GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO III **N.º 11** JULHO - 1942

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 5$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / LARGO DO PÔÇO NOVO / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

FUNDADA POR

B. CARAÇA, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

Redacção e Administração: *Faculdade de Ciências*, Rua da Escola Politécnica — Lisboa
Composição e Impressão: *Soc. Ind. de Tipografia*, Rua Almirante Pessanha, 5 — Lisboa

GALILEO E NEWTON

por BENTO CARAÇA

São, de todos os obreiros que, entre os séculos XVI e XVII, lançaram os fundamentos da ciência moderna, porventura os mais possantes, já pela quantidade de materiais que carrearam, já pela energia mental que puzeram na sua ordenação.

Entre êles há mais do que uma simples coincidência de datas — *Newton* nasce no mesmo ano, 1642, em que *Galileo* morre — há um mesmo objectivo intelectual, uma mesma paixão pela descoberta, uma mesma característica de serem, *eminentemente,* homens do seu tempo e da sociedade em que actuaram.

Nisto, precisamente — em serem, eminentemente, homens do seu tempo — reside a grande fôrça de um e doutro; nisso está, acima de tudo, a origem da espantosa diferença das suas vidas.

Ambos enfrentaram, com arrôjo e poder intelectual, os problemas cuja resolução o progresso da civilização exigia. Ambos corrigiram erros antigos e deram a êsses problemas soluções novas.

Galileo Galilei (1564-1642)

Isaac Newton (1642-1727)

Com *Galileo,* a Ciência entra, definitivamente, no rumo de que houvera já alguns precursores de génio mas de que faltava o sistematizador e o construtor — *o rumo da experimentação e observação como método de aquisição da verdade.* Contra os filósofos tradicionalistas para quem a Ciência não passava dum discurso pretencioso e ôco, afirma *«não devemos desejar que a natureza se acomode ao que nos parece a nós melhor disposto e ordenado; antes convém que acomodemos o nosso intelecto ao que ela fêz, certos de que isso e não outra coisa, é o melhor».*

Com *Newton,* herdeiro da obra de *Galileo,* êsse rumo enriquece-se com a aplicação sistemática do método matemático. Nos seus *Principia,* fêz esta afirmação que é todo um programa científico — «*...os modernos, rejeitadas as formas substanciais e as qualidades ocultas, ocupam-se de referir a leis matemáticas os fenómenos naturais*». E onde o instrumento matemático não chegava, tratou de

O CÁLCULO DA SOMA DUMA SÉRIE

por A. SÁ DA COSTA

A necessidade de calcular a soma duma série surge com freqüência. Recorde-se, por exemplo, que o conhecimento do valor duma função para um valor dado da variável independente depende, muitas vezes, do cálculo da soma duma série — é o caso do logarítmo dum número do valor duma função goniométrica, etc.

1. Séries cuja soma pode calcular-se exactamente.

Só excepcionalmente a soma duma série pode calcular-se exactamente. Consideraremos dois casos apenas.

A) Séries cujos termos formam progressão geométrica.

Seja a série $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$. Tem-se $S_n=a\dfrac{1-r^n}{1-r}$ e $S=\lim\limits_{n\to\infty} a\dfrac{1-r^n}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}$ se $|r|<1$, $S=\infty$ se $|r|>1$ ou $r=1$, e S indeterminado se $r=-1$. Na primeira hipótese a série é convergente e a sua soma $S=\dfrac{a}{1-r}$, na segunda a série é divergente e na terceira indeterminada.

Exemplos: 1) A série de têrmo geral $u_n=(-1)^n 3/2^n$ é convergente por ser $|r|=1/2<1$ e a sua soma é $S=\dfrac{3}{1+1/2}=2$.

2) A série $1/5+2/5+4/5+\cdots+2^n/5+\cdots$ é divergente porque $r=2>1$ e a sua soma é, portanto, $S=\infty$.

3) *Estudar a série de têrmo geral* $u_n=\dfrac{a+bn}{2^n}$. *O estudo compreende a determinação da sua soma, na hipótese da convergência* (I. S. C. E. F. — Álgebra Superior — 2.º exame de freqüência, Maio de 1938).

O têrmo geral da série proposta é a soma dos termos gerais $v_n=\dfrac{a}{2^n}$ e $w_n=\dfrac{bn}{2^n}$ de duas séries convergentes — a primeira porque os seus termos formam uma progressão geométrica de razão $1/2<1$ e a segunda porque a aplicação do critério de Alembert conduz a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}<1$. Então a soma da série proposta é igual à soma das somas das séries de termos gerais v_n e w_n que representaremos por V e W. Mas, $V=\dfrac{a/2}{1-1/2}=a$ e, quanto a W, notemos que podemos escrever, sucessivamente, em virtude da série ser convergente

$$W=b/2+2b/2^2+\cdots+nb/2^n+\cdots=$$
$$=b\,[1/2+(1/2^2+1/2^2)+(1/2^3+1/2^3+1/2^3)+\cdots]=$$
$$=b\,[(1/2+1/2^2+1/2^3+\cdots)+(1/2^2+1/2^3+\cdots)+\cdots]$$

onde cada um dos parêntesis é uma série cujos termos formam uma progressão geométrica de razão $1/2<1$. Logo será

$$W=b\,[1+1/2+1/2^2+\cdots]=\frac{b}{1-1/2}=2b.$$

A soma da série proposta é $S=V+W=a+2b$.

3) *Calcular a soma da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a}{2^{3n-2}}+\dfrac{3b}{2^{3n}}\right)$.

O têrmo geral da série proposta escreve-se $u_n=\dfrac{4a+3b}{2^{3n}}$ e a soma da série é

$$S=(4a+3b)\sum_{n=1}^{\infty}1/2^{3n}=(4a+3b)\frac{1/2^3}{1-1/2^3}=\frac{4a+3b}{7}.$$

4) *Calcular as somas das séries de termos gerais* $u_n=\operatorname{sen}^n x$, $v_n=\operatorname{tg}^n x$.

As séries propostas são convergentes, respectivamente, para $x\neq 2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ e $-\dfrac{\pi}{4}<x-k\pi<\dfrac{\pi}{4}$. Só para os valores de x que veriquem estas condições se põe o problema do cálculo das somas das séries propostas e, então, será

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\quad\text{e}\quad S'=\sum_{n=0}^{\infty}v_n=\frac{1}{1-\operatorname{tg}x}.$$

B) Séries cujos termos gerais são decomponíveis na soma $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\varphi(n+i)$, com $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i=0$.

Prova-se que a soma duma série convergente é $S=a_0\varphi(1)+(a_0+a_1)\varphi(2)+\cdots+(a_0+a_1+\cdots+a_p)\varphi(p)+$ $+(a_1+2a_2+\cdots+pa_p)\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)$ onde $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)$ existe e é finito, se o têrmo geral da série fôr $u_n=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\varphi(n+i)$ com $\sum\limits_{i=0}^{n}a_i=0$ (V. «Gazeta de Matemática» n.º 6, p. 16).

Exemplos: 1) *Calcule a soma da série de têrmo geral* $u_n=\varphi(n)-\varphi(n+a)$, *com a inteiro e* $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=l$.

Tem-se $S_n=\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(a)-[\varphi(n+1)+$ $+\varphi(n+2)+\cdots+\varphi(n+a)]$ e será $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ $=\sum\limits_{i=1}^{a}\varphi(i)-a\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=\sum\limits_{i=1}^{a}\varphi(i)-al$.

2) *Calcule a soma da série de têrmo geral* $u_n=\dfrac{1}{n(n+a)}$.

Note-se que $u_n = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}\right)$. Então, em conseqüência do que se expoz no exercício anterior, é $S = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{a}\right)$.

3) *Calcule a soma da série de têrmo geral* $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$.

Note-se que $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Será $S = \sum_{n=2}^{\infty} u_n = 1$.

4) *Prove que a soma da série de têrmo geral* $u_n = a\varphi(n) + b\varphi(n+1) + c\varphi(n+2)$, *com* $a+b+c=0$ *e* $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = l \neq \infty$, *é* $S = a\varphi(1) + (a+b)\varphi(2) + (a+2b+3c)l$. *Aplicação:* $u_n = \frac{3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. R: $S = 3/2$.

5) *Calcule a soma da série de têrmo geral* $u_n = 1/(a+n)(a+n+1)\cdots(a+n+p)$.

Podemos escrever

$$u_n = \frac{(a+n-1)!}{(a+n+p)!} = \frac{1}{p}\left[\frac{(a+n-1)!}{(a+n+p-1)!} - \frac{(a+n)!}{(a+n+p)!}\right]$$

e caímos no caso do exercício 2). Portanto

$$S = \frac{1}{p}\left[\frac{(a-1)!}{(a+p-1)!} - \lim_{n\to\infty}\frac{(a+n)!}{(a+n+p)!}\right] = \frac{1}{p \cdot a(a+1)\cdots(a+p-1)}.$$

2. Séries cuja soma só pode calcular-se aproximadamente.

O método para a determinação dum valor aproximado da soma duma série consiste em tomar a soma dos p primeiros termos da série, $S_p = u_1 + u_2 + \cdots + u_p \simeq S$. Êste procedimento implica, em geral, êrros de duas categorias — êrro sistemático resultante de ter sido desprezado o resto da série $u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots$; erros de cálculo cometidos na determinação dos p primeiros termos da série e da sua soma. Na peor das hipóteses, todos êstes êrros somar-se-ão.

Em geral, o problema apresenta-se com um enunciado equivalente ou redutível ao seguinte: calcule a soma da série de têrmo geral u_n cometendo um êrro absoluto inferior a ε.

O cálculo deve ser efectuado de modo tal que a soma do êrro sistemático com os êrros de cálculo seja inferior a ε. Na prática, procede-se de forma tal que o êrro sistemático seja inferior a $\frac{\varepsilon}{2}$ e que a soma dos êrros de cálculo seja também inferior a $\frac{\varepsilon}{2}$.

Para determinar o número de termos da série a considerar e a precisão com que êstes e a sua soma devem ser calculados, é indispensavel resolver os seguintes problemas: determinar um limite superior do êrro de cálculo quando se realiza uma operação e determinar um limite superior do êrro sistemático quando se consideram os p primeiros termos da série. Supomos que o leitor sabe resolver o primeiro problema e ocupar-nos-emos exclusivamente do segundo nos seguintes casos: séries de têrmos positivos, séries alternas.

A) Séries de termos positivos.

Suponhamos que, para o cálculo dum valor aproximado da soma S, da série $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, considerámos os seus p primeiros termos $u_1 + u_2 + \cdots + u_p \simeq S$. O êrro sistemático cometido será, precisamente, a soma da série resto $R_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots$ que não podemos calcular exactamente porque, doutro modo saberiamos calcular, exactamente ou cometendo apenas erros de cálculo, a soma da série proposta. Seja L um número positivo tal que $R_p \leq L$, então L será um limite superior do êrro sistemático. Vejamos como se consegue determinar um número L aceitável nestas condições. L será tanto mais aceitável quanto menor fôr a diferença $L - R_p$.

1.º caso. *A convergência da série foi reconhecida pelo critério d'Alembert.*

Nestas condições, é sempre possível determinar uma série numérica de têrmos positivos e em progressão geométrica de razão $r < 1$ cujo têrmo geral $v_q \geq u_{p+q}$. A esta série dá-se o nome de *majorante* do resto da série $u_1 + u_2 + \cdots$. A soma da majorante satisfaz às condições que caracterizam o número a que chamámos L.

Passemos à construção da majorante. Do que supozemos, resulta que, a partir duma ordem n_1 se tem $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1$ portanto, para $n > p$ é $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{u_{p+1}}{u_p} = k < 1$ e a majorante do resto $R_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots$ será $u_{p+1}[1 + k + k^2 + \cdots] = \frac{u_{p+1}}{1-k} = L \geq R_p$.

Exemplos: 1) *Calcule* e, *base neperiana, cometendo um êrro absoluto inferior a* 10^{-3}.

Sabe-se que $e = 1 + 1/1! + 1/2! + \cdots + 1/n! + \cdots$. Começaremos por determinar o número de têrmos desta série a considerar para que o êrro sistemático ε_s seja inferior a 5/10000 e, seguidamente, calcularemos a soma dêstes têrmos, cometendo um êrro ε_c inferior a 5/10000. Operando dêste modo, há a garantia de que o êrro absoluto será inferior a 10^{-3}. Para $n>p$ é $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n}<\frac{u_{p+1}}{u_p}=\frac{1}{p}=k$ logo, $L=\frac{u_{p+1}}{1-1/p}=\frac{1}{p!(1-1/p)}=\frac{1}{(p-1)!(p-1)}$ e, por ser $R_p\leq L$, será $R_p<5/10000$, se fôr $L<5/10000$, para o que basta ser $p=7$.

Tem-se, por fim, $e\simeq 1+1/1!+1/2!+1/3!+1/4!+$ $+1/5!+1/6!$ $e\simeq 1+1+0{,}5+0{,}166\overline{7}+0{,}0417+0{,}0083+$ $+0{,}0014$, $e\simeq 2{,}718$.

2) *Calcule* $\log 2$, *com um êrro absoluto inferior a* 10^{-3}.

É sabído que as igualdades $\log(1+x)=x-x^2/2+$ $+\cdots+(-1)^{n+1}x^n/n+\cdots$ e $\log(1-x)=-[x+x^2/2+$ $+\cdots+x^n/n+\cdots]$ são válidas para x no intervalo aberto $(-1,1)$. Portanto, neste intervalo, é válida a igualdade $\log\frac{1+x}{1-x}=2[x+x^3/3+\cdots+x^{2n+1}/_{2n+1}+\cdots]$.

Fazendo $x=\frac{M-N}{M+N}$, onde M e N são positivos e $M>N$ virá $\log M=\log N+2\left[\frac{M-N}{M+N}+\right.$ $\left.+\frac{1}{3}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{2n+1}+\cdots\right]$ igualdade válida para $M>N>0$.

Façamos $M=2$ e $N=1$, será

$$\log 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{3^n}+\cdots\right].$$

Em virtude do que está dito, não é necessário estudar o carácter desta série para afirmar que ela é convergente. Todavia, a aplicação do critério d'Alembert mostraria a sua convergência.

Para $n>p$ é sempre $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{u_{p+1}}{u_p}=\frac{2p+1}{9(2p+3)}=k$ logo, $L=\frac{u_{p+1}}{1-k}=\frac{1}{3^{2p+1}(16p+26)}$ e, por ser $R_p\leq L$, será $R_p<5/10000$, se fôr $L<5/10000$ para o que basta ser $p=2$.

Teremos, finalmente,

$$\log 2\simeq\frac{2}{3}+\frac{2}{81}=0{,}666\overline{7}+0{,}024\overline{7}=0{,}691\,.$$

3) *Calcule* $\sqrt[3]{7}$ *cometendo um êrro absoluto inferior a* 10^{-2}.

Observemos que $\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{2^3-1}=2\,.\sqrt[3]{1-1/8}=2r$. Mas, $r=(1-1/8)^{1/3}=1-\frac{1}{3.8}+\frac{1/3(1/3-1)}{2!}\frac{1}{8^2}+\cdots+$ $+(-1)^n\frac{1/3\,(1/3-1)\cdots(1/3-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{8^n}+\cdots$ série cujos têrmos, a partir do segundo, são todos negativos. Para $n>p$ é sempre $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{u_{p+1}}{u_p}=\frac{p-1/3}{8(p+1)}=k$.

Então $L=\frac{-u_{p+1}}{1-k}=(-1)^p\frac{1/3(1/3-1)\cdots(1/3-p)(p+1)}{8^{p+1}[p+1-(1/3-p)1/8]}$ e, por ser $|R_p|\leq L$, será $|R_p|<1/400$, se fôr $L<1/400$, para o que basta ser $p=2$.

Tem-se, por fim,

$$\sqrt[3]{7}=2r\simeq 2-1/12\simeq 2-0{,}083\simeq 1{,}92\,.$$

2.º caso. *A convergência da série foi reconhecida pelo critério de Cauchy.*

Neste caso, segue-se o mesmo método que no caso anterior e a construção da majorante do resto é ainda mais simples.

A partir duma ordem n_1 é sempre $\sqrt[n]{u_n}<k<1$, portanto, para $n>p$ é $\sqrt[n]{u_n}<\sqrt[p]{u_p}=k<1$ ou $u_n<k^n$. A majorante do resto $R_p=u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots$ será $k^p+k^{p+1}+\cdots=\frac{k^p}{1-k}=L\geq R_p$.

Exemplo: Calcule a soma da série de têrmo geral $u_n=1/(n!)^n$, *cometendo um êrro absoluto inferior a* 10^{-2}.

Para $n>p$ tem-se $\frac{1}{(n!)^n}<\frac{1}{(p!)^p}=k^p$, logo, $L=\frac{1}{(p!)^{p-1}(p!-1)}$. Por ser $R_p\leq L$, será $R_p<5/1000$ se fôr $L<5/1000$, para o que basta ser $p=4$. Teremos, portanto,

$$S\simeq 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{216}+\frac{1}{331776}\simeq 1+0{,}25+0{,}00\overline{5}\simeq 1{,}25\,.$$

3.º caso. *A convergência da série foi reconhecida por comparação com a série harmónica generalizada,* $u_n=1/n^\alpha$ *(Dirichlet).*

Neste caso, é possível determinar um número k tal que $L=\frac{k}{p^\alpha}>R_p$.

Reconhece-se fàcilmente que $\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{p^\alpha}<$ $<\int_1^p\frac{dx}{x^\alpha}<1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^\alpha}$ ou, o que é o mesmo, $S_p-1<\int_1^p\frac{dx}{x^\alpha}<S_{p-1}$ tomando limites quando $p\to\infty$, vem $S-1\leq\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}\leq S$. Mas, $R_p=S-S_p=(S-1)-(S_p-1)\leq\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}-\int_1^p\frac{dx}{x^\alpha}=$ $=\int_p^\infty\frac{dx}{x^\alpha}$. Portanto $R_p\leq\frac{1}{(\alpha-1)\,p^{\alpha-1}}=\frac{p/(\alpha-1)}{p^\alpha}$ donde $k=p/(\alpha-1)$.

Exemplo: Calcule a soma da série de têrmo geral $u_n = \frac{n}{n^5+1}$, *cometendo um êrro absoluto inferior a* 10^{-2}.

