo e suponhamos que* A *tem um elemento diagonal,* a_{kk} *por exemplo, tal que* $|\lambda| \leq \mathrm{a}_{kk}$. *É então possível construir uma matriz estocástica* B *de ordem* $\mathrm{n}+1$ *cujas raízes características são as de* A *e o número* λ. *Além disso os primeiros* n *elementos diagonais de* B *coincidem com os correspondentes de* A *à excepção do da linha* k *que é* $\mathrm{a}_{kk}+\lambda$; *o último elemento diagonal de* B *é* 0.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, para fixar ideias, que $k = n$. Seja T a matriz T_i atrás definida para $i = n$ com $\alpha_1^{(n)} = \cdots = \alpha_{n-1}^{(n)} = 0$ e $\alpha_n^{(n)} = 1$. Sendo S uma matriz do tipo $(n+1) \times (n+1)$, TST^{-1} obtém-se somando à última linha de S a penúltima e depois subtraindo a sua última coluna da penúltima. Seja

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

em que todos os elementos da última coluna são nulos à excepção dos dois últimos. A matriz TCT^{-1} é a matriz B cuja existência se afirma no teorema.

A transformação L admite uma generalização natural: antes de se achar a transformada mediante T prolongue-se A com uma matriz do tipo $(n+k) \times k$ colocada à direita e preencham-se com zeros os lugares vagos em baixo para que se obtenha uma matriz quadrada. O uso desta generalização da transformação L é de particular utilidade para o estudo da construção de matrizes estocásticas com raízes características complexas. Tanto quanto nós sabemos o primeiro resultado neste caso (para $n > 3$) é o seguinte

TEOREMA 2. *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz estocástica de ordem* n. *Sejam* p *e* q *números reais e* $i = \sqrt{-1}$. *Suponhamos que* A *tem um menor principal*

$$\begin{bmatrix} a_{rr} & a_{rs} \\ a_{sr} & a_{ss} \end{bmatrix}$$

tal que $|p| \leq a_{rr}, a_{ss}$ *e* $|q| \leq a_{sr}, a_{rs}$. *Então a partir de* A *pode construir-se uma matriz estocástica de ordem* $n+2$ *cujas raízes características são as de* A *e ainda os números* $p \pm iq$.

A demonstração do teorema 1 deixa adivinhar a demonstração deste. Para pormenores veja-se [19].

3. Se tanto A como A^T são estocásticas diremos que A é duplamente estocástica. Ter-se-á pois neste caso

$$a_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = 1$$

$$(i, j = 1, \cdots, n).$$

Se nas definições de M_n e $\mathfrak{M}_n$ substituirmos «matriz estocástica» por «matriz duplamente estocástica» obtemos duas novas regiões que designaremos por D_n e $\mathfrak{D}_n$ respectivamente. Nenhuma destas duas regiões é completamente conhecida embora haja um conhecimento parcial das suas naturezas (veja-se [18]). Claro que

$$D_n \subseteq M_n \quad \text{e} \quad \mathfrak{D}_n \subseteq \mathfrak{M}_n .$$

Uma via que seria interessante explorar seria a da procura de relações entre D_n e M_n por um lado e $\mathfrak{D}_n$ e $\mathfrak{M}_n$ por outro (veja-se [19], Capítulo III).

A transformação L, embora não pareça tão apropriada para o estudo de matrizes duplamente estocásticas como para o de matrizes estocásticas, pode contudo conduzir a resultados de interesse como mostrámos em [19].

4. Chamaremos matriz de permutação a toda a matriz que possa ser obtida da identidade por conveniente permuta de linhas. Em 1946 BIRKHOFF demonstrou o seguinte

TEOREMA 3. *Se* A *é uma matriz duplamente estocástica então pode representar-se na seguinta forma*

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m$$

em que $P_1, \cdots, P_m$ *são matrizes de permutação e* $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ *são números reais satisfazendo* $\lambda_i \geq 0$ *e* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Pode acerca deste Teorema perguntar-se se há alguma relação entre o número m e a ordem n da matriz, por exemplo. Demonstraram MIRSKY e FARAHAT ([17]) que se pode sempre supor $m \leq n^2 - 2n + 2$ e que este limite é o melhor possível.

As matrizes duplamente estocásticas têm sido objecto de numerosos estudos sobretudo no que diz respeito às suas propriedades combinatórias. Certos problemas de Análise Combinatória levam à consideração duma função de matriz bastante interessante: o permanente (veja-se [27]). A definição de permanente é muito semelhante à de determinante: adicionem-se todos os termos da matriz; o resultado chama-se permanente. Portanto a diferença entre permanente e determinante consiste em que na formação daquele não se troca o sinal aos termos ímpares. Apesar da semelhança das definições as propriedades são bastante diferentes. Com efeito algumas propriedades do determinante mantêm-se no caso do permanente mas outras, fundamentais, faltam completamente. Por exemplo a regra de LAPLACE mantém-se: o permanente duma matriz é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando os permanentes de todos os menores contidos em k linhas (ou colunas) pelos permanentes dos respectivos menores complementares. Ao contrário do determinante, o permanente não é em geral multiplicativo, isto é, em geral tem-se $\operatorname{perm}(AB) \neq \operatorname{perm} A \cdot \operatorname{perm} B$ (onde o símbolo $\operatorname{perm} X$ designa o permanente de X). Como é sabido, se adicionarmos a uma linha (coluna) duma matriz quadrada outra linha (coluna) multiplicada por uma constante o determinante não se altera. Infelizmente isto não é verdade para o permanente o que bastante dificulta o seu cálculo.

Pode também pensar-se se não existirá uma regra uniforme de troca de sinais dos elementos duma matriz de tal modo que se obtenha uma nova matriz cujo determinante seja o permanente da inicial. Se existisse teríamos assim reduzido o estudo do permanente ao do determinante. Porém, para matrizes de ordem superior a dois, PÓLYA mostrou que tal regra não existe (veja-se [12]). Mais do que isso, segundo MARCUS e MINC [11], não existe nenhum operador linear sobre o espaço das matrizes do tipo $n \times n \; (n > 2)$ tal que o permanente da transformada duma matriz seja igual ao determinante da matriz de que se partiu.

Seja agora A uma matriz duplamente estocástica. A partir do Teorema de BIRKHOFF não é difícil provar que $\operatorname{perm} A > 0$. Na realidade sabe-se que se A é duplamente estocástica e tem h valores próprios de módulo 1 então

$$\operatorname{perm} A > \frac{1}{(n-h+1)^{n-h+1}},$$

e se além disso A é indecomponível ter-se-á

$$\operatorname{perm} A \geq \left(\frac{h}{n}\right)^n.$$

A consideração da função permanente conduziu a um famoso problema do tipo mencionado no parágrafo 1: determinar o contradomínio da função $\operatorname{perm} A$ quando A percorre o conjunto de todas as matrizes duplamente estocásticas de ordem n. Prova-se com facilidade que deverá ser $\operatorname{perm} A \leq 1$ e a respeito do limite inferior existe a seguinte conjectura (com mais de 40 anos mas ainda por resolver) devida a VAN DER WAERDEN:

$$\operatorname{perm} A \geq \frac{n!}{n^n},$$

verificando-se o sinal igual se e só se A é a matriz com todos os elementos iguais a $\frac{1}{n}$.

Os principais estudos sobre esta conjectura devem-se a M. MARCUS e seus colaboradores. Dois dos mais interessantes resultados obtidos são os seguintes [13]:

I. Se A_0 minimiza $\operatorname{perm} A$ e se todos os elementos de A_0 são positivos então A_0 é a matriz com todos os elementos iguais a $\frac{1}{n}$ (que designaremos por J_n).

II. Se $A \neq J_n$ e A pertence a uma vizinhança suficientemente pequena de J_n ter-se-á

$$\operatorname{perm} A > \operatorname{perm} J_n.$$

De acordo com o primeiro resultado a conjectura de VAN DER WAERDEN ficaria resolvida pela afirmativa se fosse possível provar que para cada matriz duplamente estocástica com alguns elementos nulos existe uma com todos os elementos positivos e permanente inferior. Isso conseguir-se-ia se para cada matriz A com elementos nulos fosse possível construir uma matriz B (ambas duplamente estocásticas) tal que AB tivesse todos os elementos positivos e

$$\operatorname{perm}(AB) < \operatorname{perm} A .$$

Dentro deste contexto talvez valha a pena citar o seguinte resultado de Brualdi [4]:

Se A e B são duas matrizes não negativas (não necessàriamente duplamente estocásticas) ter-se-á

$$\operatorname{perm}(AB) \geqq \operatorname{perm} A \cdot \operatorname{perm} B$$

5. Embora as diferenças entre as propriedades do determinante e do permanente sejam grandes, a importância do polinómio $\det(zE - A)$ (onde E é a identidade da mesma ordem de A) na teoria das matrizes sugere a consideração do polinómio $f(z) = \operatorname{perm}(zE - A)$. Assim Brenner e Brualdi provaram que as raízes de $f(z)$, quando A é uma matriz duplamente estocástica, estão dentro ou sobre a fronteira do círculo $|z| \leqq 1$ [2]. É notável a coincidência com a mesma propriedade das raízes de $\det(zE - A)$.

Como dissemos atrás quando A é duplamente estocástica tem-se $\operatorname{perm} A > 0$ e portanto se n é par será $f(0) > 0$ e se n é ímpar será $f(0) < 0$. A respeito de $f(1)$ mostraram Brualdi e Newman que $f(1) \geqq 0$. Se A é simétrica sabe-se que é com certeza $f(1) > 0$, desde que a matriz não tenha nenhum elemento diagonal igual a 1. Uma outra conjectura ainda pendente é a seguinte:

Se n *é par e* A *(que continuamos a supor duplamente estocástica) é irredutível,* f(z) *não tem raízes reais. Se, sob as mesmas hipóteses a respeito de* A, n *é ímpar,* f(z) *tem uma e uma só raiz real.*

Se nas definições das regiões $M_n, \mathfrak{M}_n, D_n$ e $\mathfrak{D}_n$ substituirmos «raiz característica» por «raiz do polinómio $\operatorname{perm}(zE - A)$» obtemos outras quatro regiões que designaremos respectivamente por $M_n^*, \mathfrak{M}_n^*, D_n^*$ e $\mathfrak{D}_n^*$. Nenhuma destas regiões foi, até agora, determinada.

A consideração do permanente e do polinómio $f(z) = \operatorname{perm}(zE - A)$ leva a muitos problemas do tipo exposto no parágrafo 1, envolvendo aquele polinómio ou as suas raízes. Assim pode pôr-se o problema: sob que condições os números $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ e $a_1, \cdots, a_n$ podem ser respectivamente as raízes do polinómio $f(z) = \operatorname{perm}(zE - A)$ e os elementos diagonais duma matriz real e simétrica A?

Claro que numerosos problemas deste tipo se podem enunciar. Em [22] encontra-se o primeiro resultado nesta direcção com o

Teorema 4. *Para que os números* $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ *e* $a_1, \cdots, a_n$ *possam ser respectivamente as raízes do polinómio* $f(z) = \operatorname{perm}(zE - A)$ *e os elementos principais duma matriz* A *(qualquer) é necessário e suficiente que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Se esta condição se verifica e tanto os a_i *como os* λ_i *são reais,* A *pode escolher-se real.*

SUMMARY

This is an expository paper where we are concerned with the following problem: let $\mathfrak{S}$ be a set of matrices, $\mathcal{F}$ an arbitrary set and f a function from $\mathfrak{S}$ into $\mathcal{F}$; determine the range of this function. We treated mainly the case in which $\mathfrak{S}$ is the set of stochastic

or doubly-stochastic matrices of order n. A survey of some known results is given and attention is called for some up to now unsolved problems.

BIBLIOGRAFIA

[1] Birkhoff, *Tres observaciones sobre el algebra lineal.* Univ. Nac. Tucumán, Rev. Ser. A, **5** (1946), pág. 147-151.

[2] Brenner e Brualdi, *Properties of the permanent function.* Notices of the Am. Math. Soc., **14** (1967), pag. 87.

[3] Brualdi, *Permanent of the product of doubly stochastic matrices.* Proc. Camb. Phil. Soc., **62** (1966), pag. 643-648.

[4] ———, *Permanent of the direct product of matrices.* Pacific J. Math., **16** (1966), pag. 471-482.

[5] Brualdi e Newman, *Proof of a permanental inequality.* Quart. J. Math. Oxford, **17**, 2nd Series, (1966), pag. 234-238.

[6] Brualdi e Wielandt, *A spectral characterization of stochastic matrices.* Aguardando publicação in Linear Algebra and its Applications.

[7] Fiedler, *Relations between the diagonal elements of two mutually inverse positive definite matrices.* Czech. Math. J., **14** (1964), pag. 39-51.

[8] ———, *Matrix Inequalities.* Numerische Math., **9** (1966), pag. 109-119.

[9] Karpelevič, *O harakterističeskih kornjah matricy s neotricatel' nymi èlementami.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Serie Mat., **15** (1951), pag. 361-383.

[10] Kolmogorov, *Markov chains with countably many possible states.* Bull. Univ. Moscow (A), **1**: 3 (1937).

[11] Marcus e Minc, *On the relation between the determinant and the permanent.* Illinois J. Math., **5** (1961), pag. 376-381.

[12] ———, *Permanents.* The Am. Math. Monthly, **72** (1965), pag. 577-591.

[13] Marcus e Newman, *On the minimum of the permanent of a doubly stochastic matrix.* Duke Math. J., **26** (1959), pag. 61-72.

[14] Mirsky, *Matrices with prescribed characteristic roots and diagonal elements.* J. London Math. Soc., **33** (1958), pag. 14-21.

[15] ———, *Results and problems in the theory of doubly stochastic matrices.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, **1** (1963), pag. 319-334.

[16] ———, *Inequalities and existence theorems in the theory of matrices.* J. of Math. Anal. and Appl., **9** (1964), pag. 99-118.

[17] Mirsky e Farahat, *Permutation endomorphisms and refinement of a theorem of Birkhoff.* Proc. Camb. Phil. Soc., **56**, Part 4 (1960), pag. 322-328.

[18] Mirsky e Perfect, *Spectral properties of doubly--stochastic matrices.* Monat. für Math., **69** (1965), pag. 35-57.

[19] Oliveira, *Sobre matrizes estocásticas e duplamente estocásticas.* Tese. Rev. da Fac. de C. da Univ. de Coimbra, **41** (1968), pag. 15-221.

[20] ———, *Matrices with prescribed characteristic polynomial and a prescribed submatrix.* Aguardando publicação in Pacific J. Math.

[21] ———, *Matrices with prescribed characteristic polynomial and a prescribed submatrix — II.* Aguardando publicação.

[22] ———, *A conjecture and some problems on permanents.* Aguardando publicação.

[23] ———, *On a certain system of matrix equations.* Aguardando publicação in Siam Review.

[24] Perfect, *Methods of constructing certain stochastic matrices.* Duke Math. J., **20** (1953), pag. 395-404.

[25] ———, *Methods of constructing certain stochastic matrices — II.* Duke Math. J., **22** (1955), pag. 305-311.

[26] ———, *A lower bound for the diagonal elements of a non-negative matrix.* J. of the London Math. Soc., **31** (1956), pag. 491-493.

[27] Ryser, *Combinatorial Mathematics.* Carus Math. Monograph n.º 14 (1963).

[28] Suleĭmanova, *Stohastičeskie matricy s deĭstvitel'nymi harakterističeskimi čislami.* Doklady Akad. Nauk SSSR, **16** (1949), pag. 343-345.

[29] van der Waerden, Aufgabe 45, Jber. Deutsch Math. Verein, **35** (1926), 117.

Fourier series for Meijer's G-function

by **S. D. Bajpai**
Department of Mathematics,
Shri G. S. Technological Institute, Indore — India

1. Introduction. Recently KESARWANI [2] has given two FOURIER series for MEIJER's G-functions. Two further series of this type are given in section 3 with the help of two integrals established in section 2.

In what follows for sake of brevity a_p denotes $a_1 \cdots a_p$; δ is a positive integer and the symbol $\Delta(\delta, \alpha)$ represents the set of parameters $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\alpha+1}{\delta}, \cdots, \frac{\alpha+\delta-1}{\delta}$.

2. The integrals. The integrals to be established are

$$(2.1)\qquad \int_0^{\pi/2} \cos(\alpha+\beta)\theta \cdot (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} \cdot G_{p,q}^{m,n}\left[z(\tan\theta)^{2\delta} \,\middle|\, \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right] d\theta = \frac{(2\delta)^{\alpha+\beta-1} 2^{-\delta}}{(\pi)^{\delta-1}\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot G_{p+2\delta,\, q+2\delta}^{m+2\delta,\, n+\delta}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} \Delta(\delta, 1-\alpha/2), a_p, \Delta\left(\delta, \frac{1-\alpha}{2}\right) \\ \Delta(2\delta, \beta), b_q \end{matrix} \right],$$

where

$$2(m+n) > p+q,$$
$$|\arg z| < (m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,$$
$$\mathrm{Re}(\alpha) > 0, \ \mathrm{Re}(\beta) > 0.$$

$$(2.2)\qquad \int_0^{\pi/2} \sin(\alpha+\beta)\theta \cdot (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} \cdot G_{p,q}^{m,n}\left[z(\tan\theta)^{2\delta} \,\middle|\, \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right] d\theta = \frac{(2\delta)^{\alpha+\beta-1} 2^{-\delta}}{(\pi)^{\delta-1}\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot G_{p+2\delta,\, q+2\delta}^{m+2\delta,\, n+\delta}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} \Delta\left(\delta, \frac{1-\alpha}{2}\right), a_p, \Delta(\delta, 1-\alpha/2) \\ \Delta(2\delta, \beta), b_q \end{matrix} \right],$$

where

$$2(m+n) > p+q,$$
$$|\arg z| < (m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,$$
$$\mathrm{Re}(\alpha) > -1, \ \mathrm{Re}(\beta) > 0.$$

PROOF. To established (2. 1), expressing the G-function as a MELLIN — BARNES type integral [1, p. 207, (1)] and interchanging the order of integration, which is justified due to the absolute convergence of the integrals involved in the process, we have

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+s) z^s}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - s)} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(\alpha+\beta)\theta \cdot (\sin\theta)^{\alpha+2s\delta-1} \cdot (\cos\theta)^{\beta-2s\delta-1}\, d\theta\, ds.$$

Now evaluating the inner integral with the help of the modified form of the formula [3, p. 450, (2)], viz.

$$\int_0^{\pi/2} \cos(\alpha+\beta)\theta \cdot (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} d\theta = \frac{\Gamma(\pi) 2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma(\alpha+\beta)},$$

$$\mathrm{Re}(\alpha) > 0, \ \mathrm{Re}(\beta) > 0,$$

and using the multiplication formula for the gamma function [1, p. 4, (11)], we get

$$\frac{(2\delta)^{\alpha+\beta-1}2^{-\delta}}{(\pi)^{\delta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{A}{B}\,ds\,,$$

where

$$A=\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)$$

$$\cdot\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{\alpha/2+i}{\delta}+s\right)\prod_{i=0}^{2\delta-1}\Gamma\left(\frac{\beta+i}{2\delta}-s\right)z^s,$$

and

$$B=\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)$$

$$\cdot\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{\frac{1-\alpha}{2}+i}{\delta}-s\right).$$

On applying [1, p. 207, (1)], the value of the integral (2. 1) is obtained.

The integral (2. 2) is established on applying the same procedure as above and using the modified form of the formula [3, p. 450, (3)].

3. The Fourier Series.

The FOURIER series to be established are

$$(3.\ 1)\qquad (\sin\Phi/2)^{\alpha-1}(\cos\Phi/2)^{2t-\alpha-1}$$

$$\cdot G_{p,q}^{m,n}\left[z(\tan\Phi/2)^{2\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right]=\frac{4}{(2\pi)^{\delta}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2\delta)^{2r-1}}{\Gamma(2r)}$$

$$\cdot G_{p+2\delta,q+2\delta}^{m+2\delta,n+\delta}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}\Delta(\delta,1-\alpha/2),a_p,\Delta\left(\delta,\frac{1-\alpha}{2}\right)\\ \Delta(2\delta,2r-\alpha),b_q\end{matrix}\right]\cos r\Phi,$$

where

$$2(m+n)>p+q\,,$$
$$|\arg z|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi\,,$$
$$2t>\operatorname{Re}(\alpha)>0\,,\qquad t=1,2,3,\cdots.$$

$$(3.\ 2)\qquad (\sin\Phi/2)^{\alpha-1}(\cos\Phi/2)^{2t-\alpha-1}$$

$$\cdot G_{p,q}^{m,n}\left[z(\tan\Phi/2)^{2\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right]=\frac{4}{(2\pi)^{\delta}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2\delta)^{2r-1}}{\Gamma(2r)}$$

$$\cdot G_{p+2\delta,q+2\delta}^{m+2\delta,n+\delta}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}\Delta\left(\delta,\frac{1-\alpha}{2}\right),a_p,\Delta(\delta,1-\alpha/2)\\ \Delta(2\delta,2r-\alpha)\end{matrix}\right]\sin r\Phi,$$

where

$$2(m+n)>p+q\,,$$
$$|\arg z|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi\,,$$
$$2t>\operatorname{Re}(\alpha)>-1\,,\qquad t=1,2,3,\cdots.$$

PROOF. To prove (3. 1), let

$$(3.\ 3)\qquad f(\Phi)=(\sin\Phi/2)^{\alpha-1}(\cos\Phi/2)^{2t-\alpha-1}$$

$$\cdot G_{p,q}^{m,n}\left[z(\tan\Phi/2)^{2\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}A_r\cos r\Phi\,.$$

Equation (3. 3) is valid since $f(\Phi)$ is continuous and of bounded variation in the open interval $(0,\pi)$.

