GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXIX **N.° 109-112** JANEIRO-DEZ. 1968

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo *prévio* entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2

ANO XXIX — N.os 109-112 **GAZETA DE MATEMÁTICA** JANEIRO/DEZ. — 1968

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA

On the condition $(xy)^2 = x^2 y^2$ in nonassociative rings

by **José Morgado**

Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. It is well known that a group G satisfying the condition

(1) $(xy)^2 = x^2 y^2$ for all x, y in G

is necessarily commutative.

It is also well known that if G is a group such that

(2) $(xy)^i = x^i y^i$ for three consecutive integers i and for all x, y in G,

then G is necessarily commutative ([1], p. 31, exercise 4).

However, the ring-theoretic analogues of these group-theoretic results do not hold.

Thus, McCoy ([2], p. 15, example 6 and p. 31, exercise 7) gives an example of a noncommutative ring satisfying the condition (1) and E. C. Johnsen, D. L. Outcalt and A. Yaqub [3] give an example of a noncommutative ring satisfying the condition (2).

In [3], the authors prove that *if* R *is any nonassociative* (i. e., not necessarily associative) *ring with identity satisfying the condition (1), then* R *is commutative.*

The purpose of this note is to generalize this result.

2. Let us recall that an element a of a multiplicative groupoid G is said to be an *associative element*, if one has

$$ax \cdot y = a \cdot xy, \quad xa \cdot y = x \cdot ay$$

and

$$xy \cdot a = x \cdot ya$$

for all x, y in G. The element a is said to be *cancellable*, if for all x, y in G each of the equations $ax = ay$ and $xa = ya$ implies $x = y$.

We are going to state the following

Theorem: *Let* R *be any nonassociative ring satisfying the condition*

$$(\mathrm{x\,y})^2 = \mathrm{x}^2\,\mathrm{y}^2 \textit{ for all } \mathrm{x}, \mathrm{y} \textit{ in } \mathrm{R}.$$

If for every $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ *there is in* R *some element* e *which is associative and cancellable in the multiplicative subgroupoid of* R *generated by the set* $\{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{e}\}$, *then* R *is commutative.*

Proof: Indeed, one has obviously

$$(x(y+z))^2 = (xy + xz)^2 = xy \cdot xy + \\ + xy \cdot xz + xz \cdot xy + xz \cdot xz$$

for all x, y, z in R.

On the other hand, by taking into account the hypothesis of the theorem, one sees that

$$(x(y+z))^2 = x^2(y+z)^2 = \\ = x^2(y^2+yz+zy+z^2) = \\ = x^2y^2 + x^2\cdot yz + x^2\cdot zy + x^2z^2.$$

Consequently, one has

$$(3)\quad x^2\cdot yz + x^2\cdot zy = xy\cdot xz + xz\cdot xy$$

for all x, y, z in R.

If one starts with $((x+z)y)^2$, one obtains, by a similar way,

$$(4)\quad xy\cdot zy + zy\cdot xy = xz\cdot y^2 + zx\cdot y^2$$

for all x, y, z in R.

By changing x to $x+z$ in (3), one gets

$$x^2\cdot yz + xz\cdot yz + zx\cdot yz + z^2\cdot yz + \\ + x^2\cdot zy + zx\cdot zy = xy\cdot xz + xy\cdot z^2 + \\ + zy\cdot xz + zy\cdot z^2 + xz\cdot xy + z^2\cdot xy$$

and, hence, it results by (3),

$$(5)\quad xz\cdot yz + zx\cdot yz + z^2\cdot yz + zx\cdot zy = \\ = xy\cdot z^2 + zy\cdot xz + zy\cdot z^2 + z^2\cdot xy$$

for all x, y, z in R.

Now, we are going to show that the element e satisfying the conditions required in the theorem, commutes with x and y.

In fact, by putting $x = z = e$ in (3), it results

$$e^2\cdot ye + e^2\cdot ey = ey\cdot e^2 + e^2\cdot ey$$

and so

$$(6)\qquad e^2\cdot ye = ey\cdot e^2.$$

Since e is associative in the multiplicative subgroupoid generated by $\{x, y, e\}$, the equality (6) implies

$$e^2y\cdot e = (ey\cdot e)e$$

and, since e is cancellable in that groupoid, it follows

$$e^2y = ey\cdot e.$$

By repeating the argument, one obtains

$$ey = ye,$$

as wanted.

Analogously, by putting $y = z = e$ in (4), one gets $ex = xe$.

If in (5) one puts $z = e$, it results by (6),

$$(7)\qquad xe\cdot ye + ex\cdot ye + ex\cdot ey = \\ = xy\cdot e^2 + ey\cdot xe + e^2\cdot xy.$$

Or, one has

$$xe\cdot ye = (xe\cdot y)e = (x\cdot ey)e = (x\cdot ye)e = \\ = (xy\cdot e)e = xy\cdot e^2,$$

by the associativity of e and commutativity of e with y.

Similarly, one sees that

$$ex\cdot ey = e^2\cdot xy$$

and, consequently, from (7) it follows

$$ex\cdot ye = ey\cdot xe$$

and, hence,

$$(ex\cdot y)e = (ey\cdot x)e.$$

Since e is cancellable, one concludes

$$ex\cdot y = ey\cdot x,$$

hence,

$$e\cdot xy = e\cdot yx,$$

that is to say,

$$xy = yx,$$

as it was to be proved.

BIBLIOGRAPHY

[1] I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, Blaisdell, New York, 1964.

[2] Neal H. McCoy, *Introduction to Modern Algebra*, Allyn and Bacon, Boston, 1960.

[3] E. C. Johnsen, D. L. Outcalt and Adil Yaqub, *An elementary commutativity theorem for rings*, Amer. Math. Monthly, 75 (1968), pp. 288-289.

Um teorema sobre a Teoria da Medida

por O. T. Alas

Seja X um espaço topológico de HAUSDORFF e indiquemos por $A(X)$ o anel gerado pela topologia sobre X.

DEFINIÇÃO. Uma medida positiva μ sobre $A(X)$ satisfaz a condição (H) se:

1) $\mu(\{x\}) = 0$, $\forall x \in X$;
2) $\mu(Z) > 0$, para todo aberto Z, não vazio;
3) $\mu(Y) = \inf\{\mu(Z) \mid Y \subset Z$ e Z é aberto$\} = \sup\{\mu(K) \mid K \subset Y$ e K é compacto$\}$, para todo $Y \in A(X)$.

O objectivo desta nota é estudar em que condições existe uma medida μ sobre $A(X)$, verificando a condição (H), no caso em que X é um grupo topológico localmente compacto.

TEOREMA. *Seja* X *um espaço topológico regular. Se existe uma medida positiva sobre* A(X), *satisfazendo a condição* (H), *então todo o recobrimento aberto de* X, *localmente finito, admite um sub-recobrimento enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, por absurdo, que existe $(Z_i)_{i \in I}$, recobrimento aberto de X, localmente finito, que não admite sub-recobrimento enumerável. Usando o teorema de ZORN, é fácil mostrar que existe uma família de abertos, $(V_j)_{j \in J}$, tal que

1) $J \subset I$ e $\phi \neq \overline{V}_j \subset Z_j$, $\forall j \in J$;
2) $\overline{V}_j \cap \overline{V}_k = \phi$, $\forall j, k \in J$, $j \neq k$;
3) o cardinal de J é maior ou igual a $\aleph_1$.

Fixemos um elemento $(x_j)_{j \in J}$ pertencente a $\prod_{j \in J} V_j$ e consideremos o conjunto $F = \{x_j \mid j \in J\}$. F é um subconjunto fechado de X; além disso, se $K \subset F$ e K é compacto, então K é finito.

Seja μ uma medida positiva sobre $A(X)$, verificando a condição (H). Temos que $\mu(F) = 0$. Por outro lado, se $F \subset Z$ e Z é aberto, então $\mu(Z) = \infty$, pois existe um número natural $m \geq I$, tal que o conjunto $\{j \in J \mid \mu(Z \cap V_j) \geq 1/m\}$ não é enumerável. Mas, então verifica-se $0 = \mu(F) = \infty$, o que é absurdo. Fica assim demonstrado o teorema.

COROLÁRIO. *Seja* G *um grupo topológico localmente compacto, separado e não discreto. Então, existe uma medida positiva sobre* A(G), *verificando a condição* (H), *se e sòmente se* G *é σ-compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Se G é um grupo topológico localmente compacto, existe uma classe, D, de subespaços abertos, σ-compactos, dois a dois disjuntos, tal que $G = \bigcup_{Y \in D} Y$. ([2])

Ora, se existe uma medida positiva sobre $A(G)$, verificando a condição (H), pelo teorema anterior devemos ter que D é enumerável, donde G é σ-compacto.

Suponhamos, agora, que G é σ-compacto. Indiquemos por B o σ-anel sobre G gerado pela classe dos subconjuntos compactos de G. ANDRÉ WEIL [1] mostrou que existe sobre B uma medida (a medida de HAAR), tal que a sua restrição ao conjunto $A(G)$ verifica a condição (H). (Note-se que todo subconjunto fechado de G é reunião enumerável de subconjuntos compactos de G).

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDRÉ WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Hermann-Paris, 1938.
[2] J. L. KELLEY, *Topologia general.* EUDEBA, 1962.
[3] P. R. HALMOS, *Measure theory.* Van Nostrand, 1964.

Une remarque sur un théorème de la théorie des semi-groupes fortement continus d'opérateurs sur un espace de Banach

par J. P. Carvalho Dias (*)

Soit X un espace de Banach de norme $\| \cdot \|$, $L(X)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans X et $\overline{R}_+ = \{t \in R \mid t \geq 0\}$. Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur X est une famille $\{S(t)\}_{t \in \overline{R}_+}$, $S(t) \in L(X)$, telle que :

(1) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \cdot S(t_2)$, $\forall\, t_1, t_2 \in \overline{R}_+$.

(2) $S(0) = I$, application identité de X.

(3) $\lim\limits_{t \to 0^+} S(t)x = x$, $\forall\, x \in X$.

Les semi-groupes ainsi définis sont particulièrement utilisés dans la théorie des équations d'évolution linéaires de la physique (cf., par exemple, [3]).

Le but de cette note est de démontrer directement le théorème suivant qui se présente habituellement de démonstration assez compliquée :

Théorème. *Soit* $\{S(t)\}_{t \in \overline{R}_+}$ *un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur* X. *Alors il existe des constantes* $M \geq 0$ *et* $\delta > 0$ *telles que*

(4) $\|S(t)\| \leq M$, $\forall\, t \in [0, \delta]$, *où*

$$\|S(t)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|S(t)x\|.$$

Ce théorème étant établi il en découle le :

Corollaire. *Il existe une constante* $w \geq 0$ *telle que*

(5) $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $\forall\, t \in \overline{R}_+$.

De plus, pour tout $x \in X$ *la fonction* $S(t)x$ *est continue de* $\overline{R}_+$ *dans* X.

Démonstration du corollaire :

Soit $t \in \overline{R}_+$. Il existe un entier $n \geq 0$ et un τ tel que $0 \leq \tau < \delta$ tels que $t = n\delta + \tau$ ce qui entraîne, par (1) et (4), $\|S(t)\| \leq \|S(\delta)\|^n \|S(\tau)\| \leq M^{n+1}$. Donc,

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt} \text{ avec } w = \log M/\delta \text{ si } M \geq 1$$
$$\text{et } w = 0 \text{ si } M < 1.$$

Soit maintenant $x \in X$. Il vient, si $t_2 \geq t_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\|S(t_2)x - S(t_1)x\| \leq \\ &\leq \|S(t_1)\| \, \|S(t_2 - t_1)x - x\| \leq \\ &\leq Me^{wt_1} \|S(t_2 - t_1)x - x\| \to 0 \end{aligned}$$

quand $t_2 \to t_1$ ou $t_1 \to t_2$, d'où la continuité de $S(t)x$ en tout $t \in \overline{R}_+$.

Pour démontrer le théorème nous utilisons le lemme suivant qui est un cas particulier d'un théorème de G. Marinescu (cf. [2], ch. III, § 5, n.º 1) :

(*) Boursier de la Fondation Calouste Gulbenkian.

LEMME. *Soit* B *un espace de* BAIRE [1] *et* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions continues de* B *dans* $\overline{R}_+$ *telles que*

(6) $$\forall x \in B, \exists \lim_{n \to +\infty} f_n(x) < +\infty .$$

Alors il existe un ouvert non vide A *de* B, *une constante* $M \geq 0$ *et un indice* p *tels que*

(7) $$\sup_{x \in A} f_n(x) \leq M, \ \forall n \geq p .$$

Démonstration du lemme :

Pour $m, n = 1, 2, \cdots, k = 0, 1, \cdots$, soient $A_{mk} = f_m^{-1}([0, k])$, $A_{nk} = \bigcap_{m \geq n} A_{mk}$. La continuité des f_n entraîne que A_{nk} est fermé dans B et, de plus, (6) implique que $B = \bigcup_{n,k} A_{nk}$. Puisque B est un espace de BAIRE il existe alors un $A_{n_0 k_0}$ dont l'intérieur A est non vide. Le lemme suit avec $M = k_0, p = n_0$.

Ceci étant nous allons démontrer la proposition suivante dont le théorème est un cas particulier :

PROPOSITION. *Soit* X *un espace de* BANACH *de norme* $\|\cdot\|$, $\{S(t)\}_{t \in \overline{R}_+}$ *une famille d'éléments de* L(X) *telle que*

(8) $$\forall x \in X, \exists \lim_{t \to 0} {}_+ S(t) x .$$

Alors il existe des constantes $M \geq 0$ et $\delta > 0$ *telles que*

(9) $$\| S(t) \| \leq M, \ \forall t \in [0, \delta] .$$

Démonstration de la proposition :

Soit $t_n \geq 0$ une suite de limite 0 quand $n \to +\infty$. Posons

$$f_n(x) = \| S(t_n) x \|, n = 1, 2, \cdots .$$

Puisque X est un espace de BAIRE (cf., par exemple, [1], ch. IV, § 4, n.º 3) et on a (8) on peut appliquer le lemme antérieur. Donc, il existe un ouvert non vide A de X, une constante $M_1 \geq 0$ et un indice p tels que

(10) $$\sup_{x \in A} \| S(t_n) x \| \leq M_1, \ \forall n \geq p .$$

Soit $x_0 \in A$ et considérons l'ouvert $V = x_0 - A$ qui contient 0. (10) entraîne

(11) $$\sup_{x \in V} \| S(t_n) x \| \leq 2 M_1, \ \forall n \geq p .$$

Soit maintenant $B(0, \rho)$ une boule fermée de centre dans l'origine et rayon $\rho > 0$ contenue dans V. Si $\| x \| \leq 1$ on a $\rho x \in B(0, \rho)$ d'où, par (11), on obtient

(12) $$\| S(t_n) \| \leq 2 M_1 / \rho, \ \forall n \geq p .$$

Considérons maintenant les intervalles $[0, 1/n], n = 1, 2, \cdots$, et supposons, pour tout n, $S(t)$ non borné dans $[0, 1/n]$. Ceci entraîne l'existence d'une suite $\{t'_n\}$ convergeant vers 0 et telle que $\lim_{n \to +\infty} \| S(t'_n) \| = +\infty$. Or cela est absurde par la première partie de la démonstration.

REFERENCES

[1] J. GARSOUX, *Espaces vectoriels topologiques et distributions.* (Dunod, Paris, 1963).

[2] G. MARINESCU, *Espaces vectoriels pseudo-topologiques et théorie des distributions.* (Berlin, 1963).

[3] K. YOSIDA, *Functional analysis.* (Springer, 1965).

[1] Un espace de BAIRE est un espace topologique où toute réunion dénombrable d'ensembles fermés d'intérieur vide est aussi d'intérieur vide.

A note on the normal endomorphisms of a group

by José Morgado
Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. It is well known that in an abelian group, for every integer n, the mapping $\bar{n}: x \longmapsto x^n$ is an endomorphism.

In [1], E. Schenkman and L. I. Wade have considered the converse question whether a group is abelian when $\bar{n}$ is an endomorphism. One knows that, if there are three consecutive integers i for which the mappings $x \longmapsto x^i$ are endomorphisms, then the group is abelian. However, from the fact that the mappings $x \longmapsto x^i$ and $x \longmapsto x^{i+1}$ are endomorphisms for some integer i, one cannot conclude that the group be abelian ([2], Exercises 4 and 5, p. 31).

Let G be a group and let $G\{n\}$ be the subgroup of G generated by all elements whose orders divide n. In [1], it is stated that

1) *if* $\bar{n}$ *is an endomorphism, then* $G/G\{n^2-n\}$ *is abelian;*

2) *if* $\bar{n}$ *is an automorphism, then* $G/G\{n-1\}$ *is abelian;*

and, consequently,

3) *if* G *has no elements whose orders divide* n^2-n *or if* G *has no elements whose orders divide* $n-1$ *when* $\bar{n}$ *is an automorphism, then* G *is abelian.*

The purpose of this note is to improve the results obtained by Schenkman and Wade.

2. Let us recall that an endomorphism α of a group G is said to be a *normal endomorphism* of G, if α commutes with every inner automorphism of G, i. e., if one has

$$\alpha(x y x^{-1}) = x \alpha(y) x^{-1}$$

for all x, y in G.

Since $(x y x^{-1})^n = x y^n x^{-1}$ for all x, y in G, one sees that, if $\bar{n}$ is an endomorphism of G, then it is necessarily a normal endomorphism.

The identity operator of G will be denoted by ε and by $\varepsilon - \alpha$ one means, as it is natural, the operator of G defined by

$$(\varepsilon - \alpha)(x) = x \alpha(x^{-1}).$$

In general, the operator $\varepsilon - \alpha$ is not an endomorphism, as one concludes from the following

Theorem 1. *Let* α *be an endomorphism of the group* G. *Then* $\varepsilon - \alpha$ *is an endomorphism, if and only if* α *is normal. Moreover, if* α *is a normal endomorphism, then the endomorphism* $\varepsilon - \alpha$ *is normal.*

Proof. Indeed, one has

$$(\varepsilon - \alpha)(x y) = x y \alpha(y^{-1} x^{-1}) = x y \alpha(y^{-1}) \alpha(x^{-1})$$

for all x, y in G.

On the other hand,

$$(\varepsilon - \alpha)(x) \cdot (\varepsilon - \alpha)(y) = x \alpha(x^{-1}) \cdot y \alpha(y^{-1}).$$

Consequently, $\varepsilon - \alpha$ is an endomorphism, if and only if

$$y \alpha(y^{-1}) \alpha(x^{-1}) = \alpha(x^{-1}) y \alpha(y^{-1}),$$

that is to say, if and only if

$$\alpha(y^{-1})\,\alpha(x^{-1})\,\alpha(y) = y^{-1}\,\alpha(x^{-1})\,y\,,$$

for all x, y in G.

This means that $\varepsilon - \alpha$ is an endomorphism, if and only if one has

$$\alpha(y^{-1}\,x^{-1}\,y) = y^{-1}\,\alpha(x^{-1})y \text{ for all } x, y \text{ in } G,$$

which proves the first part of the theorem.

Moreover, one has clearly, for all x, y in G,

$$\begin{aligned} y\,(\varepsilon - \alpha)\,(x)\,y^{-1} &= y\,x\,\alpha\,(x^{-1})\,y^{-1} = \\ &= y\,x\,y^{-1}\,y\,\alpha\,(x^{-1})\,y^{-1} = \\ &= y\,x\,y^{-1}\,\alpha(y\,x^{-1}\,y^{-1}) = \\ &= (\varepsilon - \alpha)\,(y\,x\,y^{-1}), \end{aligned}$$

proving that $\varepsilon - \alpha$ is normal.

THEOREM 2. *If α is a normal endomorphism of the group* G, *then $\alpha - \alpha^2$ is a normal endomorphism of* G *and the quotient group* $G\,/\,Ker\,(\alpha - \alpha^2)$ *is abelian.*

PROOF. By theorem 1, the operator $\varepsilon - \alpha$ is a normal endomorphism.

It is immediate that, if α and β are normal endomorphisms, then the composite endomorphism $\alpha \circ \beta$ is also normal.

Since

$$\alpha - \alpha^2 = \alpha \circ (\varepsilon - \alpha),$$

one sees that $\alpha - \alpha^2$ is a normal endomorphism.

In order to show that the quotient group $G/\mathrm{Ker}(\alpha - \alpha^2)$ is an abelian group, it is sufficient to show that all commutators of G are in the kernel of the endomorphism $\alpha - \alpha^2$, that is to say, for all x, y in G,

$$(\alpha - \alpha^2)\,(x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}) = e\,,$$

where e denotes the neutral element of G.

Or, by the normality of α, one has obviously

$$\begin{aligned} \alpha\,(x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}) &= \alpha\,(x)\,\alpha\,(y)\,\alpha\,(x^{-1})\,\alpha\,(y^{-1}) = \\ &= \alpha\,(x)\,\alpha\,(\alpha\,(y)\,x^{-1}\,\alpha\,(y^{-1})) = \\ &= \alpha\,(x)\,\alpha^2\,(y)\,\alpha\,(x^{-1})\,\alpha^2\,(y^{-1}) = \\ &= \alpha\,(\alpha\,(x)\,\alpha\,(y)\,\alpha\,(x^{-1}))\,\alpha^2\,(y^{-1}) = \\ &= \alpha^2\,(x)\,\alpha^2\,(y)\,\alpha^2\,(x^{-1})\,\alpha^2\,(y^{-1}) = \\ &= \alpha^2\,(x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}). \end{aligned}$$

From this it follows

$$\alpha\,(x\,y\,x^{-1}\,y^{-1})\,\alpha^2\,((x\,y\,x^{-1}\,y^{-1})^{-1}) = e$$

and, consequently,

$$(\alpha - \alpha^2)\,(x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}) = e\,,$$

as it was to be proved.

COROLLARY 1. *If α is an injective normal endomorphism of the group* G, *then the quotient group* $G/\mathrm{Ker}\,(\varepsilon - \alpha)$ *is abelian.*

In fact, from

$$\alpha\,(x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}) = \alpha^2\,(x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}),$$

it results, since α is injective,

$$x\,y\,x^{-1}\,y^{-1} = \alpha\,(x\,y\,x^{-1}\,y^{-1})$$

and hence

$$(\varepsilon - \alpha)\,(x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}) = e$$

for all x, y in G, proving that $G/Ker\,(\varepsilon - \alpha)$ is abelian.

COROLLARY 2. *If the mapping $\bar{\mathrm{n}} : \mathrm{x} \longmapsto \mathrm{x}^{\mathrm{n}}$ is an endomorphism of the group* G, *then the quotient group* $G/G\,|\mathrm{n}^2 - \mathrm{n}|$ *is abelian. If, moreover, the endomorphism $\bar{\mathrm{n}}$ is injective, then* $G/G\,|\mathrm{n} - 1|$ *is abelian.*

In fact, $\bar{n}$ is normal and one has clearly

$$G\,|n^2 - n| = Ker\,(\bar{n} - \bar{n}^2)$$

and, if $\bar{n}$ is injective, then

$$G\,|n - 1| = Ker\,(\bar{1} - \bar{n}),$$

where $\bar{1}$ denotes the identity endomorphism.

3. Now, let us suppose that the endomorphism α is such that

$$x\,\alpha(x^{-1}) \in Z \text{ for every } x \in G,$$

where Z denotes the center of G.

It is easy to see that $\varepsilon - \alpha$ is normal.

Indeed, since $\alpha(x^{-1}) = x^{-1}z$ for some $z \in Z$, one has

$$\begin{aligned}\alpha(x\,y\,x^{-1}) &= \alpha(x)\,\alpha(y)\,\alpha(x^{-1}) = \\ &= z^{-1}\,x\,\alpha(y)\,x^{-1}\,z = x\,\alpha(y)\,x^{-1}\end{aligned}$$

for all x, y in G, proving that α is normal.

Then, by Theorem 1, one concludes that $\varepsilon - \alpha$ is a normal endomorphism of G.

We are going to see that the quotient group $G/Ker(\varepsilon - \alpha)$ is abelian.

In fact, since

$$\begin{aligned}(\varepsilon-\alpha)(x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}) &= x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}\,\alpha(y\,x\,y^{-1}\,x^{-1}) = \\ &= x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}\,\alpha(y)\,\alpha(x)\,\alpha(y^{-1})\,\alpha(x^{-1}) = \\ &= x\,y\,x^{-1}\,\alpha(x)\,y^{-1}\,\alpha(y)\,\alpha(y^{-1})\,\alpha(x^{-1}) = \\ &= x\,y\,x^{-1}\,\alpha(x)\,y^{-1}\,\alpha(x^{-1}) = \\ &= x\,y\,y^{-1}\,x^{-1}\,\alpha(x)\,\alpha(x^{-1}) = \\ &= e\end{aligned}$$

for all x, y in G, one sees that the kernel of $\varepsilon - \alpha$ contains the subgroup generated by the commutators and, therefore, the quotient group $G/Ker(\varepsilon - \alpha)$ is abelian.

Conversely, let us suppose that $\varepsilon - \alpha$ is a normal endomorphism and $G/Ker(\varepsilon - \alpha)$ is abelian.

Then, one has

$$x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}\,\alpha(y)\,\alpha(x)\,\alpha(y^{-1})\,\alpha(x^{-1}) = e$$

for all x, y in G.

From this it follows

$$\begin{aligned}x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}\,\alpha(y) &= \alpha(x)\,\alpha(y)\,\alpha(x^{-1}) = \\ &= \alpha(x\,y\,x^{-1}) = \\ &= x\,\alpha(y)\,x^{-1},\end{aligned}$$

in view of the fact that α is a normal endomorphism, by Theorem 1 and $\alpha = \varepsilon - (\varepsilon - \alpha)$.

Hence

$$y\,x^{-1}\,y^{-1}\,\alpha(y) = \alpha(y)\,x^{-1}.$$

Consequently,

$$x^{-1}\,y^{-1}\,\alpha(y) = y^{-1}\,\alpha(y)\,x^{-1}$$

for all x, y in G.

This means that $y^{-1}\alpha(y) \in Z$ for every $y \in G$.

In short, the following holds:

Theorem 3. *If α is an endomorphism of the group G such that $x\,\alpha(x^{-1})$ is in the center of G for every $x \in G$, then $\varepsilon - \alpha$ is a normal endomorphism and $G/\mathrm{Ker}(\varepsilon - \alpha)$ is abelian; conversely, if $\varepsilon - \alpha$ is a normal endomorphism and $G/\mathrm{Ker}(\varepsilon - \alpha)$ is abelian, then α is an endomorphism such that $x\,\alpha(x^{-1})$ is in the center of G for every $x \in G$.*

In particular, one has the following

Corollary. *If α is a central endomorphism of the group G, i. e., if $\alpha(x) \in Z$ for every $x \in G$, then the quotient group $G/\mathrm{Ker}(\alpha)$ is abelian.*

Indeed, it is immediate that α is a normal endomorphism and so $\varepsilon - \alpha$ is also a normal endomorphism.

One has, for every $x \in G$,

$$\alpha(x) = x\,x^{-1}\,\alpha(x) = x \cdot (\varepsilon - \alpha)(x^{-1}) \in Z$$

and the conclusion follows immediately from Theorem 3.

BIBLIOGRAPHY

[1] Eugene Schenkman and L. I. Wade, *The mapping which takes each element of a group onto its nth power*, Amer. Math. Monthly, **65** (1958), pp. 33-34.

[2] I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, Blaisdell Publishing Company, 1964.

[3] H. J. Zassenhaus, *The Theory of Groups*, second edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1958.

A theorem on abelian quotient groups of a group

by José Morgado
Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. In a previous paper [1], we have shown that, if α is a normal endomorphism of the group G, then the operator $\alpha - \alpha^2$ is also a normal endomorphism of G and the quotient group $G/\mathrm{Ker}(\alpha - \alpha^2)$ is an abelian group.

In this note, we extend this result; we state a necessary and sufficient condition in order that the quotient group $G/\mathrm{Ker}(\beta - \beta\alpha)$ be an abelian group, α and β being endomorphisms of G and $\beta\alpha$ being the composite of β and α.

2. It is well known that, if α and β are endomorphisms of the group G, then the operator $\beta - \alpha$ of G, defined by

$$(\beta - \alpha)(x) = \beta(x)\,\alpha(x^{-1}) \text{ for every } x \in G$$

need not be an endomorphism of G.

In fact, since

$$\begin{aligned}(\beta - \alpha)(xy) &= \beta(xy)\,\alpha(y^{-1}x^{-1}) = \\ &= \beta(x)\,\beta(y)\,\alpha(y^{-1})\,\alpha(x^{-1})\end{aligned}$$

and, on the other hand,

$$(\beta - \alpha)(x)\,(\beta - \alpha)(y) = \beta(x)\,\alpha(x^{-1})\,\beta(y)\,\alpha(y^{-1}),$$

one concludes that $\beta - \alpha$ is an endomorphism, if and only if one has

$$\beta(y)\,\alpha(y^{-1})\,\alpha(x^{-1}) = \alpha(x^{-1})\,\beta(y)\,\alpha(y^{-1})$$

for all x, y in G.

This means that the following holds:

Lemma. *If α and β are endomorphisms of the group G, then the operator $\beta - \alpha$ is an endomorphism of G, if and only if the image of $\beta - \alpha$ is in the centralizer of the image of α in G.*

Theorem. *Let α and β be endomorphisms of the group G. Then the operator $\beta - \beta\alpha$ is an endomorphism of G and the quotient group $G/Ker(\beta - \beta\alpha)$ is abelian, if and only if the image of $\beta - \beta\alpha$ is contained in the center of the image of β.*

Proof. Let $\beta - \beta\alpha$ be an endomorphism. Then, as it is well known, the quotient group $G/\mathrm{Ker}(\beta - \beta\alpha)$ is abelian, if and only if the kernel of the endomorphism $\beta - \beta\alpha$ contains the commutator subgroup of G, that is to say,

$$(1) \qquad (\beta - \beta\alpha)(xyx^{-1}y^{-1}) = e$$

for all x, y in G, e being the neutral element of G.

First, let us suppose that one has

$$(2) \qquad Im(\beta - \beta\alpha) \subseteq \textit{Center of } Im(\beta).$$

Since

$$\textit{Center of } Im(\beta) \subseteq \textit{Centralizer of } Im(\beta\alpha) \textit{ in } G,$$

one concludes by Lemma above that the operator $\beta - \beta\alpha$ is an endomorphism of G.

Furthermore, one has

$$\begin{aligned}&(\beta - \beta\alpha)(xyx^{-1}y^{-1}) = \\ &= \beta(xyx^{-1}y^{-1})\,\beta\alpha(xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = \\ &= \beta(x)\,\beta(y)\,\beta(x^{-1})\,\beta(y^{-1})\,\cdot \\ &\cdot\,\beta\alpha(y)\,\beta\alpha(x)\,\beta\alpha(y^{-1})\,\beta\alpha(x^{-1}) = \\ &= \beta(x)\,\beta(y)\,\beta(y^{-1})\,\beta\alpha(y)\,\beta(x^{-1})\,\cdot \\ &\cdot\,\beta\alpha(x)\,\beta\alpha(y^{-1})\,\beta\alpha(x^{-1}) = \\ &= \beta(x)\,\beta(x^{-1})\,\beta\alpha(x)\,\beta\alpha(y)\,\cdot \\ &\cdot\,\beta\alpha(y^{-1})\,\beta\alpha(x^{-1}) = e.\end{aligned}$$

proving (1).

Now, let us suppose that the operator $\beta - \beta\alpha$ is an endomorphism of the group G such that the quotient group $G/\mathrm{Ker}(\beta - \beta\alpha)$ is abelian.

From (1) it follows

$$(\beta - \beta\alpha)(xy)(\beta - \beta\alpha)(x^{-1}y^{-1}) = e,$$

hence

$$(\beta - \beta\alpha)(x)(\beta - \beta\alpha)(y) = (\beta - \beta\alpha)(yx),$$

that is to say,

$$\beta(x)\beta\alpha(x^{-1})\beta(y)\beta\alpha(y^{-1}) = \beta(yx)\beta\alpha((yx)^{-1}).$$

Consequently,

$$\beta(x)\beta\alpha(x^{-1})\beta(y)\beta\alpha(y^{-1}) = \\ = \beta(y)\beta(x)\beta\alpha(x^{-1})\beta\alpha(y^{-1})$$

and so

$$\beta(x)\beta\alpha(x^{-1})\beta(y) = \beta(y)\beta(x)\beta\alpha(x^{-1})$$

for all x, y in G.

Thus, for every $x \in G$, the element $\beta(x)\beta\alpha(x^{-1})$ commutes with every element of $\mathrm{Im}(\beta)$, that is to say,

$$\mathrm{Im}(\beta - \beta\alpha) \subseteq \textit{Center of } \mathrm{Im}(\beta),$$

as wanted.

3. In particular, let us set $\beta = \varepsilon$ (identity operator).

One has clearly $\mathrm{Im}(\varepsilon) = G$ and, since the condition

$$\mathrm{Im}(\varepsilon - \varepsilon\alpha) \subseteq \textit{Center of } G$$

means that

$$x\alpha(x^{-1}) \in \textit{Center of } G$$

for every $x \in G$, one obtains

Corollary 1. *If α is an endomorphism of G, then the quotient group $G/Ker(\varepsilon - \alpha)$ is abelian, if and only if, for every $x \in G$, $x\alpha(x^{-1})$ is in the center of G.*

This Corollary is the Theorem 3 in [1].

Now, let us set $\beta = \alpha$.

Then, if the endomorphism α is normal, i. e., if

$$(3)\quad \alpha(uvu^{-1}) = u\alpha(v)u^{-1} \text{ for all } u, v \text{ in } G,$$

one sees that the condition (2) holds.

Indeed, from (3) it follows, by setting $u = \alpha(x^{-1})$ and $v = y$,

$$\alpha^2(x^{-1})\alpha(y)\alpha^2(x) = \alpha(x^{-1})\alpha(y)\alpha(x)$$

that is to say,

$$\alpha(x)\alpha^2(x^{-1})\alpha(y) = \alpha(y)\alpha(x)\alpha^2(x^{-1})$$

for all x, y in G.

This means that

$$(\alpha - \alpha^2)(x)\alpha(y) = \alpha(y)(\alpha - \alpha^2)(x) \\ \text{for all } x, y \text{ in } G$$

and so the condition (2) holds.

By Theorem above, the group $G/\mathrm{Ker}(\alpha - \alpha^2)$ is abelian and one obtains the following result, stated in [1] as Theorem 2:

Corollary 2. *If α is a normal endomorphism of G, then $\alpha - \alpha^2$ is also an endomorphism and $G/Ker(\alpha - \alpha^2)$ is abelian.*

BIBLIOGRAPHY

[1] José Morgado, *A note on the normal endomorphisms of a group*, «Gazeta de Matemática», n.º 109-112, 1968, pag. 6-8.

[2] H. J. Zassenhaus, *The Theory of Groups*, second edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1958.

Alguns aspectos do problema dos erros em Análise Numérica

por **Fernanda Aleixo de Oliveira**
Coimbra

1 — É nossa intenção focar algumas das possibilidades que a Análise intervalar [1] fornece para controlar o problema dos erros em Análise Numérica.

Depois de ter sido elaborado um determinado processo numérico para resolver um certo tipo de problemas, poderemos encará-lo só como um modelo, pois a realidade dos cálculos afasta-se sempre do resultado exacto. Não só tomamos dados inexactos como ao longo dos cálculos o número de inexactidões vai aumentando. É realmente um facto que o rigor matemático é bastante enfraquecido quando o problema se reduz a um problema aritmético.

O uso de computadores torna o problema mais agudo, pois o estudo de propagação dos erros em processos numéricos de milhões de cálculos torna-se extremamente complicado.

A Análise Intervalar consegue resolver ao mesmo tempo e automàticamente, fazendo uso de subrotinas adequadas, os vários problemas de erros: de truncatura, de arredondamentos, de inexactidão dos dados iniciais de um problema e propagação dos vários erros ao longo do processo numérico.

Baseia-se essencialmente no conceito de Intervalo e numa Álgebra adequada.

A importância do conceito de Intervalo é imediata — ao calcular, por exemplo $\sqrt{2}$, por meio de um algoritmo qualquer que nos forneça a sucessão de números: 1, 1.4, 1.41, etc, e que nos permita concluir que cada elemento desta sucessão nos informa que o elemento seguinte será obtido acrescentando ao anterior mais um algarismo à sua direita, algarismo esse que vai estar entre 0 e 9, teremos: o elemento 1 diz-nos que $\sqrt{2}$ estará no intervalo $[1,2]$, o elemento 1.4 leva-nos a considerar o intervalo $[1.4, 1.5]$, o elemento 1.41 conduz-nos ao intervalo $[1.41, 1.42]$, etc.

Cada intervalo considerado contém a solução exacta do nosso problema.

Ao descrever matemàticamente um problema físico, por exemplo o movimento de um corpo, seríamos mais exactos se, em vez de apresentar o problema nos termos usuais «o corpo A está no ponto X quando o tempo é T», o exprimíssemos fazendo uso de intervalos: «o corpo A está no intervalo $[x_1, x_2]$ quando o tempo está em $[t_1, t_2]$.

A truncatura de processos infinitos pode ser controlada por meio de Análise Intervalar com relativa facilidade, em muitos casos.

Faremos só uma breve introdução à Álgebra com Intervalos e apresentaremos uma aplicação da Análise Intervalar às equações diferenciais.

2 — Consideremos $\mathfrak{R}$ o corpo dos números reais munido da usual relação de ordem $<$.

(1) Tradução da expressão inglesa «Interval Analysis».

Definição 1. Designaremos por intervalo $.X. = [x_1, x_2]$ o conjunto

$$\{x : x_1 \leqslant x \leqslant x_2 ,\quad x, x_1, x_2 \in \mathfrak{R}\} .$$

Usaremos a notação $.X$ para designar x_1 (extremo inferior do intervalo) e $X.$ para designar x_2 (extremo superior do intervalo).

No caso de $x_1 = x_2$ chamaremos a $.X.$ intervalo degenerado. Representaremos por $\mathfrak{I}(\mathfrak{R})$ o conjunto formado por todos os $.X.$ definidos anteriormente e identificaremos cada real x com o intervalo degenerado $[x, x]$.

Com a notação $.X. \subset .Y.$ significaremos que para $.X. = [x_1, x_2]$ e $.Y. = [y_1, y_2]$ se tem

$$x_1 \geqslant y_1 \quad \text{e} \quad x_2 \leqslant y_2 .$$

Teorema 1: *O conjunto* $\mathfrak{I}(\mathfrak{R})$ *formado por elementos* $.X.$ *é um conjunto parcialmente ordenado pela relação* $\subset$:

a) $.X. \subset .X.$

b) $.X. \subset .Y.$ *e* $.Y. \subset .Z. \Rightarrow .X. \subset .Z.$

c) $.X. \subset .Y.$ *e* $.Y. \subset .X. \Rightarrow .X. = .Y.$ $(x_1 = y_1$ *e* $x_2 = y_2)$.

A alínea *b*) tem importância fundamental no Cálculo Numérico.

Definamos em $\mathfrak{I}(\mathfrak{R})$ as operações aritméticas $+$, $-$, $\times$, $/$, usando o símbolo $*$ para indicar qualquer delas:

$$(1)\qquad \begin{array}{l} .X. * .Y. = .Z. \\ \text{com} \\ .Z. := \{x * y : x \in .X. \wedge y \in .Y.\} \end{array}$$

com a condição de $0 \notin .Y.$ para a divisão.

De (1) fàcilmente se conclui que se $.X. \subset .T.$ e $.Y. \subset .R.$ então

$$(2)\qquad \begin{array}{l} .X. + .Y. \subset .T. + .R. \\ .X. - .Y. \subset .T. - .R. \\ .X. \times .Y. \subset .T. \times .R. \\ .X. \,/\, .Y. \subset .T. \,/\, .R. \qquad (0 \notin .R.) . \end{array}$$

Diremos que as operações aritméticas com intervalos gozam de *inclusão monotónica* por obedecerem às relações (2).

Um equivalente conjunto de definições de carácter algébrico, mas referidas aos extremos inferior e superior dos intervalos será:

1) $[x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$

2) $[x_1, x_2] - [y_1, y_2] = [x_1 - y_2, x_2 - y_1]$

3) $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] = [z_1, z_2]$ com $z_1 = \min(x_1 \times y_1, x_1 \times y_2, x_2 \times y_1, x_2 \times y_2)$ e $z_2 = \max(x_1 \times y_1, x_1 \times y_2, x_2 \times y_1, x_2 \times y_2)$

4) $[x_1, x_2] / [y_1, y_2] = [x_1, x_2] \times [1/y_2, 1/y_1]$ supondo-se $0 \notin [y_1, y_2]$.

Teorema 2. *Se* $F(x_1, x_2, \cdots x_n)$ *designar uma função racional nos* x_i *segue-se:*

Dado $.X_1., \cdots, .X_n.$, *se* $F(.X_1., \cdots, .X_n.)$ *tem sentido e*

$$.X'_1. \subset .X_1. ,\ .X'_2. \subset .X_2. ,\ \cdots ,\ .X'_n. \subset .X_n.$$

então

$$(3)\qquad \begin{array}{l} F(.X'_1., .X'_2., \cdots, .X'_n.) \subset \\ \subset F(.X_1., .X_2., \cdots .X_n.) . \end{array}$$

De (1) e das relações (2) se conclui (3).

Se em (3), $.X'_1., .X'_2., \cdots, .X'_n.$ designarem intervalos degenerados, isto é, números reais, o valor de $F(.X'_1., \cdots, .X'_n.)$ será um número real contido no intervalo $F(.X_1., \cdots \cdots, .X_n.)$.

Chamaremos largura do intervalo $.X. = [x_1, x_2]$ ao número real $x_2 - x_1$ e designá-la-emos por $w(.X.)$.