Tem-se $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} u_n = 1$, se $\alpha=4$. Para $n>p$ será $R_p < \frac{1}{3p^3} = L$ e para que $L < \frac{5}{1000}$ terá de ser pelo menos $p=4$. Teremos

$$S \simeq 1/2 + /233 + 3/244 + 1/256 = 0{,}57 .$$

B) **Séries alternas.**

Seja a série alterna convergente $u_1 - u_2 + \cdots + +(-1)^{n-1} u_n + \cdots$, onde $u_1, u_2, \cdots$ são positivos. Se considerarmos os p primeiros têrmos da série, o resto pode escrever-se $|R_p| = |u_{p+1} - (u_{p+2} - u_{p+3}) - +(u_{p+4} - u_{p+5}) - \cdots| < u_{p+1}$ porque $u_{p+k} > u_{p+k+1}$, visto a série ser convergente. Portanto, o módulo do primeiro têrmo desprezado é um limite superior do êrro sistemático.

Exemplos: 1) *Calcule* $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$ *cometendo um êrro absoluto inferior a* 10^{-2}.

Sabe-se que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \left(\frac{\pi}{5}\right)^3 \Big/ 3! + \cdots + +(-1)^n \left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n+1} \Big/ (2n+1)! + \cdots$.

Se considerarmos só o primeiro têrmo, cometeremos um êrro sistemático $\varepsilon_S < \frac{\pi^3}{6 \cdot 5^3} < \frac{4^3}{6 \cdot 5^3} = \frac{32}{375}$. Se considerarmos os dois primeiros têrmos, o êrro sistemático será $\varepsilon_S < \frac{\pi^5}{120 \cdot 5^5} < \frac{4^5}{120 \cdot 5^5} = \frac{128}{41875} < \frac{1}{200}$.

Então será $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \simeq \frac{\pi}{5} - \frac{\pi^3}{6 \cdot 5^3} \simeq 0{,}628 - 0{,}041 = 0{,}59$.

2) *Desenvolver em série a função* $f(x) = \frac{1+x}{e^x}$. *Utilizar os três primeiros têrmos para calcular* $f\left(\frac{1}{10}\right)$ *e* $f\left(\frac{1}{5}\right)$. *Que confiança merecem os resultados?* (I. S. C. E. F.—Álgebra Superior—3.º exame de freqüência, Junho de 1938).

Como se reconhece imediatamente

$f(x) = (1+x)e^{-x} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{6}x^3 - \frac{x^4}{8} + \cdots$ donde $f\left(\frac{1}{10}\right) \simeq 1 - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} \simeq 0{,}9953$ com um êrro absoluto $\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_c < \frac{1}{80.000} + \frac{1}{100.000} < \frac{1}{10.000}$, e $f\left(\frac{1}{5}\right) \simeq 1 - \frac{1}{50} + \frac{1}{225} = 1 - 0{,}02 + 0{,}0044 = 0{,}984$ com um êrro absoluto $\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_c < \frac{1}{5.000} + \frac{1}{10.000} < \frac{1}{1000}$.

3) *Calcule com um êrro absoluto inferior a* 10^{-} *o* $\log 1{,}005$.

A igualdade $\log(1+x) = x - x^2/2 + \cdots + (-1)^{n-1} x^n/n + \cdots$ é válida para x tal que $x^2 < 1$. Portanto, $\log 1{,}005 = \frac{5}{1000} - \frac{25}{2.000.000} + \cdots$.

Se considerarmos um têrmo da série, cometeremos um êrro sistemático

$\varepsilon_s < \frac{25}{2.000.000} = \frac{1}{80.000} > \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$.

Se considerarmos dois têrmos, o êrro sistemático $\varepsilon_s < \frac{125}{3 \cdot 10^9} = \frac{1}{24 \cdot 10^6} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$.

Portanto, $\log 1{,}005 \simeq 0{,}005 - 0{,}0000125 = 0{,}0050125$.

3. Exercícios propostos.

1) Calcular a soma da série de termo geral $u_n = \frac{n^3}{n!}$ [Note-se que, para $n \geq 3$, é $u_n = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!}$. A soma é $S = 5e$.

2) Calcular a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an}{br^n}$.

3) Estudar e representar geomètricamente a função $y = e^{1-1/x}$. As ordenadas dos pontos notáveis (máximos e mínimos ou pontos de inflexão, se houver) serão calculadas com um êrro inferior a 10^{-3}, utilizando o desenvolvimento em série de e^x (I. S. C. E. F.—Álgebra Superior—2.º exame de freqüência, Junho de 1941. V. *Gazeta de Matemática* n.º 10, p. 18).

4) Utilizar o desenvolvimento em série para o cálculo, com um êrro inferior a 10^{-3}, das ordenadas dos pontos de inflexão da curva de equação $y = e^{-2x^2}$ (I. S. C. E. F.—Álgebra Superior—2.º exame de freqüência, Junho de 1940. V. *Gazeta de Matemática* n.º 6, p. 10).

5) Calcular quatro têrmos do desenvolvimento em série da função $y = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}$. Calcular $y\left(\frac{1}{2}\right)$ com um êrro inferior a 10^{-3} (I. S. C. E. F.—Álgebra Superior—Exame final, Julho de 1940).

6) Estudar e representar geomètricamente a função $y = e^{\operatorname{sen} x}$. Estudar a sua inversão. Utilizar o seu desenvolvimento em série para calcular o valor da função para $x = -\frac{\pi}{6}$ com um êrro inferior a 10^{-3} (I. S. C. E. F.—Álgebra Superior—Exame final, Julho de 1939).

7) Calcular o integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^4}}$ com três casas

decimais exactas (I. S. T.—Cálculo Infinitesimal —1.º exame de freqüência, 1927-28).

A função integranda pode escrever-se

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^4}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^4}{4}\right)^{-1/2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{1/2(1/2-1)}{2.2!}\cdot\frac{x^8}{4^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{2.n!}\cdot\frac{x^{4n}}{4^n}+\cdots$$

sendo a última igualdade válida no intervalo $(-\sqrt{2},+\sqrt{2})$ no qual a série é uniformemente convergente e que contém o intervalo $(0,1)$ de integração. Logo,

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2.2.4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1/2(1/2-1)}{2.2!4^2}\cdot\frac{x^9}{9}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{2.n!4^n}\cdot\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\cdots\right]_0^1 .$$

Resta calcular a soma da série numérica de têrmos positivos $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2.4.5}-\frac{1/2(1/2-1)}{2.2!4^2.9}+\cdots+(-1)^n\frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{2.n!4^n(4n+1)}+\cdots$ com a aproximação requerida.

8) Mostrar que a série de têrmo geral $u_n=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ para $x=0,1$ é convergente e calcular a sua soma com 6 decimais exactos (I. S. T.—Matemáticas Gerais—2.º exame de freqüência, 1939-40. V. *Gazeta de Matemática* N.º 6, p. 11).

9) Sendo $\operatorname{tgh} x=0,75$, calcular x com 4 casas decimais (I. S. T.—Matemáticas Gerais—1.º exame de freqüência—1938-39).

4. Bibliografia.

Émile Gau—*Calculs Numériques et Graphiques,* A. Colin—Paris 1932, p. 87-103.

Ugo Cassina—*Calcolo Numerico,* Zanichelli—Bologna 1928.

Giuseppe Belardinelli—*Esercizi di Algebra Complementare,* Zanichelli—Bologna 1923, p. 37-65, 101-122.

CLUBES DE MATEMÁTICA

por ANTÓNIO MONTEIRO

Os Clubes de Matemática desempenham um papel muito importante no ensino da matemática nos Estados Unidos. Os Clubes de Matemática têm por objectivo promover e desenvolver o gôsto pelo estudo da matemática, entre os estudantes das escolas secundárias e superiores, pondo em evidência, em reüniões especialmente destinadas a êsse fim, a beleza desta ciência e a utilidade da sua aprendizagem para a vida moderna. Além disso, os Clubes de Matemática constituem um poderoso auxiliar do ensino e da formação cultural e moral dos seus componentes.

Um dos primeiros Clubes de Matemática dos Estados Unidos foi fundado em 1903 na *Shattuck School,* uma escola particular de rapazes em Faribault, Minesota. Do princípio do século até hoje, os Clubes de Matemática têm-se espalhado por tôdas as escolas dos Estados Unidos, e a importância dêste movimento é unânimemente reconhecida pelos professores americanos. Basta dizer que a revista da Associação dos Professores de Matemática dos Estados Unidos *The American Mathematical Monthly* publica uma secção especialmente dedicada aos Clubes de Matemática dirigida pelo grande matemático E. H. C. Hildebrandt do *New Jersey State Teachers College.*

A actividade dêsses clubes despertou, por certo, o gôsto pelo estudo das matemáticas a muitos dos cientistas que forjaram em anos de trabalho continuado, a glória da escola matemática americana.

À luz desta experiência estamos no direito de pensar que a criação de Clubes de Matemática na maioria das nossas escolas secundárias e superiores, é susceptível de determinar uma corrente vital de interêsse pela matemática, entre os jovens estudantes, que contribuirá de uma maneira eficaz para o ressurgimento das matemáticas portuguesas.

É claro que a criação dêsses Clubes dependerá em grande parte do interêsse e espírito de iniciativa de professores e estudantes.

Nas escolas em que houver um grupo, muito embora pequeno, de pessoas capazes de fundar um Clube de Matemática, estou certo que elas arrastarão atraz de si a grande maioria dos estudantes interessados pela matemática, na medida em que a actividade do Clube corresponder às aspirações culturais actualmente existentes entre essas camadas.

Tôdas as informações que tenho do nosso meio, mostram que existe uma verdadeira ânsia de cultura entre os estudantes das nossas escolas superiores.

Nas escolas superiores dos Estados Unidos os estudantes respondem a essas inquietações culturais no campo das ciências matemáticas, fundando os seus Clubes de Matemática e realizando nêles palestras em que são tratados os assuntos que mais lhes interessa conhecer. É profundamente natural que assim seja; a história das matemáticas, o estudo das relações entre a matemática e as outras ciências (a técnica, a biologia, a psicologia, a medicina, etc.) e as artes, a crítica dos princípios fundamentais da matemática, as biografias de matemáticos ilustres, as curiosidades matemáticas (que as há altamente recreativas e instrutivas!) não fazem parte dos programas de ensino! Mas a actividade dos Clubes de Matemática não fica por aqui como veremos.

Êste artigo tem precisamente por objectivo dar uma idéia geral sôbre a organização dos Clubes dos Estados Unidos, e indicar ao mesmo tempo algum material de trabalho necessário à actividade dum Clube.

Regulamento do Clube — Em regra os Clubes Americanos têm hoje um estatuto ou um regulamento. A história dos Clubes Americanos mostra, que só em 1916 apareceu o primeiro regulamento, o do *Mathematics Club of the University of Oklahoma*, que vamos reproduzir porque pode servir de guia para algum clube que se venha a fundar em Portugal.

Preâmbulo — Os abaixo assinados reconhecendo as vantagens que podem resultar de uma associação que ofereça a oportunidade para a apresentação e discussão de assuntos com interêsse matemático, organizam-se num Clube de Matemática e resolvem reger-se pelos seguintes estatutos:

Artigo I — Nome. *Esta associação terá o nome «The Mathematics Club of the University of Oklahoma».*

Art. II — Sócios. § 1 — *Só podem ser sócios dêste Clube os estudantes e professores da Universidade de Oklahoma que se interessam por assuntos de matemática.* § 2 — *As propostas para sócio devem ser apresentadas por escrito e submetidas à aprovação de qualquer reünião do Clube.* § 3 — *A votação faz-se por escrutínio secreto e a aprovação por maioria.*

Artigo III — Direcção. § 1 — *A direcção é constituida por um Presidente, um Vice-Presidente e um Secretário-Tesoureiro, eleitos entre os sócios estudantes de matemática.* § 2 — *A direcção é eleita por escrutínio secreto na primeira reünião regular de cada semestre.* § 3 — *Cada membro da direcção exerce as suas funções até que o seu sucessor esteja eleito. O Presidente pode conceder dispensa de serviço a um membro da direcção até à primeira reünião regular do Clube.* § 4 — *A direcção juntamente com um sócio do Clube pertencente ao pessoal docente, designado pelos sócios nas mesmas condições, formam a Comissão de Programas para as reüniões.*

Artigo IV — Reüniões. § 1 — *As reüniões do Clube realizam-se às segundas e quartas quintas-feiras de cada mês.*

Artigo V — Vários. § 1 — *Êste Clube pode fazer regulamentos para as suas reüniões, cobrar quotas aos sócios, e realizar outros actos compatíveis com êstes estatutos.* § 2 — *Um têrço dos sócios do Clube é necessário para êsse efeito.* § 3 — *As alterações a estes estatutos devem ser apresentadas por escrito, ser afixadas durante duas semanas e aprovadas por dois terços dos sócios do Clube.* § 4 — *Em todos os casos não previstos nestes estatutos o Clube adoptará as* «Roberts' Rules of Order».

Em 1929 fundou-se uma federação dos Clubes de Matemática Universitários chamada «Pi Mu Epsilon Fraternity» e em 1931 a «Kappa Mu Epsilon Fraternity».

Nomes dos Clubes — Muitos Clubes têm o nome «The Mathematical Club of...» mas aparecem clubes com outros nomes: «The Euclidean Circle», «The Naperian Club», «The Irrational Club», «The Magic Square», «The Mystic Hexagram», «The Cartesian Oval», «The Pascal Triangle», «Pythagoream Club», ou então «Kappa Mu Epsilon» (University of Mexico), «Pi Mu Epsilon...», «Sigma Pi Mu...», «Delta Pi Sigma» (University of Arizona), ou então «Student's Mathematical Round Table» (University of Mexico). etc.

Não faltam as notas de bom humor na vida interna do clube: o Presidente, o Vice-Presidente, o Secretário e o Tesoureiro, são por vezes designados pelos seguintes nomes «Surdo, Absurdo, Racional e Irracional»; «Diferencial, Integral, Constante e Variável» ou então por nomes de matemáticos célebres.

As reüniões dos Clubes — Nas reüniões dos Clubes são tratados assuntos da mais variada natureza, mas nota-se nos programas de trabalho uma tendência para tratar de assuntos relacionados com o trabalho escolar, aproveitando tôdas as oportunidades para despertar a curiosidade dos estudantes por assuntos que não fazem parte do ensino. Os estudantes são assim levados a completar a sua preparação matemática por sua própria iniciativa — e parece-me que aqui reside uma das grandes vantagens da actividade dos clubes. O estudante encontra na vida do clube mil oportunidades para demonstrar o seu interêsse pelo estudo da matemática, fazendo conferências, propondo problemas, discutindo as idéias apresentadas, participando nos concursos, etc.

O estudante apreciado sob o ponto de vista intelectual será aquêle que demonstrar uma superioridade efectiva na resolução dos problemas postos a concurso, na realização de palestras, etc., e não aquêle tipo de estudante, tão vulgar ainda nas nossas escolas, que passa a vida a falar de coisas que não entende, de coisas que não estudou ou mal conhece (porque é de bom tom e dá fama falar um pouco sôbre tudo) e que é incapaz de fazer o mais pequeno esfôrço para modificar o ambiente em que vive e não repara na contradição que existe entre as idéias que professa e a vida que faz.

Se pensamos que só a juventude é capaz de modificar o ambiente matemático existente em Portugal, também pensamos que ela só conseguirá êsse objectivo adoptando uma atitude construtiva.

Que belo exemplo nos dá a juventude americana, quando toma iniciativas no sentido de alargar e completar a sua cultura e que magnífico exemplo o dos professores americanos que auxiliam com a sua experiência a actividade dos clubes e que vêem nos estudantes, companheiros de trabalho e amigos, obreiros conscientes e dedicados pela causa da cultura matemática!

O ressurgimento dos estudos matemáticos em Portugal só é possível na medida em que a imensa energia intelectual da juventude fôr completamente mobilizada. É certo que nos faltam muitas condições preliminares para atingir um tal objectivo, mas também é verdade que muita coisa se pode ir fazendo dèsde já. Preparar o futuro ainda é a melhor forma de vivermos as horas que passam e é a juventude que tem maiores responsabilidades nessa tarefa, porque é ela que tem o futuro nas suas próprias mãos porque é nela que residem as grandes reservas de energia intelectual duma nação. Quando Maurice Fréchet nos dizia recentemente que *«só o professor que faz investigação científica demonstra a sua superioridade intelectual em relação à média dos seus alunos»*, implicitamente reconhecia a superioridade intelectual dos estudantes mais qualificados em relação à média dos seus professores.

Num país como a França, em que no campo das ciências matemáticas os trabalhos decisivos na carreira de um investigador são realizados entre os 20 e 25 anos, um professor como Maurice Fréchet, que fundou a Análise Geral por essa idade, não pode pensar de outra maneira.

Da atitude da juventude estudiosa, principalmente nas escolas superiores, depende em grande parte a possibilidade de se criarem Clubes de Matemática. No ensino secundário parece-me que é da parte dos professores que deve partir a iniciativa.

Em qualquer hipótese é preciso não esquecer que os estudantes é que devem ter o papel mais activo dentro do clube. O professor deve desempenhar o papel de um orientador, com um largo espírito de compreensão perante o espírito de iniciativa da juventude.

Nas revistas que abaixo indicamos encontram-se muitos relatórios de actividade dos clubes de matemática americanos. Vamos dar um exemplo, tirado do relatório do *Mathematics Club of Hunter College* do ano 1936-37. A actividade do clube começou com uma série de palestras sôbre corpos finitos e as geometrias associadas mais elementares. Primeiro falou-se só de corpos finitos com um número primo de elementos. Depois poz-se um problema a prémio que exigia a construção das tábuas de multiplicação e adição de dois corpos finitos cada um dos quais tinha como número de elementos a potência de um número primo. Como ainda não se tinha falado nestes corpos e como os membros do clube desconheciam a sua existência, o problema era um problema difícil. A seguir foram estudados êsses corpos e finalmente esclareceram-se tôdas as curiosas relações que tinham sido postas em evidência.

O que é certo é que o estudante que fêz estes colóquios, e todos aquêles que o ouviram, ficaram conhecendo a existência de geometrias projectivas com um número finito de pontos assunto que é por certo desconhecido da maioria dos nossos licenciados e estudantes de matemática das escolas superiores. Mas quantos outros assuntos se poderiam ainda citar que foram tratados por estudantes nos clubes americanos e que seriam susceptíveis de interessar largas camadas de estudiosos portugueses: «o trabalho de um estatístico na indústria textil», «A matemática na engenharia mecânica», «A contribuição chinesa na matemática», «As geometrias não Euclideanas», «O problema das quatro côres», etc., etc.