Now multiplying both sides of (3. 3) by $\cos t\Phi$ and integrating with respect to Φ from 0 to π, we get

$$\int_0^{\pi}\cos t\Phi\,(\sin\Phi/2)^{\alpha-1}(\cos\Phi/2)^{2t-\alpha-1}$$

$$\cdot G_{p,q}^{m,n}\left[z(\tan\Phi/2)^{2\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right]d\Phi$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}A_r\int_0^{\pi}\cos r\Phi\cos t\Phi\,d\Phi\,.$$

Using (2. 1) [with $\theta=\Phi/2$, $\alpha+\beta=2t$] and the orthogonality property of the cosine functions, we obtain

$$(3.\ 4)\qquad A_t=\frac{4(2\delta)^{2t-1}}{(2\pi)^{\delta}\Gamma(2t)}$$

$$\cdot G_{p+2\delta,q+2\delta}^{m+2\delta,n+\delta}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}\Delta(\delta,1-\alpha/2),a_p,\Delta\left(\delta,\frac{1-\alpha}{2}\right)\\ \Delta(2\delta,2t-\alpha),b_q\end{matrix}\right].$$

With the help of (3. 3) and (3. 4), the result (3. 1) follows immediately.

Formula (3. 2) can be derived with the help of (2. 2) in the same manner.

I am thankful to Principal Dr. S. M. Das Gupta for the facilities he provided to me.

REFERENCES

[1] Erdelyi, A., *Higher Transcendental functions*, McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] Kesarwani, R. N., *Fourier Series for Meijer's G-function*, Compositio Math. **17** (2), 149-151, 1966.

[3] MacRobert, T. M., *Beta-function formulae and integrals involving E-functions*, Math. Annalen **142**, 450-452, 1961.

El operador elasticidad y las transformaciones adiabaticas de los gases perfectos

por *Alberto Sáez* (1) y *José Gallego-Díaz* (2)

Continuando con el estudio y la búsqueda de aplicaciones del operador elasticidad en diversas ramas de la Ciencia, [1], [2], presentamos en esta Nota un ejemplo sencillo de la posibilidad de aplicar el concepto de elasticidad de una función, [3], a las transformaciones adiabáticas de los gases perfectos, obtiniendo diversas expresiones para las capacidades caloríficas molares en función de las elasticidades de la presión y de la temperatura absoluta.

Cálculo de la elasticidad de la presión, respecto del volumen, en una transformación adiabática de un gas perfecto.

Diferenciando la ecuación de estado de los gases perfectos, referida a un mol, se obtiene:

$$(1) \qquad d\,T = \frac{p\,d\,V + V\,d\,p}{R}$$

en donde R es la constante universal de los gases perfectos.

La forma diferencial del Primer Principio de Termodinámica, aplicado a un gas perfecto es, [4]:

$$(2) \qquad d\,Q = C_v\,d\,T + p\,d\,V$$

en donde C_v es la capacidad calorífica a volumen constante de un mol de gas. Por la propria definición de gas perfecto, C_v es independiente de la temperatura absoluta.

Combinando las dos expresiones anteriores se obtiene:

$$(3) \qquad d\,Q = \frac{C_v + R}{R}\,p\,d\,V + \frac{C_v}{R}\,V\,d\,p$$

En una transformación adiabática (que supondremos reversible) será:

$$(4) \qquad (C_v + R)\,p\,d\,V + C_v\,V\,d\,p = O$$

Durante la transformación adiabática, la presión es una bien conocida función del volumen, que sería facil de deducir si ello fuera necesario para nuestros fines.

(1) Profesor Titular de la Escuela de Física y Matemáticas de la Universidad Central de Venezuela, Caracas.

(2) Fallecido en Caracas, en febrero de 1965.

Aplicando el operador elasticidad, se obtiene la elasticidad de la presión respecto del volumen que viene expresada, [3], así:

$$(5)\qquad E_v(p) = \frac{V}{p}\frac{dp}{dV}$$

Conviene advertir que el subíndice se incluye solo para indicar que, en este caso, estamos tomando al volumen como variable independiente. No se trata, pués, de una elasticidad parcial.

Tambien conviene recordar que la elasticidad es un parámetro adimensional, permaneciendo invariante aunque cambiemos las unidades con las que medimos la presión y el volumen.

De (4) se deduce:

$$(6)\qquad E_v(p) = -\frac{C_v + R}{C_v}$$

Definiendo, como en [4]:

$$(7)\qquad \gamma = 1 + \frac{R}{C_v}$$

resulta finalmente:

$$E_v(p) = -\gamma$$

Para los gases perfectos, C_v no depende tampoco de la presión ni del volumen, [5], por lo que será una constante y tambien lo será γ. Por tanto, las transformaciones que nos ocupan son isoelásticas.

Sea C_p la capacidad calorífica a presión constante de un mol de gas perfecto.

Es fácil demonstrar, [4], que se verifica:

$$(9)\qquad \frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

con lo cual:

$$(9')\qquad E_v(p) = -\frac{C_p}{C_v}$$

Tambien es inmediato ver que de (6) y (9') se deduce la relación de Mayer:

$$C_p - C_v = R$$

Expresiones para las capacidades caloríficas molares.

De la ecución (6) se deduce inmediatamente:

$$(10)\qquad C_v = -R\,\frac{1}{1 + E_v(p)}$$

y, mediante la ecuación (9'), se obtiene

$$(11)\qquad C_p = R\,\frac{E_v(p)}{1 + E_v(p)}$$

Tambien podemos considerar, durante la transformación adiabática, que la temperatura absoluta es función del volumen. La elasticidad de la temperatura respecto del volumen podría calcular-se siguiendo un procedimiento paralelo al empleado anteriormente, pero estimamos mas interesante realizarlo haciendo uso de algunas de las reglas operativas del cálculo de elasticidades.

La ecuación de estado de los gases perfectos, referida a un mol, es:

$$(12)\qquad T = \frac{1}{R}\,p\,V$$

Apliquemos a los dos miembros el operador elasticidad (respecto de la variable independiente V) y, en virtud de la regla de la elasticidad de un producto de dos funciones, resulta [3]:

$$(13)\qquad E_v(T) = E_v(V) + E_v(p) = 1 + {} + E_v(p) = 1 - \gamma$$

Por consiguiente, se obtienen las siguientes nuevas expresiones de las capacidades caloríficas molares:

(14) $$C_v = -R\,\frac{1}{E_v(T)}$$

(15) $$C_p = R\,\frac{E_v(p)}{E_v(T)} = R\,\frac{E_v(T)-1}{E_v(T)}$$

Módulo de compresibilidad:

Consideremos una transformación (no necesariamente adiabática) definida por una relación funcional entre la presión y el volumen.

Podemos definir, para dicha transformación, un módulo de compresibilidad en la forma usual:

(16) $$B = -V\,\frac{d\,p}{d\,V}$$

Es evidente que se verifica la relación:

(17) $$B = -p\,E_v(p)$$

Si se trata de un gas perfecto y la transformación es adiabáticas obtendremos, aplicando (8), la conocida relación:

(18) $$B = \gamma\,p$$

Observacion: El presente trabajo fué realizado, en su mayor parte, en 1961, en el Instituto de Cálculo Aplicado de la Universidad del Zulia (Maracaibo), cuando el primero de los autores era Director de dicho Instituto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gallego-Diaz, José; *Sobre la inversión del orden en las elasticidades parciales.* Gazeta de Matemática, N.° 50, Lisboa (1951).

[2] Sáez, Alberto y Gallego-Diaz, José; *Nuevos Operadores relacionados con el operador «elasticidad».* Gazeta de Matemática, N.os 88-89 Lisboa (1962).

[3] Rios, Sixto; *Ampliación de Matemáticas.* Madrid (1953), pp. 357 y 359.

[4] Palacios, Julio; *Termodinámica.* Gráfica Universal. Madrid (1942). pp. 58, 59 y 99.

[5] Palacios, Julio; *Termodinámica Aplicada.* I. N. T. A. Madrid (1951). p. 65.

Primeira pedária positiva duma cónica

por F. Peres Rodrigues (*)

Considere-se uma cónica qualquer e um ponto fixo, 0, do seu plano. Sem perda de generalidade no que se vai seguir, pode sempre escolher-se um sistema de eixos ortogonais (x, y) paralelos aos eixos da cónica e com origem no ponto 0.

Neste sistema de eixos, a equação matricial da cónica em coordenadas cartesianas homogéneas escreve-se:

(1) $$f(x,y,t) \equiv [x\,y\,t]\cdot\begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = 0.$$

A recta genérica tangente à cónica no ponto de coordenadas homogéneas (x, y, t) tem por equação matricial:

(2) $$[x\,y\,t]\cdot\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

em que (u, v, w) se podem considerar as suas coordenadas tangenciais homogéneas.

(*) Engenheiro especialista do LNEC, Lisboa.

A comparação de (1) e (2) permite escrever:

$$(3)\qquad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}$$

em que k é uma constante finita não nula.

De (3) pode obter-se sucessivamente:

$$(4)\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

e:

$$(5)\qquad [x\, y\, t] = \frac{1}{k} \cdot [u\, v\, w] \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} .$$

A substituição de (4) e (5) em (1) conduz à equação matricial da cónica em coordenadas tangenciais homogéneas:

$$(6)\qquad f(u, v, w) \equiv [u\, v\, w] \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0 .$$

Por definição, a primeira pedária positiva da cónica (1) relativa ao ponto 0, origem das coordenadas, é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares tiradas do ponto 0 para as tangentes (2) à cónica [1]. Assim, se se designar por (x, y) as coordenadas cartesianas da pedária, deverão verificar-se entre estas coordenadas e as coordenadas tangenciais homogéneas da cónica, as relações:

$$(7)\qquad \frac{x}{u} = \frac{y}{u} = \frac{x^2 + y^2}{u\,x + v\,y} = \frac{-(x^2 + y^2)}{w}$$

que mostram ser u, v e w proporcionais respectivamente a x, y e $-(x^2 + y^2)$, isto é:

$$u = Kx$$

$$v = Ky$$

$$(8)\qquad w = -K(x^2 + y^2) .$$

A substituição de (8) em (6) permite obter a equação matricial da pedária em coordenadas cartesianas:

$$(9)\qquad F(x, y) \equiv [x\, y\; -(x^2 + y^2)] \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ -(x^2 + y^2) \end{bmatrix} = 0 .$$

Fazendo:

$$(10)\qquad \begin{bmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

a definição de matriz inversa implica, àparte um factor constante que se elimina quando da substituição em (6) ou (9), as seguintes igualdades:

$$(11)\qquad \begin{aligned} a &= CF - E^2 & d &= -CD \\ b &= DE & e &= -AE \\ c &= AF - D^2 & f &= AC. \end{aligned}$$

A substituição de (11) em (6) permite escrever a equação da cónica em coordenadas tangenciais homogéneas:

$$(12)\qquad \begin{aligned} f(u, v, w) \equiv a\,u^2 + 2\,b\,u\,v + c\,v^2 + \\ + 2\,d\,u\,w + 2\,e\,v\,w + f\,w^2 = 0 ; \end{aligned}$$

e, a mesma substituição em (9), a equação da pedária em coordenadas cartesianas:

[1] A pedária positiva de ordem n duma curva, relativa a um ponto do seu plano, é, por definição, a primeira pedária positiva da pedária positiva de ordem $n-1$ dessa curva, relativa a esse ponto.

Igualmente se define pedária negativa de ordem n, a partir da primeira pedária negativa dessa curva, relativa a um ponto do seu plano, que é, como se sabe, a envolvente das perpendiculares às extremidades dos raios vectores tirados desse ponto para todos os pontos da curva.

$$(13)\quad \begin{aligned} F(x,y) \equiv ax^2+2bxy+cy^2-2(dx+ey)\cdot \\ \cdot(x^2+y^2)+f(x^2+y^2)^2=0 \end{aligned}$$

verificando-se ser esta curva uma cíclica com um ponto duplo na origem.

Se a cónica tiver o centro a distância finita, isto é, for centrada, o parâmetro f definido em (11) não pode ser nulo e a equação (13) da pedária representa uma quártica bicircular tendo a origem por ponto duplo. Na fig. 1

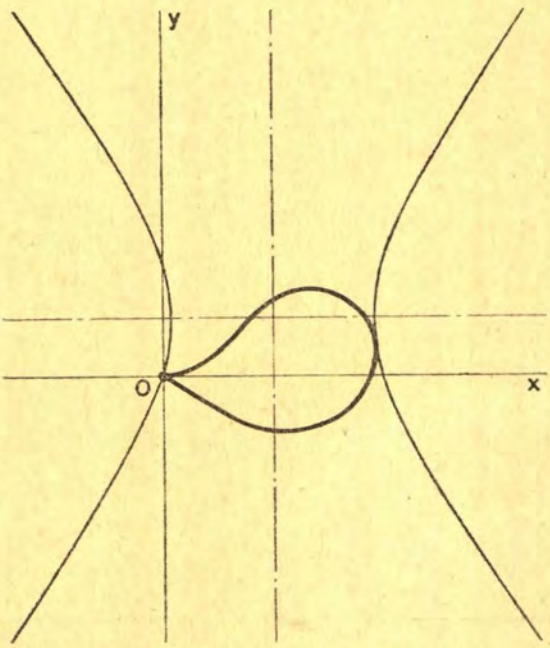


Fig. 1

apresenta-se, como exemplo, a pedária duma hipérbole relativamente a um dos seus pontos [1].

Se a cónica tiver o centro a distância infinita, isto é, se for do género parábola, pode considerar-se, sem perda de generalidade, a sua directriz própria paralela ao eixo dos y e assim, por ser nulo o parâmetro A, as expressões (11) assumem os valores particulares:

$$(14)\qquad \begin{aligned} a &= CF-E^2 & d &= -CD \\ b &= DE & e &= 0 \\ c &= -D^2 & f &= 0. \end{aligned}$$

A substituição de (14) em (12) permite escrever a equação da parábola considerada, em coordenadas tangenciais homogéneas:

$$(15)\quad f(u,v,w) \equiv au^2+2buv+cv^2+2duw=0$$

e a substituição de (14) em (13) a equação da pedária correspondente, em coordenadas cartesianas:

$$(16)\qquad \begin{aligned} F(x,y) \equiv ax^2+2bxy+ \\ +cy^2-2dx(x^2+y^2)=0 \end{aligned}$$

que representa uma cúbica circular tendo a origem por ponto duplo. Na fig. 2 apresenta-se como exemplo a pedária duma parábola relativamente a um ponto exterior.

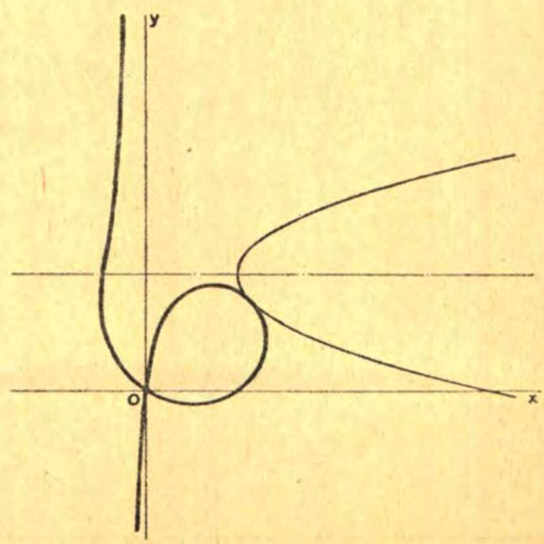


Fig. 2

[1] A discussão do número de pontos comuns à cónica e à pedária e a sua determinação, feita com base no estudo conjunto da cónica, da sua evoluta e da sua hipérbole de Apollónius relativa à origem, saiem fora do âmbito deste artigo.

Os coeficientes angulares m das tangentes à pedária na origem, ponto duplo, obtêm-se a partir das expressões (13) e (16), calculando:

$$m = \lim_{x,\, y \to 0} \frac{y}{x} \tag{17}$$

resultando de ambas a mesma equação:

$$c\,m^2 + 2\,b\,m + a = 0\,. \tag{18}$$

Por outro lado, as equações das tangentes à cónica tiradas da origem, obtêm-se fazendo em (12) e (15) $w = 0$, vindo indistintamente:

$$a\,u^2 + 2\,b\,u\,v + c\,v^2 = 0\,; \tag{19}$$

os seus coeficientes angulares são, por definição:

$$m_1 = -\frac{u}{v} \tag{20}$$

que substituídos em (19) conduzem a:

$$a\,m_1^2 - 2\,b\,m_1 + c = 0\,. \tag{21}$$

A comparação de (18) e (21) mostra que as raízes das duas equações estão ligadas pela relação:

$$m = -\frac{1}{m_1} \tag{22}$$

o que prova serem as tangentes à pedária no ponto duplo, normais às tangentes tiradas deste ponto à cónica, qualquer que seja o seu género.

Os binómios discriminantes das equações (18) e (21) são iguais e tem por valor:

$$\delta = b^2 - a\,c \tag{23}$$

podendo, de acordo com as expressões (11) e (14), tomar a forma:

$$\delta = -F\Delta \tag{24}$$

em que Δ é o valor do determinante associado à matriz da cónica (1).

Para $F\Delta < 0$ existem duas tangentes reais e distintas, sendo o ponto 0 exterior à cónica e um ponto duplo da pedária (fig. 2), que por ser o cruzamento de dois ramos, se denomina nodo. Para $F = 0$ existem ainda duas tangentes reais mas coincidentes e o ponto 0 pertence simultâneamente à cónica e à pedária, sendo em relação a esta curva, um ponto de reversão de 1.ª espécie ou ceratóide (fig. 1).

Finalmente para $F\Delta > 0$, as duas tangentes tornam-se imaginárias, sendo o ponto 0 interior à cónica e um ponto duplo isolado da pedária (fig. 3).

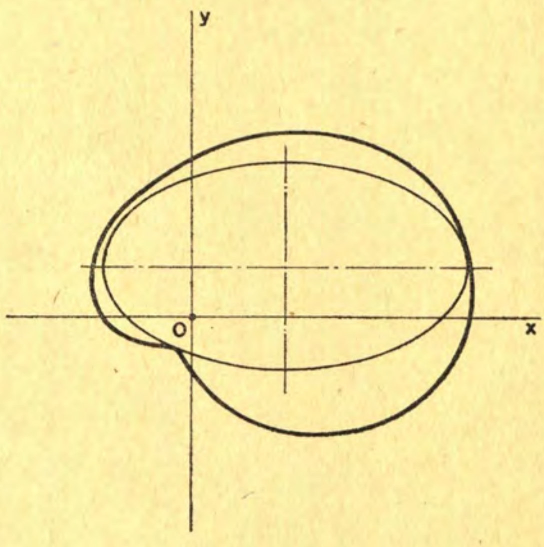


Fig. 3

RESUMO

Deduz-se, a partir da equação matricial duma cónica em coordenadas cartesianas homogéneas, a equação da sua primeira pedária positiva em relação à origem, estudando-se a natureza desta curva em função da natureza da cónica. Estuda-se ainda as características da origem, ponto duplo da pedária, atendendo à sua posição relativamente à cónica.

RESUME

On déduit, basée sur l'équation matricielle d'une conique écrite en coordonnées cartésiennes homogènes, l'équation de sa première podaire positive par rapport à l'origine, et étudie la nature de cette courbe en fonction de la nature de la conique. On étudie aussi les caractéristiques de l'origine, point double de la podaire, prenant en attention sa position par rapport à la conique.

SUMMARY

Based on the matricial equation of a conic in homogeneous cartesian coordinates, the equation of its first positive pedal in relation to the origin is deduced, and the nature of this curve in function of the nature of the conic studied. The characteristics of the origin (double point of the pedal) are also studied taking in account its position in relation to the conic.

Note on Jacobi endomorphisms

by **José Morgado**
Instituto de Matemática,
Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. In a recent paper [1], B. M. PUTTASWAMAIAH studied the *Jacobi endomorphisms* of an arbitrary group G, i. e., the endomorphisms σ satisfying the condition

$$((a\,b)^\sigma c)^\sigma ((b\,c)^\sigma a)^\sigma ((c\,a)^\sigma b)^\sigma = 1 \quad \text{for all } a, b, c \text{ in } G, \tag{1}$$

a^σ being the image of a under σ and 1 being the neutral element of G.

It is clear that the trivial endomorphism θ defined by $a^\theta = 1$ for every $a \in G$, is a JACOBI endomorphism. A group G which admits a non trivial JACOBI endomorphism is said to be a *Jacobi group.*

Some assertions contained in [1] are not true.