Atendendo às definições acima apresentadas para as operações, poderemos organizar subrotinas para qualquer computador. Poderemos também fornecer ao computador subrotinas que o tornem apto a controlar os erros de arredondamento, levando-o a arredondar para a esquerda no extremo inferior e para a direita no extremo superior do intervalo, no fim de cada operação. Necessita ainda o computador de subrotinas adequadas para controlar os erros de arredondamento provenientes da mudança de números para diferentes bases de modo que o resultado final dum problema nos apareça sob a forma de um intervalo que contém a solução exacta do problema.

Para além de uma Aritmética com intervalos que nos fornece um controle automático dos erros em qualquer computador digital, a Análise Intervalar oferece diferentes possibilidades de atacar problemas como a resolução de sistemas de equações diferenciais, cálculo de integrais, cálculo de raízes de equações algébricas, resolução de equações integrais, inversão de matrizes, etc.

Alguns destes problemas foram já abordados, mas há ainda um vasto campo para investigação dentro do campo de aproximação numérica.

3 — Vejamos uma aplicação da Análise Intervalar às equações diferenciais.

Consideremos a equação diferencial

$$(4)\qquad \begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned}$$

com $f(x, y(x))$ definida e contínua em $A = A_1 \times B_1$ e $A_1 = [a_1, a_2]$,

$$B_1 = [b_1, b_2],\ a_i, b_i \in \mathfrak{R},\ i = 1, 2,$$

$$\text{e}\quad x \in A_1, y(x) \in B_1 .$$

Tomemos um polinómio

$$\langle P_n \rangle (x) = \sum_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle (x-a)^i$$

de grau n, cujos coeficientes sejam intervalos $\langle a_i \rangle$ e tal que

$$f(x, y(x)) \in \langle P_n \rangle (x) \quad \text{para} \quad x \in A_1 .$$

Há várias possibilidades de realização para $\langle P_n \rangle (x)$. Ver [4], [6].

Em geral toma-se um polinómio de grau zero ou grau 1.

É sabido que a solução de (4) se pode obter por meio da equação integral

$$(5)\qquad y(x) = y_0 + \int_a^x f(x, y(x))\, dx .$$

Usando $\langle P_n \rangle (x)$ teremos [4]

$$(6)\qquad y(x) \in \langle Y^{(0)} \rangle (x) = y_0 + \int_a^x \langle P_n \rangle (x)\, dx .$$

Notemos que

$$w(\langle Y \rangle^{(0)}(x)) \leqq w(\langle P_n \rangle (x))\,(x-a)$$

desde que consideremos em (6) valores de $x \in A_2 \subset A_1$ para os quais $(x-a) < 1$.

Iremos em seguida melhorar $\langle Y \rangle^{(0)}(x)$.

Suponhamos que é possível obter uma função $F(x, \langle Y \rangle^{(0)}(x))$, [4], tal que para $x \in A_1$

(7)
a) $F(x, y(x)) \equiv f(x, y(x))$,

b) $F(x, \langle Y \rangle^{(0)}(x)) \supset f(x, y(x))$,

c) para $\langle Y' \rangle (x)$, $\langle Y'' \rangle (x) \subset \langle Y \rangle (x)$ e $\langle Y' \rangle (x) \subset \langle Y'' \rangle (x)$ a função F satisfaça a inclusão monotónica, i. e.

$$F(x, \langle Y' \rangle (x)) \subset F(x, \langle Y'' \rangle (x)) .$$

Se $f(x, y(x))$ for uma função racional em x e y, obtem-se $F(x, {}_{\langle}Y_{\rangle}^{(0)}(x))$ pela simples substituição de y por ${}_{\langle}Y_{\rangle}^{(0)}(x)$ em $f(x, y(x))$. Substituindo em (6) teremos

$$(8) \qquad y(x) \in {}_{\langle}Y_{\rangle}^{(1)}(x) = y_0 + \int_a^x F(x, {}_{\langle}Y_{\rangle}^{(0)}(x))\, dx \qquad x \in A_1 .$$

Novamente

$$w({}_{\langle}Y_{\rangle}^{(1)}(x)) \leq w(F(x, {}_{\langle}Y_{\rangle}^{(0)}(x))\,(x-a) .$$

$$\text{Se} \quad {}_{\langle}Y_{\rangle}^{(1)}(x) \subset {}_{\langle}Y_{\rangle}^{(0)}(x)$$

de (7) — c) e (6) virá $w({}_{\langle}Y_{\rangle}^{(2)}(x)) \leq w({}_{\langle}Y_{\rangle}^{(1)}(x))$.

Poderemos assim obter uma sucessão de soluções intervalos ${}_{\langle}Y_{\rangle}^{(0)}(x)$, ${}_{\langle}Y_{\rangle}^{(1)}(x)$, $\cdots$ obedecendo a

a) $y(x) \in {}_{\langle}Y_{\rangle}^{(n)}(x)$

b) $w({}_{\langle}Y_{\rangle}^{(n)}(x)) < w({}_{\langle}Y_{\rangle}^{(n-1)}(x))$.

Suponhamos que $F(x, {}_{\langle}Y_{\rangle}^{(0)}(x))$ satisfaz à condição de LIPSCHITZ com a constante L. Teremos

$$w(F(x, {}_{\langle}Y_{\rangle}^{(0)}(x)) < L\, w({}_{\langle}Y_{\rangle}^{(n)}(x))$$

e em (8)

$$w({}_{\langle}Y_{\rangle}^{(1)}(x)) < L(x-a)\, w({}_{\langle}Y_{\rangle}^{(0)}(x)) .$$

Para n iterações teremos

$$w({}_{\langle}Y_{\rangle}^{(n)}(x)) < (L(x-a))^n\, w({}_{\langle}Y_{\rangle}^{(0)}(x)) .$$

O processo numérico será convergente para a solução de (4), desde que $L(x-a) < 1$.

Para o cálculo dos integrais deverão usar-se os métodos de aproximação numérica de Análise Intervalar para integrais e em todos os cálculos deverá utilizar-se Aritmética de Intervalos.

O presente trabalho foi escrito quando a autora era bolseira da Fundação Calouste Gulbenkian.

REFERÊNCIAS

[1] HANSEN, E., *Interval arithmetic in matrix computations*, part I, J. Soc. Indust. Appl. Math., series B, **2** (1965), pag. (308-320).

[2] KRÜCKEBERG, F., *Numerische Intervallrechung und deren Anwendung*. II M, Bonn, 1966.

[3] ———, *Ordinary Differential Equations*, Vortrag, Oxford, 1968.

[4] MOORE, R. E., *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966.

[5] NICKEL, *Über die Notwendigkeit einer Fehlerschrankenarithmetik für Rechenautomaten*. Numerische Mathematik, vol. 9, n.º 1, 1966.

[6] SCHWANENBERG, P., *Zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangswertmengen*, Bonn, 1968.

On Products of Generalized Hypergeometric Functions(*)

by S. D. Bajpai
Department of Mathematics
Shri G. S. Technological Institute, Indore (India)

1. **Introduction.** In this paper we have established a formula for product of MEIJER's G-functions. From this formula we have deduced formulae for product of MACROBERT's E-functions and generalized hypergeometric functions. In section 3, we have obtained some hypergeometric transformations and formulae on the sum of ${}_4F_3(1)$. The results established are of general character and a number of known results follow as their particular cases.

2. Product of G-functions. (1)

If $t \leqq u$, $v \leqq w$, $|\lambda x| < 1$, $|\mu y| < 1$, then

$$(2.1)\quad G^{f,g}_{t,u}\left(\lambda x \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1\alpha_t \\ {}_1\beta_u \end{matrix}\right) G^{k,l}_{v,w}\left(\mu y \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1\gamma_v \\ {}_1\delta_w \end{matrix}\right) = \sum_{h=1}^{f} \sum_{h'=1}^{k} A(h)B(h') \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{t}(1+\beta_h-\alpha_j)_m}{\prod_{j=1}^{u}{}'(1+\beta_h-\beta_j)_m m!} \{\lambda x(-1)^{t-f-g}\}^m$$

$$\times {}_{u+v}F_{w+t-1}\left[\begin{matrix} 1+\delta_{h'}-{}_1\gamma_v,\ {}_1\beta_u \overset{*}{-} \beta_h - m,\ -m;\ \dfrac{\mu y}{\lambda x}(-1)^{v+g+f-k-l-u} \\ 1+\delta_{h'} \overset{*}{-} {}_1\delta_w,\ {}_1\alpha_t - \beta_h - m \end{matrix}\right].$$

$$(2.2)\quad G^{f,g}_{t,u}\left(\lambda x \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1\alpha_t \\ {}_1\beta_u \end{matrix}\right) G^{k,l}_{v,w}\left(\mu y \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1\gamma_v \\ {}_1\delta_w \end{matrix}\right) = \sum_{h=1}^{f} \sum_{h'=1}^{k} A(h)B(h') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{v}(1+\delta_{h'}-\gamma_i)_n}{\prod_{i=1}^{w}{}'(1+\delta_{h'}-\delta_i)_n\, n!}$$

$$\cdot \{\mu y(-1)^{v-k-l}\}^n \times {}_{t+w}F_{u+v-1}\left[\begin{matrix} 1+\beta_h-{}_1\alpha_t,\ {}_1\delta_w \overset{*}{-} \delta_{h'} - n,\ -n;\ \dfrac{\lambda x}{\mu y}(-1)^{t+k+l-f-g-w} \\ 1+\beta_h \overset{*}{-} {}_1\beta_u,\ {}_1\gamma_v - \delta_{h'} - n \end{matrix}\right].$$

(*) Por razões de natureza técnica derivadas das expressões utilizadas nestes dois artigos, resolveu a Redacção modificar a disposição gráfica dos mesmos.

(1) For the sake of brevity the symbol ${}_1a_p$ is used to denote $a_1, \cdots, a_p$; $1+\delta_h-{}_1\gamma_v$ is used to denote $1+\delta_h-\gamma_1, \cdots, 1+\delta_h-\gamma_v$ and ${}_1\beta_u \overset{*}{-} \beta_h - m$ is used to denote $\beta_1-\beta_h-m, \cdots * \cdots, \beta_u-\beta_h-m$.

Where

$$A(h)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{f}{}' \Gamma(\beta_j-\beta_h)\prod\limits_{j=1}^{g}\Gamma(1+\beta_h-\alpha_j)(\lambda x)^{\beta_h}}{\prod\limits_{j=f+1}^{u}\Gamma(1+\beta_h-\beta_j)\prod\limits_{j=g+1}^{t}\Gamma(\alpha_j-\beta_h)},$$

$$B(h')=\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}{}' \Gamma(\delta_i-\delta_{h'})\prod\limits_{i=1}^{l}\Gamma(1+\delta_{h'}-\gamma_i)(\mu y)^{\delta_{h'}}}{\prod\limits_{i=k+1}^{w}\Gamma(1+\delta_{h'}-\delta_i)\prod\limits_{i=l+1}^{v}\Gamma(\gamma_i-\delta_{h'})}.$$

Proof. To prove this, substituting in the left hand side from [4, p. 208, (5)] (²), and expressing the hypergeometric functions as a product of two series, we get

$$(2.3)\qquad \sum_{h=1}^{f}\sum_{h'=1}^{k}A(h)B(h')\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{t}(1+\beta_h-\alpha_j)_m}{\prod\limits_{j=1}^{u}{}'(1+\beta_h-\beta_j)_m\, m!}\{\lambda x(-1)^{t-f-g}\}^m$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{v}(1+\delta_{h'}-\gamma_j)_n}{\prod\limits_{j=1}^{w}{}'(1+\delta_{h'}-\delta_j)_n\, n!}\{\mu y(-1)^{v-k-l}\}^n.$$

Now with the help of [8, p. 56, (1)] and [8, p. 32, (8)], the expression (2. 3) becomes

$$\sum_{h=1}^{f}\sum_{h'=1}^{k}A(h)B(h')\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{t}(1+\beta_h-\alpha_j)_m}{\prod\limits_{j=1}^{u}{}'(1+\beta_h-\beta_j)_m\, m!}\{\lambda x(-1)^{t-f-g}\}^m$$

$$\times\frac{\prod\limits_{j=1}^{v}(1+\delta_{h'}-\gamma_j)_n\prod\limits_{j=1}^{u}{}'(\beta_j-\beta_h-m)_n(-m)_n}{\prod\limits_{j=1}^{w}{}'(1+\delta_{h'}-\delta_j)_n\prod\limits_{j=1}^{t}(\alpha_j-\beta_h-m)_n\, n!}\left\{\frac{\mu y}{\lambda x}(-1)^{v+g+f-k-l-u}\right\}^n,$$

which yields the result (2. 1).

Similarly the result (2. 2) can be obtained from (2. 3), by first summing over m and then over n, with the help of [8, p. 56, (1)].

(²) Replacing the G-functions, with the help of [4, p. 208, (6)], we obtain the same results (2. 1) and (2. 2) by virtue of [4, p. 209, (9)], when the parameters are adjusted suitably.

3. Special Cases.

(i) *Product of* **E**-*functions.*

In (2. 1) and (2. 2), putting $f=k=1$, $t=g=p$, $v=l=r$, $u=q+1$, $w=s+1$, using [4, p. 209, (9)] and [5, p. 439, (5)], and setting $1+\beta_1-{}_1\alpha_p={}_1a_p$, $1+\beta_1-{}_2\beta_{q+1}={}_1b_q$, $1-\delta_1-{}_1\gamma_r={}_1c_r$, $1+\delta_1-{}_2\delta_{s+1}={}_1d_s$, replacing $\dfrac{1}{\lambda x}$ by λx and $\dfrac{1}{\mu y}$ by μy, we have

$$(3.\ 1)\qquad E\begin{pmatrix}{}_1a_p\,;\lambda x\\ {}_1b_q\end{pmatrix}E\begin{pmatrix}{}_1c_r\,;\mu y\\ {}_1d_r\end{pmatrix}=\frac{\prod\limits_{j=1}^{r}\Gamma(c_j)}{\prod\limits_{j=1}^{s}\Gamma(d_j)}\sum_{m=0}^{p}\frac{\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+m)(-\lambda x)^{-m}}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+m)\,m!}$$

$$\cdot\ {}_{r+q+1}F_{s+p}\left[\begin{matrix}{}_1c_r, 1-{}_1b_q-m, -m\\ {}_1d_s, 1-{}_1a_p-m,\end{matrix}\,;\frac{\lambda x}{\mu y}(-1)^{p-q-1}\right];$$

$$(3.\ 2)\qquad E\begin{pmatrix}{}_1a_p\,;\lambda x\\ {}_1b_q\end{pmatrix}E\begin{pmatrix}{}_1c_r\,;\mu y\\ {}_1d_s\end{pmatrix}=\frac{\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{r}\Gamma(c_j+n)(-\mu y)^{-n}}{\prod\limits_{j=1}^{s}\Gamma(d_j+n)\,n!}$$

$$\cdot\ {}_{p+s+1}F_{q+r}\left[\begin{matrix}{}_1a_p, 1-{}_1d_s-n, -n\\ {}_1b_q, 1-{}_1c_r-n\end{matrix}\,;\frac{\mu y}{\lambda x}(-1)^{r-s-1}\right],$$

where

$$p\leq q+1,\ r\leq s+1,\ |\lambda x|>1,\ |\mu y|>1.$$

(ii) *Product of generalized hypergeometric functions.*

In (2. 1) and (2. 2), on taking $f=k=1$, $t=g=p$, $v=l=r$, $u=q+1$, $w=s+1$, using [5, p. 439, (3)], and setting $1+\beta_1-{}_1\alpha_p={}_1a_p$, $1+\beta_1-{}_2\beta_{q+1}={}_1b_q$, $1+\delta_1-{}_1\gamma_r={}_1c_r$, $1+\delta_1-{}_2\delta_{s+1}={}_1d_s$, $\lambda=-A$, $\mu=-B$, we get

$$(3.\ 3)\qquad {}_pF_q\begin{pmatrix}{}_1a_p\,;Ax\\ {}_1b_q\end{pmatrix}{}_rF_s\left[\begin{matrix}{}_1c_r\,;By\\ {}_1d_s\end{matrix}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{p}(a_j)_m(Ax)^m}{\prod\limits_{j=1}^{q}(b_j)_m\,m!}$$

$$\cdot\ {}_{r+q+1}F_{s+p}\left[\begin{matrix}{}_1c_r, 1-{}_1b_q-m, -m\\ {}_1d_s, 1-{}_1a_p-m\end{matrix}\,;\frac{By}{Ax}(-1)^{p-q-1}\right];$$

$$(3.4)\qquad {}_pF_q\left({}_1a_p;\,Ax \atop {}_1b_q\right)\,{}_rF_s\left({}_1c_r;\,By \atop {}_1d_s\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{r}(c_j)_n\,(By)^n}{\prod_{j=1}^{s}(d_j)_n\,n!}$$

$$\cdot\;{}_{p+s+1}F_{q+r}\left[{{}_1a_p\,,1-{}_1d_s-n\,,-n\,;\;\dfrac{Ax}{By}(-1)^{r-s-1}} \atop {{}_1b_q\,,1-{}_1c_r-n}\right],$$

where

$$p\leqq q+1\,,\;\; r\leqq s+1\,,\;\; |Ax|<1\,,\;\; |By|<1\,.$$

With $y=x$ (3.3) is a known result [6, p. 395, (3.5)] obtained by FIELDS and WIMP, using the techniques of Laplace transform.

4. Some hypergeometric transformations and formulae on the sum of well--poised and nearly-poised ${}_4F_3(1)$.

(*i*) In (3.3) and (3.4), putting $y=x$ and comparing the coefficients of x^n, we obtain the interesting transformation

$$(4.1)\qquad \frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j)_n\,A^n}{\prod_{j=1}^{q}(b_j)_n}\;{}_{r+q+1}F_{s+p}\left[{{}_1c_r\,,1-{}_1b_q-n\,,-n\,;\;\dfrac{B}{A}(-1)^{p-q-1}} \atop {{}_1d_s\,,1-{}_1a_p-n}\right]$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{r}(c_j)_n\,B^n}{\prod_{j=1}^{s}(d_j)_n}\;{}_{p+s+1}F_{q+r}\left[{{}_1a_p\,,1-{}_1d_s-n\,,-n\,;\;\dfrac{A}{B}(-1)^{r-s-1}} \atop {{}_1b_q\,,1-{}_1c_r-n}\right].$$

Putting $A=-Z$, $B=1$, $s=r=0$ in (4.1), it reduces to a known result [6, p. 395, (3.8)].

(*ii*) In (4.1), putting $A=B=1$, $a_1=\gamma-\alpha-\beta$, $c_1=2\alpha$, $c_2=2\beta$, $d_1=2\gamma$, and using [1, 10.1, (1)] for the left side hypergeometric function, we get

$$(4.2)\qquad {}_3F_2\left[{\gamma-\alpha-\beta\,,1-2\gamma-n\,,-n\,;} \atop {1-2\alpha-n\,,1-2\beta-n}\right]=\frac{(2\gamma)_n(\gamma-\alpha)_n(\gamma-\beta)_n}{(2\alpha)_n(2\beta)_n(\gamma)_n}$$

$$\cdot\,{}_4F_3\left[{\alpha\,,\beta\,,\dfrac{1}{2}-\gamma-n\,,-n\,;} \atop {\gamma+1/2\,,1+\alpha-\gamma-n\,,1+\beta-\gamma-n}\right].$$

With $\gamma = \alpha + \beta$, it reduces to a known result obtained by Chaundy [3, (10)].

(*iii*) In (4. 1), on taking $A = B = 1$, $a_1 = \frac{1}{2} - \alpha - \beta + \gamma$, $c_1 = 2\alpha$, $c_2 = 2\beta$, $d_1 = 2\gamma$, and using [1, 10. 1, (2)], we have

$$(4.\,3)\quad {}_3F_2\left[\begin{matrix}1/2 - \alpha - \beta + \gamma, 1 - 2\gamma - n, -n;\\ 1 - 2\alpha - n, 1 - 2\beta - n\end{matrix}\right] = \frac{(2\gamma)_n (\gamma - \alpha + 1/2)_n (\gamma - \beta + 1/2)_n}{(2\alpha)_n (2\beta)_n (\gamma + 1/2)_n}$$

$$\cdot\, {}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, -\gamma - n, -n;\\ \gamma, 1/2 + \alpha - \gamma - n, \frac{1}{2} + \beta - \gamma - n\end{matrix}\right].$$

Substituting $\gamma = \alpha + \beta - \frac{1}{2}$ in (4. 3), we obtain

$$(4.\,4)\quad \left[\begin{matrix}\alpha, \beta, \frac{1}{2} - \alpha - \beta - n, -n;\\ \alpha + \beta - 1/2, 1 - \alpha - n, 1 - \beta - n\end{matrix}\right] = \frac{(2\alpha)_n (2\beta)_n (\alpha + \beta)_n}{(2\alpha + 2\beta - 1)_n (\alpha)_n (\beta)_n}.$$

In (4. 1), putting $A = B = 1$, $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $b_1 = \alpha + \beta - 1/2$, $c_1 = \alpha$, $c_2 = \beta$, $d_1 = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$, and using (4. 4), we get a known result [2, p. 187, (3. 3)].

(*iv*) In (4. 1), putting $A = B = 1$, $a_1 = 1/2 - \alpha - \beta + \gamma$, $c_1 = 2\alpha - 1$, $c_2 = 2\beta$, $d_1 = 2\gamma - 1$, and using [1, 10. 1, (3)], we obtain

$$(4.\,5)\quad {}_3F_2\left[\begin{matrix}1/2 - \alpha - \beta + \gamma, 2 - 2\gamma - n, -n;\\ 2 - 2\alpha - n, 1 - 2\beta - n\end{matrix}\right] = \frac{(2\gamma - 1)_n (\gamma - \alpha + 1/2)_n (\gamma - \beta - 1/2)_n}{(2\alpha - 1)_n (2\beta)_n (\gamma - 1/2)_n}$$

$$\cdot\, {}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, 1 - \gamma - n, -n;\\ \gamma, 1/2 + \alpha - \gamma - n, 3/2 + \beta - \gamma - n\end{matrix}\right].$$

On taking $\gamma = \alpha + \beta - \frac{1}{2}$ in (4. 5), we get

$$(4.\,6)\quad {}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, \frac{3}{2} - \alpha - \beta - n, -n;\\ \alpha + \beta - 1/2, 1 - \beta - n, 2 - \alpha - n\end{matrix}\right] = \frac{(2\alpha - 1)_n (2\beta)_n (\alpha + \beta - 1)_n}{(2\alpha + 2\beta - 2)_n (\beta)_n (\alpha - 1)_n}.$$

In (4. 1), substituting $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $b_1 = \alpha + \beta - \frac{1}{2}$, $c_1 = \alpha$, $c_2 = \beta - 1$, $d_1 = \alpha + \beta - \frac{1}{2}$, and using (4. 6), we obtain a known result [2, p. 187, (3. 4)].

(*v*) In (4. 1), on taking $a_1 = \frac{1}{2} - \alpha - \beta - \gamma$, $c_1 = 2\alpha$, $c_2 = 2\beta$, $c_3 = \gamma$, $d_1 = 2\gamma$, $d_2 = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$, and using [1, 10. 2, (1)], we have

$$(4.7)\qquad {}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, \frac{1}{2} + \alpha + \beta - 2\gamma - n, -n; \\ 1/2 + \alpha - \gamma - n, 1/2 + \beta - \gamma - n, \alpha + \beta + \frac{1}{2}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{(2\alpha)_n (2\beta)_n (\gamma)_n (\gamma + 1/2)_n}{(2\gamma)_n (\alpha + \beta + 1/2)_n \left(\frac{1}{2} + \gamma - \alpha\right)_n \left(\frac{1}{2} + \gamma - \beta\right)_n}$$

$$\cdot {}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{2} - \alpha - \beta + \gamma, 1 - 2\gamma - n, \frac{1}{2} - \alpha - \beta - n, -n; \\ 1 - 2\alpha - n, 1 - 2\beta - n, 1 - \gamma - n\end{matrix}\right].$$

Putting $\gamma = \alpha + \beta - \frac{1}{2}$ in (4. 7), we get [2, p. 187, (3. 3)].

5. Particular Cases.

Here we have obtained from (3. 3) and (3. 4) many known results, by summing the series with the help of (4. 4), (4. 6) and Gauss's theorem, etc.

(*a*) Consider (3. 3) with $A = B = 1$ and $y = x$, then with

(*i*) $a_1 = c - a - b$, $c_1 = a$, $c_2 = b$, $d_1 = c$, and Saal-Schutz's theorem [8, p. 87, (29)], we get a result obtained by Euler [8, p. 60, (5)].

(*ii*) $a_1 = c_1 = \alpha$, $a_2 = c_2 = \beta$, $b_1 = d_1 = \frac{1}{2} + \alpha + \beta$, and [3, (10)], it yields an identity due to Clausen [4, p. 185, (1)].

(*iii*) $b_1 = \rho$, $d_1 = \sigma$, and Gauss's theorem, we get [4, p. 185, (2)].

(*b*) Consider (3. 4) with $A = B = 1$, $y = x$, then with

(*i*) $a_1 = c_1 = \alpha$, $a_2 = c_2 = \beta$, $b_1 = \alpha + \beta - \frac{1}{2}$, $d_1 = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$, and (4. 4), we have an identity due to ORR [4, p. 186, (8)].

(*ii*) $a_1 = \alpha$, $c_1 = \alpha - 1$, $a_2 = c_2 = \beta$, $b_1 = d_1 = \alpha + \beta - \frac{1}{2}$, and (4. 6), it yields [4, p. 186, (9)].

(*iii*) $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $b_1 = \alpha + \beta + 1/2$, $c_1 = \frac{1}{2} - \alpha$, $c_2 = \frac{1}{2} - \beta$, $d_1 = \frac{3}{2} - \alpha - \beta$, and [3, (11)], we get [1, p. 100].

(*c*) Consider (3. 3) with $A = -B = 1$ and $y = x$, then with

(*i*) $c_1 = a$, $d_1 = b$, and GAUSS's theorem, we get KUMMER's first formula [8, p. 125, (2)].

(*ii*) $b_1 = d_1 = \rho$, and [4, p. 104, (47)], it reduces to [4, p. 186, (3)].

(*iii*) $a_1 = c_1 = \alpha$, $a_2 = c_2 = \beta$ and DIXON's theorem [8, p. 105, (3)], we have [4, p. 186, (4)].

(*iv*) $a_1 = c_1 = \alpha$, $b_1 = d_1 = \rho$, and [8, p. 106, (4)], we get [4, p. 186, (5)].

(*v*) $a_1 = \alpha$, $b_1 = 2\alpha$, $c_1 = \beta$, $d_1 = 2\beta$, and WHIPPLE's theorem [7, p. 363, (8)], we obtain [4, p. 186, (6)].

(*vi*) $b_1 = d_1 = \rho_1$ $b_2 = d_2 = \rho_2$ and [8, p. 106, (6)], we get [4, p. 186, (7)].

(*d*) Results [4, p. 187, (12) to (15)] obtained by CHAUNDY can similarly be obtained by choosing the parameters in (3. 3) suitably.

I wish to express my sincere thanks to Dr. V. M. BHISE for is kind help and guidance in the preparation of this paper. My thanks are also due to Principal Dr. S. M. DASGUPTA for the facilities he gave to me.

REFERENCES

[1] BAILEY, W. N. *Generalised hypergeometric series.* Cambridge Tract (1935).
[2] BHATT, R. C., *On sum of terminating hypergeometric series* ${}_4F_3(1)$. Matematche (Catania), Vol. 20, Fasc. 2 (1965), 185-188.
[3] CHAUNDY, T. W., *On Clausen's hypergeometric identity.* Quart. J. Math. (Oxford), **9** (2) (1958), 265-274.
[4] ERDELYI, A., *Higher transcendental functions,* Vol. 1. McGraw-Hill, New York (1953).
[5] ———, *Tables of integral transforms,* Vol. 2. McGraw-Hill, New York (1954).
[6] FIELDS, J. L. & WIMP, J., *Expansion of hypergeometric functions in hypergeometric functions.* Math. Comp., Vol. 15, No. 76 (1961), 390-395.
[7] MACROBERT, T. M., *Functions of a complex variable.* MacMillan and Co. Ltd., London (1962).
[8] RAINVILLE, E. D., *Special functions.* MacMillan and Co Ltd., New York (1960).

Expansion theorems for generalized hypergeometric functions I

by **S. D. Bajpai**
Dpartment of Mathematics
Shri G. S. Technological Institute, Indore (India)

1. Introduction. In previous papers [(1)] and [(2)] expansions for FOX's H-function involving JACOBI polynomials and LAGUERRE polynomials respectively were established. In this paper, we generalized the low order expansions for the H-functions [(1), (2)] by LAPLACE transform techniques and employ them to obtain expansions for MEIJER's G-function and MACROBERT's E-function. The expansions given here are of general character and numerous special cases of the general theorems developed in this paper are scattered throughout the literature. Some well known results recently given by MEIJER, BAJPAI, WIMP and LUKE are shown as particular cases.

The subject of expansion formulae for generalized hypergeometric functions occupies a prominent place in the literature of special functions. Certain expansions and series of hypergeometric functions, play an important role in the development of the theory of special functions.

The expansion theorems for hypergeometric functions were given from time to time by various mathematicians, with certain restrictions in the parameters. An adequate list of references would be quite lengthy. However, the references given here together with the sources indicated in these references provide a good converge of this subject.

We now, mention in brief some interesting work on this subject. In a series of papers, MEIJER [(31) to (33)] gave expansions of a G-function in a series of related G-functions multiplied by hypergeometric polynomials ${}_{p+1}F_q(-n\,,\,a_p\,;b_q\,;\,z)$. LUKE, WIMP, FIELDS and other members of staff of Midwest Research Institute contributed valuable papers [(20), (21), (29), (30), (41), (42)] to the subject. Recently LAWRYNOWICZ [(26 to (28)] has given some interesting expansions, which include those of MEIJER. Most recently the author in a series of papers [(1) to (15)] has obtained a number of expansion formulae for MACROBERT's E-function, MEIJER's G-function and FOX's H-function, which on generalization will give more results very soon.

The H-function introduced by FOX [(24), p. 408], will be represented and defined as follows:

$$(1.\,1)\qquad \mathrm{H}_{p,q}^{m,n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1\,,e_1)\,,\cdots,(a_p\,,e_p)\\(b_1\,,f_1)\,,\cdots,(b_q\,,f_q)\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)\,z^s}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod\limits_{j=n+1}^{n}\Gamma(a_j-e_js)}\,ds\,,$$

where L is a suitable contour.

In what follows for sake of brevity (a_p, e_p) is to be interpreted as $(a_1, e_1), \cdots, (a_p, e_p)$, $(a_p)_\mu$ denotes $\prod_{j=1}^{p} (a_j)_\mu$ and the symbol $\Delta(h, a)$ represents the set of parameters

$$\frac{a}{h}, \frac{a+1}{h}, \cdots, \frac{a+h-1}{h},$$

where h is a positive integer. Also for ease in writing, we denote

$$\sum_{j=1}^{p} e_j - \sum_{j=1}^{q} f_j \equiv A, \quad \sum_{j=1}^{n} e_j - \sum_{j=n+1}^{p} e_j + \sum_{j=1}^{m} f_j - \sum_{j=m+1}^{q} f_j \equiv B,$$

and $\mathrm{Re}(\delta + b_m/f_m)$ represents $\mathrm{Re}(\delta + b_j/f_j)$ where $j = 1, 2, \cdots, m$.

The following formulae are required in the proof:

If h is a positive number, $A \leqq 0$, $B > 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2} B\pi$, $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$, $\mathrm{Re}\,\beta > -1$, $\mu \geqq 0$, $\mathrm{Re}(\mu + \alpha + h b_m/f_m) > -1$, then

$$(1.2) \qquad \omega^\mu H_{p,q}^{m,n}\left[z\omega^h \middle| \begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N(\alpha+\beta+2N+1)(\alpha+\beta+N+1)}{\Gamma(\alpha+1)N!}$$

$$\cdot H_{p+2,q+2}^{m,n+2}\left[z \middle| \begin{matrix}(-\mu, h), (-\mu-\alpha, h), (a_p, e_p)\\(b_q, f_q), (N-\mu, h), (-1-\alpha-\beta-\mu-N, h)\end{matrix}\right] \times {}_2F_1\left[\begin{matrix}-N, N+\alpha+\beta+1; \omega\\ \alpha+1\end{matrix}\right],$$

which follows from [(1), (3. 1)] and [(35), p. 254, (1)].

If h is a positive number, $A \leqq 0$, $B > 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2} \beta\pi$, $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$, $\mu \geqq 0$, $\mathrm{Re}(\mu + \alpha + h b_m/f_m) > -1$, then

$$(1.3) \qquad \omega^\mu H_{p,q}^{m,n}\left[z\omega^h \middle| \begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!\,\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\cdot H_{p+2,q+1}^{m,n+2}\left[z \middle| \begin{matrix}(-\mu-\alpha, h), (-\mu, h), (a_p, e_p)\\(b_p, f_q), (N-\mu, h)\end{matrix}\right] \times {}_1F_1\left[\begin{matrix}-N; \omega\\ \alpha+1\end{matrix}\right],$$

which follows from [(2), (3. 1)] and [(35), p. 200, (1)].

If h is a positive number, $A \leqq 0$, $B > 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2} B\pi$, $\mathrm{Re}(h b_m/f_m - \rho) > -1$, then

$$(1.4) \qquad \int_0^\infty - x^{-\rho} e^{-\lambda x} H_{p,q}^{m,n}\left[z x^h \middle| \begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right] dx = \lambda^{\rho-1} H_{p+1,q}^{m,n+1}\left[z\lambda^{-h} \middle| \begin{matrix}(\rho, h), (a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right],$$

which can be established by expressing the H-function in the integrand as a Mellin-Barnes type integral (1. 1), inter-changing the order of integrations and using [(18), p. 137, (1)].

The LAPLACE transform [(18), p. 219, (17)] given by

$$(1.5)\qquad \int_0^\infty e^{-\varrho t}\, t^{\sigma-1}\, {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_p ; \lambda t \\ b_q \end{matrix}\right] dt = \Gamma(\sigma)\, \varrho^{-\sigma}\, {}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix} a_p , \sigma ; \lambda/\varrho \\ b_q \end{matrix}\right],$$

where $p \leqq q$, $\mathrm{Re}\,\sigma > 0$.

2. THEOREM I.

(i) *Let none of the following quantities be negative integers:*

$$b_m/f_m + \frac{\mu - h + 1}{h};\ \ b_m/f_m + \frac{\mu + \alpha_t - h}{h};\ \ \nu;\ \ \beta_u - 1;\ \ b_m/f_m - a_n/e_n ,$$

where h *is a positive number.*

(ii) *Let* $A + h(r - s) \leqq 0$, $B + h(r-s) > 0$, $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\{B + h(r-s)\}$, $Re(\mu + \alpha_t + h\, b_m/f_m) > 0$, $Re(\nu - \alpha_t) > 0$, $Re\,\alpha_t > 0$, $Re(h\, b_m/f_m - c_r) > -1$, $Re(h\, b_m/f_m - d_s) > -1$, $Re(1 - c_r - \mu) > 0$, $Re(1 - d_s - \mu) > 0$.

(iii) *Let* p, q, r, s, t, u, m *and* n *be positive integers or zero;*

$p + r \leqq q + s - 1$ *or* $p + r = q + s$ *and* $|z\,\omega^h| < 1$,

$p + t \leqq q + (u+1) - 1$ *or* $p + t = q + (u+1)$ *and* $|z| > 1$,

$0 \leqq m \leqq q$; $0 \leqq n \leqq p$; $q + s \geqq 1$.

(iv) *Let* $r + u + 1 = s + t$.

(v) *Let* $0 < \omega < 1, z \neq 0$.

(vi) *Let* $\Sigma d_s - \Sigma c_r + \Sigma \beta_u - \Sigma \alpha_t - 2h\, b_m/f_m < (s - r)(1 - \mu) + 2\mu + \frac{1}{2}$,

$$1 + b_m/f_m - \frac{c_r + h - 1}{h} > 0, \qquad 1 + b_m/f_m - \frac{h - \mu - \beta_u}{h} > 0.$$

Then

$$(2.1)\qquad \omega^{\mu} H^{m,\, n+r}_{p+r,\, q+s}\left[z\,\omega^h \,\middle|\, \begin{matrix} (c_r, h), (a_p, e_p) \\ (b_q, f_q), (d_s, h) \end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(1-c_r-\mu)\,\Gamma(\beta_u)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\,\Gamma(\alpha_t)} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N (\nu+2N)\,\Gamma(\nu+N)}{N!}$$

$$\times H^{m,\, n+t+1}_{p+t+1,\, q+u+2}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (-\mu, h), (1-\alpha_t-\mu, h), (a_p, e_p) \\ (b_q, f_q), (N-\mu, h), (-\mu-\nu-N, h), (1-\beta_u-\mu, h) \end{matrix}\right]$$

$$\times\, {}_{r+u+2}F_{s+t}\left[\begin{matrix} -N, \nu+N, 1-c_r-\mu, \beta_u ; \omega \\ \alpha_t, 1-d_s-\mu \end{matrix}\right].$$

Proof. We first prove (2. 1) for the case $u=0$, $t=1$ and $\alpha_1=\alpha$, that is

$$(2.\,2)\quad \omega^{\mu}\,\mathrm{H}^{m,\,n+r}_{p+r,\,q+s}\left[z\,\omega^{h}\left|\begin{matrix}(c_r\,,h)\,,(a_p\,,e_p)\\(b_q\,,f_q)\,,(d_s\,,h)\end{matrix}\right.\right]=\frac{\Gamma(1-c_r-\mu)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\,\Gamma(\alpha)}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N(\nu+2N)\,\Gamma(\nu+N)}{N!}$$

$$\times\,\mathrm{H}^{m,\,n+2}_{p+2,\,q+2}\left[z\left|\begin{matrix}(-\mu\,,h)\,,(1-\alpha-\mu\,,h)\,,(a_p\,,e_p)\\(b_q\,,f_q)\,,(N-\mu\,,h)\,,(-\mu-\nu-N,h)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times\,{}_{r+2}F_{s+1}\left[\begin{matrix}-N\,,\nu+N\,,1-c_r-\mu\,;\ \omega\\\alpha\,,1-d_s-\mu\end{matrix}\right].$$

Our proof for (2. 2) is based on induction on the parameters r and s (Note that the case $r=s=0$ is the result (1. 2) if we replace α by $\alpha+1$ and put $\nu=\alpha+\beta+1$). Multiplying both sides of (2. 2) by $\omega^{-\sigma-\mu}\,e^{-\lambda\,\omega}$, integrating with respect to ω from 0 to ∞, we get

$$\int_0^{\infty}\omega^{-\sigma}\,e^{-\lambda\,\omega}\,H^{m,\,n+r}_{p+r,\,q+s}\left[z\,\omega^{h}\left|\begin{matrix}(c_r\,,h)\,,(a_p\,,e_p)\\(b_q\,,f_q)\,,(d_s\,,h)\end{matrix}\right.\right]d\,\omega$$

$$=\frac{\Gamma(1-c_r-\mu)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\,\Gamma(\alpha)}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N(\nu+2N)\,\Gamma(\nu+N)}{N!}$$

$$\times\,\mathrm{H}^{m,\,n+2}_{p+2,\,q+2}\left[z\left|\begin{matrix}(-\mu\,,h)\,,(1-\alpha-\mu\,,h)\,,(a_p\,,e_p)\\(b_q\,,f_q)\,,(N-\mu\,,h)\,,(-\mu-\nu-N,h)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times\int_0^{\infty}\omega^{-\sigma-\mu}\,e^{-\lambda\,\omega}\,{}_{r+2}F_{s+1}\left[\begin{matrix}-N\,,\nu+N\,,1-c_r-\mu\,;\ \omega\\\alpha\,,1-d_s-\mu\end{matrix}\right]d\,\omega\,.$$

Now with the help of (1. 4) and (1. 5), we obtain

$$\lambda^{-\mu}\,\mathrm{H}^{m,\,n+r+1}_{p+r+1\,,\,q+s}\left[z\,\lambda^{-h}\left|\begin{matrix}(\sigma\,,h)\,,(c_r\,,h)\,,(a_p\,,e_p)\\(b_q\,,f_q)\,,(d_s\,,h)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\Gamma(1-c_r-\mu)\,\Gamma(1-\sigma-\mu)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\,\Gamma(\alpha)}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N(\nu+2N)\,\Gamma(\nu+N)}{N!}$$

$$\times\,\mathrm{H}^{m,\,n+2}_{p+2,\,q+2}\left[z\left|\begin{matrix}(-\mu\,,h)\,,(1-\alpha-\mu\,,h)\,,(a_p\,,e_p)\\(b_q\,,f_q)\,,(N-\mu\,,h)\,,(-\mu-\nu-N,h)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times\,{}_{r+3}F_{s+1}\left[\begin{matrix}-N\,,\nu+N\,,1-c_r-\mu\,,1-\sigma-\mu\,;\ \dfrac{1}{\lambda}\\\alpha\,,1-d_s-\mu\end{matrix}\right].$$

Now replacing $1/\lambda$ by ω and σ by c_{r+1} and the induction on r is completed. To perform the induction on s, multiply both sides of (2. 2) by $\omega^{1-\mu-\sigma}$, replacing ω by $1/\lambda$, take the inverse LAPLACE transforms of both sides with the help of (1. 4) and [(18), p. 297, (1)] and then indentify σ with d_{s+1}.

Now we establish a relation from (2. 2) which will be finally used to obtain (2. 1).