Mas os clubes americanos têm outras formas de actividade destinadas a despertar o entusiasmo pelo estudo da matemática. Entre elas figuram as actividades destinadas a estabelecer uma emulação no trabalho entre os estudantes de matemática. Para isso estabelecem tôda uma série de prémios e de concursos. Prémios anuais concedidos aos sócios que apresentarem os melhores trabalhos nas sessões do clube realizadas em cada ano lectivo. Concursos entre estudantes com o mesmo grau de preparação (o Clube de Matemática do Brooklyn College por exemplo faz um concurso em cada semestre sôbre integração entre os alunos da cadeira de cálculo). Concursos inter-clubes para a disputa de taças e medalhas em que cada clube envia as suas équipes constituídas por 3, 4 ou 5 estudantes conforme os casos. Concursos de modelos de matemática (um dos modelos que apareceu num concurso foi o dum hipercubo num espaço a 4 dimensões visto em perspectiva num espaço a 3 dimensões) etc., etc.

Os clubes realizam no fim do ano uma festa (representação de uma peça com carácter matemático, pic-nic ou jantar) em que se faz um balanço da actividade realizada durante o ano, em que se fazem promessas de actividade para o ano seguinte e em que os professores distribuem os prémios aos estudantes que se distinguiram e cantam com os seus alunos a canção do clube!

Isto é possível com aquêles professores que quando se encontram diante de uma classe liceal que bocêja perante as suas lições sôbre a simetria das figuras, levam os alunos para o campo ou para os jardins para observarem nas árvores e nas flôres exemplos de simetria que os levam a visitar monumentos para observarem novos exemplos de simetria e que voltam à aula com uma classe galvanizada e que pensam com razão em face dos resultados obtidos que o tempo gasto nos passeios não foi tempo perdido, porque uma classe não é um vasadouro para despejar um programa!

Se o nosso ensino de matemática precisa de uma grande remodelação há uma coisa que é certo, precisamos de um ensino liceal menos catedrático e de um ensino universitário menos elementar.

A criação de clubes de matemática é susceptível de corrigir estas duas deficiências. Os estudantes e professores interessados têm o futuro nas suas próprias mãos.

Revistas

Nas revistas que vamos indicar encontra-se muito material para a actividade dos clubes, e em particular muitos artigos que podem servir de modêlo para colóquios a realizar nas reüniões dos clubes.

I) *The American Mathematical Monthly.* Jornal oficial da *Mathematical Association of America.* Dedicado especialmente ao ensino da matemática nos «Collegges» americanos. Contém muitos relatórios da actividade dos clubes. Fundado em 1894; em 1941 publicava-se o volume 49 desta revista. Cada volume contém actualmente cêrca de 700 páginas. A assinatura custa 6 ou 7 dolares. Na Biblioteca Geral da Fac. de Ciências do Porto existem os seguintes volumes: 17 (1910) a 19 (1912) incompletos; 20 (1913) a 22 (1915) completos; 23 (1916) incompleto. Conseguimos consultar esta revista em Lisboa, graças à amabilidade do Professor Pedro José da Cunha que nos facilitou a consulta dos exemplares que possui.

II) *The Mathematics Teacher.* (Official Journal of the National Council of Teachers of Mathematics) Editorial Office: 525, W. 120 th. Street, New York City. Assinatura: 2 dolares por ano. Dedicado ao ensino das matemáticas nas escolas elementares e secundárias. Só tenho conhecimento da existência em Portugal de um volume desta revista o volume 34 (1941), obtido por troca com a Portugaliae Mathematica e depositado no Gabinete de Matemática da F. C. L.

III) *Scripta Mathematica.* «A Quarterly Journal devoted to the Philosophy, History and Expository Treatment of Mathematics». Editado por: Yeshiva College. Amsterdam Ave. and 186 th. Street, New York, N. Y. Assinatura: 3 dolares por ano. Contém muitas curiosidades e problemas. Esta revista existe a partir do volume 5 (1938) no Gabinete de Matemática da F. C. L. (Serviço de trocas da Port. Math.).

IV) *National Mathematics Magazine.* (Os volumes 1-8 foram publicados com o título Mathematics News Letter). Editado por: Louisiana State University, Louisiana, U. S. A. Assinatura 2 dolares por ano. Publica trabalhos de aspecto cultural e humanista, de história das matemáticas, métodos de ensino das matemáticas, trabalhos de síntese etc. A partir do vol. 13 (1938-39) existe no Gabinete de Matemática da F. C. L. (Serviço de trocas da Por. Math.).

V) *School Science and Mathematics.* (A Journal for all Sciences and Mathematics Teachers). Editado em 450, Ahnaip St., Menasha, Wis. U. S. A. Assinatura 3 dolares por ano. Revista de carácter didático e pedagógico. O volume 35 (1935) existe no Gabinete de Matemática da F. C. L.

VI) *Sphinx.* (Revue Mensuelle des Questions Récréatives). Administração: 75 Rue Philippe — Baucq. Bruxelles. Belgica. Assinatura 10 belgas por ano. Revista única no género fundada e editada por M. Kraïtchik.

Livros para Clubes de Matemática

(Esta lista continua nos números seguintes da Gazeta)

1) *A. Bruneau — Initiation et curiosités mathématiques.* Ed. Fernand Nathan, Paris, 1939.

2) *E. Fourrey. — Curiosités Géometriques.* Ed.: Lib. Vuibert, Paris, 1938.

3) *E. Fourrey — Recréations Arithmétiques*. Ed.: Lib. Vuibert, Paris.

4) *M. Kraïtchik — La mathématique des jeux.* Ed. G. Villars, Paris, 1930, 576 pag.

5) *E. Lucas — Récréations Mathématiques*. Paris, 1ère édition 1882.

6) *W. W. Rouse Ball — Récréations et Problèmes mathématiques.* 3ème édition traduite par J. Fritz-Pratrick. Paris 1898.

7) *L. Hogben — Mathematics for the Million.* Ed.: George Allen, London; Norton, N. Y. 1936 674 pag., 2 dolares. Existe uma tradução francesa intitulada: *Les mathematiques pour tous.*

8) *E. T. Bell — The developpment of Mathematics.* Ed.: MacGraw — Hill Book Co, New York, 1940. 583 pag. 4 dolares 50.

9) *E. T. Bell — The Queen of the Sciences.* Ed.: Williams and Wilkins, Baltimore, 1931. 183 pag. 1 dolar.

10) *A. Dresden — An invitation to Mathematics.* Ed.: Henry Holt and Company. New York, 453 pag. 2,80 dolares. Um bom livro para programas sôbre os conceitos fundamentais da matemática.

11) *J. W. N. Sullivan. — Aspects of Science.* Ed.: Knoff, New York, 1926. Tem um capitulo sôbre a matemática e a arte e outro sôbre a matemática e a música.

12) *J. Bowden — Special Topics in Theoretical Arithmetic.* Ed: Garden City, New York, 1936, 217 pag. 2,50 dolares.

13) *S. I. Jones* – a) *Mathematical Clubs and Recreations.* b) *Mathematical Wrinkles* (A hand book for Teachers and Privat Learners). c) *Mathematical Nuts for Lovers of Mathematics.* Ed.: New York. Três bons livros para clubes, o primeiro dos quais consultámos para a redacção dêste artigo.

14) *A. Alliston — Mathematical Snack Bar. A collection of Notes and Results.* Ed.: Cambridge, U. S. A. 155 pag. Contém muitos resultados novos de geometria e teoria dos números.

15) *B. Russel — Introduction à la Philosophie Mathématique.*

16) *R. C. Archibald — Outline of the History of Mathematics.* 1932, U. S. A. 30 centimos.

Para informações mais completas veja-se: a) *A suggested list of mathematical books for junior college librairies.* Am. Math. Monthly, vol. 32, 1925, pag. 462-468. b) *Mathematics curriculum bibliography* por *Ana Stafford*. School Science and Mathematics, vol. 37, pag. 414-415.

Nota — Pedimos aos leitores da *Gazeta*, que escrevam para a Redação desta revista dando indicações sôbre livros susceptíveis de interessar a actividade dos Clubes de Matemática. Poder-se-á assim organizar ràpidamente, com a colaboração de todos, uma bibliografia que prestará preciosos serviços a tôdas as pessoas que se possam interessar pelos Clubes de Matemática.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

PROFESSORES ESTRANGEIROS EM LISBOA

por HUGO RIBEIRO (C. E. M. L.)

António Monteiro dizia-nos há pouco nesta mesma secção que estamos assistindo a uma verdadeira efervescência no nosso país no campo das ciências matemáticas. Um aspecto (e também uma conseqüência) dessa efervescência é o contacto que neste ano se tem oferecido aos nossos estudiosos com qualificados matemáticos estrangeiros — Maurice Fréchet, Guido Beck, Luigi Fantappiè e Luigi Sobrero. É ao Instituto para a Alta Cultura que devemos a iniciativa da visita do primeiro, e ao Instituto de Cultura Italiana em Portugal a do terceiro. De Fréchet e de Guido Beck já aqui nos ocupámos. Limitamo-nos agora a referir as conferências dos professores Fantappiè e Sobrero.

Luigi Fantappiè tem-se ocupado do estudo das funcionais analíticas que êle próprio introduziu. O conceito de funcional analítica é o de uma correspondência (como para as funções) em que o domínio do argumento é não já numérico mas constituído por um certo tipo de funções de variável complexa. A definição dêsse domínio foi escolhida de modo a fazer das funcionais analíticas um instrumento utilisável na Análise, sobretudo na integração de certos tipos importantes de equações às derivadas parciais. O professor Fantappiè realizou duas conferências sôbre êste assunto, referiu a aplicabilidade da sua teoria na mecânica quântica e tôda uma série de temas de trabalho.

Os seus resultados estão publicados na sua maioria em revistas italianas.

Numa outra conferência para um público não especializado disse-nos o professor Fantappiè como encarava o desenvolvimento histórico da Matemática em relação com o do princípio de causalidade na Física. Êle considera três grandes eras que mais ou menos se interpenetram: até ao Renascimento foram os números os objectos de estudo quando o princípio de causalidade se traduzia em Física pela preocupação de encontrar cadeias de causa e efeito; depois as relações entre os números, as funções, quando em Física é no conceito de lei natural que se molda o princípio de causalidade; finalmente, e nos nossos dias, um novo período se caracteriza pelo aparecimento contemporâneo do estudo das relações entre funções, as funcionais, e das modernas idéias sôbre a causalidade em Física. O paralelismo dos dois processos de desenvolvimento pede uma justificacão. ¿Não se deverá procurar a única explicação aceitável no facto de se tratar de dois aspectos dum processo único, o do desenvolvimento da sociedade e da técnica?

Luigi Fantappiè é actualmente professor de Análise no Instituto de Alta Matemática de Roma e esteve alguns anos no Brasil como professor da Universidade de S. Paulo para onde foi encarregado da organização dos estudos matemáticos.

Os trabalhos que Luigi Sobrero tem realizado e de que nos deu notícia numa conferência única (que só foi possível anunciar com um dia de antecedência) promovida pelo Centro de Estudos Matemáticos do I. A. C. e pelo Instituto de Cultura Italiana em Portugal, são de Teoria da Elasticidade. O professor Sobrero encontrou um tipo de álgebra hipercomplexa (a quatro unidades, comutativa) que permite interpretar com perfeição tôda uma série de fenómenos da elasticidade plana. Êste tipo de álgebra hipercomplexa aparece naturalmente partindo da equação fundamental da teoria da elasticidade plana (a equação $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=0$) e procurando resolvê-la como Lamb fêz para a equação biharmónica $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. Os estudos dêste tipo de álgebra foram prosseguidos sob vários aspectos em Itália e no Brasil onde aquêle professor deixou jovens discípulos que já obtiveram interessantes resultados. Na mesma conferência Sobrero fêz a descrição dum aparelho portátil de foto-elasticidade construído em colaboração com o professor de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, aparelho que servindo na maioria dos trabalhos de engenharia é acessível às bolsas dos engenheiros.

Luigi Sobrero esteve em curta passagem por Lisboa, vindo do Brasil onde se encontrava há três anos contratado para a Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade Federal (Rio de Janeiro). Formou-se e doutorou-se em engenharia em 1930 e em matemática no ano seguinte e foi encarregado dos cursos de Mecânica Racional em 1934 e de Física Matemática em 1935, na Universidade de Roma.

Estes dois professores realizaram as suas conferências em língua portuguesa. Queremos apontar aqui a reduzida freqüência, a estas e às anteriores conferências do professor Fréchet, da parte dos estudantes e sobretudo da parte dos professores e assistentes de Matemática das nossas escolas superiores.

O interesse que estas visitas de professores estrangeiros despertaram nos estudiosos não se confinou naturalmente às suas conferências mas, e sobretudo, às conversações por meio das quais se estabeleceram projectos de colaboração, se obtiveram preciosas informações do movimento matemático noutros países, se apreciaram o seu entusiasmo pelo estudo e muitas das suas qualidades de cientistas e de professores. As referências que aqui pudessemos fazer a estes aspectos seriam insuficientes para dar uma idéia da impressão que estas visitas deixaram em todos nós.

É interessante notar que o nome de Vito Volterra tenha estado quási sempre presente, que os assuntos das lições ou os professores que até nós vieram estejam, por um ou outro motivo, ligados a Volterra: A Análise Geral criada por Maurice Fréchet tem a sua origem na Análise funcional (Volterra) de que a teoria das funcionais analíticas é um novo capítulo. Fantappiè é um discípulo de Volterra e Luigi Sobrero ocupou já a sua cadeira de Física Matemática na Universidade de Roma.

CONGRESSO LUSO-ESPANHOL PARA O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS—PORTO 1942

No próximo número da «Gazeta» daremos uma notícia sôbre a actividade da secção de matemática do Congresso Luso-espanhol para o progresso das Ciências realizado no Pôrto em Junho de 1942.

ECONOMIA MATEMÁTICA CLÁSSICA

por A. SÁ DA COSTA e J. REMY FREIRE

É único objectivo desta curta nota a exposição resumida dos resultados do estudo e discussão da economia matemática clássica realizados no Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia do I. S. C. E. F.

a) Na primeira metade do século XIX o novo condicionamento técnico leva a prolongadas convulsões sociais e, conseqüentemente, à necessidade duma revisão das doutrinas económicas.

Surgem numerosas teorias e escolas económicas, entre as quais tem particular interêsse, pelas características do instrumento de que se socorre, a escola matemática. A sua constituïção pode localizar-se na segunda metade do século XIX.

b) A época em que surgem e as circunstâncias que rodeiam a realização dos trabalhos fundamentais de economia matemática, a actividade desenvolvida e a posição assumida no campo das doutrinas económicas pelos elementos mais representativos da escola matemática, explicam a intenção, nunca claramente formulada, mas sem dúvida implícita, de obter o favor duma confirmação, alcançada por via matemática, para determinada estrutura económica.

Por outro lado, há que reconhecer a existência de imperativos de outra ordem, para a aplicação do instrumento matemático à economia, resultantes do rendimento excepcional do uso dêsse instrumento noutros domínios e, sobretudo no da mecânica.

Mercê de intenção à margem da ciência (Pareto, entre outros) ou de visão errada do fenómeno económico, na determinação do isolado em que se baseia tôda a teoria são esquecidas, ignoradas ou eliminadas características fundamentais.

c) Não é só duma base insuficiente que a economia matemática clássica enferma. É tôda a construção que está em causa por duas ordens de razões: as que decorrem do desprêzo claramente expresso, das aplicações como indicadoras da proficuïdade e da eficiência da teoria; as que resultam da permanente e desconcertante assimilação do fenómeno económico ao mecânico e conseqüente maneira de usar a matemática.

d) Não poderá falar-se de inaptidão do instrumento matemático porque não foram esgotadas as suas possibilidades. A causa do insucesso da economia matemática clássica talvez se encontre na forma como foram estabelecidos os contactos entre o instrumento e o objecto, já o afirmou alguém.

e) A estacionaridade duma teoria que não logrou da realidade confirmação, não reteve a atenção de grande número de estudiosos e nem sequer alcançou, como teoria, progressos notáveis desde a sua constituïção, não legitimará uma mudança radical de orientação? E, não deverá ser determinada essa mudança pela exploração das possibilidades do instrumento e simultâneo estudo do objecto a afeiçoar?

É para êsse objectivo que convergem as atenções do Centro e desta atitude resultará o programa de trabalhos do ano próximo.

DIVULGAÇÃO MATEMÁTICA

por A. SÁ DA COSTA

O quinzenário cultural *Horizonte* inicia com o seu número 8 a publicação duma página subordinada ao título *Divulgação Matemática.*

Ocupam-na dois artigos. *Duas lições na Universidade do Pôrto* é o título do primeiro, da autoria de Alfredo Pereira Gomes e Luiz Neves Real que relatam as duas lições realizadas pelo prof. Bento de Jesus Caraça, a convite da Secção de Matemática da Faculdade de Ciências do Pôrto. O segundo artigo é de Mário de Alenquer e intitula-se *Caracterização analítica do conceito de infinito.* É de desejar uma revisão tipográfica mais cuidada.

Pelo conteúdo desta primeira página, parece ter-se operado notável viragem na orientação da parte matemática do *Horizonte* com o que a *Gazeta de Matemática* muito se regosija. É legítimo esperar que não voltarão a surgir nas suas colunas artigos de vulgarização matemática de tipo inferior do qual já nos deu algumas amostras perfeitas.

P E D A G O G I A

PORQUÊ?...

por J. SEBASTIÃO E SILVA

Há certos factos, relacionados directa ou indirectamente com o ensino das matemáticas, para os quais temos procurado inùtilmente uma explicação. Assim:

I — Porque é que, em compêndios de Filosofia, se continua a dizer que a Matemática é a ciência da «quantidade» e da «extensão», quando a verdade é que o objecto da Matemática se estende hoje para além das entidades estrictamente numéricas e geométricas? O cálculo proposicional, a álgebra dos conjuntos, a teoria geral das estruturas, a teoria dos grupos abstractos, e tantos outros ramos da Matemática moderna, estariam então condenados a ser excluídos do seio da Matemática?

II — Porque será que, no programa de Aritmética do 3.º ciclo liceal, não figura o estudo dos números relativos? Acaso os números negativos têm menos direito a ser tratados na Aritmética dos liceus, do que os números fraccionários? E, por outro lado, não se atende ao papel consideràvelmente simplificador que os números negativos desempenham em várias questões de Aritmética?

III — Porque não é ensinado nos liceus um processo elementar de construção duma tábua de logaritmos? [1] Pois não é verdade que, só dêste modo, o aluno pode adquirir uma noção exacta de logaritmo dum número, no caso (e êste é o que mais interessa) em que o logaritmo não é inteiro? E não é também verdade que se desfaz assim aquêle *mistério*, tão nocivo à formação mental do aluno, duma tábua cuja utilidade se conhece, mas que *não se sabe* como pode ser construída?