Thus, for instance, it is asserted ([1], Lemma 1) that *a group* G *has a* (non trivial) JACOBI *endomorphism* σ *if and only if*

$$n \mid 2\sigma^2 + \sigma \quad \text{and} \quad a^\sigma b^{\sigma^2} = b^{\sigma^2} a^\sigma \quad \text{for all } a, b \text{ in } G$$

where n *denotes the exponent of* G (i. e., n is the least positive integer such that $x^n = 1$ for every $x \in G$ ([2], p. 108)).

Or this is not true, as one concludes from the following

EXAMPLE 1. Let G be the additive group of all rational numbers and let σ be the endomorphism of G defined by

$$\sigma(x) = -\frac{1}{2}x \quad \text{for every} \quad x \in G.$$

Since

$$\sigma(\sigma(a+b)+c)+\sigma(\sigma(b+c)+a)+$$
$$+\sigma(\sigma(c+a)+b)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(a+b)+c\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(b+c)+a\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(c+a)+b\right)=0,$$

one sees that σ is a non trivial JACOBI endomorphism (more precisely, σ is a JACOBI automorphism) and, although, one has not $n \mid 2\sigma^2+\sigma$, since the exponent of G does not exist.

The same example shows that the assertion that *if* σ *is a* JACOBI *endomorphism of a group* G, *then* G^σ *is of odd exponent* ([1], Theorem 1, *(iii)*) is false.

It is also asserted that *a group has at most two* JACOBI *endomorphisms, one of them being the trivial endomorphism* ([1], Remarks).

This is not true, as one sees in the following

EXAMPLE 2. Let H be the direct product of G by G, where G is the group considered in Example 1. It is easy to see that the endomorphisms α, β, γ of H, defined by

$$\alpha((x, y))=\left(-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y\right),$$

$$\beta((x, y))=\left(-\frac{1}{2}x, 0\right),$$

$$\gamma((x, y))=\left(0, -\frac{1}{2}y\right)$$

for every $(x, y) \in H$, are non trivial JACOBI endomorphisms.

In this note, we improve some results contained in [1]. We show that there is at most one JACOBI automorphism of a group G and such an automorphism exists, if and only if G is an abelian group with the unique square root property. We formulate a necessary and sufficient condition for a group to be a JACOBI group, in terms of a semi-direct product.

2. One says that a group G has the *square root property,* if for each $a \in G$ the equation

$$(2) \qquad x^2=a$$

has at least one solution in G. If for each $a \in G$ the equation (2) has a *unique* solution in G, then G is said to have the *unique square root property.*

LEMMA 1. *If* G *is an abelian group having the square root property, then* G *has the unique square root property, if* (and only if) *the equation*

$$(3) \qquad x^2=1$$

has a unique solution in G.

PROOF. In fact, if x_1 and $x_2 \neq x_1$ are solutions of the equation (2), then 1 and $x_1 x_2^{-1} (\neq 1)$ are solutions of the equation (3).

LEMMA 2. *Let* G *be a group and let* σ *be an endomorphism of* G. *Then* σ *is a* JACOBI *endomorphism of* G, *if and only if the following conditions hold:*

(i) $a^{2\sigma^2+\sigma}=1$ *for every* $a \in G$;
(ii) $a^\sigma b^{\sigma^2}=b^{\sigma^2} a^\sigma$ *for all* a, b *in* G.

(If α and β are mappings of G into G, then $a^{\alpha\beta}$ means $(a^\alpha)^\beta$ and $a^{\alpha+\beta}$ means $a^\alpha a^\beta$).

PROOF. Indeed, if σ is a JACOBI endomorphism of G, then from (1) it results

$$(4) \qquad a^{\sigma^2} b^{\sigma^2} c^{\sigma} b^{\sigma^2} c^{\sigma^2} a^{\sigma} c^{\sigma^2} a^{\sigma^2} b^{\sigma} = 1 ,$$

for all a, b, c in G.

By setting $b = c = 1$ in (4), one obtains

$$a^{\sigma^2} a^{\sigma} a^{\sigma^2} = 1 \quad \text{for every} \quad a \in G$$

and, consequently, (i) holds.

By setting $c = 1$ in (4), one obtains

$$a^{\sigma^2} b^{\sigma^2} b^{\sigma^2} a^{\sigma} a^{\sigma^2} b^{\sigma} = 1 \ \text{for all} \ a, b \ \text{in} \ G$$

and, since one has $b^{2\sigma^2} = b^{-\sigma}$ and $a^{\sigma+\sigma^2} = a^{-\sigma^2}$ by (i), it results

$$a^{\sigma^2} b^{-\sigma} a^{-\sigma^2} b^{\sigma} = 1 \quad \text{for all} \quad a, b \ \text{in} \ G ,$$

which is equivalent to condition (ii).

Conversely, if σ satisfies the conditions (i) and (ii), then one has

$$\begin{aligned} & a^{\sigma^2} b^{\sigma^2} c^{\sigma} b^{\sigma^2} c^{\sigma^2} a^{\sigma} c^{\sigma^2} a^{\sigma^2} b^{\sigma} \\ &= a^{\sigma^2} b^{\sigma^2} b^{\sigma^2} (c^{\sigma} c^{\sigma^2} c^{\sigma^2}) a^{\sigma} a^{\sigma^2} b^{\sigma}, \ \text{by } (ii) \\ &= a^{\sigma^2} b^{\sigma^2} b^{\sigma^2} a^{\sigma} a^{\sigma^2} b^{\sigma}, \ \text{by } (ii) \text{ and } (i) \\ &= a^{\sigma^2} a^{\sigma} (b^{\sigma^2} b^{\sigma^2} b^{\sigma}) a^{\sigma^2}, \ \text{by } (ii) \\ &= 1, \ \text{by } (i) \text{ and } (ii), \end{aligned}$$

proving that σ is a Jacobi endomorphism.

Theorem 1. *If σ is a* Jacobi *endomorphism of the group* G, *then* G^{σ} *is an abelian group having the unique square root property.*

Proof. Indeed, let $x, y \in G^{\sigma}$, i. e., one has $x = z^{\sigma}$ and $y = t^{\sigma}$ for suitable elements $z, t \in G$. Then, by repeated use of (i) and (ii), one obtains

$$\begin{aligned} x y &= z^{\sigma} t^{\sigma} = z^{\sigma} (t^{-1})^{2\sigma^2} = z^{\sigma} (t^{-1})^{\sigma^2} (t^{-1})^{\sigma^2} \\ &= (t^{-1})^{\sigma^2} z^{\sigma} (t^{-1})^{\sigma^2} = (t^{-1})^{\sigma^2} (t^{-1})^{\sigma^2} z^{\sigma} \\ &= (t^{-1})^{2\sigma^2} z^{\sigma} = t^{\sigma} z^{\sigma} = y x , \end{aligned}$$

for all $x, y \in G^{\sigma}$, which proves that G^{σ} is an abelian group.

Now, let a be any element of G^{σ}, i. e., $a = c^{\sigma}$ for a suitable element $c \in G$. Since, by condition (i) of Lemma 2, one has

$$a = c^{\sigma} = c^{-2\sigma^2} = (c^{-\sigma^2})^2 \quad \text{and} \quad c^{-\sigma^2} = (c^{-\sigma})^{\sigma},$$

one sees that the equation $x^2 = a$ has at least one solution in G^{σ}, namely, $x = c^{-\sigma^2}$.

Let us show that the equation $y^2 = 1$ has only one solution in G^{σ}.

In fact, it is easy to see that the restriction of σ to G^{σ} is an automorphism.

One has clearly $G^{\sigma^2} \subseteq G^{\sigma}$, since $x^{\sigma^2} = (x^{\sigma})^{\sigma}$ for every $x \in G$. On the other hand, if $x = z^{\sigma} \in G^{\sigma}$, then, since $z^{\sigma} = (z^{-2})^{\sigma^2}$ by condition (i) of Lemma 2, one concludes that $x \in G^{\sigma^2}$, i. e., $G^{\sigma} \subseteq G^{\sigma^2}$, and thus the restriction of σ to G^{σ} is a surjective endomorphism.

Moreover, if $x = z^{\sigma} \in G^{\sigma}$ is such that $x^{\sigma} = 1$, then one has obviously

$$1 = z^{\sigma^2} = z^{-\sigma^2 - \sigma} ,$$

hence

$$x = z^{\sigma} = z^{-\sigma^2} = (z^{\sigma^2})^{-1} = 1 ,$$

meaning that the restriction of σ to G^{σ} is also an injective endomorphism and, consequently, it is an automorphism.

From this it follows that the equation $y^2 = 1$ has only the solution $y = 1$ in G^{σ}, because

$$y^2 = 1 \ \text{implies} \ 1 = (y^2)^{-\sigma^2} = y^{-2\sigma^2} = y^{\sigma}$$

and hence one concludes, by Lemma 1, that G^{σ} has the unique square root property, as it was to be proved.

Theorem 2. *If* G *is an abelian group with the unique square root property, then there exists exactly one* Jacobi *automorphism of* G.

PROOF. Indeed, let $\rho : G \to G$ be the mapping defined by the following condition:

For each $a \in G$, a^ρ *is the (unique) solution of the equation* $x^2 = a$ *in* G.

Since G is an abelian group, from the equations

$$x^2 = a \text{ and } y^2 = b, \text{ with } a, b \text{ in } G,$$

it follows $(xy)^2 = x^2 y^2 = ab$, that is to say,

$$(ab)^\rho = xy = a^\rho b^\rho, \text{ for all } a, b \text{ in } G,$$

and thus ρ is an endomorphism of G.

Furthermore, for every element $a \in G$, one has $(a^2)^\rho = (a^\rho)^2 = a$ and, since

$$a^\rho = b^\rho \text{ implies } a = (a^\rho)^2 = (b^\rho)^2 = b,$$

one concludes that ρ is an automorphism of G.

Now, by setting

$$x^\sigma = (x^{-1})^\rho \text{ for every } x \in G,$$

one sees that σ is an automorphism of G.

Since G is an abelian group, the condition (*ii*) of Lemma 2 is trivially satisfied. Moreover, one has

$$\begin{aligned} x^{2\sigma^2+\sigma} &= ((x^\sigma)^\sigma)^2 x^\sigma = ((x^{-\rho})^{-\rho})^2 x^{-\rho} \\ &= (x^{\rho^2})^2 x^{-\rho} = ((x^2)^\rho)^\rho x^{-\rho} \\ &= x^\rho x^{-\rho} = 1, \end{aligned}$$

which completes the proof that σ is a JACOBI automorphism of G.

Let us suppose that τ is also a JACOBI automorphism of G.

Then, for each $x \in G$, the element $y = (x^{-1})^\tau$ is a square root of x.

In fact, from $x^\tau y = 1$, it follows

$$1 = x^{2\tau^2} y^{2\tau} = x^{-\tau} (y^2)^\tau = (x^{-1} y^2)^\tau$$

and since τ is an automorphism, one has $x^{-1} y^2 = 1$, i. e., $y^2 = x$.

In view of the fact that G has the unique square root property, one has $(x^{-1})^\sigma = (x^{-1})^\tau$ for every $x \in G$ and hence $\sigma = \tau$, as wanted.

From Theorem 1 and 2, it results immediately the following

THEOREM 3. *If* G *is a group, then there is at most one* JACOBI *automorphism of* G *and such an automorphism exists, if and only if* G *is an abelian group satisfying the unique square root condition.*

In particular, one can state the following

COROLLARY. *If* G *is an abelian group of odd exponent, then there exists exactly one* JACOBI *automorphism of* G.

In fact, if $2n + 1$ is the exponent of G, from $x^{2n+1} = 1$ for every $x \in G$, it results

$$(x^{-n})^2 = x \text{ for every } x \in G,$$

i. e., G has the square root property.

Since $y^2 = 1$ implies

$$y = y \cdot 1 = y \cdot y^{2n} = y^{2n+1} = 1,$$

one concludes by Lemma 1 that G has the unique square root property and, by Theorem 3, that there is only one JACOBI automorfism σ of G, defined by $x^\sigma = x^n$ for every $x \in G$.

The Corollary to Theorem 3 improves Lemma 2 in [1].

REMARK. In [1], Theorem 3, it is proved that G *is a* JACOBI *group under an inner automorphism* σ *of* G, *then* G *is a direct product of cyclic groups each of order 3.*

This is true and it may be added that σ is the identity automorphism, as one concludes immediately by means of the Corollary above.

3. Let N be a normal subgroup of the group G and let H be a subgroup of G. One says that G is the *semi-direct product* of N by H, if for each $x \in G$ there is exactly one element a in H such that $xN = aN$.

THEOREM 4. *A group* G *is a* JACOBI *group, if and only if* G *is the semi-direct product of a proper normal subgroup by an abelian subgroup with the unique square root property.*

PROOF. Let us suppose that G is a JACOBI group and let σ be a non trivial JACOBI endomorphism of G. It is known that G^σ is isomorphic to the quotient group G/N, where N denotes the kernel of σ.

Since

$$(x \cdot x^{2\sigma})^\sigma = x^{2\sigma^2+\sigma} = 1 \quad \text{for every } x \in G,$$

one has $x \cdot x^{2\sigma} \in N$ and, therefore, $xN = x^{-2\sigma}N$ with $x^{-2\sigma} \in G^\sigma$.

Moreover, if the element $y^\sigma \in G^\sigma$ satisfies the condition $xN = y^\sigma N$, then one has $xy^{-\sigma} \in N$, i. e., $(xy^{-\sigma})^\sigma = 1$, hence $x^\sigma y^{-\sigma^2} = 1$.

From this it follows

$$1 = x^{2\sigma} y^{-2\sigma^2} = x^{2\sigma} y^\sigma,$$

i. e., $y^\sigma = x^{-2\sigma}$.

This means that G is the semi-direct product of N by G^σ, because N is a proper normal subgroup of G and G^σ is a subgroup of G. By Theorem 1, we know that G^σ is an abelian group with the unique square root property.

Conversely, let us suppose that G is the semi-direct product of a proper normal subgroup N by an abelian subgroup H having the unique square root property. Then the groups H and G/N are isomorphic.

Let ν be the natural homomorphism of G onto G/N and let μ be the isomorphism of G/N onto H defined by the condition

$$(aN)^\mu = a'.$$

where a' is the (unique) element of H such that $aN = a'N$.

Finally, let τ be the (unique) JACOBI automorphism of H (Theorem 2). By setting

$$\sigma = \nu\mu\tau,$$

one gets clearly an endomorphism of G and one has $G^\sigma = H$.

It is immediate that *the kernel of* σ *is* N. In fact, if $x \in N$, then $x^\nu = 1$, hence $(x^\nu)^\mu = 1$ and consequently,

$$x^\sigma = 1^\tau = 1.$$

Conversely, if $y^\sigma = 1$, then one has $x'^\tau = 1$ and, since τ is an automorphism of H, it follows $x' = 1$, that is to say, $xN = N$ and therefore, $x \in N$.

In view of the fact that x'^τ is the (unique) square root of x'^{-1} in H, one has $x^{2\sigma} = x'^{-1}$, that is to say, $xN = x^{-2\sigma}N$ and so $x^{2\sigma} \cdot x \in N$.

From this it follows

$$x^{2\sigma^2+\sigma} = (x^{2\sigma} \cdot x)^\sigma = 1 \quad \text{for every } x \in G.$$

Moreover, one has clearly

$$x^\sigma y^{\sigma^2} = y^{\sigma^2} x^\sigma \quad \text{for all } x, y \text{ in } G,$$

since the group $G^\sigma (= H)$ is an abelian group.

Thus, the conditions (i) and (ii) of Lemma 2 are satisfied by the endomorphism σ.

This means that σ is a JACOBI endomorphism and, since this endomorpism is non trivial because $N \neq G$, one concludes that G is a JACOBI group, as wanted.

This theorem improves Theorem 3 in [1].

REFERENCES

[1] B. M. PUTTASWAMAIAH, *Jacobi endomorphisms*, Amer. Math. Monthly, **73** (1966), pp. 741-744.

[2] H. J. ZASSENHAUS, *The Theory of Groups*, 2nd ed., Chelsea, New York, 1958.

Nota a um problema de Markov

por *J. Marques Henriques*

O seguinte problema, originàriamente devido a A. A. MARKOV (1856-1922), embora de simples formulação, foi o ponto de partida de um dos capítulos centrais de toda a Teoria das Probabilidades e dos Processos Estocásticos: o das cadeias (e dos processos) de MARKOV. O objectivo desta Nota é, além de chamar a atenção para o seu interesse histórico, apresentar o seu enunciado e solução completa.

PROBLEMA: Um dado «ideal» (i. e., com iguais probabilidades — portanto todas iguais a $1/6$ — de saída de cada uma das faces) é lançado n vezes. Qual é a probabilidade $p_n(\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ de que a soma das faces saídas nos n lançamentos dividida por 4 tenha ν por resto? Por outras palavras: se designarmos por $X = \sum_{\rho=1}^{n} X_\rho$ a soma dos valores saídos em cada um dos n lançamentos, qual é a probabilidade $p_n(\nu)$ tal que

$$p_n(\nu) = P\ (X \equiv \nu \bmod 4)\,?$$

Como se vê, a formulação deste problema é muito simples. O mesmo, porém, se não pode dizer da sua resolução, como veremos abaixo. Uma formulação mais geral deste problema ainda é possível (cf. RICHTER [2, A III. 5.10]), admitindo que o dado não é «ideal» mas antes «viciado», i. e. tem diferentes probabilidades de saída de cada uma das faces; este caso é de solução um pouco mais trabalhosa, mas análoga, e por isso não o apresentaremos aqui. Além disso, o caso do dado «ideal» permite a verificação imediata de que $\lim_{n\to\infty} p_n(\nu) = 1/4$ (limite tomado no sentido da Análise), o que é de todo intuitivo devido à igual probabilidade de saída de cada uma das faces e portanto de obtenção, no limite para um número infinito de lançamentos, de iguais probabilidades para as congruências das somas dos valores saídos em cada lançamento.

Para solucionar o nosso problema, comecemos por calcular, por métodos elementares, os vários valores de $p_n(\nu)$ para $n = 1$ e $n = 2$. No caso de um só lançamento do dado teremos:

$$P(X_1 = k) = 1/6$$

$(k = 1, \ldots, 6)$ e portanto, da tabela seseguinte:

k	$P(X_1 = k)$	ν
1	1/6	1
2	1/6	2
3	1/6	3
4	1/6	0
5	1/6	1
6	1/6	2

concluímos (pela clássica fórmula de LAPLACE) que

$$(1) \qquad \begin{aligned} p_1(0) &= p_1(3) = 1/6 \\ p_1(1) &= p_1(2) = 1/3 \end{aligned}$$

(Evidentemente que $\sum_\nu p_1(\nu) = 1$). Agora, com $n = 2$, teremos

$$P(X_1 = k_1 \,\&\, X_2 = k_2) = 1/36$$

$(k_1, k_2 = 1, \ldots, 6)$, e portanto para os 36 pares de valores (X_1, X_2)

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (2,1) & \ldots & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & \ldots & (6,2) \\ . & . & \ldots & . \\ (1,6) & (2,6) & \ldots & (6,6) \end{array}$$

vêm os seguintes valores de ν:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

pelo que (usando de novo a fórmula de LAPLACE):

$$p_2(0) = p_2(2) = 9/36$$
$$p_2(1) = 8/36$$
$$p_2(3) = 10/36$$

(De novo, $\sum_\nu p_2(\nu) = 1$, como aliás deveria ser). Agora, para resolver o problema para qualquer valor natural de n teremos de estabelecer uma fórmula de recorrência que, depois de devidamente resolvida, nos dará a expressão analítica desejada de $p_n(\nu)$. De facto,

$$p_n(\nu) = P(X \equiv \nu \bmod 4) =$$

$$= P\left(\sum_{\rho=1}^{n-1} X_\rho \equiv 0 \bmod 4\right) \cdot P(X_n \equiv \nu \bmod 4) +$$

$$+ P\left(\sum_{\rho=1}^{n-1} X_\rho \equiv 1 \bmod 4\right) \cdot$$

$$\cdot P(X_n \equiv \nu - 1 \bmod 4) + P\left(\sum_{\rho=1}^{n-1} X_\rho \equiv 2 \bmod 4\right) \cdot$$

$$\cdot P(X_n \equiv \nu - 2 \bmod 4) + P\left(\sum_{\rho=1}^{n-1} X_\rho \equiv 3 \bmod 4\right) \cdot$$

$$\cdot P(X_n \equiv \nu - 3 \bmod 4) = p_{n-1}(0)\pi_\nu +$$

$$+ p_{n-1}(1)\pi_{\nu-1} + p_{n-1}(2)\pi_{\nu-2} +$$

$$+ p_{n-1}(3)\pi_{\nu-3},$$

onde $\pi_{\nu-j} = p_1(\nu - j)$, ou, no caso de $\nu - j$ ser negativo se toma $\pi_{\nu-j} = p_1(\nu - j + 4)$ uma vez que $\nu - j + 4$ é agora o número positivo mais pequeno que com $\nu - j$ é congruente mod 4. Temos portanto:

$$(3) \qquad p_n(\nu) = \sum_{j=0}^{3} \pi_{\nu-j}\, p_{n-1}(j)$$

$$(\nu, j = 0, 1, 2, 3).$$

Quer dizer, se designarmos por p_n o vector do espaço euclideano a 4 dimensões cujas componentes são $p_n(\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, 3)$, i. e.

$$p_n = \begin{bmatrix} p_n(0) \\ p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{bmatrix}$$

virá então

$$(4) \qquad p_n = A\, p_{n-1},$$

onde A é uma matriz quadrada de ordem 4, cujos elementos $a_{\nu j}$ são precisamente $\pi_{\nu-j} = P(X_\rho \equiv \nu - j \bmod 4) = p_1(\nu - j \bmod 4)$. Mas estes valores já são nossos conhecidos do caso $n = 1$, nomeadamente

$$p_1(0) = p_1(3) = 1/6$$
$$p_1(1) = p_1(2) = 1/3 .$$

Logo, teremos:

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

OBSERVAÇÃO: A primeira coluna da matriz A é precisamente o vector p_1 e as outras obtêm-se dela substituindo sucessivamente cada elemento pelo seu antecedente e o primeiro pelo último. A matriz A é uma *matriz de* MARKOV, i. e. a soma dos elementos de uma linha é a unidade, e, mais do que isso, é uma *matriz duplamente estocástica*, assim chamada pelo facto de a soma dos elementos de qualquer linha ou coluna dar sempre a unidade.