Putting $m=1$, $n=p$, $b_1=0$, $e_j=f_j=1$ $(j=1,2,\cdots,p;\ i=1,2,\cdots,q), h=1$, replacing a_p by $1-a_p$, q by $q+1$ and b_{j+1} by $1-b_j(j=1,2,\cdots,q)$, c_r by $1-c_r$, d_s by $1-d_s$ and using the formula

$$
\text{(2. 3)}\qquad H^{1,p}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}(a_p,1)\\(b_q,1)\end{matrix}\right.\right]=\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(1+b_1-a_j)\,z^{b_1}}{\prod_{i=1}^{q}\Gamma(1+b_1-b_j)}
$$

$$
\times{}_pF_{q-1}\left[\begin{matrix}1+b_1-a_1,\cdots,1+b_1-a_p;\ -z\\1+b_1-b_2,\cdots,1+b_1-b_q\end{matrix}\right],\ p\leq q,
$$

and simplifying, we get

$$
\text{(2. 4)}\qquad \omega^{\mu}\,{}_{p+r}F_{q+s}\left[\begin{matrix}a_p,c_r;z\,\omega\\b_q,d_s\end{matrix}\right]=\frac{(c_r)_{-\mu}(\alpha)_{\mu}}{(d_s)_{-\mu}}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N(\nu+2N)}{N!\,(N+\nu)_{\mu+1}}
$$

$$
\cdot\,{}_{p+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}a_p,1+\mu,\alpha+\mu\ ;z\\b_q,1+\mu-N,1+\mu+\nu+N\end{matrix}\right]\times{}_{r+2}F_{s+1}\left[\begin{matrix}-N,N+\nu,c_r-\mu\ ;\omega\\\alpha,d_s-\mu\end{matrix}\right].
$$

In (2. 4), putting $z=0$ replacing r by $r+u$, let $c_{r+\lambda}=\beta_\lambda+\mu,\lambda=1,2,\cdots,u$ and replace c_λ by $c_\lambda+y\delta,\lambda=1,2,\cdots,r$. Replacing s by $s+t$, let $d_{s+\lambda}=\alpha_\lambda+\mu,\lambda=1,2,\cdots,t$ and replace d_λ by $d_\lambda+y\delta,\lambda=1,2,\cdots,s$ and ω by $\alpha\omega$, we have

$$
(\alpha\,\omega)^{\mu}=\frac{(c_r+y\delta)_{-\mu}(\beta_u+\mu)_{-\mu}(\alpha)_{\mu}}{(d_s+y\delta)_{-\mu}(\alpha_t+\mu)_{-\mu}}\times\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(2N+\nu)(-\mu)_N}{(N+\nu)_{\mu+1}}
$$

$$
\cdot\,{}_{r+u+2}F_{s+t+1}\left[\begin{matrix}-N,N+\nu,c_r+y\delta-\mu,\beta_u;\alpha\,\omega\\\alpha,d_s+y\delta-\mu,\alpha_t\end{matrix}\right].
$$

In the above expression let $\alpha\to\infty$, we get

$$
\omega^{\mu}=\frac{(c_r+y\delta)_{-\mu}(\beta_u+\mu)_{-\mu}}{(d_s+y\delta)_{-\mu}(\alpha_t+\mu)_{-\mu}}\times\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(2N+\nu)(-\mu)_N}{N!\,(N+\nu)_{\mu+1}}
$$

$$
\cdot\,{}_{r+u+2}F_{s+t}\left[\begin{matrix}-N,N+\nu,c_r+y\delta-\mu,\beta_u;\omega\\d_s+y\delta-\mu,\alpha_t\end{matrix}\right].
$$

Now we replace μ by $\mu + y\delta$, c_r by $1 - c_r$, d_s by $1 - d_s$ and ω by $\omega\,\delta^{s-r+t-u-1}$, we obtain

$$(2.5)\qquad \omega^{\mu+y\delta} = \frac{(1-c_r+y\delta)_{-\mu-y\delta}(\beta_u+\mu+y\delta)_{-\mu-y\delta}}{(1-d_s+y\delta)_{-\mu-y\delta}(\alpha_t+\mu+y\delta)_{-\mu-y\delta}}\,\delta^{(\mu+y\delta)(r-s+u-t+1)}$$

$$\times \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(2N+\nu)(-\mu-y\delta)_N}{N!\,(\nu+N)_{\mu+y\delta+1}} \cdot {}_{r+u+2}F_{s+t}\left[\begin{matrix} -N, \nu+N, 1-c_r-\mu, \beta_u; \omega\,\delta^{s-r+t-u-1} \\ \alpha_t, 1-d_s-\mu \end{matrix}\right].$$

Now to show (2. 1), expressing the H-function of both the sides of (2. 1) as a MELLIN-BARNES type integral (1. 1), using (2. 5) with $\delta = 1$ in the left hand side, the equality in (2. 1) is established after some simplification.

We now discuss in brief with the help of [(16)], [(22)] and [(23)] the convergence of (2. 1) under the stated conditions.

The necessary conditions to ensure the convergence and meaning of the H-functions and the hypergeometric functions are covered in (*i*) to (*iv*). The conditions (*i*) and (*ii*) also insure that the gamma-functions in (2. 1) which appear outside are finite. The sufficient conditions to ensure the convergence of the expansion are covered by (*v*) and (*vi*). These conditions arise from the convergence of the infinite series and are based on the asymptotic behaviour for large N of the H function and the hypergeometric function on the right hand side of (2. 1). If the condition (*iv*) is not satisfied the expansion diverge on account of the analysis given in [(23)]. Even when the expansion diverges a meaning in asymptotic sense can be assigned to the series.

3. THEOREM II

(i) *Let none of the following quantities be negative integers:*

$$b_m/f_m + \frac{\mu - h + 1}{h}\,;\ b_m/f_m + \frac{\mu + \alpha_t - h}{h}\,;\ \beta_u - 1\,;\ b_m/f_m - a_n/e_n\,,$$

where h *is a positive number.*

(ii) *Let*

$$A + h(r-s) \leq 0\,,\ B + h(r-s) > 0\,,\ |\arg z| < \frac{\pi}{2}\{B + h(r-s)\}\,,\ Re\,(\mu + \alpha_t + h\,b_m/f_m) > 0\,,$$

$$Re\,\alpha_t > 0\,,\ Re\,(h\,b_m/f_m - c_r) > -1\,,\ Re\,(h\,b_m/f_m - d_s) > -1\,,$$

$$Re\,(1 - c_r - \mu) > 0\,,\ Re\,(1 - d_s - \mu) > 0\,.$$

(iii) *Let* p, q, r, s, t, u, m *and* n *be positive integers or zero*;

$p+r \leqq q+s-1$ or $p+r=q+s$ and $|z\omega^h|<1$,

$p+t \leqq q+u-1$,

$0 \leqq m \leqq q$; $0 \leqq n \leqq p$; $q+s \geqq 1$.

(iv) *Let* $r+u+1=s+t$.

(v) *Let* $0<\omega<\infty, z \neq 0$.

(vi) *Let* $\Sigma d_s - \Sigma c_r + \Sigma \beta_u - \Sigma \alpha_t - 2h\, b_m/f_m < (s-r)(1-\mu) + 2\mu - \frac{1}{2}$,

$$1 + b_m/f_m - \frac{c_r+h+1}{h} > 0, 1 + b_m/f_m - \frac{h-\beta_u-\mu}{h} > 0 .$$

Then

$$(3.1) \qquad \omega^{\mu} H^{m,n+r}_{p+r,q+s}\left[z\omega^h \left| \begin{matrix} (c_r, h), (a_p, e_p) \\ b_q, f_q), (d_s, h) \end{matrix} \right.\right] = \frac{\Gamma(1-c_r-\mu)\Gamma(\beta_u)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\Gamma(\alpha_t)} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!}$$

$$\cdot H^{m,n+t+1}_{p+t+1,q+u+1}\left[z \left| \begin{matrix} (-\mu, h), (1-\alpha_t-\mu, h), (\alpha_p, e_p) \\ (b_q, f_q), (1-\beta_u-\mu, h), (N-\mu, h) \end{matrix} \right.\right]$$

$$\times {}_{r+u+1}F_{s+t}\left[\begin{matrix} -N, 1-c_r-\mu, \beta_u \\ \alpha_t, 1-d_s-\mu \end{matrix} ; \omega\right].$$

PROOF: The proof of this theorem is similar to that of theorem I and is based on (1. 3) instead of (1. 2).

A formal proof follows by using the confluence principle in theorem I. That is, replacing z by $\lambda z, \omega$ by ω/λ and making $\lambda \to \infty$.

4. Expansions for the G-function

THEOREM III

(i) *Let none of the following quantities be negative integers:*

$$b_m + \frac{\mu - i}{h}; b_m + \frac{\mu + \alpha_t - 1 - i}{h}; \nu; \beta_u - 1; b_m - a_n,$$

where $i = 0, 1, 2, \cdots, h-1$.

(ii) *Let* $(s-r)h+p+q<2(m+n), |arg\, z|<\left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}h(r-s)\right)\pi$,

$Re(\mu+\alpha_t+h\,b_m)>0,\ Re(\nu-\alpha_t)>0,\ Re\,\alpha_t>0,\ Re(h\,b_m-c_r)>-1,\ Re(h\,b_m-d_s)>-1,$

$$Re(1-c_r-\mu)>0,\ Re(1-d_s-\mu)>0.$$

(iii) *Let* h *be a positive integer and* p, q, r, s, t, u, m *and* n *be positive integers or zero;*

$p+hr\leqq q+hs-1$ *or* $p+rh=q+sh$ *and* $|z\omega^h|<1$,

$p+th\leqq q+(u+1)h-1$ *or* $p+th=q+(u+1)h$ *and* $|z|>1$,

$0\leqq m\leqq q;0\leqq n\leqq p;q+s\geqq 1.$

(iv) *Let* $r+u+1=s+t$.

(v) *Let* $0<\omega<1, z\neq 0$.

(vi) *Let*

$$\Sigma d_s-\Sigma c_r+\Sigma\beta_u-\Sigma\alpha_t-2\,h\,b_m<(s-r)(1-\mu)+2\mu+\frac{1}{2},$$

$$1+b_m-\frac{c_r+i}{h}>0,1+b_m-\frac{1-\beta_u-\mu+i}{h}>0, i=0,1,2,\cdots,h-1.$$

Then

$$(4.1)\quad \omega^{\mu}G^{m,n+rh}_{p+rh,q+sh}\left[z\omega^h\left|\begin{matrix}\Delta(h,c_r),a_p\\ b_q,\Delta(h,d_s)\end{matrix}\right.\right]=\frac{\Gamma(1-c_r-\mu)\Gamma(\beta_u)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\Gamma(\alpha_t)}(2\pi)^{\frac{1}{2}(h-1)(r+u-s-t+1)}$$

$$\cdot h^{\Sigma c_r-\Sigma d_s+\Sigma\alpha_t-\Sigma\beta_u+\left(\mu-\frac{1}{2}\right)(r-s)+\frac{1}{2}(u-t-1)-\nu}\times\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N(\nu+2N)\Gamma(\nu+N)}{N!}$$

$$\cdot\, G^{m,n+(t+1)h}_{p+(t+1)h,q+(u+2)h}\left[z\left|\begin{matrix}\Delta(h,-\mu),\Delta(h,1-\alpha_t-\mu),a_p\\ b_q,\Delta(h,N-\mu),\Delta(h,-\mu-\nu-N),\Delta(h,1-\beta_u-\mu)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times\,{}_{r+u+2}F_{s+t}\left[\begin{matrix}-N,\nu+N,1-c_r-\mu,\beta_u;\omega h^{s-r+t-u-1}\\ \alpha_t,1-d_s-\mu\end{matrix}\right].$$

Proof: In (2.1), assuming h as a positive integer, putting $e_j=f_i=1\,(j=1,2,\cdots$ $\cdots,p;i=1,2,\cdots,q)$, using the formula

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}(a_p,1)\\ (b_q,1)\end{matrix}\right.\right]=G^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right.\right],$$

and simplifying with the help of (1. 1), [(17), p. 4, (11)] and [(17), p. 207, (1)], the result (4. 1) is obtained.

THEOREM IV.

(i) *Let none of the following quantities be negative integers:*

$$b_m + \frac{\mu - i}{h}\,;\; b_m + \frac{\mu + \alpha_t - 1 + i}{h}\,;\; \beta_u - 1\,;\; b_m - a_n\,,$$

where $i = 0, 1, 2, \cdots, h-1$.

(ii) *Let*

$$(s\,r) - h + p + q < 2(m+n)\,,\; |\arg z| < \left(m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}h(r-s)\right)\pi\,,$$

$$Re(\mu + \alpha_t + h\,b_m) > 0\,,\; Re\,\alpha_t > 0\,,\; Re(h\,b_m - c_r) > -1\,,\; Re(h\,b_m - d_s) > -1\,,$$

$$Re(1 - c_r - \mu) > 0,\; Re(1 - d_s - \mu) > 0\,.$$

(iii) *Let* h *be positive integer and* p, q, r, s, t, u, m *and* n *be positive integers or zero*;

$p + r\,h \leq q + s\,h - 1$ *or* $p + r\,h = q + s\,h$ *and* $|z\,\omega^h| < 1$,

$p + t\,h \leq q + u\,h - 1$,

$0 \leq m \leq q\,;\, 0 \leq n \leq p\,;\, q + s \geq 1$.

(iv) *Let* $r + u + 1 = s + t$.

(v) *Let* $0 < \omega < \infty,\; z \neq 0$.

(vi) *Let*

$$\Sigma\,d_s - \Sigma\,c_r + \Sigma\,\beta_u - \Sigma\,\alpha_t - 2\,h\,b_m < (s-r)(1-\mu) + 2\,\mu - \frac{1}{2},\; 1 + b_m - \frac{c_r + i}{h} > 0\,,$$

$$1 + b_m - \frac{1 - \beta_u - \mu + i}{h} > 0\,,\; i = 0, 1, 2, \cdots, h-1\,.$$

Then

$$(4.\,2) \qquad \omega^{\mu}\,G^{m,\,n+rh}_{p+rh,\,q+sh}\left[z\,\omega^h \,\middle|\, \begin{matrix}\Delta(h\,,c_r)\,,a_p\\ b_q\,,\Delta(h\,,d_s)\end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(1-c_r-\mu)\,\Gamma(\beta_u)}{\Gamma(1-d_s-\mu)\,\Gamma(\alpha_t)}\,(2\,\pi)^{\frac{1}{2}(h-1)(r+u-s-t)}$$

$$\cdot\, h^{\Sigma c_r - \Sigma d_s + \Sigma\alpha_t - \Sigma\beta_u + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)(r-s+1) + \frac{1}{2}(s-t+1)} \times \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N\,h^N}{N\,!}$$

$$\cdot\, G^{m, n+(t+1)h}_{p+(t+1)h,\, q+(u+1)h}\left[z h^h \,\middle|\, \begin{matrix} \Delta(h, -\mu), \Delta(h, 1-\alpha_t-\mu), a_p \\ b_q, \Delta(h, 1-\beta_u-\mu), \Delta(h, N-\mu) \end{matrix} \right]$$

$$\times\; {}_{r+u+1}F_{s+t}\left[\begin{matrix} -N, 1-c_r-\mu, \beta_u;\ \omega h^{s-r+t-u-1} \\ \alpha_t, 1-d_s-\mu \end{matrix} \right].$$

PROOF: The proof is very similar to that of theorem III and follows from theorem II by reducing the H-functions to the G-functions. A formal proof follows by applying the confluence principle in theorem III. That is, replacing z by λz, ω by ω/λ and $\lambda \to \infty$.

In view of an identity, which is apparent from the definition of the G-function, viz.

$$G^{m, n+(t+1)h}_{p+(t+1)h,\, q+(u+1)h}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} \Delta(h, -\mu), \Delta(h, 1-\alpha_t-\mu), a_p \\ b_q, \Delta(h, 1-\beta_u-\mu), \Delta(h, N-\mu) \end{matrix} \right]$$

$$= (-1)^N G^{m+h, n+th}_{p+(t+1)h,\, q+(u+1)h}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} \Delta(h, 1-\alpha_t-\mu), a_p, \Delta(h, -\mu) \\ \Delta(h, N-\mu), \Delta(h, 1-\beta_u-\mu) \end{matrix} \right],$$

the theorem IV reduces to a result recently given by the author [(13), (3. 7)].

5. Expansions for the *E*-function

THEOREM V

(i) *Let none of the following quantities be negative integers:*

$$\frac{\mu-i}{h};\ \frac{\mu+\alpha_t-1-i}{h};\ \nu;\ \beta_u-1;\ a_n-1,$$

where $i = 0, 1, 2, \cdots, h-1$.

(ii) *Let*

$$q+hs < p+hr+1,\ |\arg z| < (p-q+hr-hs+1)\frac{\pi}{2},\ Re(\mu+\alpha_t) > 0,$$

$$Re(\nu-\alpha_t) > 0,\ Re\,\alpha_t > 0,\ Re\,c_r > 0,\ Re\,d_s > 0,\ Re(c_r-\mu) > 0,\ Re(d_s-\mu) > 0.$$

(iii) *Let* h *be a positive integer and* p, q, r, s, t *and* u *be positive integers or zero;*

$p+rh < q+sh$ *or* $p+rh = q+sh+1$ *and* $|z\omega^h| > 1$,

$p+th < q+(u+1)h$ *or* $p+th = q+(u+1)h+1$ *and* $|z| > 1$,

$0 \leqq q;\ 0 \leqq p;\ q+s \geqq 0$.

(iv) *Let* $r+u+1=s+t$.

(v) *Let* $1<\omega<\infty$.

(vi) *Let*

$$\Sigma c_r-\Sigma d_s+\Sigma\beta_u-\Sigma\alpha_t<(r-s)\mu+2\mu+\frac{1}{2},\quad 1-\frac{1-c_r+i}{h}>0,$$

$$1-\frac{1-\beta_u-\mu+i}{h}>0,\quad i=0,1,2,\cdots,h-1.$$

Then

$$(5.\ 1)\qquad \omega^{-\mu}E\left[\begin{matrix}a_p,\Delta(h,c_r):z\,\omega^h\\ b_q,\Delta(h,d_s)\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(c_r-\mu)\Gamma(\beta_u)}{\Gamma(d_s-\mu)\Gamma(\alpha_t)}\times(2\pi)^{\frac{1}{2}(h-1)(r+u-s-t+1)}$$

$$\cdot\, h^{\Sigma d_s-\Sigma c_r+\Sigma\alpha_t-\Sigma\beta_u+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(r-s)+\frac{1}{2}(u-t-1)-\nu}\times\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N(\nu+2N)\Gamma(\nu+N)}{N!}$$

$$\cdot\, E\left[\begin{matrix}a_p,\Delta(h,\mu+1),\Delta(h,\alpha_t+\mu):z\\ b_q,\Delta(h,1+\mu-N),\Delta(h,1+\mu+\nu+N),\Delta(h,\beta_u+\mu)\end{matrix}\right]$$

$$\times\,{}_{r+u+2}F_{s+t}\left[\begin{matrix}-N,\nu+N,c_r-\mu,\beta_u;\ \omega^{-1}h^{s-r+t-u-1}\\ \alpha_t,d_s-\mu\end{matrix}\right].$$

PROOF: In (4. 1), putting $m=1$, $n=p$, $b_1=0$, replacing q by $q+1$ and b_{j+1} by $b_j\,(j=1,2,\cdots,q)$, using [(17), p. 2?9, (9)] and [(19), p. 444, (2)] replacing z by z^{-1}, ω by ω^{-1}, $1-a_p$ by a_p, $1-b_q$ by b_q, $1-c_r$ by c_r and $1-d_s$ by d_s the result (5. 1) is obtained.

THEOREM VI

(i) *Let none of the following quantities be negative integers:*

$$\frac{\mu-i}{h};\quad\frac{\mu+\alpha_t-1+i}{h};\quad\beta_u-1;\quad a_n-1,$$

where $i=0,1,2,\cdots,h-1$.

(ii) *Let*

$$q+hs<p+hr+1,\quad|\arg z|<(p-q+hr-hs+1)\pi/2,\quad Re(\mu+\alpha_t)>0,$$

$$Re\,\alpha_t>0,\quad Re\,c_r>0,\quad Re\,d^s>0,\quad Re(c_r-\mu)>0,\quad Re(d_s-\mu)>0.$$

(iii) *Let* h *be a positive integer and* p, q, r, s, t *and* u *be positive integers or zero.*

$p+rh \leqq q+sh$ *or* $p+rh=q+sh+1$,

$p+th \leqq q+uh$,

$0 \leqq q$; $0 \leqq p$; $q+s \geqq 0$.

(iv) *Let* $r+u+1=s+t$.

(v) *Let* $0<\omega<\infty$.

(vi) *Let* $\Sigma c_r - \Sigma d_s + \Sigma \beta_u - \Sigma \alpha_t < (r-s)\mu + 2\mu - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1-c_r+i}{h} > 0,$

$$1 - \frac{1-\beta_u-\mu+i}{h} > 0, i = 0, 1, 2, \cdots, h-1.$$

$$(5.2) \qquad \omega^{-\mu} E\begin{bmatrix} a_p, \Delta(h, c_r) & : z\omega^h \\ b_q, \Delta(h, d_s) & \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(c_r-\mu)\Gamma(\beta_u)}{\Gamma(d_s-\mu)\Gamma(\alpha_t)} \times (2\pi)^{\frac{1}{2}(h-1)(r+u-s-t)}$$

$$\cdot h^{\Sigma d_s - \Sigma c_r + \Sigma \alpha_t - \Sigma \beta_u + \left(\mu+\frac{1}{2}\right)(r-s) + \mu + \frac{1}{2}(s-t)} \times \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N h^N}{N!}$$

$$\cdot E\begin{bmatrix} a_p, \Delta(h, 1+\mu), \Delta(h, \alpha_t+\mu) & : z h^h \\ b_q, \Delta(h, 1+\mu-N), \Delta(h, \beta_u+\mu) & \end{bmatrix}$$

$$\times {}_{r+u+1}F_{s+t}\begin{bmatrix} -N, c_r-\mu, \beta_u ; \omega^{-1} h^{s-r+t-u+1} \\ \alpha_t, d_s-\mu \end{bmatrix}.$$

Proof: In (4. 2), reducing the G-function to the E-function as in theorem V, we get the formula (5. 2).

6. Particular cases:

Since the H-function can be reduced to the G-function, which itself is a generalization of many higher transcendental functions [(17), pp. 215-222], therefore the theorems given here are of general character and hence may encompass several cases of interest. However, a few well known particular cases are mentioned below:

(*i*) In (2. 1), putting $e_j = f_j = 1\,(j=1,2,\cdots,p; i=1,2,\cdots,q)\, h=1, b_1=0,$ $m=1, n=p$, replacing a_p by $1-a_p, q$ by $q+1$ and b_{j+1} by $1-b_j (j=1,2,\cdots,q)$ c_r by $1-c_r, d_s$ by $1-d_s$, using the formula (2. 3) and simplifying we get a known result given by Wimp and Luke [(42), p. 353, (1. 6)].

(*ii*) In (3. 1), reducing the H-function to the hypergeometric function as above, we obtain another result given by WIMP and LUKE [(42), p. 358, (1. 18)].

(*iii*) In (4. 1), taking $h = 1$, $\mu = 0$, it reduces to a known result [(42), p. 359, (2. 2)].

(*iv*) In (4. 2), setting $h = 1$, $\mu = 0$, we get a known result [(42), p. 360, (2. 3)].

(*v*) In (4. 2), substituting $h = 1$, $\mu = 0$, $t = u = 0$, $s = r$, we obtain a known result [(32), p. 43, (51)], which is one of the most general expansions given by MEIJER.

I am thankful to Principal Dr. S. M. DAS GUPTA for the facilities he provided to me.

REFERENCES

[1] BAJPAI, S. D., *On some results involving* Fox's *H-function and* JACOBI *polynomials*. Proc. Cambridge Philos. Soc. Vol. 65 (1969), 697—701.

[2] ———, *An integral involving* Fox's *H-function and* WHITTAKER *function*. Proc. Cambridge Philos. Soc. Vol. 65 (1969), 709—712.

[3] ———, *An expansion formula for* Fox's *H-function*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1968. (Accepted for Vol. 65 (1969), 683—685.

[4] ———, *Fourier Series for generalized hypergeometric functions*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1968. Vol. 65 (1969), 703—707.

[5] ———, *Some expansion formulae for* Fox's *H-function involving exponential functions*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1968. (Accepted for publication).

[6] ———, *An integral involving* Fox's *H-function and its applications* I. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1968. (Communicated for publication).

[7] ———, *An integral involving* Fox's *H-function and its applications* II. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1968. (Communicated for publication).

[8] ———, *Some results involving* Fox's *H-function and* LEGENDRE *functions*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1968. (Communicated for publication).

[9] ———, *Some results involving* Fox's *H-function and* BESSEL *functions*. Proc. Indian Acad. Sci. 1968. (Accepted for publication).

[10] ———, *Some expansion formulae for G-function involving* BESSEL *functions*. Proc. Indian Acad. Sci. Vol. 68 (1968), 285-290.

[11] ———, *An expansion formula for* MEIJER's *G-function involving* HERMITE *polynomials*. Amer. Math. Monthly, 1967. (Communicated for publication).

[12] ———, *An expansion formula for* MEIJER's *G-function involving* LEGENDRE *functions*. Proc. Nat. Inst. Sci., India, Vol. 35 (1969), 90—94.

[13] ———, *Some expansion formulae for* MEIJER's *G-function*. Vijnan Parishad Anusandhan Patrika, 1967. (Communicated for publication).

[14] ———, *An expansion formula for* MACROBERT's *E-function*. Proc. Egyptian Acad. Sci., 1967. (In Press).

[15] ———, *An expansion formula for* MACROBERT's *E-function involving* LEGENDRE *functions*. Leb. Jour. Sci., Tech. 6 A (1968), 196—197.

[16] Braaksma, B. L. J., *Asymptotic expansions and analytic continuations for a class of* Barnes *integral.* Compos. Math. **15** (1963), 239-341.

[17] Erdélyi, A., *Higher transcendental functions*, Vol. 1 (McGraw Hill, New York, 1953).

[18] ———, *Tables of integral transforms*, Vol. 1 (McGraw-Hill, New York, 1954).

[19] ———, *Tables of integral transforms*, Vol. 2 (McGraw-Hill, New York, 1954).

[20] Fields, J. L. & Wimp, J., *Expansion of hypergeometric functions in hypergeometric functions.* Math. Comp. **15** (1961), 390 395.

[21] ———, *Basic series corresponding to a class of hypergeometric polynomials.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **59** (1963), 599-605.

[22] Fields, J. L. & Luke, Y. L., *Asymptotic expansions of a class of hypergeometric polynomials with respect to the order* I. Jour. Math. Anal. App. **6** (1963), 394-403.

[23] Fields, J. L. & Luke, Y. L., *Asymptotic expansions of a class of hypergeometric polynomials with respect to order II.* Jour. Math. Anal. App. **7** (1963), 440-45.

[24] Fox, C., *The* G *and* H*-functions as symmetrical Fourier Kernels.* Trans. Amer. Math. Soc. **98** (1961), 395-429.

[25] Knottnerus, A. J., *Approximation formula for generalized hypergeometric functions for Large value of the parameters* (J. B. Wolters, Groningen, 1960).

[26] Lawrynowicz, J., *On expansions of Meijer's* G*-functions. (The object of the papers and auxiliary results).* Ann. Polon. Math. **17** (1965), 245-257.

[27] ———, *On expansion of Meijer's* G*-function II. (The method of exponential factors).* Ann. Polon. Math. **18** (1966), 43-52.

[28] ———, *On expansions of Meijer's* G*-functions III (A problem of changed parameters and particular cases).* Ann. Polon. Math., **18** (1966), 147-161.

[29] Luke, Y. L., *Expansions of the Confluent hypergeometric functions in a series of Bessel functions.* MTAC, **13** (1959), 261-271.

[30] Luke, Y. L. & Colemen, R. L., *Expansion of hypergeometric functions in a series of hypergeometric functions.* Math. Comp., **15** (1961), 233.

[31] Meijer, C. S., *On the* G*-functions.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, **49** (1946), 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1072, 1165-1175.

[32] ———, *Expansion theorems for the* G*-function.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, **56** (1953), 43-49, 187-193, 349-357.

[33] ———, *Expansion theorems for the* G*-function.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, **55** (1952), 369-379, 483-487; **57** (1954), 77-91, 273-179; **58** (1955), 243-251, 309-314; **59** (1956), 70-82.

[34] Meligy, A. S., *Expansion of Whittaker functions.* Quat. J. Math. (Oxford), **10** (1959), 202-205.

[35] Rainville, E. D., *Special functions.* MacMillan & Co., Ltd., New York, (1960).

[36] Ragab, F. M., *An expansion involving confluent hypergeometric functions.* Nieuw Arch. Wiskunde, **6** (3) (1958), 52-54.

[37] Slater, L. J., *Expansions of generalized Whittaker functions.* Proc. Cambridge Philos. Soc., **50** (1959), 628-631.

[38] Srivastava, H. M., *Some expansions of generalized* Whittaker *functions.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **61** (1965), 895-896.

[39] ———, *Some expansions in products of hypergeometric functions.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **62** (1966), 245-247.

[40] ———, *Generalized* Neumann *expansions involving hypergeometric functions.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **63** (1967), 425-429.

[41] Wimp, J., *Polynomial expansions of* Bessel *functions and some associated functions.* Math. Comp. **16** (1962), 446-458.

[42] Wimp, J. & Luke, Y. L., *Expansion formulas for generalized hypergeometric functions.* Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, Serie II, Tomo XI, Anno (1962), 351-366.

Aspectos da teoria da amostragem (*)

por Rui João Baptista Soares
Laboratório de Física e Engenharia Nucleares
Sacavém — Portugal

A amostragem tem por finalidade principal a avaliação para um todo — o universo — de características a partir de uma parte — a amostra. Como trabalho estatístico que é processa-se essencialmente nas seguintes fases:

a) recolha de dados;
b) ordenação;
c) apresentação de resultados;
d) análise e interpretação dos resultados.

Tendo especificado o problema adopta-se um modelo matemático e simultâneamente métodos de amostragem que permitam, dada a impossibilidade de utilizar toda a informação, seleccionar elementos no universo.

Torna se então necessário formular um método M que será *aleatório* quando, pressupondo a existência da função condicional

$$F_i(x \mid x_1, \cdots, x_i) = P(X'_{i+1} < x \mid X'_1 = \\ = x_1, \cdots, X'_i = x_i) \quad i = 1, 2, \cdots$$

se tiver

1. $$P(X_1 < x) = F(x)$$

para todo o x

2. $$P(X_{i+1} < x \mid X_1 = x_1, \cdots, X_i = x_i) = \\ = F_i(x \mid x_1, \cdots, x_i) \quad i = 1, \cdots, n-1$$

quaisquer que sejam $x_1, \cdots, x_i$.

As amostras obtidas pelo método M dizem-se *aleatórias*. Se as variáveis aleatórias $X_1, \cdots, X_n$ são independentes a amostra é *simples*.

Podemos qualificar um método de *aceitável* quando reunir os seguintes requisitos:

A) custo reduzido;
B) rapidez e alcance suficientes;
C) precisão aceitável.

Posteriormente procede-se à optimização do método escolhido minimizando as funções

$$F_1 = C_0(\rho) + \lambda \sigma^2(\rho)$$
$$F_2 = \sigma_0(\rho) + \lambda C(\rho)$$

consoante se pretende que:

1) a variância σ^2 seja mínima para um custo prèviamente fixado;
2) o custo C seja mínimo para uma precisão exigida.

De entre os métodos probabilísticos os mais utilizados são:

1. Método elementar

Consiste em:

E_1) fraccionar o espaço num número finito ou infinito de unidades de amostra por forma que todo e qualquer elemento do universo pertença a uma única unidade;
E_2) estabelecer uma correspondência biunívoca entre cada unidade e uma bola de uma urna de Bernoulli;

(*) Este artigo contém os aspectos mais importantes de um trabalho sobre teoria de amostragem apresentado no Seminário de Estatística e Automática (5.° Ano de Matemática Aplicada de Lisboa) em 1968-1969.

E_3) dar um natural n a que daremos a designação de *volume da amostra;*

E_4) efectuar n tiragens (com reposição) da urna de BERNOULLI e anotar sempre o número da bola extraída;

E_5) a amostra compõe-se exactamente das n unidades correspondendo às n bolas extraídas.

Este método pode ser utilizado em circunstâncias mais vantajosas desde que se disponha de uma *tabela de números aleatórios;* também nalguns casos é substituído pelo método das tiragens exaustivas em que E_4) dá lugar a:

E_4') efectuar n tiragens (sem reposição) da urna de BERNOULLI e anotar sempre o número da bola extraída.

Em qualquer dos casos tem-se

$$E[\bar{x}] = m$$

caso particular do

TEOREMA 1. *Seja* $x_1, \cdots, x_n$ *uma amostra aleatória de uma população com densidade* $f(x)$. *A esperança matemática do momento central de ordem* r *da amostra é igual ao momento central, da mesma ordem, da população. Tem-se portanto*

$$E[m_r'] = \mu_r'.$$

Nas condições referidas, desde que a variância da população seja finita tem-se

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Para calcular a variância da média, no caso de tiragens exaustivas associe-se a cada bola i da urna, uma variável aleatória I_i definida por

$$I_i = \begin{cases} 0 & \text{se a bola } i \text{ ficou na urna} \\ 1 & \text{» » » } i \text{ foi extraída.} \end{cases}$$

com probabilidades

$$P(I_i = 0) = 1 - \frac{n}{N}$$

$$P(I_i = 1) = \frac{n}{N}$$

sendo N o efectivo da população.

Atendendo a

$$P[(I_i \cap I_j) = 1] = \frac{N(n-1)}{N(N-1)}$$

e

$$(1.\ 1) \qquad \sum_{i,j} x_i x_j = \left(\sum_i x_i\right)^2 - \sum_i x_i^2$$

resulta finalmente

$$\sigma_{\bar{x}_a}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \sigma_{\bar{x}}^2 \cdot (1-f);$$

$$\text{com } f = \frac{n-1}{N-1}$$

Sendo a *fracção de amostra* f desprezável segue-se que

$$\sigma_{\bar{x}_a}^2 \approx \sigma_{\bar{x}}^2$$

isto é, os métodos são pràticamente equivalentes.

2. Amostragem sistemática

Suponhamos que é possível numerar as unidades de uma população; o método consiste em:

S_1) dar um número natural r;

S_2) tomar aleatòriamente uma unidade v_1 compreendida nas r primeiras unidades da população;

S_3) tomar as unidades $u_i = v_1 + kr$, $k \in \mathbb{N}$

S_4) a amostra é constituída pelas unidades u_j.

Admitamos que o conjunto dos valores observados se encontram dispostos sob a forma de matriz

$$X = [x_{ij}] \qquad \begin{array}{l} 1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n \qquad n \geqslant 2 \end{array}$$

e consideremos as médias $\bar{x}_{i\,.}$, $\bar{x}_{.\,j}$ e $\bar{x}_{..}$ dos valores de linha, coluna e do quadro; sejam ainda σ^2, σ_1^2 e σ_2^2 as variâncias dos elementos do quadro, e das médias de linha e de coluna.

Pode então estabelecer-se a seguinte igualdade

$$(2.\,1) \qquad \sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{j<j_1} c_{jj_1}$$

onde c_{jj_1} é a covariância dos elementos correspondentes nas colunas j e j_1. A média destas quantidades é:

$$(2.\,2) \qquad \bar{c} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j<j_1} c_{jj_1}.$$

Chamaremos *correlação interna* à grandeza $\bar{\rho}$ definida por

$$(2.\,3) \qquad \bar{\rho} = \frac{\bar{c}}{\sigma^2}.$$

De (2. 1), (2. 2) e (2. 3) resulta a fórmula fundamental

$$(2.\,4) \qquad \sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{n} [1 + (n-1)\bar{\rho}]$$

que permite concluir

$$(2.\,5) \qquad \frac{1}{1-n} \leqq \bar{\rho} \leqq 1.$$

Tome-se a variância

$$(2.\,6) \qquad \sigma'^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{mn-n}{mn-1}$$

de uma média obtida numa amostra aleatória simples de efectivo n. Da comparação de (2. 4) e (2. 6) sai

$$(2.\,7) \qquad \sigma_1^2 \lesseqgtr \sigma'^2 \Longleftrightarrow \bar{\rho} \lesseqgtr \frac{1}{1-mn}$$

que permite ver quando é que a amostragem sistemática é mais precisa, de igual precisão ou menos precisa que a amostragem feita pelo método elementar.

Poder-se-ia ver [3] que a igualdade corresponde a uma distribuição ao acaso das unidades entre as linhas.

3. Amostragem por grupos.

Consideremos uma população constituída por m grupos de n_i elementos cada, $(1 \leqq i \leqq m)$ onde se pretende estudar a propriedade X tomando o valor x_{ij} no elemento número j do grupo i.

G_1) dar um número natural $(\mu < m)$;

G_2) tomar aleatòriamente μ grupos;

G_3) a amostra será constituída por

$$n = \sum_{i=1}^{\mu} n_i$$

elementos.

A tiragem dos grupos é, nalguns casos, feita com probabilidades proporcionais ao efectivo do grupo.

Admitamos que os grupos têm o mesmo efectivo e calculemos a média a partir da amostra

$$\overset{*}{x}_{..} = \frac{1}{\mu n} \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

que é uma estimação centrada de $\bar{x}_{..}$.

Por considerações análogas às feitas em 2. chega-se a

$$(3.1)\quad \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2(m-\mu)}{\mu n(m-1)} \cdot [1+(n-1)\bar{\rho}].$$

Como, no caso presente

$$(3.2)\qquad \sigma'^2 = \frac{\sigma^2}{\mu n} \cdot \frac{mn-\mu n}{mn-1}$$

podemos comparar as expressões (3. 1) e (3. 2) tal como em 2. relativamente à fórmula (2. 7).

Fazendo $\mu = 1$ e calculando o limite quando n aumenta indefinidamente vê-se que

$$\bar{\rho} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}$$

e que serve, para alguns estatísticos, como definição de coeficiente de correlação.

Suponhamos que a característica estudada é quantitativa com duas alternativas; seja:

p_i — a proporção dos elementos do grupo i para os quais $x = 1$;

$p = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} p_i$ — a proporção para o conjunto dos grupos.

Sabe-se, da análise de variância, que:

$$(3.3)\qquad pq = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} p_i q_i - \sigma_1^2$$

donde, atendendo a (2. 4), se tem:

$$(3.4)\qquad \bar{\rho} = \frac{1}{mpq}\left[\sum_{i=1}^{m}(p_i-p)^2 - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} p_i q_i\right]$$

que permite calcular a correlação interna.

4. Amostragem por etapas.

Consideremos um universo constituído por k unidades primárias (abreviadamente u. p.) das quais l são tiradas pelo método exaustivo. Cada u. p. compreende um número variável m_i $(1 \leqq i \leqq l)$ de unidades secundárias. De cada u. p. tiraremos pelo processo elementar n_i unidades secundárias (abreviadamente u. s.), para formar a amostra pretendida que terá o efectivo

$$(4.1)\qquad n = \sum_{i=1}^{l} n_i .$$

Seja x_i^j o valor da característica X a estudar, na u. s. número j da u. p. número i.

Vamos ver que a grandeza

$$(4.2)\qquad \mu^* = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{m_i}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_i^j$$

dá um estimador centrado de

$$(4.3)\qquad \mu = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} x_i^j$$

isto é

$$E[\mu^*] = \mu$$

Definam-se as grandezas $\bar{x}_i$, $\bar{\bar{x}}_i$, $\hat{x}_i$ pelas expressões

$$(4.4)\qquad \bar{x}_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} x_i^j$$

$$(4.5)\qquad \bar{\bar{x}}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_i^j$$

$$(4.6)\qquad \hat{x}_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_i^j .$$

Considerando a u. p. número i como um universo distinto tem-se

$$(4.7)\qquad E_i[\mu^*] = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\hat{x}_i$$

e, de acordo com (4. 6), vem, então

$$E[\mu^*]=E[\hat{x}_i]=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}x_i^j \tag{4. 8}$$

como se pretendia.

Para calcular a variância de μ^* notemos que

$$E[(m_i\overline{\overline{x}}_i-\mu)^2]=E[m_i^2(\overline{\overline{x}}_i-\overline{x}_i)^2]+ \\ +E[(\hat{x}_i-\mu)^2] \tag{4. 9}$$

$$v_i[\overline{\overline{x}}_i]=\frac{\sigma_i^2}{n_i}\cdot\frac{m_i-n_i}{m_i-1} \tag{4. 10}$$

$$v[\hat{x}_i]=\sigma^2\cdot\frac{k-l}{k-1} \tag{4. 11}$$

onde σ_i^2 é a variância dos x_i^j no interior da u. p. número i. Tem-se pois

$$v[\mu^*]=\frac{1}{l^2}\left\{\sum_{i=1}^{l}E[(m_i\overline{\overline{x}}_i-\mu)^2]\right\}= \\ =\frac{1}{l}\left[\sigma^2\frac{k-l}{k-1}+\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}m_i^2\frac{\sigma_i^2}{n_i}\cdot\frac{m_i-n_i}{m_i-1}\right] \tag{4. 12}$$

onde a primeira parcela do último membro representa a parte de $v[\mu^*]$ devida às flutuações da amostra constituída pelas u. p. e costuma chamar-se-lhe *variância entre as unidades primárias de amostragem.*

Quanto à segunda parcela, ela representa a parte da variância imputável às flutuações da amostra constituída pelas u. s. no interior da u. p. número i e chama-se-lhe *variância entre as unidades secundárias no interior das unidades primárias de amostragem.*

A generalização a mais etapas torna-se complicada pois mesmo para o caso de três tipos de unidades seria necessário considerar em (4. 12) mais um termo que traduzisse a *variância entre as unidades terciárias no interior das unidades secundárias* (1).