IV — Por que razão é que, no 7.º ano dos liceus, a vulgar equação de Diofanto é tratada na Álgebra e não na Aritmética? Não constitui porventura a equação de Diofanto um assunto nìtidamente integrado na teoria da divisibilidade, ìntimamente relacionado com as noções de m. d. c. e de congruência? Será proïbido pronunciar em Aritmética a palavra «equação»?...

V — Porque será que, em livros didácticos portugueses se faz ainda a euclideana distinção entre «postulados» e «axiomas», quando, já desde o século passado, ficou *definitivamente* estabelecido que tal separação é ilusória?

VI — Por que razão se insiste em fazer o ensino da lógica formal, segundo métodos anacrónicos, baseados na grosseira linguagem usual? Para quê, amontoar no cérebro do aluno têrmos arrevezados, receitas de almanaque, exemplos por vezes dum cómico irresistível — quando a Lógica matemática permite interpretar, analisar, criticar, todo o mecanismo do pensamento, dum modo bem mais preciso e mais potente? [2] Pois não é verdade que a Matemática é a ciência dedutiva por excelência — e que os matemáticos, voltando as costas aos modos e às figuras, aos juizos toto-totais e aos toto-parciais, aos epiqueremas e aos dilemas, resolveram fabricar, para uso próprio, a delicada aparelhagem do cálculo proposicional, tal como o tinha antevisto o génio de Leibniz? Então porquê, permanecer indiferente ao progresso, na eterna adoração dos gregos?

Porquê?!

Nota — Abrindo casualmente um compêndio de Filosofia, deparou-se-nos o seguinte exemplo pitoresco: — *«Se o juiz é justo, castiga o criminoso; ora êle não é justo, logo não castiga o criminoso»*. Aqui a culpa não deve ser dos gregos, nem dos escolásticos... O autor tomou por equivalência, o que não passa de implicação. Mas, então, de nada lhe valeram os modos e as figuras?

---

[1] Podíamos indicar um processo muito simples, consistindo em sucessivas extracções de raízes quadradas. Os cálculos não são muito trabalhosos desde que se disponha duma tábua de quadrados. Conviria que os alunos fizessem, pelo menos, o cálculo directo do logaritmo dum número dado, com 3 ou 4 decimais — óptimo pretexto, também, para ministrar noções concretas a respeito da aproximação nos cálculos numéricos.

[2] As frases do tipo «Todo o A é um B», tão simples na sua construção gramatical, apresentam no entanto uma estrutura lógica pouco elementar, se nos conformarmos com a interpretação adoptada nos compêndios de Filosofia: equivalem então ao produto lógico duma implicação por uma proposição de existência. É neste capricho de linguagem que se baseia aquela bizarra 3.ª figura do silogismo *(sub, sub)*.

NOTA

por BENTO CARAÇA

As *interrogações* do Dr. Sebastião e Silva constituem um depoïmento crítico interessante sôbre certas particularidades do novo ensino secundário.

Seria bom que o seu exemplo fôsse seguido por outros professores; a *Gazeta* está aberta a tôdas as opiniões e dará delas conhecimento ao público; a discussão à volta delas poderá vir a constituir elemento de algum valor para uma futura reforma, *absolutamente necessária*, do novo sistema de ensino.

Como comêço de discussão, devemos manifestar a nossa discordância da orientação mostrada pelo Dr. Sebastião e Silva na sua terceira interrogação. ¿Está porventura ao alcance dos alunos do Liceu o processo pelo qual *efectivamente* se construem as tábuas de logaritmos? Ainda que estivesse ¿que vantagem haveria em mostrar como se pode construir um instrumento que encontramos já construido no mercado? ¿Quantos são os alunos do liceu que mais tarde se ocuparão da *construção* de tábuas de logaritmos?

¿Não seria isso apenas perder um tempo que é precioso para ensinar coisas necessárias, como seja o manejo da règua de cálculo, e a que a técnica moderna dará dentro em pouco papel predominante na vida de todos os dias?

Vamos mesmo mais longe — duvidamos de que as tábuas de logaritmos, como instrumento de trabalho, conservem por muito tempo a soberania que tiveram. Em certos ramos de aplicação da Matemática à vida corrente, a tábua de logaritmos está hoje de largo ultrapassada pela máquina de calcular (nos cálculos actuariais, por exemplo).

Cada época cria e usa os seus instrumentos de trabalho conforme o que a técnica lhe permite; a técnica do século XX é muito diferente da do século XVI, quando os logaritmos apareceram como necessários para efectuar certos cálculos.

O ensino do Liceu que é, ou deve ser, ***para todos***, deve ser orientado no sèntido de proporcionar ***a todos*** o manejo do instrumento que a técnica nova permite.

ANTOLOGIA

OS LOGARÍTMOS

por D. J. STRUIK [1] (de «Concerning Mathematics»)

Os logarítmos foram criados no começo do século XVII. Nos séculos anteriores, só tinham sido precisas as operações matemáticas mais elementares para satisfazer as necessidades dum sistema económico simples: cálculo digital, ábaco, adição, subtracção, multiplicação e divisão de números inteiros e fraccionários simples.

Com o progresso do mercantilismo, os novos descobrimentos geográficos, o desenvolvimento da navegação marítima, o alargamento do mercado e o nascimento sub-seqüente dos estados modernos, tornou-se cada vez maior o interêsse pela matemática, astronomia, topografia e ciências náuticas. As operações matemáticas elementares revelavam-se cada vez mais insuficientes. Nos fins do século XVI, o cálculo tornara-se extremamente difícil. Muitos matemáticos notáveis apelavam para tôda a sua habilidade ao efectuarem, à custa de métodos antigos, multiplicações, divisões e extracções de raízes sôbre números grandes. *Kepler*, que teve de abrir caminho através de grandes massas de cálculos, para o seu trabalho sôbre astronomia, perdeu anos da sua vida com infindáveis estopadas numéricas.

Topógrafos, peritos navais e astrónomos, todos necessitavam urgentemente de métodos de cálculo convenientes. Esta falta fazia-se sentir especialmente nos países mais avançados, Inglaterra e Holanda, e também na Alemanha, Áustria e Itália.

Quando, em 1614, *John Napier*, um nobre escossez e inventor mecânico, construíu o primeiro sistema de logarítmos, os peritos calculadores aperceberam-se logo da sua utilidade. *Henri Briggs*, discípulo de *Napier* e professor em Londres e Oxford, inventou o seu sistema a partir dum critério prático, pela introdução dos logarítmos na base 10 e, logo a seguir, os topógrafos holandeses *De Decker* e *Vlacq* publicaram a primeira tábua completa de logarítmos (1626-27), seguida do ma-

[1] Associate professor of Mathematics at the Massachusets Institute of Technology.

nual de Navegação de *De Decker*, no qual êste calcula por logarítmos as soluções dos seus problemas (1631). *Kepler* pertenceu aos primeiros entusiastas e escreveu muitas páginas para promover o emprêgo da invenção de *Napier*.

. . . .

Mostram estes exemplos dum modo elementar a influência da estrutura social no progresso das matemáticas, como elemento do sistema das fôrças produtivas. Êles conduzem ao seguinte juizo: a estrutura económico-social exige um ramo de ciência e, portanto, êle surge.

Devemos vincar, contudo, o facto de que tal relação é simples em demasia para dar conta do progresso, da profundidade e do conteúdo de qualquer ciência.

Mesmo no nosso exemplo dos logarítmos observamos uma estrutura causal mais complicada: a necessidade de operar com números grandes conduz ao orgulho do trabalho humano, para o desenvolvimento duma técnica que descobre prazer no cálculo pelo cálculo, encarando problemas sem interêsse prático para atestar o poder do método.

Sem êste orgulho do trabalho humano, como o possuiam *Van Ceulen, Van Romen, Kepler, Napier, Briggs* ou *Vlacq*, jamais teriamos a prática invenção dos logarítmos.

E, uma vez os logarítmos inventados, êles conduziram a uma teoria dos limites, das exponenciais, dos indivisíveis, que vieram a ser os preliminares essenciais da criação da análise.

Nesta interacção da teoria e da prática, entre a necessidade social de obter resultados e o amor da ciência pela ciência, entre o trabalho no papel e o trabalho nos navios e nos campos, observamos um exemplo da dialéctica da realidade.

CIÊNCIA E PRINCÍPIOS

por ÉMILE BOREL (do Prefácio do «Traité du Calcul des Probabilités et ses Applications»)

Uma exposição de conjunto dum ramo da ciênciência deve preceder e não seguir o estudo filosófico dos princípios dessa ciência. O sábio é como o homem de acção; êste age como se o mundo exterior existisse e aquêle como se os princípios da ciência fôssem legítimos; uma vez as conquistas realizadas há sempre um economista, um historiador ou um mefafísico para justificá-las. Em todo o caso, o sábio está seguro de não ter transgredido, no seu amor pela acção, as leis da moral, mesmo se infrigiu as leis da lógica.

Mas, a crítica *a priori* é estéril tanto quanto a crítica *a posteriori* pode ser fecunda. Quando uma ciência provou a sua vitalidade pelos seus resultados, vale a pena voltar atraz e submeter a um exame escrupuloso os princípios que se admitiram sem discussão. Com efeito, assegurámo-nos então de que êste exame não pode desviar-nos a ponto de fazer-nos renunciar às conseqüências positivas e práticas que permanecem adquiridas em qualquer caso; qualquer que seja a opinião dos físicos ou dos metafísicos sôbre a realidade dos fluídos eléctricos, a electrificação das nossas linhas de caminhos de ferro não será retardada dum dia; anàlogamente, as discussões filosóficas sôbre as probabilidades não poderão actuar sôbre os cálculos dos actuários. Por outro lado, não é possível esquecer o exemplo famoso da geometria não euclideana: as investigações de Bolyai, de Lobatchevsky, de Riemann sôbre os princípios da Geometria, permitiram a Poincaré a descoberta das funções fuchsianas e forneceram a Einstein o suporte matemático indispensável à teoria da relatividade. Anàlogamente, o estudo abstracto dos princípios da aritmética não deixou de influir no desenvolvimento da teoria dos números transfinitos, teoria que facilitou o progresso da teoria dos conjuntos e da teoria das funções. Nestes vários casos o estudo dos princípios duma ciência teve como conseqüência a criação de novas ciências ou, pelo menos, o de novos capítulos nas ciências conexas; êste estudo, portanto, justifica-se aos olhos do próprio sábio, independentemente da contribuïção que possa trazer para a teoria do conhecimento que interessa ao filósofo.

SÔBRE ENSINO

por FEDERIGO ENRIQUES (de «Le Matematiche nella storia e nella cultura»)

A formação de professores de matemáticas à altura dos seus deveres didácticos requere, em geral, que a ciência lhes seja ensinada, não só do ponto de vista estático, mas também no seu devir. E, por isso, que o estudioso aprenda, atravez da história, a reflectir sôbre a génese das ideias e, por outro lado, participe no interêsse pela investigação.

Despertar o interêsse dos futuros professores pela investigação científica e mantê-lo vivo nestes é tanto mais difícil quanto é certo que os problemas de matemáticas superiores parecem, à primeira vista, inteiramente afastados do campo dos elementos, no qual terá lugar a actividade do professor da escola média.

Convém, portanto, mostrar a contribuição significativa que as matemáticas superiores dão, em muitos sentidos, à compreensão dos conceitos e à resolução dos problemas elementares.

Traduções de A. SÁ DA COSTA

PONTOS DO EXAME DE ADMISSÃO AO ESTÁGIO DO 8.º GRUPO NO LICEU NORMAL DE LISBOA

Ano lectivo de 1940-1941

Provas escritas: Álgebra e geometria analítica

Ponto n.º 1 — *a)* — Determine m de modo que as raízes do trinómio $(m+3)x^2-(m+1)x-(m+1)$ sejam inferiores a 1.

b) — Determine analìticamente o lugar geométrico dos pontos de onde se vê um segmento de recta sob um ângulo constante em grandeza.

Ponto n.º 4 — *a)* — O trinómio mx^2+px+q toma para $x=1$ e $x=2$ respectivamente os valores 2 e 1. Indique a que condições deve satisfazer o parâmetro m para que sejam reais as raízes do trinómio dado.

b) — Determine analìticamente o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de um ponto fixo O sôbre as rectas que passam por outro ponto fixo A.

Trigonometria e geometria sintética

a) — Determine uma relação entre as distâncias m, n e p dos vértices dum triângulo rectângulo ao centro da circunferência inscrita.

b) — Considere uma superfície esférica de raio r e um ponto S da superfície esférica de raio $(r+h)$ concêntrica com a anterior e uma superfície cónica de vértice S circunscrita à primeira superfície esférica. Determine a expressão da área total da superfície do cone de altura h limitado pela superfície cónica referida e pelo plano tangente à primeira superfície esférica.

História das matemáticas

Ponto n.º 1 — História e importância da descoberta da lei da atracção universal.

Física e Química

Ponto n.º 2 — O pêndulo e suas aplicações.

Prova oral de matemáticas superiores (ponto com 24 horas de antecedência)

Ponto n.º 1 — Eliminação; redução das cónicas de centro.

Ponto n.º 2 — Máximos e mínimos; centros das quádricas.

Ponto n.º 3 — Indeterminações; cálculo de volumes.

Ponto n.º 4 — Derivadas e diferenciais; curvatura, evoluta.

Ponto n.º 5 — Polinómios inteiros; focos e directrizes das cónicas.

Ponto n.º 6 — Sistemas de equações lineares; geratrizes rectilíneas das quádricas.

Ponto n.º 8 — Séries; classificação das quádricas e estudo da sua forma.

Pontos das provas escritas de matemáticas elementares dos exames do ano lectivo de 1941-1942.

Álgebra e geometria analítica

a) — Determine o parâmetro m de modo que as raízes da equação $(m-1)x^2-(4m-6)x+m+1=0$ estejam compreendidos entre 3 e -2.

b) — Determine o lugar geométrico dos centros das cónicas da família cuja equação é:

$$(4x-3y)(y-3)+m(x-3)(2y-3x)=0.$$

Trigonometria e geometria sintética

a) — Calcule a hipotenusa de um triângulo rectângulo conhecendo um cateto c e o ângulo α formado pela hipotenusa com a mediana relativa a êsse cateto. Determine as condições de possibilidade do problema.

b) — Considere um tetraedro regular $[ABCD]$ de aresta a; marque sôbre as arestas AC, AD, BC e BD respectivamente os comprimentos $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ e $\overline{BQ}$ tais que $\overline{AM}=\overline{AN}=\overline{BP}=\overline{BQ}=c$ sendo $0<c<a$.

1) Sabendo que as arestas opostas dum tetraedro são perpendiculares demonstre que o quadrilátero $[MNQP]$ é um rectângulo e calcule os seus lados em função de c e de a.

2) Determine em função de a e de c a área da superfície lateral do tronco de prisma triangular $[AMNBPQ]$.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1941)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 5

1013 — Resolver a inequação $(x+2)^3 > x^3-26$. R: *A inequação proposta é equivalente a* $3x^2+6x+$ $+17>0$, *inequação que é verificada para qualquer valor* x *pois as raízes do trinómio do primeiro membro são complexos.*

1014 — Qual é o número máximo de pontos em que se podem interseptar n rectas? R: $\binom{n}{2}=n(n-1)/2$.

1015 — Fazer a classificação das funções. Aplicar à função $y=2x^2+\sqrt{2}:(x-1)$. R: *A função é algébrica racional fraccionária.*

1016 — Calcular com a aproximação de $1'$ os valores de α que satisfazem à equação $\operatorname{sen}\alpha=$ $=\cos^2\beta(\operatorname{sen}2\beta)^{1/2}$ para $\beta=54^\circ 45'$. R: $\log\operatorname{sen}\alpha=$ $=2\log\cos 54^\circ 45'+\frac{1}{2}\log\operatorname{sen}70^\circ 30'=2\times\bar{1},76129+$ $+\frac{1}{2}\times\bar{1},97435=\bar{1},50975$ *donde* $\alpha=n.180^\circ+(-1)^n\times$ $\times[18^\circ 52']$.

1017 — O ângulo de duas tangentes tiradas de um ponto a uma circunferência é igual a $45^\circ 13'$ e a distância daquêle ponto ao centro desta é de 31,42 metros. Determinar o comprimento dos dois arcos em que é dividida a circunferência pelos pontos de tangência. R: *O raio da circunferência sendo um cateto do triângulo rectângulo cuja hipotenusa é a distância do ponto ao centro da circunferência e o outro cateto o segmento de tangente compreendido entre o ponto e a circunferência será* $r=31,42\operatorname{sen}\frac{45^\circ 13'}{2}$ *logo* $\log r=\log 31,42+$ $+\log\operatorname{sen}22^\circ 36' 30''=1,49721+\bar{1},58482=1,08203$ *donde* $r=12,18$ *e o perímetro da circunferência é então* $2\pi r=76,49$. *Como o outro ângulo agudo do triângulo rectângulo que mede* $67^\circ 23' 30''$ *é o ângulo ao centro do arco igual a metade de um dos arcos em que a circunferência é dividida pelos pontos de tangência, êsse arco terá o comprimento* $\frac{134,78}{180}\times\pi\times 12,18=28^m,61$ *e o outro arco será por isso igual a* $76,49-28,61=47,88$.

1018 — Construir um triângulo dada a base, a altura e o ângulo oposto àquela. Discutir as soluções possíveis. R: *Dado o segmento da base* AB, *o vértice oposto* C *estará sôbre uma paralela* t *a* AB *que diste desta duma distância igual à altura dada. Por outro lado, do vértice* C *deve-se ver o segmento* AB *sob o ângulo dado, isto quere dizer que o ponto* C *deve estar sôbre o segmento capaz do ângulo dado. Assim, conforme a recta* t *não cortar, fôr tangente ou cortar em dois pontos o arco de circunferência a que pertence* C, *assim haverá zero, uma ou duas soluções.*

1019 — Quantos produtos diferentes pode obter com cinco números primos entre si, não repetindo em nenhum produto o mesmo factor? Chegava à mesma conclusão se os números não fôssem primos entre si? R: *O número de produtos diferentes que se podem obter são* ${}^5C_5+{}^5C_4+C_3+{}^5C_2=$ $2^5-6=26$. *Se os números não fôssem primos entre si não se chegava à mesma conclusão, porque poderia haver produtos com factores diferentes e que não fôssem diferentes.*

Ponto n.º 4

1020 — Determinar os valores de m que tornam reais e do mesmo sinal as raízes da equação $mx^2+(m-1)x-3=0$. R: *Para que as raízes sejam reais é necessário e suficiente que* $(m-1)^2+12m\geq 0$, *ou* $m^2+10m+1\geq 0$, *desigualdade que é verificada para os valores* $x\geq -5+2\sqrt{6}$ *ou* $x\leq -5-2\sqrt{6}$. *Por outro lado para que as raízes sejam do mesmo sinal é necessário que* $-3/m<0$ *ou seja* $m<0$. *Logo os valores de* x *que satisfazem ao problema são dados por* $-5+2\sqrt{6}\leq x<0$ *e* $x<-5-2\sqrt{6}$.