Ora, de (4) concluímos que

$$(6) \qquad p_n = A^2 p_{n-2} = \cdots = A^{n-1} p_1 = A^n p_0 ,$$

onde

$$p_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

E agora, de (3) e de (4) conclui-se imediatamente que

$$A = \frac{1}{6} I + \frac{1}{3} J^1 + \frac{1}{3} J^2 + \frac{1}{6} J^3 = \\ = \sum_{\nu=0}^{3} p_1(\nu) J^\nu ,$$

onde I é a matriz identidade de ordem 4 e

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz cíclica de ordem 4 ($J^4 = I$). (A nossa terminologia segue aqui a de ZURMÜHL [4, pg. 270], diferindo ligeiramente da usada por VICENTE GONÇALVES [3, p. 228].) Portanto (cf. [4, pg. 270, Teorema 6]), os valores próprios de J são as raízes de índice 4 da unidade, i. e.

$$\omega_\nu = e^{2\pi i \nu/4} = \cos \frac{\nu\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\nu\pi}{2} ,$$

onde i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$) e $\nu = 0, 1, 2, 3$. Além disso os vectores próprios de J, y_ν, sendo por definição tais que

$$J y_\nu = \omega_\nu y_\nu ,$$

terão de ser os vectores

$$y_\nu = \begin{bmatrix} \omega_{3\nu} \\ \omega_{2\nu} \\ \omega_\nu \\ \omega_0 \end{bmatrix} \quad (\nu = 0, 1, 2, 3) .$$

Os valores próprios de A são então

$$\lambda_{k+1} = \sum_{\nu=0}^{3} p_1(\nu)\, \omega_{k\nu} = \\ = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{2\pi i k/4} + \frac{1}{3} e^{4\pi i k/4} + \frac{1}{6} e^{6\pi i k/4}$$

($k = 0, 1, 2, 3$), e assim, em virtude de $e^{i\pi/2} = \cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2 = i$,

$$\lambda_{k+1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} i^k + \frac{1}{3} i^{2k} + \frac{1}{6} i^{3k}$$

ou, mais explìcitamente,

$$(7) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{6}(1 - i) \\ \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_4 &= -\frac{1}{6}(1 + i) = \bar{\lambda}_2 , \end{aligned}$$

onde a barra denota o complexo conjugado de λ_2. De modo semelhante obtêm-se os vectores próprios de A que correspondem a estes valores próprios. São eles:

$$(8) \qquad \begin{aligned} x_1 &= (1, 1, 1, 1)' \\ x_2 &= (1, -i, -1, i)' \\ x_3 &= (1, i, -1, -i)' \\ x_4 &= (1, i, -1, -i)' , \end{aligned}$$

onde a pelica denota a operação de transposição vectorial. Ora, como

$$\sum_{l=1}^{4} x'_l = (4,0,0,0) = 4p'_0, \text{ vem } p_0 = \frac{1}{4}\sum x_l .$$

E de (6) concluímos que

$$p_n = A^{n-1}(A p_0) = A^{n-1}(A \frac{1}{4}\sum_l x_l) =$$

$$= \frac{1}{4} A^{n-1}(\sum_l A x_l) = \frac{1}{4} A^{n-1}(\sum_l \lambda_l x_l) =$$

$$= \frac{1}{4} A^{n-2}(\sum_l \lambda_l A x_l) = \frac{1}{4} A^{n-2}\sum_l \lambda_l^2 x_l =$$

$$= \cdots = \frac{1}{4}\sum_l \lambda_l^n x_l .$$

Daqui tiramos a seguinte expressão do vector p_n, em função dos valores e vectores próprios (conhecidos) da matriz A:

$$p_n = \frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{4}\lambda_2^n x_2 + \frac{1}{4}\lambda_4^n x_4 , \tag{9}$$

pois que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_3 = 0$. Mas como

$$1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right),$$

sai

$$\lambda_2^n = \left[-\frac{1}{6}(1-i)\right]^n = (-1)^n\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^n \cdot$$

$$\cdot\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

$$\lambda_4^n = \left[-\frac{1}{6}(1+i)\right]^n = (-1)^n\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^n \cdot$$

$$\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right).$$

De modo que

$$\lambda_2^n x_2 + \lambda_4^n x_4 = \left(-\frac{1}{6}\right)^n [(1-i)^n x_2 +$$

$$+(1+i)^n x_4] = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^n \begin{bmatrix} 2\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) \\ 2\operatorname{sen}\left(-\frac{n\pi}{4}\right) \\ -2\cos(-n\pi/4) \\ -2\operatorname{sen}(-n\pi/4) \end{bmatrix}.$$

E, finalmente, a solução do problema de Markov é:

$$p_n = \begin{bmatrix} p_n(0) \\ p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^n \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) \\ \operatorname{sen}\left(-\frac{n\pi}{4}\right) \\ -\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(-\frac{n\pi}{4}\right) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Para $n=1$ e $n=2$ obtemos imediatamente os valores a que tínhamos chegado em (1) e (2). Para $n=3$ obtemos, a partir de

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e de

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^3 = -\frac{\sqrt{8}}{216},$$

os valores

$$p_3(0)=\frac{55}{216}, p_3(1)=\frac{55}{216}, p_3(2)=$$
$$=\frac{53}{216}, p_3(3)=\frac{53}{216}, \text{ com } \sum p_3(\nu)=1.$$

Como tinhamos afirmado de início, os valores de $p_n(\nu)$ tendem alternadamente para o limite $1/4$, independente de ν. Isso é agora evidente a partir de (10), pois que por $(-\sqrt{2}/6)^n \to 0$, ao passarmos ao limite, a segunda parcela do lado direito de (10) tende para o vector zero. Este resultado é, aliás, susceptível de uma justificação heurística, pois, sendo o dado ideal (como considerámos na formulação do problema), no limite para um número infinito de lançamentos obtém-se uma simetria para as 4 diferentes congruências possíveis, pelo que se deverá ter $p_n(\nu) \to 1/4$, para qualquer ν (este raciocínio é, porém, falso no caso de o dado ser viciado, e. g. se só forem positivas as probabilidades de obtenção de faces com um número par de pontos). Teríamos chegado ainda ao mesmo resultado, observando que a matriz A define uma aplicação de contracção no sub-espaço do vulgar espaço métrico euclideano a 4 dimensões formado pelos possíveis vectores p_n (de coordenadas $0 \leqq p_n(\nu) \leqq 1$, com $\Sigma p_n(\nu)=1$). Pelo teorema de BANACH relativo aos pontos fixos, deverá haver um e um só ponto fixo, que logo se vê ser o vector cujas 4 coordenadas são todas iguais a $1/4$.

NOTA. A sucessão $\{p_n; n=0,1,2,\cdots\}$ dos vectores p_n constitui um dos exemplos mais simples de uma sucessão de distribuições de probabilidade em que cada uma delas depende apenas da precedente p_{n-1}, tal como num processo iterativo simples $\{p_n; n=0,1,\cdots\}$ é portanto um exemplo, extremamente simples, de uma cadeia de MARKOV.

BIBLIOGRAFIA

[1] MARKOV, A. A. (1912). *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Teubner Verlag. Leipzig.

[2] RICHTER, H. (1956). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag. Berlin-Göttingen-Heidelberg.

[3] VICENTE GONÇALVES, J. (1950). *Curso de Álgebra Superior* 2. Lisboa.

[4] ZURMÜHL, R. (1963). *Matrizen* (3. Auflage). Springer-Verlag. Berlin-Göttingen-Heidelberg.

Pari-mutuel betting

by John J. Wiorkowski
Chicago

Pari-mutuel betting is a form of betting on horses in which those who bet on the winning horse share the total amount bet on all horses less a small per cent which is paid to the management. Considering that statisticians and mathematicians have always been particularly interested in gambling systems, it is surprising that pari-mutuel betting has received such sparse attention. This lack of attention is perhaps attributable to the inherent difficulty of determining the actual probability that a horse will win a race, since this probability depends on the other horses in the race, the conditions of the track, and a plethora of other factors. To circumvent this difficulty, let us suppose that the better has a scheme for assigning probabilities of winning to the various horses. Actually, this is not an unreasonable assumption. The various race tracks publish what is called the «Morning Line», which lists the track handicapper's estimates of the odds on all horses. Thus, if the track percentage, r, is ignored, the usual odds-probability relationship holds:

$$Odds = \frac{1-p}{p} \text{ or } p = \frac{1}{Odds+1}.$$

Other natural choices of probability distribution might be based on the proportion of the total pool bet on each horse, or schemes weighting the «picks» of various handicappers.

Suppose we have a race of n horses. Let h_i designate the event that the ith horse wins the race, and let $P=(p_1, \cdots, p_n)$ denote a probability distribution over the events $h_1, \cdots, h_n$ where $p_i \geqq 0$ for $i=1, \cdots, n$ and $\sum\limits_i p_i = 1$. Let us assume that the better is the last person to bet and can bet an amount α. (We will later assume that $\alpha = 1$.) Further, let us designate by A_i the total amount already bet on the event h_i, and let $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$. Finally, let r designate the proportion of the total amount bet kept by the track. Let us first treat the problem classically and see why this approach is not fruitful. (I will follow the analysis made by Borel [1].) Suppose the better has placed an amount α on the event h_i. Assuming that $r=0$, we see that if h_i occurs he receives $\alpha \sum\limits_{j \neq i} A_j/(A_i+\alpha)$, and if h_i does not occur he loses α. His expected gain is then

$$x(\alpha) = \frac{\alpha \sum\limits_{j\neq i} A_j}{A_i+\alpha} p_i - (1-p_i)\alpha.$$

This function vanishes at $\alpha = 0$ (i. e., no bet, no gain) and also at $\alpha_0 = (p_i A - A_i)/ /(1-p_i)$, and is positive on $(0, \alpha_0)$ as long as $\alpha_0 > 0$ (which is equivalent to $p_i A - A_i > 0$, or $A_i/p_i < A$). To maximize $x(\alpha)$, set $\frac{d\,x(\alpha)}{d\,\alpha} = 0$ and obtain

$$(A_i + \alpha) = A_i (1 + \alpha_0/A_i)^{\frac{1}{2}}.$$

If α_0/A_i is small, then $(1+\alpha_0/A_i)^{\frac{1}{2}} \doteq \doteq 1 + \alpha_0/2A_i$ so that $\alpha \doteq \alpha_0/2 = \frac{(p_i A - A_i)}{2(1-p_i)}$.

Thus, if we can determine a probability distribution P on $h_i, \cdots, h_n$, and know $A_1, \cdots, A_n$ we know how much to bet. The condition that there exist an h_i such that $A_i/p_i < A$ always holds unless $A_i p_j = A_j p_i$ for all i, j, since, if not, then $A_i/p_i \geqq A$ for all i. Suppose that strict inequality held for one of the A_i's, then

$$\sum_{i=1}^{n} A_i > \sum_{i=1}^{n} p_i A = A \text{ and then } A > A,$$

which is a contradiction. The entire discussion so far hinges on the choice of the subjective probability distribution P, and therein lies the weakness of the analysis. Actually, this subjectivity is the motivating factor for betting, since each better can choose his own P and under it bet so as to have a positive expectation. But this subjectivity raises a serious difficulty. Each better can view himself as the last better and bet according to his P and his assessment of what the final A_i's will be. But his bet affects the A_i's, thus we must answer the question of whether there exist final A_i's and individual bets which are compatible with both the various betters' strategies and the pari-mutuel system.

This question is discussed in a paper by Edmund Eisenberg and David Gale [2].

Suppose we have m individual betters G_1, $G_2, \dots, G_m$, and n events $h_1, \dots, h_n$. Let $\overline{P} =$ «subjective probability» matrix whose $i, j\,th$ element is p_{ij}, the subjective probability that better G_i assigns to the event h_j. Suppose that G_i has a fixed budget B_i, and assume that he bets b_{ij} on h_j according to the following strategy: He will bet his B_i according to some partition $(b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$ on those events h_j whose p_{ij}/π_j is maximizd, where $\pi_j = A_j/A$ in our old notation (i. e., he bets on those horses where his opinion diverges most drastically from the consensus).

Choose a unit of money so that $\sum_{i=1}^{m} B_i = 1$. Further assume each column of $\overline{P}$ contains at least one positive element (otherwise no one would bet on the horse corresponding to the column of zeros).

The pari-mutuel system requires that:

(a) $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = B_i$,

(b) $\sum_{i=1}^{m} b_{ij} = \pi_j$ (since $\sum_{i=1}^{m} B_i = 1$),

(c) if $\mu_i = \max\limits_s \; p_{is}/\pi_s$, and $b_{ij} > 0$, then $p_i = p_{ij}/\pi_j$, where $s = 1, \cdots, n$;

(c) simply states that each gambler is betting on those horses for which his expectation is a maximum. (This is easily seen since the return — neglecting track percentage — is $\frac{1-\pi_j}{\pi_j}$, for each unit bet; so that $x_i(1) = \sum_j p_{ij}(1/\pi_j - 1)\, b_{ij} = \sum_j p_{ij}\, b_{ij}/\pi_j - \sum_j p_{ij} b_{ij}$. Thus, for example, expectation is positive if G_i bets on those horses where $p_{ij}/\pi_j > 1$, or just on the horse with the maximum ratio.) Any set of π_j's and b_{ij}'s satisfying (a), (b), and (c) are called equilibrium probabilities and bets. Before stating the basic theorem, let us define a function φ with mn arguments ξ_{ij} as:

$$\varphi(\xi_{11}, \cdots, \xi_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} B_i \ln\Big(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\xi_{ij}\Big)$$

where $\xi_{ij} \geqq 0$ for all i, j and $\sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} = 1$.

Note that φ is continuous on its domain of definition and the domain is compact. Thus there exists a max value of φ at some point, say $(\overline{\xi}_{11}, \cdots, \overline{\xi}_{mn})$.

THEOREM. *A set of equilibrium probabilities* π_j *and bets* b_{ij} *are given by*

$$\max_i \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\xi}_{ij}} = \pi_j = \max_i \frac{B_i\, p_{ij}}{\sum_s p_{is}\overline{\xi}_{is}} \qquad b_{ij} = \overline{\xi}_{ij}\,\pi_j .$$

PROOF. These must satisfy (a), (b) and (c).

(b) $\sum_{i=1}^{m} b_{ij} = \pi_j \sum_{i=1}^{m} \overline{\xi}_{ij} = \pi_j$ by the restriction on the domain of definition.

Before we prove (a) and (c), note that if $\xi_{ij} > 0$, then $\pi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\xi}_{ij}}$ since if this were not the case, then there exists a k such that $\pi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\xi}_{kj}} > \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\xi}_{ij}}$. We can now perturb φ by a small decrease ∂ in $\overline{\xi}_{ij}$ and a ∂ increase in $\overline{\xi}_{kj}$, to obtain a greater value. But since we are already at a maximum, we have arrived at a contradiction.

Accordingly, we now know that $b_{ij} = \overline{\xi}_{ij}\pi_j = \overline{\xi}_{ij}\frac{B_i p_{ij}}{\sum_s p_{is}\overline{\xi}_{is}}$, which implies that

$$\sum_j b_{ij} = B_i \frac{\sum_i \overline{\xi}_{ij} p_{ij}}{\sum_s p_{is}\overline{\xi}_{is}} = B_i, \text{ verifying } (a).$$

Finally, to show (c), note that since none of the columns of the matrix $\overline{P}$ are identically zero, each π_j is greater than zero. Thus $p_{il}/\pi_l \leq \frac{\sum_s p_{is}\overline{\xi}_{is}}{B_i}$ for all l, with equality at $l=j$ (from the definition of π_l in the Theorem). Since $b_{ij}>0$ just when $\overline{\xi}_{ij}>0$, then $\pi_j = \frac{B_i p_{ij}}{\sum_s p_{is}\overline{\xi}_{is}}$ and thus $\mu_i = \max_s p_{is}/ /\pi_s = p_{ij}/\pi_j$, so (c) is satisfied. Q. E. D.

Accordingly, we have shown that there exist final track probabilities (the π_j's) and individual bets (the b_{ij}'s) compatible with both the pari-mutuel system and individual betting strategies.

Let us now attempt to rid ourselves completely of the problem of estimating P by viewing the pari-mutuel system as a two-person game (the better vs. nature) and attempt to find a minimax solution. Suppose we denote by $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ the betting strategy which bets the amount α_i on the event h_i where $\alpha_i \geqq 0$ and $\sum_i \alpha_i = 1$ (in terms of some unit). If h_i occurs, then the pay off to the better is:

$$-\alpha_i\left(\frac{(1-r)(A+1)-(A_i+\alpha_i)}{A_i+\alpha_i}\right)+\sum_{j\neq 1}\alpha_j = $$
$$= 1-\frac{(1-r)(A+1)}{A_i+\alpha_i}\,\alpha_i .$$

(Note that we are now designating a win by the better as negative quantity.)

Suppose that the probability of h_i is p_i. Then the expected loss for strategy s relative to P is

$$L(P,s)=\sum_{i=1}^{n} P_i\left(1-\frac{(1-r)\;(A+1)\,\alpha_i}{A_i+\alpha_i}\right)$$
$$=1-(1-r)(A+1)\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i p_i}{A_i+\alpha_i}\right]$$

Thus we can minimize $L(P,s)$ by minimizing $\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i p_i}{A_i+\alpha_i}$ subject to the conditions that $\sum_i \alpha_i = 1$, and $\alpha_i \geqq 0$ for all i. Choose a μ such that $p_\mu > 0$; then

$$\frac{\partial L(P,s)}{\partial \alpha_i} =$$
$$=\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\frac{A_i p_i}{A_i+\alpha_i}+\frac{A_\mu p_\mu}{\left(A_\mu+1-\sum_{j\neq i}\alpha_j\right)}\right)=0$$

yielding $\frac{A_i p_i}{(A_i+\alpha_i)^2}=\frac{A_\mu p_\mu}{(A_\mu+\alpha_\mu)^2}$ for those i where $p_i>0$, which gives

$$\alpha_i=\frac{\sqrt{A_i p_i}\,(A_\mu+\alpha_\mu)}{\sqrt{A_\mu p_\mu}}-A_i .$$

Noting that

$$1-\alpha_\mu=\sum_{\substack{i\neq\mu\\ p_i>0}}\frac{\sqrt{A_i p_i}\,(A_\mu+\alpha_\mu)}{\sqrt{A_\mu p_\mu}}-\sum_{i\neq\mu}A_i ,$$

we have $\alpha_\mu = \frac{\sqrt{A_\mu p_\mu}\,(1+A_0)}{\sum_i \sqrt{A_i p_i}}$ where

$$A_0=\sum_{\substack{i\\ p_i>0}} A_i .$$

Thus by substitution,

$$\alpha_i=\frac{\sqrt{A_i p_i}\,(1+A_0)}{\sum_i\sqrt{A_i p_i}}-A_i \quad \text{and}$$
$$L(P,s)=$$
$$=1-(1-r)(A+1)\left[1-\frac{\left(\sum_i\sqrt{A_i p_i}\right)^2}{1+A_0}\right].$$

Now suppose that the p_i's are proportional to the track returns $A_1, \cdots, A_n$, say

$p_i = A_i/A$. Then $A_0 = A, \alpha_i = A_i/A$ and

$$L(P, s) = 1 - (1-r)(A + 1 - A^2/A) = \\ = 1 - (1-r) = r.$$

This is obviously BAYES against $P = (A_1/A, A_2/A, \cdots, A_n/A)$ and since it has constant risk, it is a mínimax solution. Thus betting according to this strategy, the better cannot lose more than 100 r per cent of his unit bet, no matter what the real probability distribution is on $h_1, \cdots, h_n$. This system is easy to use in any real gambling situation since one does not have to bother estimating P, but like all minimax strategies it is quite pessimistic. Thus, if the better could actually estimate P with some sucess, it would be to his advantage to go through the more complicated mathematics of the general solution.