(1) Para um estudo mais detalhado veja-se [3].

5. Amostragem por estratificação.

Consideremos uma população de N unidades dividida prèviamente em l subpopulações — estratos — de $N_1, \cdots, N_l$ unidades respectivamente, e de tal forma que

$$\sum_{h=1}^{l}N_h=N \tag{5. 1}$$

após o que se tira independentemente uma amostra de cada estrato podendo ou não ter o mesmo efectivo.

A amostra estratificada será constituída por

$$n=\sum_{h=1}^{l}n_h \tag{5. 2}$$

elementos; n_h é o número de unidades da amostra colhida no estrato h.

Designaremos por

x_{hi} — valor da unidade número i no estrato h;

$\overline{X}$ — média verdadeira da população;

$\overline{X}_h$ — média verdadeira no estrato h;

S_h^2 — variância verdadeira do estrato h;

$\overline{x}$; $\overline{x}_h$, s_h^2 representarão os valores observados, para a população e estrato.

Usando o estimador

$$\overline{x}_{st}=\frac{\sum_{h=1}^{l}N_h\overline{x}_h}{N} \tag{5. 3}$$

conclui-se

$$\overline{x}_{st}=\overline{x}\Longleftrightarrow\frac{N}{n}=\frac{N_h}{n_h}=\text{constante.} \tag{5. 4}$$

Diz-se que a estratificação é *proporcional.*

As principais propriedades de $\overline{x}_{st}$ aplicáveis a amostras estratificadas são as que se descrevem nos seguintes teoremas:

TEOREMA 1. *Se em cada estrato* $\bar{x}_h$ *é um estimador centrado de* $\bar{X}_h$, *então* $\bar{x}_{st}$ *é um estimador centrado da média* $\bar{X}$.

Seja

(5. 5) $\quad \sigma^2(\bar{x}_h) = E[(\bar{x}_h - \bar{X}_h)^2]$

e admitamos que

a) $E[\bar{x}_h] = \bar{X}_h$;

b) as amostras são extraídas independentemente nos diferentes estratos.

Nestas condições tem-se:

TEOREMA 2. *Para a amostra estratificada a variância de* $\bar{x}_{st}$, *como estimador de* $\bar{X}$ *é*

$$(5.6) \qquad \sigma^2(\bar{x}_{st}) = \frac{\sum_{h=1}^{l} N_h^2 \sigma^2(\bar{x}_h)}{N^2}.$$

Este teorema diz-nos que $\sigma^2(\bar{x}_{st})$ depende sòmente das variâncias das médias individuais de cada estrato.

Como em cada estrato individualmente se tem

$$\sigma^2(\bar{x}_h) = \frac{S_h^2}{n_h} \cdot \frac{N_h - n_h}{N_h}$$

segue-se

$$(5.6') \qquad \sigma^2(\bar{x}_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{l} N_h (N_h - n_h) \frac{S_h^2}{n_h}.$$

Em particular se as fracções de amostra

$$(5.7) \qquad f_h = \frac{n_h}{N_h}$$

são desprezáveis em todos os estratos virá

$$(5.8) \qquad \sigma^2(\bar{x}_{st}) = \sum_{h=1}^{l} \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h}$$

onde W_h é o peso do estrato h.

Se admitirmos ainda que a estratificação é proporcional, a variância reduz-se a

$$(5.9) \qquad \sigma^2(\bar{x}_{st}) = \frac{N - n}{n N} \sum_{h=1}^{l} W_h S_h^2.$$

O uso da estratificação envolve as seguintes operações:

1) escolha da variável de estratificação;
2) escolha do número l de estratos;
3) determinação do processo de estratificação;
4) escolha do efectivo da amostra em cada estrato.

O teorema seguinte indica-nos um resultado importante estabelecido por TSCHUPROW (1923) e NEYMANN (1934).

TEOREMA 3. *Numa amostra aleatória estratificada, a variância* $\sigma^2(\bar{x}_{st})$ *é mínima, para um total de amostra fixo, se a amostra é repartida com* n_h *proporcional a* $N_h S_h$.

A demonstração pode fazer-se minimizando (5. 6') sujeita a (5. 2); com efeito, da relação

$$(5.10) \qquad F = \sigma^2(\bar{x}_{st}) + \lambda \left(\sum_{h=1}^{l} n_h - n \right)$$

obtem-se

$$(5.11) \qquad n_h = \frac{N_h S_h}{N \sqrt{\lambda}} = n \frac{N_h S_h}{\sum_{h=1}^{l} N_h S_h}$$

valor que substituído em $\sigma^2(\bar{x}_{st})$ dá

$$(5.12) \qquad \sigma^2_{\min}(\bar{x}_{st}) = \frac{1}{N^2} \left[\frac{\left(\sum_{h=1}^{l} N_h S_h \right)^2}{n} - \sum_{h=1}^{l} N_h S_h^2 \right].$$

Admitindo que a função custo se compõe de uma parte directamente proporcional ao volume da amostra (dentro de um estrato), mas onde o custo por unidade varia de estrato para estrato, e de outra parte visando gastos diversos podemos escrever

$$C = a + \sum_{h=1}^{l} C_h n_h . \tag{5.13}$$

Ter-se-á neste caso

Teorema 4. *Com uma função custo do tipo* (5.13) *a variância* $\sigma^2(\bar{x}_{st})$ *é mínima quando*

$$n_h = n \cdot \frac{\dfrac{N_h S_h}{\sqrt{C_h}}}{\displaystyle\sum_{h=1}^{l} \frac{N_h S_h}{\sqrt{C_h}}}, \tag{5.14}$$

o que conduz às seguintes regras: num dado estrato toma-se uma maior amostra se

a) *o estrato é maior;*

b) *o estrato é mais heterogéneo;*

c) *o custo da operação é mais barato.*

Vamos fazer seguidamente algumas considerações que permitirão estudar um critério (Teorema 5) de comparação das precisões obtidas pelos métodos da repartição óptima, proporcional e aleatória simples.

Do estudo da decomposição de quadrados e porque $\dfrac{1}{N_h}$ é desprezável pode escrever-se

$$N S^2 = \sum_{h=1}^{l} [N_h S_h^2 + N_h (\bar{X}_h - \bar{X})^2]. \tag{5.15}$$

Quando n é muito pequeno quando comparado com N tem-se

$$\sigma_a^2 = \frac{S^2}{n} \tag{5.16}$$

$$\sigma_{\text{prop}}^2 = \frac{\sum_{h=1}^{l} N_h S_h^2}{n N} \tag{5.17}$$

$$\sigma_{\text{opt}}^2 = \frac{\left(\sum_{h=1}^{l} N_h S_h\right)^2}{n N^2} \tag{5.18}$$

e portanto

$$\sigma_a^2 = \sigma_{\text{prop}}^2 + \frac{\sum_{h=1}^{l} N_h (\bar{X}_h - \bar{X})^2}{n N} \tag{5.19}$$

Da definição de σ_{opt}^2 resulta

$$\sigma_{\text{prop}}^2 - \sigma_{\text{opt}}^2 = \tag{5.20}$$

$$= \frac{1}{n N} \left[\sum_{h=1}^{l} N_h S_h^2 - \frac{\left(\sum_{h=1}^{l} N_h S_h\right)^2}{N} \right].$$

Definindo $\bar{S}$ pela igualdade

$$\bar{S} = \frac{\sum_{h=1}^{l} N_h S_h}{N} \tag{5.21}$$

virá, atendendo a (5.19) e (5.20)

$$\sigma_a^2 = \sigma_{\text{opt}}^2 + \frac{\sum_{h=1}^{l} N_h (S_h - \bar{S})^2}{n N} + \tag{5.22}$$

$$+ \frac{\sum_{h=1}^{l} N_h (\bar{X}_h - \bar{X})^2}{n N}.$$

Nas mesmas condições do teorema pode estabelecer-se

$$(5.23)\qquad \sigma_a^2 = \sigma_{\text{prop}}^2 + \frac{(N-n)}{Nn(N-1)} \cdot \left[\sum_{h=1}^{l} N_h (\overline{X}_h - \overline{X})^2 - \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{l} (N - N_h)\, S_h^2 \right].$$

Ter-se-á portanto:

TEOREMA 5. *Se os termos* f_h *são desprezáveis tem-se*

$$(5.24)\qquad \sigma_{\text{opt}}^2 \leqq \sigma_{\text{prop}}^2 \leqq \sigma_a^2$$

em que a repartição óptima é para um n *fixo e* n_h *dado por* (5.11).

Suponhamos que a população em estudo pode ser representada pela função de frequência $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ e que pretendemos dividi-la em l estratos.

Considerem-se as grandezas W_h, μ, μ_h definidas por

$$(5.25)\qquad W_h = \int_{x_{h-1}}^{x_h} f(\alpha)\, d\alpha$$

$$(5.26)\qquad \mu = \sum_{h=1}^{l} W_h \cdot \mu_h$$

$$(5.27)\qquad \mu_h = \frac{1}{W_h} \int_{x_{h-1}}^{x_h} \alpha \cdot f(\alpha)\, d\alpha .$$

Admitamos ainda que a função custo se obtém de (5.13) fazendo $a=0$ para qualquer dos quatro casos seguintes:

1) repartição proporcional

$$n_h \approx n \cdot W_h$$

2) repartição com variância mínima

$$n_h \approx S_h \cdot W_h$$

3) repartição óptima

$$n_h \approx \frac{S_h \cdot W_h}{\sqrt{C_h}}$$

4) especial $n_1 < N_1$, $n_2 = N_2$

a que correspondem as variâncias

$$(5.28)\qquad \sigma_{\text{prop}}^2 = \frac{\sum_{h=1}^{l} W_h S_h^2}{n}$$

$$(5.29)\qquad \sigma_{\text{min}}^2 = \frac{\left(\sum_{h=1}^{l} W_h S_h \right)^2}{n}$$

$$(5.30)\qquad \sigma_{\text{opt}}^2 = \frac{\left(\sum_{h=1}^{l} W_h S_h \sqrt{C_h} \right)^2}{C}$$

$$(5.31)\qquad \sigma_{\text{esp}}^2 = W_1^2\, \frac{S_1^2}{n_1} \cdot \frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} .$$

Definindo a função

$$\Phi_{\bullet}(x_1, \cdots, x_{l-1}) = n \cdot \sigma_{\bullet}^2$$

deduzem-se os pontos divisórios x_h a partir da igualdade

$$\frac{\partial \Phi_{\bullet}}{\partial x_h} = 0$$

Quanto à determinação do número óptimo de estratos a ideia básica é a possibilidade de diminuição da variância de um estimador aumentando o número de estratos. Assim, para um estimador $\hat{\theta}$, e para cada valor de

l, computam-se os valores $\sigma^2(\hat{\theta}\,;l)$ e pode dizer-se que

$$G = \sigma^2(\hat{\theta}\,; l-1) - \sigma^2(\hat{\theta}\,; l)$$

representa o ganho, em precisão, devido ao aumento do número de estratos.

A questão delicada é determinar uma relação que traduza, em cada caso concreto, o modo como variam

$$\sigma^2(\hat{\theta}\,;1) \text{ e } \sigma^2(\hat{\theta}\,;l) \qquad l>1$$

admitindo em tudo o que se disse que o estimador é linear.

*

* *

Este trabalho pretende dar algumas indicações muito gerais sobre certos problemas da teoria da amostragem, mostrando as vantagens e inconvenientes que aparecem nos diferentes tipos de amostragem considerados.

Por falta de tempo não foi possível fazer o estudo da determinação do número óptimo de estratos além dos casos analisados por Dalenius [2] com as funções de frequência $f(x)=1$, $f(x)=e^{-x}$ e $f(x)=x\,e^{-x}$; para as duas últimas sugeriu uma relação do tipo

$$\sigma^2(\hat{\theta}\,;l) = \frac{1}{\left(\dfrac{l}{1-l}\right)^2}\,\sigma^2(\hat{\theta}\,;l-1)$$

enquanto para a primeira obteve

$$\sigma^2(\hat{\theta}\,;k\,l) = \frac{1}{k^2}\,\sigma^2(\hat{\theta}\,;l)$$

Também era intenção testar a tabela [5] mas como se pretende ir até aos 10.000 números, só então o faremos.

048353	814391	621032	996691
050464	431130	694510	815310
116654	715461	547388	606533
154708	578817	866132	267673
227814	635385	020554	363950
242031	504103	602206	114080
256814	046143	275966	046249
329401	775413	081605	730905
332235	498178	167277	733028
402155	065299	003607	685231
410801	540368	866636	376959
536636	981401	508121	367880
548182	254898	677122	920347
592369	620259	551168	572190
666488	590136	645844	904475
680845	051960	206773	091913
717442	914135	248036	200358
735340	031841	184284	406448
762768	060569	257898	373732
774669	213371	833357	178320
808781	126376	752491	504864
846617	957137	032188	528942
896836	371617	655202	201562
947131	213648	502064	326807
957141	168828	770483	064670

Extraída de [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] Cochram, William *Sampling Techniques* — 1963 — 2.ª edição — John Wiley & Sons, Inc. New York.

[2] Dalenius, Tore *Sampling on Sweden* — 1957 — Almqyst & Wiksell — Estocolmo.

[3] *La Theorie des sondages* N.os 5 e 6 — 1953 — I. N. S. E. E. Paris.

[4] Soares, Rui *Alguns aspectos da Teoria da amostragem* — 1969, Faculdade de Ciências de Lisboa.

[5] ———, Tábua de 5.000 números aleatórios.

O que é a Análise Não-Standard? (I)

por A. J. Franco de Oliveira (*)

1. Introdução.

A *Análise Não-Standard* (ANS, daqui em diante([1])) é essencialmente um *método* matemático, método novo com características originais, baseado em alguns resultados fundamentais da *Teoria dos Modelos*, ramo recente (uma vintena de anos) da Lógica Matemática, em pleno florescimento. As suas raízes, e também a sua motivação, mergulham, contudo, no passado.

São conhecidas as tentativas (infrutíferas) de fundar o Cálculo Diferencial numa teoria coerente dos Infinitamente Pequenos (Infinitésimos, ou Infinitesimais) e Infinitamente Grandes por LEIBNIZ, NEWTON e sucessores, incluindo o próprio CAUCHY. A Teoria dos Limites, impulsionada por WEIERSTRASS, acabou, porém, por ser preferida à primeira ([2]). Pois bem, a ANS, inicialmente orientada para esse fim, permite, entre outras coisas, uma formulação consistente e satisfatória do *método dos infinitesimais*([3]), e, tal como outras grandes descobertas, são já em grande número e variedade os resultados estabelecidos via ANS, para os quais ainda não tinha sido encontrada solução por métodos «standard». Por outro lado, muitos resultados e teorias clássicas ganharam novo alcance e significação quando interpretados ou reformulados à luz da ANS([4]). Na verdade, o método é extensivo a toda a Análise, clássica ou funcional, e poderá ser de grande utilidade em Geometria Diferencial, em disciplinas como Mecânica Analítica, Quântica, e, em geral, na formulação de diversos conceitos da Física. Julgamos não exagerar ao antever uma nova Pedagogia no ensino das noções fundamentais do Cálculo, apoiada nos infinitesimais...

Convém observar desde já, porém, que não há grande novidade nos instrumentos matemáticos (ou Lógicos) em jogo: não há necessidade de nenhum axioma novo da Matemática. Apenas se fez um uso criterioso de resultados conhecidos. Esses resultados é que são extraordinários, em si próprios, e certamente impensáveis na época recuada dos fundadores da Análise moderna. Existe mesmo um processo geral para transcrever toda a demonstração na ANS numa demonstração clássica, «standard». As razões do interesse que tem o novo método são outras: a sua feição intuitiva marcada indica-o particularmente como *método de descoberta*, o que justifica algumas das nossas observações anteriores.

O objectivo deste primeiro artigo é despertar interesse pelo assunto, criar um ambiente de receptividade, indicar algumas leituras básicas indispensáveis. Porque, efectivamente, ainda há (muito) quem olhe com desconfiança estas coisas da Lógica Matemática, da Metamatemática, dos próprios Fundamentos, etc., e outros há que julgam as teorias apenas em função dos seus resultados práticos... Em consequência, a discussão é relativamente informal, para as demonstrações remetemos às notas bibliográficas. Num segundo artigo, desenvolvemos o método e fazemos algumas aplicações. Esperamos igualmente, em artigos de outra índole, proceder à divulgação de alguns conceitos e resultados essenciais da Lógica Matemática, nomea-

---

(*) Bolseiro do Instituto de Alta Cultura.

damente da Teoria dos Modelos, que servem de base às investigações e desenvolvimentos actuais.

2. Linguagens formais.

Pressupomos alguma familiariedade com o Cálculo de Predicados Elementar, nos aspectos descritivo-semântico e sintático-axiomático. Para facilitar a leitura, recordamos alguns conceitos e notações, e enunciamos alguns resultados porventura menos conhecidos mas de importância decisiva na formulação do que segue (5).

Os sistemas lógicos adoptados hoje em dia para a descrição e formalização das teorias matemáticas são *linguagens formais*, no sentido abaixo indicado, de que é exemplo o Cálculo de Predicados Restringido (ou de 1.ª ordem, por se quantificarem apenas as variáveis). Outro exemplo bastante completo é fornecido por Bourbaki na sua «Théorie des Ensembles». De momento, interessa fixar a noção de *linguagem* (ou *teoria*) *formal de Primeira Ordem*, L, o que se faz comumente especificando as seguintes condições:

A) são dados certos símbolos, chamados *símbolos de* L: (símbolos de) *variáveis* individuais $x_1, x_2, x_3, \cdots$ em quantidade infinita numerável; (símbolos de objectos individuais, ou-) *constantes* individuais $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_\alpha, \cdots$ em quantidade finita ou transfinita; símbolos (de relações, ou-) *relacionais* $A_j^k(,\cdots,)$, $j=1,2,3,\cdots$ (índice de numeração dos símbolos), $k=0,1,2,\cdots$ (índice que indica o número de argumentos); símbolos (de funções, ou-) *funcionais* $f_j^k(,\cdots,)$, $j,k=1,2,3,\cdots$; (símbolos dos) *conectivos* lógicos $\sim$ (negação), $\vee$ (disjunção), $\wedge$ (conjunção), $\Rightarrow$ (implicação), $\Leftrightarrow$ (equivalência); e, finalmente, dos *quantificadores* lógicos $(\forall\ )$ (universal), $(\exists\ )$ (existencial).

Podem ainda considerar-se como símbolos de L os parênteses [e] que desempenham um papel de pontuação.

B) *Regras de formação de termos*: as variáveis e as constantes individuais são termos e, se $t_1, \cdots, t_k$ são termos e $f_j^k(,\cdots,)$ é um símbolo funcional, $f_j^k(t_1, \cdots, t_k)$ é um termo. Não há outros termos além dos determinados por estas regras.

C) *Regras de formação de fórmulas*: se $t_1, \cdots, t_k$ são termos e $A_j^k(,\cdots,)$ é um símbolo relacional, $A_j^k(t_1, \cdots, t_k)$ é uma fórmula, dita *atómica*. Se A é uma fórmula (6), $[\sim \mathsf{A}]$ é uma fórmula, e se A e B são fórmulas, $[\mathsf{A} \vee \mathsf{B}]$, $[\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}]$, $[\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}]$, $[\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}]$ são também fórmulas. Se A é uma fórmula em que não ocorrem as expressões «$(\forall \mathsf{x})$», «$(\exists \mathsf{x})$», então $[(\forall \mathsf{x})\mathsf{A}]$ e $[(\exists \mathsf{x})\mathsf{A}]$ são fórmulas. Não há outras fórmulas além destas.

Supomos intuitivamente claro o que se entende por ««$(\forall \mathsf{x})$» ocorre em A», «B ocorre em A», etc. Igualmente supomos conhecida a distinção entre *ocorrência livre* (i. e. não quantificada) e *ocorrência muda* ou *aparente* (i. e. quantificada) de uma variável numa fórmula. Para indicar que numa fórmula A pode ocorrer livre a variável x usamos a notação $\mathsf{A}(\mathsf{x})$. Representamos então por $\mathsf{A}(\mathsf{a})$ o resultado de substituir em toda a parte x por a em $\mathsf{A}(\mathsf{x})$. Anàlogamente para duas ou mais variáveis. Na fórmula

$$[(\forall(\mathsf{x})[[(\exists y)\mathsf{A}(\mathsf{x},y)] \Rightarrow \mathsf{A}(\mathsf{x},\mathsf{z})]]$$

as variáveis x e y ocorrem mudas, enquanto z ocorre livre. Adoptamos as convenções usuais para simplificação da escrita suprimindo parêntesis, desde que essa supressão não comprometa a legibilidade das fórmulas. A fórmula acima escrever-se-á simplesmente $(\forall \mathsf{x})[(\exists \mathsf{y})\mathsf{A}(\mathsf{x},\mathsf{y}) \Rightarrow \mathsf{A}(\mathsf{x},\mathsf{z})]$.

Uma fórmula sem variáveis livres (quer dizer, sem ocorrências livres de variáveis) diz-se *fechada*. A terminologia introduzida encontra a sua justificação ao pretendermos *interpretar* a nossa linguagem formal num determinado domínio matemático, como se verá no parágrafo seguinte.

D) Juntamente com os símbolos e as regras anteriores, é costume especificar um certo número de regras que determinam a classe dos *Teoremas* de L. Algumas destas regras estabelecem que certas fórmulas, são teoremas; estas fórmulas dizem-se então *axiomas* de L. Outras, são *regras de inferência*, a mais importante das quais é a clássica *modus ponens:* se A e $[\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}]$ são teoremas então B é um teorema. Há que distinguir os *axiomas lógicos*, comuns a todas as teorias formais (de 1.ª ordem), dos *axiomas próprios*, que variam de teoria para teoria. As regras de inferência são também, geralmente, comuns a todas as teorias. É para nós indiferente o sistema de axiomas (lógicos) e de regras de inferência a adoptar (7).

Supomos portanto definida, para cada linguagem ou teoria formal L, a classe dos teoremas de L, por um qualquer dos processos usuais.

Indica-se que uma fórmula A é um teorema de L escrevendo

$$\vdash_L \mathsf{A},$$

ou simplesmente $\vdash \mathsf{A}$, se não houver possibilidade de confusão. Dado um conjunto K de fórmulas de L, dizemos que A é *dedutível* de K, e escreve-se $K \vdash_L \mathsf{A}$ (ou simplesmente $K \vdash \mathsf{A}$) se A for um teorema da teoria que se obtém juntando aos axiomas de L as fórmulas de K.

Em geral, uma teoria L' diz-se uma *extensão* de uma teoria L se todos os símbolos de L forem símbolos de L' e todo o teorema de L for um teorema de L' (basta para tanto que todo o axioma próprio de L seja um teorema de L').

EXEMPLOS. I *Teoria (de 1.ª ordem) dos sistemas parcialmente ordenados.* A linguagem formal dos sistemas parcialmente ordenados tem dois símbolos relacionais $A_1^2(,)$, $A_2^2(,)$, não tem constantes nem símbolos funcionais. Escrevemos $x_i = x_j$ e $x_i \leqq x_j$ em vez de $A_1^2(x_i, x_j)$ e $A_2^2(x_i, x_j)$ respectivamente, para usar a notação comum. Nesta teoria são axiomas próprios as fórmulas:

(1) $$(\forall x_1)[x_1 = x_1]$$

(2) $$(\forall x_1)(\forall x_2)[x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1]$$

(3) $$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)[x_1 = x_2 \Rightarrow \Rightarrow [x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3]]$$

(4) $$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)[x_1 = x_3 \wedge \wedge x_2 = x_4 \wedge x_1 \leqq x_2 \Rightarrow x_3 \leqq x_4]$$

(5) $$(\forall x_1)[x_1 \leqq x_1]$$

(6) $$(\forall x_1)(\forall x_2)[x_1 \leqq x_2 \wedge \wedge x_2 \leqq x_1 \Rightarrow x_1 = x_2]$$

(7) $$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)[x_1 \leqq x_2 \wedge \wedge x_2 \leqq x_3 \Rightarrow x_1 \leqq x_3]$$

II *Teoria (de 1.ª ordem) dos grupos.* A linguagem formal dos grupos tem um símbolo relacional $A_1^2(,)$, um símbolo funcional $f_1^2(,)$ e uma constante a_1. Escrevemos mais uma vez $x_i = x_j$ em vez de $A_1^2(x_i, x_j)$ e, para usar a notação aditiva, pomos $x_i + x_j$ em vez de $f_1^2(x_i, x_j)$ e 0 em vez de a_1. São axiomas próprios os três primeiros axiomas do exemplo anterior e ainda os seguintes:

(8) $$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)[x_2 = x_3 \Rightarrow \Rightarrow [x_1 + x_2 = x_1 + x_3 \wedge x_2 + x_1 = x_3 + x_1]]$$

(9) $$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)[x_1 + (x_2 + x_3) = = (x_1 + x_2) + x_3]$$

(10) $$(\forall x_1)[0 + x_1 = x_1]$$

(11) $$(\forall x_1)(\exists x_2)[x_2 + x_1 = 0].$$

A *teoria dos grupos abelianos*, em que também é axioma próprio a fórmula

$$(\forall x_1)(\forall x_2)[x_1 + x_2 = x_2 + x_1],$$

é uma extensão da teoria dos grupos.

OBSERVAÇÃO. Há evidentemente outras formulações equivalentes destas teorias. Em particular, pode formular-se a teoria (de 1.ª ordem) dos grupos com símbolos relacionais sòmente, utilizando, por exemplo, um só símbolo relacional, $A_1^3(x_1, x_2, x_3)$ no lugar de $x_1 + x_2 = x_3$. Os axiomas teriam de ser formulados em conformidade. Estas observações estendem-se naturalmente a todas as teorias formais com símbolos funcionais e *com igualdade*, i. e. com um símbolo relacional $A_1^2(\,,\,)$ tal que são axiomas próprios as fórmulas (1), (2), (3) e um ou mais *axiomas de substitutividade* (que exprimem que «objectos iguais devem ter as mesmas propriedades», (4) e (8)) conforme os símbolos relacionais e funcionais em presença, de modo que estes são *teòricamente* dispensáveis.

Uma linguagem (ou teoria) formal L diz-se *(formalmente) consistente* se não existir em L uma fórmula A tal que A e $[\sim \mathsf{A}]$ são teoremas de L [8]. Mais geralmente, um conjunto K de fórmulas de L diz-se (formalmente) consistente se, juntando as fórmulas de K aos axiomas de L, a teoria L' assim obtida é consistente. Caso contrário, K (em particular, $\{\mathsf{A}\}$) diz-se *contraditória.* Como se sabe, numa teoria contraditória, toda a fórmula é um teorema.

Chamamos *vocabulário* de um conjunto K de fórmulas de L ao conjunto de todos os símbolos (relacionais, funcionais, constantes, etc.) que ocorrem nas fórmulas de K.

3. Estruturas, interpretações, modelos.

As linguagens formais de 1.ª ordem são suficientes para definir e descrever muitas propriedades das estruturas matemáticas correntes, nomeadamente muitas estruturas algébricas.

Recordemos que uma estrutura (de 1.ª ordem) é um par $<M, \mathfrak{R}>$ constituído por um conjunto não vazio M e um sistema $\mathfrak{R}$ de relações unárias, binárias, etc., definidas em M (uma relação de ordem zero em M identifica-se com um elemento de M [9]). Por abuso de linguagem, chamamos estrutura ao próprio conjunto M (que é apenas o *suporte* da estrutura), quando não haja necessidade de especificar as relações da estrutura em causa.

Para descrever uma estrutura M por meio de uma linguagem formal L é necessário, pois, interpretar esta em M. Uma *interpretação de uma linguagem* (de 1.ª ordem) L *numa estrutura* (de 1.ª ordem) M é uma correspondência (unívoca) que a cada constante de um subconjunto do conjunto das constantes de L associa um elemento de M, e a cada símbolo relacional $A_j^k(\,,\cdots,\,)$ de um subconjunto do conjunto dos símbolos relacionais de L associa uma relação k-ária em M [10]. Podemos desde já supor que L contém símbolos em quantidade igual ou superior à dos elementos ou relações correspondentes em M. Dada M, se esta condição não se verificasse, considerávamos uma extensão L' de L conveniente; vê-se fàcilmente que as considerações seguintes não dependem significativamente da extensão particular que se tome.

Uma fórmula A de L diz-se *interpretada em* M se todas as constantes ou símbolos relacionais de A têm correspondente em M (com respeito à interpretação dada). Por outro lado, as variáveis livres de A têm como «domínio de variação» o conjunto M. A definição estende-se imediatamente a um conjunto de fórmulas de L.

Suponhamos fixada uma interpretação de L numa estrutura M, e consideremos uma fórmula qualquer A, fechada, interpretada em M. Definiremos em seguida a noção semântica de *fórmula verdadeira em* M (com respeito à interpretação dada) (11):

(*i*) Se A é uma fórmula atómica,

$$\mathsf{A} = A_j^k(\mathfrak{t}_1, \cdots, \mathfrak{t}_k)(^{12}),$$

sendo $\mathfrak{t}_1, \cdots, \mathfrak{t}_k$ interpretados nos elementos $t'_1, \cdots, t'_k$ de M, então A é verdadeira (em M, com respeito $\cdots$) se e só se o sistema $(t'_1, \cdots, t'_k)$ verifica a relação R_j^k em M correspondente ao símbolo relacional $A_j^k(,\cdots,)$, na interpretação dada (por outras palavras, $(t'_1, \cdots, t'_k)$ pertence ao subconjunto R_j^k de M^k).

(*ii*) Se $\mathsf{A} = [\sim \mathsf{B}]$, então A é verdadeira sse (abreviatura de «se e só se») B é falsa (ver nota (11)); se $\mathsf{A} = [\mathsf{B} \vee \mathsf{C}]$, A é verdadeira sse B é verdadeira ou C é verdadeira; se $\mathsf{A} = [\mathsf{A} \wedge \mathsf{C}]$, A é verdadeira sse B e C são ambas verdadeiras; se $\mathsf{A} = [\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}]$, A é verdadeira sse C é verdadeira ou B e C são ambas verdadeiras; finalmente, se $\mathsf{A} = [\mathsf{B} \Leftrightarrow \mathsf{C}]$, A é verdadeira sse B e C são ambas verdeiras ou ambas falsas.

(*iii*) Se $\mathsf{A} = [(\exists\, \mathsf{x})\, \mathsf{B}(\mathsf{x})]$, A é verdadeira em M sse existe uma constante $\mathfrak{a}$ de L tal que $\mathsf{B}(\mathfrak{a})$ é verdadeira em M ($\mathfrak{a}$ corresponde necessàriamente a um elemento a' de M por meio da interpretação dada). Se x não ocorre em B, deve entender-se que A é verdadeira sse B o for. Se

$$\mathsf{A} = [(\forall\, \mathsf{x})\, \mathsf{B}(\mathsf{x})],$$

A é verdadeira em M sse para toda a constante $\mathfrak{a}$ de L com elemento correspondente a' de M (por meio de interpretação dada), $\mathsf{B}(\mathfrak{a})$ é verdadeira em M.

As condições anteriores determinam, para toda a fórmula fechada de L, se ela é verdadeira ou falsa em M (com respeito à interpretação dada). Note-se que a verdade ou falsidade de uma fórmula fechada A interpretada numa estrutura M, depende apenas da interpretação das constantes e símbolos relacionais que ocorrem em A (i. e., da correspondência entre esses símbolos e os correspondentes elementos e relações de M). Estas observações estendem-se de maneira óbvia a um conjunto qualquer de fórmulas de L.

Seja K um conjunto de fórmulas fechadas de L, M uma estrutura, e $\Phi(L;M)$ (ou simplesmente Φ) uma interpretação de L em M tal que todas as fórmulas de K estão interpretadas em M. Se todas as fórmulas de K são Φ-verdadeiras (quer dizer, são verdadeiras em M com respeito a Φ), dizemos que M é um *modelo* de K (com respeito a Φ). Em particular, se uma fórmula (fechada) A é Φ-verdadeira, M é um modelo de A. Um modelo da classe dos teoremas de uma teoria formal L diz-se um modelo de L. Basta, para tanto, que seja modelo do conjunto dos axiomas de L (15).

Exemplos. I′ Um modelo da teoria formal dos sistemas parcialmente ordenados (Exemplo I) diz-se um *sistema (ou conjunto) parcialmente ordenado*. Para qualquer conjunto E, a estrutura $< \mathscr{P}(E), \subseteq >$ é um modelo da referida teoria com respeito à interpretação que associa o símbolo relacional $\leqq$ à relação de inclusão em $\mathscr{P}(E)$.

II′ Chama-se *grupo* a todo o modelo da teoria formal dos grupos (Exemplo II). Deixamos ao cuidado do leitor a concretização destes modelos.

Um conjunto K de fórmulas fechadas de L diz-se (semânticamente) *consistente* se possuir um modelo. No caso contrário, diz-se (semânticamente) *contraditório*. O leitor definirá, por analogia, os conceitos correspondentes para uma fórmula (fechada) e para uma teoria formal L.

Se uma fórmula fechada A é verdadeira em todo o modelo de um conjunto de fórmulas fechadas K (onde $K \cup \{\mathsf{A}\}$ seja interpretado), A diz-se *consequência* (semântica) *de* K; escreve-se então $K \models \mathsf{A}$. Se A

fôr verdadeira em toda a estrutura onde seja interpretada, então A dir-se-à *universalmente* (ou *lògicamente*) *válida*, e nesse caso escreveremos $\models \mathsf{A}$. Veremos no parágrafo seguinte algumas relações entre estes conceitos semânticos e os correspondentes conceitos formais (ou sintáticos, fim do parágrafo anterior).

Duas estruturas $< M, \mathfrak{R} >$ e $< M', \mathfrak{R}' >$ dizem-se *semelhantes* se $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$, i. e. se tiverem as mesmas relações. Dadas duas estruturas semelhantes M e M', M diz-se uma *subestrutura* de M', e M' uma *extensão* de M, quando e só quando $M \subseteq M'$ e para toda a relação n-ária R de M e M' e todo o sistema de n elementos de $M, b = (b_1, \cdots, b_n)$, b verifica R em M sse b verifica R em M'.

Sejam M, M' duas estruturas semelhantes tais que M' é extensão de M; consideremos uma interpretação de L em M' (que induz, naturalmente, uma interpretação de L em M). M' diz-se uma *extensão elementar* de M se, para toda a fórmula fechada A interpretada em M e M' cujas constantes são todas interpretados em M, A é verdadeira em M e M' ou não é verdadeira numa nem noutra (com respeito à interpretação dada), ([14]).

Intuitivamente, se M' é extensão elementar de M, M' e M têm *as mesmas propriedades* formais expressas por fórmulas de L nas condições indicadas (ver notas ([1]) e ([3])).

4. Teorema da Compacidade, Modelos Não-Standard, Infinitesimais.

Neste parágrafo designamos por L_1 um Cálculo de Predicados Restringido (ou de 1.ª Ordem), que é uma linguagem formal sem axiomas próprios.

Começamos por mencionar, sem demonstração, alguns resultados centrais da Lógica Matemática e da Teoria dos Modelos, conhecidos pela designação geral de *Metateoremas* ([15]).

É sabido que todo o teorema de L_1 é universalmente válido. Inversamente, toda a fórmula fechada de L_1 lògicamente válida é um teorema de L_1 ([16]). Em resumo, para toda a fórmula fechada A de L_1,

$$\models \mathsf{A} \ \text{ sse } \ \vdash_{L_1} \mathsf{A}.$$

Outro resultado fundamental mas não tão conhecido é o chamado

Teorema da Compacidade. *Se toda a parte finita de um conjunto* K *de fórmulas fechadas de* L_1 *possui um modelo, então* K *possui um modelo.*

A demonstração faz apelo a um poderoso método da Teoria dos Modelos, de natureza algébrica, baseado na construção de *ultraprodutos de estruturas* ([17]), cujas aplicações têm crescido de maneira espectacular nos últimos anos. De momento, assinalemos apenas que ele também pode servir para a construção de modelos não-standard da análise, no sentido abaixo indicado.

Consideremos a estrutura (de 1.ª ordem) dos números reais R; seja K o conjunto das fórmulas fechadas de L_1 interpretadas em R, i. e. em que ocorrem constantes correspondentes (com respeito a certa interpretação, que supomos fixa, até nova ordem) aos elementos de R, e símbolos relacionais correspondentes a todas as relações de todas as ordens definíveis em R. Seja K_{R} o subconjunto de K formado pelas fórmulas fechadas de K que são *verdadeiras* em R. Note-se que apesar de não ocorrerem símbolos funcionais, algumas fórmulas de K_{R} podem interpretar-se como dizendo respeito a certas funções reais de (uma ou mais) variável real. Consideremos a função real f de domínio D contido em R, e seja $F(,)$ um símbolo relacional tal que, se as constantes a e b correspondem aos elementos a' e b' de R, $F(a, b)$ é verdadeira em R sse a' pertence a D e $b' = f(a')$. Podemos igualmente dispôr de um símbolo relacional $D(\ )$ tal que $D(a)$ é verdadeira em R sse a' pertence a D. Então a fórmula de K_R

$$[(\forall x)(\forall y)[F(x, y) \Rightarrow D(x)]] \wedge$$
$$\wedge (\forall x)[D(x) \Rightarrow [(\exists y)(\forall z)[F(x, y) \wedge$$
$$[F(x, z) \Rightarrow I(y, z)]]]]$$

pode interpretar-se do modo indicado, interpretando $I(,)$ como sendo a relação de igualdade em R.

No vocabulário de K_R figura também um símbolo relacional $N(\ )$ tal que $N(a)$ é verdadeira em R sse a' é um número natural.

Deste modo podem formalizar-se em K_R «muitas» propriedades dos números reais, de funções reais (com domínio especificado), etc. (o cardinal de K_R é 2^c, sendo c o cardinal do contínuo!). Assim, por exemplo, é possível formalizar em K_R a propriedade de R ser um corpo ordenado, usando símbolos relacionais como $S(,,)$ $P(,,)$ para a adição e multiplicação de números reais respectivamente (cf. Observação do § 2), e $I(,)$ para a relação de igualdade em R, mas já não é possível formalizar o *axioma de Arquimedes* [18]. Tem grande interesse para o desenvolvimento da ANS no contexto do Cálculo de Predicados Restringido saber distinguir se uma dada propriedade dos números reais se pode formular ou não com o vocabulário de K_R, o que é por vezes um problema delicado.

Todos os modelos de K_R são evidentemente extensões elementares de R. Uma extensão *própria* de R que seja modelo de K_R diz-se um *Modelo Não-Standard da Análise.*

Provemos a existência de modelos não-standard da análise.

Seja b uma constante não interpretada em R (i. e. b não pertence ao vocabulário de K_R), e consideremos o conjunto de fórmulas fechadas $K_b = \{\sim I(a_\alpha, b)\}$ em que a_α percorre todas as constantes do vocabulário de K_R, correspondentes portanto a todos os números reais. O conjunto $K_R \cup K_b$ possui um modelo $^*R$ que se pode escolher como extensão de R [19] pois, em virtude do Teorema da Compacidade, toda a parte finita K' de $K_R \cup K_b$ possui um modelo: o próprio R. Com efeito, K' possui apenas um número finito de fórmulas $\sim I(a_\alpha, b)$, e interpretando b em R como um elemento diferente dos correspondentes aos a_α que ocorrem em K', vê-se que R é um modelo de K'.

$^*R$ é portanto um corpo ordenado e é extensão própria de R, porque, sendo modelo de $K_R \cup K_b$, possui um indivíduo $^*b$, correspondente a b, que é diferente de todos os indivíduos de R. $^*R$ é, portanto, um modelo não-standard da Análise, visto ser também modelo de K_R.

Seja $^*R$ um modelo não-standard da Análise. $^*R$ é necessàriamente não arquimedeano visto saber-se não existir nenhum corpo ordenado arquimedeano que seja extensão (própria) do corpo dos reais. São portanto não vazios o conjunto R_0 dos elementos $^*r$ de $^*R$ tais que $|^*r| < \varepsilon$ para todo ε real positivo, e o conjunto R_1 dos elementos $^*r$ de $^*R$ tais que $|^*r| < \varepsilon$ para algum ε real positivo. Os elementos de R_0 dizem-se *infinitesimais,* e os elementos de R_1 dizem-se *finitos.* Os elementos de R (que é uma parte de R_1), dizem-se *standard,* por oposição aos elementos de $^*R \setminus R$, chamados *não-standard.* Os elementos de $^*R$ não finitos dizem-se *infinitamente grandes.*

A chave do método da ANS consiste em poder agora juntar a L_1 dois novos símbolos relacionais, $R_0(\ )$, $R_1(\ )$ que representam os conjuntos R_0 e R_1 respectivamente, e por meio deles refazer a Análise, ou grande parte dela.

Voltaremos ao assunto.

Observações Finais. Procurámos reduzir ao mínimo os conhecimentos necessários para acompanhar o texto e, para isso, abordámos também a ANS do modo mais acessível, i. e., pela linguagem do Cálculo de Predicados de 1.ª Ordem. Pode-se igualmente desenvolver a ANS numa linguagem de Ordem Superior (em que se quantifiquem relações, funções, relações de relações, etc.) como a *Teoria dos Tipos* ([14]), ou, de modo equivalente, alargando a noção de estrutura ([9], por exemplo).

Convém salientar que se caminhou já bastante no sentido de uma axiomatização da ANS (veja-se o artigo de G. Kreisel in [8], pág. 93).

NOTAS

(1) Não encontrámos melhor para a tradução de «Non-Standard Analysis». O termo «standard» que também ocorre isolado algumas vezes, parece na verdade suficientemente universalizado para justificar o seu uso na nossa língua, pelo menos num nível técnico-científico.

O primeiro artigo sobre a ANS data de 1961, [12]. A origem da designação pode atribuir-se a um trabalho pioneiro de Skolem, em 1934, sobre *modelos não-standard da Aritmética.* Skolem prova que os axiomas de Peano não são categóricos, no seguinte sentido: desde que se formulem esses axiomas numa linguagem formal especificada (por exemplo, o Cálculo de Predicados), existem modelos onde são satisfeitas todas as propriedades dos números naturais formalizáveis nessa linguagem (incluindo portanto os axiomas) que são *extensões próprias* dos modelos usuais, standard, e por isso se podem chamar não-standard. Com efeito, prova-se a existência, nesses modelos, de elementos maiores que todos os números naturais (formalmente «maiores», quer dizer que tal facto é expresso por uma certa fórmula da linguagem em questão). Pode consultar-se um outro artigo de Skolem, mais recente — *Peano's Axioms and models of Arithmetic*, in [19], pag. 1-14. Pode dizer-se que os trabalhos de Robinson estendem os resultados de Skolem aos números reais, obtendo assim modelos não-standard dos números reais (ver nota (3)).

(2) Durante um longo período, a seguir a Newton e Leibniz, o método dos infinitesimais foi usado por matemáticos distintos como Euler e o M. de L'Hôpital, por vezes de mistura com outros métodos. Certas inconsistências levaram Cauchy a abandoná-lo progressivamente em favor da Teoria dos Limites, em parte precedido por Lagrange e D'Alembert. Citações dos trabalhos de Cauchy ([11], pag. 260-282) mostram, contudo, que este conhecia e aplicava o referido método das quantidades infinitamente pequenas *simultâneamente* com o método dos Limites, também já conhecido de Newton. Só a partir de Weierstrass, que precisou a noção de limite dada por Cauchy, se adoptou definitivamente o método e a linguagem dos limites. No entanto, continuaram até aos nossos dias investigações sobre certos sistemas não-arquimedianos e sobre o uso de infinitesimais na Análise (Geissler, Natorp, Schmieden & Langwitz, entre outros; veja-se [12], e [14] pág. 278).

(3) Em poucas palavras, isso é conseguido mergulhando o conjunto dos números reais $\mathbf{R}$ numa extensão própria $^*\mathbf{R}$ que possui as *mesmas propriedades formais* que $\mathbf{R}$, expressas numa linguagem formal dada. Tal extensão é necessáriamente não-arquimedeana, o que permite demonstrar fácilmente a existência de elementos infinitamente grandes e infinitamente pequenos. A especificação prévia de uma linguagem formal onde são expressas as propriedades de $\mathbf{R}$ resolve a aparente situação contraditória da existência de sistemas categóricos de axiomas para os números reais.

(4) Veja-se, por exemplo, [7], [8], [9], [16].

(5) Para uma introdução à Lógica Matemática e à Teoria dos Modelos, onde se focam os aspectos relevantes para o que temos em vista, podem consultar-se as nossas lições [11], ou os dois primeiros capítulos de [10] juntamente com os capítulos I e II, o § 2 do Cap. III e o Cap. IX de [13]. Outras excelentes introduções são [4], [5], [18]. Sobre a Teoria dos Modelos, exclusivamente, [1].

(6) Note-se que $\mathfrak{t}_1, \cdots, \mathfrak{t}_k$ já não são símbolos de L, mas sim símbolos que representam (designam, nomeiam) termos arbitrários de L. São, pois, aquilo a que se chama *meta-símbolos*, pertencentes à meta-linguagem da linguagem L. A meta-linguagem de L é, no nosso caso, a linguagem ordinária, pouco mais ou menos, na qual descrevemos L. Usaremos igualmente como meta-símbolos os seguintes: $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}, \cdots$ para variáveis; $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \cdots$ para constantes; $\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}, \cdots$ para símbolos funcionais; $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \cdots$ para fórmulas. Por outro lado, para não sobrecarregar a notação e facilitar a interpretação, usaremos letras como «I», «S», «P», «Q»,$\cdots$ para símbolos relacionais especiais. Para uma elucidação completa destas questões notacionais, veja-se o *Dictionary of Symbols of Mathematical Logic*, North-Holland, 1969.

(7) Há várias possibilidades equivalentes, com variantes diversas. Veja-se, [4], [10], ou o citado *Dictionary*, para as formulações precisas de todos estes conceitos.

(8) Também aqui não há uma só definição. Cf. [4] [13].

(9) Usamos o termo «estrutura» como sinónimo de «sistema relacional», noção devida a TARSKI. Veja-se G. GRÄTZER — *Universal Algebra*, VAN NOSTRAND, 1968, e [13]. Uma relação R n-ária em M pode identificar-se com um subconjunto de M^n. Também uma função definida em M^n com valores em M se pode identificar com uma relação de ordem $n+1$ em M, ou seja, um subconjunto de M^{n+1}, pelo processo usual. Assim, como podemos, teòricamente, dispensar os símbolos funcionais, nas linguagens formais, (cf. Observação no § anterior) podemos, nas estruturas, falar apenas de relações. Este facto tem interesse, pois permite simplificar o estudo teórico de propriedades gerais das estruturas.

(10) E, se for caso disso, a cada símbolo funcional $f_i^k(,\cdots,)$ associamos uma função definida em M^k com valores em M. Em virtude do que dissemos anteriormente, omitiremos de futuro qualquer referência a símbolos funcionais ou às funções correspondentes em M.

(11) Na verdade, a restrição de $\mathbf{A}$ ser fechada não é essencial, pois prova-se (ver por exemplo [10], pág. 52) que uma fórmula $\mathbf{A}(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})$ é verdadeira numa estrutura (com respeito a certa interpretação) se e só se $(\forall x_{i_1})\cdots(\forall x_{i_n})\mathbf{A}(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})$ for verdadeira nessa estrutura (com respeito à mesma interpretação). Sabe-se, por outro lado (ref. acima), que toda a fórmula fechada é verdadeira ou falsa (i. e. a sua negação é verdadeira) em cada estrutura onde seja interpretada, o que, aliás, não é difícil de constatar, atendendo às definições.

A noção intuitiva de *fórmula verdadeira numa estrutura* (com respeito a uma interpretação dada) é uma noção fundamental da moderna Semântica (e, portanto, da Lógica) e foi inteiramente formalizada com todo o rigor por TARSKI, nos anos trinta. Veja-se o seu artigo *The concept of Truth in Formalized Languages*, in [17], ou qualquer tratado standard de Lógica Matemática [2], [4], [10]. A sua formulação (quer intuitiva, quer formalizada) apoia-se fortemente numa teoria (para nós intuitiva, mas que também pode ser axiomática) de conjuntos. Veja-se ainda [6].

(12) O sinal «$\equiv$» é, aqui e a seguir, o meta-símbolo de *identidade lógica*. Note-se, que, pondo de lado os símbolos funcionais e sendo $\mathbf{A}$ fechada, sòmente as constantes podem ser termos. Seguimos essencialmente [13], Cap. I.

(13) Prova-se, com efeito, que todo o teorema de L é verdadeiro em qualquer estrutura onde seja interpretado. A demonstração consiste geralmente em verificar que as regras de inferência levam de fórmulas verdadeiras numa estrutura (com respeito a certa interpretação) a fórmulas também verdadeiras nessa estrutura (com respeito à mesma interpretação). Supõe-se, claro está, que todas as fórmulas estão interpretadas na estrutura em questão. Ver [10] ou [4], por exemplo.

(14) A noção de *extensão elementar* de estruturas, é outra noção fundamental da Teoria dos Modelos, introduzida por A. TARSKI e R. L. VAUGHT em 1957 — *Arithmetical extensions of relational systems*, Compositio Mathematica 13, pág. 81-102. Veja, para mais pormenores, [13], pág. 54 e seguintes.

(15) Não se encontram metateoremas apenas na Metamatemática: eles aparecem frequentes vezes nos textos matemáticos, disfarçados de teoremas comuns, quando se trata, na realidade, de propriedades gerais de certas classes de teoremas ou de estruturas. São exemplos de metateoremas os clássicos *Princípios de Dualidade* em Algebra e em Geometria. Veja-se [13] pág. 35, e, para as demonstrações, [10], e [14].

(16) É um dos célebres *Teoremas de Completude* de GÖDEL, estabelecido nos princípios dos anos trinta, e consequência de um outro um pouco mais geral: «todo o conjunto K formalmente consistente de fórmulas fechadas de L_1 possui um modelo». Tomou-se precisamente este resultado como base da definição de consistência semântica (final do parágrafo 3). Em consequência dos Teoremas de Completude de GÖDEL, são inteiramente equivalentes, para as linguagens formais L_1, as noções semânticas e sintáticas de consistência, e as de dedutibilidade (ou consequência formal) e de consequência (semântica).

(17) Na realidade, a demonstração original, por MALCEV, em 1936, segue linhas diferentes e tem pontos de contacto com o Teorema de Completude de GÖDEL e suas generalizações (Cálculo de Predicados com Igualdade) (ver [13] e HENKIN — *The completeness of the First-Order Functional Calculus*, J. S. L. 14 (1949), pág. 159-166). Embora a construção de ultraprodutos de estruturas se baseie na existência de ultrafiltros (não triviais) sobre um conjunto dado e portanto no Axioma da Escolha, a primeira demonstração baseia-se no «Princípio dos Ideais Maximais» para Algebras de BOOLE, que se sabe ser *estritamente* mais fraco que o Axioma da Escolha, e que por sua vez se pode deduzir do Teorema de TYCHONOV no caso de um produto infinito de espaços discretos com dois elementos, segundo foi observado por TARSKI, donde a designação de Teor. da «Compacidade» (ver TARSKI — *Some notions and methods on the borderline of*

Algebra and Metamathematics, Proc. Int. C. of Math. Cambridge 1950; vol. I p. 705-720).

Quanto aos ultraprodutos veja-se Frayne, Morel & Scott — *Reduced direct products*, Fund. Mathem. 51 (1962) pág. 195-228 e [1], com bibliografia actualizada, além de [13] e [14], no que diz respeito à ANS.

(18) Cf. [13] pág. 44.

(19) Este ponto merece um pouco mais de atenção. Seja M uma estrutura qualquer, K um conjunto de fórmulas fechadas de L_1 suposta interpretada em M. É possível caracterizar os modelos de K que são isomorfos a M (M' é isomorfo a M se os elementos e as relações de igual ordem de M e M' estão em correspondência biunívoca de modo que se $a_i \leftrightarrow a'_i$ e $R \leftrightarrow R'$ então $R(a_1, \cdots, a_n)$ em M sse $R'(a'_1, \cdots, a'_n)$ em M') por meio da noção de *diagrama*, devida a Robinson. O diagrama de M, $D(M)$, é o conjunto de todas as fórmulas atómicas $A_j^k(\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_k)$ verdadeiras em M, e das negações dessas fórmulas atómicas que não sejam verdadeiras em M. É fácil então provar que todo o modelo de $D(M)$ é extensão de uma estrutura isomorfa a M e que, inversamente, toda a estrutura que é extensão de uma estrutura isomorfa a M é um modelo de $D(M)$, para uma interpretação conveniente dos símbolos de $D(M)$. Para aplicar ao nosso caso, basta notar que $K_{\mathbf{R}}$ contém o diagrama de $\mathbf{R}$. Para mais informes, veja-se [13] e [15].

BIBLIOGRAFIA

[1] J. L. Bell & A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts: An Introduction*, North-Holland, 1969.

[2] A. Church, *Introd. to Mathematical Logic*, Vol I, Princeton, 1956.

[3] D. Hilbert & W. Ackermann, *Elementos de Lógica Teórica*, Tecnos, Madrid, 1962 (trad. da 4.ª ed. alemã).

[4] S. C. Kleene, *Mathematical Logic*, Wiley, 1967.

[5] G. T. Kneebone, *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, Van Nostrand, 1963.

[6] G. Kreisel & J. L. Krivine, *Elements of Mathematical Logic (Model Theory)*, North-Holland, 1967 (existe ed. francesa, Dunod).

[7] W. A. J. Luxemburg, *Two Applications of the Method of Construction by Ultrapowers to Analysis*, in Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962).

[8] ———, (editor), *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability*, Holt, Rinehart & Wiston, 1969.

[9] M. Machover & J. Hirschfeld, *Lectures on Non-Standard Analysis*, Springer-Verlag, 1969.

[10] E. Mendelson, *Introd. to Mathematical Logic* Van Nostrand, 1963.

[11] A. J. F. Oliveira, *Alguns Aspectos da Lógica Moderna e suas Aplicações: A Teoria dos Modelos e A Análise Não-Standard* (Texto mimeogr. de lições integradas nos C. M. P. G., P. I. F. 1967).

[12] A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, in Proc. Royal Acad. Sc. Amst. ser. A, **64**, p. 432-440.

[13] ———, *Introd. to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, North-Holland, 2ª ed., 1965.

[14] ———, *Non-Standard Analysis*, North-Holland, 1966.

[15] ———, *On some applications of Model Theory to Algebra and Analysis*, in Rendiconti di Math., 1967.

[16] A. Robinson & A. R. Bernstein, *Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos*, Pacif. J. of Math., 1966.

[17] A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, 1956.

[18] ———, *Introd. à la Logique Mathematique* (última ed.), Gauthiers-Villars, 1968.

[19] Vários ed., *Mathematical Interpretation of Formal Systems* (Colectânea de artigos de Skolem, Hasenjaeger, Kreisel, A. Robinson, Hao Wang, Henkin, J. Los), North-Holland, 1955.

Artigos e textos diversos

Aspectos do Desenvolvimento Científico do Brasil

por Geraldo S. S. Ávila

Atendendo a solicitação do Dr. PAULO DE GÓES, adido científico do Brasil em Washington, submetemos algumas considerações sobre o problema do desenvolvimento científico do Brasil. O que vai exposto abaixo está baseado em nossa experiência no sector da Matemática, mas cremos que as mesmas observações sejam válidas em outros domínios científicos, talvez com pequenas modificações.

A década de 1930 marca no Brasil o primeiro eeforço sério na criação de universidades como instituições de ensino e pesquisa, o que constituiu uma tendência nova em comparação com o carácter nitidamente profissional das escolas superiores até então existentes. Nessa época logrou-se contratar eminentes professores estrangeiros, que iriam dar o primeiro impulso na criação da nova Universidade. Em fins da década de 1940 já era evidente que a política adotada não surtira os efeitos desejados. Com a criação do Conselho Nacional de Pesquisas e de órgãos similares, o desenvolvimento científico do Brasil entra em nova fase e a partir de 1950 estudantes e professores começam a contar com maior auxílio de organismos nacionais e estrangeiros para aperfeiçoamento de seus estudos no país e no exterior. Hoje, se é certo que o número de especialistas que o novo sistema permitiu formar não é despresível, a verdade é que muitos deles permanecem no exterior ou só comparecem no Brasil como visitantes esporádicos; ou, ainda, se não se radicaram no exterior, a sua fixação no Brasil é incerta.

Uma das grandes aspirações da geração mais nova de cientistas é uma reforma da Universidade Brasileira. Esse problema tem sido debatido, sobretudo a partir de 1960, e muitas das observações que fazemos aqui não são novidade. Um dos males da actual estrutura universitária é a cátedra concebida como unidade didática autónoma. As cátedras pouco se integram na formação do departamento. Falta ao sistema a flexibilidade necessária para atender a mudanças de currículos e programas, criação de novas disciplinas ou abolição de disciplinas obsoletas, contratação de novos professores, etc. Um exemplo que bem ilustra os males que procuramos apontar é o caso da Geometria e do Cálculo, que são cadeiras que ministram cursos a estudantes de Matemática, Física e Engenharia. No sistema departamental das universidades americanas o ensino do Cálculo juntamente com o da Geometria Analítica num mesmo curso já está consagrado há muito tempo. Outros ramos da Geometria foram postos de lado ou relegados a plano secundário em favor de disciplinas novas. Nas universidades brasileiras a abolição de certos ramos da Geometria e a incorporação da Geometria Analítica ao Cálculo oferece grandes dificnldades, pois isto significaria o esvaziamento de cadeiras com sérias consequências para o pessoal nelas lotados.

À primeira vista pode parecer que essa crítica constitui uma ameaça aos actuais catedráticos e seus assistentes, mas a realidade é exactamente o oposto disto. Uma reforma inteligente do actual sistema universitário jamais incluiria a demissão de professores ou mesmo a extinção de estabilidade de cargo ou de outros direitos adquiridos ao longo de anos de exercício profissional. Essa reforma deveria fazer do departamento a unidade básica de trabalho docente e de pesquisa, eliminando a compartimentação do conhecimento como no actual regime de cátedras. Em nível de departamento cursos e textos poderiam então ser revistos com frequência, permitindo uma constante actualização do ensino em consonância com o ritmo do progresso. Os professores não seriam obrigados a leccionar a mesma disciplina anos a fio, como no regime de cátedras; a possibilidade de sair da rotina e leccionar cursos diferentes seria factor de estímulo, abrindo ao professor novos horizontes de aperfeiçoamento e actualização profissionais.

O regime de cátedras, como vem sendo praticado no Brasil, confere um prestígio único ao catedrático, pressupondo nele experiência e competência profissionais superiores às de qualquer de seus auxiliares. Mas esta hierarquia não persiste sempre. O desequilíbrio surge quando um assistente atinge ou ultrapassa a competência do catedrático; e como este cargo é individual, a única solução que pode restaurar equilíbrio ao sistema é o afastamento daquele assistente. Se numa posição de professor assistente ou adjunto o profissional pode ser vítima de uma injustiça hierárquica ou de perspectivas futuras incertas, também como catedrático ele corre o perigo de não poder atrair para sua cadeira outros elementos de estatura igual ou superior à sua. Não é de admirar que os profissionais da nova geração pouco se interessem por cargos universitários num regime que não oferece estímulo e que tanto dificulta a promoção e a contratação de novos professores. Esse problema é muito grave, quando a ampliação de quadros docentes é tão necessária para resolver problemas de expansão do ensino e para criar centros de pesquisa e ensino em nível de pós-graduação.

Se até data recente as universidades brasileiras não contavam com qualquer programa sistemático de pós-graduação, hoje já se reconhece a importância desses programas, com cursos regulares que levem ao mestrado e preparem para o doutoramento. Por sua própria natureza esses programas são muito amplos para o âmbito acanhado de uma cátedra. No entanto há casos de cátedras que ainda insistem em desenvolver programas isolados de mestrado e doutoramento, quando devirm prestigiar um esforço conjunto numa unidade maior, que é o departamento ou instituto central. Um programa bem definido de mestrado foi criado e posto em execução na Universidade de Brasília em 1962, onde a flexibilidade do departamento sem cátedras não permitiu o aparecimento das dificuldades apontadas acima.

A universidade brasileira ainda se ressente dos males de sua formação histórica, como agrupamento de escolas profissionais isoladas. No sentido de dar-lhe organicidade é feliz a ideia recente da criação de institutos centrais. Numa concepção correcta, ao instituto central deviam caber todas as tarefas de ensino e pesquisa em seu sector básico. O instituto reuniria então os esforços de todos os professores das diferentes disciplinas, permitindo um trabalho de equipes integradas, eliminando-se ao mesmo tempo o enfraquecimento a que conduz o regime de cátedras isoladas. É lamentável constatar a existência de institutos, que embora fundados há quase dez anos, continuam ainda em estágio incipiente, sem estructuração bem definida de cargos e programas. Mas este fenómeno é perfeitamente compreensível, decorrendo naturalmente da criação do instituto como organismo novo ao lado das cátedras. Deste modo o instituto passa a ser concebido exclusivamente como órgão de pesquisa, ficando as cátedras com a tarefa do ensino universitário básico. Pelo que dissemos anteriormente, como as actividades de pós-graduação não caberiam às cátedras, o instituto teria de absorvê-las, criando assim uma situação injusta e inaceitável aos catedráticos. Embora estes professores possam participar das actividades do instituto, eles já têm tarefas bastante definidas em suas cátedras, de forma que a sua participação se reveste de carácter puramente casual e o resultado é outra vez o enfraquecimento de de todo o sistema.

A alternativa seria a adoção de uma estrutura nova como foi feito na Universidade de Brasília, onde a descontinuidade dos bons resultados que vinham sendo obtidos se deve em grande parte ao impacto que tiveram em sua evolução os acontecimentos políticos de 1964. As estruturas das universidades tradicionais deviam ser modificadas, eliminando-se as barreiras das cátedras, que seriam substituídas por uma hierarquia na carreira do professor, o posto mais alto sendo, digamos, o de professor titular. Neste novo sistema o actual catedrático seria automàticamente professor titular; no caso da Matemática, professor titular de Matemática, sem mais quantitativos. O acesso à carreira seria feito através de uma selecção objectiva, baseada em títulos e méritos. Os professores seriam lotados em departamentos, ou em institutos onde estes existam ou sejam criados. Nos departamentos ou institutos, a todos os professores titulares ou não, estaria aberta a oportunidade de participar das actividades de ensino graduado e pós-graduado, e das actividades de pesquisa. Além das vantagens de criar um ambiente saudável de trabalho, este sistema viria eliminar as actuais barreiras que tanto dificultam a contratação de novos elementos. De facto, abandonado o sistema rígido de cátedras, un departamento ou instituto pràticamente não teria número fixo de posições, podendo sempre contratar novos elementos, de acordo com as exigências de suas actividades.

Outras deficiências da carreira universitária no Brasil são a má remuneração e o regime de trabalho em tempo parcial. O tempo integral deve ser estimulado e deve ser considerado o regime natural de trabalho. Actualmente muitos profissionais liberais exercem o magistério como actividade secundária a sua ocupação principal; e muitos professores que se dedicam sòmente ao magistério acumulam cargos em diferentes escolas em regime de tempo parcial. Em ambos os casos o resultado é um abaixamento do nível profissional e desprestígio da profissão. O tempo integral deve ser adoptado juntamente com salários e benefícios condignos. Os actuais salários são pouco compensadores, quando a formação de um profissional competente é tarefa bastante árdua. A etapa que vai do bacharelado ao doutoramento exige, em média, quatro anos ou mais, sendo de se notar que há casos de bons estudantes que necessitaram até sete anos de estudos. Durante esse período o estudante tem de fazer grandes sacrifícios; sua condição de bolsista sòmente lhe propicia parcos recursos financeiros em situação instável. Se de um lado um estágio no exterior por longo tempo é benéfico, ele não deixa de ter aspectos negativos, já que ao regressar ao Brasil o jovem profissional logo percebe que perdeu oportunidades de garantir condições de segurança social e económica para sua família. Esses factores, aliados aos baixos salários e às condições de trabalho pouco atraentes, naturalmente o induzem a sair para o exterior, onde as ofertas de emprego, sobretudo nos Estados Unidos, se revestem de condições muito melhores.

Cabe observar também que o profissional brasileiro necessita manter contacto com instituições mais avançadas, no país e no exterior. Isto pressupõe sua necessidade de visitar outros centros em carácter temporário. A falta de compreensão que ainda existe para esse problema é grandemente responsável pela perda de muitos elementos. O deslocamento de um local a outro envolve abalos sérios na instalação da família, e se feito sem qualquer amparo externo, o profissional tem de incorrer em grande prejuízo financeiro ao transferir-se para outro centro; aí, em vista do investimento feito e com perspectivas de novos prejuízos que a viagem de volta implicaria, não é de estranhar sua decisão de não empreendê-la, mas antes radicar onde se encontra. Considerando que o pessoal diplomático e militar parece não ter de enfrentar dificuldades dessa natureza, o problema não pode ser de difícil solução. Aliás, já há casos individuais em que esse problema foi resolvido através pe continuidade salarial ou licença com vencimentos. Seria desejável considerar esta ou outras alternativas, visando a sistematização de esquemas justos, dentro de cuidadosos critérios que evitem o perigo de uma distribuição de favores gratuitos. Esquemas desse tipo devem visar os profissionais em intercâmbio, o retorno de profissionais radicados no exterior e o retorno de jovens bolsistas.

Na análise acima procuramos focalizar os aspectos mais importantes da questão em exame, os males que estão na raiz da crise em que se encontra o ambiente universitário e científico brasileiro. Outros problemas existem, como recursos materiais, bibliotecas, facilidades de publicação, etc., mas cremos que estes encontrarão solução natural desde que um esforço bem orientado seja feito para resolver os problemas estruturais básicos.

(O texto acima foi lido na reunião de cientistas brasileiros residentes nos Estados Unidos, presidida pelo secretário geral do Itamaraty, embaixador Sergio Corrêa da Costa, realizada em Washington nos dias 8 e 9 de Setembro).

MOVIMENTO CIENTÍFICO

DECLARAÇÃO DOS DIREITOS DOS TRABALHADORES CIENTÍFICOS

FEDERAÇÃO MUNDIAL DOS TRABALHADORES CIENTÍFICOS

9.ª Assembleia Geral — Paris 1-5 Abril 1969

1. Preâmbulo

A ciência e a investigação científica podem contribuir cada vez mais para a melhoria das condições de vida da humanidade, podem converter-se numa fonte de bem estar e criar condições para a consumação de justiça social. A ciência é um meio importante de acelerar o progresso e de desenvolver os paises da Ásia, África e América Latina. Além disso, a ciência e o ensino da ciência estão a aumentar a uma taxa crescente, de forma que a importância de garantir a aplicação das poderosas forças geradas pelas descobertas científicas à satisfação das necessidades da humanidade, cresce correspondentemente.

A profissão de cientista e de professor de ciências tem pois características especiais resultantes da grande responsabilidade destes trabalhadores. As suas actividades têm um significado e importância particulares devidos, por um lado, às largas possibilidades de utilizar a ciência e as suas conquistas em benefício da sociedade e na solução de importantes problemas sociais e económicos e, por outro lado, ao perigo de que os resultados da investigação científica sejam utilizados contra os interesses vitais da espécie humana, na preparação de guerras de destruição massiça. Os trabalhadores científicos têm um papel proeminente na promoção do uso mais eficiente da ciência e dos métodos científicos para o bem estar da humanidade e na contribuição para a manutenção da paz e redução da tensão internacional.

2. Generalidades

2. 1 — *Definição*

Um trabalhor científico é uma pessoa devidamente qualificada que se ocupe profissionalmente em ciência natural, técnica ou social — de base ou aplicada — incluindo o ensino de ciência.

2. 2 — *Natureza das qualificações*

Um trabalhador profissional científico é qualificado pela posse de um grau universitário ou diploma de nível idêntico em qualquer das ciências.

Não obstante esta qualificação básica e sem baixar o padrão geral, pessoas que não tenham diplomas académicos formais poderão qualificar-se pela posse de experiência valiosa e ocupação de lugares exigindo um alto nível de preparação científica, ou ainda por publicações ou outras realizações de nível reconhecidamente elevado.

Recomenda-se acordo internacional relativamente a padrões profissionais para trabalhadores científicos.

2. 3 — *Locais de trabalho*

Trabalhadores científicos empregam-se em universidades, escolas técnicas, estabelecimentos de investigação científica, na indústria e em organizações governamentais e particulares, ou podem trabalhar por conta própria como consultores, escritores, etc.

2. 4 — *Recrutamento*

Todos os cidadãos devem ter iguais oportunidades de adquirirem uma profissão científica independentemente de raça, nacionalidadade, sexo, credo, ou condição social.

2. 5 — *Progresso da ciência*

Compete aos governos apoiar e promover o desenvolvimento da ciência, envidar os necessários meios para treino de cientistas e encorajar o emprego de trabalhadores científicos adequadamente qualificados no trabalho de investigação.

Com o futuro da humanidade vitalmente envolvido na aplicação correcta da ciência e dos métodos científicos aos problemas do nosso tempo, os trabalhadores científicos devem ter oportunidades de influenciar os modos pelos quais a ciência é utilizada e de divulgar as suas potencialidades ao público em geral.

Os trabalhadores científicos devem ser apoiados pelos governos para resistirem às pressões que ponham em causa a sua integridade científica.

3. Direitos fundamentais dos trabalhadores científicos

3. 1 — *Direitos civis*

Os trabalhadores científicos independentemente do sexo, raça, nacionalidade, credo e convicções políticas devem ter os seus direitos civis definidos na Declaração Geral dos Direitos Humanos e no Acordo sobre Direitos Humanos aceite pela Organização das Nações Unidas.

3. 2 — Direito a emprego

Os trabalhadores científicos devem ter o direito de trabalhar de acordo com a sua capacidade científica e compete aos governos garantir este direito.

3. 3 — Direito de permuta de experiências

Para a ciência contribuir activamente para o crescimento do bem estar da humanidade, é necessário dar aos trabalhadores científicos o direito de livre permuta, tanto à escala nacional como à escala internacional, de opiniões e experiências sobre o trabalho científico e suas consequências económicas e sociais.

Os governos comprometem-se a não interferir com a liberdade de expressão de opiniões científicas ou de publicação dos resultados da investigação científica, a não ser a investigação militar, e devem tomar as necessárias medidas para evitar outras interferências nesta liberdade.

3. 4 — Direito de representação em corpos directivos

As autoridades devem reconhecer a importância da participação dos trabalhadores científicos por actos destinados a melhorar a qualidade e direcção da investigação e do desenvolvimento científicos. Autoridades e organizações científicas devem colaborar, com este objectivo. Cientistas devem estar representados nos organismos de direcção da ciência e da investigação.

Os governos devem insistir em que a administração das instituições científicas e de investigação e universidades sejam confiadas a trabalhadores científicos com experiência e habilitações adequadas.

3. 5 — Não discriminação

Os trabalhadores científicos devem ter direitos iguais nas suas profissões independentemente do sexo, raça, nacionalidade, credo, ou convicções políticas.

3. 6 — Direito de defesa

Os trabalhadores científicos devem ter o direito de defender o seus direitos pelos meios aceites nos seus diversos países.

4. Direitos dos trabalhadores científicos nos seus empregos

4. 1 — Contrato de trabalho

Os direitos, deveres e responsabilidades da entidade patronal e de cada trabalhador científico devem ser claramente estabelecidos quer por medidas legislativas quer por contratos de trabalho assinados pela entidade patronal e pelo trabalhador científico. Estes devem incluir cláusulas para casos especiais em que o trabalhador científico seja transferido, temporária ou permanentemente, para outro trabalho científico, dentro da mesma organização.

4. 2 — Tipo de trabalho

A entidade patronal deve garantir que a cada trabalhador científico sejam dadas tarefas de harmonia com as suas qualificações e conhecimentos e que sejam criadas as condições propícias para ele ser capaz de cumprir a sua missão de acordo com o contrato.

4. 3 — Redundância no local de trabalho

No caso de se apresentar uma situação em que se torna aparente um excedente ou redundância de categorias particulares de trabalhadores científicos numa empresa, resultante de mudança de circunstâncias, deve haver consultas entre os sindicatos e a entidade patronal a fim de se reduzir ao mínimo ou evitar o despedimento de pessoal. Se, mesmo assim, a redundância se mantém, a cada trabalhador científico deve ser dado tempo suficiente com salário por inteiro para se transferir para outro emprego, ou então uma indemnização à base de regras prèviamente aprovadas.

4. 4 — Demissão de emprego

As circunstâncias de demissão de um trabalhador científico devem ser estatuídas por lei.

4. 5 — Referências, em mudança de situação

Ao abandonar uma situação, o trabalhador científico tem o direito de obter um certificado mencionando todos os factos importantes acerca das suas actividades durante o período de emprego. A organização deve ser compelida a discutir os termos do certificado com o trabalhador científico, antes de o emitir. Este documento não deve conter nada em detrimento do trabalhador científico.

4. 6 — Condições de trabalho científico efectivo

Em virtude do valor e da importância do trabalho dos cientistas e professores de ciências, o mesmo deve ser organizado e assistido de forma a evitar perda de tempo e energia, e efectuado em condições favoráveis.

O número total de horas de trabalho dos trabalhadores científicos não deve exceder as fixadas para outras ocupações. Deve reconhecer-se uma certa flexibilidade em certas categorias de trabalho criador e não deve exigir-se obediência a horários rígidos nos casos em que tal possa prejudicar o curso normal do trabalho, levando em consideração as actividades de apoio de técnicos e outro pessoal.

Afim de poderem elevar o seu nível profissional aos trabalhadores científicos devem ser dadas licenças e oportunidades para seguirem cursos para obtenção de qualificação extraescolar.

Devem ser dadas oportunidades e facilidades adequadas aos trabalhadores científicos para dedicarem uma parte das suas horas de trabalho a conferências científicas ou a outras formas de contacto com os seus colegas de profissão e para aprofundarem os seus conhecimentos e qualificações, mantendo-se em dia com os desenvolvimentos da ciência através de literatura publicada.

4. 7 — Determinação de salários

Os salários e ordenados dos trabalhadores científicos devem ser definidos por negociações entre os sindicatos e as entidades patronais. Os níveis de ordenado de trabalhadores científicos devem ser determinados em vista de qualificações, treino e experiência de trabalho científico mas sem olhar a sexo, raça, credo ou nacionalidade.

4. 8 — Férias

Todos os trabalhadores científicos têm direito a férias anuais apropriadas com pagamento por inteiro, as quais não deverão ser inferiores a 1 mês, além dos feriados públicos oficiais.

4. 9 — Licenças

Após alguns anos de emprego, um trabalhador científico deve ter um período substancial de licença com pagamento por inteiro para estudo num ramo científico relacionado com o seu ou no seu próprio. Este período de licença para estudo deve contar para efeito de antiguidade no emprego e pensão e ser concedido independentemente das oportunidades concedidas para actualização de conhecimentos, referidas na secção 4. 6.

Também deve ser dada aos trabalhadores científicos licença sem perda de antiguidade nem direitos de pensão, no âmbito de acordos multilaterais ou bilaterais entre organizações de países desenvolvidos e países atrasados. Além disso, devem fazer-se acordos especiais para cobrir as suas despesas extraordinárias.

Os trabalhadores científicos devem ter licenças com pagamento por inteiro que lhes permitam tomar parte nas actividades sindicais e de organizações profissionais.

Os trabalhadores científicos devem ter licença com ordenado por inteiro por razões pessoais especificadas nos acordos de trabalho.

4. 10 — Protecção em caso de trabalho perigoso

Os trabalhadores científicos desempenhando missões perigosas ou trabalhando em condições anormais devem ser apropriadamente protegidos pela legislação dos seus países. Estes trabalhadores científicos poderão trabalhar menos horas e ter férias mais longas; poderão ser-lhes pagos ainda subsídios especiais. Ser-lhes-á garantida uma indemnização completa no caso de doença ou acidente causados pela sua ocupação.

4. 11 — Licença de gravidez

Aparte subsídios ou outros cuidados relacionados com a maternidade e previstos na lei geral — as mulheres trabalhadoras científicas devem ter facilidades especiais, tais como, licença antes e depois do parto, direito de voltar às suas ocupações originais, aos mesmos lugares ou a lugares ao mesmo nível dos que ocupassem antes da licença de gravidez.

4. 12 — Licença por doença e pensão

Os trabalhadores cientificos devem ter direito a uma licença com pagamento por inteiro durante qualquer período de incapacidade para o trabalho devido a doença.

As pensões de velhice ou incapacidade permanente devem ser relacionadas com os ordenados de tal maneira que os trabalhadores científicos possam manter um nível de vida adequado.

Nos casos em que o nível de benefícios dados pela Previdência Oficial seja inferior ao que esta Declaração estipula, a pensão deve ser elevada por negociações entre os sindicatos e as entidades patronais. Quando um trabalhador científico muda de emprego, quer dentro do seu país quer para outro país, os seus direitos a pensões e previdência social, devem ser transferidos com ele.

5. Direitos sindicais de trabalhadores científicos.

5. 1 — Direito de organização

Os trabalhadores científicos devem ter o direito de se organizarem em sindicatos para protecção das suas condições profissionais e económicas, de serem membros dos sindicatos, e de recrutarem outros para fazerem parte dos sindicatos de acordo com a Convenção n.º 98 da O. I. T. e estar ao abrigo de descriminação por pertencerem aos sindicatos.

5. 2 — Independência dos sindicatos

Os sindicatos de trabalhadores científicos devem ser independentes dos governos e das entidades patronais e livres de interferência e controle.

5. 3 — Defesa dos interesses e dos direitos dos membros

Os sindicatos de trabalhadores científicos devem ter o direito de se defenderem e aos interesses dos trabalhadores científicos, por meios aceites nos seus países.

5. 4 — Direito de livre associação

Os sindicatos de trabalhadores científicos devem ter o direito de se associarem livremente com outras organizações, tanto nacional como internacionalmente.

5. 5 — Categoria legal

Os sindicatos de trabalhadores científicos devem ser reconhecidos como entidades com poderes para negociar e agir em nome dos trabalhadores científicos devidamente filiados e devem ter o direito de representar judicialmente os trabalhadores científicos e de defender os seus interesses.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

CENTRO DE ESTUDOS MATEMATICOS DE LISBOA

O Dr. James Cooper vai fazer uma série de lições para pòsgraduados sobre espaços localmente convexos na Faculdade de Ciências de Lisboa no âmbito do C E M L. As lições, subordinadas ao título *Espaços* (D F) *e suas aplicações*, têm o seguinte programa:

I. Teoria geral dos espaços localmente convexos

Definição de espaço localmente convexo, aplicações lineares, completação, tipos especiais de espaços localmente convexos (espaços metrizáveis, espaços bornológicos, espaços de Montel, espaços tonelados ou quase-tonelados). Dualidade: teorema de Hahn-Banach, teorema de Mackey e conjuntos limitados. Teorema de Banach-Dieudonné e teorema da completude de Grothendieck. Limites indutivos e limites projectivos. Exemplos: espaços $\mathfrak{D}(\Omega)$ e $\mathfrak{H}(U)$, distribuições, teoremas de Runge e de Vitali.

II. Teoria dos espaços (D F)

Propriedades dos duais dos espaços de Fréchet. Definição de espaço (D F) e consequências imediatas. Localização da topologia. Aplicações lineares de espaços (F) em espaços (D F) e vice-versa. Subconjuntos separáveis. Dualidade de subespaços e de espaços quocientes. Limites indutivos de espaços (D F). Aplicações bilineares sobre espaços (D F).

III. Espaços construídos a partir de espaços (D F) e suas aplicações à análise

Definição e propriedades de limites (D F S). Exemplos: espaços escalonados de Köthe e funções vectoriais analíticas. Aplicações: teorema de Weierstrass, etc. Definição de topologia mista e propriedades. Aplicações: topologia forte, medidas de Radon, espaço H^{∞}, teoremas de consistência em somabilidade.

Definição e propriedades de espaços (D L F). Aplicações a distribuições com valores num espaço (D F).

Observações:

1. As lições deste curso realizar-se-ão às segundas-feiras, a partir das 18 horas, e são dadas em inglês, com eventuais esclarecimentos em português.

2. Este curso é, em princípio, acessível a licenciados em matemática ou a alunos que já tenham frequentado a cadeira de ANÁLISE INFINITESIMAL

II. É especialmente aconselhável a alunos de ANÁLISE SUPERIOR I.

3. A primeira parte do curso tem carácter introdutório e exige conhecimentos prévios sobre a topologia geral, espaços normados e teoria das funções de variável real ou complexa.

James Cooper é doutorado pela Universidade de Cambridge onde apresentou uma tese versando, entre outros, os seguintes tópicos: On a generalization of Silva spaces (*), Basis in (L F) – spaces, Markusevic's derality theorem. O Dr. J. Cooper encontra-se presentemente em Lisboa como bolseiro da Fundação Calouste Gulbenkian a trabalhar sob a orientação do Prof. J. Sebastião e Silva.

(*) Em publicação na revista *Math. Annalen*.

NOTICIÁRIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

Catálogo da Pós-Graduação no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) do Conselho Nacional de Pesquisas

1. INTRODUÇÃO. As actividades de pós-graduação do IMPA, estabelecidas por convénio com a Comissão Coordenadora dos Cursos de Pós-Graduação da Universidade do Brasil, Rio de Janeiro, Guanabara, compreenderão cursos, seminários e pesquisas conduzindo a:

a) Concessão do grau de Mestre
b) Concessão do grau de Doutor.

Dentro desse programa, o IMPA poderá admitir alunos de pós-graduação na qualidade de estagiários.

Os estagiários poderão contar com o amparo do IMPA ao se candidatarem às bolsas de estudos dos órgãos competentes.

Cada estagiário terá um orientador escolhido dentre os membros do Corpo Científico do IMPA.

A finalidade da pós-graduação no IMPA é o Doutoramento. O Mestrado é uma etapa para o Doutoramento; ele serve também como uma oportunidade de aperfeiçoamento para o pessoal que não vise o doutoramento. Embora tendo esta finalidade, o IMPA tem oferecido cursos de iniciação científica, com o objectivo de completar os pré-requisitos exigidos para início da pós-graduação.

2. CURSOS. No final deste fascículo, encontra-se o Catálogo de Cursos, em três categorias, a saber: pós-graduação, iniciação científica e graduação. Os da primeira categoria, são os cursos oferecidos com frequência no IMPA, uns para candidatos ao Mestrado e outros para o Doutoramento.

Os cursos de iniciação científica, são, em geral oferecidos no período de férias ou no primeiro período de cada ano lectivo. A aprovação nesses cursos não é contada como crédito para o Mestrado. Os cursos de graduação, não são oferecidos pelo IMPA, sendo considerados como pré-requisitos indispensáveis ao sucesso dos candidatos ao Mestrado. Tais cursos, constam do Catálogo para orientação dos candidatos.

Cada curso terá a duração mínima de 13 semanas, constando de um mínimo de três horas teóricas de aulas semanais, sem computar as aulas práticas de problemas. Supõe-se que o professor desenvolva estes cursos, deixando bastante trabalho a ser realizado pelos ouvintes, podendo este trabalho ser sob forma de problemas ou para completar demonstrações relacionadas com o assunto da aula.

A aprovação em cada curso, proporcionará ao candidato um crédito.

3. MESTRADO. O grau de Mestre será concedido ao candidato que:

1) obtiver oito créditos de cursos
2) obtiver um crédito de seminário, ou apresentar uma dissertação que venha a ser aprovada
3) apresentar certificado de conhecimento de uma língua estrangeira, escolhida entre alemão, francês, inglês e russo, emitido por instituição idónea.

Pré-requisitos

Os candidatos ao Mestrado deverão possuir:

a) diploma universitário, preferencialmente de curso que inclua disciplinas matemáticas
b) conhecimentos fundamentais equivalentes aos Cursos de Graduação, cujos programas estão explicitados no Catálogo de Cursos.

Cursos

Normalmente e a critério de seu orientador, o candidato seguirá dois cursos simultâneos, necessitando de dois anos para completar o Mestrado.

Serão obrigatórios os seguintes cursos: Álgebra II, Análise II, Variável Complexa II, Integração, que constam do Catálogo de Cursos.

Os demais cursos serão escolhidos pelo estagiário, com aprovação de seu orientador, entre os outros cursos oferecidos pelo IMPA, alguns dos quais constam do Catálogo de Cursos.

Seminários

O candidato poderá obter um crédito de seminário em lugar da dissertação de Mestrado. Para tal, deverá fazer exposições sobre um tópico da literatura Matemática, escolhido, de acordo com o candidato, por um membro do Corpo Científico do IMPA. O crédito será dado, se as exposições forem consideradas satisfatórias.

Dissertação

O candidato ao Mestrado poderá optar pela apresentação de uma dissertação expositória de um tópico de Matemática, feita sob a orientação de um professor e aceite pelo IMPA, segundo as normas vigentes.

4. DOUTORAMENTO. O grau de Doutor será concedido ao candidato que:

1) obtiver quatorze créditos, sendo doze de cursos e dois de seminários
2) redigir uma tese que venha a ser aprovada
3) apresentar certificados emitidos por instituições idóneas, de conhecimento de duas línguas estrangeiras escolhidas entre alemão, francês, inglês e russo.

Cursos

O candidato ao Doutoramento deverá contar com doze créditos de cursos. No nível do Doutoramento, os cursos serão todos optativos. A escolha dos cursos pelo candidato é sujeita à aprovação do orientador.

O candidato poderá tomar cursos de leitura com seu orientador, ou com outros professores. Tais cursos consistirão da leitura de artigos e livros indispensáveis à pesquisa e à cultura matemática do candidato. A aprovação em um curso de leitura proporcionará um crédito.

Seminários

O candidato ao Doutoramento deverá participar de pelo menos dois seminários sobre a literatura matemática em nível de pesquisa, orientados por professores, fazendo exposições e sendo aprovado nos mesmos. A aprovação em um seminário propiciará um crédito.

Tese

A tarefa principal do Doutoramento é a redacção de uma tese original, que represente um trabalho de pesquisa significativo, sobre uma teoria matemática relevante. Para tal fim, o candidato terá um orientador. A tese deverá ser aprovada pelo Instituto segundo as normas vigentes.

1. CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO

Álgebra II

Definições e exemplos de grupos. Subgrupos. Grupos normais e grupos quocientes. Homomorfismos. Teorema de Cayley. Grupos finitos. Teorema de Silov. Definição e exemplos de aneis. Homomorfismos. Ideais e aneis quocientes. Corpo das fracções de um domínio de integridade. Aneis euclidianos. Aneis de polinómios.

Livro recomendado:

I. N. Herstein, «Topics in Algebra», Blaisdell Publishing Co. 1965.

Álgebra III — (Pré-requisitos: Algebra II)

Extensões algébricas e transcendentes de um grupo. Extensões finitas. Teoria de Galois. Propriedades do grupo de Galois. Subgrupos e subcorpos. Corpos finitos. Construção com régua e compasso. Resolução por radicais.

Livro recomendado:

I. N. Herstein, «Topics in Algebra», Blaisdell Publishing Co. 1965.

Análise II — (Pré-requisitos: Introdução à Análise Funcional)

Espaços normados. Diferencial de Fréchet. Desigualdades da média. Derivadas segundo vectores. Integral elementar. Funções implícitas e funções inversas. Diferenciais de ordem qualquer. Polinómios. Fórmula de Taylor.

Livros recomendados:

1. L. Nachbin, Lectures on the theory of distributions. Textos de Matemática n.º 15.
2. J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, 1960.
3. L. Nachbin, Introdução à Análise Funcional, espaços de Banach e Cálculo Diferencial, Universidade de Brasília, 1967.

Integração — (Pré-requisitos: Topologia Geral)

Medida e integração abstractas. Teoremas da convergência monótona e da convergência dominada. Medidas sobre um espaço localmente compacto. Teorema de Representação de Riesz. Medida de Lebesgue. Medida produto. Teorema de Fubini. Espaços L^R. Medidas complexas. Decomposição de Lebesgue. Teorema de Radon-Nikodym. Derivadas de medidas. Mudança de variáveis na integral de Lebesgue.

Livro recomendado:

Rudim, W. «Real and Complex Analysis», Mc-Graw-Hill, Inc., 1966.

Variável complexa II — (Pré-requisitos: Topologia Geral)

A forma geral do teorema de Cauchy. Funções meromorfas. O teorema de Mittag-Leffler. Produtos infinitos. Funções inteiras. Teorema de Weierstrass. Famílias normais e o Teorema de Riemann. Funções harmónicas e o problema de Dirichlet. Funções elípticas. Prolongamento analítico.

Livros recomendados:

1. L. V. Ahlfors, «Complex Analysis», second edition, Mc Graw-Hill, 1966.
2. H. Cartan, «Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes», Hermann, Paris, 1961.

Álgebras de Banach — (Pré-requisitos: Introdução à Análise Funcional)

Definição e exemplos. Ideais. Álgebras quocientes. Homomorfismo. Álgebra C (X). Teorema de Weierstrass-Stone. Elementos regulares e singulares. Espectro. Raio Espectral-Radical. Álgebras semi-simples. Álgebras com involução. Representação: Teorema de Gelfand-Naimark.

Livros recomendados:

1. L. A. Medeiros, «Introdução às Álgebras de Banach», «Notas de Matemática», IMPA, 1964.
2. G. F. Simons, «Introduction to Topology and Modern Analysis», Part Three, Mc Graw-Hill, Inc., 1963.

Análise de Fourier — (Pré-requisitos: Introdução à Análise Funcional).

O espaço L^2. Séries e integrais de Fourier. Transformações de Fourier. Teorema de Plancherel. Aplicações às Equações Diferenciais parciais.

Livros recomendados:

1. R. R. Goldberg, «Fourier Transforms», Cambridge University Press, 1961.
2. K. Yosida, «Functional Analysis», Springer-Verlag, 1965.

Equações Diferenciais II — (Pré-requisitos: Álgebra Linear).

Teoremas de existência e unicidade. Prolongamento das soluções. Teoria geral dos sistemas lineares. Sistemas autónomos. Singularidades dos sistemas lineares, não lineares. Estabilidade. Teorema de Poincaré-Bendixson.

Livros recomendados:

1. E. A. Coddington and N. Levinson, «Theory of Ordinary Differential Equations», Mc Graw-Hill, Inc., 1955.
2. W. Hurewicz, «Lectures on Ordinary Differential Equations», John Wiley and Sons, Inc., 1958.

Equações diferenciais parciais — (Duração: dois semestres).

Equações de ondas, do potencial e do calor. Classificação das equações diferenciais parciais. Teoria das características. Teorema de Cauchy-Kowalewski. Teorema de unicidade para as equações elípticas, hiperbólicas e parabólicas. Teoremas de existência para as equações elípticas, hiperbólicas e parabólicas. Soluções fracas. Lema de Weyl. Método de Schauder para problemas de existência no caso das equações elípticas. Problema de autovalores. Sistemas elípticos.

Livro recomendado:

Günther Hellwig, «Partial Differential Equations», Blaisdell Publishing Company, 1964.

Espaços vectoriais topológicos — (Pré-requisitos: Medida e Integração, Introdução à Análise Funcional).

Espaços localmente convexos e o teorema de Hahn-Banach. Espaços completos, o teorema dos homomorfismos vectoriais topológicos e o teorema do Gráfico fechado. Espaços de aplicações lineares contínuas. Espaços Tonelados. Teorema de Banach-Steinhaus. Dualidade, topologias fracas, espaços bornológicos, espaços reflexivos, espaços de Montel e espaços de Schwartz.

Livros recomendados:

1. N. Bourbaki, «Espaces Vectoriels Topologiques», Hermann, Paris, 1965.
2. A. Grothendieck, «Espaces Vectoriels Topologiques», Sociedade de Matemática de São Paulo, São Paulo, 1958.

Funções analíticas de várias variáveis complexas

Estudo das séries múltiplas de potências. Teorema preparatório de Weierstrass. Fatorização local de funções analíticas. Finitude dos ideais locais de funções analíticas. Domínio de holomorfia. Variedades de Stein. Funções inteiras. Funcionais analíticas.

Livro recomendado:

L. Hörmander, «An Introduction to complex analysis in several variables», Van Nostrand, 1966.

Introdução à análise funcional — (Pré-requisitos: Álgebra Linear, Topologia Geral).

Espaços de Banach. Aplicações lineares contínuas. Teorema de Hahn-Banach. Teorema de Banach--Steinhaus. Teorema dos homomorfismos. Teorema do gráfico fechado. Convergência fraca. Teorema de Banach-Saks. Espaços de Hilbert. Teorema de projecção. Noções elementares sobre operadores.

Livro recomendado:

G. F. Simmons, «Introduction to Topology and Modern Analysis», Mc Graw-Hill, 1963.

Introdução às variedades diferenciáveis

Variedades diferenciáveis. Estruturas diferenciáveis. Vectores tangentes e diferenciais. Subvariedades. Teorema de imersão de Whitney.

Livros recomendados:

1. L. Auslander and R. E. Mackenzie, «Introduction to Differentiable Manifold», Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1963.
2. E. L. Lima, «Introdução às Variedades Diferenciáveis», Porto Alegre, 1960.
3. C. S. Hönig, «Variedades Diferenciáveis», Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática, 1957.

Métodos matemáticos da Física — (Pré-requisitos: Álgebra Linear).

Teoria elementar das distribuições. Convoluções. Séries de Fourier de funções e de distribuições. A transformada de Fourier de funções e de distribuições. A transformada de Laplace. As equações da Física Matemática. Funções especiais.

Livro recomendado:

L. Schwartz, «Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques», Hermann, Paris, 1965.

Operadores diferenciais com coeficientes constantes

Existência de soluções elementares. Teorema de Paley-Wiener-Schwartz. Teorema de Malgrange sobre aproximação por exponenciais, polinómios. Teoremas de existência para equações inhomogéneas e convexidade. Elipticidade e hipo-elipticidade.

Livros recomendados:

1. J. F. Treves, «Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients», Gordon and Breach, New York, 1966.
2. L. Hörmander, «Linear Partial Differential Operators», Springer-Verlag, Berlin, 1964.
3. L. Nachbin, «Lectures on the Teory of Distributions», Instituto de Física e Matemática, Recife, 1964.

Teoria espectral de operadores em espaços de Hilbert

Operadores compactos simétricos. Teoria de Riesz--Schauder. Decomposição dos operadores limitados simétricos, dos unitários, dos normais. Operadores não limitados. Decomposição espectral. Operadores simétricos semi-limitados, exemplos. Extensão dos operadores semi-limitados simétricos. Método de Friedrichs. Cálculo funcional com operadores simétricos. Estudo do espectro dos operadores simétricos.

Livros recomendados:

1. F. Riesz-B. Nagy, «Functional Analysis», Frederich Ungar Publishing Co., N. Y., 1955.
2. K. Yosida, «Functional Analysis», Springer--Verlag, 1965.

Topologia algébrica — (Pré-requisitos: Topologia Geral)

Grupo fundamental. Espaços de recobrimento. Grupos de homologia de complexos simpliciais. Homologia singular. Classificação das superfícies compactas.

Livros recomendados:

1. W. S. Massey, «Algebraic Topology: An Introduction», Harcourt, Brace and World Inc., 1967.

2. A. H. WALLACE, «Algebraic Topology», Pergamon Press, 1957.
3. C. B. LYRA, «Introdução à Topologia Algérica», Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática, 1957.
4. S. LEFSCHETZ, «Introduction to Topology», Princeton, 1952.

Topologia Geral

Conjuntos e funções. Lema de Zorn. Espaços métricos. Espaços métricos completos. Espaços topológicos. Espaços compactos. Teorema de Tychonoff. Espaços localmente compactos. Compactificação de de Alexandrov. Espaços completamente regulares e normais. Lema de Urysohn e Teorema da extensão de Tietze. Espaços conexos.

Livros recomendados:

1. G. F. SIMONS, «Introduction to Topology and Modern Analysis», Mc Graw-Hill, Co., 1963.
2. S. MAC LANE, «Curso de Topologia Geral», Notas de Matemática, IMPA, 1959.
3. C. S. HÖNIG, «Aplicações da Topologia à Análise», Textos de Matemática n.º 9.

2. CURSOS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

Álgebra Linear

Equações Lineares e Matrizes. Espaços Vectoriais. Transformações Lineares, Polinómios. Determinantes. Decomposição espectral. Forma Canónica de Jordan.

Livro recomendado:

K. HOFFMAN and R. KUNZE, «Linear Algebra», Prentice-Hall, Inc., 1965.

Probabilidades I

Espaços de amostras discretos. Probabilidades condicionais, independência estocástica. Distribuição de Bernoulli e distribuição normal. Variáveis aleatórias, variância e expectância. Teorema de limite central. Correlação e regressão. Análise de variância.

Livros recomendados:

1. W. FELLER, «An Introduction to Probability Theory and Its Applications», Vol. I, 2nd edition, John Wiley, New York, 1965.
2. H. CRAMER, «The Elements of Probability Theory and some of its applications», John Wiley, 1956.

3. CURSOS DE GRADUAÇÃO

Cálculo I

Números reais-desigualdades. Conjuntos, funções e gráficos. Limite e continuidade das funções reais, funções elementares. Derivação das funções reais, teoremas fundamentais. Fórmula de Taylor, máximos e mínimos. Integral das funções contínuas. Teorema fundamental do cálculo, primitivas imediatas. Curvas planas (Circunferência, elipse, hipérbole e parábola).

Cálculo II

Funções transcendentes elementares. Métodos de integração, tipos simples de equações diferenciais. Aplicações, comprimento de arco, volume de sólidos de revolução. Noções de integrais impróprias. Geometria do R^3, rectas, planos e quádricas. Coordenadas cilíndricas e esféricas. Noções de derivadas parciais e integral múltipla.

Cálculo III

Estudo das funções de «várias variáveis», derivada direccional, funções diferenciáveis, derivação das funções compostas, teorema das funções implícitas (casos simples). Fórmula de Taylor, máximos e mínimos, multiplicadores de Lagrange. Integrais múltiplas. Exemplos e aplicações. Séries numéricas. Séries de potências. Série de Taylor. Aplicações.

Cálculo IV

Transformações diferenciáveis — Jacobiano. Teorema da função inversa (demonstração no caso do R^2). Mudança de variáveis nas integrais múltiplas. Integrais curvilíneas e de superfície. Teoremas de Green, Gauss e Stokes. Aplicações. Séries de funções e integrais impróprias. Convergência uniforme. Introdução às séries de Fourier.

Variáveis reais I — (Pré-requisitos: Cálculo III)

Números reais (construção axiomática). Supremo e ínfimo. Partes abertas e fechadas. Partes compactas. Limite e continuidade das funções reais. Teoremas da média. Funções convexas. Integral de Riemann-Stieltjes. Séries de funções: convergência uniforme, derivação e integração.

Variáveis reais II — (Pré-requisitos: Variáveis reais I)

Integral de Lebesgue na recta. Medida dos conjuntos lineares, funções mensuráveis, integral de Lebesgue. Funções de variação limitada e absolutamente contínua. Derivação. Teorema fundamental do Cálculo. Medida e Integral de Lebesgue no R^n. Teorema de Fubini.

Análise I — (Pré-requisitos: Variáveis Reais I e Introdução à Álgebra Linear)

Estudo do R^n, distâncias, partes abertas e fechadas. Partes compactas. Funções diferenciáveis. Teoremas da função inversa e das funções implícitas. Integrais múltiplas das funções contínuas.

Equações diferenciais I — (Pré-requisitos: Cálculo II, Introdução à Álgebra Linear)

Tipos clássicos de equações diferenciais de primeira ordem. Aplicações. Equações lineares de ordem n com coeficientes constantes. Sistema fundamental de soluções-Wronkiano. Método de variação das constantes Sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Existência e unicidade das soluções (considerações sobre o método das aproximações sucessivas). Integração por séries.

Variável complexa I—(Pré-requisitos: Cálculo III)

Números complexos. Funções elementares. Limite, continuidade, derivada, integral de funções complexas. Representação conforme, exemplos elementares. Teorema de Cauchy. Séries de Taylor. Teorema do módulo máximo. Desenvolvimento de Laurent. Resíduos. Aplicações.

Introdução à Álgebra

Noções elementares sobre conjuntos e funções. Introdução às estruturas algébricas simples. Domínio de integridade e anel. Divisibilidade de inteiros e de polinómios. Corpo, números racionais, reais e complexos.

Álgebra I – (Pré-requisitos: Introdução à Álgebra). Grupos. Definição e exemplos. Grupos de Transformações. Isomorfismos. Grupos ciclicos. Grupos de permutações. Subgrupos. Teorema de Lagrange. Homorfismos. Subgrupos normais, grupos quocientes. Aneis e ideais. Definições e exemplos. Aneis quocientes. Noções elementares sobre corpos.

Geometria diferencial – (Pré-requisitos: Cálculo IV, Equações Diferenciais).

Curvas, fórmulas de Frénet. Superfícies, formas quadráticas fundamentais. Curvatura gaussiana. Geodésicas. Teorema de Gauss-Bonnet.

Espaços métricos – (Pré-requisitos: Variáveis Reais I e II).

Espaços métricos. Funções contínuas. Homomorfismos. Espaços compactos. Espaços separáveis. Espaços de funções contínuas (teoremas de Stone-Weierstrass e de Ascoli). Teorema do ponto fixo de Banach e aplicações.

Introdução à Álgebra Linear

Definição de matriz. Igualdade, adição e multiplicação de matrizes. Propriedades. Inversão de matrizes. Espaços vectoriais. Estudo do espaço vectorial R^n. Sistemas lineares.

Cálculo Numérico — (Pré-requisitos: Cálculo III, Equações Diferenciais I).

Resolução numérica de sistemas de equações lineares. Cálculo aproximado das raizes de uma equação algébrica. Integração numérica. Métodos numéricos em equações diferenciais.

Geometria Projectiva – (Pré-requisitos: Variáveis Reais I, Álgebra Linear I).

Axiomas da geometria projectiva plana. Teorema de Desargues e Pappus. Introdução de coordenadas. Espaços projectivos n-dimensionais. Transformações projectivas. Quádricas.

Reuniões Científicas

Sexto Colóquio Brasileiro de Matemática. Essa reunião, parte da série de colóquios realizados de dois em dois anos, no mês de Julho, teve lugar em Poços de Caldas, MG, de 2 a 22 de Julho de 1967. Transcrevemos a seguir, na íntegra, o relatório do Coordenador da Comissão Organizadora.

Relatório

1. INTRODUÇÃO. Em virtude do art. 34 do Regimento do IMPA aprovado pelo Decreto n.º 59.389 de 13/10/66, do Presidente da República, o Colóquio Brasileiro de Matemática é organizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), do Conselho Nacional de Pesquisas. O Director do IMPA, através da Portaria n.º 5 de 23/5/66, nomeou para compor a Comissão Organizadora do Sexto Colóquio os seguintes professores: *Carlos Benjamin de Lyra*, *Leopoldo Nachbin*, *Lindolpho de Carvalho Dias* e *Luiz Adauto da Justa Medeiros* (Coordenador).

Foi escolhida para a realização do Sexto Colóquio, a cidade de Poços de Caldas, por ser um local que atenderia perfeitamente às necessidades do Colóquio, no que diz respeito à hospedagem e boas instalações para salas de aulas e conferências. O Colóquio teve a duração de três semanas, compreendidas entre 2 e 22 de Julho de 1967. Contou com 250 participantes, dos quais 35 de universidades estrangeiras. É importante observar o acréscimo de 46 participantes em relação ao Quinto Colóquio. Cumpre salientar a presença do muitos professores estrangeiros.

Os participantes do Colóquio foram hospedados no Palace Hotel de Poços de Caldas.

3. CURSOS DO COLÓQUIO. Foram ministrados, de 2 a 22 de Julho, no salão do Teatro de Bôlso, no prédio do Palace Cassino, os cursos seguintes:

3. 1. Aperfeiçoamento—(a partir de 2 de Julho):

a) «Introdução às Funções de uma Variável Complexa», por *Chaim Samuel Hönig*, do Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo;

b) «Introdução à Análise», por *José de Barros Neto*, do Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo;

c) «Elementos de Álgebra», por *Artibano Micali*, do Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo.

Os cursos de aperfeiçoamento foram ministrados na parte da manhã, a partir das 8. 30 hs., cada um com um total de 12 horas de aula. Diàriamente ao fim de cada aula, era distribuida uma colecção de exercícios cujas soluções deveriam ser entregues na aula seguinte. Os professores destes cursos possuiam monitores para corrigir os exercícios e darem aula de repetição à tarde, no prédio da Faculdade de Filosofia de Poços de Caldas. A aferição da aprendizagem foi computada através dos exercícios diários, e de uma prova escrita final. Àqueles que obtiveram aproveitamento satisfatório à critério do professor do curso, receberam um certificado, por curso, expedido pelo IMPA.

3. 2. Pós-Graduação—(a partir de 10 de Julho):

a) «Introdução à Análise Funcional», por *Pedro Nowosad*, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul;

b) «Introdução à Teoria dos Grupos de Lie», por *Alexandre Augusto Martins Rodrigues*, do Instituto de Pesqnisas Matemáticas da Universidade de São Paulo;

c) «Singularidades das Aplicações Diferenciáveis», por *Gilberto Francisco Loibel*, da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

Os cursos de pós-graduação foram ministrados no período da tarde, a partir das 14 horas, cada um com um total de seis horas de aula.

3. 3. Pós-Doutoramento — (a partir de 10 de Jnlho):

a) «Topologia dos espaços de Aplicações Holomorfas», por *Leopoldo Nachbin*, do IMPA;

b) «Equações Diferenciais Lineares Periódicas em Espaços de Banach», por *Juan Jorge Schäffer*, do Instituto de Matemática y Estadística da Universidade de Montevideo, Uruguai.

c) «Certos Aspectos da Teoria dos Anéis com Involução», por *Israel N. Herstein*, do Departamento de Matemática da Universidade de Chicago.

Para cada curso, isto é, três de aperfeiçoamento, três de Pós-Graduação e três de Pós-Doutoramento, foram preparadas apostilhas pelos respectivos professores, distribuídas no primeiro dia de aula de cada curso.

Na parte da tarde, no período de 15. 50 hs. a 16. 40 hs., a partir do dia 10, foi servido o chá. O período do chá foi julgado de grande importância, por ser uma oportunidade que os professores dos vários centros do Brasil e do estrangeiro tiveram, para debater problemas e trocarem ideias sobre projectos de ensino e pesquisa.

4. CONFERÊNCIAS DO COLÓQUIO. Houve um total de oito conferências, feitas a convite da Comissão Organizadora. Os nomes dos conferencistas e os respectivos títulos são relacionados a seguir:

1. *Daniel Lehmann*, «Connexions à Courbure Nulle et K-Théorie»;
2. *Elon Lages Lima*, «Hipersuperfícies com Curvatura não Negativa»;
3. *Heitor G. de Souza*, «Actividades Científicas da Organização dos Estados Americanos (OEA)»;
4. *Maurício Matos Peixoto*, «Classificação de Campos de Vectores»;
5. *Nancy Kopell*, «Commuting Diffeomorphism of the Circle»;

6. *Nelson Onuchic*, «Propriedades de Invariância para Sistemas de Equações»;
7. *Renzo Piccinini*, «Operações de Cohomologia em K-Teoria»;
8. *Walter Strauss*, «Non-Linear Wave Equations: Decay and Scattering».

As conferências tiveram início no dia 10 de Julho, todas feitas de 17.40 às 18.30 horas, sendo quatro na semana de 9 a 15 de Julho e as outras quatro na semana seguinte.

5. COMUNICAÇÕES DO COLÓQUIO. As comunicações de pesquisa tiveram início no dia 12 de Julho, começando às 10.30 hs. da manhã, na sala das comunicações do prédio da Faculdade de Filosofia de Poços de Caldas. Diàriamente foram feitas quatro comunicações, cada uma com a duração de 20 minutos, sendo 15 paɹa o expositor e 5 para o debate. Todas as comunicações foram mimeografadas e distribuídas aos presentes, em número de 30 a 40 pessoas. As 19 comunicações feitas estão relacionadas a seguir:

1. *O. Biberstein*, «Caracterización Extrínsica de de una Superfície en un Espacio de Minkowski de Tres Dimensiones»;
2. *Rolando Chuaqui*, «Medidas Definidas por Relaciones de Equivalencia»;
3. *Antonio Diego*, «On Certain Classes of Heyting Algebras»;
4. *Paul Ver Eecke*, «Cálculo Diferenciável nos Espaços não Normados»;
5. *Myriam Condim Déchamps*, «Un Théorème Elementaire sur les Séries de Fourier Lacunaires»;
6. *António Fernandes Izé*, «Comportamento Assintótico e Existência de Soluções periódicas de uma equação Diferencial não Linear de 2.ª Ordem»;
7. *R. G. Lintz*, «Extensão do Conceito de Derivada aos Espaços Topológicos»;
8. *Marguerite Mongeney*, «Sur la Finitude de la Fermeture Intégrale»;
9. *José Morgado*, «Sobre a Estrutura dos J-Anéis Generalizados»;
10. *R. Moscoso*, «Determinación de las Funciones de Probabilidad Mediante el Criterio Máxima Entropia»;
11. *W. M. Oliva*, «Uma condição necessária e Suficiente de Involução para um Sistema de Equações de Derivadas Parciais»;
12. *Domingos Pizanelli*, «O Cálculo Operacional do Operador Somatório»;
13. *Edmundo Rofmann*, «Sobre la Aplicación de un Metodo de Integración por Pontos de Ecuaciones Diferenciales en el Cálculo da la Velocidad Critica de los Vehiculos Tierra--Aire»;
14. *Roberto Romano*, «Operadores Analíticos de $H(U)$»;
15. *Nathan Moreira dos Santos*, «Sobre a Distribuição Local das Singularidades de uma Aplicação Diferenciável»;
16. *Aron Simis*, «Grupos Cíclicos de Jacobi»;
17. *Victor Szebehely*, «Complete Solution of a General Problem of Three Bodies»;
18. *Jiro Tamura*, «Revestimentos de Tipo Plano de Superfícies Geradas de Riemann»;
19. *Mário Tourasse Teixeira*, «Matrizes Separadoras para alguns Reticulados Distributivos Fracamente Complementacos».

Convém observar que os Professores *Aron Simis* e *Mário Tourasse Teixeira*, embora apresentando os seus resumos, não poderam comparecer ao Colóquio.

6. REUNIÃO SOBRE O ENSINO SECUNDÁRIO. No dia 13 de Julho às 21.00 hs. realizou-se no prédio do Palace Cassino, uma reunião sobre o ensino secundário de Matemática, cujo tema principal foi «O Aperfeiçoamento do Professor». Foram convidados a fazer relatórios o GEEM (S. Paulo), o CECIBA (Bahia) e o Prof. *Kleber Cruz Marques*, da Universidade de Paraíba.

O Professor *Omar Catunda* (Univ. da Bahia), relatou as actividades do CECIBA, cujo principal objectivo tem sido a actualização dos professores do ensino médio através de cursos intensivos durante o período de férias. Na sua opinião, tal medida não é ainda suficiente para suprir as deficiências de formação nas faculdades. Criticou o facto de que os cursos patrocinados pelo MEC, que são muito frequentados, não produzam o efeito desejado por motivo de sua execução deficiente. Finalmente, informou que ambos ele e a Professora Martha Dantas, estavam escrevendo textos de Matemática para o ginásio.

O GEEM se fez representar pelo Professor *B. Castrucci* (USP), que historiou as principais actividades daquele organismo no sentido do aperfeiçoamento de professores já activos no ensino médio: 1) promover a redacção e publicação de textos matemáticos para este fim; 2) realização de cursos de férias para para um total de cerca de 3.000 alunos desde a sua fundação; 3) realização de congressos sobre problemas do ensino; 4) realização em 1967 da primeira «Olimpíada Matemática», entre alunos do ensino médio.

O Professor *Kleber C. Marques*, infelizmente, não compareceu a esta reunião. A professora *Lucilia Bechara*, também convidada, informou aos presentes a respeito dos cursos especiais que tem organizado, bem como da adaptação dos professores para os Ginásios Vocacionais em São Paulo. Em seguida, foi dada a palavra a diversos oradores.

No final, foram convidados a falar sobre o assunto em discussão, alguns dos matemáticos presentes, destacando-se as intervenções dos Professores *Elon Lages Lima*, *Leopoldo Nachbin* e *José Barros Neto*. Embora estivessem de acordo quanto à necessidade de se actualizar os programas de Matemática para o ensino médio, advertiram quanto ao perigo que certo entusiasmo por «Matemática Moderna» venha resultar no emprego dn uma linguagem moderna disfarçando uma trivialização do conteúdo a ser ensinado. O Professor *Nachbin* acentuou ainda, a necessidade de se introduzir a ideia de pesquisa no ensino médio, e de se treinar uma élite dentre os professores deste nível, profissionais competentes imbuídos do espírito de pesquisa.

7. ESCOLA LATINO-AMERICANA DE MATEMÁTICA. Motivado pelas conclusões obtidas na Conferência Interamericana sobre o ensino da Matemática, realizada em Lima, Perú, em Dezembro de 1965, o Professor *Heitor G. de Souza*, Chefe da Unidade de Educação e Pesquisa OEA, dirigiu-se ao Professor *Leopoldo Nachbin*, em carta datada aos 9 de Fevereiro de 1967, consultando-o sobre a possibilidade de aproveitar o Sexto Colóquio Brasileiro de Matemática, para reunir, na ocasião, certo número de professores latino-americanos, com o objectivo de discutir as bases para a organização de uma Escola Latino-Americana de Física. O Professor *Nachbin* acolheu a ideia eom grande entnsiasmo, o que foi expresso em sua carta de 21 de Fevereiro de 1967, em resposta à do Professor *Souza*. Nesta carta o Professor *Nachbin* sugeriu ao Professor *Souza* que ele se dirigisse também ao Coordenador do Sexto Colóquio, para que se consultasse a Comissão Organizadora sobre a ideia da ELAM. Em virtude dos demais membros da Comissão Organizadora do Sexto Colóquio terem concordado, foi mantida correspondência entre o Coordenador e o Professor *Souza*, com o objectivo de acolher os participantes da reunião preliminar em Poços de Caldas, assim como planejar as reuniões da ELAM.

Houve quatro reuniões em Poços de Caldas, nos dias 12, 13, 14 e 15 de Julho, sendo as duas primeiras presididas pelo Professor *Heitor G. de Souza* e as duas últimas pelo Coordenador do Colóquio, uma vez que o Professor *Souza* teve necessidade de deixar Poços de Caldas com destino aos Estados Unidos. As conclusões a que se chegaram nas quatro reuniões acima citadas, foram resumidas em cocumentos, qne transcrevemos a seguir:

Apresentação — Durante a realização do Sexto Colóquio Brasileiro de Matemática, um grupo de matemáticos latino americanos reuniu-se a convite do Departamento de Assuntos Científicos da União Pan Americana, com o fim de estudar a possibilidade de se organizar uma Escols Latino-Americana de Matemática (ELAM). O grupo convidado participou de quatro reuniões informais, na segunda das quais se nomeou uma Comissão encarregada de definir o carácter científico e a organização que se conviria dar à ELAM, bem como analisar as possibilidades quanto à organização da primeira sessão da Escola. Para integrar a dita Comissão foram indicados os professores: *Emilio Lluis*, *Carlos B. de Lyra* e *Orlando Villamayor*. Na última sessão nomeou-se uma Comissão Provisória.

A evolução do meio matemático latino-americano tem posto em evidência que o maior obstáculo à formação científica dos matemáticos se situa na fase final, ou seja, na etapa da pós-graduação em nível de doutoramento e pós-doutoramento. Bàsicamente, concebemos a ELAM como uma instituição que estimule e ajude a desenvolver a pesquisa matemática na América Latina. Esta escola promoverá, ainda, o intercâmbio científico entre pesquisadores dos diversos centros matemáticos.

A escola proporcionará aos participantes, através de cursos avançados e exposições do género «mise au point», a apresentação de áreas de pesquisas activas e de problemas em aberto.

Os cursos serão sobre temas específicos, tendo como objectivo principal apresentar aos participantes os aspectos actuais de maior interesse nesses temas, incluindo-se a discussão de problemas em aberto.

Paralelamente aos cursos haverá séries de conferências de «mise au point», expondo certos temas de modo acessível a não especialistas.

Também se deve prever horáriss reservados para comunicações, trabalhos de seminários e discussões, assim como tempo livre para estudo.

Para ministrar os cursos e conferências poderão ser convidados especialistas internacionalmente destacados nos respectivos temas.

Haverá uma Comissão Permanente que se encarregará de dirigir e planejar as actividades da Escola. A comissão deverá ser renovada durante cada sessão da Escola. Nenhum membro poderá pertencer à Comissão por mais de dois períodos consecutivos, procurando-se fazer a renovação de maneira a garantir a continuidade de seu funcionamento.

Compete à Comissão a selecção dos temas dos conferencistas e pesquisadores especialmente convidados, e a distribuição das bolsas concedidas através da ELAM.

Durante cada sessão, os professores e pesquisadores latino-americanos participantes, fixarão a data e a sede da sessão seguinte, levando-se em conta as opiniões que a Comissão Permanente haja recolhido, prèviamente, dos organismos científicos latino-americanos.

A Comissão Permanente se encarregará de solicitar os fundos necessários para o funcionamento da Escola.

Para cada uma das sessões, a Comissão designará um Director Local, ao qual caberá resolver os problemas de organização na sede escolhida.

Com o fim de aperfeiçoar o funcionamento da ELAM, as normas aqui estabelecidas poderão ser modificadas durante as sessões da Escola, em função da expêriência adquirida até o momento.

Para garantir este alto nível, é necessário prever a colaboração, toda vez que julgada necessária, de matemáticos dos centros mais activos do mundo. Em vista do nível em que se concebe a Escola, parece recomendável que cada sessão da ELAM seja organizada em torno de um ou dois temas, mais ou menos amplos, que sirvam de fio condutor às actividades da sessão.

Julgamos, por outro lado, que a iniciativa de se organizar a ELAM seja complementada por uma outra, não menos importante: a organização de Escolas Regionais de Matemática nos diversos países da América Latina. Estas Escolas visarão dinamizar a formação básica em matemática superior, ao nível que antecede ao da ELAM. Por exemplo, os Colóquios Brasileiros de Matemática têm uma grande parte de suas actividades no sentido de uma escola regional. A organização de escolas regionais parece instrumento que melhor se adapta ao nível e às necessidades de cada região. Embora vários países possam organizar tais escolas, sem ajuda exterior, estas iniciativas devem contar com o apoio de organismos internacionais e o colaboração científica dos países laiino-americanos que possam oferecê-la.

Finalidade e Organização — A ELAM é uma Organização Científica autónoma, que periòdicamente, realizará suas sessões de modo alternado nos diversos países da América Latina.

A principal finalidade da ELAM é a de estimular os actividades de pesquisa, tanto dos estudantes avançados como dos pesquisadores já formados da América Latina.

A ELAM procurará estabelecer contactos, os mais estreitos possíveis, com as Instituições internacionais e locais dos países latino-americanos, para o melhor desempenho de suas funções.

A duração de cada sessão poderá ser de trés a seis semanas.

Disposições transitórias — O grupo de matemáticos reunidos durante a realização do Sexto Colóquio Brasileiro de Matemática, nomeou uma Comissão Provisória de três membros, formada pelos professores: *José Adem, Maurício Matos Peixoto* e *Luis Santaló.*

Os matemáticos presentes à reunião ficaram incumbidos de consultar, nas suas respectivas organizações nacionais, a respeito da Escola e enviarão as opiniões e recomendações respectivas à Comissão.

A Comissão Provisória se encarregará então, de organizar a primeira sessão da ELAM na data que mais convier.

9. EXPOSIÇÃO DE LIVROS. Houve durante os dias 10, 11 e 12 de Julho uma exposição de livros de matemática feita por editores. A exposição teve lugar no salão de chá do Palace Cassino.

10. PARTE FINANCEIRA. O Sexto Colóquio foi bàsicamente financiado pelo Conselho Nacional de Pesquisas, com uma contribuição de NCr$ 45.000,00 (quarenta e cinco mil cruzeiros novos). A Fundação para o Amparo à Pesquisa no Estado de São Paulo (FAPESP), contribuiu com NCr$ 10.000,00 (dez mil cruzeiros novos), a Coordenação do Aperfeiçoamento do Pessoal do Ensino Superior (CAPES) contribuiu com NCr$ 5.000,00 (cinco mil cruzeiros novos); a Universidade de Brasilia com NCr$ 3.200,00 (três mil e duzentos cruzeiros novos); a Universidade da Bahia com NCr$ 1.700,00 (mil e setecentos cruzeiros novos).

O Govêrno do Estado de Minas Gerais, através da Hidrominas, contribuiu substancialmente concedendo aos participantes do Sexto Colóquio o desconto de 30°/₀ (trinta por cento), no Palace Hotel de Poços de Caldas; e de 50°/₀ (cincoenta por cento) nas Termas «António Carlos», o que representa um auxílio da ordem de NCr$ 30.000,00 (trinta mil cruzeiros novos).

DOUTORAMENTOS, DOCÊNCIAS E CÁTEDRAS

A. A. M. Rodrigues. Foi indicado para a cátedra de Crítica dos Princípios e Complementos de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP, o professor *Alexandre Augusto Martins Rodrigues* que prestou concurso em Agosto, tendo apresentado a tese «Pseudo-Grupos de Lie Infinitos».

G. S. S. Avila. Em Setembro de 1966, o Prof. *Geraldo Severo de Sousa Avila* prestou concurso de Livre Docência na Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, tendo apresentado uma tese intitulada «Sobre o princípio limite de absorção para sistemas diferenciais simétricos hiperbólicos».

J. A. A. G. Barroso. Em Junho de 1967, o Prof. *Jorge Alberto Alvares Gomes Barroso* prestou concurso de Livre Docência na Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, GB, tendo apresentado uma tese intitulada «Fundamentos da Teoria dos Espaços Vetoriais Topológicos».

J. de Barros Neto. Em Outubro de 1966, o Prof. *Jose de Barros Neto* prestou concurso de Livre Docência na Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, havendo apresentado como tese um trabalho intitulado «Soluções locais do problema elítico».

L. R. B. Vieira. Em Maio de 1967, o Prof. *Leo Roberto Borges Vieira* prestou concurso de Cátedra na Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, tendo a sua tese versado «Sobre a teoria dos sistemas associados para estudo da estabilidade global».

R. A. A. Piccinini. Em Setembro de 1966, o Prof. *Renzo Angelo António Piccinini* completou o Doutoramento na University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, USA, apresentando uma tese intitulada «Stable cohomology operations in generalized cohomology theories».

CURSOS

Instituto de Matemática Pura e Aplicada Rio de Janeiro — Estão sendo realizados os seguintes cursos:

1) «Análise II», pelo Prof. *John Deneen.*
2) «Medida e Integração», pelo Prof. *Guido Zapata.*
3) «Introdução à Análise Euncional», pela Profa. *Myriam Dechamps.*
4) «Teoria Espectral em Espaços de Hilbert», pelo Prof. *Luiz Adauto Medeiros.*
5) «Equações Diferenciais Parciais», pelo Prof. *Luiz Adauto Medeiros.*

Escola de Engenharia, São Carlos — Foi desenvolvido no Departamento de Matemática, um curso intitulado:

«Introdução às Variedades Diferenciáveis», pelo Prof. *Gilberto Loibel*, com a colaboração dos Professores *Aldo Ventura* e *Ary de Souza Pinheiro.*

Instituto de Matemática, Universidade do Rio Grande do Sul — Foram ministrados os seguintes cursos:

1) «Análise Real», pelo Prof. *Pedro Nowosad,* com a colaboração dos Professores *Penido Fontoura da Silva* e *Luiz Virgilio Meneghello.*
2) «Equações Diferenciais», pelo Prof. *José Maria Gonçalves.*
3) «Espaços Vetoriais Topológicos», pelo Prof. *Ernesto Bruno Cossi.*

Centro de Ensino de Ciências do Nordeste, (CECINE), Recife — Foram ministrados, de 15 de Abril a 15 de Junho, para professores do ensino médio, os seguintes cursos:

1) «Introdução á Álgebra Moderna», pelo Prof. *João Barbosa de Oliveira.*
2) «Lógica Simbólica e Fundamentos da Matemática», por *Aloisio Teles Meneses.*

SEMINÁRIOS

Escola de Engenharia, São Carlos – Estão em andamento, no Departamento de Matemática, os seguintes seminários:

1) «Teoria da estabilidade das equações diferenciais ordinárias e funcionais», sob a orientação do Prof. *Nelson Onuchic* e com a participação dos Professores *António Fernandes Izé* e *Natalino A. de Molfetta.*
2) «Singularidades das aplicações diferenciáveis», sob a orientação do Prof. *Gilberto Loibel* com a participação dos Professores *Ary de S. Pinheiro* e *Luiz A. Favaro.*
3) «Classes características», sob a orientação do Prof. *Gilberto Loibel*, com a participação dos Professores *Ary de S. Pinheiro*, *Mário R. Saab*, *Auster Ruzante* e *Luiz A. Favaro.*

CONFERÊNCIAS

Escola de Engenharia, São Carlos — Foi proferida no Departamento de Matemática, a seguinte conferência:

«Teoria das Categorias», pelo Prof. *Newton Afonso Carneiro da Costa.*

Instituto de Pesquisas Matemáticas, Universidade de São Paulo — Teve lugar a conferência: «Operações de Cohomologia estáveis em Teorias de Cohomologia», pelo Prof. *Renzo Piccinini.*

6.º Colóquio Brasileiro de Matemática, Julho de 1967, Poços de Caldas, MG — Por ocasião do 6.º Colóquio Brasileiro de Matemática, o Prof. *Heitor G. de Souza,* do Departamento de Assuntos Científicos da OEA, fez uma conferência sobre as actividades científicas da OEA, que será reproduzido a seguir:

Sudene — De 12 a 14 de Setembro de 1967, realizou-se em Recife, PE o Primeiro Encontro de Matemáticos do Nordeste, promovido pela SUDENE, com o objectivo de discutir os problemas da melhoria do ensino da Matemática nas instituições do Nordeste, do fomento à pesquisa e à pós-graduação nesse ramo da Ciência, no sentido de apresentar recomendações à SUDENE quanto à sua actuação em prol das ciências matemáticas puras e aplicadas nessa região. Foi Coordenador do referido Encontro o Professor *Luiz Adauto Medeiros*, do IMPA, Rio de Janeiro, GB. Participaram do Encontro, a convite da SUDENE, cerca de 30 participantes dos Estados seguintes: Ceará, Rio Grande do Norte Pernambuco, Alagoas, Sergipe, Paraiba, Bahia, Guanabara. A SUDENE tenciona realizar pròximamente Encontros semelhantes nos ramos da Física, da Biologia e da Química, bem como repetir periòdicamente Encontros em cada sector das ciências. Foram as seguintes, na sua íntegra, as recomendações finais aprovadas pelos participantes do Primeiro Encontro de Matemáticos:

I — Pessoal

1 — Melhorar as condições de trabalho do pessoal docente e recrutar pesquisadores, para o que se impõe a obtenção do auxílio para complementação salarial.