1021 — Simplificar a expressão $\frac{(a^{1/2}b^{-3}c)^2}{\sqrt{a}\,b^{2/3}c^n}$. R: $a^{1/2}b^{-20/3}c^{2-n}$.

1022 — Determinar as soluções inteiras e positivas da equação $30x-21y-6=0$. R: *A equação proposta é equivalente a* $10x-7y=2$, *equação que admite a solução inteira* $x=-4$, $y=-6$; *as soluções inteiras da equação são então dadas pelas expressões* $x=-4+7m$ *e* $y=-6+10m$, *expressões que para os valores de* $m>3/5$ *dão as soluções inteiras e positivas pedidas.*

1023 — Os comprimentos do arco e do raio de um segmento de círculo são respectivamente iguais a 105,32 e 100,25 metros. Determinar a sua área. R: *O ângulo ao centro correspondente ao arco dado tem por medida como é obvio* $360^\circ\times$

$\times 105{,}32 : (2\pi \times 100{,}25) = 60^\circ\, 12'$. *A área do segmento é então dada por* $A = \frac{105{,}32 \times 100{,}25}{2} - 100{,}25^2 \operatorname{sen} 30^\circ\, 6' \cos 30^\circ\, 6' = 5279{,}16 - 4351{,}67 = 927{,}49\, m^2$.

1024 — Calcular por logaritmos até à aproximação de 1', os valores de α que satisfazem à equação $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen}^2 \beta : \sqrt{4 \cos \beta/2}$, para $\beta = 125^\circ\, 12'$. R: $\log \operatorname{tg} \alpha = 2 \log \operatorname{sen} 125^\circ\, 12' + 1/2 \operatorname{colog} \cos 62^\circ\, 36' + \operatorname{colog} 2 = 2 \times \bar{1}{,}91230 + 1/2 \times 0{,}33705 + \bar{1}{,}69897 = \bar{1}{,}69209$ *donde* $\alpha = 12^\circ\, 46' + n \cdot 180^\circ$ *sendo* n *um inteiro qualquer.*

1025 — Conhecendo o perímetro de um triângulo e o valor dos ângulos construir o triângulo. R: *Constroi-se um triângulo* A' B' C' *semelhante ao pedido* ABC, *pois se conhecem os ângulos. Como os lados do triângulo* ABC *são proporcionais aos do triângulo* A' B' C', *basta decompor o segmento representativo do perímetro dado em* 3 *segmentos proporcionais aos lados do triângulo* A' B' C'.

1026 — Determinar todos os factores do número 280. R: *Como* $280 = 2^3 \times 5 \times 7$, *teremos como divisores de* 280 *as parcelas do desenvolvimento de* $(1+2+4+8)(1+5)(1+7)$ *ou sejam os números* 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 20, 28, 35, 40, 56, 70, 140 *e* 280.

Soluções dos n.os 1015 a 1026 de J. Paulo.

I. S. C. E. F. — 10 de Outubro de 1941

1027 — *a)* Defina as funções trigonométricas e dê as suas propriedades e aplicações mais importantes.

b) Resolva o seguinte problema: determinar o maior e o menor valor que pode tomar a diferença $\operatorname{sen}^4 \theta - \cos^4 \theta$. R: $f(\theta) = \operatorname{sen}^4 \theta - \cos^4 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta = -\cos 2\theta$. *a) O maior valor de* $f(\theta)$ *é* 1 *que corresponde a* $\cos 2\theta = -1$ *ou* $\theta = k\pi \pm \pi/2$; *b) O menor valor de* $f(\theta)$ *é* -1 *que se obtêm quando fôr* $\cos 2\theta = +1$ *ou* $\theta = k\pi$ (k inteiro qualquer).

1028 — Determinar p e q de modo que o polinómio $x^3 + px + q$ seja divisível por $(x-1)^2$. R: *Efectuando a divisão obtêm-se o resto* $R(x) = (p+3)x + q - 2$ *que deverá ser identicamente nulo; portanto* $p+3=0$, $q-2=0$ *ou* $p=-3$, $q=2$.

1029 — Calcular $x = \sqrt{\frac{a}{b^3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{c^4}}$ onde $a = 3{,}4724$, $b = \operatorname{tg} 218^\circ\, 28'$, $c = (1{,}05)^{-2}$. R: *A expressão proposta pode escrever-se*: $x = a^{1/2} \cdot b^{-3/2} \cdot c^{-4/3}$ *ou substituindo valores* $x = (3{,}4724)^{1/2} \cdot (\operatorname{tg} 38^\circ\, 28')^{-3/2} \cdot (1{,}05)^{8/3}$. *Aplicando logaritmos*:

$$\log x = \begin{cases} 1/2 \log 3{,}4724 = 1/2 \cdot 0{,}540628 & = 0{,}27031 \\ +3/2 \operatorname{colog} \operatorname{tg} 38^\circ\, 28' = 3/2 \cdot 0{,}09991 & = 0{,}14987 \\ +8/3 \cdot \log 1{,}05 = 8/3 \cdot 0{,}02119 & = 0{,}05651 \end{cases}$$

$$\log x = 0{,}47669$$
$$x = 2{,}997.$$

1030 — Calcular o volume dum tronco de cone circunscrito a uma esfera conhecendo o raio r da esfera e a aresta l do tronco. R: *O volume dum tronco de cone de revolução de altura* h *e raios das bases* R_1 *e* R_2 *é dado por* 1) $V = \frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$. *No problema em questão, a altura* h *do tronco de cone é um diâmetro da esfera, logo* $h = 2r$. *Como se sabe, num trapézio circunscrito a uma circunferência, a soma das bases é igual à soma dos lados não paralelos, portanto* $R_1 + R_2 = l$. *Considerando* $R_1 > R_2$, *a aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo de hipotenusa* l *e de catetos* $(R_1 - R_2)$ *e* h, *conduz a* $(R_1 - R_2)^2 + h^2 = l^2$. *Portanto*: $R_1 - R_2 = \sqrt{l^2 - 4r^2}$, $R_1 + R_2 = l$, *sistema que admite a solução*: $R_1 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4r^2}}{2}$, $R_2 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4r^2}}{2}$. *Substituindo estes valores em* 1) *e simplificando virá*: $V = 2/3 \cdot \pi r (l^2 - r^2)$.

1031 — Das relações

$$x = r \cos\alpha \operatorname{sen}\beta, \quad y = r \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta, \quad z = r \cos\beta$$

tirar r, α, β em função de x, y, z. (Indicação: começar por quadrar e somar ordenadamente). R: *Quadrando e somando ordenadamente, virá*: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 [(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta] = r^2$ *ou* $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Dividindo a segunda relação pela primeira, obtêm-se*: $\operatorname{tg}\alpha = y/x$ *ou* $\alpha = \operatorname{arc\,tg} y/x$. *Da 3.ª relação deduz-se* $\cos\beta = \frac{z}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ *ou* $\beta = \operatorname{arc\,cos} \frac{z}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

1032 — Dividir o número 12 em três partes proporcionais a 1/2, 1/3, 1/4. R: *Reduzindo as fracções propostas ao menor denominador comum, tem-se*: 6/12, 4/12, 3/12. *Dividir-se-á portanto,* 12 *em partes directamente proporcionais aos números* 6, 4, 3, *isto é*: $12/13 = x/6 = y/4 = z/3$, *donde* $x = 72/13$, $y = 48/13$ *e* $z = 36/13$.

Soluções dos n.os 1027 a 1032 de O. Morbey Rodrigues.

Contêm pontos da prova de matemática dos *exames de aptidão* de anos lectivos anteriores todos os números da «*Gazeta de Matemática*».

MATEMÁTICAS GERAIS—ÁLGEBRA SUPERIOR—COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. C. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **Exame final, 1941**

1033 — Mostrar que todo o polinómio $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ se pode escrever com a forma

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0\cdots 0 & 0 \\ a_1 & x & -1\cdots 0 & 0 \\ \cdots \\ a_{n-1} & 0 & 0\cdots x & -1 \\ a_n & 0 & 0\cdots 0 & x \end{vmatrix}$$

R: *Desenvolvendo o determinante segundo os elementos da primeira linha vem*

$$f(x)=a_0\begin{vmatrix} x & -1 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & x & -1\cdots 0 & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 0 & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0\cdots 0 & 0 \\ a_2 & x & -1\cdots 0 & 0 \\ \cdots \\ a_n & 0 & 0\cdots 0 & x \end{vmatrix}$$

$f(x)=a_0x^n+\Delta_{n-1}$.

Desenvolvendo Δ_{n-1} *segundo os elementos da primeira linha vem* $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Delta_{n-2}$.

Procedendo para $\Delta_{n-2},\Delta_{n-3}\cdots\Delta_2$ *como para* Δ_{n-1} *vem* $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

1034 — Calcular o raio do círculo de convergência da série $1+5z+\frac{5^2}{2!}z+\cdots+\frac{5^n}{n!}z^n+\cdots$.

R: *Aplicando o critério d'Alembert, obtêm-se*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}z^{n+1}/(n+1)!}{5^nz^n/n!}\right|=|z|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=|z|\frac{1}{\infty}$$

logo o raio de círculo de convergência é ∞.

1035 — Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$.

R: *É sabido que* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$. *Então*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)(n+2)\cdots(2n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^{n+2}+6n^{n+1}+2n^n}{(n+1)^{n+2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{4}{e}.$$

1036 — Se a equação $f(x)=0$ de coeficientes inteiros tem uma raiz inteira e se a e b designam dois números inteiros quaisquer, mostrar que um, pelo menos, dos números inteiros $f(a)$, $f(a+1),\cdots f(a+b-1)$ é divisível por b. R: *Depreende-se do enunciado que a equação* $f(x)=0$ *é algébrica de coeficientes inteiros e admite uma raiz inteira* k. *Então* $f(x)=(x-k)f_1(x)$ *onde* $f_1(x)$ *é um polinómio inteiro em* x *de coeficientes inteiros. Façamos nesta igualdade,* $x=a,\ a-1,\cdots(a+b-1)$, *vem* $f(a)=(a-k)f_1(a)$, $f(a+1)=(a-k+1)f_2(a+1),\cdots$ $f(a+b-1)=(a-k+b-1)f_1(a+b-1)$. *Dos números inteiros consecutivos* $(a-k)$, $(a-k)+1,\cdots(a-k)+$ $+b-1$, *em números de* $|b|$, *um dêles é divisível por* b. *Logo, dos números* $f(a)$, $f(a+1),\cdots f(a+b-1)$ *um pelo menos é divisível por* b.

1037 — A que condições deve obedecer o ponto variável (α,β) para que a cónica $(\alpha-1)x^2+2\beta xy-(\alpha+1)y^2+2\alpha x+2\beta y-(\alpha+1)=0$ represente uma parábola. R: *A equação dada representa uma parábola se* $\beta^2+(\alpha+1)(\alpha-1)=0$ *ou* $\alpha^2+\beta^2=1$. *Por outras palavras, a cónica será uma parábola se no plano* $O\alpha\beta$ *o ponto* (α,β) *pertence à circunferência de centro na origem e de raio igual à unidade, será uma elipse se o ponto* (α,β) *é interior à circunferência e será uma hipérbole se o ponto é exterior à mesma circunferência.*

Qualquer que seja o género da cónica esta será degenerescente se se anular o invariante cúbico, ou, o que é o mesmo, se o ponto (α,β) *pertence à curva de equação*

$$\begin{vmatrix} \alpha-1 & \beta & \alpha \\ \beta & -\alpha-1 & \beta \\ \alpha & \beta & -\alpha-1 \end{vmatrix}=0\longrightarrow 2\alpha^3+2\beta^2\alpha+2\alpha^2+2\beta^2-\alpha-1=0$$

que é a recta $\alpha+1=0$ *se se trata duma parábola.*

1038 — Mostrar que as medianas de um triângulo são concorrentes. Encontrar o seu ponto de encontro. R: *Seja o triângulo* ABC. *Escolhamos para sistema de referência aquêle que é constituido por dois eixos ortogonais, contendo o eixo* xx' *o lado* AB *e pertencendo o vértice* C *ao eixo* yy'. *Sejam* a *e* b *as abscissas de* A *e* B *e seja* c *a ordenada de* C. *Então, as equações das medianas são* $2cx+(a+b)y=(a+b)c$, $cx+(2a-b)y=ac$, $cx+(2b-a)y=bc$. *Elas serão concorrentes se o sistema formado por estas equações fôr compatível ou, o que é o mesmo, se fôr nulo o característico*

$$\begin{vmatrix} 2c & a+b & (a+b)c \\ c & 2a-b & ac \\ c & 2b-a & bc \end{vmatrix}=0.$$

Esta condição é verificada, visto que a primeira linha do determinante é a soma das duas últimas.

O ponto de encontro, cujas coordenadas se obtêm pela resolução do sistema, é $(b-a)/3$, $c/3$.

Soluções dos n.os 1035 a 1038 de A. Sá da Costa.

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **Exames finais, 1941 — Alguns pontos.**

1039 — Determine as equações da recta que passa pelo ponto $P(0,2,-1)$ e pelo ponto do plano π em que é $x=2$, $y=1$. Calcule o ângulo que tal recta faz com o plano π. $\pi \equiv$ plano diametral da quádrica $x^2+4y^2-3z^2+3xy+4xz+2yz+$ $+3x-y+2z-6=0$ conjugado com Oz.

R: $r=\begin{cases} x=-2y+4 \\ z=-3y+5. \end{cases}$

1040 — Escreva a equação da cónica $2y^2-4xy+$ $+5x^2-2x+2y-1=0$ referida aos seus eixos e determine as coordenadas dos seus focos.

R: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3/2}=1$, $F(\pm\sqrt{15}/2, 0)$.

1041 — Deduza a equação do plano radical das esferas Σ_1, Σ_2 e verifique que a recta dos centros é perpendicular a êsse plano. Σ_1 é a esfera que passa pelos pontos $(0,1,0)$ $(-1,0,2)$, tal que a origem tem potência 3 em relação a Σ_1 e cujo centro pertence ao plano $x=2y$. A equação de Σ_2 é $x^2+y^2+z^2+4x+2y-2z-9=0$.
R: $\pi \equiv 6x+3y-z-6=0$.

1042 — Escreva na forma canónica a equação da parábola $y^2-2xy+x^2-5y-7x+3=0$, e verifique que, referida a êste sistema de eixos, o diâmetro conjugado de Oy é o eixo Oz.
R: $y^2=3\sqrt{2}\,.\,x$.

1043 — As rectas $x=0$, $y=0$, $2x-y-8=0$, $x+2y-16=0$ formam um quadrilátero inscriptível. Calcule as coordenadas do centro e o raio da circunferência circunscrita.
R: $\Sigma \equiv x^2+y^2-4x-8y=0$, $C(2,4)$, $r=\sqrt{10}$.

1044 — Deduza a equação do plano de feixe de sède em $r)\begin{cases} x=z \\ y=3 \end{cases}$ que corta a esfera x^2+y^2+ $+z^2-4x+2z-11=0$ segundo uma circunferência de raio 3. R: $x-z+\lambda(y-3)=0 \longrightarrow \lambda=\frac{9\pm\sqrt{91}}{2}$.

1045 — Determine as equações das tangentes tiradas do ponto $(7,1)$ para a circunferência que passa pelo ponto $(1,2)$ e forma com $\Sigma \equiv x^2+y^2-$ $-3x+y-2=0$ um sistema do eixo radical $e \equiv 3x-$ $-y-3=0$. R: $\Sigma_1 \equiv x^2+y^2=5$, $t_1 \equiv x-2y-5=0$, $t_2 \equiv 2x-11y-3=0$.

Nota — O problema do traçado de tangentes a uma circunferência por um ponto exterior a esta resolve-se fàcilmente considerando que uma tal tangente deverá passar por êsse ponto e a uma distância do centro da circunferência igual ao seu raio.

Soluções dos n.os 1039 a 1045 e nota do n.º 1045 de J. Pais Morais.

Contêm pontos de exames finais de *Álgebra Superior*, os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 4 e 7.

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **2.º exame de freqüência, 2 de Junho de 1942.**

1046 — Dada a função $y=x^2.I(x)+1$, representá-la gràficamente no intervalo $(0,3)$; indicar o contra-domínio correspondente, os pontos de descontinuïdade e os pontos em que não admite derivada; escrever a equação da tangente no ponto $x=3/2$. R: *Tem-se para* $0 \le x < 1 \to y=1$, $1 \le x < 2 \to y=x^2+1$, *e* $2 \le x < 3 \to y=2x^2+1$. *O gráfico pedido reduz-se pois a um segmento de recta e a 2 arcos de parábola. O contradominio é definido por* $y=1$, $2 \le y < 5$ *e* $9 \le y < 28$. *São pontos de descontinuïdade os de abscissa inteira. Nestes a função* y *não admite derivadas, podendo porêm definir-se uma semi-derivada à esquerda e à direita.*

Para $x=3/2$ *é* $y=I(3/2).(3/2)^2+1=9/4+1=13/4$ *e* $y'_{3/2}=2\,.\,3/2+1=4$; *a tangente tem pois por equa-equação* $Y-13/4=4(X-3/2)$.

1047 — Estudar a série de têrmo geral $u_n=\frac{2n}{3n^3+1}$, e no caso da convergência determinar um limite superior do êrro cometido tomando para valor aproximado da soma da série a soma dos 10 primeiros têrmos da série. R: *Tem-se* $u_n=\frac{2n}{3n^3+1}<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$ *e a série dada é portanto convergente. Para a série de têrmo geral* $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$, *majorante da dada, é fácil estabelecer um limite superior do resto, limite portanto do resto da série dada. Com efeito tomando os* 9 *primeiros têrmos duma série de Derichlet convergente* $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ *um limite superior é* $\frac{1}{q^{\alpha}}\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha}}}$. *No nosso caso é* $q=10$ $\alpha=1$.