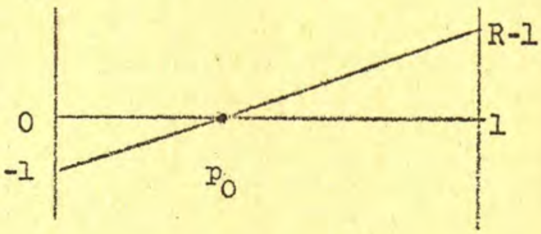
Before leaving this discussion, let us note that if α_i is small w. r. t. A_i (as it would probably be), then

$$L(P, s) \doteq 1 - (1-r)(A+1) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i p_i}{A_i},$$

which is maximized by taking p_i/A_i largest and setting $\alpha_i = 1$. This is equivalent to choosing A_i/p_i smallest, which is in effect what BOREL's method told us to do.

Another approach to the pari-mutuel betting problem has been given by R. CLAY SPROWL in 1950. It is a relatively crude method, but the approach is quite different from either one that we have considered so far.

SPROWL leaves aside the question of how one should bet, and considers only the question «When?» He assumes that the better has a system which works with probability p (p being unknown). If he assumes that the payoff is $(R-1)$ if he wins on a unit bet (here $(R-1)$ corresponds to the odds; or $1 - \dfrac{(1-r)(A+1)}{A_i+1}$ in our old notation), his expectation is $x(p) = (R-1)p - (1-p)$. Now if we plot this as a function of p, we get a straight line which intersects the p-axis at the point p_0.



Now p_0 is a function of R, and this is the cornerstone of his paper. Given R, determine $p_0 = 1/R$. If $p > p_0$, bet; otherwise do not. The better, however, must determine what p is and the rest of the paper is devoted to a decision-theoretic derivation of the natural estimate (number of previous wins)/(number of races bet). He ends his discussion with the first real experiment published in the field. He uses two systems; the first being bet the favorite, the second being bet the favorite if $\hat{p} > p_0$, where $\hat{p}$ is the proportion of wins in the previous n races if he had bet the favorite. The results are:

	Sistem I	Sistem II
Races Bet	75	23
Races Won	20	4
Total Bet	$150.00	$46.00
Total Won	$128.50	$50.60
Profit	$-21.50	$ 4.60

Interpretation of the results are left to the reader.

The most recent article on the subject is by RICHARD N. ROSETT. It was published in 1965 in, of all places, *The Journal of Political Economy*. The motivation behind his research is the query as to whether gamblers are rational. He formulates a rationality hypothesis as follows.

If a gambler must choose between two single return bets in which he risks losing one unit, he will: (*a*) if the probabilities of winning are equal, choose that bet with the greatest return; (*b*) if the returns are equal, choose that with the greatest probability; (c) always choose an event which in both return and probability of occurrence are greater than in the other.

Three systems of betting are discussed in the paper; the first is called the Martingale and works like this: Select n horses each running in a different race, and suppose they pay $R_1, \ldots, R_n$ in returns, and that there exist some actual probabilities $p_1, \ldots p_n$ of their winning (here subscripts denote the order of the running of the race). Split your bet into sums of money $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ so that $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ and $\alpha_i > 0$, and $\alpha_i(R_i - 1) - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j = B$ for $i = 1, \ldots, n$. Solve this system of equations for the α_i's and bet α_i on your choice in the ith race, but do this sequentially until either all n races have been bet, or a race is won. If you lose all n races, you lose one unit with probability $\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$. If one of the horses wins (with probability $1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$), you win B. This method combines low-probability, high return bets, into one system with high probability and low return.

A parallel system for a single race can also be constructed. (Sprowl calls it the combination.) Again, split your bet into amounts $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (note that k is not necessarily equal to the total number of horses running in the race), but according to the system of equations: $\alpha_i(R_i - 1) = B$ $i = 1 \ldots, k$ and $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Bet on all k horses. If p_i is the proability of h_i, the better wins B with probability $\sum_{i=1}^{k} p_i$, and loses one with probability $1 - \sum_{i=1}^{k} p_i$. This is again a high probability, low return bet.

The final system is called the parlay and consists of choosing n horses in n races and betting 1 unit on the first choice in the first race. If you win, bet R_1 on the choice in the second race and continue until you lose a race or win all n. If you win, the return is $\prod_{i=1}^{n} R_i - 1$ with probability $\prod_{i=1}^{n} p_i$, and the loss is 1 (although much greater from a Regret point of view if one were to win the first $n-1$ races) with probability $1 - \prod_{i=1}^{n} p_i$. This is a high-return low probability bet. It must be emphasized, that all the choices in the above three systems are made at one time, so in effect they comprise a single system or a single bet.

Now, assuming that the betters form a market (this is similar to the perspective of Eisenberg and Gale), the rationality hypothesis (which is equivalent to a functional relationship between R and p which is monotone decreasing in p), and the possibility of combining bets through parlays and Martingales, place certain constraints on the function relating return to probability of winning, which are:

Given any probability of winning p^* and the return associated with it R^*, then

$$p^r \leq R(p) \leq [1-(1-p)^c]^{-1} \qquad \text{if } 0 \leq p \leq p^*$$
$$[1-(1-p)^c]^{-1} \leq R(p) \leq p^r \qquad \text{if } p^* \leq p \leq 1$$

where R is the return associated with p at *equilibrium* and *subject* to the rationality hypothesis, $r = \ln R^* / \ln p^*$, and

$$c = \ln(1 - 1/R^*) / \ln(1 - p^*).$$

Let us give some indication of how these limits are derived. Suppose $p^* \leqq p \leqq 1$ and $R(p) > p^r$. Choose such a p^*, then there exists a q such that $pq = p^*$ with $q > p^*$, and then $\log_{p^*} p + \log_{p^*} q = 1$. Now take a bet with probability p and another with probability q and form a parlay. The return is $R(p)R(q)$ with probability $pq = p^*$, but since $p, q > p^*$, $R(p)R(q) > R^{*\ln p/\ln p^*}$. $R^{*\ln q/\ln p^*} = R^*$. Thus we have a bet $(p^*, R(pq))$ which has for the same probability, a greater return. Hence, (p^*, R^*) would never be chosen, which is a contradiction since this is the equilibrium relationship. Similarly, suppose that $R(p) <$
$< [1-(1-p)^c]^{-1} = \left[1 - 1/R^*)^{\frac{\ln(1-p)}{\ln(1-p^*)}}\right]^{-1}$.
Form a Martingale from n bets like (p^*, R^*) such that $p = 1-(1-p^*)^n$. From the rationality hypothesis, $R(p) - R(1-(1-p^*)^n)$. But the return from the Martingale is $[1-(1-1/R^*)^n]^{-1} = [1-(1-1/R^*)^c]^{-1}$ since $c = \dfrac{\ln(1-p)}{\ln(1-p^*)} = \dfrac{n\ln(1-p^*)}{\ln(1-p^*)} = n$ by construction. This Martingale has the same probability of winning as the initial bet, but the return is greater. Thus according to the rationality hypothesis, the first bet would never be chosen which is a contradiction. Similar manipulations will verify the inequalities for $0 \leqq p \leqq p^*$.

Now $R(p) = p^r$ is the *only* function relating returns to probability for which it is true that for every bet on a single horse any parlay having the same probability will pay the same return. Similarly $R(p) =$ $= [1-(1-p)^c]^{-1}$ is the *only* function relating returns to probability, for which it is true that for every bet on a single horse, any Martingale having the same probability will pay the same return.

Let us verify this assertion. Select bets with probabilities $p_1, \cdots, p_n$ such that $\prod_{i=1}^{n} p_i = p_0$, then if the above relation holds, the return is $R_0 = \left(\prod_{i=1}^{n} R(p_i)\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i^r\right) =$
$= \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^r = p_0^r$.

Now suppose that we have any other function $R = f(p)$ which has the properties:

(*a*) $f\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) = \prod_{i=1}^{n} f(p_i)$,

(*b*) f is monotone decreasing over $(0,1)$ (note: (*a*) assures us of the proper parlay relationship, (*b*) is necessitated by the rationality hypothesis), and

(*c*) f does not have the form $f(p) = p^r$,

choose two values p_1, p_2 and find $R_1 = f(p)$, $R_2 = f(p_2)$ so that $f(p_1) = p_1^{r_1}$ $f(p_2) = p_2^{r}$ where $r_1 > r_2$ (note that $r_2 < r_1 < 0$). Thus for all p in $(0,1)$, $p^{r_1} < p^{r_2}$.

Since (p_1, R_1) and (p_2, R_2) both satisfy (*a*), so do all points of form (p_1^n, R_1^n), (p_s^m, R_s^m) where n and m are positive integers. Suppose we found a point $(p_2^{m_0}, R_2^{m_0})$ such that $p_2^{m_0} > p_1^{m_0}$ for some m_0 and n_0. Then since $p_2^{m_0} > p_1^{n_0}$ implies $p_2^{m_0 r_2} > p_1^{n_0 r_2}$ and $r_1 > r_2$ implies $p_1^{n_0 r_2} > p_1^{n_0 r_1}$ then $R_2^{m_0} =$ $= p_2^{m_0 r_2} > p_1^{n_0 r_1} = R_1^{n_0}$ and we would violate the rationality (and thus the monotonicity) property. To see that this always occurs look at the line $R = R_1^{n+1}$ (i. e., $R_1(p_1^{n+1})$); it intersects the curve $R_2 = p^{r_2}$ at the point $p_2^* = (R_1^{n+1})^{1/r_2} = (p_1^{n+1})^{r_1/r_2}$. Now $(p_1^{n+1})^{r_1/r_2} > p_1^n$ if and only if $n > \dfrac{r_1/r_2}{1-r_1/r_2}$ (remember that both r_1 and r_2 are negative, so $r_1/r_2 < 1$). Thus we have a point $(p_2^*, R(p_2^*))$ such that $p_1^* > p_1^n$, which gives us the violation of the rationality hypothesis. Thus $R(p) = p^r$ is the unique functional form satisfying (*a*) and (*b*).

Let us now show that $R(p)=[1-(1-p)^c]^{-1}$ is the unique function satisfying the requirement that any Martingale for which the probability of winning is p_0 will yield the return R_0.

Select n gambles such that

$$1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)=p_0$$

and solve the system of equations

$$\alpha_1(R_1-1)=k\,,\quad \alpha_1(R_1-1)-\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j=k\,,$$

$\Sigma\alpha_i=1$ for the α_i's. Now $\alpha_1=k/R_1-1$, $\alpha_2=k(1/R_1-1+1/(R_s-1)(R_1-1))$ and in general

$$\alpha_m=\frac{1}{R_m-1}+\frac{1}{(R_m-1)(R_{m-1})}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(R_m-1)(R_{m-1}-1)\cdots(R_1-1)}.$$

Thus $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\left[\prod_{i=1}^{n}\left((1+\frac{1}{R_i-1}\right)-1\right]$

so $\displaystyle k=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{R_i-1}\right)-1}$.

Now from the Martingale relationship

$$R_i=[1-(1-p)^c]^{-1}=\frac{1}{1-(1-p)^c}$$

thus $R_i-R_i(1-p_i)^c=1$, so $\dfrac{R_i-1}{R_i}=$ $=(1-p_i)^c$ and $(1-p_i)^{-c}=\dfrac{R_i}{R_i-1}=1+$ $+\dfrac{1}{R_i-1}$. Therefore

$$k=\frac{1}{\left[\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)^{-c}-1\right]}=\frac{1}{(1-p_0)^{-c}-1}=$$
$$=\frac{(1-p_0)^c}{[1-(1-p_0)^c]}=[1-(1-p_0)^c]^{-1}-1\,.$$

So if we forget about the scale factor «-1,» we see that for any Martingale such that $\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)=(1-p_0)$, $R(p_0)=[1-(1-p_0)^c]^{-1}$.

The «combination» bet gives an upper limit of $R\leq p^*R^*/p$ for $p<p^*$, and $R\geq p^*R^*/p$ for $p>p^*$ but parlay and Martingale limits are always better, so gamblers would never use a combination. To complete the proof we would need to show that given (p^*,R^*),

$$[1-(1-p)^c]^{-1}\leq p^r \text{ if } p\geq p^*$$
$$p^r\leq[1-(1-p)^c]^{-1} \text{ if } p\leq p^*$$

where

$$r=\frac{\ln R^*}{\ln p^*}\,c=\frac{\ln(1-R^{*-1})}{\ln(1-p^*)}\,,$$

so that our equilibrium equations make sense. The proof is not relevant to the paper and can be found in [3].

If there were a strong performance for parlay type bets in a market, then the observed relationship between probabilities and returns should be $R=p^r$. Similarly, if the preference where for Martingales, then the relationship would be approximately $R=[1-(1-p)^c]^{-1}$. Since both of these functions are monotone decreasing over (0,1) and thus satisfy the rationality hypothesis, it is impossible to distinguish between these functions as models for actual betting situations on strictly theoretical grounds. Accordingly Rosett took the odds and subsequent wins of 110,000 horses and arranged them (in descending order by odds) into groups of about 350. He then estimated R and p for each group by simple averaging. (If a group did not contain a win, he augmented it until it had one). The resultant 257 pairs of points (p, R) were then fitted to two equations:

$$(a) \quad \ln(1-R^{-1}) = c_0 + c_1 \ln(1-p) + c_2 \ln^2(1-p),$$

$$(b) \quad \ln R = r_0 + r_1 \ln p + r_2 \ln^2 p.$$

Note that (a) would fit the Martingale relationship exactly if $c_0 = c_2 = 0$ and $c_1 = 1$. Similarly, (b) would fit the parlay relationship if $r_0 = r_2 = 0$ and $r_1 = 1$. Using standard regression analysis, both (a) and (b) were fitted to the data yielding the equations:

$$(a) \quad \ln(1-R^{-1}) = \underset{(0.0216)}{-0.0078} + \underset{(0.02)}{1.15} \ln(1-p) + \underset{(0.03)}{0.09} \ln^2(1-p),$$

(standard deviation)

$$(b) \quad \ln R = \underset{(0.06)}{-0.365} \underset{(0.04)}{-1.27} \ln p \underset{0.007)}{-0.074} \ln^2 p$$

(standard deviation)

Note that c_2 is significantly different from zero, which suggests that the Martingale limit does not hold for all p. Further r_0, r_1, and r_2 are all significantly different from zero suggesting that the parlay relation does not hold for all p.

The data was then re-examined, and it was found that for $p < .02$, the returns were very much lower than would be expected under either model. Removal of these 40 points resulted in the following two equations:

$$\ln R = \underset{(0.08)}{-0.05} - \underset{(0.07)}{0.96} \ln p - \underset{(0.014)}{0.007} \ln^2 p$$

(standard deviation)

$$\ln(1-R^{-1}) = 0.0073 + \underset{(0.24)}{1.15} \ln(1-p) + \underset{(0.03)}{} + \underset{(0.037)}{0.092} \ln^2(1-p)$$

(standard deviation)

Note that in the first equation only r_1 is significantly different from zero, as are both c_1 and c_2 in the second. The conclusions is that the Martingale relationship does not hold for this set of data, and that the parlay relationship estimated at $R = p^{-0.96}$ holds for $.02 \leq p \leq 1$. ROSETT theorizes that the marked deviation from this formula for $p < .02$ is due to either or both of the two phenomena. The first is that some betters bet in a purely random fashion (e. g., bet on numbers, or on names), accordingly placing too much money on very low probability horses, thereby decreasing their return. The second phenomenon is that there exist betters who are so interested in getting a very large return that they always choose the long shots to form parlays. Since this choice is made without consideration of the true probabilities of winning, it has the same effect on low probability bets as does random betting.

The conclusion that ROSETT reaches is that gamblers are either relatively sophisticated probabilistically or follow sophisticated advice. I feel that this too strong a statement. Let us note that the empirical relationship is approximately $R = 1/p$ and since the return is really the odds plus one, we see that the betters have been betting in a fashion which might be considered optimum on a purely theoretical basis. A better conclusion to draw for the data then is that betters as a *group* seek to be quite accurate in ascertaining the underlying probability structure of the various races bet upon, but that individually, the betters are not necessarily acting either rationally or in a probabilistically sophisticated fashion.

BIBLIOGRAPHY

[1] Borel, Émile. *Elements of Probability Theory*. New York: Prentice-Hall, Inc., 1965, pp. 169-171.

[2] Eisenberg, E., and Gale, D., Consensus of Subjective Probabilities: The Pari-mutuel Method, *Annals of Mathematical Statistics*, XXX (1959), pp. 165-168.

[3] Rosett, R. Gambling and Rationality, *The Journal of Political Economy*, LXXIII (1965), pp. 595-607.

[3] Sprowl, R. C., Statistical Decisions by the Method of Minimum Risk; An Application, *Journal of American Statistical Association*, XLV (1950), p. 238.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PORTO

A convite do Instituto de Alta Cultura deslocou-se ao Porto em Março de 1967 o Professor Jean Cerf, especialista de topologia diferencial da Universidade de Paris. Durante a sua estadia de cerca de um mês, este professor realizou um curso sobre o teorema do h-cobordismo (de Smale), assunto que se relaciona com o seu presente trabalho de investigação. Antes da vinda do Professor Jean Cerf, organizou-se no C. E. M. P. uma série de exposições preparatórias que versaram os assuntos seguintes: variedades diferenciáveis (definições gerais), topologia C^r, teorema de Sard (sobre a medida do conjunto dos valores críticos de nma aplicação diferenciável) e o teorema de Morse (sobre a densidade do conjunto das funções cujos pontos críticos são todos não degenerados).

NOTICIÁRIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

Publicações do IMPA — No decurso de 1968 o IMPA publicou os seguintes trabalhos, no âmbito da Colecção Notas de Matemática:

Malgrange Theorem for Nuclearly Entire Functions of Bounded Type on a Banach Space, by C. Gupta. Notas de Matemática n.º 37.

Suports of Convolutions, by A. Diego. Notas de Matemática n.º 38.

A Theory of interpolation of Normed Spaces, by J. Peetre. Notas de Matemática n.º 39.

Introdução à Teoria das Probabilidades para Matemáticos, por G. Rabson.

Nova morada do IMPA — É a seguinte a nova morada do Instituto de Matemática Pura e Aplicada: Rua Luiz de Camões, 68, Rio de Janeiro 58, GB, Brasil.

J. M. H.

LIÇÕES DE MATEMÁTICA PARA PÓS-GRADUADOS NA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA

No âmbito do Plano Intercalar de Fomento, efectuaram-se na Faculdade de Ciências de Lisboa duas séries de conferências sobre temas de «Matemática e suas aplicações», com o fim de abrir novos horizontes sobre sectores diversos da problemática actual. As primeiras conferências versarão os seguintes temas:

Matemática Pura: Axiomática dos conjuntos, — pelos Doutor J. Santos Guerreiro e Dr. J. Silva Oliveira; Intuicionismo, pelo Dr. A. Vaz Ferreira;

Matemática Aplicada: Axiomática da Termodinâmica, pelo Prof. Dr. J. Pinto Peixoto; Turbulência e Geometria dos vértices em oceanografia, pelo Ten. Daniel Rodrigues; Computadores e linguagens de programação, pelo Dr. A. Cadete; Optimização pelo Dr. Gustavo de Castro.

J. T. O.

ANTOLOGIA

Investigações sobre os Fundamentos da Teoria dos Conjuntos, I (*)

por E. Zermelo
Göttingen

A teoria dos conjuntos é o ramo da matemática ao qual incumbe investigar matemàticamente os conceitos fundamentais de número, ordem e função na sua simplicidade primitiva e desenvolver, por esse meio, os os fundamentos lógicos da Aritmética e da Análise. A teoria dos conjuntos constitui portanto uma componente indispensável da ciência matemática. Todavia, actualmente, a própria existência desta disciplina parece justamente ameaçada por certas contradições ou «antinomias» que se podem deduzir dos seus princípios os quais são, na aparência, leis do pensamento. Não se encontrou até ao presente uma solução inteiramente satisfatória para estas contradições. Em particular, em face da «antinomia de RUSSELL» do «conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos» (1) parece hoje já não ser admissível associar a um conceito lògicamente definível arbitrário, um «conjunto» ou «classe» como sua «extensão». A definição original de CANTOR de «conjunto» como «um agrupamento num todo de objectos definidos, bem distintos, da nossa intuição ou do nosso pensamento» (1) carece portanto, em todo o caso, de uma restrição. Não foi, contudo, coroada de êxito nenhuma tentativa de substituir esta definição por outra igualmente simples que não dê lugar a tais inconvenientes. Nestas condições, não temos actualmente outra alternativa que não seja a de percorrer o caminho em sentido inverso e, partindo da «teoria dos conjuntos» històricamente existente, procurar os princípios que são necessários como fundamento a esta disciplina matemática. O problema deve ser resolvido de maneira que os princípios sejam suficientemente restritos por forma a excluir todas as contradições e, por outro lado, suficientemente gerais para que tudo o que é valioso nesta teoria possa ser conservado.

Neste trabalho pretendo mostrar como se pode deduzir de um pequeno número de definições e de sete «Princípios» ou «Axiomas», aparentemente independentes, a totalidade da teoria criada por G. CANTOR e R. DEDEKIND. A ulterior questão, mais filosófica, da origem

(*) Tradução da Introdução e do § 1, por A. VAZ FERREIRA, para uma série de lições dedicadas aos fundamentos da teoria dos conjuntos feitas na Faculdade de Ciências de Lisboa ao abrigo do Plano Intercalar de Fomento — 1967. O original, intitulado *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I*, foi publicado em 1908, Math. Ann. **65** (1908) pp. 261-281.

(1) B. RUSSELL «The principles of Mathematics» vol. I, pp. 366-368, 101-107.

N. do T.: A «antinomia de RUSSELL» foi descoberta pràticamente ao mesmo tempo por ZERMELO e RUSSELL independentemente um do outro. Porém, ZERMELO não publicou os seus resultados na ocasião.

(1) G. CANTOR, Math. Annalen Bd 46, p. 481.

e do domínio de validade destes princípios não será aqui discutida. Apesar de ser certamente um ponto muito importante, não consegui estabelecer rigorosamente a «não contradição» dos meus axiomas pelo que tive, em vez disso, de me limitar à indicação ocasional de que as «antinomias» conhecidas desaparecem todas se se toma como base os princípios aqui propostos. Espero pelo menos ter feito assim um útil trabalho preparatório para ulteriores investigações, relativas a estes profundos problemas.

Este artigo compreende os axiomas e as suas consequências mais imediatas e uma teoria da equivalência neles baseada a qual permite evitar o uso formal de números cardinais. Está em preparação um segundo artigo que deverá desenvolver conjuntamente a teoria da boa ordenação e suas aplicações aos conjuntos finitos e aos princípios da Aritmética.

§ 1 — Definições fundamentais e axiomas

1. A teoria dos conjuntos diz respeito a um «*domínio* (Bereich)» $\mathfrak{B}$ de objectos que designamos simplesmente por «*coisas* (Dinge)»; alguns destes objectos são conjuntos (Mengen). Quando dois símbolos a e b designam a mesma coisa escrevemos $a = b$; escrevemos $a \neq b$ no caso contrário. Se uma coisa a pertence ao domínio $\mathfrak{B}$, dizemos que a «existe». Deste modo, diremos que «existem coisas numa classe $\mathfrak{K}$» se $\mathfrak{B}$ contém pelo menos um indivíduo desta classe.

2. Entre as coisas do domínio existem certas «*relações fundamentais* (Grundbeziehungen)» da forma $a \varepsilon b$. Quando a relação $a \varepsilon b$ entre duas coisas a e b é válida, dizemos que «a é *elemento* (Element) do conjunto b» ou que «b contém a como elemento» ou ainda que «b possui o elemento a». Se uma coisa b possui como elemento outra coisa a, b é um conjunto. Recìprocamente, salvo um único caso (Axioma II), todo o conjunto possui pelo menos um elemento.

3. Se cada x de um conjunto M é também elemento do conjunto N, i. e. se de $x \varepsilon M$ pode sempre deduzir-se $x \varepsilon N$, dizemos que «M é *subconjunto* (Untermenge) de N» e escrevemos $M \subset N$(1). Tem-se sempre $M \subset M$ e de $M \subset N$ e $N \subset R$ segue-se sempre $M \subset R$. Dois conjuntos M, N dizem-se «*disjuntos* (Elementenfremd)» se não têm elementos «comuns», i. e., se nenhum elemento de M é simultâneamente elemento de N.

4. Uma questão ou asserção $\mathfrak{E}$ diz-se «*definida* (definit)» se a sua validade ou não validade se pode decidir sem arbitrariedade a partir das relações fundamentais do domínio por meio dos axiomas e das leis lógicas universais. Do mesmo modo, um «predicado (Klassenaussage)» $\mathfrak{E}(x)$, no qual o termo variável x pode tomar como valor qualquer indivíduo de uma classe $\mathfrak{K}$, dir-se-á «definido» se ele é definido *para cada um* dos indivíduos x da classe $\mathfrak{K}$ *separadamente*. Assim, a questão se $a \varepsilon b$ ou não e a questão se $M \subset N$ ou não, são sempre definidas.

As relações fundamentais do nosso domínio $\mathfrak{B}$ estão sujeitas aos «axiomas» ou «postulados» que vão seguir-se.

Axioma I — *Se cada elemento de um conjunto* M *é também elemento de* N *e recìprocamente, tendo-se, portanto,* $M \subset N$ *e* $N \subset M$

(1) Este sinal de inclusão foi introduzido por E. Schröder («Vorlesungen über Algebra der Logik» Bd. I). O sr. G. Peano e, seguindo-o, B. Russell, Whitehead e outros, utilizam para o mesmo fim o sinal $\supset$.

N. T.: O sinal a que a nota (1) se refere não é o sinal $\subset$ que figura nesta tradução. A tipografia não possui o tipo correspondente ao sinal, semelhante a uma sobreposição de $\subset$ e $=$, que Zermelo utiliza.

simultâneamente, então M = N. *Abreviadamente: cada conjunto é determinado pelos seus elementos.*

(Axioma da Determinação (Bestimmtheit))(*)

O conjunto que contém exactamente os elementos a, b, c, ..., r será designado muitas vezes, de maneira abreviada, por $\{a, b, c, \ldots, r\}$.

AXIOMA II — *Existe um conjunto (impróprio), o* «conjunto vazio *(Nullmenge)*» 0, *que não possui elementos. Se* a *é uma coisa do domínio, existe um conjunto* {a} *cujo único elemento é* a. *Se* a, b *são duas coisas do domínio, existe um conjunto* {a, b} *cujos elementos são precisamente* a *e* b.

(Axioma dos Conjuntos Elementares (Elementarmengen))

5. Segundo 1 os «conjuntos elementares» $\{a\}$ e $\{a, b\}$ são sempre unìvocamente determinados pelos seus elementos e existe um só «conjunto vazio». A questão se $a = b$ ou não é sempre definida (N.º 4) visto ser equivalente à questão se $a \varepsilon \{b\}$ ou não.

6. O conjunto vazio é subconjunto de cada conjunto M, $0 \subset M$; um subconjunto de M distinto de M e de 0 dir-se-à uma «*parte* (Teil)» de M. Os conjuntos 0 e $\{a\}$ não possuem partes.

AXIOMA III — *Se o predicado* $\mathfrak{E}(x)$ *é definido para cada elemento de um conjunto* M, M *possui um subconjunto* $M_{\mathfrak{E}}$ *que é constituído precisamente pelos elementos* x *de* M *para os quais* $\mathfrak{E}(x)$ *é verdadeiro.*

(Axioma da Selecção (Aussonderung))

(*) N. do T.: Este axioma é conhecido também por «axioma da extensionalidade».

[Por permitir amplamente a definição de novos conjuntos, este axioma III constitui, em certa medida, um substituto para a definição geral de conjunto citada na introdução e rejeitada por ser insustentável. O axioma distingue-se da definição pelas limitações que passamos a indicar. Em primeiro lugar, por meio deste axioma nunca é possível *definir* conjuntos de *maneira independente* mas sòmente como subconjuntos obtidos por *selecção* a partir de conjuntos prèviamente dados. Ficam por isso excluídas construções contraditórias tais como «o conjunto de todos os conjuntos» ou «conjunto de todos os números ordinais» e também os «paradoxos ultrafinitos» segundo a expressão do sr. G. HESSENBERG («Grundbegriffe der Mengenlehre» XXIV). Em segundo lugar, como o critério definidor $\mathfrak{E}(x)$ tem de ser «definido» no sentido que precisàmos no n.º 4, i. e. como, para todo elemento x de M, a validade ou não validade de $\mathfrak{E}(x)$ tem de ser determinada (exclusivamente) a partir das «relações fundamentais» do domínio, são igualmente suprimidos pelo nosso ponto de vista critérios tais como «definível por meio de um número finito de palavras» e com eles a «antinomia de RICHARD» ou o «paradoxo da designação finita» (HESSENBERG, loc. cit. XXIII, cf., por outro lado, J. KÖNIG, Math. Ann. Bd. 61, p. 156). Isto implica também que, em rigor, antes de cada aplicação do nosso axioma III se deve sempre demonstrar que o respectivo critério $\mathfrak{E}(x)$ é «definido». Assim sucederá no que se segue todas as vezes que isso não seja inteiramente evidente.]

7. Se $M_1 \subset M$, M possui um subconjunto $M - M_1$ designado por «*(conjunto) complementar* (Komplementärmenge) de M_1» e constituído precisamente pelos elementos de M que *não* são elementos de M_1. O conjunto complementar de $M - M_1$ é M_1.

O complementar de $M_1 = M$ é o conjunto vazio 0 e o complementar de cada «parte» de M (n.º 6) é ainda uma «parte» de M.

8. Se M e N são dois conjuntos, os elementos de M que são simultâneamente elementos de N, constituem acordo com III um subconjunto D de M, o qual é também subconjunto de N e agrupa os elementos *comuns* a M e N. Este conjunto D será chamado «componente comum (gemeinsame Bestandteil)» ou «*intersecção* (Durchschnitt)» de M e N, e designado por $[M, N]$.

Se $M \subset N$, $[M, N] = M$ e se $N = 0$ ou se M e N são «disjuntos» (n.º 3), $[M, N] = 0$.

9. Do mesmo modo, dados vários conjuntos $M, N, R, \ldots$, existe uma «intersecção» $D = [M, N, R, \ldots]$. Seja T um conjunto qualquer cujos elementos são também conjuntos, segundo III a cada coisa a corresponde então um certo subconjunto $T_a \subset T$ constituído pelos elementos de T dos quais a é elemento. Está por conseguinte definido para cada a, se $T_a = T$ ou não, isto é, se a é (ou não) elemento comum a todos os elementos de T, por forma que, sendo A um elemento qualquer de T, os elementos a de A tais que $T_a = T$ constituem um subconjunto D de A que agrupa todos estes elementos comuns. Este conjunto D será chamado «intersecção dos elementos de T» e designado por $\mathfrak{D}T$. Se os elementos de T não possuem elementos comuns é $\mathfrak{D}T = 0$; isto sucede, p. ex., sempre que um elemento de T é vazio ou não é um conjunto.

10. TEOREMA. *Cada conjunto* M *possui pelo menos um subconjunto* M_0 *que não é elemento de* M.

DEMONSTRAÇÃO. Para cada elemento x de M, está definido se $x \varepsilon x$ ou não (a possibilidade de se ter $x \varepsilon x$ não é, em princípio, excluída pelos nossos axiomas). Seja então M o subconjunto de M que, de acordo com III, contém os elementos de M para os quais $x \varepsilon x$ não tem lugar; M_0 não pode ser elemento de M. Com efeito, tem-se $M_0 \varepsilon M_0$ ou *não* $M_0 \varepsilon M_0$. Se a primeira destas alternativas fosse válida, M_0 possuiria um elemento $x = M$ tal que $x \varepsilon x$ o que está em contradição com a definição de M_0. Tem-se, pois, seguramente *não* $M_0 \varepsilon M_0$ e, por conseguinte, se M_0 fosse elemento de M, M_0 seria também elemento de M_0, o que foi agora mesmo excluído.

Conclui-se do teorema que as coisas x do domínio $\mathfrak{B}$ não podem ser elementos de um mesmo conjunto o que significa que o *domínio* $\mathfrak{B}$ não é um conjunto; fica assim afastada pelo nosso ponto de vista a «antinomia de RUSSELL».

AXIOMA IV. *A cada conjunto* T *está associado um conjunto* $\mathfrak{U}$T (*o* «conjunto potência (*Potentzmenge*)» *de* T) *cujos elementos são precisamente os subconjuntos de* T.

(*Axioma do Conjunto Potência* (*Potentzmenge*))

AXIOMA V. *A cada conjunto* T *está associado um conjunto* $\mathfrak{S}$T (*o* «conjunto reunião (*Vereinigungsmenge*)» *de* T) *cujos elementos são precisamente os elementos dos elementos de* T.

(*Axioma da Reunião* (*Vereinigung*))

11. Se nenhum elemento de T é distinto de 0, tem-se naturalmente $\mathfrak{S}T = 0$. Se $T = \{M, N, R, \cdots\}$ onde $M, N, R, \cdots$ são conjuntos, escreve-se também $\mathfrak{S}T = M + N + R + \cdots$ e chama-se a $\mathfrak{S}T$ a «*soma* (Summe) dos conjuntos $M, N, R \cdots$», independentemente do facto de eles possuirem ou não elementos comuns. Tem-se sempre $M = M + 0 = M + M = M + M + M + \cdots$.

12. A «adição (Addition)» de conjuntos acabada de definir gosa das propriedades «comutativa» e «associativa»:

$$M+N=N+M, M+(N+R)=(M+N)+R.$$

Finalmente, é válida para a «soma» e «intersecção» (N.º 8) a lei «distributiva», na dupla forma

$$[M+N,R]=[M,R]+[N,R]$$

$$[M,N]+R=[M+R,N+R].$$

A demonstração faz-se utilizando I, e consiste em mostrar que cada elemento do conjunto do primeiro membro é simultâneamente elemento do conjunto que figura no segundo membro e recìprocamente [1].

13. *Introdução do Produto*. Seja M um conjunto não vazio e a um elemento qualquer de M; a questão se $M=\{a\}$ ou não, é definida de acordo com o n.º 5. *Por conseguinte, a questão se um dado conjunto possui um e um só elemento ou não, é sempre definida.*

Seja então T um conjunto cujos elementos $M, N, R, \cdots$ são conjuntos disjuntos dois a dois, e S_1 um subconjunto qualquer da sua reunião $\mathfrak{S}T$. É então definida, para cada elemento M de T, a questão se a intersecção $[M, S_1]$ possui um único elemento ou não. Deste modo, os elementos de T que têm em comum com S_1 precisamente um elemento constituem um certo subconjunto T_1 de T e é definida a questão se $T_1=T$ ou não. Os subconjuntos $S_1 \subset \mathfrak{S}T$ que têm em comum com cada elemento de T exactamente um elemento, constituem, pois, segundo III, um conjunto $\mathfrak{P}T$ que (atendendo a III e IV) é um subconjunto de $\mathfrak{U}\mathfrak{S}T$ e será designado por «conjunto *enlace* (Verbindungsmenge) de T» ou por «*produto* (Produkt) dos conjuntos $M, N, R, \cdots$ (de T)». Se $T=\{M,N\}$ ou $T=\{M,N,R\}$, escreve-se abreviadamente $\mathfrak{P}T=MN$ ou $\mathfrak{P}T=MNR$.

Para garantir que *um produto de vários conjuntos só é vazio se algum dos factores é vazio*, necessitamos de outro axioma.

AXIOMA VI. *Se* T *é um conjunto cujos elementos são conjuntos não vazios e mùtuamente disjuntos, a sua reunião,* $\mathfrak{S}$T *possui pelo menos um subconjunto* S_1 *que tem em comum com cada elemento de* T *exactamente um elemento.*

(*Axioma da Escolha* (*Auswahl*))

Pode exprimir-se o conteúdo deste axioma dizendo que é sempre possível *escolher* de cada elemento $M, N, R, \cdots$ de T, um elemento $m, n, r, \cdots$, respectivamente, e agrupar estes elementos num conjunto S_1 [1].

[Os axiomas já mencionados são suficientes, como veremos, para deduzir todos os teoremas essenciais da teoria geral dos conjuntos. Porém, para assegurar a existência de conjuntos «infinitos» («unendlicher» Mengen) necessitamos ainda do seguinte axioma que, no que respeita ao essencial, é devido ao sr. R. DEDEKIND [2].]

---

(1) A teoria completa desta «adição» e desta «multiplicação (Multiplication)» encontra-se em «Algebra der Logik» Bd. I de E. SCHRÖDER.

(1) Sobre a legitimidade deste axioma, cf. o meu artigo Math. Ann. Bd. 65, p. 107-128 em cujo § 2, p. 111 e seguintes, é discutida a literatura relativa a este assunto.

(2) «Was sind und was sollen die Zahlen?» N.º 66. A «demonstração» deste Princípio feita pelo sr. DEDEKIND a partir da existência do «conjunto de todas as coisas pensáveis», não pode satisfazer visto que, do nosso ponto de vista, o domínio $\mathfrak{B}$ *não* é um conunto (N.º 10).

Axioma VII. *No domínio existe pelo menos um conjunto* Z *que contém* 0 *e que, além disso, contém com cada elemento* a *o correspondente conjunto* $\{a\}$.

(*Axioma do Infinito* (*des Unendlichen*))

14$_{\text{VII}}$ (1). Seja Z um conjunto nas condições de VII; a questão se Z_1 possui a mesma propriedade que Z ou não, é definida para cada subconjunto Z_1 de Z. Com efeito, para cada $a \varepsilon Z_1$, a questão se $\{a\} \varepsilon Z_1$ ou não é definida, e os elementos a de Z_1 tais que $\{a\} \varepsilon Z_1$ constituem um subconjunto Z_1' de Z_1 para o qual é definido se $Z_1' = Z_1$ ou não. Deste modo, os subconjuntos Z_1 de Z que possuem a referida propriedade são elementos de um conjunto $T \subset \mathfrak{U} Z$ e a sua intersecção (N.º 9) $Z_0 = \mathfrak{D} T$ gosa ainda da mesma propriedade. Com efeito, por um lado, 0 é um elemento comum a todos os elementos Z_1 de T e, por outro lado, se a é um elemento comum a todos estes Z_1, $\{a\}$ também é elemento comum a todos eles, sendo portanto igualmente elemento de Z_0.

Seja agora Z' um conjunto qualquer possuindo a propriedade em referência; a Z' está também associado um subconjunto mínimo Z_0' gosando da mencionada propriedade, tal como a Z estava associado Z_0. Porém, a intersecção $[Z_0, Z_0']$ que é subconjunto de Z e Z' possui necessàriamente a propriedade em questão e contém então Z_0 por ser subconjunto de Z e Z_0' por ser subconjunto de Z_0. Tem-se, por conseguinte, atendendo a I, $[Z_0, Z_0'] = Z_0 = Z_0$ e, portanto, Z_0 *é subconjunto de todos os possíveis conjuntos* Z, não sendo necessário para tirar esta conclusão supor que esses conjuntos Z constituem um conjunto. O conjunto Z_0 possui os elementos $0, \{0\}, \{\{0\}\}$, etc. e pode ser designado por «sucessão natural (Zahlenreihe)» visto que os seus elementos podem ser interpretados como correspondendo aos numerais (*). Z_0 constitui o exemplo mais simples de um conjunto «infinito numerável (abzählbar unendlichen)» (N.º 36).

Nota: Não traduzimos o § 2 (e último) do artigo de Zermelo, intitulado «Teoria da Equivalência (Theorie der Äquivalenz)», por ter menos interesse como documento para ilustrar estas lições dedicadas aos fundamentos da teoria dos conjuntos.

Zermelo define uma noção de equivalência (Äquivalenz) entre conjuntos à custa de uma noção prévia de aplicação (injectiva) de um conjunto M sobre um conjunto N disjunto de M (Abbildung von M auf N) e deduz em seguida alguns teoremas que tornariam fácil reconstituir a parte mais significativa da teoria de Cantor dos números cardinais. Entre estes teoremas figura o teorema de Cantor (que relaciona a cardinalidade de um conjunto com a cardinalidade do conjunto das partes desse conjunto) e um *princípio geral da escolha* que permite levantar no Axioma VI a restrição que exige que os elementos de T sejam disjuntos.

O artigo tem anexa a data «Chesières, 30 de Julho de 1907».

(1) Os índices VI ou VII apostos ao n.º de um teorema exprimem que o axioma VI ou o axioma VII intervém explícita ou implìcitamente na dedução.

(*) *N. do T.:* — No texto figura «Zahlzeichen» cujo significado literal é «algarismo». Naturalmente a tradução literal não corresponde neste caso à ideia do autor. Optámos pela expressão «numeral», tomando esta palavra como designação de «número natural no sentido intuitivo ou primitivo».

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — (1.ª chamada) — 10-2-1967.

I

5671 — **1) Formalize o argumento seguinte e estude a sua validade:**

«Se o mercado é livre, um só vendedor não pode influenciar os preços. Se um só vendedor não pode influenciar os preços, então existe um grande número de vendedores. Existe um grande número de vendedores. Logo, o mercado é livre».

2) Considere um conjunto $U = \{a, b, c, \cdots\}$ e uma relação binária S nele definida, satisfazendo aos axiomas:

A. 1 $a\,S\,b \Rightarrow a \neq b$
A. 2 $2a\,S\,b \wedge b\,S\,c \Rightarrow a\,S\,c$.

Demonstre o seguinte teorema:

T. 1 $a\,S\,b \Rightarrow b\,\tilde{S}\,a$.

Se U for o conjunto dos pontos de uma recta, como pode definir S para que se obtenha uma concretização da axiomática? Justifique.

R: 1) *Fazendo*

p = *o mercado é livre*
q = *um só vendedor não pode influenciar os preços*
r = *existe um grande números de vendedores*

o argumento pode formalizar-se do modo seguinte:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ r \\ \hline \therefore p \end{array}$$

O argumento é inválido porque de $p \Rightarrow q$ *e* $q \Rightarrow r$ *pode concluir-se* $p \Rightarrow r$ *mas de* $p \Rightarrow r$ *e* r *não é legítimo deduzir* p.

2) *Para provar* T. 1 *pode seguir-se o método de demonstração por redução ao absurdo. Supondo que se tem simultâneamente* $a\,S\,b$ *e* $b\,S\,a$, *o axioma* A. 2 *permite concluir que* $a\,S\,a$ *e o axioma* A. 1 *conduz à contradição* $a \neq a$. *Logo,* $a\,S\,b \Rightarrow b\,\tilde{S}\,a$.

Sendo P *e* Q *pontos de uma recta a relação* S *pode ser* «P *está à esquerda de* Q».

II

5672 — **1) Seja** $A = \left\{x \in R : x = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right\}$, **onde m e n designam números naturais.**

a) Ache $\inf A$ e $\sup A$. O conjunto A tem máximo e mínimo? Porquê?

b) Mostre que os números $1/n$ e o $\inf A$ são pontos de acumulação de A. O conjunto A é fechado? Porquê?

2) Calcule $\lim\limits_{n=\infty} (\sqrt[n^3]{e} - 1)^{1/\log n}$.

R: 1) a) $\inf A = 0$, $\sup A = 2$. *O conjunto* A *tem o máximo* $x = 2$ *mas não possui mínimo.*

b) $\lim\limits_{m=\infty}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ *e* 0 *é ponto de acumulação dos números* $1/n$. *O conjunto* A *não é fechado porque* $0 \notin A$.

2) *Como*

$$\lim_{n=\infty} \log (\sqrt[n^3]{e} - 1)^{1/\log n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} \log (e^{1/n^3} - 1) =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} \log \frac{\xi}{n^3}, \text{ com } \xi \to 1, \text{ e}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} \log \frac{\xi}{n^3} = \lim_{n=\infty} \frac{\log \xi}{\log n} - 3 = -3,$$

tem-se

$$\lim_{n=\infty} (\sqrt[n^3]{e} - 1)^{1/\log n} = e^{-3}.$$

III

5673 – 1) Calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}.$$

2) Mostre que o critério de razão não esclarece a natureza da série Σa_n, onde $a_{2n-1} = \dfrac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$ e $a_{2n} = \dfrac{2^{n-1}}{3^n}$, mas que o critério da raiz permite concluir que ela é convergente.

R: 1) *A série geométrica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ *tem a soma* $S = -\dfrac{1}{4}$ *e a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ *tem a soma* $S' = \dfrac{3}{4}$. *Logo a serie proposta tem a soma* $S - S' = -1$.

2) $\rho_{2n-1} = \dfrac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \dfrac{1}{3} < 1$ *e* $\rho_{2n} = \dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 2 > 1$ *e portanto o critério da razão não permite esclarecer a natureza da série. Como*

$$r_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2n-1}} \to \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$r_{2n} = \sqrt[2n]{a_{2n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \to \sqrt{\frac{2}{3}},$$

tem-se $\lim r_n = \sqrt{\dfrac{2}{3}} < 1$ *e portanto a série converge.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência — 2.ª chamada — 17-2-67.

I

5674 – 1) Utilize a demonstração condicional para provar a validade do argumento:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow (q \vee r) \\ q \Rightarrow \sim p \\ \underline{s \Rightarrow \sim r} \\ \therefore p \Rightarrow \sim s \end{array}$$

2) Utilize a álgebra dos conjuntos para simplificar a expressão:

$$[(A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim C)] \cap (A \cap \sim C).$$

R: 1) *Tem de se provar então que*

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow (q \vee r) \\ q \Rightarrow \sim p \\ s \Rightarrow \sim r \\ \underline{p \qquad\qquad} \\ \therefore \sim s \end{array}$$

Com efeito,

1.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	*Prem.*
2.	$q \Rightarrow \sim p$	*Prem.*
3.	$s \Rightarrow \sim r$	*Prem.*
4.	p	*Prem. adic.*
5.	$q \vee r$	1,4 *modus ponens*
6.	$p \Rightarrow \sim q$	2, *Equiv.*
7.	$n \Rightarrow \sim s$	3, *Equiv.*
8.	$\sim q$	4,6 *modus ponens*
9.	r	5,8 *silogismo disjuntivo*
10.	$\sim s$	7,9 *modus ponens.*

2) $[(A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim C)] \cap (A \cap \sim C) =$
$= [(A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C)] \cup [(B \cap \sim C) \cap (A \cap \sim C)] =$
$= [(A \cap \sim C) \cap \sim B] \cup [(A \cap \sim C) \cap B] =$
$= (A \cap \sim C) \cap (\sim B \cup B) =$
$= (A \cap \sim C) \cap U =$
$= A \cap \sim C.$

II

5675 – 1) Designe R o conjunto dos números reais e sejam x e y números reais quaisquer. Definam-se os números: *a)* $d_1(x, y) = |x^2 - y^2|$; *b)* $d_2(x, y) = 2|x - y|$; *c)* $d_3(x, y) = \inf\{2, |x - y|\}$. Quais dos números d_1, d_2 e d_3 definem distâncias no conjunto R? Justifique a resposta.

2) Calcule $\displaystyle\lim_{n=\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{a} - 1}$.

R: 1) d_2 *e* d_3 *satisfazem à axiomática da distância.*

$$2) \quad \lim_{n=\infty} \frac{sen\,\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{a} - 1} = \lim_{n=\infty} \frac{sen\,\frac{1}{n}}{a^{\frac{1}{n}} - 1} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{sen\,\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}\log a} - 1} = \lim_{n=\infty} \frac{sen\,\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\xi \log a},$$

com $\xi \to 1$. *Portanto,*

$$\lim_{n=\infty} \frac{sen \frac{1}{n}}{\sqrt[n]{a} - 1} = \frac{1}{\log a}.$$

III

5676 — 1) Sendo Σa_n e Σb_n séries de termos não-negativos, demonstre que a condição $h \leqq a_n / b_n \leqq k$, onde h e k designam números positivos, implica que as séries são da mesma natureza.

2) Determine o intervalo de convergência absoluta da série

$$\sum \left[1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right]^{n^2} (x-1)^n.$$

R: 1) *De* $h \leqq a_n/b_n$ *vem* $h\, b_n \leqq a_n$ *donde se conclui que*

$$\Sigma a_n\, C \Longrightarrow \Sigma b_n\, C.$$
$$\Sigma b_n\, D \Longrightarrow \Sigma a_n\, D.$$

De $a_n/b_n \leqq k$ *vem* $a_n \leqq k\, b_n$ *donde se tira*

$$\Sigma a_n\, D \Longrightarrow \Sigma b_n\, D.$$
$$\Sigma b_n\, C \Longrightarrow \Sigma a_n\, C.$$

Em resumo,

$$\Sigma a_n\, C \Longleftrightarrow \Sigma b_n\, C.$$
$$\Sigma a_n\, D \Longleftrightarrow \Sigma b_n\, D.$$

2) *Como*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left[1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right]^{n^2}} = \overline{\lim} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right]^n = \sqrt{e},$$

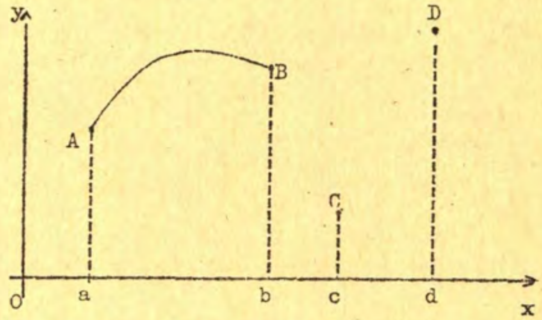
o intervalo de convergência absoluta é

$$]1 - 1/\sqrt{e},\ 1 + 1/\sqrt{e}\,[.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.ª cadeira — 2.º exame de frequência e 2.º ponto de informação (1.ª chamada) — 12-6-1967.**

I

5677 — 1) Considere a função $y = f(x)$ com o domínio $X = [a, b] \cup \{c\} \cup \{d\}$ e cuja imagem se apresenta na figura junta. Resolva os problemas seguintes:



a) Diga qual é o contradomínio $f(X)$.

b) Mostre que $f(x)$ é contínua em X e verifique os teoremas de Dini e Weierstrass.

c) Pode-se calcular $f'(c)$ e $f'(d)$? Porquê?

d) Quais são os extremos locais de $f(x)$? E os extremos absolutos? Justifique.

2) Calcule $P \log(x^2 + x + 1)$.

R: 1) a) *Seja* $e \in]a, b[$ *o ponto onde* $f'(e) = 0$. *O contradomínio é* $f(X) = \{f(c)\} \cup [f(a), f(e)] \cup \{f(d)\}$.

b) *A imagem de* $f(x)$ *mostra que a função é contínua em* $[a, b]$ *ou seja em todos os pontos de acumulação de* X. *A verificação do teorema de Dini é imediata pois o contradomínio* $f(X)$ *é conjunto fechado limitado; para o teorema de Weierstrass basta notar que o mínimo absoluto é* $f(c)$ *e o máximo absoluto é* $f(d)$.

c) *Não, porque* c *e* d *são pontos isolados em* X.

d) *Os extremos locais são: mínimos* — $f(a)$ *e* $f(b)$
máximo — $f(e)$

De acordo com a definição de extremo local $f(c)$ *e* $f(d)$ *também são extremos locais (máximos ou mínimos). O mínimo absoluto é* $f(c)$ *e o máximo absoluto* $f(d)$.

2) $P \log(x^2 + x + 1) =$

$$= x \log(x^2 + x + 1) - P \frac{2x^2 + 1}{x^2 + x + 1} =$$

$$= x \log(x^2 + x + 1) - P\left(2 - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}\right)$$

$$= x \log(x^2 + x + 1) - 2x + P \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}$$

$$= x \log(x^2 + x + 1) - 2x + P \frac{(x + 1/2) + 3/2}{(x + 1/2)^2 + 3/4}$$

$$= x \log(x^2 + x + 1) - 2x + \frac{1}{2} P \frac{2(x + 1/2)}{(x + 1/2)^2 + 3/4} +$$

$$+\frac{3}{\sqrt{3}}\,P\,\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= x\,log\,(x^2+x+1) - 2x + \frac{1}{2}\,log\,[(x+1/2)^2+3/4] +$$

$$+\frac{3}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\,.$$

II

5678 — 1) Considere a função $F(x)$ tal que $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n-1)}_{(a)} = 0$ e sejam L e l, respectivamente, o supremo e o ínfimo de $F^{(n)}_{(x)}$ em $[a, b]$. Mostre que

$$\frac{l\,(x-a)^n}{n!} \leq F(x) \leq \frac{L\,(x-a)^n}{n!}\quad (a \leq x \leq b)\,.$$

2) Calcule $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x^3\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2} - x + log\,(1+x)}{x^2\cos x}$

R: 1) *Pela fórmula de Taylor vem*

$$F(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\,F^{(n)}\,[a+\theta_n\,(x-a)]\,.$$

Com $a \leq x \leq b$ *e atendendo a que*

$$l \leq F^{(n)}\,[a+\theta_n\,(x-a)] \leq L$$

vem imediatamente o resultado.

2)
$$\lim_{x=0}\frac{x^3\,sen\,\frac{1}{x^2} - x + log\,(1+x)}{x^2\,cos\,x} =$$

$$= \lim_{x=0}\frac{x^3\,sen\,\frac{1}{x^2} - x + x - \lambda\,x^2}{x^2\,cos\,x}$$

com $lim\,\lambda = 1/2$. *Então*

$$\lim_{x=0}\frac{x^3\,sen\,\frac{1}{x^2} - x + log\,(1+x)}{x^2\,cos\,x} =$$

$$= \lim_{x=0}\frac{x\,sen\,\frac{1}{x^2} - \lambda}{cos\,x} = -1/2\,.$$

III

5679 — 1) Qual é o campo de existência de $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 - y^2 - 2z^2}{2x^2 + y^2 + 3z^2}$? Calcule os limites sobrepostos para $f(x, y, z)$ no ponto $P(0, 0, 0)$. Existe $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}} f(x, y, z)$? Porquê?

2) Se o sistema de equações lineares $AX = B$ possui duas soluções distintas X_1 e X_2, prove que $a\,X_1 + (1-a)\,X_2$ também é solução, qualquer que seja a. Serve este resultadc pasa mostrar que, tendo $AX = B$ duas soluções distintas, existe uma infinidade de soluções? Porquê?

R: 1) *O campo de exiitência é* $R^3 - \{P\}$.

$$\lim_{x=0}\lim_{y=0}\lim_{z=0} f(x, y, z) = 1/2$$
$$\lim_{x=0}\lim_{z=0}\lim_{y=0} f(x, y, z) = 1/2$$
$$\lim_{y=0}\lim_{x=0}\lim_{z=0} f(x, y, z) = -1$$
$$\lim_{y=0}\lim_{z=0}\lim_{x=0} f(x, y, z) = -1$$
$$\lim_{z=0}\lim_{x=0}\lim_{y=0} f(x, y, z) = -2/3$$
$$\lim_{z=0}\lim_{y=0}\lim_{x=0} f(x, y, z) = -2/3$$

Não existe $\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}} f(x, y, z)$ *porque os limites sobrepostos não são todos iguais.*

2) *Como* $A\,X_1 = B$ *e* $A\,X_2 = B$, *vem*

$$A\,[a\,X_1 + (1-a)\,X_2] = a\,A\,X_1 + (1-a)\,A\,X_2 =$$
$$= a\,B + (1-a)\,B = B\,,$$

o que mostra que $a\,X_1 + (1-a)\,X_2$ *também é solução.*

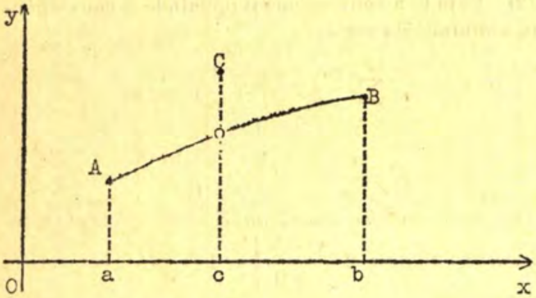
I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º Exame de frequência e 2.º ponto de informação — (2.ª chamada) — 14-6-67.

I

5680 — 1) Considere a função $y = f(x)$ com o domínio $X = [a, b]$ e cuja imagem se apresenta na figura junta. Resolva os problemas seguintes:

a) Diga qual é o contradomínio $f(x)$.

b) Mostre que $f(x)$ é descontínua para $x = c$, indicando a oscilação $w(c)$.



c) Calcule $f'(c)$.

d) Quais são os extremos locais de $f(x)$? E os extremos absolutos? Justifique.

2) Mostre que $\varphi(x) = \begin{cases} x\ (x \neq 0) \\ 1\ (x = 0) \end{cases}$ não possui primitiva em $]-\infty, +\infty[$.

R: 1) a) *Note-se que* $f(c-0) = f(c+0)$. *Estes limites laterais são representados geomètricamente pela ordenada do ponto que é centro do pequeno círculo em branco.*

$$f(X) = [f(a), f(c-0)[\, \cup \,]f(c-0), f(b)] \cup \{f(c)\}.$$

b) $\omega(c) = C - f(c-0) > 0$ *e portanto* $f(x)$ *é descontínua para* $x = c$.

c) $f'(c) = \pm\infty$.

d) *O mínimo local é* $f(a)$ *e os máximos locais são* $f(c)$ *e* $f(b)$. *O mínimo absoluto é* $f(a)$ *e o máximo absoluto é* $f(c)$.

2) *Supondo que existe* $\Phi(x) = P\varphi(x)$ *teria de ser* $\Phi(x)$ *contínua e portanto da forma*

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + k\ (x \neq 0) \\ k\ (x = 0). \end{cases}$$

Ora a derivada desta função é

$$\Phi'(x) = \begin{cases} x\ (x \neq 0) \\ 0\ (x = 0) \end{cases}$$

que não coincide com $\varphi(x)$. *Logo* $\varphi(x)$ *não possui primitiva em* $]-\infty, +\infty[$.

II

5681 – 1) **Desenvolva a função**

$$\psi(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

em série de Mac-Laurin, indicando o termo geral e o intervalo em que é válido o desenvolvimento.

2) **Seja $f(x)$ convexa em $[a, b]$ e $g(y)$ crescente e convexa num intervalo que contém o contradomínio de $f(x)$. Prove que $g[f(x)]$ é convexa em $[a, b]$.**

Nota: **Admita a existência de derivadas até à 2.ª ordem das funções f e g.**

R.: 1) $$\psi(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3-x}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x}{3}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_0^\infty x^n + \frac{1}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

para $|x| < 1$.

Também se pode escrever

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \left(-1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) x^n.$$

2) *Fazendo* $F(x) = g[f(x)]$, *vem* $F'(x) = g'(y)\,.\,f'(x)$, $F''(x) = g''(y)[f'(x)]^2 + g'(y) f''(x)$ *e, como* $g'(y) \geqq 0$, $g''(y) \geqq 0$ *e* $f''(x) \geqq 0$, *tem-se* $F''(x) \geqq 0$, *o que prova o resul.ado.*

III

5682 – 1) Considere $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + z^2 + 1}{x - y - z}$, $f(0,0,0) = 0$. Calcule $f'_x(0,0,0)$, $f'_y(0,0,0)$ e $f'_z(0,0,0)$.

2) **Duas matrizes A e B de ordem n diferem apenas na j-ésima coluna. Prove que**

$$2^{1-n}\,|A + B| = |A| + |B|.$$

R.: 1) $$f'_x(0,0,0) = \lim_{x=0} \frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty$$

$$f'_y(0,0,0) = \lim_{y=0} \frac{f(0,y,0) - f(0,0,0)}{y} =$$

$$= \lim_{y=0} -\frac{1}{y^2} = -\infty$$

$$f'_z(0,0,0) = \lim_{z=0} \frac{f(0,0,z) - f(0,0,0)}{z} =$$

$$= \lim_{z=0} -\frac{z^2+1}{z^2} = -\infty .$$

2) *Sendo*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nj} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \ e \ |B| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots b_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots b_{nj} \cdots b_{nn} \end{vmatrix},$$

vem

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} + b_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1n} \cdots a_{nj} + b_{nj} \cdots b_{nn} \end{vmatrix}$$

e

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 2\,a_{11} \cdots a_{1j} + b_{1j} \cdots 2\,a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 2\,a_{n1} \cdots a_{nj} + b_{nj} \cdots 2\,a_{nn} \end{vmatrix} = 2^{n-1}(|A|+|B|)$$

o que prova a proposição.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Julho — (1.ª chamada) — Prova escrita — 10-7-67.

5683 — 1) Ache todos os números complexos que satisfazem à relação $\bar{z} = z^{n-1}$, onde $\bar{z}$ designa o conjugado de z.

R: *Fazendo* $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, *tem-se*

$$\bar{z} = \rho[\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)]$$

e a relação proposta transforma-se em

$$\rho[\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)] =$$
$$= \rho^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i\,\mathrm{sen}(n-1)\theta]$$

que exige

$$\rho = \rho^{n-1}$$
$$(n-1)\theta + \theta = 2k\pi ,$$

isto é,

$$\rho = 0 \vee \rho = 1$$
$$\theta = \frac{2k\pi}{n} .$$

A solução é pois $z = 0$ *ou*

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{n} .$$

2) Estude a convergência, incluindo a convergência uniforme, da série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(2\cdot\frac{x-3}{x+1}\right)^n .$$

R: *Como* $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\left|\frac{x-3}{x+1}\right|$, *em que* a_n *é o termo geral da série associada, a série converge (absolutamente) quando* $2\left|\frac{x-3}{x+1}\right| < 1$ *e diverge quando* $2\left|\frac{x-3}{x+1}\right| > 1$.

Obtém-se assim o intervalo de convergência absoluta $]5/3, 7[$. *Notando que a série é simplesmente convergente para* $x = 5/3$, *ela é uniformemente couvergente em qualquer intervalo* $[a, b]$ *com* $a \geq 5/3$ *e* $b < 7$.

3) Prove que $f(x) = \dfrac{x+k}{x^2-k}$ não possui extremantes interiores se $-2 \leq k \leq 2$. E extremantes fronteiros ?

Calcule $Pf(x)$.

R: *Como* $f'(x) = \dfrac{-x^2-2kx-4}{(x^2-4)^2}$ *e o binómio discriminante de* $-x^2-2kx-4$ *é* $\Delta = k^2-4$, *tem-se para* $-2 \leq k \leq 2$, $\Delta \leq 0$ *o que implica* $f'(x) \leq 0$: *não há pois extremantes interiores,* $f(x)$ *é decrescente no seu campo de existência.*

Dado que $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$, *os pontos impróprios são extremantes:* $+\infty$ *é minimizante e* $-\infty$ *é maximizante.*

$$P\frac{x+k}{(x-2)(x+2)} = \frac{2+k}{4}\log|x-2| -$$
$$-\frac{2-k}{4}\log|x+2| .$$

4) O determinante de ordem n $\Delta = |a_{ij}|$ pode ser considerado como função das n^2 variáveis a_{ij}. Mostre que Δ é função homogénea e que $\dfrac{\partial\Delta}{\partial a_{ij}} = A_{ij}$.

Verifique o teorema de Euler e interprete-o na teoria dos determinantes.

R: Δ *é função homogénea de grau* n *pois* $|\lambda\Delta| = \lambda^n\Delta$. *Pelo teorema de Laplace tem-se*

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{in} = \Delta$$

e vem imediatamente

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ij}} = A_{ij} .$$

Com i *e* j *mudos correntes de* 1 *a* n *vem*

$$a_{ij}\,A_{ij} = n\,\Delta\,.$$

5) Sendo r_1, r_2 e r_3 as raízes do polinómio $z^3 + pz + q$, ache a relação entre p e q por forma que $r_3 = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$.

R: *De* $r_3 = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$ *vem* $r_1 r_2 r_3 = r_2 + r_1$ *e, como* $r_1 r_2 r_3 = -q$ *tem-se* $r_1 + r_2 = -q$. *Por outro lado,* $r_1 + r_2 + r_3 = 0$, *ou* $r_1 + r_2 = -r_3$, *e portanto* $r_3 = q$. *Terá de ser então* $q^3 + pq + q = 0$.

6) Considere o sistema de equações sobre o corpo R dos números reais

$$S)\left\{\begin{array}{l} 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 15 \\ x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 = -5 \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 9 \\ -x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 = 11\,. \end{array}\right.$$

Reduza-o a um sistema de equações lineares e mostre que $S)$ é possível. Apresente a solução.

R: *Fazendo* $x_i^2 = y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *o sistema transforma-se no sistema linear*

$$\left\{\begin{array}{l} 2y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 = 15 \\ y_1 - y_2 - 2y_3 - 2y_4 = -5 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 = 9 \\ -y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 4y_4 = 11\,. \end{array}\right.$$

Utilizando o método de condensação, vem

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & 4 & 4 & 11 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 & 15 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 25 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 24 \\ -9 & -10 & 0 & 0 & -49 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 & 15 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 25 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 & 15 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 25 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & 3 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e vê-se que a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz completa : o sistema linear é possível (indeterminado porque a característica é 3).

A solução do sistema linear é $y_1 = 1$, $y_2 = 4$ *e* $y_3 = 1 - y_4$ *e o sistema proposto também é possível (indeterminado) com as soluções*

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1 & x_2 = 2 & x_3 = \sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = 1 & x_2 = 2 & x_3 = -\sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = 1 & x_2 = -2 & x_3 = \sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = 1 & x_2 = -2 & x_3 = -\sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = -1 & x_2 = -2 & x_3 = \sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = -1 & x_2 = 2 & x_3 = -\sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = -1 & x_2 = -2 & x_3 = \sqrt{1 - x_4^2} \\ x_1 = -1 & x_2 = -2 & x_3 = -\sqrt{1 - x_4^2} \end{array}$$

É claro que terá de ser $-1 \leqq x_4 \leqq 1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Julho — 2.ª chamada — Prova escrita — 13-7-67.

5684 — 1) Sejam

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

e

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

pontos de R^n. Mostre que a relação binária

$$X \geqq Y \Longleftrightarrow x_i \geqq y_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

é relação de ordem parcial mas não é relação de ordem.

Introduzindo a *adição*

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

e *a multiplicação por um escalar*

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n),$$

prove que são verificadas as propriedades seguintes:

a) $X_1 \geqq Y_1 \wedge X_2 \geqq Y_2 \Rightarrow X_1 + X_2 \geqq Y_1 + Y_2$

b) $X \geqq Y \wedge \lambda > 0 \Rightarrow \lambda X \geqq \lambda Y$.

R: *A relação é reflexiva, anti-simétrica e transitiva e portanto é relação de ordem parcial. Não é relação de ordem pois não é tricotómica.*

A demonstração das propriedades a) *e* b) *é imediata.*

2) Calcule:

a) $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^x}{x^2}$

b) $P\, x^2 (1 + x^5)^4$.

R.: a) *Utilizando duas vezes a regra de Cauchy, vem:*

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^x}{x^2} = \lim_{x=0} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x - e^x}{2x} =$$
$$= \lim_{x=0} \frac{-\operatorname{sen} x - \cos x - e^x}{2} = -1.$$

b) $P\,x^2 (1+x^5)^4 = P\,x^2 (1 + 4x^5 + 6x^{10} + 4x^{15} + x^{20}) =$

$$= P\,(x^2 + 4x^7 + 6x^{12} + 4x^{17} + x^{22}) =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^8}{2} + 6\frac{x^{13}}{13} + 2\frac{x^{18}}{9} +$$
$$+ \frac{x^{23}}{23} + C.$$

3) A substituição $x = e^t\, y = e^u$ converte $f(x, y)$ em $g(t, u) = f(e^t, e^u)$. Se f satisfaz à relação $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, mostre que g satisfaz a $\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$.

R.:
$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot e^t = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{2t} + \frac{\partial f}{\partial x} e^t$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot x^2 + \frac{\partial f}{\partial x} x$$
$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot e^u = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^{2u} + \frac{\partial f}{\partial y} e^u$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y.$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = 0.$$

4) Seja $P(z)$ polinómio inteiro em z. O resto da divisão por $z - 3$ é 4 e, na divisão por $z + 3$, o resto é 5. Qual é o resto da divisão de $P(z)$ por $z^2 - 9$? Justifique.

R.: $P(z) = (z^2 - 9)\, Q(z) + (A z + B)$

$P(3) = 3A + B$

$P(-3) = -3A + B$

e portanto

$$\begin{cases} 3A + B = 4 \\ -3A + B = 5 \end{cases}$$

que dá

$$A = -1/6 \quad e \quad B = 9/2.$$

O resto é $-\dfrac{1}{6} z + \dfrac{9}{2}$.

5) Ache a matriz A que satisfaz à seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

R.: *Como*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

vem

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}.$$

6) Utilize a teoria dos determinantes para deduzir a condição para que as rectas

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n x + B_n y + C_n = 0 \end{cases}$$

sejam concorrentes.

R.: *A característica de* $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & B_n \end{bmatrix}$ *terá de ser igual a* 2 *e portanto a matriz dos coeficientes terá de possuir um menor de 2.ª ordem significativo. Para fixar ideias, seja* $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. *O teorema de Rouché dá imediatamente as condições:*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0, \cdots, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_n & B_n & C_n \end{vmatrix} = 0.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final (Epoca de Outubro) — Prova escrita — 3-10-1967.

5685 — 1) Considere o conjunto universal R^2 e seja A o subconjunto de R^2 tal que $A = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 < 4\}$. Indique o interior de A, o exterior de A e o conjunto derivado de A. O conjunto A é aberto? É fechado? Porquê? Acompanhe a resolução do problema com a respectiva interpretação geométrica.

R.: $int\, A = A$; $ext\, A = R^2 - \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$; $A' = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

O conjunto A *é aberto porque* $A = int\, A$.

2) Resolva os problemas seguintes:

a) Desenvolva x em série de potências de $y = \frac{x}{1-x}$ (sugestão: exprima x em função de y). Para que valores de x é válido o desenvolvimento? Justifique.

b) Calcule $P \cos x \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)$.

R.: a) *De* $y = \frac{x}{1-y}$ *vem*

$$x = \frac{y}{1+y} = \sum_0^\infty (-1)^n y^{n+1} = \sum_0^\infty (-1)^n \left(\frac{x}{1-x}\right)^{n+1}$$

e o desenvolvimento é válido para $|y| = \left|\frac{x}{1-x}\right| < 1$ *ou* $x < 1/2$.

b) $P \cos x \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) =$

$$= \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2} P \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2} \log(1 + \operatorname{sen}^2 x) + C.$$

3) Utilize a teoria das funções implícitas para achar os extremos da função $y(x)$ definida por $xy^2 - yx^2 - 2a^3 = 0 \quad (a > 0)$.

R.: *O extremante terá de satisfazer às condições*

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) \neq 0 \end{cases}$$

Ora a solução do sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = xy^2 - yx^2 - 2a^3 = 0 \\ f'_x(x, y) = y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

é $\begin{cases} x = a \\ y = 2a \end{cases}$ *que satisfaz à condição* $f'_y(a, 2a) \neq 0$.

Sendo $\frac{dy}{dx} = 0$, *vem* $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{f''_{x^2}(x, y)}{f'_y(x, y)}$ *e portanto* $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_a = -\frac{f''_{x^2}(a, 2a)}{f'_y(a, 2a)} = \frac{4a}{3a^2} > 0$. *Logo* $y(x)$ *atinge o mínimo* $y = 2a$ *para* $x = a$.

4) Ache o valor de k por forma que uma das raízes da equação $z^3 - 7z + k = 0$ seja o dobro de uma das outras.

R.: *Designando por* z_1, z_2 *e* z_3 *as raízes da equação, as fórmulas de Girard e a condição dada permitem escrever*

$$\begin{cases} z_1 = 2z_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 z_2 z_3 = -k \end{cases} \begin{cases} z_1 = 2z_2 \\ 3z_2 + z_3 = 0 \\ 2z_2 \cdot z_2(-3z_2) = -k \end{cases} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ z_2^3 = k/6. \end{cases}$$

Substituindo $z_2 = \sqrt[3]{k/6}$ *na equação, vem*

$$\frac{k}{6} - 7\sqrt[3]{\frac{k}{6}} + k = 0$$

que dá $k = \pm 6$.

5) Seja A uma matriz quadrada tal que $A^n = 0 \; (n \in N)$. Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$.

R.: *Tem-se* $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = (I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})(I - A) = I$, *o que prova a proposição.*

6) Determine a e b por forma que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + a x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + 4x_4 = b \end{cases}$$

seja possível indeterminado de grau 2. Ache nesse caso a solução do sistema.

R. $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & b \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & a+2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & b \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a+3 & b \end{array}\right]$$

Para que o sistema seja possível indeterminado de grau 2 terá de ser $a=3$ *e* $b=0$. *A solução será então* $\begin{cases} x_1 = -3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = 4x_3 + 5x_4 \end{cases}$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final—Epoca de Outubro (Prova escrita)— 10-10-1967.

5686 — Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [e^{nx} - e^{(n-1)x}]^{-1}$$

é convergente se e só se $x > 0$ e tem por soma

$$\frac{e^x}{e^{2x}-1}.$$

R: *O termo geral da série pode escrever-se na forma* $\frac{1}{e^x-1} \cdot (-1)^{n-1} \frac{1}{e^{(n-1)x}}$ *e, como* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{e^{(n-1)x}}$ *é a série geométrica de razão* $-1/e^x$ *(convergente se e só se* $x > 0$*), a soma da serie proposta é*

$$S = \frac{1}{e^x-1} \cdot \frac{1}{1+1/e^x} = \frac{1}{e^{2x}-1}.$$

2) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x/2 \ (x<0) \\ P(x) \ (0 \leq x \leq 1) \\ 1 \ (x>1) \end{cases}$$

onde $P(x)$ é um polinómio do 3.º grau. Escolha $P(x)$ por forma que $f(x)$ e $f'(x)$ sejam contínuas para todo o x real.

R: *Tomando* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *a continuidade de* $f(x)$ *em* $x=0$ *e* $x=1$ *obriga a tomar* $d=0$ *e* $a+b+c=1$. *Como*

$$f'(x) = \begin{cases} 1/2 \ (x<0) \\ 3ax^2 + 2bx + c \ (0 \leq x \leq 1) \\ 0 \ (x>1) \end{cases}$$

a continuidade de $f'(x)$ *traduz-se nas relações* $c=1/2$ *e* $3a+2b+1/2=0$.

Tem-se então $a=-3/2$, $b=2$, $c=1/2$ *e* $d=0$.

3) Calcule:

a) $\displaystyle \lim_{x=0} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\log(1+x)}{x^2}\right]$

b) $\displaystyle P \frac{\log^3 x}{x(1+\log^2 x)}$.

R: a) *Com* $\lim_{x=0} \lambda = 1/2$, *tem-se*

$$\lim_{x=0}\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\log(1+x)}{x^2}\right] =$$
$$= \lim_{x=0}\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{x-\lambda x^2}{x^2}\right] =$$
$$= \lim_{x=0}\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x} + \lambda\right] =$$
$$= \lim_{x=0}\left[-\frac{x}{x+1} + \lambda\right] = -1/2.$$

b) *Fazendo* $\log x = t$, *vem*

$$P\frac{\log^3 x}{x(1+\log^2 x)} = P\frac{t^3}{1+t^2} = P\left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) =$$
$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + C =$$
$$= \frac{\log^2 x}{2} - \frac{1}{2}\log(1+\log^2 x) + C.$$

4) Considere

$$F(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \dfrac{\pi(x+y)}{2(x-y)} & (x \neq y) \\ 0 & (x=y) \end{cases}$$

Calcule $F''_{xy}(0,0)$ e $F''_{yx}(0,0)$.

R: $$F'_x(0,0)=\lim_{x=0}\frac{F(x,0)-F(0,0)}{x}=0,$$

$$F'_x(0,y)=\lim_{x=0}\frac{F(x,y)-F(0,y)}{x}=$$

$$=y\,sen\,\frac{\pi y}{-2y}\quad F'_y(0,0)=\lim_{y=0}\frac{F(0,y)-F(0,0)}{y}=0,$$

$$F'_y(x,0)=\lim_{y=0}\frac{F(x,y)-F(x,0)}{y}=x\,sen\,\frac{\pi x}{2x}$$

$$F''_{xy}(0,0)=\lim_{y=0}\frac{F'_x(0,y)-F'_x(0,0)}{y}=$$

$$=\lim_{y=0} sen\,\frac{\pi y}{-2y}=sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

$$F''_{yx}(0,0)=\lim_{x=0}\frac{F'_y(x,0)-F'_y(0,0)}{x}=$$

$$=\lim_{x=0} sen\,\frac{\pi x}{2x}=sen\,\frac{\pi}{2}=1.$$

5) Seja $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$. Qual é o valor de

$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\end{vmatrix}$? Justifique.

R.: $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\Delta.$$

6) Ache um sistema fundamental de soluções para o sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0\\ 3x_1+2x_2+\ \ x_3+\ \ x_4-3x_5=0\\ \qquad\ \ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-\ \ x_5=0.\end{cases}$$

R.: *Condensando a matriz dos coeficientes integrada na matriz completa, tem-se*

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 0\end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 0\end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

A característica da matriz dos coeficientes é 2 *e o grau de indeterminação do sistema é* 3. *Tomando as incógnitas não-principais* x_3, x_4 *e* x_5 *é fácil construir um sistema fundamental de soluções.*

Fazendo $x_3=1$, $x_4=0$ *e* $x_5=0$ *obtém-se* $x_1=1$ *e* $x_2=-2$; *para* $x_3=0$, $x_4=1$ *e* $x_5=0$ *vem* $x_1=1$ *e* $x_2=-2$; *finalmente, com* $x_3=0$, $x_4=0$ *e* $x_5=1$ *resulta* $x_1=5$ *e* $x_2=-6$.

O sistema fundamental de soluções é pois

$$X_1=[1\ \ -2\ \ 1\ \ 0\ \ 0],\quad X_2=[1\ \ -2\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$$

e

$$X_3=[5\ \ -6\ \ 0\ \ 0\ \ 1].$$

Qualquer solução do sistema se pode escrever na forma $X=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3$ *e portanto a solução geral do sistema pode apresentar-se na forma*

$$\begin{cases} x_1=\ \ \alpha_1+\ \ \alpha_2+5\alpha_3\\ x_2=-2\alpha_1-2\alpha_2-6\alpha_3\\ x_3=\ \ \alpha_1\\ x_4=\ \ \alpha_2\\ x_5=\ \ \alpha_3.\end{cases}$$

Enunciados e soluções dos N.[os] 5671 a 5686 de Fernando de Jesus

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares á Redacção

168 — M. Bouix et A. Checroun — **P. de M. et P. C. de la Revue Universitaire de Mathématiques** — Dunod-Editeur, Rue Bonapart — Paris VI.

A organização dos estudos e dos programas de matemática nas Faculdades de ciências foram profundamente modificados e os livros relativos aos cursos e trabalhos práticos já não estão adaptados a este novo ensino. É por isso que a Faculdade de Rouen fez um esforço importante para reunir, desde 1967, exercícios com soluções correspondendo ao programa, dados em diversas Faculdades de França e fundou, para os apresentar aos estudantes, a Revue Universitaire de Mathématiques.

Estas duas colecções de problemas, para os primeiros ciclos M. P. et P. C. que acabámos de receber das Editions Dunod, grupam exercícios dados em várias Faculdades francesas durante um ano, reunindo dessa maneira a matéria dum ano escolar. Os textos que apresentam são na verdade prospostos aos estudantes e as resoluções foram feitas pelos assistentes e professores assistentes que os apresentaram, o que representa para o estudante a garantia de fazer correctamente os exercícios correspondentes ao exame que prepara.

Estes exercícios com soluções deveriam ser úteis aos estudantes do primeiro ciclo das Faculdades de ciências que se preparam ao diploma universitário de estudos universitários, e aos alunos das classes preparatórias às grandes escolas, e a todos os que depois do «baccalauréat», desejam continuar os estudos de matemáticas.

J. M. M. T.

169 — Vitorino Magalhães Godinho — **Ensaios** — Vol. 1 — *Sobre história Universal* (publicado); Vol. 2 — *Sobre história de Portugal* (publicado); Vol. 3 — *Teoria da história e historiografia* (não publicado); Vol. 4 — *Humanismo científico e reflexão filosófica* (não publicado) — Livraria Sá da Costa — Editora — Lisboa.

Tem enfermado a nossa História de falta de perspectiva universal, quando menos peninsular. Mesmo no caso dos melhores, e apesar da tentativa de Oliveira Martins. Não foi despropositadamente que abrimos a nossa colectânea com certos tentames de abordar problemas historiográficos gerais, em relação a muitos dos quais a história portuguesa pode contribuir com esclarecedoras achegas. Ao abordarmos as nossas cousas, por seu turno, como no presente volume acontece, gostaríamos de nunca perder de vista que a vida da nossa gente não transcorreu desligada dos grandes fluxos e refluxos do mundo, e que se essa história testemunha quanta vez linhas de evolução à escala do globo, também só inserta em tais linhas se nos desvenda em suas mais recônditas pulsações. Viramo-nos, agora, predominantemente para questões portuguesas. É que persistimos em pensar que a nós, portugueses, compete mais do que a quaisquer outros examinar detidamente tudo quanto nos respeita, com busca de explicações racionalmente válidas — aceitáveis por nós e pelos outros — e não para nos vangloriarmos em papéis de personagens de primeira plana.

(Do prefácio do 2.º volume)

L I T E R A T U R A   M A T E M Á T I C A   R E C E N T E

Editor — **MASSON ET C.ie, Paris**

J. Bass — *Cours de Mathématiques — Troisième Édition Revue et Corrigée.*
— *Exercices de Mathématiques.*
M. Bouix — *Les Fonctions Géneralisées ou Distributions.*
M. A. Tonnelet — *Les Vérifications Experimentales de la Relativite Générale*
A. Hocquenghem & P. Jaffard — *Mathématiques. Tome I. Éléments de calcul différential et intégral*

Editor — **LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD — Paris**

Marcel Doligez — *Gravitation — Contribution à la théorie corpuscular de la gravitation.*
H. Laurent — *Théorie des Jeux de Hasard.*

Editor — **AKADÉMIAI KIADÓ — BUDAPEST**

Deuxième Congrès Mathématique Hongrois.
Medgyessy — *Decomposition of Superpositions of Distribution Functions.*

Editor — **IZDATELHSTVO AKADEMII NAUK SSSR — MOSKVA**

Lawrentjew, Juschkewitsch, Grigorjan — *Leonhard Euler.*

Editor — **AKADEMIE-VERLAG, Berlin**

A. I. Lurje — *Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie.*

Editor — **DUNOD, Paris**

Monographies Universitaires de Mathematiques

17. R. Pallu de la Barrière — *Cours d'automatique théorique.*
18. F. R. Gantmacher — *Théorie de matrices* — Tome 1 — *Théorie générale.*
19. F. R. Gantmacher — *Théorie des matrices* — Tome 2 — *Questions spéciales et applications.*
20. R. Campbell — *Les integrales euleriennes et leurs applications.*
21. A. Rényi — *Calcul des probabilités.*
22. A. G. Kurosch — *Algèbre générale.*
23. I. M. Guelfand et N. Y. Vilenkin — *Les distributions.* Tome 4: *Applications de l'analyse harmonique.*
24. C. Fourgeaud et A. Fuchs — *Statistique.*
25. J. Garsoux — *Analyse mathématique*
26. A. Guichardet — *Analyse harmonique commutative.*
27. G. Hochschild — *La structure des groupes de Lie.*
28. Mme Y. Choquet-Bruhat — *Geometrie différentielle et systèmes extérieures.*
29. Pham Mau Quan — *Introduction à la géometrie des variétés différentiables,*
30. R. Isaacs — *Jeux differentiels. Théorie des jeux appliqués aux domaines de la guerre, des poursuites, du contrôle et de l'optimisation.*
31. O. A. Ladyzenskaja et N. N. Oral'ceva — *Equations aux derivées partielles de type elliptique.*
32. J. Lévy-Bruhl — *Introduction aux structures algébriques.*