2 — Adoção de providências no sentido de tornar possível a contratação e complementação de salários de professores e pesquisadores de alto nível, nacionais ou estrangeiros, cujo concurso seja indispensável para expansão e melhoria dos sistemas de Ensino Matemático com as almejadas implicações no desenvolvimento socio-económico da Região, levando em conta o currículum vitae de cada um.

3 — Adoção de providências no sentido de tornar possível a contratação e complementação de salários do pessoal administrativo visando uma melhor execução administrativa.

II — Documentação

1 — Pleitear dos orgãos competentes o financiamento de publicações de textos para os estudantes de Matemática do Nordeste.

2 — Inversão de recursos necessários para formação, ampliação e actualização das bibliotecas de Matemática.

3 — Coordenação Documental visando dar maior rendimento aos periódicos e livros existentes e maior circulação, no Nordeste, de informações bibliográficas disponíveis nos diversos Centros.

4 — Todas as publicações deveriam ser levadas aos diversos centros existentes, como também as decisões importantes, que tenham resultado de convénios, contratos, etc.

5 — Maior incremento e modernização da Central de Documentação: microfilmes, reproduções, divulgação, etc., para cobertura de cursos e para outros fins úteis.

6 — A SUDENE colabora dando cursos para a formação de pessoal para as bibliotecas, mas o pessoal recrutado nos Estados não se apresenta em condições de receber as instruções adredemente preparadas.

7 — Com vistas à instalação do Instituto de Matemática de Alagoas e Sergipe, deve a SUDENE cuidar da organização da futura biblioteca, providenciando meios para o treinamento do pessoal para servir na mesma.

8 — Alunos dos próprios Institutos de Matemática devem ser recrutados para fins de pesquisas bibliográficas nas próprias bibliotecas.

9 — Aquisição planificada, tendo em vista uma economia relativa a cada centro.

a) Só é possível quando há um orgão central coordenador. Este orgão se encarregaria de manter uma Comissão de Conselheiros (ou outro nome que se queira), composta dos especialistas de cada matéria. Assim, quando se cogitasse de comprar revistas, etc. de Matemática, aquele que leciona ou trabalha neste campo, indicaria quais as obras que deveriam ser compradas (também se estabeleceria o critério de prioridade para aquisição) e dessa forma os recursos disponíveis seriam melhor aproveitados. O que se fizesse para o nível local, também seria feito a nível regional, para determinadas obras, usando-se o setor de Informação Técnico-Científica do Departamento de Recursos Humanos da SUDENE como orgão coordenador.

b) Medidas recomendadas.
— Criação de um orgão central coordenador;
— Criação de Comissões para julgamento de novas aquisições, ouvidos sempre os professores mais ligados aos respectivos assuntos.

10 — Sistematização de informação local, para uma uniformização de métodos e uma racionalização de esforços.

a) Implica esse ítem na criação de Biblioteca Central.

b) Deve haver comunicações permanentes entre as bibliotecas a fim de serem evitadas duplicidades. Também não confundir duplicidade com necessidade de disponibilidade de vários exemplares de uma mesma obra de apoio a cursos específicos.

III — Bolsas

1 — Determinação de recursos para o estabelecimento de um sistema de bolsas para estudantes de cursos de graduação.

2 — Coordenação de esforços no sentido de ampliar as possibilidades para graduados realizarem o mestrado ou doutoramento em matemática em centros de reconhecido nível científico.

3 — Que sejam concedidas bolsas para estágio (num período de pelo menos 12 meses) para treinamento de professores em exercício, nos Centros de Ensino de Ciências.

IV — Centros de processamento de dados

1 — Estabelecimento de uma computadora política visando obter recursos públicos e, sempre que possível, particulares a serem destinados a investimentos em computadores electrónicos. Recomendações especial para uma imediata definição da SUDENE em favor do aluguel de computadores eletrónicos ao invés de compra pura e simples.

Outros

1 — Recomendar a criação de núcleos dos Centros de Ciências ampliando os já criados.

2 — Que os orgãos competentes dêem apoio a cursos que visem a formação de professores de matemática do 1.º ciclo de Ensino Médio.

3 — Que o treinamento de professores do ensino médio seja realizado pelos Centros de Ciências sob a supervisão dos Institutos e Faculdades de Educação.

4 — Que sejam forrecidos aos Centros de Ciências, meios para elaboração de textos de carácter experimental para o ensino moderno de Matemática nas salas de grau médio.

5 — Que sejam proporcionadas condições para realização de encontros ou congressos de matemática no Nordeste ou para o comparecimento de professores do Nordeste a encontros ou congressos realizados em outras regiões do país.

6 — Criação de uma comissão para estudar a implantação de novos centros.

7 — Quanto à criação de novos centros, somos de opinião que ela se processa naturalmente quando se fizer necessário o aparecimento dos mesmos.

É de bom alvitre, entretanto, tendo em conta o preenchimento máximo da sua utilidade e a obtenção de um bom nível de ensino que sua criação seja procedida não sòmente da obtenção de recursos naturais mas de uma criteriosa preparação de pessoal em outros centros mais desenvolvidos. Para atingir aos objectivos, sugerimos à criação de uma comissão de Matemáticos.

8 — Os Institutos de Matemática devem assumir a responsabilidade pela coordenação e unificação do ensino e da pesquisa na área de matemática em todo o âmbito da Universidade.

9 — Construção de instalações adequadas e melhoria das existentes para atender às exigências de reestruturação da Universidade e solicitações do ensino da Matemática nos diversos campos.

Além das recomendações anteriores, o plenário aprovou as seguintes sugestões:

I — Que os pedidos de auxílios devem obedecer a seguinte ordem de prioridade, quando da análise dos projectos:

1 — Pessoal (contratação ou complementação de Professores).

2 — Aquisição de Bibliotecas.

3 — Bolsas a estudantes de pós-graduação no país.

4 — Bolsas de estudantes de pos-graduação no exterior.

5 — Centros de computação.

II — Que sejam escolhidos, além do coordenador, mais dois matemáticos de reputação nacional para assessorar a SUDENE.

ANTOLOGIA

Natural isomorphisms in group theory (*)

by Samuel Eilenberg and Saunders MacLane
Departments of Mathematics, University of Michigan and Harvard University

Communicated October 26, 1942

1. Introduction. — Frequently in modern mathematics there occur phenomena of «naturality»: a «natural» isomorphism between two groups or between two complexes, a «natural» homeomorphism of two spaces and the like. We here propose a precise definition of the «naturality» of such correspondences, as a basis for an appropriate general theory. In this preliminary report we restrict ourselves to the natural isomorphisms of group theory; with this limitation we can present the basic concepts of our theory without developing the axiomatic approach necessary for a general treatment applicable to various branches of mathematics.

Properties of character groups (see the definitions in § 5 below)(**) may serve to illustrate the ideas involved. Thus, it is often asserted that the character group of a finite group G is isomorphic to the group itself, but not in a «natural» way. Specifically, if G is cyclic of prime order p, there is for each generator of G an isomorphism of G to its character group, so that the proof furnishes $p-1$ such isomorphisms, no one of which is in any way distinguished from its fellows. However, the proof that that the character group of the character group of G is isomorphic to G itself is considered «natural», because it furnishes for each G a unique isomorphism, not dependent on any choice of generators.

To give these statements a clear mathematical meaning, we shall regard the character group $Ch(G)$ of G as a function of a variable group G, *together* with a prescription which assigns to any homomorphism γ of G into a second group G'.

$$\gamma : G \to G',$$

the induced homomorphism (see (5) below)

$$Ch(\gamma) : Ch(G') \to Ch(G).$$

The functions $Ch(G)$ and $Ch(\gamma)$ jointly form what we shall call a «functor»; in this case, a «contravariant» one, because the mapping $Ch(\gamma)$ works in a direction opposite to that of γ. A natural isomorphism between two functions of groups will be an isomorphism which commutes properly with the induced mappings of the functors.

With our description of a natural isomorphism, practically all the general isomorphisms obtained in group theory and its applications (homology theory, Galois theory, etc.) can be shown to be «natural». This results in added clarity in such situations. Furthermore, there are definite proofs where the naturality of an isomorphism is needed,

(*) Reprodução das pp. 537-543 do vol. 28 dos *Proc. N. A. Sc. USA*, amàvelmente autorizada pelo Editor.

(**) Ver Nota final.

especially when a passage to the limit is involved. In fact, our condition $(E\,2)$ below appears in the definition of the isomorphism of two direct or two inverse systems of groups (1).

2. Functors. — The definition of a functor will be given for the typical case of a functor T which depends on two groups as arguments, and is *covariant* in the first argument and *contravariant* in the second. Such a functor is determined by two functions. The *group* function determines for each pair of topological groups G and H (contained in a given legitimate set of groups) another group $T(G,H)$. The *mapping functions* determines for each pair of homomorphisms (2) $\gamma: G_1 \to G_2$ and $\eta: H_1 \to H_2$ a homomorphism $T(\gamma,\eta)$, such that

(1) $T(\gamma,\eta):(G_1,H_2) \to T(G_2,H_1)$.

We require that $T(\gamma,\eta)$ be the identity isomorphism whenever γ and η are identities, and that, whenever the products $\gamma_2\gamma_1$ and $\eta_2\eta_1$ are defined,

(2) $T(\gamma_2\gamma_1,\eta_2\eta_1) = T(\gamma_2,\eta_1)\,T(\gamma_1,\eta_2)$.

Some functors will be defined only for special types of groups (e. g., for abelian groups) or for special types of homomorphisms (e. g., for homomorphisms «onto»).

If γ and η are both isomorphisms (3), it follows from these conditions that $T(\gamma,\eta)$ is also an isomorphism. Consequently, if the groups G_1 and G_2 and the groups H_1 and H_2 are isomorphic, the functor T gives rise to isomorphic groups $T(G_1,H_1)$ and $T(G_2,H_2)$.

3. Examples. — The direct product $G \times H$ of two groups may be reguarded as the group function of a functor. The corresponding mapping function specifies, for each pair of homomorphisms $\gamma: G_1 \to G_2$ and $\eta: H_1 \to H_2$, an induced homomorphism $\gamma \times \eta$, defined for every element (g_1,h_1) in $G_1 \times H_1$ as

$$[\gamma \times \eta](g_1,h_1) = (\gamma g_1, \eta h_1).$$

Then

(3) $\gamma \times \eta : G_1 \times H_1 \to G_2 \times H_2$,

and, whenever $\gamma_2\gamma_1$ and $\eta_2\eta_1$ are defined, one has

(4) $(\gamma_2\gamma_1)\times(\eta_2\eta_1) = (\gamma_2 \times \eta_2)(\gamma_1 \times \eta_1)$,

Except for the absence of contravariance, these conditions are parallel to (1) and (2), hence $G \times H, \gamma \times \eta$ define a functor, covariant in both G and H.

Whitney's tensor product (4) (*) $G \circ H$ of two discrete groups (5) G and H is the group function of a functor. The elements of this group are all finite sums $\Sigma\, g_1 \circ h_1$ of formal products $g_1 \circ h_1$; the group operation is the obvious addition, and the relations are $g \circ (h + h') = g \circ h + g \circ h'$, $(g + g') \circ h = g \circ h + g' \circ h$. Given two homomorphisms $\gamma: G_1 \to G_2$ and $\eta: H_1 \to H_2$, there is an induced homomorphism $\gamma \circ \eta$ of $G_1 \circ H_1$ into

(1) Pontrjagin, L., «Ueber den algebraischen Inhalt der topologische Dualitätsätze», *Mathematische Ann.*, **105**, 165-205 (1931). Lefschetz, S., «Algebraic Topology», *Am. Math. Soc. Colloquium Pub.*, **27**, 55 (1942).

(2) By a homomorphism we mean a *definite* pair of groups G_1 and G_2 and a (continuous) homomorphic mapping γ_1 of the first onto a subgroup of the second. The product $\gamma_2\gamma_1$ is defined for those pairs $\gamma_1: G_1 \to G_2$, $\gamma_2: G_2' \to G_3$ with $G_2 = G_2'$.

(3) By an isomorphism we mean a homomorphism of G_1 *onto* G_2 which is one-one and bicontinuous.

(4) Whitney, H., «Tensor Products of Abelian Groups», *Duke Math. Jour.*, **4**, 495-528 (1938).

(*) A notação usual é $G \otimes H$.

(5) Here and subsequently the group operation in G and in H is written as addition, whether or not the groups are abelian.

$G_2 \circ H_2$, defined for any generator $g_1 \circ h_1$ of $G_1 \circ H_1$ as

$$[\gamma \circ \eta](g_1 \circ h_1) = (\gamma g_1) \circ (\eta h_1) \in G_2 \circ H_2 .$$

Formulae (3) and (4), with the cross replaced by the circle, again hold, so that $G \circ H, \gamma \circ \eta$ determine a functor of discrete groups, covariant in both arguments.

In a similar fashion, the free product of two groups leads to a functor.

An important functor is given by the group of all homomorphisms φ of a fixed locally compact topological abelian group G into another topological abelian group H. The sum of two such homomorphisms φ_1 and φ_2 is defined for each $g \in G$ by setting $(\varphi_1 + \varphi_2)(g) = \varphi_1(g) + \varphi_2(g)$. Under this operation, all $\varphi : G \to H$ constitute a group $Hom(G, H)$: it carries an appropriate topology, the description of which we omit. For given $\gamma : G_1 \to G_2$ and $\eta : H_1 \to H_2$ and for each $\varphi \in Hom(G_2, H_1)$ we have

$$G_1 \xrightarrow{\gamma} G_2 \xrightarrow{\varphi} H_1 \xrightarrow{\eta} H_2 .$$

Consequently we define $Hom(\gamma, \eta)(\varphi) = \eta\varphi\gamma$, and verify that

$$Hom(\gamma, \eta) : Hom(G_2, H_1) \to Hom(G_1, H_2),$$

$$Hom(\gamma_2\gamma_1, \eta_2\eta_1) = Hom(\gamma_1, \eta_2)\, Hom(\gamma_2, \eta_1).$$

Clearly when γ and η are identity mappings of G and H the induced mapping $Hom(\gamma, \eta)$ is the identity mapping of $Hom(G, H)$ on itself. Hence the functions $Hom(G, H)$ and $Hom(\gamma, \eta)$ determine for abelian groups a functor Hom, covariant in H and contravariant in G.

The special case when H is the group P of reals modulo 1 furnishes the character group,

$$Ch(G) = Hom(G, P), \quad Ch(\gamma) = Hom(\gamma, e)$$

where e is the identity mapping of P on itself. Therefore the character group is a contravariant functor, defined for abelian groups. Explicitly, if we express the result $\chi(g)$ of applying the character χ to the element $g \in G$ as the value (a real number modulo 1) of the bilinear form (g, χ), the definition of $Ch(\gamma)$ can be written as

$$(5) \qquad (g, Ch(\gamma)\chi') = (\gamma g, \chi'), \; g \in G, \; \chi' \in Ch(G')$$

4. *Equivalence of Functors.* — Let T and S be two functors which are, say, both covariant in the variable G and contravariant in H. Suppose that for each pair of groups G and H we are given a homomorphism

$$\tau(G, H) : T(G, H) \to S(G, H).$$

We say that τ establishes a natural *equivalence* of the functor T to the functor S and that T is naturally *equivalent* to S (in symbols, $\tau : T \leftrightarrow S$) whenever

(E1) Each $\tau(G, H)$ is a bicontinuous isomorphism of $T(G, H)$ onto $S(G, H)$;

(E2) For each $\gamma : G_1 \to G_2$ and $\eta : H_1 \to H_2$, $\tau(G_2, H_1)T(\gamma, \eta) = S(\gamma, \eta)\tau(G_1, H_2)$.

The first requirement insures the term-by-term isomorphism of the two group functions $T(G, H)$ and $S(G, H)$, while the second requirement is precisely the «naturality» condition. It can be shown that the condition (E2) is implied by two special cases; the case when η is an identity, and the case when γ is an identity.

This relation of natural equivalence between functors is reflexive, symmetric and transitive. In many cases we dispense with condition (E 1), and obtain a more general concept of a «transformation» of a functor T into a functor S.

5. *Examples of Natural Equivalence.* — The well known isomorphism

$$G \cong Ch(Ch(G)) \tag{6}$$

for locally compact abelian groups, can be regarded as an equivalence of functors, and is in this sense *natural*. The right-hand side of (6) suggests the covariant functor, Ch^2, defined by iteration of the functor Ch, as

$$Ch^2(G) = Ch(Ch(G)), \quad Ch^2(\gamma) = Ch(Ch(\gamma)).$$

The left-hand side of (6) suggests the identity functor, I,

$$I(G) = G, \quad I(\gamma) = \gamma.$$

The bilinear form $(g, \chi) = \chi(g)$ determines to each character $\chi \in Ch(G)$ and each $g \in G$ a real number modulo 1; similarly the form $(\chi, h) = h(\chi)$ is defined for each $h \in Ch^2(G)$. The form (g, χ), regarded as a function of χ for fixed g, is a character h in $Ch^2(G)$ which we call $[\tau(G)]g$. Explicitly, this definition of τ reads

$$(\chi, \tau(G)g) = (g, \chi), \quad g \in G, \quad \chi \in Ch(G).$$

The validity of condition $(E1)$ for $\tau(G)$ is the basic theorem of character theory. The condition $(E2)$ asserts that in the diagram

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tau(G)"] \arrow[d, "\gamma"'] & Ch^2(G) \arrow[d, "Ch^2(\gamma)"] \\ G' \arrow[r, "\tau(G')"] & Ch^2(G') \end{tikzcd}$$

the two paths leading from G to $Ch^2(G')$ have the same effect, or that, for each $g \in G$, both elements $\tau(G')\gamma g$ and $Ch^2(\gamma)\tau(G)g$ are identical as elements of $Ch^2(G')$. This means that, for each $\chi' \in Ch(G')$, one should have

$$(\chi', \tau(G')\gamma g) = (\chi', Ch^2(\gamma)\tau(G)g).$$

By the definition of τ, the expression on the left is simply $(\gamma g, \chi')$. By successive application to the expression on the right of the definitions of Ch, τ and Ch, we obtain

$$(\chi', Ch^2(\gamma)\tau(G)g) = (Ch(\gamma)\chi', \tau(G)g) =$$
$$= (g, Ch(\gamma)\chi') = (\gamma g, \chi').$$

The identity of these results shows that we do have a natural equivalence

$$\tau(G): G \longleftrightarrow Ch^2(G).$$

When G is finite, the isomorphism $G \to Ch(G)$ cannot be «natural» according to our definitions, for the simple reason that the functor I on the left is covariant, while the functor Ch on the right is contravariant.

As other examples of equivalences between functors, we may cite the usual isomorphisms which give the associative and commutative laws for the direct product, the tensor product and the free product. Various distributive laws, such as

$$(G_1 \times G_2) \circ H \cong (G_1 \circ H) \times (G_2 \circ H),$$

$$Hom(G_1 \times G_2, H) \cong Hom(G_1, H) \times$$
$$\times Hom(G_2, H),$$

when established with the obvious isomorphisms, are in fact equivalences between functors.

A less obvious relation between the tensor product and the functor «*Hom*» is [1]

[1] This isomorphism was established by the authors; cf. *Ann. Math.*, **44** (1943).

(7) $Hom(G, Hom(H, K)) \cong Hom(G \circ H, K)$,

where G and H are discrete abelian groups, K a topological abelian group. This isomorphism is obtained by a correspondence $\tau(G, H, K)$ which specifies for each element $\varphi \in Hom(G, Hom(H, K))$ a corresponding homomorphism in $Hom(G \circ H, K)$, defined for any generator $g \circ h$ of $G \circ H$ as

$$[\tau(G, H, K)] \quad (\varphi)(g \circ h) = [\varphi(g)](h) \quad \text{in} \quad K.$$

One may show that τ does give an isomorphism, bicontinuous in the appropriate topologies. Both sides of (7) may be treated as the group functions of functors which are obtained by composition from «*Hom*» and «$\circ$». The corresponding mapping functions, for given homomorphisms

$$\gamma : G_1 \to G_2, \quad \eta : H_1 \to H_2, \quad \varkappa : K_1 \to K_2,$$

are defined by a parallel composition as

$$Hom(\gamma, Hom(\eta, \varkappa)), \quad Hom(\gamma \circ \eta, \varkappa).$$

Both functors are contravariant in G and H, covariant in K.

The naturality condition for the isomorphism τ reads

$$\tau(G_1, H_1, K_2)\, Hom(\gamma, Hom(\eta, \varkappa)) =$$
$$= Hom(\gamma \circ \eta, \varkappa)\, \tau(G_2, H_2, K_1).$$

Both sides, when applied to an element $\varphi \in Hom(G_2, Hom(H_2, K_1))$ yield a homomorphism in $Hom(G_1 \circ H_1, K_2)$. If each of these homomorphisms is applied to a typical generator $g_1 \circ h_1$ of the tensor product $G_1 \circ H_1$, straightforward application of the relevant definitions shows that the same element of K_2 is obtained in both cases; namely, $\varkappa\{[\varphi(\gamma(g_1))](\eta(h_1))\}$. One may also see directly that this expression represents the only way of constructing an element of K_2 from the elements g_1 and h_1 and the mappings $\varkappa$, φ, γ and η.

The natural isomorphism (7) has some interesting consequences. If K is taken to be the group P of real numbers modulo 1, $Hom(H, K)$ becomes the character group $Ch(H)$, and the formula may be written as

$$Hom(G, Ch\, H) \cong Ch(G \circ H).$$

Applying the functor Ch to both sides and using the natural equivalence of Ch^2 and I, we obtain the equivalence

$$G \circ H \cong Ch\, Hom(G, Ch\, H).$$

Since this is «natural», this could be used as a definition of the tensor product $G \circ H$.

6. Generalisations — With the appropriate definition of a normal subfunctor S of a functor T one can construct a quotient functor T/S, whose group function has as its values quotient groups (i. e., factor groups). With this operation, all the standard constructions on groups may be represented as group functions of suitable functors.

An inspection of the concept of a functor and of a natural equivalence shows that they may be applied not only to groups with their homomorphisms, but also to topological spaces with their continuous mappings, to simplicial complexes with their simplicial transformations, and to Banach spaces with their linear transformations. These and similar applications can all be embodied in a suitable axiomatic theory. The resulting much wider concept of naturality, as an equivalence between functors, will be studied in a subsequent paper.

NOTA: A Nota que aqui incluimos destina-se a facilitar aos leitores não familiarizados com a noção de grupo dos caracteres de um grupo, a compreensão das ideias expressas pelos autores no § 1. Procuràmos respeitar o espírito do texto.

Seja V um espaço vectorial real e V^* o seu dual (i. e. o conjunto das aplicações lineares de V em $\mathbf{R}$ munido da estrutura de espaço vectorial real usual). É bem sabido que se V tem dimensão finita n, a dimensão de V^* é também n e, portanto, V e V^* são isomorfos. Mais precisamente, para cada par de bases $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ e $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ de V e V^*, respectivamente, existe um (e um só) isomorfismo $f: V \to V^*$ tal que $f(e_i) = e_i^*$, $1 \leq i \leq n$. Nestas condições, se $n \neq 0$, existe uma infinidade de isomorfismos de V sobre V^* nenhum dos quais se pode òbviamente considerar privilegiado em relação aos outros. Todavia, a aplicação $\Psi_V: V \to V^{**}$ que associa a cada $x \in V$ a forma linear sobre V^*, $\Psi(x)$ tal que $(\Psi_V(x))(f) = f(x)$ para todo o $f \in V^*$, é um isomorfismo de V sobre V^{**} considerado «natural» por não depender de quaisquer bases prèviamente escolhidaspara V e V^{**}.

Para dar um sentido preciso ao que precede, convém considerar a passagem ao dual como um *par* de funções: a primeira função associa a cada espaço V o seu dual V^* e a segunda função associa a cada aplicação linear $\gamma: V \to V'$ a transposta $\gamma^*: V'^* \to V^*$ (i. e. a aplicação linear que faz corresponder a cada $f \in V'^*$, $\gamma^*(f) \in V^*$ tal que, para todo o $x \in V$, $(\gamma^*(f))(x) = f(\gamma(x))$). Este par de funções é um *funtor*; mais precisamente, um functor *contravariante* visto que a aplicação correspondente a uma aplicação linear de V em V' é uma aplicação linear de V'^* em V^*.

Um *isomorfismo* ou *equivalência natural* entre dois fuctores S e T é uma família de isomorfismos $S(V) \to T(V)$ tal que, para cada $\gamma: V \to V'$, $S(V) \to T(V)$, $S(V') \to T(V')$ constituem com $S(\gamma)$, $T(\gamma)$ um diagrama comutativo.

Assim, se S e T são funtores *còvariantes*, a aplicação composta de $S(V') \to T(V')$ com $S(\gamma)$ é igual à composta de $T(\gamma)$ com $S(V) \to T(V)$. A situação que consideramos no início da Nota ilustra perfeitamente este conceito: se S designa o functor idêntico (que associa a cada espaço vectorial real de dimensão finita V o próprio V e a cada aplicação linear γ a própria aplicação γ) e T designa o funtor que associa a V o seu bidual V^{**} e a cada aplicação linear γ, γ^{**}, reconhece-se imediatamente que a família de isomorfismos Ψ_V é uma equivalência natural entre S e T; todavia, os funtores idêntico e «passagem ao dual» não podem ser naturalmente equivalentes em virtude de o primeiro ser còvariante e o segundo contravariante.

A. V. Ferreira

«A matemática foi criada pelos homens para satisfação das suas necessidades, e tem sido para eles, de facto, um precioso instrumento; o professor de matemática deve permanecer por isso um professor de acção...».

H. Lebesgue

«A produção industrial pode estar sensìvelmente em atraso sobre as descobertas científicas» ..... «a aplicação rápida das descobertas científicas na economia nacional supõe resolvidos um certo número de problemas económicos, institucionais, etc.».

M. Lavrentiev

PRÉLUDE (1)

Au commencement tout était morne et informe.
Le Géomètre dit: Que la lumière soit!
Et les structures là par espèces perçoit;
Du chaos émergent attraits, contours et normes.

Dès lors il structure les objets et les flèches,
Puis structure les structures, tâche sans fin.
L'application, outil premier pour Dedekind,
Se mue en morphisme, d'apparence une flèche.

Catégories en expansion dans l'Univers,
Leurs trios s'accordent, les quatuors résonnent,
Comme les quintettes, niant deux fois Zénon,

Se composent en long, et en large, un sens clair
Aux métamorphoses bien naturelles donnent.
Tout cela, dit le Sphinx (*), *pour amuser* Ζεῦν.

(*) GOETHE, Faust II, Nuit classique de Walpurgis.

(1) Reprodução amàvelmente autorizada pelo Editor, da pág. V da obra «Catégories et Structures» de CH. EHRESMANN; Dunod, ed. 1965.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência e 1.º ponto de informação (1.ª chamada) — 31-1-1968.

I

5687 — 1) Prove que

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Longrightarrow A \cap C \subseteq B \cap D .$$

R.: *Como*

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$$
$$C \subseteq D \Longleftrightarrow C \cap D = C ,$$

vem

$$(A \cap B) \cap (C \cap D) = A \cap C ,$$

ou

$$(A \cap C) \cap (B \cap D) = A \cap C ,$$

o que prova a tese: $A \cap C \subseteq B \cap D$.

2) Estude a comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro para a lei de composição interna $*$ definida sobre N por $a * b = a$.

R.: *Notando que* $a * b = a$ *e* $b * a = b$, *conclui-se que a lei não é comutativa*; *como* $(a * b) * c = a$ *e* $a * (b * c) = a$, *a lei é associativa. Supondo que existia o elemento neutro* e, *seria* $a * e = e * a = a$ *o que é impossível pois* $e * a = e$.

II

5688 — 1) Demonstre que o número real $a = [A_1, A_2]$ é maior do que o número real $b = [B_1, B_2]$ se e só se $A_1 \supset B_1$.

Prove que esta relação binária é uma relação de ordem definida sobre R.

R.: $a > b \Longleftrightarrow A_1 \cap B_2 \neq \emptyset \Longleftrightarrow a'_1 = b'_2$ *e, supondo satisfeita esta condição, é evidente que* $\forall\, b_1 \in B_1$ $b_1 < b'_2 = a'_1 \Longrightarrow b_1 \in A_1$ *e, por outro lado,* $a'_1 = b'_2 \notin B_1$, *isto é,* $A_1 \supset B_1$; *reciprocamente, com* $A_1 \supset B_1$, *tem-se* $b_1 \in B_1 \Longrightarrow b_1 \in A_1$ *mas* $\exists\, a'_1 \notin B_1$ *e portanto* a'_1 *ou é* b *(se este número é racional) ou* $a'_1 \in B_2$ *e no primeiro caso será possível escolher* $a''_1 > a'_1$ *tal que* $a''_1 \in B_2$: *ter-se-á pois em qualquer dos casos* $A_1 \cap B_2 \neq \emptyset$.

Para provar que se trata de uma relação de ordem definida sobre R *basta verificar que são satisfeitas as propriedades tricotómica e transitiva. A primeira decorre do facto de se ter sempre* $A_1 = B_1 \dot{\vee} A_1 \supset B_1 \dot{\vee} A_1 \subset B_1$; *a segunda é consequência da propriedade transitiva da inclusão de conjuntos.*

2) Sejam X e Y conjuntos lineares. Prove que, sendo Y subconjunto não vazio de X, $\inf X \leq \inf Y \leq \sup Y \leq \sup X$.

Ache o interior, o exterior, a fronteira, o derivado, o supremo e o ínfimo do conjunto $X = [2, 5[\cup \left\{x : x = \dfrac{2n+1}{n^2+2} \; (n = 1, 2, \cdots)\right\}$.

R.: *Sendo* $Y \subseteq X$, *então* $y \in Y \Longrightarrow y \in X$ *o que permite concluir que* $\inf X \leq y \leq \sup X$, *isto é,* $\inf X$ *é minorante de* Y *e* $\sup X$ *é majorante de* Y. *Logo* $\inf Y \geq \inf X$ *e* $\sup Y \leq \sup X$ *e, como* $\inf Y \leq y \leq \sup Y$, *vem imediatamente o resultado pretendido.*

$$\operatorname{int} X =]2, 5[, \quad \operatorname{ext} X = R - [X \cup \{0, 5\}] ,$$

$$\operatorname{front} X = \{0, 2, 5\} \cup \left\{x : x = \frac{2n+1}{n^2+2}\right\}$$

$$X' = [2, 5] \cup \{0\} , \quad \sup X = 5 , \quad \inf X = 0 .$$

III

5689 — 1) Seja u_n uma sucessão crescente e v_n uma sucessão decrescente tais que $\forall\, n \in N$ $u_n \leq v_n$. Mostre que as sucessões u_n e v_n são convergentes e que $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Calcule $\lim \dfrac{\left(1 + \dfrac{\log n}{n}\right)^{5/5} - 1}{\sqrt[n]{a^{\log n}} - 1}$.

R.: *Como* $u_1 \leqq u_n \leqq v_n \leqq v_1$, *o conjunto* (u_n) *é superiormente limitado e o conjunto* (v_n) *é inferiormente limitado o que garante a existência de limites finitos* u *e* v, *respectivamente para* u_n *e* v_n. *Não pode ser* $u > v$ *porque isso obrigaria a ter, a partir de uma certa ordem,* $u_n > v_n$. *Logo é* $u \leqq v$.

$$\lim \frac{\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^{3/5}-1}{\sqrt[n]{a^{\log n}}-1} = \frac{\frac{3}{5}\zeta\frac{\log n}{n}}{e^{\frac{\log}{n}\cdot\log a}-1} =$$

$$= \frac{\frac{3}{5}\zeta\frac{\log n}{n}}{\xi\frac{\log n}{n}\cdot\log a},$$

onde $\lim\zeta = \lim\xi = 1$, *e portanto o limite pedido é igual a* $\frac{3}{5\log a}$.

2) $\sum_0^\infty u_n$ converge e $\sum_0^\infty v_n$ diverge. Demonstre que $\sum_0^\infty (u_n+v_n)$ diverge e que $\sum_0^\infty w_n$, onde $w_{2n} = u_n$ e $w_{2n+1} = v_n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$, também diverge.

R.: *Sendo* $S')\ \sum_0^\infty u_n$, $S'')\ \sum_0^\infty v_n$ *e* $S)\ \sum_0^\infty (u_n+v_n)$, *vem* $S_n = S'_n + S''_n$ *e como apenas* S'_n *possui limite finito é claro que* S_n *diverge. Para a série* $T)\ \sum_0^\infty w_n$ *tem-se* $T_{2n} = S'_n + S''_n$ *e portanto* T_{2n} *diverge.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência e 1.º ponto de informação (2.ª chamada) — 3-2-1968.

I

5690 — 1) Estude a validade do argumento seguinte:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ p \wedge t \\ \sim r \vee s \\ \hline \therefore s \wedge t \end{array}$$

R.:

1.	$p \Rightarrow q$	*prem.*
2.	$q \Rightarrow r$	*prem.*
3.	$p \wedge t$	*prem.*
4.	$\sim r \vee s$	*prem.*
5.	$p \Rightarrow r$	1, 2 *mod. ponens*
6.	$\sim p \vee r$	5, *equiv.*
7.	p	3, *simpl.*
8.	t	3, *simpl.*
9.	r	6, 7 *sil. disj.*
10.	s	4, 9 *sil. disj.*
11.	$s \wedge t$	8, 10 *conj.*

2) Supondo que as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são biunívocas, demonstre que a função composta $g \circ f: A \to C$ também é biunívoca.

R.: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ *e, como* $f(a_1) \in B$ *e* $f(a_2) \in B$, *tem-se* $f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow g[f(a_1)] \neq g[f(a_2)]$ *com* $g[f(a_1)] \in C$ *e* $g[f(a_2)] \in C$. *Logo,* $a_1 \neq a_2 \Rightarrow g[f(a_1)] \neq g[f(a_2)]$, *o que prova a proposição.*

II

5691 — 1) Sabendo que entre dois números racionais há sempre um número irracional, demonstre que entre dois números reais há sempre um número irracional. Pode concluir-se daqui que qualquer número real é ponto de acumulação do conjunto dos números irracionais? Pode também garantir-se que qualquer número real é ponto de acumulação do conjunto dos números reais? Justifique as respostas.

R.: *Dados os números reais* a *e* b $(a < b)$ *é sempre possível encontrar dois números racionais* r *e* s $(r < s)$ *tais que* $a < r < s < b$ *e, como entre* r *e* s *existe um número irracional, a proposição fica demonstrada.*

Em $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$, *sendo* $\lambda \in R$, *há uma infinidade de racionais e de irracionais e portanto* λ *é ponto de acumulação do conjunto dos racionais, do conjunto dos irracionais e do conjunto dos reais.*

2) Sejam X e Y conjuntos lineares. Prove as proposições seguintes:

a) $(X \cup Y)' = X' \cup Y'$ *b)* $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$.

Verifique os teoremas para

$$X = \left\{x : x = m + \frac{1}{n}\ (m, n = 1, 2, \cdots)\right\}$$

e

$$Y = \left\{y : y = \frac{n+1}{n}\ (n = 1, 2, \ldots)\right\}.$$

R.: a) *Sendo* k *ponto de acumulação de* $X \cup Y$, *então* $k \in X' \vee k \in Y'$ *e recìprocamente.*

b) $$\begin{aligned}\overline{X \cup Y} &= (X \cup Y) \cup (X \cup Y)' \\ &= (X \cup Y) \cup (X' \cup Y') \\ &= (X \cup X') \cup (Y \cup X') \\ &= \overline{X} \cup \overline{Y}.\end{aligned}$$

A verificação dos teoremas para os conjuntos apresentados é imediata. Tem-se $X' = \{1, 2, 3, \cdots\}$ *e* $Y' = \{1\}$.

III

5692 — 1) Suponha que (u_n) é limitado superiormente e $\forall n \in N \; u_n < \sup(u_n)$. Prove que existe uma subsucessão u_{α_n} tal que $\lim u_{\alpha_n} = \sup(u_n)$.

Calcule $\lim \left(\dfrac{3n+2}{3n+4}\right)^{n^2(\sqrt[n]{e}-1)}$.

R.: *Como* $\sup(u_n) \notin (u_n)$, *então* $\sup(u_n)$ *é ponto de acumulacão de* (u_n) *e portanto é sublimite.*

Tomando $u_n = \left(\dfrac{3n+2}{3n+4}\right)^{n^2(\sqrt[n]{e}-1)}$, *vem*

$$\begin{aligned}\log u_n &= n^2(\sqrt[n]{e}-1)\log\left(\frac{3n+2}{3n+4}\right) \\ &= n^2(\sqrt[n]{e}-1)\log\left(1-\frac{2}{3n+4}\right) \\ &= n^2 \xi \frac{1}{n} \eta \left(-\frac{2}{3n+4}\right) \\ &= \xi \eta \left(-\frac{2n}{3n+4}\right)\end{aligned}$$

e, como $\xi \to 1$ *e* $\eta \to 1$, *vem* $\lim \log u_n = -2/3$ *o que implica* $\lim u_n = e^{-2/3}$.

2) $\sum\limits_0^\infty$ converge para S. Prove que $\sum\limits_0^\infty (u_n + u_{n+1})$ converge para $2S - u_0$. Construa uma série divergente $\sum\limits_0^\infty v_n$ tal que $\sum\limits_0^\infty (v_n + v_{n+1})$ convirja.

R.: *Tomando* S) $\sum\limits_0^\infty u_n$ *e* S') $\sum\limits_0^\infty (u_n + u_{n+1})$, *vem* $S'_n = S_n + S_{n+1} - u_0$ *e portanto* $S_n \to 2S - u_0$.

Considerando a série $\sum\limits_0^\infty (-1)^n$, *é fácil verificar que ela satisfaz à segunda parte do problema.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência e 2.º ponto de informação — (1.ª chamada) — 2-5-1968.

I

5693 — 1) Mostre que a série

$$\sum_0^\infty \left(1+\frac{1}{n!}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$

é absolutamente convergente para $x > -1/2$ e demonstre que a sua soma é $f(x) = x + 1 + e^{x/x+1}$.

Indique, justificando, os pontos (próprios e impróprios) de continuidade e de descontinuidade de $x \to f(x)$.

2) Demonstre que o contradomínio de uma função f contínua num intervalo fechado $[a, b]$ é também um intervalo fechado. Em que condições o contradomínio é o intervalo $[f(a), f(b)]$? Justifique a resposta.

R.: 1) *Como* $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{x}{x+1}\right|$, *a série é convergente para* $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| < 1$, *desigualdade que conduz a* $x > -1/2$. *A soma obtém-se fàcilmente notando que a série pode considerar-se soma da série geométrica* $\sum\limits_0^\infty \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^n$ *e da série exponencial* $\sum\limits_0^\infty \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^n$.

Os pontos de descontinuidade de $x \to f(x)$ *são* $x = 1$, $x = -\infty$ *e* $x = +\infty$.

2) *A justificação da primeira pergunta é dada pelo teorema de Cauchy.*

O contradomínio é $[f(a), f(b)]$ *quando* $m = f(a)$ *e* $M = f(b)$.

II

5694 — 1) Tome a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \; (0 \le x < 1) \\ 2 \; (x = 1) \\ x + 2 \; (1 < x \le 2). \end{cases}$$

Calcule $f'(1)$ e dê a expressão analítica da primeira derivada. Estude em $[0, 2]$ a monotonia, os extremos de f e represente geomètricamente a função.

Determine a função F com o campo de existência $X = [0,2] - \{1\}$ e que satisfaça às condições seseguintes: $\forall\, x \in X \;\; F'(x) = f(x)\,,\;\; \lim\limits_{x=1} F = 3$.

2) Supondo $\dfrac{a_0}{n+1} + \dfrac{a_1}{n} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$, utilize o teorema de Rolle para provar que o polinómio $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ tem pelo menos uma raiz entre 0 e 1.

R.: 1) $f'(1) = +\infty$ *e* $f'(x) = \begin{cases} 2\,x & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 < x \leq 2). \end{cases}$

Como em $[0,2]$ *é sempre* $f'(x) > 0$, *a função* f *é crescente nesse intervalo, apresentando um mínimo* $f(0) = 0$ *e um máximo* $f(2) = 4$.

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + C & (0 \leq x < 1) \\ \dfrac{x^2}{2} + 2\,x + C' & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

e a condição imposta obriga a tomar $C = 8/3$ *e* $C' = 1/2$.

2) *Em virtude da condição dada, a primitiva do polinómio anula-se para* $x = 0$ *e* $x = 1$ *e portanto o teorema de* Rolle *garante que o polinómio tem pelo menos uma raiz entre* 0 *e* 1.

III

5695 — 1) Supondo que $\lim\limits_{x=+\infty} f'(x) = A \neq 0$, recorra à teoria dos levantamentos de indeterminação para indicar $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)/x$. Qual é o $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)$? Justifique.

2) Demonstre que, sendo f crescente e convexa em $[a,b]$, a sua função inversa, f^{-1}, é côncava (admita a existência de derivadas até à segunda ordem).

R.: 1) $\lim\limits_{x=+\infty} f'(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x=+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = A \neq 0$ *(teorema de Cauchy).*

Se $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)$ *fosse finito então* $\lim\limits_{x=+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. *Logo* $\lim\limits_{x=+\infty} f(x) = \infty$.

2) $(f^{-1})'' = -\dfrac{f''}{(f')^3} < 0$ *e portanto* f^{-1} *é côncava.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência e 2.º ponto de informação — (2.ª chamada) — 15-5-1968.

I

5696 — 1) Dada a série de potências cujo termo geral é $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ $(n \geq 2)$, determine o seu intervalo de convergência e investigue o comportamento da série nos extremos do intervalo. Estude as séries de termos gerais $u'_n(x)$ e $u''_n(x)$ e determine sucessivamente as somas de $\Sigma\, u''_n(x)$, $\Sigma\, u'_n(x)$ e $\Sigma\, u_n(x)$, enunciando os teoremas que tiver necessidade de utilizar.

2) Prove que se uma função real de variável real é positiva ou nula na vizinhança de $x = a$ e possui limite quando $x \to a$, esse limite é positivo ou nulo.

Mostre que a função f definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ é contínua em $Z = \{1\} \cup [2,4] \cup [5,+\infty[$. Mostre que são aplicáveis os teoremas de Dini e Weierstrass e verifique-os para f. Ache os extremos relativos de f em $[2,4]$ e esboce a imagem de f em Z.

R.: 1) *A série* $\Sigma\, u_n(x)$ *é absolutamente convergente em* $[-1,1]$; $\Sigma\, u'_n(x)$ *é absolutamente convergente em* $]-1,1[$, *sendo simplesmente convergente para* $x = 1$ *e* $\Sigma\, u''_n(x)$ *é absolutamente convergente em* $]-1,1[$.

$\Sigma\, u''_n(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\;\Sigma\, u'_n(x) = \log(1+x)$ $\;\Sigma\, u_n(x) = (x+1)\log(x+1) - x$.

2) *Sendo* $\lim\limits_{x=0} f(x) = A$, *se fosse* $A < 0$ *poderia tomar-se* $\delta > 0$ *por forma que* $A + \delta < 0$ *e então existiria* $\varepsilon > 0$ *tal que* $x \in V_\varepsilon(a) \Rightarrow A - \delta < f(x) < A + \delta < 0$ *o que é absurdo.*

Para a função $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ *tem-se* $f(Z) = \{2\} \cup [5/4, 3/2] \cup [1, 6/5]$ *e* $m = f(+\infty) = 1$, $M = f(1) = 2$.

Em $[2,4]$ *os extremos relativos são* $M' = f(2) = 3/2$ *e* $m' = f(4) = 5/4$.

II

5697 — 1) Resolva os problemas seguintes:

a) Demonstre que a derivada de ordem n da função $x \to f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ é

$$x \to f^{(n)}(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ 2nx \operatorname{sen}\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] +$$

$$+ n(n-1) \operatorname{sen}\left[x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right].$$

b) Calcule $P \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{(1 + \operatorname{arc\,sen} x)^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Supondo $f(a) = g(a)$ e $f'(x) \geqq g'(x)$ em $[a, b]$, utilize o teorema de LAGRANGE para provar que $f(b) \geqq g(b)$.

Sugestão: Empregue a função auxiliar $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

R.: a) *Fazendo* $u = x^2$ *e* $v = sen\, x$, *tem-se* $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u^{(n)} = 0$ $(n \geqq 3)$ *e* $v^{(n)} = sen\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. *A fórmula de* LEIBNIZ *dá o resultado ràpidamente.*

b) *Fazendo* $arc\,sen\, x = t$, *a primitiva transforma-se em*

$$P\frac{t}{(1+t)^2} = P\frac{t+1-1}{(1+t)^2} =$$

$$= P\frac{1}{1+t} - P\frac{1}{(1+t)^2} = log\,|1+t| + \frac{1}{1+t}$$

e portanto

$$P\frac{arc\,sen\, x}{(1+arc\,sen\, x)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= log\,|1\, arc\,sen\, x| + \frac{1}{1+arc\,sen\, x}.$$

2) $\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(c)$ $(a < c < b)$ *e portanto, como* $\varphi(a) = 0$ *e* $\varphi'(c) \geqq 0$, *vem imediatamente* $\varphi(b) \geqq 0$ *que traduz o resultado pretendido.*

III

5698 — 1) Desenvolva a função $x \to x^2$ em série segundo as potências de $y = \log(1+x)$.

Sugestão: Exprima x em função de y.

2) Seja f definida, derivável e convexa sobre $[a, b]$. Prove que, existindo $c \in]a, b[$ tal que $f(a) = f(b) = f(c)$, f é constante em $[a, b]$.

R.: 1) *De* $y = log(1+x)$ *vem* $x = e^y - 1$ *e* $x^2 = e^{2y} - 2e^y + 1$ *donde*

$$x^2 = \sum_0^\infty \frac{2^n}{n!} y^n - 2\sum_0^\infty \frac{y^n}{n!} + 1 =$$

$$= 1 + \sum_0^\infty (2^n - 2)\frac{y^n}{n!} = 1 + \sum_0^\infty (2^n - 2)\frac{[log(1+x)]^n}{n!}$$

2) *As condições impostas obrigam à existência de dois pontos* x_1 *e* x_2, *com* $a < x_1 < b$ *e* $b < x_2 < c$, *tais que* $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. *Como* $f'(x)$ *tem de ser crescente em* $[a, b]$, *será* $f'(x) \equiv 0$ *nesse intervalo o que implica que* f *é constante em* $[a, b]$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Julho (1.ª chamada) — Prova escrita — 24-6-1968.

5699 — 1) Seja U o conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ e considere as seguintes famílias de conjuntos:

a) $\emptyset, U, \{a, b, c\}, \{d, e\}$

b) $\emptyset, U, \{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}, \{c, d, e\}$.

Prove que em relação às operações de reunião, intersecção e complementação a primeira família é uma álgebra de BOOLE e a segunda não é.

R.: *É fácil verificar que a família da alínea* a) *satisfaz à axiomática de uma álgebra de* BOOLE. *Em relação à família da alínea* b), *basta notar que* $\sim\{c, d\} = \{a, b, e\}$ *não pertence à família para se concluir que não é uma álgebra de* BOOLE.

2) Ache o intervalo de convergência da série

$$1 + \sum_2^\infty (-1)^n \frac{1}{n-1}\left(\frac{x-e}{e}\right)^{n-1},$$

investigando o comportamento da série nos extremos desse intervalo. Prove que a sua soma é $\log x$.

R.: *Notando que*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n-1}{n}\left|\frac{x-e}{e}\right| \to \left|\frac{x-e}{e}\right|,$$

a série é absolutamente convergente para

$$\left|\frac{x-e}{e}\right| < 1 \qquad (0 < x < 2e)$$

e divergente para

$$\left|\frac{x-e}{e}\right| > 1 \qquad (x < 0 \vee x > 2e).$$

Para $x = 0$ *obtém-se a série* $1 + \sum_2^\infty (-1)^{2n-1}\dfrac{1}{n-1}$ *que é divergente; para* $x = 2e$ *obtém-se*

$$1 + \sum_2^\infty (-1)^n \frac{1}{n-1}$$

que é simplesmente convergente.

Fazendo

$$f(x)=1+\sum_2^\infty(-1)^n\frac{1}{n-1}\left(\frac{x-e}{e}\right)^{n-1}$$

vem

$$f'(x)=\frac{1}{e}\sum_2^\infty(-1)^n\left(\frac{x-e}{e}\right)^{n-2},$$

série geométrica cuja soma é $\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-e}{e}}=\dfrac{1}{x}$.

Então $f(x)$ *é a primitiva de* $1/x$ *que se anula para* $x=e$, *isto é,* $\log x-1=\sum_2^\infty(-1)^n\left(\frac{x-e}{e}\right)^{n-1}$.

3) Resolva os problemas seguintes:

a) Pesquise os extremos da função definida por $f(x)=|x^2-1|+|x|$ em $[-1,2]$.

b) Calcule $P\log(x+\sqrt{x^2+1})$.

R.: a) *A função dada pode ser definida por*

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2-x & (-1\leqq x\leqq 0)\\ 1-x^2+x & (0\leqq x\leqq 1)\\ x^2-1+x & (1\leqq x\leqq 2)\end{cases}$$

Em $]-1,0[$ *vem* $f'(x)=-2x-1$ *e, como* $f'(-1/2)=0$ *e* $f''(-1/2)<0$, $x=-1/2$ *é maximizante; dado que* $f'_d(-1)>0$ $x=-1$ *é minimizante. Note-se que* $f'_e(0)<0$.

Em $]0,1[$ *tem-se* $f'(x)=-2x+1$ *e, como* $f'(1/2)=0$ *e* $f''(1/2)<0$, $x=1/2$ *é maximizante; como* $f'_d(0)>0$ *e anteriormente se obteve* $f'_e(0)<0$ *pode garantir-se que* $x=0$ *é minimizante. Observe-se que* $f'_e(1)<0$.

Em $]1,2[$ *é* $f'(x)=2x+1$ *e, como a derivada não se anula em nenhum ponto deste intervalo, não existem extremantes interiores;* $f'_d(1)>0$ *e* $f'_e(2)>0$ *o que permite concluir que* $x=1$ *é minimizante e* $x=2$ *é maximizante.*

b) $$P\log(x+\sqrt{x^2+1})=x\log(x+\sqrt{x^2+1})-P\frac{x\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=x\log(x+\sqrt{x^2+1})-P\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=x\log(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}+C.$$

4) Dada a função $z=\log(e^x+e^y)$, verifique que $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{dy}=1$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

R.:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}.$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^y}{e^x+e^y}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$$

A obtenção das relações apresentadas é imediata.

5) Mostre que o conjunto das matrizes da forma $A=\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}$, onde a é elemento arbitrário do corpo K dos elementos, constitui um grupo abeliano em relação à multiplicação. Ache a inversa de A e calcule A^n (n inteiro positivo).

R.: *Notando que* $\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a+b\\0 & 1\end{bmatrix}$, *não é difícil mostrar que é satisfeita a axiomática de grupo comutativo*

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -a\\0 & 1\end{bmatrix}\ e\ A^n=\begin{bmatrix}1 & na\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

6) Sendo A matriz quadrada regular de ordem n, prove que os sistemas de n equações lineares a n incógnitas $AX=B$ e $A^{-1}X=C$ possuem a mesma solução se e só se $B=A^2C$.

R.: *De* $AX=B$ *resulta* $X=A^{-1}B$ *e de* $A^{-1}X=C$ *vem* $X=AC$. *Logo* $A^{-1}B=AC$ *que dá imediatamente* $B=A^2C$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Julho (2.ª chamada) — Prova escrita — 5-7-1968.

5700 — 1) Seja Ω uma colecção de subconjuntos de um conjunto U e suponha que $A\cap B\in\Omega$ e $\sim A\in\Omega$ quando $A\in\Omega$ e $B\in\Omega$. Mostre que Ω é uma álgebra de Boole.

R.: *Sendo* A *e* B *disjuntos* $A\cap B=\emptyset$ *e portanto* $\emptyset\in\Omega$ *e* $U=\sim\emptyset\in\Omega$. *Por outro lado* $A\cup B=\sim(\sim A\cap\sim B)\in\Omega$. *Não é difícil depois verificar a veracidade dos axiomas que caracterizam a álgebra de* Boole.

2) Partindo da igualdade $\dfrac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1/2+\operatorname{arctg}1/3$, prove que

$$\pi = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \\ - \frac{4}{7}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7}\right) + \cdots.$$

R.: $arctg\, x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1$

$$\frac{\pi}{4} = arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{3} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}(2n+1)} + \\ + \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}(2n+1)} = \\ = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

$$\pi = 4\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

3) **Resolva os problemas seguintes:**

a) **Estude a monotonia, extremos e convexidade da função definida por $f(x) = x \log |x|$.**

b) **Calcule $P\,\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x+1}$.**

R.: a) $f'(x) = \log|x| + 1$
$f'(x) > 0 \Rightarrow x < -1/e \vee x > 1/e$
$f'(x) < 0 \Rightarrow -1/e < x < 1/e$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1/e \vee x = 1/e$

$f(x)$ *é crescente em* $]-\infty, -1/e[$ *e* $]1/e, +\infty[$, *decrescente em* $]-1/e, 1/e[$; *possui máximo para* $x = -1/e$ *e mínimo para* $x = 1/e$.

Como $f''(x) = 1/x$, *a função é convexa em* $]0, +\infty[$ *e concava em* $]-\infty, 0[$.

b) $$P\,\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x+1} = P\,\frac{\sqrt{x}}{x+1} + P\,\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Fazendo $x = t^2$

$$P\,\frac{\sqrt{x}}{x+1} = 2P\,\frac{t^2}{t^2+1} = 2P\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) = \\ = 2t - 2\,arctg\, t = 2\sqrt{x} - 2\,arctg\sqrt{x}$$

$$P\,\frac{1}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}$$

Logo,

$$P\,\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x+1} = 2\sqrt{x} - 2\,arctg\sqrt{x} + 2\sqrt{x+1}.$$

4) **Sendo $F(x, y) = f[x + g(y)]$, prove que é satisfeita a relação**

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

R.: $\frac{\partial F}{\partial x} = f'[x + g(y)], \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''[x + g(y)],$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f''[x + g(y)]\; g'(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = f'[x + g(y)]\; g'(y).$$

Como

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f'[x + g(y)]\, f''[x + g(y)]\, g'(y)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f'[x + g(y)]\, f''[x + g(y)]\, g''(y),$$

está provada a relação.

5) Demonstre, sem calcular os valores dos determinantes, que

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+a_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

R.: *De facto,*

$$2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b & b+c & c \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a+b & b+c \\ a_1 & a_1+b_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & b_2+c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b+c & c & a+b \\ b_1+c_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b+c & a & a+b \\ b_1+c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}.$$

6) **Estude o sistema de equações lineares sobre o corpo R**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = a \end{cases}$$

R.:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right].$$

Se $a \neq 5$ *o sistema é impossível. Se* $a = 5$ *o sistema é possível duplamente indeterminado com*

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} x_3 - \frac{6}{5} x_4$$

$$x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} x_3 - \frac{7}{5} x_4 .$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Outubro — (1.ª chamada) — Prova escrita — 2-10-1968.

5701 — 1) Estude so ponto de vista da reflexividade, simetria e transitividade as seguintes relações binárias:

a) $x R y \Longleftrightarrow x$ e y são primos entre si (x e y inteiros)

b) $x R y \Longleftrightarrow x - y < 1$ (x e y reais)

c) $x R y \Longleftrightarrow |x - y| < 3$ (x e y reais).

2) Ache a soma da série redutível

$$\sum_1^\infty \log \left[\frac{n^2 + 3n + 2}{n(n+3)} \right].$$

3) Resolva os problemas seguintes:

a) Aplique o teorema dos acréscimos finitos à função definida por $f(x) = a + bx + c e^{\alpha x}$ no intervalo $[x, x+h]$. Calcule θ na fórmula $f(x+h) - f(x) = h f'(x + \theta h)$ e mostre que θ é independente de x.

b) Calcule $P \operatorname{sen}(\log x)$.

4) Escreva os três primeiros termos da fórmula de Taylor segundo as potências de $x - 1$ para a função $x \to \varphi(x)$ definida implìcitamente por $x^2 + y^2 - 4xy + 2 = 0$.

5) Adicionando a 1.ª linha à terceira e comparando depois as 2.ª e 3.ª linhas, mostre que é nulo o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix}.$$

6) Diga-se

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

constitui um sistema fundamental de soluções para o sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Justifique a resposta.

R.: 1) a) *não reflexiva, simétrica e não transitiva*

b) *reflexiva, não simétrica e não transitiva*

c) *reflexiva, simétrica e não transitiva.*

2) *Como*

$$\log \left[\frac{n^2 + 3n + 2}{n(n+3)} \right] = \log \left[\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right] = \log \left(\frac{n+2}{n} \right) - \log \left(\frac{n+3}{n+1} \right),$$

vem

$$S_n = \log 3 - \log \left(\frac{n+3}{n+1} \right) \quad e \quad S = \log 3 .$$

3) a) *Como* $f(x+h) - f(x) = bh + c e^{\alpha x}(e^{\alpha h} - 1)$ *e* $f'(x + \theta h) = b + \alpha c e^{\alpha(x + \theta h)}$, *o teorema dos acréscimos finitos estabelece que* $bh + c e^{\alpha x}(e^{\alpha h} - 1) = h[b + \alpha c e^{\alpha(x + \theta h)}]$, *com* $0 < \theta < 1$. *Desta relação vem* $\theta = \frac{1}{\alpha h} \log \left(\frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h} \right)$ *o que prova que* θ *é independente de* x.

b) $P \operatorname{sen}(\log x) = x \operatorname{sen}(\log x) - P \cos(\log x)$

$= x \operatorname{sen}(\log x) - [x \cos(\log x) + P \operatorname{sen}(\log x)]$

$= x \operatorname{sen}(\log x) - x \cos(\log x) - P \operatorname{sen}(\log x)$

e portanto

$$P\, sen\,(log\, x) = \frac{1}{2}\left[x\, sen\,(log\, x) - x\cos\,(log\, x)\right].$$

4) *Para* $x = 1$, *obtém-se da equação dada* $y_1 = 1$ *e* $y_1 = 3$ *e como, além da continuidade das devivadas parciais de* $f(x,y)$ *é* $f'_y(1,1) \neq 0$ *e* $f'_y(1,3) \neq 0$ *existem duas funções implícitas* $x \to \varphi_1(x)$ *e* $x \to \varphi_2(x)$, *respectivamente nas vizinhanças de* $P_1(1,1)$ *e* $P_2(1,3)$. *Notando que*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-4y}{2y-4x} = \frac{2y-x}{y-2x}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f''_{x^2} + 2f''_{xy}\frac{dy}{dx} + f''_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{f'_y},$$

obtém-se

$$\varphi_1(x) = 1 - \quad (x-1) + 6(x-1)^2 + \cdots$$
$$\varphi_2(x) = 3 + 5(x-1) - 6(x-1)^2 + \cdots$$

5) *Depois de efectuada a operação indicada, a terceira linha fica constituída por* $a_{31} = 2\cos^2 a$ $a_{32} = 2\cos 2a\cos a$ $a_{33} = 2\cos 3a\cos a$ *e verifica-ze fàcilmente que é o produto da 2.ª linha por* $2\cos a$. *De acords com as propriedades elementares dos determinantes,* $\Delta = 0$.

6) *A característica da matriz do sistema homogéneo é* 3 *e portanto é indeterminado de grau* 2. *O sistema possuirá apenas duas soluções independentes (sistema fundamental) e portanto pode garantir-se que as soluções apresentadas não constituem um sistema fundamental de soluções. Achando a característica da matriz apresentada, obter-se-á* 2 *e não é difícil verificar que apenas são independentes as duas primeiras linhas-soluções.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Outubro — 2.ª chamada — Prova escrita — 10-10-1968.

5702 — 1) Considere o conjnnto $B = \{a, b, c, d\}$. Mostre que B é uma álgebra de Boole se «+», «><» e «~» são definidas do modo seguinte:

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

×	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

	~
a	d
b	c
c	b
d	a

2) Dada a série $\sum_1^\infty \log\cos\frac{x}{2^n}$, utilize a fórmula $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ para mostrar que $S_n = \log\operatorname{sen} x - n\log 2 - \log\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}$. Prove que a soma é $S = \log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$.

3) Resolva os problemas seguintes:

a) Determine m e n por forma que a imagem da função definida por $f(x) = \log(mx+n)$ passe pelo ponto $M(2,0)$ e possua a assíntota de equação $X = 1$. Mostre que $f(x)$ é côncava.

b) Calcule $P\,\operatorname{tg}^2\sqrt{x}$.

4) Mostre que

$$f(x,y) = k(\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{h/\alpha} \quad (\delta_1 + \delta_2 = 1)$$

é homogénea e verifique o teorema de Euler. Demonstre que $\varphi(x,y) = \lim_{\alpha=0} f(x,y)$ é ainda função homogénea com o mesmo grau de homogeneidade.

5) Ache i e j por forma que seja par o termo $a_{1i}\, a_{32}\, a_{4j}\, a_{25}\, a_{53}$ de uma matriz de 5.ª ordem.

6) Utilize a teoria dos determinantes para estudar o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = a \end{cases}$$

R.: 1) *Basta verificar os axiomas que caracterizam uma álgebra de* Boole.

2) *Da fórmula trigonométrica tira-se* $log\cos\theta = log\, sen\, 2\theta - log\, sen\,\theta - log\, 2$ *e portanto* $log\cos\frac{x}{2^n} = log\, sen\frac{x}{2^{n-1}} - log\, sen\frac{x}{2^n} - log\, 2$, *donde resulta imediatamente a fórmula apresentada para* S_n. *Escrevendo* S_n *na forma*

$$S_n = log\left(\frac{sen\, x}{2^n\, sen\frac{x}{2^n}}\right) = log\left(\frac{\frac{sen\, x}{x}}{\frac{sen\, x/2^n}{x/2^n}}\right),$$

obtém-se fàcilmente $lim\, S_n = log\left(\frac{sen\, x}{x}\right)$.

3) a) *As condições apresentadas exigem*

$$\begin{cases} 2m+n=1 \\ m+n=0 \end{cases} \quad \textit{o que dá} \quad \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases}.$$

Como $f''(x) = -\dfrac{m^2}{(mx+n)^2} < 0$, *a função é côncava.*

b) *Fazendo* $x = t^2$, *vem*

$$\begin{aligned} P\, tg^2 \sqrt{x} &= 2\,P\,t\,tg^2\,t \\ &= 2\,P\,t\,(sec^2\,t - 1) \\ &= 2\,P\,t\,sec^2\,t - 2\,P\,t \\ &= 2\,[t\,tg\,t - P\,tg\,t] - t^2 \\ &= 2\,t\,tg\,t + 2\,log\,|\,cos\,t\,| - t^2 \\ &= 2\sqrt{x}\,tg\sqrt{x} + 2\,log\,|\,cos\sqrt{x}\,| - x\,. \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} f(tx, ty) &= k\,[\delta_1 (tx)^\alpha + \delta_2 (ty)^\alpha]^{h/\alpha} = \\ &= t^h\,k\,(\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{h/\alpha} \end{aligned}$$

e portanto $f(x, y)$ *é homogénea de grau* h.

$$f'_x = k\,h\,\delta_1 (\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{(h/\alpha)-1} \cdot x^{\alpha-1}$$
$$f'_y = k\,h\,\delta_2 (\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{(h/\alpha)-1} \cdot y^{\alpha-1}$$

e o teorema de EULER *é de verificação imediata:*

$$x\,f'_x + y\,f'_y = h\,f\,.$$

Como $(\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{1/\alpha}$ *é a média geral de* x^α *e* y^α *tem-se* $\lim\limits_{\alpha=0} (\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{1/\alpha} = x^{\delta_1} y^{\delta_2}$ *(média geométrica). Logo,*

$$\varphi(x, y) = \lim_{\alpha=0} k\,(\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{h/\alpha} = k\,x^{h\,\delta_1}\,y^{h\,\delta_2}$$

e não é difícil verificar que $\varphi(x, y)$ *também é função homogénea de grau* h.

5) $i = 1$, $j = 4$.

6) *A característica da matriz dos coeficientes é* 2. *Tomando o determinante principal* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$, *obtêm-se os determinantes característicos*

$$\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

e

$$\Delta'_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & a \end{vmatrix} = -a-3\,.$$

Com $a \neq -3$ *o sistema é impossível e com* $a = -3$ *é possível indeterminado de grau* 1. *Neste caso a solução é* $x_1 = -5 + 3\,x_3$ *e* $x_2 = 9 - 4\,x_3$.

Enunciados e soluções dos n.os 5687 a 5702 de Fernando de Jesus

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. L. — Análise Infinitesimal II — 19-10-68.

I

5703 — *a)* Continuidade uniforme em espaços métricos.

b) Seja E um espaço normado. Prove que se existe em E uma bola fechada de raio > 0, compacta, todo o conjunto limitado e fechado de E é compacto.

c) Defina espaço conexo e conjunto conexo. Prove que $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ com a topologia induzida por $\mathbf{R}^2$ é um espaço conexo.

II

5704 — *a)* Desigualdades de Cauchy. Teorema de Liouville.

b) Prove que se $f(z)$ é holomorfa em $\mathbf{C}$ e tem um pólo de ordem k no ponto ∞, $f(z)$ é um polinómio de grau k.

III

5705 — *a)* Determine $f(z)$ holomorfa em $\mathbf{C}$ e tal que

$$\mathrm{Re}\, f(x + y\,i) = x^3 - 3\,x\,y^2 + x\,, \quad f(i) = 0\,.$$

b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ sendo f a função determinada em *a)*, $\gamma(t) = r\,e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e $r \neq 1$.

c) Calcule pelo método dos resíduos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} a\,x}{x\,(x^2 + a^2)}\,dx\,, \quad a \in \mathbf{R}^+.$$

Enunciados de V. Ferreira

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

170 — BERNARD ROY — **Algèbre Moderne et Théorie des Graphes orientés sur les sciences economiques et sociales** — Dunod, Paris.

Há fortes razões para admitir que a Álgebra, particularmente a Teoria dos Grafos venha a desempenhar um papel de relevo na compreensão e no tratamento dos fenómenos do mundo económico e social.

Este livro que constitui o volume primeiro da colecção «Finance et économie appliquée» da editora Dunod, de Paris, ensaia a apresentação de conceitos, resultados, técnicas de cálculo necessários para a apreensão conveniente dos fenómenos, a construção de modelos e a resolução de numerosos problemas surgidos da gestão das empresas e das administrações ou ainda do estudo da organização das estruturas.

Este primeiro tomo é dedicado ao estudo de noções e de resultados fundamentais referentes sucessivamente aos conjuntos e sub-conjuntos, às aplicações e operações, às relações binárias e aos grafos; em relação a cada um destes assuntos numa segunda secção precisa-se mais concretamente o alcance de considerações mais teóricas definidas numa primeira. Enfim depois de se dedicar um inteiro capítulo ao estudo da transitividade e da conexidade, consideram-se os diferentes tipos de grafos, a saber, fortemente conexo, completo, sem circuito, sem ciclo, bipartidos e multipartidos, etc.

Este tratado comporta cerca de um milhar de exercícios, com elementos indicativos para as correspondentes soluções e classificados em dois grupos: uns, anotados a T auxiliam o leitor a familiarizar-se com os conceitos de natureza teórica, os outros, anotados a P, insistem sobre a aplicação prática: o Autor informa que concebeu tais exercícios a partir de numerosos casos concretos que conheceu através da sua vida profissional.

Este livro deverá interessar todos quantos, no quadro da sua vida profissional, sejam conduzidos a estudos económicos, de investigação operacional ou ainda relacionados com o actual desenvolvimento da informática. Constitui um manual útil aos estudantes universitários e profissionais que se interessem pelas matemáticas aplicadas e pela sua penetração nas ciências económicas e sociais.

Para a sua compreensão não se exige mais que uma formação matemática correspondente ao nível do segundo ano do ensino superior.

171 — A. KAUFMANN — **Introduction à la combinatorique en vue des applications** — Dunod — Paris.

A Combinatórica (ou análise combinatória), se é um ramo bem definido da matemática, parece ter tido um lugar de segunda ordem entre os matemáticos dos séculos passados.

A antiguidade grega ignorou-a quase completamente; observemos que a Geomância ocupava-se de enumerar e de classificar as configurações. Os monges taoistas que compuseram o livro sagrado de previsões conhecido pelo nome de Yi-King tiveram preocupações semelhantes (22 séculos A. C.); com efeito, o Yi-King descreve o quadrado mágico «Lo-chou»

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$$

no qual a soma dos elementos duma mesma fila (coluna, linha ou diagonal principal) é sempre 15. A fórmula do número de combinações de n objectos p a p e principalmente a fórmula do binómio de PASCAL tinham já sido reproduzidas em 1265 por um filósofo persa, NASIR-AD-DIN. Tais exemplos são inumeráveis.

As razões pelas quais os pioneiros da Combinatórica permaneceram obscuros ou isolados são numerosas: as descobertas (ou redescobertas) eram motivadas por problemas de natureza muito diversa; as preocupações, as formas de expressar as «receitas» eram muito dispares.

Quando LEIBNIZ escreveu, aos 20 anos de idade, o seu tratado «Dissertatio de Arte Combinatoria» procurava estabelecer uma nova ciência com ramificações na Metafísica e na Moral. Foi, porém, o Cálculo das Probabilidades que pressionou PASCAL e FERMAT na senda dos respectivos trabalhos, e as preocupações topológicas de EULER que levaram à descoberta das funções geradoras.

Mais recentemente, a Combinatórica foi absorvida pela Teoria dos Números.

Na época dos ordenadores e do desenvolvimento da Investigação operacional, surgiram aplicações bem diferentes que encaminham a Combinatórica numa direcção totalmente autónoma.

É com vista a estas aplicações que A. KAUFMANN, professor no Instituto Politécnico de Grenoble escreveu o presente livro numa linguagem voluntàriamente intuitiva e com as conhecidas qualidades didáticas. Se os teóricos não encontram no livro as «belas» fórmulas assintóticas, os teoremas de paridade ou novas propriedades da teoria dos números, os engenheiros porém poderão utilizá-lo proveitosamente pelo vasto repositório de princípios e algoritmos deste novo campo de aplicação da ciência contemporânea.

172 — A. KAUFMANN e D. COSTER — **Exercices de Combinatoires avec Solutions** — Dunod, Paris.

As Edições Dunod acabam de publicar um livro de exercícios de Combinatórica que apresentam as soluções dos exercícios propostos na obra já publicada de KAUFMANN — «Introduction à la Combinatorique, en vue des applications».

Este primeiro volume refere-se aos problemas de «dénombrement»; os que venham a ser publicados ulteriormente serão relativos aos problemas de enumeração e de optimização.

Cada exercício é duplamente referido — pelo seu número de ordem e pelo número que traz na obra original.

Vários exercícios complementares vêem desenvolver os pontos particularmente mais interessantes. Todas as referências à obra original são indicados pela sigla I C seguida dos números do capítulo e do parágrafo.

Os exercícios estão grupados em séries que correspondem à separação de assuntos adoptados na obra de base. As demonstrações que figuram em IC não são reproduzidas mas apenas são utilizados os resultados. Cada série de exercícios é precedida por uma curta introdução que a integra no conjunto do livro de base.

173 — J. HLADIC — **Les Transformations Fonctionnelles** — «Monographies Dunod», Dunod, Paris.

Os trabalhos consagrados às transformações funcionais, em número crescente, mostram o interesse dedicado a este importante domínio da matemática aplicada. Deve-se este facto à diversidade de problemas aos quais se aplicam as técnicas das transformações funcionais: resolução de equações diferenciais, equações integrais e às derivadas parciais, resolução de equação às diferenças, de variáveis contínuas ou não, estudo das propriedades das funções de física matemática, generalização de funções.

O livro estuda as seguintes transformações integrais de FOURIER, de LAPLACE, de HANKEL e de MELLIN e a transformação Z.

Reunir num só volume um conjunto de transformações deverá permitir o explanamento dos métodos gerais relativos a estes diversos tipos de transformação. No entanto de cada tranformação se faz uma exposição pormenorizada.

As transformações de FOURIER e de LAPLACE das distribuições que encontram uma aplicação cada vez maior em todos os domínios da física mereceram uma especial atenção.

Para boa utilização deste livro tornam-se necessários sólidos conhecimentos das teorias das funções de variáveis complexas e das distribuições.

O livro interessa especialmente os estudantes de 3.º ciclo de física, os engenheiros e matemáticos dedicadas à resolução de problemas de física matemática.

174 — A. GUICHARDET — **Leçons sur Certaines Algèbres Topologiques** — Dunod, Paris.

Mais um volume da colecção «Cours et Documents de Mathématiques et de Physique» que resume certo número de textos relativamente curtos que cobrem os aspectos mais recentes destas disciplinas. O livro consta assim de três partes, cada uma das quais representa o «compte rendu» dum seminário.

Na primeira parte, «Algebras de VON NEUMANN» a exposição começa pelo exame de um caso muito particular: o de o espaço de HILBERT ser de dimensão finita; este facto permite a familiarização com o aspecto algébrico da questão antes de abordar as dificuldades devidas à Topologia e à Medida. Seguem-se generalidades sobre as Àlgebras de VON NEUMANN um capítulo sobre a Teoria da redução e outro sobre o estudo da estrutura dos factores.

No seminário que constitui a segunda parte «Álgebras Topológicas e Funções Holomorfas» são principalmente determinados os aspectos de certas álgebras topológicas ligadas à teoria das funções de várias variáveis complexas. Começa-se por pequeno número de definições e de resultados relativos às álgebras topológicas em geral. No que segue consideram-se ou Àlgebras de BANACH ou limites indutivos ou projectivos destas álgebras.

Em dois apêndices são apresentados os resultados deste seminário relativos aos limites indutivos ou projectivos, e às variedades analíticas complexas.

Finalmente a teoria das «Álgebras de BANACH comutativas» devida principalmente a matemáticos soviéticos, constitue a terceira parte deste livro. É uma das mais belas aplicações da teoria dos espaços de BANACH. A análise harmónica é abordada apenas no caso das Séries de FOURIER. A título de aplicação, são expostas a teoria das compactificações dos espaços topológicos completamente regulares e a teoria espectral dos operadores normais nos espaços de HILBERT.

O livro destina-se aos estudantes do 3.° ciclo das Faculdades de Ciências e aos investigadores em matemática e física teórica.

175 — R. LATTÈS — **Quelques Méthodes de Résolution de Problèmes aux Limites de la Physique Mathématique** — Collection «Cours et Documents de Mathématiques et de Physique», Dunod — Paris.

A presente colecção «Cours et documents de mathématiques et de Physique» reune certo número de textos relativamente curtos que cobrem os aspectos mais recentes destas disciplinas. Na generalidade trata-se de notas de cursos a nível do 3.° ciclo das Faculdades de Ciências; alguns são redigidos pelos autores, outros pelos auditores com a revisão consequente dos autores.

Nesta colecção — a obra de LATTÈS — consagra-se aos métodos espectrais e aos métodos de Monte-Carlo e resulta de uma série de cursos feitos na Faculdade de Ciências de Paris.

Comporta portanto, por um lado alguns resultados ou apresentações originais e por outro, numa evidente preocupação de coerência, vários elementos extraídos de obras especializadas ou de artigos já publicados.

O objectivo a atingir consiste essencialmente em fornecer aos leitores (estudantes a nível do 3.° ciclo, investigadores ou engenheiros especializados) instrumentos de trabalho, através da sua utilização, em exemplos concretos e precisos.

176 — J. J. MOREAU — **Mécanique Classique** — tome 1 Masson & Co., Paris.

O primeiro tomo deste manual de Mecânica Clássica dedica-se às teorias preliminares (em particular, a cinemática) e aos princípios com as suas consequências gerais.

Foi concebido para servir de instrumento de trabalho a várias categorias de estudantes. Os futuros físicos, ao nível do primeiro ciclo de ensino Superior, futuros engenheiros, no estado dos primeiros anos da escola ou das classes preparatórias, possuindo já todos, pelo ensino elementar da física alguns rudimentos de mecânica, encontrarão uma exposição sintética e precisa das bases desta ciência. Pretendeu-se uma limitação ao essencial, mas, graças à apresentação de muitos factos sob a forma de exercícios, a obra, neste volume, mostra-se suficientemente completa para que possa servir de texto de referência aos referidos estudantes na sua carreira ulterior.

Por outro lado, a mecânica figura tradicionalmente no programa de formação dos matemáticos. O autor, mecânico na qualidade de matemático, considera que este objectivo é plenamente actual. Procurando não sobrecarregar o formalismo, conseguiu na sua exposição uma precisão lógica que satisfaz este novo público.

Com a preocupação de facilitar ao estudante o acesso à literatura científica termina cada capítulo com um parágrafo de «variantes et terminologie».

177 — O. A. LADYZENSKAJA e N. N. URAL'CEVA — **Equations aux Deriveés Partielles de Type Elliptique** — Dunod, Paris.

Esta obra incluida nas «Monographies Universitaires de Mathématiques» reune as recentes descobertas dos Autores no domínio das equações às derivadas parciais de segunda ordem. Estuda as relações entre as propriedades diferenciais dos coeficientes das equações e as propriedades correspondentes das soluções destas equações.

A par das notações utilizadas pelos autores encontra-se uma série de exemplos que mostram a necessidade das diversas hipóteses feitas no estudo das equações lineares e quase lineares, os resultados essenciais incluídos na obra e que indicam os desenvolvimentos susceptiveis de investigação. A exposição em seguida dedica-se ao estudo de certas classes de funções que verificam certas desigualdades integro-diferenciais, estreitamente ligadas às equações elipticas de segunda ordem.

Em seguida expõem-se resultados relativos às equações lineares, descrevem-se métodos para determinação de desigualdades *à priori* para as soluções dos problemas estudados.

Grande parte dos livros dedica-se ao estudo das equações quase lineares à formulação e a resolução dos problemas 19 e 20 de HILBERT.

É uma obra que interessa investigadores em matemática pura ou aplicada, em física, os engenheiros e os estmdantes do 3.° ciclo de matemática. Para sua compreensão necessita-se o conhecimento das matérias dos certificados C_1 e C_2 de matemática.

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor — MASSON ET C.[ie], Paris

J. Bass — *Cours de Mathématiques — Troisième Édition Revue et Corrigée.*
— *Exercices de Mathématiques.*
M. Bouix — *Les Fonctions Géneralisées ou Distributions.*
M. A. Tonnelet — *Les Vérifications Experimentales de la Relativite Générale.*
A. Hocquenghem & P. Jaffard — *Mathématiques. Tome I. Éléments de calcul différential et intégral.*

Editor — LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD — Paris

Marcel Doligez — *Gravitation — Contribution à la théorie corpuscular de la gravitation.*
H. Laurent — *Théorie des Jeux de Hasard.*

Editor — AKADÉMIAI KIADÓ — BUDAPEST

Deuxième Congrès Mathématique Hongrois.
Medgyessy — *Decomposition of Superpositions of Distribution Functions.*

Editor — IZDATELHSTVO AKADEMII NAUK SSSR — MOSKVA

Lawrentjew, Juschkewitsch, Grigorjan — *Leonhard Euler.*

Editor — AKADEMIE-VERLAG, Belin

A. I. Lurje — *Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie.*

Editor — DUNOD, Paris

Monographies Universitaires de Mathematiques

17. R. Pallu de la Barrière — *Cours d'automatique théorique.*
18. F. R. Gantmacher — *Théorie de matrices* — Tome 1 — *Théorie générale.*
19. F. R. Gantmacher — *Théorie des matrices* — Tome 2 — *Questions spéciales et applications.*
20. R. Campbell — *Les integrales euleriennes et leurs applications.*
21. A. Rényi — *Calcul des probabilités.*
22. A. G. Kurosch — *Algèbre générale.*
23. I. M. Guelfand et N. Y. Vilenkin — *Les distributions.* Tome 4: *Applications de l'analyse harmonique.*
24. C. Fourgeaud et A. Fuchs — *Statistique.*
25. J. Garsoux — *Analyse mathématique.*
26. A. Guichardet — *Analyse harmonique commutative.*
27. G. Hochschild — *La structure des groupes de Lie.*
28. Mme Y. Choquet-Bruhat — *Geometrie différentielle et systèmes extérieures.*
29. Pham Mau Quan — *Introduction à la géometrie des variétés différentiables,*
30. R. Isaacs — *Jeux differentiels. Théorie des jeux appliqués aux domaines de la guerre, des poursuites, du contrôle et de l'optimisation.*
31. O. A. Ladyzenskaja et N. N. Oral'ceva — *Equations aux derivées partielles de type elliptique.*
32. J. Lévy-Bruhl — *Introduction aux structures algébriques.*

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 30 escudos
Assinatura relativa a 1969 (4 números) 100 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 150 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºˢ 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºˢ 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local de cobrança

As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºˢ 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºˢ 16 a 49, cada número	12$50
N.ºˢ 50, 76-77	60$00
N.ºˢ 51 a 75, 78 a 99, 101 a 108 — cada número simples . . .	17$50
» » duplo	35$00
N.º 100	100$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA
A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento
de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 120$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — LISBOA-2 — Telefone 369449