1048 — Determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação em tôrno do eixo das ordenadas da curva de equações: $(y-1)^2+$ $+(z-3)^2-4=0$, $x=0$. Escrever as equações dos paralelos de menor raio e de maior ordenada. R: *A superfície pedida é um toro. A equação* *obtém-se pela substituïção na equação da geratriz (situada no plano* $x=0$*) de* z *por* $\sqrt{x^2+z^2}$*; vem:* $(y-1)^2+(\sqrt{x^2+z^2}-3)^2-4=0$, *ou* $(x^2+y^2+z^2-2y+6)^2-4(x^2+z^2)=0$. *O paralelo de menor raio é o gerado pelo ponto* $(0,1,1)$ *e tem por equações, por exemplo,* $y=1$, $x^2+z^2=1$; *o de maior ordenada é o gerado pelo ponto* $(0,3,3)$ *e tem por equações:* $y=3$, $x^2+z^2=9$.

Soluções dos n.os 1046 a 1048 de Manuel Zaluar.

I. S. A. — 2.º Exame de freqüência, 28-5-1942

1049 — Determine, pelo método de resolução das equações numéricas as raízes da equação $2x^3-x^2+2x-1=0$. R: *São os seguintes, os resultados da resolução numérica da equação dada. A equação não tem raizes inteiras porque os divisores do têrmo independente* ±1 *não satisfazem a equação proposta. A transformada da equação em* $y=2x$ *é* $y^3-y^2+4y-4=0$, *cujo têrmo independente admite como divisores* ±1, ±2, ±4. *Dêstes só poderá ser raiz da transformada* $+1$ *visto que um limite superior das raizes positivas é* 2 *(método de Bret) e a equação transformada em* $z=-y$ *é* $z^3+z^2+4z+4=0$, *cujo primeiro membro não tem variações. O divisor* $+1$ *é de facto raiz. A equação* $y^3-y^2+4y-4=0$ *desembaraçada da raiz* $+1$ *reduz-se a* $y^2+4=0$ *cujas raizes são* $\pm 2i$. *Portanto, as raizes da equação proposta são* $1/2, \pm i$.

1050 — *a)* Defina coordenadas cartezianas rectangulares e coordenadas esféricas de um ponto no espaço. Indique quais são os lugares geométricos das equações que se obtêm igualando a zero cada uma das seis coordenadas indicadas. *b)* Determine, pela aplicação do Teorema de Rouché, as posições relativas dos três planos $x-2y+3z-1=0$, $2x+3=0$, $4x-4y+3z-2=0$. R: *O sistema de equações lineares, constituído pelas equações dos três planos, é compatível e indeterminado de grau* 1, *visto que a matriz dos coeficientes e a dos coeficientes e dos têrmos independentes têm ambas característica* 2. *Portanto, os três planos formam feixe.*

1051 — Determine a equação do plano que passa pelo ponto $P(1,2,0)$ e é paralelo às rectas de equações $\begin{cases} x=z+1 \\ y=3z \end{cases}$ $\begin{cases} x-2z+1=0 \\ y+z-3=0. \end{cases}$ R: *Seja* $Ax+By+Cz+D=0$ *a equação do plano. A introdução das condições contidas no enunciado conduz ao sistema de equações lineares e homogéneas em* A, B, C, D $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A+2B+D=0 \\ A+3B+C=0 \\ 2A-B+C=0 \end{cases}$ *o qual admitirá soluções não nulas se fôr* $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$ *ou* $4x+y-7z+6=0$. *É esta a equação do plano.*

1052 — Figure os traços dum plano π oblíquo em relação aos dois planos de projecção e as projecções duma recta r também oblíqua em relação aos mesmos planos de projecção. Determine gràficamente o ângulo φ de r com π.

Contêm pontos de segundos exames de freqüência de *Matemáticas Gerais* e *Álgebra Superior* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 2, 6 e 10.

I. S. C. E. F. — Exame final, 17-7-1941

1053 — Fazer o estudo e o traçado da curva de equação $y^2-\operatorname{sen} 2x=0$. Verificar que as funções definidas por esta equação satisfazem à relação $y(xy'+y''')+3y'y''=0$. R: *A curva é simétrica em relação ao eixo* xx', *porque* $y=\pm\sqrt{\operatorname{sen} 2x}$. *A curva não tem pontos cujas abscissas pertençam aos intervalos abertos* $[k\pi, (2k+1)\pi/2]$ *onde* k *é um número inteiro positivo ou negativo. Também não tem pontos cujas ordenadas pertençam a qualquer dos intervalos abertos* $(-\infty,-1)$ *e* $(1,\infty)$. *Qualquer das funções definidas por* $y=\pm\sqrt{\operatorname{sen} 2x}$ *é periódica de período* π. *Em virtude da simetria e da periodicidade, o estudo e o traçado reduzem-se ao estudo e ao traçado da curva de equação* $y=+\sqrt{\operatorname{sen} x}$ *para* $0\le x\le \pi/2$. *Por serem*

$$y'=\cos 2x/\sqrt{\operatorname{sen} 2x}, \quad y''=-\frac{\operatorname{sen}^2 2x+1}{(\operatorname{sen} 2x)^{3/2}} \quad e$$

$$y'''=\frac{\cos 2x\,(3-\operatorname{sen}^2 2x)}{(\operatorname{sen} 2x)^{5/2}},$$

o ponto $(\pi/4, 1)$ *é de máximo para* y, *que é crescente no intervalo* $(0,\pi/4)$ *e decrescente no intervalo* $(\pi/4, \pi/2)$ *e a concavidade da curva está voltada no sentido dos* yy *negativos no intervalo* $(0,\pi/2)$.

1054 — Estudar no ponto $x=1$, a derivada da função $y(x)$ assim definida: $y(1)=0$, para $x\neq1 \to y=(x-1)/(1+e^{1/x-1})$. R: *A função é contínua no ponto* $x=1$ *porque* $y(1)=0$ *por definição e* $\lim\limits_{x\to1-0} y(x)=-0$ $\lim\limits_{x\to1+0} y(x)=+0$. *A derivada de* $y(x)$ *para* $x\neq1$ *é* $y'(x)=x-1/(1+e^{1/x-1})$ *e* $\lim\limits_{x\to1-0} y'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to1+0} y'(x)=1$. *Logo o ponto* $x=1$ *é de descontinuïdade finita de 1.ª espécie para a* *derivada* $y'(x)$ *e será um ponto anguloso para a curva de equação* $y=y(x)$. *Equações das tangentes no ponto* $x=1:y=0$ *e* $y=x-1$.

1055 — Determinar com um êrro inferior a $1/10$ as raízes da equação $P(x)\equiv x^4+3x-11=0$.
R: *A equação proposta não admite raízes inteiras porque dos três números* $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ *nenhum é divisível por* 3. *Não admite raízes racionais fraccionárias porque o coeficiente de* x^4 *é igual à unidade. Da aplicação do Teorema de Descartes decorre a afirmação de que a equação proposta admite uma raiz real positiva e outra real negativa. O limite superior das raízes positivas é* 3 *e o inferior das raízes negativas é* -3. *Para* $x=-3,-2,-1,0,1,2,3$, $P(x)$ *toma valores cujos sinais são, respectivamente,* $+---\;--++$. *Logo as raízes reais pertencem aos intervalos* $(-3,-2)$ *e* $(1,2)$. *O estudo dos sinais dos valores que* $P(x)$ *toma para* $x=-3;\,-2,9;\,-2,8;\,-2,7;\,-2,6;\,-2,5;\,-2,4;\,-2,3;\,-2,2;\,-2,1;\,-2$ *e para* $x=1;\,1,1;\,1,2;\,1,3;\,1,4;\,1,5;\,1,6;\,1,7;\,1,8;\,1,9;\,2$ *mostra que aquelas raízes pertencem aos intervalos* $(-2,1;\,-2)$ *e* $(1,5;\,1,6)$. *Os extremos dêstes intervalos são valores aproximados, por defeito e por excesso, das raízes reais da equação proposta, nas condições do enunciado.*

I. S. T. — Exame final

1056 — Sendo $x\,.\,y\,.\sqrt[x]{e}=1$, calcular os verdadeiros valores de y para $x=+0$ e $x=-0$.
R: *Tem-se* $y=1/x\,.\sqrt[x]{e}$. *Portanto* $\lim\limits_{x\to+0} y=$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{e^{1/x}}=\lim_{x\to+0}\frac{-1/x^2}{-1/x^2\,.\,e^{1/x}}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{e^{1/x}}=0$$

$$\lim_{x\to-0} y=-\lim_{x\to+0}\frac{e^{1/x}}{x}=-\infty\,.$$

1057 — Traçar a cónica $11x^2+84\,xy-24y^2=156$ e calcular a sua excentricidade.

1058 — Mostrar que a função $y=\dfrac{ax-11}{x+a-12}$ é sempre crescente, ou decrescente ou constante. Determinar os valores de a correspondentes a cada um dêsses três casos. R: *Tem-se* $y'=\dfrac{a^2-12a+11}{(x+a-12)^2}$. *Portanto, o sinal da derivada depende só do numerador. A discussão do trinómio* $a^2-12a+11$, *cujas raízes são* 1 *e* 11, *mostra que a derivada é nula para* $a=1,11$, *é positiva para* $a<1$ *ou* $a>11$ *e negativa para* $1<a<11$. *Logo a função é crescente se* $a<1$ *ou* $a>11$, *é decrescente se* $1<a<11$ *e é constante se* $a=1,11$.

1059 — Seja uma recta r e dois pontos P e Q que se projectam sôbre r em P' e Q' respectivamente. Seja $\overline{P'Q'}=c$, $\overline{PP'}=a$, $\overline{QQ'}=b$. Calcular o limite de $\overline{MP}-\overline{MQ}$ quando M, colocado em r, se afasta ao infinito num sentido ou noutro.

1060 — Sendo y uma função de x definida pela equação $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, mostrar que é $y''=1/3\,x^{-4/3}\,.\,y^{-1/3}$ sendo y'' a 2.ª derivada de y em ordem a x.

1061 — Dados os dois planos $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ e $(\gamma-\beta)x+(\alpha-\gamma)y+(\alpha-7\beta)z+4\alpha-8\beta-2\gamma=0$, determinar os coeficientes α,β,γ de modo que estes planos sejam paralelos. Achar-se-ão três soluções, os planos correspondentes, dois a dois paralelos formam um paralelipípedo. Achar o volume dêste paralelipípedo. R: *Os dois planos serão paralelos se*

$$\frac{\alpha}{\gamma-\beta}=\frac{\beta}{\alpha-\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha-7\beta}=\lambda \quad \textit{donde} \quad \begin{cases}\alpha+\lambda\beta-\lambda\gamma=0\\ \lambda\alpha-\beta-\lambda\gamma=0\\ \lambda\alpha-7\lambda\beta-\gamma=0\end{cases}$$

sistema homogéneo que admitirá soluções não nulas se

$$\begin{vmatrix}1 & \lambda & -\lambda\\ \lambda & -1 & -\lambda\\ \lambda & -7\lambda & -1\end{vmatrix}=0 \quad \textit{ou} \quad 6\lambda^3-7\lambda^2+1=0 \quad \textit{donde} \quad \lambda=-1/3\,,1/2\,,1\,.$$

Para cada um dos valores do parâmetro λ *o sistema fornece, por exemplo,*

$$\alpha=1,3,1 \quad \beta=-2,-1,0 \quad \gamma=-5,5,1$$

e as equações dos três pares de planos paralelos são

$$x-2y-5z=0 \quad 3x-y+5z=0 \quad x+z=0$$
$$x-2y-5z=10 \quad 3x-y+5z=-15 \quad x+z=-2\,.$$

Os pontos $(0,0,0)$, $(-15/13,-45/13,15/13)$, $(25/13,10/13,-25/13)$, $(-15/13,-20/13,-11/13)$ *são os vértices do paralelipípedo pertencentes a três arestas concorrentes em* $(0,0,0)$. *Então o volume do paralelipípedo é*

$$V=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & 1 & 13/15\\ 5 & 2 & -5 & 13/15\\ -15 & -20 & -11 & 13\end{vmatrix}\times\left(\frac{15}{13}\right)^2\cdot\frac{1}{13}=\frac{338\times15^2}{13^3}\,.$$

1062 — Calcular as raízes racionais da equação $3x^5-5x^4-11x^3+27x^2-20x-10=0$. R: *A equação admite uma única raiz racional* $-1/3$. *Das restantes raízes, uma é irracional negativa e as outras três ou são irracionais positivas ou duas são complexas e uma irracional positiva.*

Contêm pontos de exames finais de *Álgebra Superior*, os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 4 e 7.

I. S. T. — 2.os exames de freqüência — Alguns pontos

1063 — Achar a equação da esfera que é tangente ao plano xOy no ponto $(2,4,0)$ e passa pelo ponto $P(0,0,4)$. R: *A equação geral das* *esferas tangentes ao plano* xOy *no ponto* $(2,4,0)$ *é* $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-r)^2=r^2$ *onde* r *é o raio. Se a esfera passa pelo ponto* P $(0,0,4)$, *as coordenadas de* P *satisfarão à sua equação, isto é,* $4+16+(4-r)^2=r^2$ *donde* $r=9/2$ *e a equação da esfera é* $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-9/2)^2=81/4$.

1064 — Dado o ponto $A\,(2,4)$ e a recta $y=x-3$, determinar sôbre esta recta dois pontos B e C tais que o triângulo ABC seja rectângulo em A e isósceles. Fazer a representação gráfica. R: *Determinemos a intersecção da recta* $y=x-3$ *com a perpendicular baixada de* A *sôbre ela:*

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y-4=2-x \end{cases} \quad \begin{cases} x=9/2 \\ y=3/2 \, . \end{cases}$$

Calculemos a distância do ponto A *à recta* $y=x-3$:

$$|\,d\,|=\left|\frac{2-4-3}{\sqrt{1+1}}\right|=\frac{5}{\sqrt{2}} .$$

Os pontos B *e* C *são as intersecções da circunferência de centro em* $(9/2\,,3/2)$ *e raio igual a* $5/\sqrt{2}$, *com a recta dada, isto é:*

$$\begin{cases} y=x-3 \\ (x-9/2)^2+(y-3/2)^2=25/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \, . \end{cases}$$

1065 — Desenhar os lugares geométricos de equações a) $(x^2+y^2)^2=4$ b) $x^3-y^3=0$.
R: a) *A equaçao* $(x^2+y^2)^2=4$ *desdobra-se em duas das quais é o produto* $x^2+y^2=2$ *e* $x^2+y^2=-2$. *A primeira representa uma circunferência de centro na origem e de raio* $\sqrt{2}$; *a segunda uma circunferência de centro na origem e de raio* $\sqrt{2}i$. b) *A equação* $x^3-y^3=0$ *decompõe-se em duas* $x-y=0$, $x^2+xy+y^2=0$. *A primeira representa a bissectriz dos quadrantes impares; a segunda é uma cónica género elipse que degenera nas rectas conjugadas* $2x+(1\pm\sqrt{3}i)\,y=0$.

Contêm pontos de segundos exames de freqüência de *Álgebra Superior* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 2, 6 e 10.

Soluções dos n.os 1049 a 1065 de A. Sá da Costa.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — CÁLCULO — Exame final, Junho de 1941

1066 — Determinar as curvaturas principais das secções normais da superfície $x^3y^2+y^3+z^3-3y+1=0$ no ponto $(0,1,1)$.

1067 — Integrar a equação

$$y'-\frac{x^4+4x^2-1}{x\,(x^4-1)}\,y=\frac{x\,(x^2-1)}{(x^2+1)^2\,\text{arc tg}\,x} .$$

1068 — A linha (l) é representada pelas equações $\begin{cases} x=\varphi(\alpha) \\ y=\psi(\alpha) \end{cases}$ em que α é o ângulo que a tangente em M faz com ox. Escrever as expressões das coordenadas X e Y de um ponto P do plano situado sôbre a normal em M a uma distância $MP=a$ em que a é uma constante. Relacionar a diferencial dS do arco de curva (L), lugar dos pontos P, com ds; por integração relacionar os arcos $\overset{\frown}{P_0P}$ (P_0 ponto de (L) sôbre ox) e $\overset{\frown}{OM}$ supondo $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$; e calcular o comprimento do arco P_0P em função de α supondo que (l) é a cicloide: $x=r\,(t-\text{sen}\,t)$, $y=r\,(1-\cos t)$.

F. C. P. — CÁLCULO — 2.º exame de freqüência, Maio de 1941

Ponto n.º 2

1069 — Integrar a equação: $x^2y''+xy'+4y=32\cos(2\log x).\log x$. R: *Fazendo a mudança de variável independente* $x=e^t$ *vem*. $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=32t\cos 2t$ *ou* $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=32t=16t\,(e^{2it}+e^{-2it})$. *Integral geral da equação sem 2.º membro:* $y=C_1\,\text{sen}\,2t+C_2\cos 2t$. *Integrais particulares:*

$$y_1=16\,\frac{t}{(D+2i)^2+4}\cdot e^{2it}=\left(-2it^2+t+\frac{i}{4}\right)e^{2it} \; e$$

$$y_2=\left(2it^2+t-\frac{i}{4}\right)e^{-2it} . \quad \textit{Integral geral:}$$

$$y=C_1\,\text{sen}\,2t+C_2\cos 2t+4t^2\,\text{sen}\,2t+2t\cos 2t-\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t.$$

Integral geral da equação dada: $y=C_1\,\text{sen}\,2(\log x)+C_2\cos 2(\log x)+4(\log x)^2\,\text{sen}\,2(\log x)+2(\log x)\cos 2(\log x)-\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2(\log x)$.

1070 — Calcular $\iint_D \frac{dx\,dy}{xy}$. O domínio D situado no 1.º quadrante é limitado pelas linhas $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$; $y=x$ e $y=\sqrt{3}\,x$. R: *Calculemos o integral em coordenadas polares:*

$$y\iint \frac{2\rho\,d\rho\,d\theta}{\rho^2\,\text{sen}\,2\theta}=2\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{d\theta}{\text{sen}\,2\theta}\int_1^2\frac{d\rho}{\rho}=\frac{1}{2}\cdot\log 2\,.\log 3 .$$

1071 — Determinar as curvaturas principais da superfície $2xy+x^3-y^3+\log(z+1)=0$, no ponto $(0,0,0)$. R: *Cálculo de* p, q, r, s, t.

$$\begin{cases} 2y+3x^2+p\,\dfrac{1}{z+1}=0 \\ 2x-3y^2+q\,\dfrac{1}{z+1}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} p=0 \\ q=0 \, , \end{cases}$$

$$6x - \frac{p^2}{(z+1)^2} + \frac{r}{z+1} = 0\,, \quad 2 - \frac{pq}{(z+1)^2} + \frac{s}{z+1} = 0\,,$$

$$-6y + \frac{q^2}{(z+1)^2} + \frac{t}{z+1} = 0\,.$$ *No ponto* $(0,0,0)$ *temos:* $r=0$, $s=-2$, $t=0$. *Equação de condição:* $sm^2+(r-t)\,m-s=0$, $-2m^2+2=0 \therefore m=\pm 1$.

$$C_n = \frac{r+2sm+tm^2}{1+m^2} = \frac{-4m}{1+m^2}\cdot \quad C_1=-2\,,\ C_2=2\,.$$

1072 — Determinar a equação cartesiana da linha (L) tal que a distância de M ao centro da curvatura C_1 da evoluta seja igual ao quadrado do raio da curvatura de (L) em M.

As constantes de integração devem considerar-se nulas. R: *Equação de condição:* $\overline{C_1M}=R^2$. *Sendo* C *o centro de curvatura em* M, *tem-se:* $\overline{C_1M}^2=\overline{C_1C}^2+\overline{CM}^2$ *ou* $R^4=\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2+R^2$. *Integrado vem:* $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{R}=\alpha-\theta$, *donde* $R=\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}$. *Para* $\alpha=0$ *vem:* $R=-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$. *Mas* $R=\frac{ds}{d\theta}$.

$$\begin{cases} dx=\cos\theta\, ds=R\cos\theta\, d\theta \\ dy=\operatorname{sen}\theta\, ds=R\operatorname{sen}\theta\, d\theta\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx=-\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta \\ dy=-d\theta \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\log\operatorname{sen}\theta \\ y=-\theta\,. \end{cases}$$

Logo $x=-\log\operatorname{sen}(-y)$ *ou* $\operatorname{sen}(-y)=e^{-x}$ *ou* $\operatorname{sen}y+e^{-x}=0$.

Soluções dos números 1066 a 1072 de Jaime Rios de Sousa.

Contêm pontos de exames finais de *Cálculo Infinitesimal* e de *Análise Superior* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 4, 7, 8 e 9.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. L. — MECÂNICA — **2.º exame de freqüência, 1-II-1941**

1073 — Um ponto material, de massa unidade, está submetido à acção da fôrça: $\mathbf{F}=x(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$. Determinar o seu movimento nas seguintes condições iniciais: $P_0(0,0)$ $\mathbf{v}_0=2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$. Determinar o trabalho efectuado pelo campo, quando o ponto se desloca desde $P_0(0,0)$ a $P_1(3,3)$ no seu movimento. R:

1) $\quad x''=x\,,\quad y''=x\,.$

É então: $y''=x''$; *logo:*

2) $\quad y=x+C_1t+C_2\,.$

Da 1.ª equação 1) *vem:*

3) $\quad x''-x=0$

equação diferencial linear de coeficientes constantes, cujo integral geral é $x=C_3e^t+C_4e^{-t}$ *e atendendo a* 2) $y=C_3e^t+C_4e^{-t}+C_1t+C_2$. *Temos então:*

4) $$\begin{cases} x=C_3e^t+C_4e^{-t} \\ y=C_3e^t+C_4e^{-t}+C_1t+C_2 \end{cases}$$

e derivando

5) $$\begin{cases} x'=C_3e^t-C_4e^{-t} \\ y'=C_3e^t-C_4e^{-t}+C_1\,. \end{cases}$$

Como — condições iniciais — para $t=0$, *é:* $x=0$ $y=0$ $x'=2$ $y'=2$ *vem, introduzindo estes valores em* 4) *e* 5): $0=C_3+C_4$, $0=C_3+C_4+C_2$, $2=C_3-C_4$, $2=C_3-C_4+C_1$, *ou seja:* $C_3=1$, $C_4=-1$, $C_1=0$ *e* $C_2=0$. *O movimento do ponto, nas condições iniciais dadas, é* $x=e^t-e^{-t}$ $y=e^t-e^{-t}$ *e efectua-se ao longo da recta* $y=x$, *afastando-se o ponto indefinidamente para o lado direito desta.*

O campo de fôrças dado não deriva dum potencial, visto que: $\frac{\partial X}{\partial y}\neq\frac{\partial Y}{\partial x}$. *Para calcular o trabalho pedido temos então que integrar* $\mathbf{F}$. $dP=X\,dx+Y\,dy$ *ao longo da trajectória do ponto. Teremos*

$$\tau=\int_{\widehat{P_0P_1}} x\,dx+y\,dy$$ *e como* $y=x$ *ao longo dessa trajectória, tem-se:* $\tau=\int_0^3 2x\,dx=9\,.$

1074 — Uma área plana e homogénea, é constituída por um quadrado de lado $2a$, encimado por uma semi-elipse de semi-eixos a e b. Determinar b de modo que o centro de gravidade da área considerada esteja sôbre o lado do quadrado que é eixo da semi-elipse. R: *O centro de gravidade do quadrado encontra-se no centro dêste. Calculemos a posição do centro de gravidade da semi-elipse. Para referir esta posição, tomemos um sistema de 2 eixos ortogonais com origem no centro da elipse, e dirigidos segundo os eixos desta. As coordenadas do centro de gravidade da semi-elipse, serão* $\xi=0$ $\eta=\dfrac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}$ *onde*

$\iint dx\,dy=$ área da semi-elipse $=\pi ab/2$. *Tem-se*

$$\iint y\,dx\,dy=\int_{-a}^{+a}dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}y\,dy=\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{2ab^2}{3}$$ *e, portanto,* $\eta=\dfrac{2ab^2/3}{\pi ab/2}=\dfrac{4}{3}\dfrac{b}{\pi}$.

Tomemos agora um sistema de eixos paralelos aos anteriores, mas cuja origem se encontre no centro do quadrado, e chamemos : F à figura dada, F_1 ao quadrado *e* F_2 à semi-elipse.

Designemos ainda por A_k *a área de* F_k *e por* ξ_k *e* η_k, *respectivamente, a abcissa e ordenada — relativas aos novos eixos — de* F_k. *Temos :* $A_1=4a^2$ $A_2=\pi ab/2$ $A=A_1+A_2=a(4a+\pi b/2)$ $\xi_1=0$ $\eta_1=0$ $\xi_2=0$ $y_2=\frac{4}{3}\frac{b}{\pi}+a$. *De* $\xi_1=0$ $\xi_2=0$ *conclue-se que* η *virá dado por :* $A\eta=A_1\eta_1+A_2\eta_2$, *ou seja:* $\eta a\left(4a+\frac{\pi}{2}b\right)=\frac{\pi}{2}ab\left(\frac{4}{3}\frac{b}{\pi}+a\right)$. *Como deve ser* $\eta=a$, *tem-se :*

$$4a^3+\frac{\pi}{2}a^2b=\frac{2}{3}ab^2+\frac{\pi}{2}a^2b \quad ou \quad b=a\sqrt{6}\,.$$

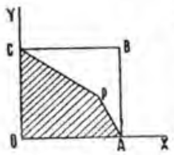
Soluções dos exercicios 1073 e 1074 de F. V. A. de Veiga de Oliveira.

Contêm pontos de segundos exames de freqüência de *Mecânica Racional* e *Física Matemática* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 2, 6 e 10.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. P. — Exame final, 14-10-1941

1075 — Um ponto P é lançado ao acaso no quadrado $OABC$ (10 cm de lado). Seja $P(x,y)$ a posição obtida, e σ a área do quadrilátero tracejado, obtido unindo P com A e C. σ pode exprimir-se em função de x e y.



a) Indicar o domínio certo N_σ. R: *a) Manifestamente é o intervalo* $(0, 100)$.

b) Calcular a probabilidade de ser $\sigma<20\ cm^2$. R: *b) De* $\sigma=5(x+y)<20$ *resulta* $x+y<4$. *P terá caido no triângulo limitado pelos eixos e pela recta* $x+y=4$, *de área* $1/2 . 4 . 4=8cm^2$ *e a probabilidade será* $p=0{,}08$.

c) O valor médio $M(\sigma)$. R: *c)* $M(\sigma)=5M(x)+5M(y)=10M(x)=50$, *pois* $M(x)=M(y)=5$ $(T_x=T_y=1/10)$.

d) A taxa T_σ. R: *d) Poderá calcular-se efectuando a mudança de variáveis definida pelas relações* $\begin{cases} x=x \\ \sigma=5(x+y)\end{cases}$. *Obtemos* $T_{x\sigma}=\frac{1}{500}$ *donde* $T_\sigma=\frac{Nx:\sigma}{500}$. *A taxa terá duas expressões analiticas:*

$$T_\sigma=\frac{\sigma}{2500} \; se \; 0\lesseqgtr\sigma\leq 50; \; T_\sigma=\frac{100-\sigma}{2500} \; se \; 50'\lesseqgtr\sigma\leq 100.$$

e) Verificar. R: *e) Por exemplo: utilisando* T_σ *efectuar os cálculos das alineas b) e c).*

Observ. — A notação é a de Van Deuren.

Solução do n.º 1075 de M. Gonçalves Miranda.

PROBLEMAS PROPOSTOS

A secção de problemas da «Gazeta de Matemática» só pode ser uma secção realmente viva na medida em que fôr feita pelos leitores. Por isso se pede a todos os leitores que proponham problemas, (acompanhados ou não de solução), que enviem soluções dos problemas propostos, e sobretudo que digam com tôda a franqueza aquilo que lhes agrada e aquilo que lhes não agrada.

A redacção receberá com tôda a atenção as sugestões que lhe forem feitas de alterações ou ampliações.

Temos a certeza de que muito há a esperar da boa vontade dos leitores, mas o certo é que até hoje, tendo a «Gazeta» centenas de leitores, apenas meia dúzia tem enviado problemas ou soluções. Na esperança de que o seu exemplo seja largamente seguido, publicamos aqui os seus nomes (pedindo desculpa de qualquer involuntária omissão):

Problemas — Um estudante de matemáticas (Pôrto); T. Ferreira Rato (Cabo Verde).

Soluções — José Arandes; Emídio de Oliveira; J. S. Faria de Abreu.

M. Alenquer

1076 — Num rectângulo $OAMB$ é $\overline{OA}=a$ e $\overline{OB}=b$. Por M faz-se passar uma recta que corta os prolongamentos de OA e OB, respectivamente, em P e Q. Sendo α o ângulo $O\widehat{P}Q$, mostrar que é:

$$\overline{PQ}=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2} \quad \text{quando fôr:} \quad tg^3\,\alpha=b/a\,.$$

1077 — Eliminar φ entre as equações

$$\begin{cases} x=3\cos\varphi+\cos 3\varphi \\ y=3\,sen\,\varphi-sen\,3\varphi\,. \end{cases}$$

1078 — Eliminar x entre as equações

$$\begin{cases} sen\,x+tg\,x=a \\ sen\,x \,.\, tg\,x=b\,. \end{cases}$$

1079 — Dados quatro pontos A, B, C, D de um plano, tais que o quadrilátero que os tem por vértices não seja inscritível (numa circunferência), traçar uma circunferência equidistante dêsses quatro pontos.

1080 — Determinar a hipotenusa de um triângulo rectângulo, conhecida a soma dos catectos e o comprimento da bissectriz do ângulo recto.

1081 — Mostrar que 2^{1000}, escrito no sistema decimal, termina em 76.

1082 — Mostrar que $1000!$, escrito no sistema decimal, termina em 249 zeros.

1083 — Mostrar que $1000!$ contém 1943 vezes o factor 2.

Problemas n.º 1076 a 1083 propostos por A. A. Ferreira de Macedo.

1084 — Um triângulo rectângulo tem lados cujas medidas são inteiros sem factor comum. Substituindo cada algarismo por uma letra, essas medidas são $SSWTVU$, $PTWTS$, $RRWWQ$. Calcule os lados e mostre que a solução é única.

(W. F. Cheney, *American Mathematical Monthly*, Nov. 1937)

1085 — Mostre que a soma dos quadrados das arestas dum tetraedro isósceles é igual a 4 vezes o quadrado do diâmetro da esfera circunscrita (um tetraedro é isósceles se as faces são congruentes).

J. Rosenbaum, *Am. Math. Monthly*, June-July 1937

1086 — Resolva a equação $x^7+7px^5+14p^2x^3+7p^3x+q=0$.

Vergil Claudian, *Am. Math. Monthly*, Mar. 1937

1087 — Demonstrar que o plano $x+y+z=0$ corta o cone $\frac{yz}{b-c}+\frac{zx}{c-a}+\frac{xy}{a-b}=0$ segundo 2 geratrizes que fazem o ângulo $\frac{\pi}{3}$. Mostrar que os parâmetros directores dessas geratrizes são $a-b, b-c, c-a$ e $c-a, a-b, b-c$.

Aubert et Papelier, *Ex. de Géom. Analytique*, III, p. 109

1088 — São dadas 2 circunferências C e C'. Uma tangente variável a C encontra C' em dois pontos M e N. Lugar do centro da circunferência passando por M, N e pelo centro do círculo C.

Comberousse, I, 105

1089 — O ortocentro dum triângulo circunscrito a uma parábola está sôbre a directriz.

Idem, I, 501

1090 — Achar os máximos e mínimos de $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Idem, 751

Problemas n.º 1084 a 1090 propostos por M. Alenquer.

Soluções recebidas

883 — *Seja* P *o perímetro constante dado; fazendo* r *o raio e* a *o comprimento do arco do sector, a área* S *é dada por* $S=\frac{ra}{2}$; *como* $P=2r+a$, $a=P-2r$, *substituindo em* S *vem* $S=\frac{r(P-2r)}{2}=\frac{Pr}{2}-r^2$ *donde* $\frac{dS}{dr}=\frac{P}{2}-2r$ *e* $\frac{d^2S}{dr^2}=-2$; *a condição* $\frac{dS}{dr}=0$ *conduz a* $r=\frac{P}{4}$ *que corresponde a um máximo, por ser* $\frac{d^2S}{dr^2}<0$.

Vê-se imediatamente da solução, que satisfaz ao problema o sector de abertura igual a 2 *radianos.*

887 — *Sejam* $\alpha^r, \beta^r, \gamma^r$ *os vectores unitários de* OA, OB, OC. *Tomemos um sistema cartesiano ortogonal* $Ox^1x^2x^3$ *em que* Ox^1x^2 *é o plano* OAB Ox^1 *coïncide com* OA *nesse sistema* g (*discriminante de forma métrica fundamental* ds^2) *é igual a* 1. *Seja agora um sistema* $O\mathbf{x}^1\mathbf{x}^2\mathbf{x}^3$ *em que* $\alpha^r, \beta^r, \gamma^r$ *são os vectores unitários fundamentais*

$$\begin{cases} \mathbf{x}^1=x^1 \\ \mathbf{x}^2=x^1\cos\gamma+x^2\operatorname{sen}\gamma \\ \mathbf{x}^3=x^1\cos\beta+x^2\cos\alpha\,.\operatorname{sen}\gamma+x^3\operatorname{sen}\varphi \end{cases} \quad \textit{donde}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2,\mathbf{x}^3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 0 \\ \cos\beta & \cos\alpha\operatorname{sen}\gamma & \operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix}=\operatorname{sen}\gamma\,.\operatorname{sen}\varphi$$

ou $$\mathbf{g}=g\left[\frac{\partial(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2,\mathbf{x}^3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)}\right]^2=\operatorname{sen}^2\gamma\,.\operatorname{sen}^2\varphi$$

por outro lado vê-se que os $\mathbf{g}_{ik}$ *são*

$$\mathbf{g}_{ik}=\begin{Bmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos a & 1 \end{Bmatrix} \quad \textit{donde}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}=\mathbf{g}=\operatorname{sen}^2\gamma\,.\operatorname{sen}^2\varphi.$$

Soluções dos n.os 883 e 887 de M. Alenquer.

1012 — *Sabemos que* $D(a_1a_2\cdots a_n)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\cdots\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$; *no nosso caso é* $a_n-a_1=(n-1)r$, *logo* $D=r.2r\cdots(n-1)r\cdots r\cdots(n-2)r\cdots\cdots r=(n-1)!\,r^{n-1}.(n-2)!\,r^{n-2}\cdots 3!\,r^3.2!\,r^2\,1!\,r=(n-1)!\,(n-2)!\cdots 3!\,2!\,1!\,r^{1+2+3+\cdots(n-1)}=(n-1)!\,(n-2)!\cdots 3!\,2!\,1!\,r^{\frac{(n-1)n}{2}}$, *c. q. p.*

Solução do n.º 1012 de Manuel C. Guerra dos Santos.

¿O QUE PENSA DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»?

UM INQUÉRITO AOS LEITORES

No número 10 da *Gazeta de Matemática* pediamos que nos comunicassem o que pensavam da revista e nos dissessem em que medida podiam nela colaborar.

Damos a seguir extractos de algumas respostas, cujo interêsse é desnecessário encarecer:

«*Parabens pelos melhoramentos introduzidos na* Gazeta. *As secções pedagógica e movimento matemático são muitíssimo úteis. Parece-me interessante publicar mais artigos sôbre a ligação da matemática com tôdas as outras actividades científicas e sociais e as suas aplicações aos problemas importantes e gerais das outras ciências, deixando os artigos de carácter mais restricto e técnico para segundo plano*».

Jorge Delgado Oliveira — Pôrto

«... *Consultámos vários colegas que manifestaram o desejo de que se publicassem alguns artigos sôbre a* História do Pensamento Matemático *e nêles se procurasse frisar, sempre que fôsse possível, a influência do meio social. Também houve quem mostrasse interêsse pela publicação de artigos sôbre os* métodos da matemática...».

Laureano Moreira da Cunha Barros
José Cardoso Morgado Júnior
Fernando Soares David — Pôrto

Êste grupo levou o seu interêsse pela *Gazeta* ao ponto de remeter-nos uma lista com 55 novos assinantes, estudantes da Faculdade de Ciências do Pôrto. Os nossos agradecimentos.

«*Há uma lacuna por preencher. A* Gazeta, *a nossa* Gazeta, *e deixem-me que lhe chame assim, também minha, porque a leio com tôda a simpatia e porque justamente por a apreciar assim falo, consagra-se excessivamente, parece-me, à transcrição de pontos de exame, desde o de aptidão aos de análise e de mecânica e de física matemática. Mas... estará essa publicação bem colocada aí? Não provirá dêsse facto a escassez de espaço para estudos de muito interêsse para nós? Talvez vocês não pensem em certo público que, um pouco mais abaixo do da* Portugaliae Mathematica *e mais acima da população estudantil que só procura* o que saíu *no exame, gostaria, e precisaria, duma revista de informação, de divulgação sui generis. Não haverá nesse público gente, digamos obscura, cujo trabalho embora extremamente modesto, mereça certo apoio que porventura os ajude a perseverar?*»

Lobo de Miranda — Sintra

As respostas recebidas, pelos alvitres e indicações que contêm, constituem um indicador precioso da orientação a imprimir à transformação que, de número para número, a *Gazeta* está a sofrer. Mais: os resultados já obtidos pela interferência dos leitores na vida da revista impelem-nos a iniciar um amplo inquérito.

É seu objectivo fundamental obter dos leitores a indicação dos defeitos, das falhas, das deficiências que a revista, como elemento de trabalho, ainda apresenta. Mas, não só a indicação sêca dos defeitos, a redacção pede mais — todos os alvitres serão acolhidos com simpatia, espírito de compreensão e, quando não pareça que devam ser adoptados, gratidão pela boa vontade que representam.

Em resumo: os resultados do inquérito que tem início agora dependem grandemente da sinceridade, da atenção, da boa vontade e da disposição de colaborar com que os leitores o considerarem. Quem diz resultados do inquérito, deve dizer futuro próximo da *Gazeta de Matemática.*

Questionário. Basta redigir e remeter as respostas com a indicação do número das preguntas a que correspondem, para *Gazeta de Matemática,* Faculdade de Ciências, Rua da Escola Politécnica, Lisboa.

1. ¿Quais são os defeitos que encontra na *Gazeta*?

2. ¿Como julga que êsses defeitos poderiam ser atenuados ou eliminados?

3. ¿Das actuais secções da *Gazeta,* qual é a que mais lhe interessa?

4. ¿Gostaria de ver criadas na *Gazeta* quaisquer outras secções? ¿Quais? ¿Com que orientação?

5. ¿Parece-lhe equilibrada a actual distribuïção do espaço pelas diferentes secções? ¿Que secções deveriam ser ampliadas?

6. ¿Será de adoptar o critério de que cada secção permanente deve apresentar como conteúdo normal um artigo de carácter didáctico, pontos de exames, resoluções dêstes?

7. ¿É de parecer que, além dos pontos de exames resolvidos, devem publicar-se também pontos de exames sem resoluções ou que o espaço destinado a estes deve ser consagrado a maior número daqueles?

8. ¿Porque não utiliza a secção de consultas da *Gazeta*?

9. ¿Porque não nos tem enviado resoluções dos problemas propostos?

10. ¿Está disposto a colaborar na *Gazeta*? ¿Como e em que medida poderá prestar colaboração?

A SITUACÃO FINANCEIRA DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

APÊLO AOS LEITORES

Ao apresentarmos, no N.º 10 da «Gazeta de Matemática», as contas que traduziam a situação financeira da revista dissemos: «Sem esperar pela consolidação da actual (1 de Abril de 1942) situação financeira, deliberou-se ampliar para 24 ou 32 páginas o texto da «Gazeta de Matemática».

Tal deliberação implicaria — já o previramos ao tomá-la — o aparecimento, dentro de curto prazo, dum problema agudo, cuja resolução só poderá conseguir-se com a colaboração activa dos actuais leitores da revista.

Eis o problema:

O custo duma tiragem de 800 exemplares dum número de 32 páginas é, aproximadamente de Esc. 2.600$00. A parte das despezas gerais (cobrança, propaganda, expediente, etc.) a imputar a cada número é cêrca de Esc. 500$00. A despeza total, portanto, orça por Esc. 3.100$00.

Para fazer face a tal despeza, dispomos de 800 exemplares, dos quais 100 se destinam a ofertas, propaganda e trocas. Neste momento, conseguimos uma receita efectiva de Esc. 2.200$00, aproximadamente, pela venda a assinantes e avulso de pouco mais de 500 exemplares. Se conseguíssemos vender todos os 700 exemplares disponíveis, obteriamos uma receita que escassamente igualaria a despeza.

Quatro vias se nos oferecem para sair desta situação:

1.ª *Redução de despezas.* É pouco viável nas circunstâncias actuais.

2.ª *Redução do número de páginas.* Não é de seguir porque impede a realização do nosso plano de progresso da «Gazeta» e proïbe-nos de atender as sugestões dos leitores.

3.ª *Aumento de preço.* Não enveredamos por êle, porque reconhecemos que a maioria dos nossos estudantes suporta já com dificuldade o encargo anual de Esc. 18$00, preço actual da assinatura da *Gazeta.*

4.ª *Aumento de tiragem.* É êste o caminho que nos dispomos a seguir. Mas, para que esta decisão represente, efectivamente, a resolução do problema posto, é indispensável obter um aumento notável do número de assinantes e da venda avulsa da «Gazeta de Matemática».

¿ Como alcançar êste objectivo ?

Da parte da *Gazeta*, por constante melhoramento do seu texto e novas campanhas de propaganda.

Da parte dos leitores — nisto consiste o nosso apêlo — por permanente auxílio nas campanhas de propaganda e angariação de novos assinantes.

Esta tarefa poderá parecer facilitada, uma vez que se analise o movimento de assinantes da «Gazeta» nos últimos meses e se reconheça, no seu rápido crescimento, o facto de que a revista corresponde a uma necessidade.

Transcrevem-se a seguir os elementos que servem de base a êste apêlo.

CONTA DO N.º 10 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Receita		*Despeza*	
Receita da venda avulso e por assinatura de 518 números	2.228$25	Composição, impressão, papel e brochura	2.592$50
Existência de 235 números ao preço do custo	761$40	Sua quota nas despezas gerais realizadas até 30 de Junho de 1942	494$80
30-VI-1942, *Deficit*	97$65		
	3.087$30		3.087$30

CONTA DE RECEITA E DESPEZA

1942	Receita da venda avulso e por assinatura dos N.os 1 a 13	9.526$45	1942	*Deficit em 1941*	1.072$70
				Composição, impressão, papel e brochura do N.º 9	1.410$00
				Idem, idem do N.º 10	2.592$50
				Despezas de expedição, cobrança, propaganda, etc.	1.979$10
				Junho, 30 — *Saldo*	2.472$15
		9.526$45			9.526$45

1942 Julho, 1 — *Saldo* 2.472$15

A. S. C. e O. M. R.

DISTRIBUIÇÃO GEOGRÁFICA DOS ASSINANTES DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Localidades	Na data da publicação do N.º 10	Na data da publicação do N.º 11
Agueda	1	—
Alhandra	1	1
Amadora	1	2
Aveiro	—	1
Beja	—	1
Bombarral	1	1
Braga	1	2
Campanhã	—	1
Caramulo	1	1
Carcavelos	1	1
Cascais	1	1
Castelo Branco	1	2
Cete	—	1
Chaves	1	1
Coimbra	8	8
Crato	—	1
Cruz Quebrada	1	1
Ermezinde	—	1
Évora	—	1
Fafe	—	1
Famalicão	—	1
Figueira da Foz	2	2
Gaia	2	4
Leiria	3	3
Lisboa	192	270
Mangualde	—	1
Mont'Estoril	—	1
Moscavide	—	2
Paço d'Arcos	1	1
Parede	1	2
Ponte da Barca	—	1
Portalegre	1	1
Pôrto	14	75
Póvoa	—	1
Queluz	2	2
Ribeira de Santarém	1	1
Sangalhos	1	—
Santarém	3	5
Sintra	1	1
S. João do Estoril	—	1
Trofa	2	2
Urros	—	1
Vendas Novas	1	1
Viana do Castelo	—	1
Vila Franca de Xira	1	2
Totais	248	408

Rectificações

952 — O enunciado do problema publicado sob êste número no n.º 10 saíu truncado, deve ler-se: «Deduza a equação da perpendicular baixada do centro da circunferência $\Sigma \equiv 2(x^2+y^2)-3x-2y-3=0$ sôbre a recta $r \equiv x+2y-3=0$ e calcule a área do triângulo definido pelos pontos de intersecção da recta r com a circunferência e pelo centro desta».

987 — Na ante-penúltima linha da resolução dêste problema, publicado no n.º 10, onde está *e* deve ler-se *ou*.

989 — No cálculo do integral

$$I=\iint_A \left(\frac{(4-\sqrt{X^2+Z^2})^3}{\sqrt{X^2+Z^2}}\right)^{1/2} dX\,dZ$$

cometeu-se um êrro. Devem substituir as três últimas linhas da resolução por: *Em coordenadas polares escreve-se*

$$\mathrm{I}=\int_0^4 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^{1/2}(4-\rho)^{3/2} d\theta = 2\pi \int_0^4 \rho^{1/2}(4-\rho)^{3/2} d\rho = \frac{\pi}{4}\,.$$

A. S. C.

Referências

A *Gazeta de Matemática* agradece muito reconhecida as referências feitas por: *Diário de Lisboa, Diário de Notícias, Jornal do Comércio e das Colónias, Diário da Manhã, O Século, Jornal de Notícias, Primeiro de Janeiro* e *Horizonte*.

Publicações periódicas

Agros — Boletim dos estudantes de Agronomia. Ano 25, n.os 1-2, Janeiro-Abril.

Boletin Matematico — (Buenos Aires). Revista argentina de Matemática, Ano XIV, n.os 15 a 18.

Horizonte — Quinzenário cultural. Ano 1 — N.os 5 a 9.

Técnica — Revista de engenharia dos alunos do I. S. T., n.º 128 (Abril de 1942), n.º 129 (Maio de 1942) e n.º 130 (Junho de 1942). Êste último número contém, sob o título «*A Matemática e a Técnica*», a tradução portuguesa do relatório publicado por Thornton C. Fry, director do Laboratório de Pesquizas dos Telefones Bell.

Compram-se números atrazados da «Gazeta de Matemática»

A Administração da «Gazeta de Matemática» compra, ao preço de capa, exemplares em bom estado dos números abaixo designados, até às quantidades indicadas.

N.º 1 até 77	N.º 5 até 14
N.º 2 até 31	N.º 9 até 35

ÚLTIMAS NOTÍCIAS

O PRIMEIRO CLUBE PORTUGUÊS DE MATEMÁTICA!

A ideia da fundação em Portugal de clubes de matemática tem sido muito debatida nos últimos tempos, em particular, a partir da fundação da Sociedade Portuguesa de Matemática. A Comissão Pedagógica desta Sociedade, no seu plano de trabalhos de 26 de Junho de 1941, chamou a atenção para o problema (veja-se o n.º 8 da «*Gazeta*», pág. 10). Mas, até há pouco, a criação de clubes de matemática não passava dum desejo. A *Gazeta de Matemática* tem acompanhado atentamente a evolução dêsse problema, como a de todos aqueles que interessam directamente aos estudantes de matemática das nossas escolas, e resolveu iniciar no presente número, com o artigo «Clubes de Matemática» de António Monteiro, uma campanha com o objectivo de promover a fundação de clubes de matemática nas nossas escolas. A necessidade e a oportunidade da criação dêsses clubes é tão grande que um certo número de estudantes, tendo tomado conhecimento do início desta campanha deliberou enveredar pelas realizações.

Podemos anunciar, desde já, aos nossos leitores que os estudantes da Faculdade de Letras de Lisboa — talvez a escola em que mais se fazia sentir a falta dum clube de matemática — fundaram no dia 7 de Julho o primeiro clube de matemática português!

Por iniciativa de um outro grupo de estudantes deve fundar-se em 13 de Julho o clube de matemática do Instituto Superior de Agronomia!

A *Gazeta* acompanhará com todo o carinho êste movimento e coloca as suas colunas à inteira disposição dos actuais e dos futuros clubes de matemática.

A seguir transcrevemos a resolução tomada no acto da fundação do *Clube de Matemática da Faculdade de Letras de Lisboa:*

Um grupo de estudantes da Faculdade de Letras de Lisboa, tendo reconhecido numa reünião realizada no dia 7 de Julho de 1942, a necessidade de promover o desenvolvimento dos estudos de Matemática entre os estudantes desta Faculdade, resolveu, depois de autorizados pelo Dr. Oliveira Guimarães, director desta faculdade, fundar um clube de Matemática que tem o nome de *Clube de Matemática da Faculdade de Letras de Lisboa,* e procurar realizar no próximo ano lectivo o seguinte programa de trabalhos:

I

1) Resolução e discussão de problemas sôbre a matéria das cadeiras de Psicologia Experimental e Escolar, de Pedagogia, de Lógica em que intervenham conhecimentos de Matemática. 2) Alargamento da preparação Matemática dos estudantes da Faculdade de Letras com o objectivo de poderem abordar com maior facilidade o estudo dos capítulos da Filosofia, da Lógica, da História, da Ciência, da Psicologia e da Pedagogia em que a Matemática desempenha um papel importante.

II

Palestras realizadas por estudantes ou professores desta ou de outra faculdade, sôbre História e Filosofia da Matemática. *a*) relações entre a Matemática e outras ciências (a técnica, a biologia, a física, a química, a psicologia, a medicina, a pedagogia, etc.), organização racional do trabalho, etc. *b*) biografias de matemáticos ilustres. *c*) curiosidades matemáticas.

Formas de trabalho — 1) Discussão preparada prévia e individualmente sôbre assuntos gerais mais directamente ligados ao programa. 2) Pequenas comunicações sôbre leituras feitas individualmente sôbre assuntos relativos à alínea anterior. 3) Leitura e comentário crítico de algumas obras de interêsse. 4) Nótulas expositivas e críticas sôbre conferências de interêsse.

III

Relações exteriores — 1) Colaboração com a revista «Gazeta de Matemática». *a*) organização de bibliografias. *b*) fornecimento de problemas de Lógica e Estatística. *c*) publicação de comunicações julgadas de interêsse e notícia da actividade do clube. 2) Colaboração com outros clubes. *a*) organização coordenada das bibliotecas dos respectivos clubes. *b*) trabalhos estatísticos originais realizados em comum.

A iniciativa da fundação dêste clube pertenceu aos estudantes: Cândida Ventura, Joel Serrão, Rui Grácio e Jorge de Macedo, que redigiram a resolução anterior e a apresentaram numa reünião realizada no dia 8, para a qual foram convocados os estudantes da Faculdade de Letras. A resolução foi aprovada por unanimidade, tendo-se inscritos como sócios todos os estudantes presentes: Maria Gabriela Rosa, Maria Margarida Pereira Bastos, Maria Margarida Brandão, Olinda Fernandes, Fernando Bandeira Ferreira, Fernando Santos, Francisco Janeiro, Joaquim Barradas de Carvalho, Joaquim Maia de Jesus, José Gentil e Rui Telmo Dias. Também por unanimidade foi fixada a quota mensal de Esc. 1$50 para a aquisição de livros destinados à biblioteca do clube.

A *Gazeta de Matemática* felicita vivamente os estudantes da Faculdade de Letras de Lisboa por esta realização.

COLABORADORES

António Monteiro, A. de Mira Fernandes, A. Quintanilha, A. Sá da Costa, Bento Caraça, Hugo Ribeiro, Jaime Rios de Sousa, José Sebastião e Silva, José Silva Paulo, W. L. Stevens, Manuel Valadares, Manuel Zaluar, Ruy Luís Gomes

CEDERAM PONTOS OU RESOLUÇÕES

A. A. Ferreira de Macedo, A. Cortesão Pais, A. de Mira Fernandes, A. Sá da Costa, Bento Caraça, F. V. A. de Veiga de Oliveira, G. Ramos de Castro, Hugo Ribeiro, J. Rios de Sousa, J. F. Ramos e Costa, J. Vicente Gonçalves, J. Calado, J. César Oom, J. Pais Morais, M. Esparteiro, M. Gonçalves Miranda, Madureira e Sousa, Maria do Pilar Ribeiro, M. Zaluar, O. Morbey Rodrigues, Pinto de Almeida, R. Sarmento Beires, Vítor Hugo de Lemos, Virgílio Barroso

A PUBLICAR NOS PRÓXIMOS NÚMEROS

«H. Lebesgue» — J. Vicente Gonçalves. «Jean Perrin» — Manuel Valadares. «Uma maneira de encarar o sistema de projecções de Monge» — Luís Passos. «A construção de tábuas logarítmicas e o ensino liceal» — J. Sebastião e Silva

COLABORARAM GRAFICAMENTE NESTE NÚMERO

José Soares Vieira que desenhou os retratos de Galileo e Newton, Ruben Soares, A. Amadeu Domingues e António Teixeira, compositores e Joaquim de J. Fidalgo, impressor

GAZETA DE MATEMÁTICA

A «Gazeta de Matemática» publica quatro números por ano, em Janeiro, Abril, Julho e Outubro. Cada número terá um mínimo de 16 páginas e o preço de Esc. 5$00.

Pontos de Exame. Uma das secções permanentes da «Gazeta de Matemática» é constituida pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exame de freqüência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuïção normal dêstes pontos, pelos diferentes números da «Gazeta de Matemática» é a seguinte: número de Janeiro — pontos do 1.º exame de freqüência; número de Abril — pontos do 2.º exame de freqüência; número de Julho — pontos de exames de aptidão e finais; número de Outubro — pontos de exames de aptidão e finais. Como já está dito, esta é a distribuïção normal dos referidos pontos, por conseqüência, cada um dêstes números poderá publicar e publicará, em geral, outros pontos além dos indicados.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da «Gazeta de Matemática» aceita assinaturas de quatro números, ao preço de Esc. 18$00, para o que bastará dar a indicação do nome, morada, local da cobrança e do número em que deve ter início. A assinatura será renovada automàticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário. Para simplificar o trabalho de cobrança, tôdas as assinaturas serão acertadas de modo tal que passem a ter início com o número de Janeiro de cada ano, pelo que, a primeira cobrança, das assinaturas com início em qualquer outro número, será de Esc. 4$50, Esc. 9$00 ou Esc. 13$50, correspondendo a 1, 2 ou 3 números.

Números atrasados. Em virtude da sua reduzida existência reservam-se aos compradores das colecções os seguintes N.os 1, 2, 4, 5 e 9. Os restantes são ainda vendidos avulsamente ao preço de capa N.º 3 Esc. 6$50, N.º 6 Esc. 4$00, N.º 7 Esc. 6$00, N.º 8 Esc. 4$00, N.º 10 Esc. 5$00.

Colecções completas. Anualmente a administração da «Gazeta de Matemática» porá à venda um número reduzido de colecções completas da sua pequena reserva. Assim, para serem vendidas até Dezembro de 1942, dispõe-se de dez colecções completas. Só em Janeiro de 1943 e até Dezembro de 1943 um novo grupo de colecções ficará à disposição dos interessados. Preço: cada colecção dos N.os 1 a 10 Esc. 50$00.

Inscreva-se desde já como assinante da «Gazeta de Matemática»; assim, concorrerá para o futuro melhoramento da revista, que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial.