GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXX N.º 113-116 JANEIRO-DEZ. 1969

SUMÁRIO

Linguagens elementares e estruturas matemáticas
por *Hugo Ribeiro*

Endomorfismos directos de grupos
por *José Morgado*

A single axiom for equivalence relations
by *José Morgado*

Outra definição de semigrupo regular à direita e à esquerda
por *José Morgado*

Topological Semigroups
by *John B. Pan, S. J.*

O «paradoxo dos gémeos» e «tempo formal»
por *António Brotas*

Cónicas, ortópticas e envolventes das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro
por *F. Peres Rodrigues*

Cardinalidade de alguns conjuntos de topologias compactas
por *O. T. Alas*

Cardinality of a set of topologies
by *O. T. Alas*

Cardinalidade de um conjunto de anéis
por *O. T. Alas*

Introdução à álgebra exterior
por *J. J. Dionísio*

Partições de um conjunto formadas por conjuntos de cardinalidade dada
por *Edison Farah*

Concurso

XII Congresso Internacional de História da Ciência

Movimento matemático

Matemáticas superiores

Boletim bibliográfico

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração – Rua Diário de Notícias, 134-1.°-Esq.° — Tel. 369449 – Lisboa-2

REDACÇÃO

Redactores: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

OUTROS COMPONENTES

EM PORTUGAL:

Coimbra: L. Albuquerque; **Lisboa:** Almeida e Costa, A. Sá da Costa, J. J. Dionísio, J. Sebastião e Silva, J. Ribeiro Albuquerque, M. Teodora Alves, Fernando de Jesus, A. César de Freitas e Fernando Dias Agudo, **Porto:** Andrade Guimarães, Arala Chaves, Coimbra de Matos, Laureano Barros, L. Neves Real·

NO ESTRANGEIRO:

Argentina — *Buenos Aires:* António Monteiro, L. A. Santaló e Eduarde del Busto; *Mendoza:* F. Toranzos; *San Luís:* Manuel Balanzat; **Brasil** — *Belo Horizonte:* Cristovam dos Santos; *Recife:* Newton Maia, Ruy Luís Gomes e José Morgado; *Rio de Janeiro:* Achille Bassi, Leopoldo Nachbin, Maria Laura Mousinho e Maurício Peixoto; *São Paulo:* Omar Catunda; **Espanha** — *Barcelona:* Francisco Sanvisens; *Madrid:* Sixto Rios Garcia; **Itália** — *Roma:* Emma Castelnuovo; **França** – *Paris:* Paul Belgodère; A. Pereiro Gomes; **Suissa** — *Zürich:* H. Wermus; **Uruguay** — *Montevideo:* Rafael La Guardia; **U. S. A.** — *Pennsylvania:* Maria Pilar Ribeiro; **Venezuela** — J. Gallego Diaz.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo *prévio* entre o Autor e a Redacção.

Publicações do CENTI (Centro de Tratamento da Informação)

Relatório Revisto sobre a Linguagem Algorítmica — ALGOL 60

Tradução de J. G. Teixeira

Problemas de Matemática na Teoria dos Reactores Nucleares

J. G. Teixeira

Natureza da Investigação Operacional

Fernando de Jesus

Os sócios da S. P. M., assinantes da «Gazeta de Mat.» e da «Portugaliae Math.», beneficiam para estas obras do desconto de 20 %

OS ANÚNCIOS DESTE NÚMERO NÃO SÃO PAGOS

SOCIEDADE PORTUGUESA
DE MATEMÁTICA
Contribuinte Nº 501 065 792

ANO XXX — N.os 113-116 GAZETA DE MATEMÁTICA JANEIRO/DEZ. — 1969

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA

Linguagens elementares e estruturas matemáticas

(Breve iniciação)

por **Hugo Ribeiro**
Pennsylvania State University, U. S. A.

À memória de Manuel Zaluar Nunes

Esta exposição tem o propósito de oferecer sistemàticamente a estudantes com preparação média uma oportunidade de tomarem interesse por questões elementares e métodos que surjem naturalmente em teorias básicas da Matemática e se situam na fronteira da Matemática e da Lógica. Procuramos a eficácia duma tal tentativa em poucas páginas através da escolha e organização do material, das aplicações, da precisão dos enunciados definições e resultados e da indicação de alguns problemas aparentemente acessíveis. As breves referências bibliográficas são para apontar acesso imediato ao desenvolvimento dos vários tópicos.

0. Observações iniciais. A classe dos grupos pode definir-se como a de todos aqueles sistemas (algébricos) com duas operações, uma, binária, a multiplicação, e outra, unária, a inversão, nos quais são verdadeiras certas identidades que envolvem, ùnicamente, o símbolo $=$, símbolos («variáveis») $x, y, z, \cdots$, os símbolos operacionais $\cdot$ e $^{-1}$ (cujas interpretações são respectivamente a multiplicação e a inversão) e, finalmente, parêntesis (que são símbolos evitáveis quando as regras de formação de termos forem convenientemente escolhidas). Mas nenhum conjunto de identidades envolvendo ùnicamente $=$, variáveis e o símbolo $\cdot$ (com a mesma interpretação) de operação binária, pode servir como conjunto de axiomas da teoria dos grupos — porque, de contrário, como essas identidades seriam todas verdadeiras, digamos, no grupo aditivo dos inteiros o conjunto dos números naturais, que é fechado para essa operação, constituiria, com a adição dos números naturais, um sistema algébrico no qual, claramente, as mesmas identidades também seriam verdadeiras, isto é, constituiria um grupo.

Considere-se uma qualquer classe, K, de sistemas algébricos todos do mesmo tipo, isto é com o mesmo número de operações de cada aridade. É óbvio que se há um conjunto de identidades tal que a nossa classe, K, é a de todos os sistemas algébricos, daquele tipo, nos quais todas as identidades desse conjunto são verdadeiras então K tem a propriedade de conter todos os subsistemas e todas as imagens homomórficas de elementos de K assim como todos os produtos directos de elementos de K. Mas G. BIRKHOFF mostrou que, reciprocamente, se a classe dada K, contém com cada elemento todos os seus subsistemas e é fechada para todas as operações de homomorfismo e produto directo então há um conjunto de identidades tal que os elementos de K são precisamente aqueles do tipo dado nos quais todas as identidades desse conjunto são verdadeiras. Por um lado há a consideração de objectos matemáticos, todos do mesmo tipo, e por outro a (menos familiar) de uma linguagem (formal) bem delimitada que serve para exprimir (com tais limitações) o que pode, ou não, passar-se em objectos desse tipo. E não só a estrutura de expressões dessa linguagem pode fornecer propriedades da classe dos objectos matemáticos nos quais elas são verdadeiras mas também certas propriedades duma classe podem informar-nos a respeito da estrutura de expressões (da linguagem fixada) verdadeiras em todos os membros da classe.

KALICKI e SCOTT determinaram todas as classes de semigrupos que são «equacionalmente completas» isto é tais que dada uma identidade qualquer ou esta é verdadeira (e é sempre!) só nos semigrupos com um único elemento (verdadeira onde $x=y$ é) ou é verdadeira em todos os semigrupos da classe. Os semireticulados («semi-lattices») constituem uma tal classe como fàcilmente se verifica: Se t_1 e t_2 são termos quaisquer, de $t_1=t_2$ resulta (usando a associatividade, a comutatividade e a idempotência da operação) uma identidade $t'_1=t'_2$ verdadeira em precisamente os mesmos semireticulados e tal que nenhuma variável ocorre mais de uma vez em cada um dos termos t'_1 e t'_2, de modo que 1) se nestes dois termos ocorrem precisamente as mesmas variáveis $t'_1=t'_2$ é verdadeira em todos os semireticulados e 2) se, digamos, x ocorre em t'_1 mas não em t'_2 então $t'_1=t'_2$ só pode ser verdadeira nos reticulados com um único elemento (porque se a e b são dois elementos então interpretando x como a e todas as outras variáveis como b a multiplicação de a por b dá b e, por outro lado, interpretando x como b e qualquer outra variável como a a multiplicação de a por b dá a). A classe dos reticulados distributivos é, também, equacionalmente completa, isto é nenhuma subclasse própria, excepto a dos reticulados com um único elemento, se pode obter acrescentando uma nova identidade às identidades que constituem o sistema usual de axiomas da teoria dos reticulados distributivos. (Procure o leitor demonstrar isto directamente!). E assim, uma extensão da linguagem é necessária para se obter axiomas que forneçam, por exemplo, a subclasse daqueles reticulados distributivos constituida pelas ordens totais. Outras indicações de problemas e resultados que envolvem classes equacionais encontram-se num artigo recente de TARSKI. Por exemplo, que classes são as classes de todos os sistemas algébricos de dado tipo em que uma única identidade pode servir de axioma?

(G. BIRKHOFF, Proc. Cambridge Phil. Soc. 31 (1935); J. KALICKI and D. SCOTT, Indag. Math. 17 (1955); A. TARSKI, em Contributions to Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam 1968).

1. Estruturas e linguagem. Usámos, até agora sem explicação, certas noções que é indispensável esclarecer. Por outro lado a linguagem que temos considerado é demasiadamente simples. Em particular interessam-nos também estruturas matemáticas com relações que não são necessàriamente, como até agora, operações.

Consideremos, para uma dada sucessão $<n_1, \cdots, n_m>$ («tipo») de números naturais a classe de todas as estruturas

$$\mathfrak{A} = <A, R_1, \cdots, R_m>, \text{ onde}$$

A é um conjunto não vazio e $R_i (1 \leqq i \leqq m)$ uma relação n_i-ària de A, isto é um subconjunto do conjunto de todos os n_i-tuplos de elementos de A (que se identifica com um elemento de A no caso de $n_i = 1$ e R_i ser uma operação de A). Consideremos, por outro lado, uma linguagem, que permite referência directa a tais relações, cujos símbolos são $=$ (que se não confundirá com o símbolo $=$ da linguagem que estamos usando nas nossas descrições!), variáveis $v_0, v_1 \cdots$ que permitem referência aos elementos dos conjuntos A, símbolos (de predicados) $P_1, \cdots, P_m$ que se referem respectivamente às relações $R_1, \cdots, R_m$, os símbolos $\neg$ («não», de negação), $\wedge$ («e», de conjunção), $\bigwedge$ («qualquer que seja», de quantificador universal) e os parêntesis (e). As *fórmulas* desta linguagem são definidas indutivamente: elas são as sucessões de símbolos que pertencem a todos aqueles conjuntos de sucessões de símbolos que contêm, para cada i com $1 \leqq i \leqq m$ e variáveis $v_{j_0}, \cdots v_{j n_i - 1}$ todas as sucessões $v_{j_0} = v_{j_1}$ e $P_i v_{j_0} v_{j_1} \cdots v_{j n_i - 1}$ («fórmulas atómicas») e que (regras gramaticais) 1) com cada sucessão φ contêm também a sucessão $\neg \varphi$ assim como, para cada variável v_j, também $\bigwedge v_j \varphi$ e 2) com quaisquer sucessões φ e ψ contêm também a sucessão $(\varphi \wedge \psi)$.

Diz-se duma variável v_k que ocorre livre numa fórmula se e só se a fórmula é atómica e v_k ocorre nela ou a fórmula é $\neg \varphi$ e v_k ocorre livre em φ ou a fórmula é $(\varphi \wedge \psi)$ e v_k ocorre livre em φ ou em ψ ou, finalmente, a fórmula é $\bigwedge v_j \varphi$, $k \neq j$ e v_k ocorre livre em φ. *Sentenças* são as fórmulas sem ocorrências livres de variáveis. Sentenças *universais* [*existenciais*] são as sentenças $\bigwedge v_{j_0} \cdots \bigwedge v_{j_l} \varphi [\bigvee v_{j_0} \cdots \bigvee v_{j_l} \varphi]$ para as quais em φ não ocorrem quantificadores. (Como é usual, escrevem-se abreviaturas das nossas fórmulas usando outros símbolos $\vee$ («ou»), $\rightarrow$ («se ... então ...»), $\longleftrightarrow$ («se e só se»), $\bigvee$ («há», de quantificador existencial), e com frequência se omitirão parêntesis). Deverá ser claro como ler, na linguagem que estamos usando, as sentenças da linguagem que introduzimos. Por exemplo (com $m = 1$ e $n_1 = 2$) as sentenças $\bigwedge v_0 \bigwedge v_1 \bigwedge v_2 ((P_1 v_0 v_1 \wedge \wedge P_1 v_1 v_2) \rightarrow P_1 v_0 v_2)$, $\bigwedge v_0 \neg P_1 v_0 v_0$, $\bigwedge v_0 \bigwedge v_1 (\neg v_0 = v_1 \rightarrow (P_1 v_0 v_1 \vee P_1 v_1 v_0))$ constituem um sistema usual de axiomas da teoria das ordens totais.

Se desejamos focar a nossa atenção em estruturas, $\mathfrak{A}$, nas quais pelo menos uma relação R_i é uma operação então usamos frequentemente, para referir a R_i, em vez de P_i um símbolo f_i («constante» ou «nome de indivíduo» no caso de $n_i = 1$). (Tais estruturas são aquelas nas quais a sentença $\bigwedge v_0 \cdots \bigwedge v_{n_i - 2} (\bigvee v_{n_i - 1} P_i v_0 \cdots v_{n_i - 1} \wedge \bigwedge v_j \bigwedge v_l ((P_i v_0 \cdots v_{n_i - 2} v_j \wedge P_i v_0 \cdots v_{n_i - 2} v_l) \rightarrow \rightarrow v_j = v_l))$ é «verdadeira»). *Termos*, t_k, são então introduzidos, como constituindo o infimum dos conjuntos que contém as variáveis assim como os símbolos f_i e que são fechados para a operação de formação das sucessões $f_i \; t_0 t_1 \cdots t_{n_i - 2}$. As fórmulas atómicas são agora $t_{j_0} = t_{j_1}$, para quaisquer termos t_{j_0} e t_{j_1}, e $P_i t_0 \cdots t_{n_i - 1}$ para quaisquer termos $t_0, \cdots, t_{n_i - 1}$. E as fórmulas obtêm-se, como acima, mas agora a partir destas fórmulas atómicas. Se todas as relações R_i de $\mathfrak{A}$ são operações, $\mathfrak{A}$ diz-se ser uma estrutura algébrica.

Necessitamos finalmente, dada uma estrutura $\mathfrak{A}$ e uma sentença σ da linguagem correspondente, saber o que deve entender-se por «σ é verdadeira em $\mathfrak{A}$». Para isto consideremos as sucessões infinitas $a = < a_0, a_1, \cdots >$ de elementos do conjunto A. (Seria mais natural limitar-nos a sucessões finitas mas isso traria desvantagens de ordem técnica nesta exposição). Definimos indutivamente uma relação entre esses elementos, a, de A^ω e as fórmulas, φ, da nossa linguagem: *a satisfaz em* $\mathfrak{A}$ *i*) $v_{j_0} = v_{j_1}$ se e só se a_{j_0} é a_{j_1}, *ii*) $P_i v_{j_0} v_{j_1} \ldots v_{j_{n_i - 1}}$ se e só se para o n_i-tuplo $< a_{j_0}, \cdots, a_{j_{n_i - 1}} >$

de elementos $a_{j_0}, \cdots, a_{j_{n_i-1}}$ de A se tem $< a_{j_0}, \cdots, a_{j_{n_i-1}} > \in R_i$, *iii*) $\neg \varphi$ se e só se a não satisfaz, em $\mathfrak{A}, \varphi$, *iv*) $(\varphi \wedge \psi)$ se e só se a satisfaz, em $\mathfrak{A}, \varphi$ e a satisfaz, em $\mathfrak{A}, \psi$, *v*) $\bigwedge v_j \varphi$ se e só se qualquer $a' \in A^\omega$ com $a'_l = a_l$ para $l \neq j$ é tal que a' satisfaz, em $\mathfrak{A}, \varphi$. Resulta imediatamente desta definição que, para cada $\mathfrak{A}$, se σ é uma sentença então ou todas as sucessões $a \in A^\omega$ satisfazem, em $\mathfrak{A}, \sigma$ ou nenhuma sucessão $a \in A^\omega$ satisfaz, em $\mathfrak{A}, \sigma$. É no primeiro caso que se diz que *σ é verdadeira em $\mathfrak{A}$*, ou que *$\mathfrak{A}$ é modelo de σ*. (E é no segundo caso que se diz que σ é falsa em $\mathfrak{A}$).

Uma fórmula, φ, diz-se lògicamente válida se e só se qualquer que seja a estrutura $\mathfrak{A}$ todas as sucessões $a \in A^\omega$ satisfazem, em $\mathfrak{A}, \varphi$. Assim as fórmulas $v_j = v_j$ são todas lògicamente válidas. Também, qualquer que seja a fórmula φ, se v_j ocorre livre em φ e a fórmula ψ se obtém de φ por substituição de ocorrências livres de v_j em φ por ocorrências livres de qualquer outra variável v_l então $v_j = v_l \rightarrow (\varphi \longleftrightarrow \psi)$ é lògicamente válida.

A restrição a estruturas com um número finito de relações (tipo finito), e a restrição correspondente na linguagem, são dispensáveis (como fàcilmente se verá) em muito do que se segue.

(H. Hermes, Einführung in die Mathematische Logik, 1963, Teubner; G. Kreisel et J. L. Krivine, Éléments de logique mathématique, 1966, Dunod; A. Tarski, Some notions and methods on the border line of algebra and metamathematics, in Proc. of the Int. Congress of Mathematicians, vol. 1, 1950).

2. Alguns resultados elementares. Retomamos agora, brevemente, problemas da natureza dos do § 0. Uma estrutura $\mathfrak{B} = < B, S_1, \cdots, S_m >$ (do tipo da estrutura $\mathfrak{A} = < A, R_1, \cdots, R_m >$) é uma subestrutura de $\mathfrak{A}$ (e $\mathfrak{A}$ é extensão de $\mathfrak{B}$) se e só se qualquer que seja i (com $1 \leq i \leq m$) $S_i = R_i \cap B^{n_i}$. Se uma estrutura $\mathfrak{C}$ é isomórfica duma subestrutura $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ diz-se que $\mathfrak{C}$ é isomòrficamente mergulhável em $\mathfrak{A}$. Tarski observou que para cada estrutura finita $\mathfrak{B}$ (B finito!) há uma sentença universal, σ, tal que as estruturas (do mesmo tipo!) nas quais $\mathfrak{B}$ não é isomòrficamente mergulhável são, precisamente, os modelos de σ. (Para a demonstração, que o leitor deve tentar, note-se que $\mathfrak{B}$ pode, a menos de isomorfismo, descrever-se completamente por uma sentença existencial e que esta é, claro, verdadeira em todas as extensões de $\mathfrak{B}$). A união de uma classe, K, de estruturas é a estrutura, $\mathfrak{A}$, cujo conjunto, A, é a união dos conjuntos dos elementos de K e cuja relação R_i é, para cada i, a união das relações-i dos elementos da classe. K diz-se cadeia de estruturas se e só se de quaisquer dois elementos de K um é subestrutura do outro. Do lema, acima, resulta que uma classe K de estruturas é a de todos os modelos (de todas as sentenças) de um conjunto de sentenças universais se e só se *i*) qualquer estrutura isomòrficamente mergulhável numa estrutura de K também pertence a K e *ii*) a união de qualquer cadeia de elementos de K também pertence a K. Resultados que envolvem uma única sentença universal ou então sentenças com formas mais complexas foram obtidos por Vaught, Chang e outros. Também extensamente estudadas têm sido classes de sistemas algébricos fechadas para certas operações, com, por exemplo, a propriedade de conterem com cada sistema todas as suas imagens homomórficas.

Prosseguimos a análise de Kalicki e Scott referida no § 0 para deixarmos aqui uma nota mais pessoal: Sabemos que a subclasse dos reticulados distributivos constituída pelas ordens totais não pode obter-se, pela adjunção de identidades, como sendo a classe de todos os modelos do novo conjunto de sentenças, mas que pode obter-se pela adjunção da sentença universal que afirma ser o infimum (ou o supremum) de dois elementos um destes. Perguntamos então que subclasses (próprias) da das ordens totais são as de todos os modelos do conjunto de sentenças obtido pela adjunção de uma única nova sentença universal aos axiomas que indicámos no § 1. A adjunção de, por exemplo, $\wedge v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 (v_0 = v_1 \vee \vee v_0 = v_2 \vee v_1 = v_2)$ determina as ordens totais com não mais de dois elementos, e explicámos na Port. Math. vol. 15 como é simples mostrar que tais subclasses, isto é, as que para algum n (dependente da sentença universal dada) contêm precisamente as ordens totais de no máximo n elementos, são as únicas possíveis. Qualquer sentença universal da nossa linguagem que não é verdadeira em todas as ordens totais é, pois, equivalente a uma sentença da linguagem mais simples (sem referência à relação de ordem) da teoria da identidade. É neste sentido que dizemos que a teoria das ordens totais é universalmente completa. Discutimos depois em termos de propriedades de classes de estruturas a situação aqui exemplificada pelas ordens totais e também fizémos uma aplicação à teoria dos semigrupos ordenados. Gostaríamos de conhecer outras aplicações e uma análise sistemática da noção de teoria universalmente completa relativamente não à teoria da identidade, a que nos limitámos, mas a subteorias mais complexas.

(A. Tarski, Indagationes Mathematicae, vols. 16 and 17, 1954 and 1955; R. Vaught, Bull. Am.Math. Soc. t. 59, 1953; R. Fraissé, Cours de logique mathématique, tome 1, 1967, Gauthier-Villars; H. Ribeiro, Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, vol. 5, 1961; D. Brignole and H. Ribeiro, Algebra i Logika, t. 4, 1965, Novosibirski).

3. Teorema de compacticidade (finitude). Se Σ é um conjunto de fórmulas que é inconsistente (isto é se em cada estrutura, $\mathfrak{A}$, nenhuma sucessão $a \in A^{\omega}$ satisfaz todas as fórmulas de Σ) então há um subconjunto finito, Δ, de Σ, que é inconsistente. (Não tentaremos aqui uma demonstração no quadro desta curta exposição. Mas desde que vários leitores conhecem a existência de axiomas e regras de inferência da lógica elementar e também o resultado de Gödel que afirma obterem-se deste modo precisamente as fórmulas lògicamente válidas, notemos aqui que se Σ é inconsistente então usando Σ há uma demonstração duma sentença falsa em todas as estruturas, e como em tal demonstração só intervém um subconjunto finito, Δ, de Σ, Δ é inconsistente). Temos pois que se Σ é um conjunto de sentenças tal que qualquer subconjunto finito de Σ tem um modelo então há um modelo de Σ. Para mostrar em detalhe uma aplicação muito simples notemos primeiro que a teoria elementar dos corpos pode ser dada na linguagem que contém $x, y, z, \cdots$ como símbolos de variáveis, os dois símbolos de constantes 0 e 1 (de operações 0-àrias) os dois símbolos $+$ e $\times$ (de operações binárias) e com o conjunto de axiomas $\wedge x \wedge y \wedge z + x + y z = + + x y z$, $\wedge x \wedge y \wedge z \times x \times y z = \times \times x y z$, $\wedge x \wedge y + x y = + y x$, $\wedge x \wedge y \times x y = \times y x$, $\wedge x + x 0 = x$, $\wedge x \times x 1 = x$, $\wedge x \vee y + x y = 0$, $\wedge x \vee y (x = 0 \vee \times x y = 1)$, $\wedge x \wedge y \wedge z \times x + y z = = + \times x y \times x z$, $\neg 1 = 0$. A aplicação consiste em obter que para qualquer sentença, σ, verdadeira em todos os corpos de característica zero há um número natural, n_σ, tal que σ é verdadeira em todos os corpos de característica maior que n_σ. Com efeito, seja φ_1 a conjunção dos axiomas, acima, da teoria dos corpos e, para cada número primo, p, seja φ_p a sentença $+ 1 + 1 + 1 + \cdots + 11 = 0$ onde ocorrem p vezes os símbolos 1 (que só é verdadeira nos corpos de característica p), e agora observe-se que, por hipótese, o conjunto $\{\neg\sigma, \varphi_1, \neg\varphi_2, \neg\varphi_3, \neg\varphi_5, \cdots\}$ não tem modelos. Há, pois, de acordo com o corolário acima, um subconjunto finito deste conjunto de sentenças que não tem modelos, e portanto há um número (1 ou primo p) n_σ, tal que qualquer modelo de $\{\varphi_1, \cdots, \neg\varphi_{n_\sigma}\}$ não é modelo de $\neg\sigma$, donde qualquer corpo de característica maior que n_σ é modelo de σ.

O leitor deve tentar obter as seguintes aplicações (de TARSKI e de ROBINSON):

1) Se o conjunto das ordens dos elementos dum grupo, $\mathfrak{A}$, é infinito então há um grupo $\mathfrak{B}$ que tem um elemento de ordem infinita e tal que as sentenças (da linguagem elementar dos grupos) verdadeiras em $\mathfrak{B}$ são precisamente aquelas que são verdadeiras em $\mathfrak{A}$ (tal que «$\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são elementarmente equivalentes»).

2) Há corpos não arquimedeanos.

3) Para cada domínio de integridade que não é um corpo há um domínio de integridade elementarmente equivalente com elementos c, não unitário, e d, não zero, tais que, para qualquer n, c^n divide d.

O teorema de compacticidade permite, usando o resultado de algebra elementar que diz haver para qualquer polinómio com coeficientes num corpo, $\mathfrak{F}$, um corpo extensão de $\mathfrak{F}$ no qual esse polinómio tem um zero, obter imediatamente uma demonstração do teorema de STEINITZ que diz que $\mathfrak{F}$ tem uma extensão na qual *qualquer* polinómio se decompõe em factores lineares. De facto, considere-se uma linguagem da teoria dos corpos que contenha uma constante (um nome) para cada elemento de $\mathfrak{F}$ e seja Γ o conjunto de todas as sentenças atómicas verdadeiras em $\mathfrak{F}$ e todas as negações de sentenças atómicas falsas em $\mathfrak{F}$. Observe-se que se φ_1 é a conjunção dos axiomas (acima) da teoria dos corpos então cada modelo de $\Gamma \cup \{\varphi_1\}$ é um corpo extensão de $\mathfrak{F}$, e que na nossa linguagem há para cada polinómio com coeficientes em $\mathfrak{F}$ uma sentença para exprimir que esse polinómio é um produto de factores lineares. Mas se Σ é o conjunto de todas estas sentenças e Δ é qualquer subconjunto finito de Σ então $\Gamma \cup \{\varphi_1\} \cup \Delta$ é, pelo resultado de algebra elementar citado acima, consistente. Do teorema de compacticidade infere-se portanto que $\Gamma \cup \{\varphi_1\} \cup \Sigma$ é consistente, isto é que há uma extensão de $\mathfrak{F}$ na qual todos os polinómios se decompõem em factores lineares.

Note-se também que do teorema de compacticidade resulta que se há uma única sentença cujos modelos são precisamente os dum conjunto Σ de sentenças então há também um subconjunto finito, Δ, de Σ cujos modelos são precisamente os de Σ.

A noção de ultraproduto de estruturas, de importância na teoria dos modelos mas que não podemos discutir aqui, é uma modificação da de produto directo que pode utilizar-se para uma demonstração simples do teorema de compacticidade e com a qual o leitor deve familiarizar-se.

(A. ROBINSON, Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra, North-Holland, 1963; FRAYNE, MOREL and SCOTT, Fundamenta Mathematicae, vol. 51, 1962).

4. Algumas aplicações de teoremas do tipo do de Löwenheim-Skolem. Estes teoremas que têm tido aplicações importantes, especialmente aos fundamentos da teoria dos conjuntos, permitem inferir da existência de modelos infinitos dum conjunto de sentenças, a existência de modelos com propriedades prescritas. Limitamo-nos aqui, primeiro, ao seguinte enunciado fraco que pressupõe uma linguagem, como a descrita no § 1, em que o conjunto das fórmulas é numerável: Se o conjunto, Σ, de sentenças tem um modelo infinito $\mathfrak{A}$ (isto é se A é infinito) então Σ tem um modelo numerável, $\mathfrak{A}'$, tal que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ são elementarmente equivalentes. (Uma das demonstrações envolve a consideração de uma linguagem obtida da original pela adjunção de um símbolo, f_φ, de operação n-ária, para cada fórmula que aqui escrevemos $\varphi(v_{j_0}, \cdots, v_{j_{n-1}})$ para indicar que as variáveis $v_{j_0}, \cdots, v_{j_{n-1}}$ são as de ocorrências livres, e envolve depois mostrar 1) que para cada estrutura, do tipo dado pela linguagem original, há uma estrutura do tipo dado pela nova linguagem tal que $\bigwedge v_{j_0} \cdots \bigwedge v_{j_{n-2}} (\bigvee v_{j_{n-1}}\, \varphi(v_{j_0}, \cdots, v_{j_{n-1}}) \rightarrow \varphi(v_{j_0}, \cdots, v_{j_{n-2}}, f_\varphi(v_{j_0}, \cdots, v_{j_{n-2}})))$ e 2) que os elementos desta estrutura a que se referem as constantes da nova linguagem constituem uma subestrutura elementarmente equivalente).

Deste teorema imediatamente se segue (Skolem) que se a teoria dos conjuntos (axiomas de Zermelo-Fraenkel, von Neumann-Bernays, ou outros) é consistente então tem já um modelo numerável. (A distinção, clara, das duas linguagens — a linguagem que aqui estamos usando quando escrevemos «modelo numerável» e a linguagem da teoria dos conjuntos, que aliás permite introduzir a definição de conjunto numerável — elimina a sugestão da natureza paradoxal do teorema de Löwenheim-Skolem).

Se aos axiomas da teoria das ordens totais (§ 1) se juntam os axiomas $\neg \bigvee v_0 \bigwedge v_1 (v_0 = v_1 \vee P_1\, v_0\, v_1)$, $\neg \bigvee v_0 \bigwedge v_1 (v_0 = v_1 \vee \vee P_1 v_1 v_0)$ e $\bigwedge v_0 \bigwedge v_1 (P_1 v_0 v_1 \rightarrow \bigvee v_2 (P_1 v_0 v_2 \wedge \wedge P_1 v_2 v_1))$ obtem-se um conjunto, Σ, de axiomas da teoria das ordens totais densas sem primeiro nem último elemento. Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são dois modelos de Σ eles são necessàriamente infinitos, e há portanto modelos, $\mathfrak{A}'$ e $\mathfrak{B}'$, numeráveis elementarmente equivalentes a, respectivamente, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$. Mas Cantor demonstrara (veja-se por exemplo, Sierpinski, Cardinal and Ordinal Numbers, 1958, p. 209) que dois quaisquer modelos numeráveis de Σ são isomorfos. $\mathfrak{A}'$ e $\mathfrak{B}'$ são, portanto, elementarmente equivalentes, donde $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são elementarmente equivalentes. É pois impossível distinguir por uma sentença da nossa linguagem um modelo, $\mathfrak{A}$, de Σ doutro modelo, $\mathfrak{B}$, de Σ, porque ou em ambos uma tal sentença é verdadeira ou em ambos é falsa, (isto é o conjunto, Σ, de sentenças é «completo»). Em particular qualquer sentença da teoria da ordem é verdadeira no conjunto ordenado dos racionais se e só se é verdadeira no conjunto ordenado dos reais.

Registamos agora o seguinte teorema numa forma que também pressupõe uma linguagem como a do § 1: Se o conjunto Σ de sentenças tem um modelo infinito $\mathfrak{A}$, e $\mathfrak{c}$ é um cardinal maior que o do conjunto, A, de $\mathfrak{A}$, então Σ tem um modelo, $\mathfrak{A}'$, de cardinalidade $\mathfrak{c}$ tal que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ são elementarmente equivalentes. Um corolário imediato diz-nos que há modelos não numeráveis do conjunto dos axiomas de Peano com o esquema de indução limitado às propriedades que podem ser expressas na nossa linguagem (elementar) da aritmética, portanto que há tais modelos não isomórficos ao modelo dos números naturais.

Tarski mostrara que as sentenças verdadeiras no corpo dos números complexos são precisamente as sentenças verdadeiras em todos os corpos algèbricamente fechados de caracteristica zero. Dos teoremas que estamos considerando e do facto, conhecido da algebra, que quaisquer dois corpos algèbricamente fechados e com a mesma característica e mesma cardinalidade não numerável são isomórficos, resulta agora que um conjunto de axiomas da teoria dos corpos algèbricamente fechados de dada característica é completo. Vaught observou, em geral, que se um conjunto consistente, Σ, de sentenças não tem modelos finitos e para algum cardinal $\mathfrak{c}$ é n-categórico (isto é tal que dois quaisquer modelos de cardinalidade $\mathfrak{c}$ são isomórficos) então Σ é completo. Este e outros critérios de completude têm consequências importantes. Obtém-se, por exemplo, uma demonstração, curta e simples, do conhecido teorema dos zeros (Nullstellensatz) de HILBERT.

(T. SKOLEM, em Les Entretiens de Zürich, 1938; A. TARSKI and R. VAUGHT, Compositio Mathematicae, vol. 13, 1957; A. ROBINSON, Complete theories, North-Holland, 1956).

5. Algebra cilíndrica duma estrutura. Várias operações familiares como a de homomorfismo, fazem corresponder estruturas a estruturas. Utilizamos o conteudo do § 1 para descrever aqui uma outra que permitirá não só a oportunidade de revisão desse § 1 mas ainda a de pormos algumas questões aparentemente simples.

Seja $\mathfrak{A} = \langle A, R_1, \cdots, R_m \rangle$ uma estrutura de tipo $\langle n_1, \cdots, n_m \rangle$, e façamos corresponder a cada fórmula, φ, da linguagem correspondente o conjunto, φ^*, de todas as sucessões $a = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots \rangle$ de elementos de A tais que a satisfaz, em $\mathfrak{A}$, φ. Observe-se que qualquer que seja j, $(v_j = v_j)^* = A^\omega$ e $(\neg\, v_j = v_j)^* = 0$ (o conjunto vazio). Observe-se, mais, que o conjunto, $\mathcal{A}$, dos conjuntos φ^* assim obtidos constitui um corpo de subconjuntos de A^ω, (uma álgebra de BOOLE $\langle \mathcal{A}, \cap, ', 0, A^\omega \rangle$ onde $\cap$ e $'$ são respectivamente intersecção e complementação). Enfim, há nesta álgebra de BOOLE 1) para cada número natural j uma operação unária, C_j, («cilindrificação») que fornece para cada $\varphi^* \in \mathcal{A}$ o conjunto, $C_j \varphi^*$, de todas as sucessões $a \in A^\omega$ tais que qualquer que seja $a' \in \varphi^*$, a' não difere de a senão, eventualmente, na coordenada j e 2) para cada par j_0, j_1 de números naturais uma operação 0-ária, d_{j_0, j_1} («diagonalisação») que fornece o subconjunto de A^ω constituido por todas as sucessões $a \in A^\omega$ tais que $a_{j_0} = a_{j_1}$. A «álgebra cilíndrica de $\mathfrak{A}$» é agora definida como sendo o sistema algébrico $\mathcal{C}\mathfrak{A} = \langle \mathcal{A}, \cap, ', 0, A^\omega, C_j, d_{j_0, j_1} \rangle_{j, j_0, j_1}$ de tipo infinito constituído por aquela álgebra de BOOLE e as operações, em número infinito, C_j e d_{j_0, j_1}. Fàcilmente se verificará que $\mathcal{C}\mathfrak{A}$ pode definir-se a partir de $\mathfrak{A}$, duma maneira intrínseca, sem o intermédio da linguagem.

Esta operação de passagem de estruturas às suas álgebras cilíndricas sugere a questão de como é que relações entre dadas estruturas (do mesmo tipo) se reflectem como relações entre as álgebras cilíndricas correspondentes. Também é natural perguntar por relações que se obtêm por iteração da operação $\mathcal{C}$. Álgebras cilíndricas abstractas são a contrapartida algébrica do cálculo de predicados com identidade assim como álgebras de BOOLE são a do cálculo proposicional. (Estão estreitamente relacionadas às álgebras poliádicas, e os problemas de representação têm sido extensamente estudados).

(L. HENKIN, em Mathematical interpretation of formal systems, North-Holland, 1955; P. HALMOS, Algebraic Logic, 1962).

*

* *

[Acrescentado em provas tipográficas: No verão de 1969, pouco depois da preparação deste artigo (inicialmente destinado a um número especial da revista *Ciência* dos estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa) apareceu o livro *Models and Ultraproducts*, de J. L. BELL e A. B. SLOMSON, *North-Holland, 1969* que também aqui recomendamos. H. R.].

Endomorfismos directos de grupos

por **José Morgado**
Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. Introdução

Suponhamos que o grupo G é o produto directo dos subgrupos A e B, $G = A \times B$; isto significa, como é bem sabido, que cada elemento de G tem uma e uma só representação como produto de um elemento de A por um elemento de B e, além disso, A e B são subgrupos normais do grupo G.

Recordemos que, se, para cada $x \in G$, definirmos $\varphi(x)$ como o elemento de B que intervém na representação de x como produto de um elemento de A por um elemento de B, obtemos um *projector* φ de G, isto é, φ é um endomorfismo de G que satisfaz às duas condições seguintes:

a) φ *é idempotente*, quer dizer, $\varphi \circ \varphi = \varphi$;

b) φ *é normal*, quer dizer, φ comuta com todos os automorfismos internos de G; assim, se f_a designa o automorfismo interno determinado por $a \in G$, então tem-se

$$\varphi \circ f_a = f_a \circ \varphi \quad \text{para todo} \quad a \in G,$$

ou seja,

$$\varphi(a x a^{-1}) = a \varphi(x) a^{-1} \quad \text{para todos} \quad a, x \in G.$$

Os subgrupos normais A e B são, respectivamente, o núcleo de φ e a imagem de φ, $A = \operatorname{Ker}(\varphi)$ e $B = \operatorname{Im}(\varphi)$.

Inversamente, se φ é um projector do grupo G, então tem-se

$$G = \operatorname{Ker}(\varphi) \times \operatorname{Im}(\varphi).$$

Mas pode acontecer que um endomorfismo α do grupo G não seja um projector e, no entanto, se tenha

$$(1) \qquad G = \operatorname{Ker}(\alpha) \times \operatorname{Im}(\alpha).$$

Por exemplo, se G é o grupo cíclico de ordem 6,

$$G = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\},$$

e, se α é o endomorfismo definido por $\alpha(x) = x^2$ para todo $x \in G$, então

$$G = \operatorname{Ker}(\alpha) \times \operatorname{Im}(\alpha) = \{1, a^3\} \times \{1, a^2, a^4\}$$

e, no entanto, α não é um projector, visto que $\alpha(\alpha(a)) = a^4 \neq a^2 = \alpha(a)$.

Diremos que um endomorfismo α do grupo G é um *endomorfismo directo* de G, se é válida a igualdade (1).

O objectivo principal desta nota é precisamente dar uma caracterização dos endomorfismos directos de um grupo.

2. Preliminares

Comecemos por estabelecer a seguinte proposição:

I) *Se* α *é um endomorfismo directo do grupo* G, *então a restrição de* α *ao subgrupo normal* $Im(\alpha)$ *é um automorfismo.*

Dem. Com efeito, vejamos que se tem

$$(2) \qquad \operatorname{Ker}(\alpha) = \operatorname{Ker}(\alpha^2) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(\alpha) = \operatorname{Im}(\alpha^2).$$

Da primeira destas igualdades vai resultar que, se

$$\alpha(\alpha(x)) = \alpha^2(x) = 1 \text{ (elemento neutro de } G\text{)},$$

então $\alpha(x) = 1$ e, portanto, a restrição de α a $\mathrm{Im}(\alpha)$ é injectiva.

Da segunda destas igualdades vai resultar que, para todo $x \in G$, existe algum $y \in G$ tal que

$$\alpha(x) = \alpha^2(y) = \alpha(\alpha(y))$$

e, portanto, a restrição de α a $\mathrm{Im}(\alpha)$ é sobrejectiva.

Tudo se reduz, por consequência, a provar as igualdades (2).

Ora, como, para todo endomorfismo α de G, se tem

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha^2) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(\alpha) \supseteq \mathrm{Im}(\alpha^2),$$

basta estabelecer as inclusões inversas.

Seja então $a \in \mathrm{Ker}(\alpha^2)$.

De $\alpha^2(a) = 1$, resulta que $\alpha(a) \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ e, como se tem evidentemente $\alpha(a) \in \mathrm{Im}(\alpha)$, conclui-se que $\alpha(a) = 1$, visto que $\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Im}(\alpha) = \{1\}$, em virtude de, por hipótese, ser válida a igualdade (1).

Isto mostra que $\mathrm{Ker}(\alpha^2) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha)$ e, portanto, verifica-se a primeira das igualdades (2).

Seja agora $a \in \mathrm{Im}(\alpha)$, isto é, $a = \alpha(x)$ para algum $x \in G$.

Como se tem

$$x = bc, \text{ onde } b \in \mathrm{Ker}(\alpha) \text{ e } c \in \mathrm{Im}(\alpha),$$

pode-se escrever

$$x = b\,\alpha(d) \text{ para algum } d \in G,$$

donde

$$a = \alpha(x) = \alpha(b)\,\alpha^2(d) = \alpha^2(d),$$

o que mostra ter-se $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha^2)$ e, portanto, verifica-se a segunda igualdade (2).

II) *Se* α *é um endomorfismo directo do grupo* G, *então existe um automorfismo* σ *de* G *tal que*

$$(3) \qquad \sigma \circ \alpha = \alpha^2 = \alpha \circ \sigma.$$

DEM. Com efeito, designemos por τ o automorfismo induzido por α no subgrupo normal $\mathrm{Im}(\alpha)$ e seja

$$(4) \quad x = yz, \text{ onde } y \in \mathrm{Ker}(\alpha) \text{ e } z \in \mathrm{Im}(\alpha).$$

Como a representação (4) de x é única, pondo

$$(5) \qquad \sigma(x) = y\,\tau(z),$$

define-se uma aplicação σ de G em G; é claro que, se $x \in \mathrm{Im}(\alpha)$, então $\sigma(x) = \tau(x) = \alpha(x)$ e, se $x \in \mathrm{Ker}(\alpha)$, então $\sigma(x) = x$.

Vejamos que σ é um automorfismo de G.

Seja

$$t = uv, \text{ onde } u \in \mathrm{Ker}(\alpha) \text{ e } v \in \mathrm{Im}(\alpha)$$

e, portanto,

$$\sigma(t) = u\,\tau(v).$$

De (1) resulta que cada elemento de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ comuta com cada elemente de $\mathrm{Im}(\alpha)$, sendo, por consequência,

$$xt = yz \cdot uv = yu \cdot zv, \text{ onde } yu \in \mathrm{Ker}(\alpha) \text{ e } zv \in \mathrm{Im}(\alpha)$$

e daqui resulta

$$\sigma(xt) = yu\,\tau(zv) = yu\,\tau(z)\,\tau(v) = y\,\tau(z)\,u\,\tau(v) = \sigma(x)\,\sigma(t),$$

quer dizer, σ é um endomorfismo de G.

O endomorfismo σ é injectivo Na verdade, se $\sigma(x) = 1$, então de (4) e (5) conclui-se que

$$\tau(z) = y^{-1} \in \mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Im}(\alpha) = \{1\},$$

e, como τ é um automorfismo de $\mathrm{Im}(\alpha)$, resulta $z = 1 = y$, o que implica $x = 1$.

O endomorfismo σ é sobrejectivo. Na verdade, seja $a \in G$ e vejamos que existe algum $x \in G$ tal que $\sigma(x) = a$.

Supondo que

$$a = b\,c\,, \text{ com } b \in \operatorname{Ker}(\alpha) \text{ e } c \in \operatorname{Im}(\alpha),$$

e pondo $x = b\,\tau^{-1}(c)$, vem

$$\sigma(x) = b\,\tau(\tau^{-1}(c)) = b\,c = a\,,$$

como se pretendia.

Vejamos agora que o automorfismo σ verifica as condições (3).

Já observámos que, se $z \in \operatorname{Im}(\alpha)$, então $\sigma(z) = \tau(z) = \alpha(z)$, resultando, por consequência, que

$$(\sigma \circ \alpha)(x) = \sigma(\alpha(x)) = \tau(\alpha(x)) = \\ = \alpha(\alpha(x)) = \alpha^2(x).$$

Por outro lado, tem-se

$$(\alpha \circ \sigma)(x) = \alpha(\sigma(y\,z)) = \alpha(y\,\tau(z)) = \alpha(\tau(z)) = \\ = \alpha(\alpha(z)) = \alpha^2(z) = \alpha^2(y)\,\alpha^2(z) = \\ = \alpha^2(y\,z) = \alpha^2(x).$$

Isto mostra que, de facto, σ verifica as condições (3).

3. Caracterização dos endomorfismos directos

Recordemos que, se f e g são aplicações do grupo G em si mesmo, então a diferença $f - g$ define-se pela condição

$$(f - g)(x) = f(x)\,g(x^{-1}) \quad \text{para todo} \quad x \in G.$$

Se f e g são endomorfismos de G, então a diferença $f - g$ não é necessàriamente um endomorfismo de G.

No entanto, se α é um endomorfismo directo de G e σ é o automorfismo construido acima, é fácil ver que a diferença $\sigma - \alpha$ é um endomorfismo de G.

De facto, suponhamos que $x = y\,z$ e $t = u\,v$, com $y, u \in \operatorname{Ker}(\alpha)$ e $z, v \in \operatorname{Im}(\alpha)$.

Então, tem-se evidentemente

$$(\sigma - \alpha)(x\,t) = \sigma(x\,t)\,\alpha((x\,t)^{-1}) = \\ = \sigma(x)\,\sigma(t)\,\alpha(t^{-1})\,\alpha(x^{-1}) = \\ = y\,\tau(z)\,u\,\tau(v)\,\alpha(v^{-1}u^{-1})\,\alpha(z^{-1}y^{-1}) = \\ = y\,\tau(z)\,u\,\tau(v)\,\alpha(v^{-1})\,\alpha(z^{-1}) = \\ = y\,\tau(z)\,u\,\alpha(z^{-1}) = \\ = y\,u\,.$$

Por outro lado, tem-se também

$$(\sigma - \alpha)(x) \cdot (\sigma - \alpha)(t) = \sigma(x)\,\alpha(x^{-1})\,\sigma(t)\,\alpha(t^{-1}) = \\ = y\,\tau(z)\,\alpha(z^{-1}y^{-1})\,u\,\tau(v)\,\alpha(v^{-1}u^{-1}) = \\ = y\,\tau(z)\,\alpha(z^{-1})\,u\,\tau(v)\,\alpha(v^{-1}) = \\ = y\,u\,,$$

o que prova que $\sigma - \alpha$ é um endomorfismo de G.

Suponhamos agora que α é um endomorfismo do grupo G, tal que existe um automorfismo σ de G satisfazendo à condição (3) e $\sigma - \alpha$ é um endomorfismo de G.

Tem-se trivialmente

$$x = x\,\alpha(\sigma^{-1}(x^{-1})) \cdot \alpha(\sigma^{-1}(x))$$

para todo $x \in G$.

Ora, como $\alpha(\sigma^{-1}(x)) \in \operatorname{Im}(\alpha)$ e, além disso,

$$\alpha(x\,\alpha(\sigma^{-1}(x^{-1}))) = \alpha(x)\,\alpha^2(\sigma^{-1}(x^{-1})) = \\ = \alpha(x) \cdot (\alpha \circ \sigma)(\sigma^{-1}(x^{-1})) = \\ = \alpha(x)\,\alpha(\sigma(\sigma^{-1}(x^{-1}))) = \\ = 1\,,$$

isto é, $x\,\alpha(\sigma^{-1}(x^{-1})) \in \operatorname{Ker}(\alpha)$, conclui-se que o grupo G é o produto dos subgrupos $\operatorname{Ker}(\alpha)$ e $\operatorname{Im}(\alpha)$.

Vamos ver que este produto é directo.

Com efeito, mostremos primeiramente que a representação de um elemento de G como produto de um elemento de $\operatorname{Ker}(\alpha)$ por um elemento de $\operatorname{Im}(\alpha)$ é única.

Realmente, se $yz = uv$, com $y, u \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ e $z, v \in \mathrm{Im}(\alpha)$, então

$$u^{-1} y = v z^{-1} \in \mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Im}(\alpha).$$

Ora é fácil ver que a intersecção destes subgrupos é $\{1\}$.

Na verdade, se x é um elemento qualquer daquela intersecção, então tem-se $\alpha(x) = 1$ e $x = \alpha(t)$ para algum $t \in G$, donde resulta $\alpha^2(t) = 1$, ou seja, $\sigma(\alpha(t)) = 1$. Como σ é um automorfismo de G, tem-se necessàriamente $1 = \alpha(t) = x$.

Por consequência,

$$u^{-1} y = v z^{-1} = 1$$

isto é, $y = u$ e $z = v$.

Para podermos concluir que se tem

$$G = \mathrm{Ker}(\alpha) \times \mathrm{Im}(\alpha),$$

basta agora provar que o subgrupo $\mathrm{Im}(\alpha)$ é normal.

Para isso, temos de mostrar que

$$a\,\alpha(x)\,a^{-1} \in \mathrm{Im}(\alpha) \text{ para todos } a, x \in G,$$

o que é equivalente a mostrar que

(6) $$\sigma(b)\,\alpha(x)\,\sigma(b^{-1}) \in \mathrm{Im}(\alpha) \quad \text{para todos } b, x \in G,$$

em virtude de σ ser um automorfismo de G.

Ora, por hipótese, $\sigma - \alpha$ é um endomorfismo de G e isto significa que se tem

$$\sigma(u)\,\sigma(v)\,\alpha(v^{-1})\,\alpha(u^{-1}) = \sigma(u)\,\alpha(u^{-1})\,\sigma(v)\,\alpha(v^{-1})$$

para todos $u, v \in G$.

Daqui resulta

$$\sigma(v^{-1})\,\alpha(u^{-1})\,\sigma(v) = \alpha(v^{-1})\,\alpha(u^{-1})\,\alpha(v)$$

para todos $u, v \in G$.

Fazendo $u = x^{-1}$ e $v = b^{-1}$, resulta

$$\sigma(b)\,\alpha(x)\,\sigma(b^{-1}) = \alpha(b\,x\,b^{-1}),$$

o que prova a relação (6).

Ficou, portanto, provado o seguinte

TEOREMA 1. *Um endomorfismo α de um grupo G é um endomorfismo directo, se e só se existe algum automorfismo σ de G que satisfaça às seguintes condições:*

(i) $\sigma \circ \alpha = \alpha^2 = \alpha \circ \sigma$

(ii) *$\sigma - \alpha$ é um endomorfismo de G.*

OBSERVAÇÃO. Se α é um endomorfismo directo do grupo G, então deve existir um projector φ de G tal que

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\alpha) \text{ e } \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(\alpha).$$

É fácil ver que $\varphi = \sigma^{-1} \circ \alpha$ é um tal projector. De facto, de (i) resulta

$$\alpha \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \alpha \text{ e } \sigma^{-1} \circ \alpha^2 = \alpha,$$

donde

$$\varphi \circ \varphi = (\sigma^{-1} \circ \alpha) \circ (\sigma^{-1} \circ \alpha) =$$
$$= \sigma^{-1} \circ (\sigma^{-1} \circ \alpha \circ \alpha) = \sigma^{-1} \circ \alpha = \varphi,$$

o que mostra a idempotência do endomorfismo φ. Por outro lado, como $\sigma - \alpha$ é um endomorfismo, também

$$\varepsilon - \sigma^{-1} \circ \alpha = (\sigma^{-1} \circ \sigma) - (\sigma^{-1} \circ \alpha) = \sigma^{-1} \circ (\sigma - \alpha)$$

onde ε é o automorfismo idêntico, é um endomorfismo. Ora, sabe-se ([2], teorema 1) que o endomorfismo β é um endomorfismo normal, se e sòmente se $\varepsilon - \beta$ é um endomorfismo. Por conseguinte, $\sigma^{-1} \circ \alpha$, sendo um endomorfismo idempotente e normal, é um projector, que tem o mesmo núcleo e a mesma imagem que α.

Podemos dar outra forma à condição (ii) do Teorema 1.

Com efeito, pelo que acima vimos, $\sigma - \alpha$ é um endomorfismo, se e só se

(7) $$\sigma(b)\,\alpha(x)\,\sigma(b^{-1}) = \alpha(b\,x\,b^{-1}) \quad \text{para todos } b, x \in G.$$

Como σ é um automorfismo de G, que comuta com α, a condição (7) é equivalente à condição

$$\sigma(b\,\alpha(y)\,b^{-1}) = \alpha(b\,\sigma(y)\,b^{-1})$$
$$\text{para todos } b, y \in G,$$

ou seja,

$$\sigma \circ \gamma \circ \alpha = \alpha \circ \gamma \circ \sigma$$

para todo automorfismo interno γ do grupo G.

É válido, portanto, o seguinte

Teorema 2. *O endomorfismo α do grupo G é um endomorfismo directo, se e só se existe um automorfismo σ de G que satisfaça às seguintes condições:*

(I) $\sigma \circ \alpha = \alpha^2 = \alpha \circ \sigma$

(II) $\sigma \circ \gamma \circ \alpha = \alpha \circ \gamma \circ \sigma$

para todo automorfismo interno γ de G.

4. Endomorfismos normais de ordem finita

É claro que o conjunto $\mathrm{End}(G)$, formado por todos os endomorfismos do grupo G, constitui um semigrupo (mais precisamente, um monoide) com respeito à operação de composição. Se o subsemigrupo $<\alpha>$ de $\mathrm{End}(G)$, gerado pelo endomorfismo α, é finito, diz-se que a ordem de α é finita e é igual ao número de elementos de $<\alpha>$.

Mostraremos que, para todo endomorfismo normal de ordem finita, existe alguma sua potência que é um endomorfismo directo.

Antes, porém, vamos estabelecer o seguinte

Teorema 3. *Se α é um endomorfismo normal do grupo G cuja restrição à imagem de α^n é um automorfismo, então α^n é um endomorfismo directo.*

Dem. Com efeito, designemos por τ o automorfismo induzido por α em $\mathrm{Im}(\alpha^n)$.

Tem-se evidentemente, para todo $x \in G$,

$$x = x\,\tau^{-n}(\alpha^n(x^{-1})) \cdot \tau^{-n}(\alpha^n(x)).$$

Ora

$$\tau^{-n}(\alpha^n(x)) \in \mathrm{Im}(\alpha^n),$$

porque τ^{-n} é um automorfismo de $\mathrm{Im}(\alpha^n)$; e

$$x\,\tau^{-n}(\alpha^n(x^{-1})) \in \mathrm{Ker}(\alpha^n),$$

porque

$$\alpha^n(x)\,\alpha^n(\tau^{-n}(\alpha^n(x^{-1}))) = \alpha^n(x)\,\alpha^n(x^{-1}) = 1.$$

Isto significa que $G = \mathrm{Ker}(\alpha^n)\,\mathrm{Im}(\alpha^n)$.

Pretendemos provar que este produto é directo.

É imediato que se tem

$$\mathrm{Ker}(\alpha^n) \cap \mathrm{Im}(\alpha^n) = \{1\},$$

porque, se x é um elemento qualquer desta intersecção, então $\alpha^n(x) = 1$ e $x = \alpha^n(t)$ para algum $t \in G$, donde $\alpha^{2n}(t) = 1$. Ora, por τ ser um automorfismo de $\mathrm{Im}(\alpha^n)$, tem-se evidentemente

$$\mathrm{Ker}(\alpha^n) = \mathrm{Ker}(\tau \circ \alpha^n) = \mathrm{Ker}(\alpha^{n+1}) = \cdots = \mathrm{Ker}(\alpha^{2n}) = \cdots$$

e, anàlogamente,

$$\mathrm{Im}(\alpha^n) = \mathrm{Im}(\tau \circ \alpha^n) = \mathrm{Im}(\alpha^{n+1}) = \cdots = \mathrm{Im}(\alpha^{2n}) = \cdots.$$

Assim, $t \in \mathrm{Ker}(\alpha^n)$, donde resulta

$$x = \alpha^n(t) = 1.$$

Para concluir que aquele produto é directo, basta notar que o subgrupo $\mathrm{Im}(\alpha^n)$ é normal, visto α^n ser um endomorfismo normal.

Logo, α^n é um endomorfismo directo do grupo G.

Corolário. *Se α é um endomorfismo normal de ordem finita do grupo G, então há pelo menos uma potência de α que é um endomorfismo directo do grupo G.*

Na verdade, se α é de ordem finita, então o subsemigrupo de $\text{End}(G)$,

$$<\alpha> = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots, \alpha^n, \cdots\}$$

tem sòmente um número finito de elementos, quer dizer, há potências de α que são iguais e têm expoentes distintos.

Seja α^m a primeira potência de α que é igual a alguma potência de expoente $n < m$. Então os elementos de $<\alpha>$ são

$$\alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^n, \cdots, \alpha^{m-1}.$$

É imediato que α induz um automorfismo em $\text{Im}(\alpha^n)$ e, pelo Teorema 3, α^n é um endomorfismo directo de G.

É interessante observar que o conjunto

$$\{\alpha^n, \alpha^{n+1}, \cdots, \alpha^{m-1}\}$$

é um subgrupo do semigrupo $<\alpha>$. O elemento neutro é o elemento α^r, onde r é o único múltiplo de $m-n$ existente no conjunto

$$\{n, n+1, \cdots, m-1\}$$

([4], pp. 19-20).

Todos os elementos daquele subgrupo são endomorfismos directos do grupo G.

O elemento neutro α^r é a única potência de α que é um projector.

Uma outra consequência imediata do Teorema 3 é o conhecido Lema de Fitting ([1], p. 327): Se o grupo G satisfaz às duas condições de cadeia e α é um endomorfismo normal de G, então tem-se

$$G = \text{Ker}(\alpha^n) \times \text{Im}(\alpha^n)$$

para algum inteiro positivo n; α induz um automorfismo em $\text{Im}(\alpha^n)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Almeida Costa, *Cours d'Algèbre Générale*, vol. I, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1964.

[2] José Morgado, *A note on the normal endomorphisms of a group*, Gazeta de Matemática, n.° 109-112 (1968), pp. 6-8.

[3] ———, *A note on the endomorphisms associated to semi-direct decompositions of a group*, em publicação na «Portugaliae Mathematica».

[4] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, I, Mathematical Surveys, Am. Math. Soc., 1961.

CLASSROOM NOTE

A single axiom for equivalence relations

por José Morgado
Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. In [1], p. 21, B. H. NEUMANN formulated the following problem: «Is there a single identity involving a binary relation ρ on S to S and $=, \circ, \cup, \cap, {}^{-1}, \iota, \varepsilon, \omega$, such that ρ is an equivalence if and only if it satisfies the identity?».

The purpose of this note is to solve this problem.

2. Let us recall that a binary relation α on S to S is a subset of the cartesian product $S \times S$. Instead of $(x, y) \in \alpha$, we shall write $x \alpha y$ (read: «x stands in the relation α to y»).

The *empty relation* is denoted by ε, i. e., one has $x \varepsilon y$ for no element $(x, y) \in S \times S$. The universal relation is denoted by ω, i. e., one has $x \omega y$ for every element $(x, y) \in S \times S$. The *identity relation* is denoted by ι, i. e., one has $x \iota y$ if and only if $x = y$.

The *converse* α^{-1} of the binary relation α is the binary relation defined by

$$x \alpha^{-1} y \text{ if and only if } y \alpha x .$$

It is immediate that

$$(1) \qquad (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha .$$

Let α and β be binary relations on S to S. Since α and β are subsets of $S \times S$, on has

$\alpha = \beta$, if and only if $x \alpha y$ is equivalent to $x \beta y$;

$\alpha \subseteq \beta$ if and only if $x \alpha y$ implies $x \beta y$;

$x \alpha \cup \beta y$, if and only if $x \alpha y$ or $x \beta y$;

$x \alpha \cap \beta y$, if and only if $x \alpha y$ and $x \beta y$.

It is easy to see that

$$(2) \qquad \alpha \subseteq \beta \text{ implies } \alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1} .$$

The product $\alpha \circ \beta$ of α by β is defined by the condition $x \alpha \circ \beta y$, if and only if there is some element z in S such that $x \alpha z$ and $z \beta y$.

This product is associative. Instead of $\alpha \circ \alpha$, we shall write α^2.

One sees easily that

$$(3) \qquad (\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} ,$$

$$(4) \qquad \alpha \subseteq \beta \text{ implies } \alpha \circ \gamma \subseteq \circ \beta \circ \gamma \text{ and } \gamma \circ \alpha \subseteq \gamma \circ \beta ,$$

$$(5) \qquad \gamma \circ (\alpha \cup \beta) = (\gamma \circ \alpha) \cup (\gamma \circ \beta) ,$$

$$(6) \qquad (\alpha \cup \beta) \circ \gamma = (\alpha \circ \gamma) \cup (\beta \circ \gamma) ,$$

for all binary relations α, β, γ on S to S (see, for instance, [2], pp. 9-11).

3. As it is well known, the binary relation ρ is said to be

(*i*) *reflexive*, if $\iota \subseteq \rho$,

(*ii*) *symmetric*, if $\rho^{-1} \subseteq \rho$,

(*iii*) *transitive*, if $\rho^2 \subseteq \rho$.

From (1) and (2) it follows that, if ρ is symmetric, then one has $\rho = \rho^{-1}$. If ρ is reflexive, then from $\iota \subseteq \rho$ and $\iota \circ \rho = \rho$, it follows $\rho \subseteq \rho^2$ by (4) and, consequently, if ρ is reflexive and transitive, then one has $\rho = \rho^2$.

Now, we are going to state the following

THEOREM 1: *Let ρ be a binary relation on* S *to* S. *Then ρ is an equivalence relation, if and only if one has*

$$\rho = (\iota \cup \rho^{-1})^2 . \tag{7}$$

PROOF: Indeed, let us suppose that condition (7) holds. Then, since $\iota \subseteq \iota \cup \rho^{-1}$, one has by (4)

$$\iota \cup \rho^{-1} = \iota \circ (\iota \cup \rho^{-1}) \subseteq (\iota \cup \rho^{-1}) \circ (\iota \cup \rho^{-1}) = \\ = (\iota \cup \rho^{-1})^2 = \rho$$

and hence

$$\iota \subseteq \rho \text{ and } \rho^{-1} \subseteq \rho ,$$

that is to say, ρ is reflexive and symmetric.

Since $\rho^{-1} = \rho$, one has by (7)

$$(\iota \cup \rho)^2 = \rho . \tag{8}$$

From $\rho \subseteq \iota \cup \rho$, it follows by (4) and (8)

$$\rho^2 \subseteq (\iota \cup \rho) \circ \rho \subseteq (\iota \cup \rho) \circ (\iota \cup \rho) = (\iota \cup \rho)^2 = \rho ,$$

proving that ρ is also transitive and, consequently, ρ is an equivalence relation.

Conversely, let us suppose that ρ is an equivalence relation.

By (5) and (6), one has

$$(\iota \cup \rho^{-1})^2 = (\iota \cup \rho^{-1}) \circ (\iota \cup \rho^{-1}) = \\ = \iota \cup \rho^{-1} \cup \rho^{-1} \cup (\rho^{-1})^2 .$$

Since $\rho^{-1} = \rho$, it results

$$(\iota \cup \rho^{-1})^2 = \iota \cup \rho \cup \rho^2$$

and since $\iota \subseteq \rho$ and $\rho^2 \subseteq \rho$, it follows

$$(\iota \cup \rho^{-1})^2 = \rho ,$$

as wanted.

Another characterization of the equivalence relations by a single identity is given by the following

THEOREM 2: *Let ρ be a binary relation on* S *to* S. *Then ρ is an equivalence relation, if and only if*

$$\rho = \iota \cup \rho^{-1} \cup \rho^2 . \tag{9}$$

PROOF: In fact, let ρ be an equivalence relation. Then, from (*i*), (*ii*) and (*iii*), one concludes that

$$\iota \cup \rho^{-1} \cup \rho^2 \subseteq \rho .$$

On the other hand, since ρ is reflexive and transitive, one has $\rho^2 = \rho$ and hence

$$\rho \subseteq \iota \cup \rho^{-1} \cup \rho^2$$

and consequently (9) holds.

Conversely, if (9) holds, then one has

$$\iota \subseteq \rho , \rho^{-1} \subseteq \rho \text{ and } \rho^2 \subseteq \rho$$

proving that ρ is an equivalence relation.

By a similar way, one states that ρ is an equivalence relation, if and only if one of the following conditions holds:

$$\rho^{-1} = (\iota \cup \rho)^2 \tag{10}$$

$$\rho^{-1} = \iota \cup \rho \cup \rho^2 \tag{11}$$

REFERENCES

[1] B. H. NEUMANN, *Special Topics in Algebra: Universal Algebra*, Courant Institut of Mathematical Sciences, New York, 1962.

[2] JOSÉ MORGADO, *Introdução à Teoria dos Reticulados*, Textos de Matemática, Recife, 1962.

NOTA DE AULA

Outra definição de semigrupo regular à direita e à esquerda

por José Morgado
Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

Recordemos que um semigrupo S se diz *regular à direita e à esquerda*, se, para todo elemento $a \in S$, existem elementos $x, y \in S$ tais que

$$a^2 x = a \quad \text{e} \quad y a^2 = a .$$

O objectivo desta nota é estabelecer o seguinte

TEOREMA. *Um semigrupo* S *é regular à direita e à esquerda, se e sòmente se, para todo elemento* $\mathrm{a} \in \mathrm{S}$, *existe em* S *algum elemento* z *tal que*

$$\mathrm{a}^2 \mathrm{z} = \mathrm{a} \quad e \quad \mathrm{z}^2 \mathrm{a} = \mathrm{z} .$$

DEM. O teorema é uma consequência imediata dos dois lemas que se seguem:

LEMA 1. *Seja* a *um elemento do semigrupo* S *tal que, para algum elemento* $\mathrm{z} \in \mathrm{S}$, *se tem*

(i) $\mathrm{a}^2 \mathrm{z} = \mathrm{a}$

(ii) $\mathrm{z}^2 \mathrm{a} = \mathrm{z}$.

Então existe em S *algum elemento* t *tal que*

$$\mathrm{a}^2 \mathrm{t} = \mathrm{a} = \mathrm{t}\, \mathrm{a}^2 \quad e \quad \mathrm{t}^2 \mathrm{a} = \mathrm{t} = \mathrm{a}\, \mathrm{t}^2 .$$

DEM. Na verdade, tem-se

$$\begin{aligned} a z a &= a^2 z \cdot z a , && \text{por (i)} \\ &= a^2 \cdot z^2 a , && \text{pela associatividade,} \\ &= a^2 z , && \text{por (ii),} \\ &= a , && \text{por (i).} \end{aligned}$$

Anàlogamente se mostra que se tem

$$z a z = z^2 a^2 z = z^2 a = z .$$

Ponhamos agora

$$t = a z^2 .$$

Então tem-se evidentemente

$$a^2 t = a^2 \cdot a z^2 = a \cdot a^2 z \cdot z = a^2 z = a$$

e também

$$t a^2 = a z^2 a^2 = a \cdot z^2 a \cdot a = a z a = a ,$$

o que prova a primeira parte do Lema 1.

A segunda parte resulta das igualdades seguintes:

$$t^2 a = a z^2 \cdot a z^2 \cdot a = a \cdot z^2 a \cdot z^2 a = a z^2 = t$$

e ainda

$$a t^2 = a \cdot a z^2 \cdot a z^2 = a^2 z \cdot z a z \cdot z = a z^2 = t .$$

LEMA 2. *Seja* a *um elemento do semigrupo* S *para o qual existem elementos* x *e* y *em* S *tais que*

(i) $\mathrm{a}^2 \mathrm{x} = \mathrm{a}$,

(ii) $\mathrm{y}\, \mathrm{a}^2 = \mathrm{a}$.

Então existe em S *algum elemento* z *tal que*

$$\mathrm{a}^2 \mathrm{z} = \mathrm{a} \quad e \quad \mathrm{z}^2 \mathrm{a} = \mathrm{z} .$$

DEM. Com efeito, de (i) e (ii) resulta

$$y\,a = y\,a^2 x = a\,x\,,$$

donde

$$a\,y\,a = a^2 x = a = y\,a^2 = a\,x\,a\,.$$

Pondo

$$z = y\,a\,x\,,$$

obtém-se

$$a^2 z = a^2 y\,a\,x = a \cdot a\,y\,a \cdot x = a^2 x = a$$

e, por outro lado,

$$z^2 a = y\,a\,x \cdot y\,a\,x \cdot a = y^2 a \cdot y \cdot a\,x\,a = \\ = y^2 \cdot a\,y\,a = y^2 a = y \cdot y\,a = y\,a\,x = z\,,$$

o que completa a demonstração do Lema 2.

Anàlogamente se mostraria que *um semigrupo* S *é regular à direita e à esquerda, se e sòmente se para todo* $a \in S$, *existe em* S *algum elemento* z *tal que*

$$z\,a^2 = a \quad e \quad a\,z^2 = z\,.$$

Topological Semigroups

by John B. Pan, S. J.
Fu Jen University, Taipei, Formosa

Introduction.

A topological semigroup is a system consisting of a set S, an operation $\cdot$, (we omit this dot and write this operation by juxtaposition), and a topology T, satisfying the following conditions:

1) for any $x, y \in S$, $xy \in S$;

2) for $x, y, z \in S$, $(xy)z = x(yz)$;

3) the operation $\cdot$ is continuous in the topology T.

A topological subsemigroup H of a semigroup S is a topological subspace of S and also a subsemigroup of S.

An equivalence relation R defined on a semigroup S is called homomorphic if for any $a, b, c, d \in S$, aRb and cRd imply $acRbd$.

Given an homomorphic equivalence relation R on S, we call the set of equivalence classes mod R the quotient set and we denote it by S/R.

The mapping from S onto S/R defined by $n(x) =$ the class mod R to which x belongs is called the natural mapping from S onto S/R.

The family U of all subsets U^* of S/R such that $n^{-1}(U^*)$ is open in S is a topology for S/R and is called the quotient topology for S/R.

We use the term homomorphism to mean continuous homomorphism. In general, we use the terms mapping, function to mean continuous mapping, continuous function.

Let S be a semigroup, R be a homomorphic equivalence relation on S, and let S/R be the quotient set. We define an operation on S/R in the following manner. Suppose that A and B are two arbitrary elements in S/R, then $AB = C$ if for any $a \in A$ and $b \in B$ we have $ab \in C$. This operation is well-defined because R is a homomorphic equivalence relation. Also it is associative, because the semigroup S is associative. Therefore the quotient set S/R with the operation just defined is a semigroup. We call it the quotient semigroup.

We say a semigroup S satisfies the condition A if for every open set U of S, the subset $n^{-1}(n(U))$ is also open, where n is the natural mapping from S onto S/R.

In this paper we shall prove the following theorems:

THEOREM 1. *If the semigroup* S *satisfies the condition* A, *then the quotient set* S/R *is a topological semigroup with the quotient topology, and the natural mapping* n *from* S *onto* S/R *is an open topological homomorphism.*

THEOREM 2. *If* S *and* T *are two semigroups and* g *is a homomorphism from* S *onto* T, *then* g *induces a homomorphic equivalence relation* R_g *on* S.

THEOREM 3. *Let* S *and* T *be two topological semigroups and let* g *be an open homomorphism from* S *onto* T. *Then*

a) S/R_g *is a topological semigroup with the quotient topology;*

b) *the natural mapping* n *from* S *onto* S/R_g *is an open homomorphism;*
c) *the mapping* h *from* S/R_g *onto* T *defined by* $h(A) = g(a)$ *for any* $a \in A$ *as a subset of* S *and* $A \in S/R_g$ *is a topological isomorphism.*

THEOREM 4. (The First Isomorphism Theorem). *Let* S *and* T *be two topological semigroups both satisfying the condition* A. *Let* g *be an open homomorphism from* S *onto* T *and let* R^* *be a homomorphic equivalence relation defined on* T. *Then there is a homomorphic equivalence relation* R *on* S *and there is a mapping* h *from* S/R *onto* T/R^* *which is a topological isomorphism.*

At the end of the paper, we give an example to illustrate the theorems.

THEOREMS

THEOREM 1. *If the semigroup* S *satisfies the condition* A, *then the quotient set* S/R *is a topological semigroup with the quotient topology, and the natural mapping* n *from* S *onto* S/R *is an open topological homomorphism.*

PROOF. We have shown that S/R is an abstract semigroup. Now we wish to show that the natural mapping n from S to S/R is an abstract homomorphism. Let X and Y be two equivalence classes mod R, and let $XY = Z$. Then by definition of the operation in S/R, for any $x \in X$ and $y \in Y$, $xy \in Z$. Since the natural mapping n assigns each element to the class it belongs, we have

$$n(X) = X,\ n(Y) = Y, \text{ and } n(xy) = n(z) = Z.$$

These equations together with the equation $XY = Z$ imply that $n(xy) = n(x)\,n(y)$. This shows that the natural mapping n is an abstract homomorphism from S onto S/R.

Now let U^* be an open set in S/R. By the definition of the quotient topology for S/R, $n^{-1}(U^*)$ is open. Hence n is continuous.

Let U be an open set in S. Since S satisfies the condition A, $n^{-1}[n(U)]$ is open. Then by the definition of the quotient topology, $n(U)$ is open.

Now we wish to show that the semigroup operation in S/R is continuous. Let A and B be two arbitrary elements in S/R such that $AB = C$. Suppose that W^* is an open neighborhood of C. Then $W = n^{-1}(W^*)$ is an open neighborhood of C, considered as a subset of S. Since the semigroup operation in S is continuous, for every $a \in A$ and every $b \in B$ such that $ab = c$, there is an open neighborhood U_a of a and an open neighborhood V_b of b such that $U_a V_b \subset W$. Choose such a neighborhood U_a for every $a \in A$ and such a neighborhood V_b for every $b \in B$. Then

$$\bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} U_a V_b = \Big[\bigcup_{a \in A} U_a\Big]\Big[\bigcup_{b \in B} V_b\Big] \subset W.$$

Now $\bigcup_{a \in A} U_a$ is an open neighborhood of A in S, and n is an open mapping. It follows that $n\Big[\bigcup_{a \in A} U_a\Big]$ is an open neighborhood of the element A in S/R. Similarly $n\Big[\bigcup_{b \in B} V_b\Big]$ is an open neighborhood of the element B in S/R. Since $\Big[\bigcup_{a \in A} U_a\Big]\Big[\bigcup_{b \in B} V_b\Big] \subset W$, we have

$$n\Big[\bigcup_{a \in A} U_a\Big] n\Big[\bigcup_{b \in B} V_b\Big] = n\Big[\bigcup_{a \in A} U_a \bigcup_{b \in B} V_b\Big] \subset n(W) = W^*$$

Hence we have found an open neighborhood $n\Big[\bigcup_{a \in A} U_a\Big]$ of A and an open neighborhood $n\Big[\bigcup_{b \in B} V_b\Big]$ of B such that

$$n\left[\bigcup_{a\in A} U_a\right] n\left[\bigcup_{b\in B} V_b\right]\subset W^*.$$

This shows that the semigroup operation in S/R is continuous. With this, the proof of the theorem is complete.

THEOREM 2. *If* S *and* T *are two semigroups and* g *is a homomorphism from* S *onto* T, *then* g *induces a homomorphic equivalence relation* R_g *on* S.

PROOF. We define a relation R_g on S in the following manner. Suppose that a and a^* are two elements of S, then

$a=a^* \bmod R_g$ if and only if $g(a)=g(a^*)$.

Evidently, R_g is an equivalence relation. We show that R_g is homomorphic, i. e., if $a, a^*, b, b^*\in S$ such that $a=a^* \bmod R_g$ and $b=b^* \bmod R_g$, then $a\,b=a^*\,b^* \bmod R_g$. Now $a=a^* \bmod R_g$ implies $g(a)=g(a^*)$, and $b=b^* \bmod R_g$ implies $g(b)=g(b^*)$, These two equations imply that $g(a)g(b)=g(a^*)g(b^*)$. Since g is a homomorphism, we have $g(a)g(b)=g(a\,b)$ and $g(a^*)g(b^*)=g(a^*\,b^*)$. Hence $g(a\,b)=g(a^*\,b^*)$. This means that $a\,b=a^*\,b^* \bmod R_g$. This completes the proof.

THEOREM 3. *Let* S *and* T *be two topological semigroups and let* g *be an open homomorphism from* S *onto* T. *Then*

a) S/R_g *is a topological semigroup with the quotient topology;*
b) *the natural mapping* n *from* S *onto* S/R_g *is an open homomorphism;*
c) *the mapping* h *from* S/R_g *onto* T *defined by* $h(A)=g(a)$ *for any* $a\in A$ *as a subset of* S *and* $A\in S/R_g$ *is a topological isomorphism.*

PROOF. By theorem 2, g induces a homomorphic equivalence relation R_g on S. Let S/R_g be the quotient set. Then S/R_g is a semigroup. Let n be the natural mapping from S onto S/R_g. We show that the semigroup S satisfies the condition A.

Let U be an open subset in S. Since g is an open map, $g(U)$ is open in T. Also g is continuous. Hence the subset $g^{-1}[g(U)]$ is open in S. But $g^{-1}[g(U)]=\{x\in S\mid g(x)=g(y)$ for some $y\in U\}$ and $n^{-1}[n(U)]=\{x\in S\mid g(x)=g(y)$ for some $y\in U\}$ hence $n^{-1}[n(U)]=g^{-1}[g(U)]$ and $n^{-1}[n(U)]$ is open. This shows that S satisfies the condition A.

Since S satisfies the condition A, the parts $a)$ and $b)$ follow from theorem 1.

Before proving part c), we wish to show that the mapping h defined in the theorem is well-defined.

Let A be any element of S/R_g and let a^* and a^{**} be any two elements of A as a subset of S. Then

$$a^*=a^{**} \bmod R_g.$$

This implies

$$g(a^*)=g(a^{**}).$$

Hence

$$h(A)=g(a^*)=g(a^{**}).$$

This shows that h is well-defined.

Also h is a one to one mapping. For each $A\in S/R_g$ there corresponds a unique value

$$h(A)=g(a)$$

in T as shown above. Now since g is a mapping from S onto T, for each $t\in T$ there is an element $a\in S$ such that $t=g(a)$, by definition of R_g, $a=b \bmod R_g$ if and only if $g(a)=g(b)$. It follows that for each $g(a)=t$, there is one and only one equivalence class $A \bmod R_g$ such that $h(A)=g(a)=t$. Hence h is a one to one mapping.

We further show that h is an algebraic homomorphism. Let A and B be any two elements in S/R_g. Then

$$h(AB) = g(ab) = g(a)\,g(b) = h(A)\,h(B),$$

where a and b are arbitrary elements of A and B respectively. This shows that h is an algebraic homomorphism.

We show also that h is continuous. Let A be an element in S/R_g such that $h(A)=t$, and let W be an open neighborhood of t. Since $h(A)=g(a)$ for every $a \in A$, and since g is continuous, for every $a \in A$, there is an open neighborhood U_a of a such that $g(U_a) \subset W$. Choose such an open neighborhood U_a for every $a \in A$. Then $\bigcup_{a \in A}(U_a)$ is a neighborhood of A in S and $n\left[\bigcup_{a \in A}(U_a)\right]$ is an open neighborhood of the element A in S/R_g. But $g\left[\bigcup_{a \in A}(U_a)\right] = h\left\{n\left[\bigcup_{a \in A}(U_a)\right]\right\} \subset W$. So for any neighborhood W of $h(A)$, we have found a neighborhood $n\left[\bigcup_{a \in A}(U_a)\right]$ of A such that $h\left\{n\left[\bigcup_{a \in A}(U_a)\right]\right\} \subset W$. This shows that h is continuous.

Finally we show that h is open. Let U^* be an open subset of S/R_g. Since the natural mapping n from S onto S/R_g is continuous, $n^{-1}(U^*)$ is an open subset in S. Also, g is an open mapping from S onto T. So $g[n^{-1}(U^*)]$ is open in T. But

$$g[n^{-1}(U^*)] = h\{n[n^{-1}(U^*)]\} = h(U^*).$$

Hence $h(U^*)$ is open in T. This shows that h is an open mapping. This completes the proof.

We can sum up theorems 1, 2 and 3 by the following form of the fundamental theorem of homomorphism of the topological semigroups:

If the semigroup S satisfies the condition A, then the quotient set S/R is a topological semigroup with the quotient topology, and the natural mapping n from S onto S/R is an open topological homomorphism. Conversely, if g is an open homomorphism from S onto a semigroup T, then T is topologically isomorphic to the quotient semigroup S/R_g, where R_g is a homomorphic equivalence relation defined by

$$a R_g b \text{ if and only if } g(a) = g(b); \quad a, b \in S$$

Theorem 4. *(The First Isomorphism Theorem). Let* S *and* T *be two topological semigroups both satisfying the condition* A. *Let* g *be an open homomorphism from* S *onto* T *and let* R* *be a homomorphic equivalence relation defined on* T. *Then there is a homomorphic equivalence relation* R *on* S *and there is a mapping* h *from* S/R *onto* T/R* *which is a topological isomorphism.*

Proof. Since R^* is a homomorphic equivalence relation on T, by theorem 1, T/R^* is a topological semigroup and the natural mapping n from T onto T/R^* is an open topological homomorphism. Since the mapping g from S onto T is also a homomorphism, it follows that the product mapping ng from S onto T/R^* is also a homomorphism. We show that ng is open. Let U be an open set in S. Since g is open, $g(U)$ is open in T. Also, n is an open map; so $ng(U)$ is open in T/R^*. This shows that ng is an open topological homomorphism.

Now S and T/R^* are two topological semigroups. S satisfies the condition A, and ng is an open topological homomorphism from S onto T/R^*. Hence, by theorem 2, ng induces a homomorphic equivalence relation R_{ng} and T/R^*. Denote R_{ng} by R. Then we have $S/R \simeq T/R^*$. We call this isomorphism h. This completes the proof.

EXAMPLE. To illustrate some of the foregoing theorems we give the following example.

Let $(0, \infty)$ be the semigroup of positive real numbers with addition as its operation and with the usual topology as its topology. Let

$$S = [(x, y) \mid x \in (0, \infty), y \in (0 \infty)]$$

and let the vector addition be defined in S; *i. e.*,

$$(x, y) + (x^*, y^*) = (x + x^*, y + y^*).$$

The set S with the vector addition is a semigroup.

We topologize the semigroup S with the usual product topology P; *i. e.*, the family of subsets

$$B = [(U \times V) \mid U, V \text{ are open in } (0, \infty)]$$

is the base for the topology P in S.

We define a relation R on S as follows: for $(x, y), (x^*, y^*) \in S$, $(x, y) R (x^*, y^*)$ if and only if $x = x^*$. It is easy to see that this relation R is an equivalence relation, because the equation $x = x^*$ is reflexive, symmetric, and transitive, We show that the equivalence relation R is also homomorphic.

Suppose that $(x_1, y_1), (x_1^*, y_1^*), (x_2, y_2), (x_2^*, y_2^*) \in S$ such that

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \text{ and } (x_1^*, y_1^*) R (x_2^*, y_2^*).$$

Then $x_1 = x_2$ and $x_1^* = x_2^*$. From these equations we have

$$x_1 + x_1^* = x_2 + x_2^*.$$

Hence

$$(x_1 + x_1^*, y_1 + y_1^*) R (x_2 + x_2^*, y_2 + y_2^*).$$

This means that the relation is a homomorphic equivalence relation.

The equivalence classes $\bmod R$ are of the form: $\{x\} \times (0, \infty)$. We denote the set of all equivalence classes $\bmod R$ by S/R. We define an operation in S/R in the following manner. Let $\{x\} \times (0, \infty)$ and $\{y\} \times (0, \infty)$ be any two elements in S/R. Then

$$\{x\} \times (0, \infty) + \{y\} \times (0, \infty) = \{x + y\} \times (0, \infty).$$

Since for any two positive real numbers x and y the number $x + y$ is unique, the operation defined on S is well-defined. This operation is associative, because the operation of addition in the set of positive real numbers is associative. Hence the set of equivalence classes $\bmod R$ with the operation of addition is a semigroup.

We define the natural mapping n from S onto S/R by assigning each element (x, y) to the equivalence class $\{x\} \times (0, \infty)$. We show that the mapping n is an algebraic homomorphism. Let (x, y) and (x^*, y^*) be two arbitrary elements in S. Then $n(x, y) = \{x\} \times (0, \infty)$ and $n(x^*, y^*) = \{x^*\} \times (0, \infty)$ and $n[(x, y) + (x^*, y^*)] = \{x + x^*\} \times (0, \infty)$. But

$$n(x, y) + n(x^*, y^*) = \{x\} \times (0, \infty) + \{x^*\} \times (0, \infty) = \{x + x^*\} \times (0, \infty).$$

Hence

$$n(x, y) + n(x^*, y^*) = n(x, y) + (x^*, y^*).$$

This shows that the mapping n is an abstract homomorphism.

Now we topologize the semigroup S/R with the quotient topology with respect to the mapping n. That is, a subset $U \times (0, \infty)$ is open in S/R if and only if $n^{-1}[U \times (0, \infty)]$ is open in S. We observe that

$$n^{-1}[U \times (0, \infty)] = U \times (0, \infty).$$

Hence a subset $U \times (0, \infty)$ of S/R is open if and only if the U is open in the usual topology of $(0, \infty)$.

If a subset $U \times V$ is open in S, then the subset

$$n^{-1}[U \times (0, \infty)] = U \times (0, \infty)$$

is also open in S. Hence S satisfies the condition A.

We show that the natural mapping n from S onto S/R is continuous and open. Let $U \times (0, \infty)$ be an open set in S/R. Then $n^{-1}[U \times (0, \infty)]$ which equals $U \times (0, \infty)$ is open in S. Hence n is continuous. Now let $U \times V$ be an open subset of S. Then $n(U \times V) = U \times (0, \infty)$ is open in S/R according to the observation of the last paragraph. Hence n is an open mapping.

Finally we show that the semigroup operation in S/R is continuous. Let $\{x\} \times (0, \infty)$ and $\{y\} \times (0, \infty)$ be any two elements in S/R such that

$$\{x\} \times (0, \infty) + \{y\} \times (0, \infty) = \{x+y\} \times (0, \infty).$$

Let $W \times (0, \infty)$ be an open neighborhood of $\{x+y\} \times (0, \infty)$. Then since the addition is continuous in the semigroup of positive real numbers, for an open neighborhood W of $x+y$, there are open neighborhoods U of x and V of y such that $U + V \subset W$. Choose $U \times (0, \infty)$ as an open neighborhood of $\{x\} \times (0, \infty)$ and $V \times (0, \infty)$ as an open neighborhood of $\{y\} \times (0, \infty)$.

Then

$$U \times (0, \infty) + V \times (0, \infty) = (U + V) \times (0, \infty) \subset W \times (0, \infty).$$

This shows that the semigroup operation in S/R is continuous.

O «paradoxo dos gémeos» e «tempo formal»

por **António Brotas**
(Centro de Cálculo Científico, Instituto Gulbenkian de Ciência)

O tempo é uma grandeza que se mede com relógios. Relógios são máquinas que se podem comprar na Suissa(1). Estas duas sólidas verdades nem sempre são respeitadas nos textos sobre a Teoria da Relatividade.

Como, com frequência, em sobreposição ao conteúdo físico da teoria, se instalam ideias «relativistas», produtos do simples poder invocador da palavra relatividade, que conduzem a paradoxos relacionados com o tempo, surgem textos em que os autores se dedicam a definir «tempos» convenientemente elaborados para levantar esses paradoxos.

Um exemplo flagrante desta tendência é-nos dado pelo artigo: «Proper time, apparent time, and formal time in the twin paradox» de V. Hlavaty [1].

Ora, qualquer relógio suisso desmentiria ao «tempo formal» definido neste texto a qualidade de ser tempo.

Consideramos importante comentar este artigo para sublinhar a diferença que existe entre o hábil manipular do aparelho matemático da teoria e a compreensão do que ela quer dizer em termos de comportamento das coisas.

*

* *

Vejamos em primeiro lugar quais os paradoxos relacionados com o tempo que correntemente aparecem na Teoria da Relatividade.

O primeiro paradoxo.

A Teoria da Relatividade Restrita pode ser enunciada do seguinte modo: As coordenadas espaciais (ortonormais) e temporal de um acontecimento em dois referenciais de inércia estão relacionadas entre si pelas fórmulas de transformação de Lorentz:

$$(1) \qquad x' = \frac{x + v\,t}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,,$$

$$t' = \frac{t + x\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,; \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

(no caso dos eixos Ox e Ox' dos dois referenciais serem paralelos a $\vec{v}$ e das origens coincidirem).

De (1) obtemos com facilidade

$$(2) \qquad t' = t\sqrt{1-\beta^2} + \frac{x'\,v}{c^2}$$

fórmula que permite pôr em evidência o resultado seguinte:

Um relógio B, móvel com uma velocidade *constante* em relação a um referencial de

(1) É corrente nos textos de Relatividade falar-se em «tempo biológico». Consideramos que o tempo biológico vivido por um ser vivo é o mesmo que é marcado por um relógio que o acompanhe e parece-nos que os relógios-relógios sempre são mais precisos e mais cómodos que os relógios biológicos. Para estabelecer as relações entre este texto e esses outros basta fazer corresponder «tempo biológico» ao que designamos por «tempo medido por relógios».

inércia S, atraza-se em relação a relógios *iguais* fixos em S.

Com efeito, sendo x' a coordenada (constante) do relógio B num referêncial de inércia S', móvel em relação a S com a velocidade v, a fórmula (2) permite escrever:

$$(3) \qquad t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1)\sqrt{1-\beta^2}$$

em que t'_2 e t'_1 representam o tempo marcado pelo relógio de B nos instantes 2 e 1 (1) e t_2 e t_1 o tempo marcado pelo relógios de S (fixos em S) que estão próximos do relógio B nos instantes 1 e 2.

Este resultado surge como um paradoxo quando raciocinamos do seguinte modo: «Se os relógios fixos em S' se atrazam em relação aos relógios fixos em S, *então* os relógios fixos em S avançam em relação aos relógios fixos em S'».

A ser assim, haveria de facto uma distinção entre os referênciais S e S' contrária ao Princípio da Relatividade que exige a equivalência de todos os referênciais de inércia.

O raciocínio indicado não pode, porém, ser usado em Relatividade. Com efeito, a sua validade pressupõe que simultaneidade tenha um significado absoluto o que não verdade em Relatividade ($t'_2 = t'_1$ não implica $t_2 = t_1$).

O Princípio da Relatividade é de facto respeitado. Em (3), t'_2 e t'_1 representam o tempo marcado por um mesmo relógio e t_2 e t_1 o tempo marcado por relógios diferentes. O relógio B atrasa-se em relação aos relógios fixos em S, mas é sucessivamente comparado *com diferentes relógios de* S.

Consideremos agora o relógio A fixo em S. As fórmulas inversas de (1) permitem escrever

$$(2') \qquad t = t'\sqrt{1-\beta^2} - \frac{x\,v}{c^2}.$$

(1) O instante t_1 marcado pelo relógio B e a posição do relógio B nesse instante definem o acontecimento 1 da linha de Universo de B.

Sendo x a coordenada (constante) de A em S temos

$$(3') \qquad t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1)\sqrt{1-\beta^2},$$

em que t_2 e t_1 representam o tempo marcado pelo relógio A e t'_2 e t'_1 o tempo marcado por dois relógios fixos em S' que no instante inicial e no instante final se cruzam com o relógio A (1). A atrasa-se portanto em relação aos relógios de S'.

Em conjunto temos: cada relógio de S', B por exemplo, atrasa-se em relação aos relógios fixos em S que encontra no seu caminho e cada relógio fixo em S, A por exemplo, atrasa-se em relação aos relógios fixos em S' que encontra (2). Há perfeita equivalência entre um e outro referêncial. O Princípio da Relatividade é pois respeitado.

Esta questão só foi considerada um paradoxo, no início, quando a Teoria da Relatividade estava ainda insuficientemente divulgada. A sua compreensão, hoje faz parte da compreensão elementar da teoria.

(Em linguagem da geometria espacio-temporal o resultado (3) enuncia-se: dados dois acontecimentos 2 e 1, o comprimento do segmento que liga 2 a 1 é menor ou igual à diferença $t_2 - t_1$, em que t_i é o instante em que num dado referêncial de inércia se verifica o acontecimento i. A igualdade é válida quando os dois acontecimentos 2 e 1 se verificam no mesmo ponto do referêncial considerado. A diferença $t_2 - t_1$, igual então ao comprimento do segmento de Universo que liga 2 a 1, é chamada intervalo de tempo próprio).

(1) 1 e 2 são agora acontecimentos da linha do Universo de A.

(2) Podemos ainda dizer: É cada vez maior o avanço dos relógios de S em relação a *um* certo relógio de S' e é cada vez maior o atrazo de *um* certo relógio de S em relação aos relógios de S'. E vice-versa.

O 2.° paradoxo. O paradoxo dos gémeos.

Seja A um observador imóvel num referencial de inércia S e B um observador que inicialmente se afasta de A com uma velocidade constante v. Atingido um ponto C (fixo em S), B inverte o sentido da marcha e regressa a A com a mesma velocidade v.

Sendo d a distância A a C e t_0 o instante inicial de passagem de B por A, o observador B atinge C no instante $t_1 = t_0 + d/v$ e atinge de novo A no instante $t_2 = t_0 + 2\,d/v$. (t_0, t_1 e t_0 são valores indicados por relógios fixos em S e acertados entre si).

O estudo anterior diz-nos que um relógio que B leve no bolso se atrasa em relação aos relógios fixos em S. Durante a viagem de A para C esse relógio anda $(t_1 - t_0)\sqrt{1-\beta^2}$ e durante a viagem de regresso de C para A $(t_2 - t_1)\sqrt{1-\beta^2}$.

Neste problema os dois observadores tocam-se nos instantes inicial e final. Enquanto o relógio de A andou $(t_2 - t_0)$ o relógio de B andou só $(t_2 - t_0)\sqrt{1-\beta^2}$. Atrasou-se portanto $\Delta = (t_2 - t_0)\,(1 - \sqrt{1-\beta^2})$. Este atraso é o atraso de *um* relógio em relação a *um outro* relógio. A situação é diferente da do problema anterior em que vimos o atrasar de um relógio em relação a um conjunto de relógios.

O tempo que efectivamente vive cada um dos observadores é o tempo marcado pelo relógio que traz no bolso. Se A e B forem gémeos, no regresso da viagem, B vai encontrar A mais velho (tendo efectivamente vivido mais tempo) do que ele próprio.

Este resultado é um facto afirmado pela Teoria da Relatividade. A surpresa que pode causar não deve ser confundida com a constatação de um paradoxo. Um paradoxo surge quando encontramos um resultado contraditório com um outro resultado ou com um princípio de que não estamos dispostos a abdicar. Tal não se verifica neste caso como vamos procurar mostrar.

Mas vejamos em primeiro lugar como HLAVATY trata a questão no artigo referido. Na primeira parte do artigo escreve:

«From the point of view of geometry the only paradoxical thing about this problem is its name».

Chamando em seguida a, b e c aos acontecimentos passagem de B por A, chegada de B a C e segunda passagem de B por A, mostra que o resultado: *tempo medido pelo relógio de A superior ao tempo medido pelo relógio de B*, é só a tradução do resultado geométrico.

$$(a\,b) > (b\,c) + (c\,a)$$

em que $(a\,b)$ é o comprimento, em métrica pseudo-euclideana, do segmento de Universo que vai de a a b.

Seríamos tentados a dizer que o artigo podia acabar aqui. Na página seguinte HLAVALY, porém, escreve:

«On the other hand, there is something deeper in this problem than meets the eye on first glance. From the *relativistic point de view* the statement that B recedes from A and retuns to A is equivalent to the statement that A recedes from B and returns to B».

O sublinhado é nosso. Este *ponto de vista relativista* é, como dissemos no início, um ponto de vista induzido pela prática usual da palavra relatividade, mas não pela Teoria da Relatividade.

A Teoria da Relatividade, bem ao contrário, estabelece uma clara distinção entre o que acontece ao observador A e o que acontece ao observador B. Enquanto que A está sempre imóvel num referêncial de inércia S, B está inicialmente imóvel num referencial de inércia S' e depois num outro S''. *É esta diferença* que tem como consequência a diferença de marcha dos relógios de A e de B. Ignorá-la, é fazer surgir este resultado como um paradoxo.

Hlavaty defronta-se com esta dificuldade porque considera que «do ponto de vista relativista» A e B estão nas mesmas circunstâncias. No seguimento do artigo procura resolvê-la, ou melhor, procura evitá-la com meios artificiosos que comentaremos adiante. De momento queremos só sublinhar que não nos defrontamos com esta dificuldade dado que consideramos que do ponto de vista da Teoria da Relatividade *é diferente* o que acontece a A e o que acontece a B.

Podem no entanto surgir outras dificuldades.

Uma outra maneira errada de abordar o problema consiste na aceitação do raciocínio seguinte:

«Enquanto A esteve sempre imóvel num referencial de inércia, B esteve imóvel num referencial de inércia excepto no período (que podemos supôr instantâneo) em que invérteu a marcha em C. *Então* a diferença na marcha dos relógios *só* pode ser devida *ao que se passa* nessa inversão de marcha».

A aceitação deste ponto de vista conduz imediatamente a um paradoxo. Com efeito a diferença acusada pelos relógios à chegada de B a A é $\Delta = \frac{2d(1-\sqrt{1-\beta^2})}{v}$. Se B, mantendo a mesma velocidade v, inverter a marcha não no ponto C mas no ponto C' à distância d' de A o atraso passa a $\Delta' = \frac{2d'}{v} \ (1-\sqrt{1-\beta^2})$. Mas o que se passa em C' é rigorosamente o que se passava em C. Sendo os atrasos diferentes não podem portanto ser devidos *ao que se passa na inversão de marcha*. (Estão votadas ao fracasso todas as tentativas para explicar a diferença Δ por meio de eventuais efeitos devidos à aceleração em C).

Como explicar então esta diferença?

Há que não pedir à teoria mais do que ela nos tem a dar, mas há que utilizar o que ela nos dá. O problema dos gémeos não é mais do que a sobreposição de dois problemas idênticos ao que consideramos quando consideramos o «1.º paradoxo». Ora, se este primeiro paradoxo é assunto esclarecido, também o segundo o pode ser sem apelo ao que quer que seja de diferente.

Procuremos em primeiro lugar responder a uma pergunta:

Há em relatividade efeitos devidos à velocidade?

O Princípio da Relatividade afirmando a equivalência de todos os referenciais de inércia nega, (em Mecânica Clássica e em Relatividade), a possibilidade de efeitos absolutos devidos à velocidade. Isto não significa, porém, impossibilidade de existência de efeitos relativos. O atrasar do relógio de um observador B que se move num referencial S é bem o exemplo de um efeito relativo devido à velocidade. (Efeito que existe em Relatividade e não em Mecânica Clássica).

A ideia de que «em Relatividade não existem efeitos devidos à velocidade» tem no entanto sido tão divulgado e tornou-se tão corrente que se nota nos textos de Relatividade como que uma espécie de retraimento em afirmar o que claramente é indicado pelas equações de Lorentz, a saber, que em Relatividade há efeitos relativos devidos à velocidade (e até mais do que em Física Clássica).

Em consequência, vem constantemente ao decima uma «necessidade de explicar» o atraso do relógio de um observador em movimento. Em vez de encarar este atraso como um efeito relativo devido à velocidade (e inteiramente compatível com o princípio da Relatividade como já vimos) há autores que procuram ainda outras «explicações».

O atraso do relógio do observador em movimento rectilíneo e uniforme num referencial e o atraso do relógio do observador que sofre inversão de marcha e volta ao ponto inicial, um e outro, são efeitos relativistas devidos à velocidade. Não há que procurar outras explicações, há só que mostrar, no segundo caso como já foi mostrado no primeiro, que o efeito em questão é compatível com o Princípio da Relatividade.

A demonstração fica logo feita quando é feito notar que o segundo problema não é mais do que a sucessão de dois problemas iguais ao primeiro. Mas, dadas as dificuldades que a questão tem levantado, uma análise mais detalhada talvez não seja excessiva.

Problema dos gémeos e Princípio da Relatividade.

Partamos do facto assente (e compatível com o Princípio da Relatividade) de que o relógio de um observador se atrasa em relação aos relógios de um referencial no qual se move com uma velocidade constante.

Encaremos o problema dos gémeos do ponto de vista do referêncial S em que A está imóvel.

O observador B está em movimento e o seu relógio atrasa-se em relação aos relógios fixos em S. Se, inicialmente, o relógio de B estiver acertado com o relógio de A, ao chegar a C, estará atrasado em relação a um relógio fixo em C e acertado por A. Durante o regresso de C a A o relógio de B contínua a atrasar-se. É pois clara a razão do atraso do relógio de B à chegada a A.

Encaremos agora o problema do ponto de vista dos referênciais de B. B está inicialmente imóvel num referêncial S' que se move em relação a S com a velocidade v e, depois da inversão de marcha, fica ímóvel num outro referêncial S'' que também se move em relação a S com a velocidade v, mas em sentido contrário.

O relógio do observador A atrasa-se constantemente em relação aos relógios fixos em S' e em relação aos relógios fixos em S''.

Vamos supôr que inicialmente todos os relógios de S' estão acertados com o relógio B e que os relógios de S'' estão acertados entre si e de modo tal que, quando B chega a C, o relógio de S'' que encontra está acertado pelo seu. (Depois da inversão de marcha B viaja lado a lado com este relógio). Satisfeitas estas condições B estará acertado com os relógios de S' na primeira fase da viagem e com os relógios de S'' na segunda fase. Admitamos ainda que A está acertado com B no momento inicial.

A está em movimento em relação a S' em relação a S''. Durante um período comparemos o relógio de A com os relógios de S'. O relógio de A atrasa-se. Como na fase final da experiência temos de comparar o relógio de A com o relógio de B (que nessa altura estará acertado com os relógios de S'') passamos *num momento qualquer* a comparar o relógio de A com os relógios de S''. (Por outras palavras: consideremos um acontecimento na linha de Universo de A. Até esse acontecimento estudemos A do ponto de vista de S' e depois do ponto de vista de S'').

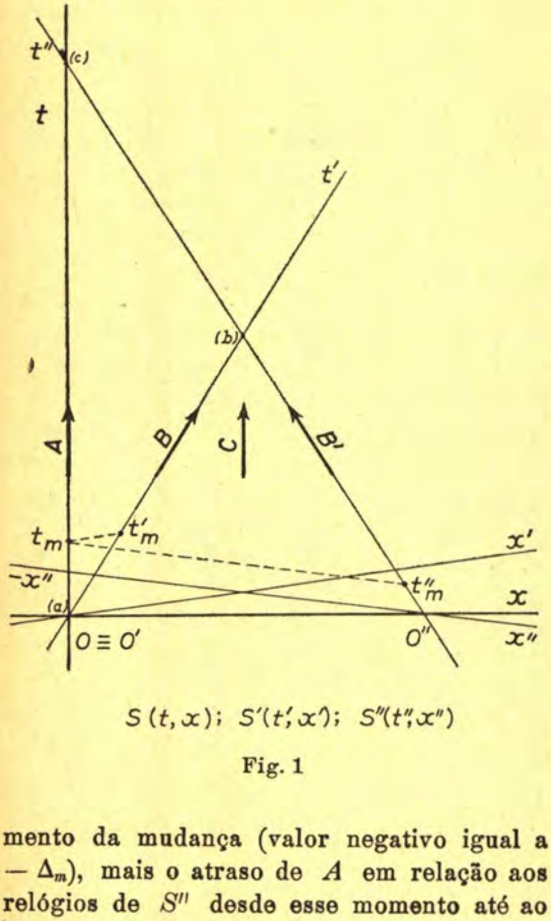
No momento da mudança[1] A contacta com um relógio fixo em S' e com um relógio fixo em S''. Um cálculo (que pode ser deixado como exercício simples) mostra que *nesse* momento *esse* relógio de S'' está atrazado em relação a *esse* relógio de S' de

$$(4) \qquad \Delta_m = t'_m - t''_m = (t_2 - t_0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sqrt{1-\beta^2}\right).$$

valor independente do momento considerado.

[1] Mudança de sistema de referência e não mudança física, bem entendido.

Como A está acertado com B no momento inicial e B marcha acertado com os relógios de S'' na fase final, temos que o atraso de A em relação a B no encontro final é dado pela soma do que A se atrasou em relação aos relógios de S' até ao momento da mudança, mais o avanço do relógio de S'' em relação ao relógio de S' no mo-



$S(t,x);\ S'(t',x');\ S''(t'',x'')$

Fig. 1

mento da mudança (valor negativo igual a $-\Delta_m$), mais o atraso de A em relação aos relógios de S'' desde esse momento até ao encontro final.

Um cálculo simples mostra que a soma da primeira e terceira parcelas é igual a $(t_2-t_0)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$.

A soma total tem o valor negativo $(t_2-t_0)(\sqrt{1-\beta^2}-1)$.

Vemos que, no momento do reencontro, o relógio de A está avançado em relação ao de B sem ter deixado de se atrasar sempre em relação aos relógios dos referenciais S' e S'' em que B esteve fixo. Em tudo foi respeitado o Princípio da Relatividade.

O «tempo formal» de Hlavaty.

Vejamos agora a continuação do artigo de Hlavaty.

Dado o ponto de vista «relativista» que adopta, para Hlavaty, o atraso do relógio de B no problema dos gémeos é uma dificuldade, uma espécie de facto contra natura que procura evitar.

Adopta então a atitude de definir uma variável a que chama «tempo formal» convenientemente escolhida de modo a que o «tempo formal» de B venha coincidir com o «tempo formal» de A no momento do reencontro. Fala em seguida de relógios que medem o «tempo formal». Para estes «relógios» a «dificuldade», naturalmente, desaparece.

De facto, a base de partida de Hlavaty não é pròpriamente a Teoria da Relatividade (teoria física) mas sim a consideração de um espaço pseudo-euclideano, objecto matemático utilizado no aparelho matemático da teoria.

(Enunciamos atraz a Teoria da Relatividade falando de fórmulas de Lorentz, de referênciais de inércia e de coordenadas espaciais e temporais, coordenadas estas que são grandezas físicas mensuráveis com réguas e relógios. Foi esta a formulação inicial de Einstein. Posteriormente, Minkovski apresentou uma formulação elegante e fecunda (os desenvolvimentos o provaram) que se pode resumir assim: o espaço-tempo é um espaço pseudo-euclideano. Este segundo enunciado identifica o comprimento de um segmento do espaço-

-tempo dotado de uma métrica pseudo-euclideana com o tempo medido por um relógio cujo movimento coincide com esse segmento. *É esta interpretação que dá ao segundo enunciado um conteúdo igual ao do primeiro.*)

HLAVATY, partindo do espaço-euclideano, para vir ao encontro da Física, tem de identificar objectos matemáticos com grandezas físicas. (A sua marcha é em sentido contrário da inicial que foi o da elaboração do aparelho matemático a partir das entidades físicas). Quando a identificação o conduz a factos que considera desagradáveis permite-se mudá-la.

Em certa altura escreve:

«Let us return to the formula A. One switch from the geometrical interpretation to the physical application by identifying the (geometrically defined) proper time with the biological time. Although some interesting conclusions could be drawn from this identification we shall not deal with them because in this paper we are interested only in the geometrical aspect of the problem. In other words, we shall investigate only the geometrical invariants without attempting to identify them with physical (biological) notions».

Em linhas anteriores definiu geomètricamente o tempo próprio como o comprimento da linha de Universo. Apesar de reconhecer que a identificação deste tempo próprio com o tempo biológico (nós diríamos tempo medido por relógios suissos) conduz a conclusões interessantes, como conduz também a resultados que considera não relativistas (o atraso do relógio de B no problema dos gémeos dado pela fórmula A), passar a definir, também geomètricamente, um «tempo formal» distinto do tempo próprio, distinto portanto do comprimento da linha do Universo.

Diz preocupar-se ùnicamente com o aspecto geométrico do problema mas termina falando em relógios que medem o tempo formal. («In the second phase of the experiment either one of the observers sees the other observer's clock (as compared to his clock) accelerating with the increasing time so that when the observers meet again their clocks are synchronized»).

Se a construção de HLAVATY fosse consistente constituíria uma teoria física diferente EINSTEIN. Poderiam ser sugeridas experiências para averiguar se os relógios (suissos) medem o «tempo formal» de HLAVATY ou o tempo próprio (comprimento do segmento do espaço tempo).

Mas vejamos como funcionariam relógios que medissem o «tempo formal».

Dado um acontecimento E, (ponto do espaço-tempo), um referencial S_i e um ponto O_i escolhido para origem do sistema de eixos, HLAVATY define a tempo formal $[E]_i$ do acontecimento E em relação ao referêncial S_i (de facto em relação à origem O_i) como o comprimento do segmento $E\,O_i$ do espaço-tempo (dotado duma métrica pseudo-euclideana).

Estudando em seguida o problema dos gémeos adopta em primeiro lugar como referêncial o referêncial de A e com a origem o acontecimento encontro inicial de A com B. Admite em seguida que os observadores A e B tem relógios que medem o tempo formal referente a este referêncial e a esta origem. Como não podia deixar de ser o relógio de B vai estar sincronizado com o relógio de A no momento em que os dois observadores se tornam a encontrar. (O tempo formal, com efeito, só depende das coordenadas).

Mas suponhamos que um dos observadores, B por exemplo, leva no bolso não só o relógio que mede o tempo formal $[\ ]_A$ referente ao referêncial A e à origem considerados, mas também um outro relógio que mede o tempo formam $[\ ]_i$ referente a um outro qualquer referêncial S_i e a uma outra origem O_i. A definição e a geometria do espaço-tempo mostram que estes dois relógios, que andam juntos no bolso de B, se desacertam constantemente um do outro (1). Não pretendem os suiços que seja esta uma qualidade dos seus relógios.

Hlavaty estuda em seguida o problema dos gémeos do ponto de vista de B mas, neste segundo estudo, os relógios dos observadores A e B são outros relógios. Conseguem chegar acertados ao encontro (2), mas andam desacertados dos relógios anteriormente utilizados no estudo do problema «do ponto de vista A». Cada observador teria de ter assim vários «relógios» para medir distintos «tempos formais».

Parecem-me estas divergências bem suficientes para poder dizer que, como conceito físico, «tempo formal» não é tempo. Como do ponto de vista geométrico não é mais do que a distância a um ponto fica-nos que as relações invariantes apresentadas no artigo são simples relações da geometria dos triângulos (3).

Uma questão em suspenso.

No estudo que fizemos do problema dos gémeos não consideramos qualquer espécie de efeito devido às acelerações. A razão foi esta: o observador A esteve sempre imóvel num referêncial de inércia e o mesmo se passou com B, excepto no período de inversão de marcha em C que consideramos instantâneo. Esta inversão de marcha só pode ser devida a uma causa exterior, um choque elástico, por exemplo. Como a consideramos instantânea e como excluímos a hipótese de saltos instantâneos na marcha de um relógio não tivemos que considerar no problema dos gémeos qualquer efeito devido à aceleração. Uma pequena alteração no enunciado permite de resto mostrar claramente que neste problema os atrasos nada têm que ver com acelerações. Em vez de admitirmos que B altera a marcha em C, vamos admitir que B se cruza em C com outro observador B' que marcha em sentido contrário e que no momento do cruzamento acerta o relógio por B. Neste problema não há acelerações de qualquer espécie e, estando B acertado por A no início e sendo B' acertado por B em seguida, vamos, no final, encontrar entre A e B' o mesmo atraso $(t_2 - t_0)(1 - \sqrt{1-\beta^2})$. Este atraso é pois devido às velocidades e não às acelerações.

Mas, ser *este* atraso devido às velocidades e não às acelerações não exclui a possibilidade de *noutros* problemas se vêrificarem efeitos temporais devidos às acelerações.

O problema pode ser apresentado da seguinte maneira:

A Teoria da Relatividade Restrita diz-nos que o relógio de um observador B, em movimento em relação a um referencial de inércia S_0 com uma velocidade v *constante*, se atrasa em relação aos relógios de S_0 segundo a lei

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1)\sqrt{1-\beta^2}. \tag{5}$$

Mas é legítimo generalizar e escrever

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\beta^2}\, dt \tag{6}$$

no caso de v variável?

Não se trata de uma simples questão de cálculo integral.

A simples validade (5) no caso de v constante não implica a validade de

$$dt' = \sqrt{1-\beta^2}\, dt \tag{7}$$

(1) O «tempo» medido por um não é igual nem sequer função linear do «tempo» medido pelo outro.

(2) E à custa de sérias dificuldades como seja o estar o relógio de A parado durante um período.

(3) E no entanto foram transcritas sem comentário crítico no resumo do artigo feito por G. H. Whitrou publicado na Mathematical Reviews e repetido na Physics Abstracts (Setembro 1961).

no caso de v variável. Implica só a validade de

$$(8) \qquad dt' = f(v, \gamma, \cdots) dt$$

em que f é uma função à priori não determinada de v e de γ aceleração (e eventualmente de outras derivadas de ordem superior) que se reduz a $\sqrt{1-\beta^2}$ quando v é constante.

Não fica à priori excluida a hipótese da relação geral ser do tipo

$$(9) \quad dt' = \sqrt{1-\beta^2 + K(\gamma)}\, dt \quad \text{com } K(0)=0,$$

relação que conduz a um resultado diferente de (6).

O problema é pois este: É possível afirmar a validade de (6) no caso de v variável? A resposta afirmativa significa afirmação da não existência de efeitos temporais devidos à aceleração.

O problema é delicado. Muitos autores têm tendência em dizer que se trata de um problema de Relatividade Generalizada. Nós diremos, de preferência, que se trata de um problema que se apresenta em Relatividade Generalizada do mesmo modo que em Relatividade Restrita.

Dado que (5) não implica (6) a pergunta que se nos põe é esta: A Teoria da Relatividade Restrita afirma unicamente (5) ou afirma também (6) (1)?

(1) Podemos avançar um argumento em favor da validade de (6) no caso de v variável. Uma fórmula física tem de ser correcta do ponto de vista dimensional. Numa fórmula como a fórmula (9) o termo $K(\gamma)$ tem de ser de dimensão nula. Ora, para o compor, só dispomos de uma grandeza γ, de dimensão LT^{-2} e de uma constante c de dimensão LT^{-1}. Temos como única solução $K(0)=0$.

A ser verdade só a primeira parte, a Teoria da Relatividade Restrita, como teoria sobre o tempo, seria uma teoria incompleta no sentido de que, dado o movimento de um corpo, só em casos particulares a teoria permitiria calcular o tempo medido por um relógio que acompanhasse esse corpo.

É em geral aceite a validade de (6) (1). Em favor desta aceitação joga muito a necessidade de se dispor de uma teoria completa.

Um autor como Arzeliès [2] sugere que se façam experiências para estudo deste assunto. É uma atitude a não desencorajar. O problema de uma ciência como a Mecânica é o do confronto de uma estrutura matemática que pretendemos desenvolver com uma realidade que procuramos conhecer. Convem às vezes pedir à realidade que nos informe directamente.

[1] Journal of Mathematics and Mechanics. Vol. 9, No 5, Sept. 1960, p. 733-744.

[2] «La cinematique relativiste» (1955). «La dynamique relativiste et ses applications» Fasc. II (1958). «Relativité généralisée. Gravitation» Fasc I (1961). Gauthier-Villars. Nestes livros o autor dá cêrca de 150 referências relacionadas com os paradoxos do Tempo em Relatividade.

(1) A extensão deste ponto de vista à Relatividade Generalizada permite calcular o tempo próprio de um corpo que não segue uma geodesica do espaço-tempo, isto é, sujeito a forças além das gravitacionais. O problema põe-se em Relatividade Generalizada do mesmo modo que em R. R., só que neste caso o espaço-tempo é mais complicado.

Cónicas, Ortópticas e envolventes das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro

por F. Peres Rodrigues
Engenheiro Civil, especialista do Serviço de Barragens, chefe da Divisão de Fundações e Túneis, LNEC

Chama-se isóptica duma curva plana ao lugar geométrico dos pontos desse plano donde é possível traçar duas tangentes à curva formando um ângulo constante; se esse ângulo for recto a isóptica recebe o nome particular de ortóptica.

Demonstra-se que a isóptica duma cónica centrada é uma cíclica de 4.º grau, que admite dois eixos de simetria, denominada espírica de PERSEUS (1), e ainda que a isóptica duma parábola é uma hipérbole. Neste artigo, estudam-se as ortópticas e as envolventes das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, das cónicas, e as suas propriedades mais importantes.

1 — Cónicas centradas (elipse e hipérbole)

Seja:

$$(1)\qquad F(x,y,t)=(1-\varepsilon^2)\,x^2+ y^2-a^2(1-\varepsilon^2)\,t^2=0$$

a equação duma cónica centrada relativa aos seus eixos, em coordenadas cartesianas homogéneas, sendo a o semi-eixo existente no eixo que passa pelos focos, eixo dos x, e ε a excentricidade da cónica centrada (fig. 1).

1.1 — As tangentes tiradas de um ponto P de coordenadas (X,Y,T) para a cónica centrada, obedecem à equação genérica:

$$(2)\qquad \left(X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}+T\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2- -4F(x,y,t)\;F(X,Y,T)=0$$

A expressão (2), atendendo a (1), em coordenadas cartesianas e ordenada em relação a y, toma a forma particular:

$$(3)\qquad (a^2-X^2)\,y^2-2\,(a^2-Xx)\,Yy+ +[a^2(1-\varepsilon^2)(X-x)^2+Y^2(a^2-X^2)]=0$$

que resolvida permite escrever:

$$(4)\qquad y=\frac{(a^2-Xx)Y\pm a\,(X-x)\sqrt{Y^2-(1-\varepsilon^2)\,(a^2-X^2)}}{a^2-X^2}$$

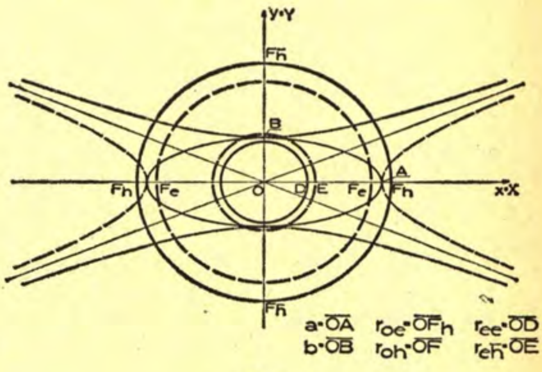


Fig. 1

A expressão (4) representa a equação de duas rectas tangentes à cónica centrada (1), passando pelo ponto P, de coeficientes angulares:

$$(5)\qquad m_{1,2}=\frac{-XY\pm a\sqrt{Y^2-(1-\varepsilon^2)(a^2-X^2)}}{a^2-X^2}$$

(1) Ver, por exemplo, AUBERT e PAPELIER — Exercices de géométrie analytique, tome II, Paris 1948.

Para que as duas tangentes (4) sejam ortogonais, devem os seus coeficientes angulares (5) obedecer à condição:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \tag{6}$$

o que conduz a:

$$X^2 + Y^2 = a^2(2 - \varepsilon^2) = r_0^2 \tag{7}$$

ou:

$$\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 + \varepsilon^2 = 2\,. \tag{8}$$

A expressão (7) mostra que a ortóptica duma cónica centrada é uma circunferência concêntrica de raio r_0 de valor $a\sqrt{2-\varepsilon^2}$, real, nulo ou imaginário, conforme a excentricidade ε for, respectivamente, inferior, igual (hipérbole equilátera) ou superior a $\sqrt{2}$ (hipérbole alongada). Embora a expressão (1) não comporte o caso da parábola ($\varepsilon = 1$ e $a = \infty$), a expressãs (7) dá para ortóptica da parábola uma recta (circunferência de raio infinito), como adiante se verá. Na fig. 2 encontra-se representada a tracejado, no sistema de eixos $\left(\frac{r_0}{a}, \varepsilon\right)$, a expressão (8) e indicada a natureza da ortóptica em função da natureza da cónica.

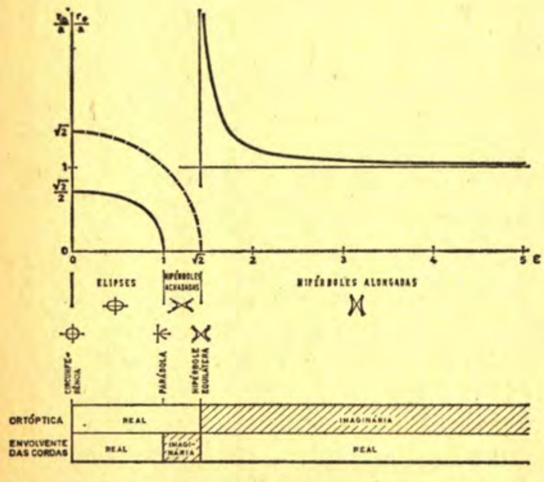


Fig. 2

1.2 — No caso da elipse a excentricidade ε, é dada por

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \tag{9}$$

e a sua substituição em (7) conduz a:

$$X^2 + Y^2 = a^2 + b^2 = r_{oe}^2 \tag{10}$$

em que b é o semi-eixo menor da elipse (fig. 1).

A expressão (10) mostra que:

a) a área limitada pela circunferência ortóptica da elipse é igual à soma das áreas dos seus círculos maior e menor;

b) o raio da circunferência ortóptica da elipse é igual à semi-distância focal das hipérboles conjugadas que lhe estão associadas (fig. 1);

c) a ortóptica da cincunferência, caso de $a = b = r$, é uma circunferência de raio $r\sqrt{2}$ (fig. 2).

1.3 — No caso da hipérbole a excentricidade ε é dada por:

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \tag{11}$$

e a sua substituição em (7) conduz a:

$$X^2 + Y^2 = a^2 - b^2 = r_{oh}^2 \tag{12}$$

em que b é o semi-eixo conjugado da hipérbole (fig. 1).

A expressão (12) mostra que:

a) a circunferência ortóptica da hipérbole só é real para a hipérbole achatada (caso de $a > b$), reduzindo-se a um ponto, centro da cónica, para a hipérbole equilátera (fig. 2);

b) o raio de circunferência ortóptica da hipérbole achatada é igual à semi-distância focal da elipse que lhe está associada (fig. 1).

1.4 — A envolvente das cordas da cónica centrada (1) que subtendem ângulos rectos ao centro pode ser obtida a partir da intercepção de dois raios ortogonais:

$$(13) \qquad y = mx \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{m}x.$$

Assim, designando por $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ os dois pontos de intercepção, as suas coordenadas devem satisfazer as expressões (1) e (13), donde:

$$(14) \qquad x_1^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)+m^2}$$

$$\text{e} \quad x_2^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)\,m^2}{(1-\varepsilon^2)\,m^2+1}.$$

A corda genérica $\overline{P_1 P_2}$ existe na recta cuja equação é dada pela expressão:

$$(15) \qquad m(x_1 - x_2)y - (m^2 x_1 + x_2)x + (1+m^2)x_1 x_2 = 0.$$

A distância da recta à origem (15), tem por valor:

$$(16) \qquad r_e^2 = \frac{(1+m^2)\,x_1^2 x_2^2}{m^2 x_1^2 + x_2^2}$$

ou, atendendo a (14), e simplificando:

$$(17) \qquad r_e^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{2-\varepsilon^2}$$

que pode escrever-se:

$$(18) \qquad \left(\frac{r_e}{a}\right)^2 = \frac{1-\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2}.$$

A expressão (17) permite afirmar que a envolvente das cordas duma cónica centrada que subtendem ângulos rectos ao centro, é uma circunferência concêntrica de raio r_e e de equação:

$$(19) \qquad x^2 + y^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{2-\varepsilon^2}$$

real para:

$$\varepsilon < 1 \ \text{(elipse)}$$

$$\varepsilon > \sqrt{2} \ \text{(hipérbole alongada)}$$

degenerando na recta imprópria do plano, para:

$$\varepsilon = \sqrt{2} \ \text{(hipérbole equilátera)}$$

e imaginária para

$$\sqrt{2} > \varepsilon > 1 \ \text{(hipérbole achatada)}.$$

Na fig. 2 encontra-se representada, a traço cheio, no sistema de eixos $\left(\frac{r_e}{a}, \varepsilon\right)$, a expressão (18) e indicada a natureza da envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro em função da natureza da cónica. O caso da parábola ($\varepsilon = 1$ e $a = \infty$) será tratado adiante, em separado.

1.5 — No caso da elipse, a expressão (17) atendendo a (9) e (10), pode tomar as formas:

$$(20) \qquad r_{ee} = \frac{a\,b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{e} \quad r_{ee} \cdot r_{oe} = a \cdot b$$

o que permite afirmar:

a) ser o raio da circunferência envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro o quarto proporcional da semi-distância focal da hipérbole associada e dos semi-eixos da elipse dada;

b) ser o produto dos raios das circunferências ortóptica e envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, igual ao produto dos semi-eixos da elipse;

c) ter a elipse de semi-eixos r_{ee} e r_{oe} área igual à elipse dada, e quando co-axiais, interceptarem-se em quatro pontos de coordenadas

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{2-\varepsilon^2}{3-\varepsilon^2}}\,;\ \pm a\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{3-\varepsilon^2}}\right),$$

sendo a tangente do ângulo que os seus raios vectores fazem com os eixos maiores das elipses igual a $\pm\dfrac{b}{r_{oe}}$;

d) serem a ortóptica e a envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, duma circunferência, as circunferências circunscrita e inscrita aos quadrados respectivamente, circunscrito e inscrito à circunferência dada (fig. 2).

1. *6* — No caso das hipérboles conjugadas a expressão (17), atendendo a (11) e (12), toma as formas:

$$\text{para } a>b \quad r_{e\bar h}=\frac{a\,b}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad \text{e} \quad r_{oh}\cdot r_{e\bar h}=a\,b$$

(21)

$$\text{para } a<b \quad r_{eh}=\frac{a\,b}{\sqrt{b^2-a^2}} \quad \text{e} \quad r_{o\bar h}\cdot r_{eh}=a\,b$$

caracterizando $\bar h$ a hipérbole conjugada, que no presente artigo terá necessàriamente o eixo das ordenadas como eixo transverso. As expressões (21) permitem afirmar que:

a) o raio da circunferência envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro duma hipérbole é igual ao quarto proporcional da semi-distância focal da elipse associada e dos semi-eixos da hipérbole, sendo real sòmente para as hipérboles alongadas $(a<b)$;

b) o produto dos raios das circunferências ortóptica e envolvente das cordas que submetem ângulos rectos ao centro de duas hipérboles conjugadas, é igual ao produto dos semi-eixos comuns;

c) a hipérbole dada, desde que tenha excentricidade superior a $\sqrt{3}$, e a hipérbole de semi-eixos $r_{e\bar h}$ (semi-eixo conjugado — eixo das abcissas) e r_{eh} (semi-eixo transverso-eixo das ordenadas) interceptam-se em quatro pontos de coordenadas

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{\varepsilon^2-2}{\varepsilon^2-3}}\,;\ \pm a\sqrt{\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2-3}}\right),$$

sendo a tangente do ângulo dos seus raios vectores com o eixo das abcissas igual a $\pm\dfrac{b}{r_{o\bar h}}$. No caso particular da hipérbole dada ter a excentricidade de $\sqrt{3}$, as duas hipérboles são conjugadas e terão de comum os seus dois pontos impróprios;

d) a ortóptica e a envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, duma hipérbole equilátera são respectivamente, o seu centro e a recta imprópria do plano (fig. 2).

1. *7* — O lugar geométrico dos pontos de intercepção definidos em 1. 5 c) e 1. 6 c), quando referido ao sistema de eixos $\left(\dfrac{x}{a},\dfrac{y}{a}\right)$, é uma hipérbole de equação:

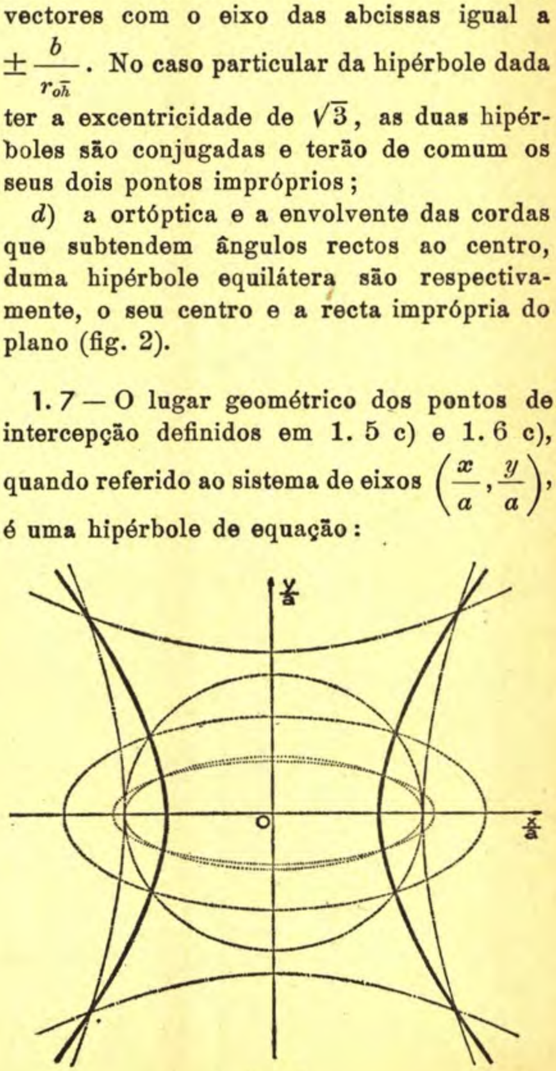


Fig. 3

(22) $$2\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{a}\right)^2=1$$

que se obtem eliminando a excentricidade ε entre as coordenadas dos pontos de intercepção (fig. 3). De notar que, neste sistema de eixos, todas as elipses e hipérboles alongadas dadas, têm o semi-eixo das abcissas unitário.

2 — Parábola

Seja:

(23) $$F(x\,,y\,,t)=y^2-4fxt=0$$

a equação duma parábola, em coordenadas cartesianas homogéneas, passando pela origem, tendo como eixo o eixo dos x e sendo f a distância do foco e da directriz à origem.

2. 1 — As tangentes traçadas de um ponto P de coordenadas (X,Y,T) para a parábola, obedecem à equação genérica (2), a qual, atendendo a (23) pode tomar a forma ordenada em relação a y:

(24) $$Xy^2-(X-x)Y+[f(X-x)^2+Y^2x]=0$$

que, resolvida, permite escrever:

(25) $$y=\frac{(X+x)\pm(X-x)\sqrt{Y^2-4fX}}{2X}$$

A expressão (25) representa as duas rectas tangentes à parábola que passam por P, de coeficientes angulares:

(26) $$m_{1,2}=\frac{Y\pm\sqrt{Y^2-4fX}}{2X}$$

pelo que, para que sejam ortogonais, deverá ser:

(27) $$X=-f$$

A expressão (27) mostra que a ortóptica duma parábola é uma recta coincidente com a sua directriz. Efectivamente a fig. 2 mostra que, para a parábola, a relação $\frac{r_o}{a}$ é igual à unidade (pois sendo a infinito, se-lo-á também r_o, raio da circunferência ortóptica), por serem r_o e a dois infinitamente grandes equivalentes.

2. 2 — A envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, não tem, relativamente à parábola, uma aplicação imediata, dado que a parábola não tem centro a distância finita; contudo, por extensão e com base na fig. 2, pode dizer-se que essa envolvente se reduz ao centro da parábola, isto é, ao ponto impróprio do seu eixo.

Resumo

Estuda-se neste artigo, em relação às cónicas, a ortóptica e a envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, e as suas propriedades mais importantes.

Résumé

On étudie dans cet article, a propos des coniques, la orthoptique et la envellope des cordes qui mènent des angles droits au centre, et leur propriétés les plus importantes.

Synopsis

A study has been made, for conics, of the orthoptic and the envelope of the chords subtending a right angle at the centre. Some important properties are also deduced for these curves.

Cardinalidade de alguns conjuntos de topologias compactas

por O. T. Alas
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil

Seja E um conjunto infinito. Quantas topologias compactas T_1 há sobre E? Compactas T_2? Metrizáveis e localmente compactas? O objectivo desta Nota é responder a essas perguntas, bem como a outras semelhantes. Provàvelmente estes resultados já sejam conhecidos, entretanto desconhecemos publicação a respeito.

No que se segue, diremos que uma topologia τ sobre E satisfaz uma certa propriedade se o espaço topológico (E, τ) a satisfizer. (Por exemplo, τ é compacta T_1 se o espaço topológico (E, τ) for compacto T_1).

Sendo Z um conjunto qualquer, $p(Z)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos de Z e $|Z|$ denota o número cardinal de Z.

1. É bem conhecido o facto de que o conjuntodas topologias T_2 sobre E tem cardinalidade igual a $2^{2^{|E|}}$ (consequência de [1], página 150, exercício 6).

Seja X o espaço topológico produto $\{0,1\}^{p(E)}$, onde sobre $\{0,1\}$ consideramos a topologia discreta. Sabemos que há um subconjunto B de X, tal que $|B| = |E|$ e, além disso, B é totalmente denso.

O conjunto $X - B$ tem cardinalidade igual a $|X|$. Para cada $y \in X - B$ consideremos o conjunto $F(y) = \{V \cap B \mid V \in V(y)\}$, onde $V(y)$ é o filtro das vizinhanças de y em X. Ora, $F(y)$ é filtro sobre B e a intersecção de seus elementos é vazia. Por outro lado, a aplicação de $X - B$ no conjunto de todos os filtros sobre B, que a cada y associa $F(y)$ é injectora. Concluímos, pois, que o conjunto dos filtros sobre E, cuja intersecção de todos os seus elementos é vazia, tem cardinalidade igual a $2^{2^{|E|}}$ (pois $|E| = |B|$ e $|X| = 2^{2^{|E|}}$).

Indiquemos por A o conjunto dos filtros sobre E cuja intersecção de todos os seus elementos é vazia.

Teorema 1. *O conjunto das topologias compactas* T_1 *sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{2^{|E|}}$.

Demonstração. Sejam a e b dois elementos distintos não pertencentes a E. Ponhamos $Y = E \cup \{a, b\}$ (note-se que $|Y| = |E|$). Para cada $F \in A$, seja $\tau(F)$ a topologia sobre Y tal que:

1) $\{x\}$ é aberto para todo $x \in E$;
2) $\{Z \cup \{b\} \mid Z \in F\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de b;
3) $\{T \cup \{a\} \mid T \subset E$ e $E - T$ é finito$\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de a.

A topologia $\tau(F)$ é compacta T_1. Por outro lado, se $F' \in A$ e $F' \neq F$, então $\tau(F) \neq \tau(F')$. Segue-se, pois, a tese.

Teorema 2. *O conjunto das topologias compactas* T_4 *sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{2^{|E|}}$.

Demonstração. Sejam a e b dois elementos distintos não pertencentes a E. Ponhamos, como no teorema anterior, $Y = E \cup$

$\cup \{a, b\}$. Para cada $F \in A$, seja $\tau(F)$ a topologia sobre Y tal que:

1) $\{x\}$ é aberto para todo $x \in E$;
2) $\{Z \cup \{b\} \mid Z \in F\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de b;
3) $\{T \cup \{a, b\} \mid T \subset E$ e $E - T$ é finito$\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de a.

A topologia $\tau(F)$ é compacta T_4. Por outro lado, se $F' \in A$ e $F' \neq F$, então $\tau(F) \neq \tau(F')$. Segue-se, pois, a tese.

2. Agora vamos estudar o que acontece com o conjunto das topologias compactas T_3 sobre E. Para isso, vamos demonstrar alguns lemas.

Lema 1. *Seja* m *um número cardinal infinito,* $\mathrm{m} \leq |\mathrm{E}|$. *O conjunto* H *das topologias sobre* E, *tais que todo o ponto de* E *admite um sistema fundamental de vizinhanças de cardinalidade menor ou igual a* m, *tem cardinalidade igual a* $2^{|\mathrm{E}|}$.

Demonstração. Seja τ pertencente a H. Então, para cada $x \in E$, fixemos um sistema fundamental de vizinhanças de x, $V(x)$, tal que $|V(x)| \leq m$. A τ associemos a família $(V(x))_{x \in E}$ construída da forma acima. Ora, para cada $x \in E$, $V(x)$ é um subconjunto de $p(E)$ de cardinalidade menor ou igual a m. (Em $p(E)$ há $|p(E)|^m$ conjuntos nessas condições, e $|p(E)|^m = 2^{|E|}$). Mostramos assim que $|H| \leq 2^{|E|}$ (pois uma topologia fica caracterizada pelos sistemas fundamentais de vizinhanças de cada um dos pontos de E). Falta mostrar que vale o sinal de igualdade.

Primeiramente, mostremos que H tem pelo menos dois elementos (evidentemente a topologia discreta sobre E pertence a H). Ponhamos $S = \{0\} \cup \{1/n \mid n \geq 1\}$ e consideremos o espaço topológico produto $S \times E$, onde S é subespaço da recta real e, em E consideramos a topologia discreta. (Note se que $|S \times E| = |E|$ e $S \times E$ não é discreto). Logo, $|H| \geq 2$.

Seja M o conjunto das topologias sobre $E \times E$, tais que todo o ponto de $E \times E$ admite um sistema fundamental de vizinhanças de cardinalidade menor ou igual a m. Como $|E \times E| = |E|$, então $|M| = |H|$.

Consideremos a aplicação de H^E em M que associa a cada família $(\tau_x)_{x \in E}$ a topologia sobre $E \times E$ que tem por base de abertos o conjunto $\{\{x\} \times Z \mid Z \in \tau_x, x \in E\}$. Esta aplicação é injectora, logo $|H|^{|E|} = |H|$ ou, ainda, $|H| = 2^{|E|}$.

Semelhantemente se demonstra o

Corolário. *O conjunto das topologias sobre* E *que são metrizáveis tem cardinalidade igual a* $2^{|\mathrm{E}|}$.

Lema 2. *Se* E *é um espaço topológico compacto* T_3, *então todo o ponto admite um sistema fundamental de vizinhanças de cardinalidade menor ou igual a* $|\mathrm{E}|$.

Demonstração. Fixemos $x \in E$. Seja $V(x)$ o conjunto de todas as vizinhanças de x. Ponhamos $D = \bigcap \{Z \mid Z \in V(x)\}$; por ser T_3 $D = \bigcap \{\overline{Z} \mid Z \in V(x)\}$, onde $\overline{Z}$ denota a aderência de Z. Existe $W(x) \subset V(x)$, com $|W(x)| \leq |E - D|$ tal que $D = \bigcap \{\overline{Z} \mid Z \in W(x)\}$. O conjunto T das intersecções finitas de conjuntos de $\{\overline{Z} \mid Z \in W(x)\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x nas condições desejadas. Com efeito, por absurdo suponhamos que exista uma vizinhança aberta U de x que não contém nenhum elemento de T. Neste caso, o conjunto $\{Y - U \mid Y \in T\}$ é base de filtro sobre E, donde, como E é compacto, tem um ponto aderente que, necessàriamente, pertence a $D - U = \emptyset$. Está demonstrado o lema.

Este lema no caso particular em que E é compacto T_2 está demonstrado em [2], página 105.

TEOREMA 3. *O conjunto das topologias compactas* T_3 *sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{|E|}$.

DEMONSTRAÇÃO. Em consequência dos lemas 1 e 2 resulta que a cardinalidade desse conjunto é menor ou igual a $2^{|E|}$. Como toda a topologia compacta T_2 é, também, compacta T_3, este teorema decorre do teorema 4 que demonstraremos mais adiante.

LEMA 3. *O conjunto das topologias compactas* T_2 *sobre* E *é equipotente ao conjunto das topologias localmente compactas* T_2 *sobre* E.

DEMONSTRAÇÃO. Denotemos por M o conjunto das topologias localmente compactas T_2 sobre E e por K, o das topologias compactas T_2 sobre E. Como $K \subset M$, em virtude do teorema de BERNSTEIN-CANTOR, basta mostrar que há uma função injectora de M em K. Seja $w \notin E$ e ponhamos $Y = E \cup \{w\}$. (Note-se que $|Y| = |E|$). A cada $\tau \in M$ associemos a topologia compactificada de ALEXANDROFF sobre Y. Como esta associação é injectora, daí decorre fàcilmente a tese.

TEOREMA 4. *O conjunto das topologias compactas* T_2 *sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{|E|}$.

DEMONSTRAÇÃO. Em vista do lema 3 e do facto de que $|E \times E| = |E|$, basta mostrar que o conjunto das topologias metrizáveis localmente compactas sobre $E \times E$ tem cardinalidade igual a $2^{|E|}$. Designemos este conjunto por M. Indiquemos por P o conjunto das topologias metrizáveis localmente compactas sobre E. Consideremos a função injectora de P^E em M que associa a cada família $(\tau_x)_{x \in E}$ a topologia sobre $E \times E$ que tem por base de abertos o conjunto

$$\{\{x\} \times Z \mid Z \in \tau_x, x \in E\}.$$

Como $|P| \geq 2$ e em vista dos lemas 1 e 2, segue-se a tese.

COROLÁRIO. *O conjunto das topologias metrizáveis localmente compactas sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{|E|}$.

OBSERVAÇÃO. Se existe uma topologia compacta metrizável sobre E, então necessàriamente $|E| \leq 2^{\aleph_0}$. Por outro lado, se $|E| = \aleph_0$, então toda a topologia compacta T_2 é metrizável ([2], página 179; lema 1).

TEOREMA 5. *Se* $|E| = 2^{\aleph_0}$, *o conjunto das topologias metrizáveis compactas sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{|E|}$.

DEMONSTRAÇÃO. O conjunto $[0,1]$, que é equipotente a E, com τ, topologia habitual, é metrizável e compacto. Para cada partição $\{X_1, X_2\}$ de E em dois conjuntos (não vazios e disjuntos), fixemos duas funções bijectoras, $f_1 : [0,1] \to E \times X_1$ e $f_2 : [0,1] \to E \times X_2$. Em $E \times E$ consideremos a topologia que tem por base de abertos o conjunto $\{f_1(Z) \mid Z \in \tau\} \cup \{f_2(Z) \mid Z \in \tau\}$. (Esta topologia é metrizável compacta. Além disso, os conjuntos $E \times X_1$ e $E \times X_2$ são abertos-fechados, conexos).

O resto da demonstração segue fàcilmente, bastando recordar que o conjunto das partições nas condições acima tem cardinalidade igual a $2^{|E|}$ ([3]).

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique,* livro 3, cap. 1 e 2, (1965), Hermann, Paris.

[2] R. ENGELKING, *Outline of General Topology,* (1968), North Holland Publishing Co., Amsterdam.

[3] E. FARAH, *Number of equivalence relations on a set,* Ciência e Cultura **18** (1966), n.º 4, pág. 437.

Cardinality of a set of topologies

by O. T. Alas
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil

Let E be an infinite set and K be the set of all topologies τ on E, such that (E,τ) is a HAUSDORFF compact connected and locally connected space. Question: Which is the cardinal number of the set K? The purpose of this note is to answer this question.

1. For any set Z, $|Z|$ denotes the cardinal number of Z.

Suppose that K is a nonempty set and let τ be a fixed element of K. Since (E,τ) is a normal connected space, the cardinality of the set E is greater than or equal to $2^{\aleph_0}$.

Now, we fix an element $b \in E$. Let us denote by τ' the product topology on $[0,1]\times E$, where E is topologized with τ and $[0,1]$ with the usual topology. Put $G=[0,1]\times E - \{(0,b)\}$. G as a subspace of $[0,1]\times E$ is a HAUSDORFF locally compact connected and locally connected space.

For each partition $\{X_1, X_2\}$ of $E-\{b\}$ (thus $E-\{b\}=X_1\cup X_2$ and $X_1\cap X_2=\emptyset$), with $|X_1|=|X_2|=|E|$, we fix two bijective functions $f_1: G\to X_1$ and $f_2: G\to X_2$. (The set of all partitions of $E-\{b\}$ under the above conditions has cardinality equal to $2^{|E|}$ by virtue of [1] and because $|E\times E|=|E|$). Putting $P=\{X_1,X_2\}$, let us denote by τ_P te topology on E such that the set

$$\{f_1(Z\cap G)\cup f_2(Z\cap G)\cup\{b\} \mid (0,b)\in Z\in\tau'\}\cup$$
$$\cup\{f_1(Z\cap G)\mid Z\in\tau'\}\cup\{f_2(Z\cap G)\mid Z\in\tau'\}$$

is an open basis of the topology τ_P.

PROPOSITION 1. (E,τ_P) *is a* HAUSDORFF *compact connected and locally connected space.*

PROOF. It is obvious that (E,τ_P) is a HAUSDORFF space. On the other hand, X_1 and X_2 are open-connected subsets and it follows immediately that (E,τ_P) is connected. The subspaces $X_1\cup\{b\}$ and $X_2\cup\{b\}$ are compact; thus (E,τ_P) is a compact space.

Finally, it is sufficient to prove that b has a fundamental system of connected neighborhoods. Let W be a connected neighborhood of b in the topological space (E,τ) and put $Z=[0,1/n[\times W$, where $n\geq 1$ is a natural number. The set Z is a connected neighborhood of $(0,b)$ in the product topological space $([0,1]\times E,\tau')$. Therefore $f_1(Z\cap G)\cup f_2(Z\cap G)\cup\{b\}$ is a connected neighborhood of b in the topological space (E,τ_P). So it follows easily that (E,τ_P) is locally connected.

2. Let $Q=\{Y_1, Y_2\}$ be another partition of $E-\{b\}$, with $|Y_1|=|Y_2|=|E|$, and let τ_Q be the correspondent topology on E. We shall prove that if $P\neq Q$, then $\tau_P\neq\tau_Q$.

On the contrary, suppose that $P\neq Q$ and $\tau_P=\tau_Q$. The sets X_1, X_2, Y_1 and Y_2 are open-connected in (E,τ_P) and $X_1\cup X_2 = Y_1\cup Y_2$. Thus $X_1=Y_1$ and $X_2=Y_2$ or $X_1=Y_2$ and $Y_1=X_2$. It follows that $P=Q$, which is impossible.

PROPOSITION 2. *The cardinality of the set* K *is equal to* 0 *or to* $2^{|E|}$.

PROOF. Since for any $\sigma\in K, (E,\sigma)$ is HAUSDORFF compact, then $|K|$ is less than or equal to $2^{|E|}$. So the proof is completed.

REFERENCES

[1] E. FARAH, *Number of equivalence relations on a set.* Ciência e Cultura **18** (1966), n.º 4, p. 437.

Cardinalidade de um conjunto de anéis

por O. T. Alas
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil

O objectivo desta nota é responder a uma questão que nos foi proposta pelo Professor NEWTON C. A. da COSTA do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. *Questão:* Sendo E um conjunto infinito, qual a cardinalidade do conjunto dos anéis sobre E e qual a cardinalidade do conjunto dos grupos sobre E? Demonstraremos que a resposta de ambas as perguntas é $2^{|E|}$.

Nesta Nota as operações de adição e multiplicação dos vários anéis considerados serão sempre indicadas, respectivamente, por $+$ *e* $.$, o que não acarretará confusão pois em cada caso precisaremos quais as operações em questão.

1. Seja E um conjunto infinito e $|E|$ o seu número cardinal. Seja E_1, $E_1=(E,+,\cdot)$, um anel sobre E. Em $E\times E$ consideremos as operações de adição (denotada com o sinal $+$) e de multiplicação (denotada com o sinal $\cdot$) definidas do seguinte modo: para quaisquer $x,y,r,s\in E$

$$(1)\qquad \begin{aligned}(x,r)+(y,s)&=(x+y,r+s)\\ (x,r)\cdot(y,s)&=(x\cdot y,r\cdot s)\end{aligned}$$

onde os sinais $+$ e $\cdot$ que aparecem nos segundos membros das igualdades (1) designam, respectivamente, a adição e a multiplicação em E_1. Posto isto, designaremos por A o anel $(E\times E,+,\cdot)$, cujas operações estão definidas em (1).

Denotemos por 0 o elemento neutro da adição em E_1 e sejam a e b dois elementos de E, tais que $0\neq a\neq b\neq 0\neq a+b$ (onde $+$ designa a adição em E_1).

A seguir vamos definir $2^{|E|}$ funções injetoras de $E\times E$ sobre $E\times E$. Para cada subconjunto X de E, com $0\in X$, ponhamos

$$(2)\qquad \begin{aligned}f_X: E\times E &\to E\times E\\ (x,0)&\to(x,0)\\ (x,a)&\to(x,b)\\ (x,b)&\to(x,a)\\ (y,0)&\to(y,a)\\ (y,a)&\to(y,b)\\ (y,b)&\to(y,0)\\ (z,r)&\to(z,r)\end{aligned}$$

para quaisquer $x\in X$ $y\notin X$, $z\in E$ e $r\in E$, $r\notin\{0,a,b\}$.

Para cada X nas condições acima, indiquemos por $A(X)$ o anel sôbre $E\times E$ cujas operações de adição (denotada por $+$) e de multiplicação (denotada por $\cdot$) definimos abaixo: para quaisquer $x,y,r,s\in E$

$$(3)\qquad \begin{aligned}(x,r)+(y,s)&=f_X(f_X^{-1}((x,r))+f_X^{-1}((y,s)))\\ (x,r)\cdot(y,s)&=f_X(f_X^{-1}((x,r))\cdot f_X^{-1}((y,s))),\end{aligned}$$

onde os sinais $+$ e $\cdot$ que aparecem nos segundos membros das igualdades (3) designam, respectivamente, a adição e a multiplicação em A.

PROPOSIÇÃO 1. *Sejam* X *e* Y *dois subconjuntos de* E *tais que* $0\in X\cap Y$, $X\neq Y$. *Nestas condições, os anéis* $A(X)$ *e* $A(Y)$ *são distintos.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que existe $x \in X$ tal que $x \notin Y$. Se os anéis $A(X)$ e $A(Y)$ fôssem iguais, teríamos, em particular, que as operações de adição e multiplicação seriam as mesmas para os dois anéis. Logo, deveríamos ter, em virtude de (3),

$$f_X(f_X^{-1}((x,0)) + f_X^{-1}((x,a))) = \\ = f_Y(f_Y^{-1}((x,0)) + f_Y^{-1}((x,a))),$$

o que não se verifica, pois

$$f_X(f_X^{-1}((x,0)) + f_X^{-1}((x,a))) = \\ = f_X((x,0) + (x,b)) = f_X((x+x,b))$$

e

$$f_Y(f_Y^{-1}((x,0)) + f_Y^{-1}((x,a))) = \\ = f_Y((x,a) + (x,b)) = f_Y((x+x, a+b)).$$

E está demonstrada a proposição.

Observações. I) Se o anel E_1 fôr comutativo com elemento unidade, os anéis $A(X)$ também serão comutativos e terão elemento unidade.

II) Se o anel E_1 fôr de Boole, os anéis $A(X)$ também serão de Boole.

III) Na proposição 1 ficou demonstrado que os grupos aditivos de $A(X)$ e $A(Y)$ são distintos.

IV) Como E é um conjunto infinito temos, em virtude do Axioma da Escolha, que $|E \times E| = |E|$. Por outro lado, como os anéis sôbre E ficam caracterizados pelas suas operações de adição e multiplicação (que são particulares funções de $E \times E$ em E), segue-se que a cardinalidade do conjunto dos anéis sôbre E é menor ou igual a $2^{|E|}$.

Proposição 2. *Sendo* E *um conjunto infinito, o conjunto dos anéis sôbre* E, *bem como o conjunto dos grupos sôbre* E, *tem cardinalidade igual a* $2^{|E|}$.

Demonstração. A demonstração é consequência imediata das considerações anteriores e do fato bem conhecido de que sôbre todo conjnnto infinito é possível introduzir uma estrutura de anel que não é de Boole e uma estrutura de anel de Boole. (Dêste fato daremos uma demonstração muito simples a seguir).

2. Seja E um conjunto infinito e designemos por Q o anel habitual dos números racionais. Indiquemos por B o conjunto das funções $f: E \to Q$ quasi-constantes (isto é, constantes exceto num subconjunto finito de E) e indiquemos por D o conjunto das funções $f: E \to \{0,1\}$ quasi-constantes. Os conjuntos B e D tem cardinalidade igual a $|E|$.

Em B consideremos as operações de adição (denotada por $+$) e de multiplicação (denotada por $\cdot$) definidas abaixo: sendo $f, g \in B$

$$\begin{array}{lcl} f+g: E \to Q & \text{e} & f \cdot g: E \to Q \\ t \to f(t) + g(t) & & t \to f(t)\, g(t) \end{array}$$

onde em Q consideramos as operações usuais de adição e multiplicação.

Nestas condições, $(B, +, \cdot)$ é um anel comutativo com elemento unidade, que não é um anel de Boole.

Em D consideremos as operações de adição (indicada por $+$) e de multiplicação (indicada por $\cdot$) definidas do seguinte modo: sendo $f, g \in D$

$$\begin{array}{lcl} f+g: E \to \{0,1\} & \text{e} & f \cdot g: E \to \{0,1\} \\ t \to f(t) + g(t) & & t \to f(t)\, g(t), \end{array}$$

onde $0+0 = 1+1 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$, $00 = 01 = 10 = 0$ e $11 = 1$.

Nestas condições, $(D, +, \cdot)$ é um anel de Boole.

Introdução à álgebra exterior

por J. J. Dionísio
Faculdade de Ciências, Lisboa

SERGE LANG, no prefácio do seu livro sobre variedades diferenciáveis (ver Bibl. [7], p. VI-VII) exprime a seguinte opinião ao referir-se a textos sobre cálculo diferencial exterior: «The orgy of multilinear algebra in standard treatises arises from unnecessary double dualization and abusive use of the tensor product». O objecto do presente trabalho — subordinado ao tema geral da *simetria* — é precisamente expor os elementos de álgebra exterior necessários a quem deseje iniciar-se no estudo das formas diferenciais. Em consequência, adoptamos uma perspectiva elementar, ainda que sóbria, a pressupor apenas rudimentos relativos a espaços vectoriais e euclidianos, assim como ao grupo simétrico. Em particular, não focamos a universalidade da construção de álgebras exteriores sobre módulos, a qual poderá ver-se, por exemplo, em BIRKHOFF-MAC LANE [1] ou em HU [5]. Não pressupomos a teoria dos determinantes pois em verdade julgamos que o seu lugar natural se insere — ainda de um ponto de vista pedagógico — no desenvolvimento da álgebra exterior, tal como o esboçamos no § 5, aliás seguindo parcialmente neste ponto o excelente texto de DIXMIER [3].

Todo o estudo será feito em relação a um espaço vectorial L *de dimensão finita* n *sobre o corpo real* R.

1. Tensores covariantes.

Designe p um inteiro ≥ 1. *Tensor covariante de ordem* p sobre L é qualquer aplicação

$$T : L^p \to R$$

que seja R-p-linear, isto é, que depende R-linearmente de cada um dos seus p argumentos.

Os tensores covariantes de ordem $p=1$, ou sejam os elementos do espaço dual L^* de L, chamam-se também *covectores* de L. Os elementos de R — os números reais — consideram-se como tensores covariantes de ordem zero.

A colecção dos tensores covariantes de ordem $p \geq 0$ sobre L será denotada por $\mathcal{T}_p(L)$. Em particular,

$$\mathcal{T}_0(L) = R\,, \quad \mathcal{T}_1(L) = L^*.$$

Tomemos uma base $\{B_1, \cdots, B_n\}$ de L. Posto, para um vector $A \in L$,

$$A = \sum_{i=1}^{n} A^i B_i \quad \text{ou} \quad A = A^i B_i$$

(subentendendo o sinal de soma, de harmonia com a convenção de EINSTEIN) a p-linearidade de um tensor $T \in \mathcal{T}_p(L)$ dá logo

$$T(A_1, \cdots, A_p) = T(A_1^{i_1} B_{i_1}, \cdots, A_p^{i_p} B_{i_p}) =$$
$$= A_1^{i_1} \cdots A_p^{i_p} \cdot T(B_{i_1}, \cdots, B_{i_p})$$

pelo que vem a seguinte

PROPOSIÇÃO I. *Seja* $\{\mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_n\}$ *uma base de* L. *Se* $\mathrm{T} \in \mathcal{T}_p(\mathrm{L})$, $\mathrm{p} \geq 1$, *então tem-se*

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_p) = \mathrm{T}_{i_1 \ldots i_p} \cdot \mathrm{A}_1^{i_1} \cdots \mathrm{A}_p^{i_p}$$

onde A_j^i *é a componente número* i *do vector* A_j *e*

$$T_{i_1 \ldots i_p} = T(B_{i_1}, \cdots, B_{i_p})$$

é o valor do tensor T *na sequência* $\{B_{i_1}, \cdots, B_{i_p}\}$ *de* p *vectores daquela base.*

Os n^p números reais $T_{i_1 \ldots i_p}$ são as *componentes* do tensor T na base referida; elas determinam unìvocamente T e podem tomar valores arbitrários em R.

A colecção $\mathcal{T}_p(L)$ possue uma estrutura natural de espaço vectorial sobre R dada pelas operações

$$T + T' : (A_1, \cdots, A_p) \to T(A_1, \cdots, A_p) + \\ + T'(A_1, \cdots, A_p)$$

$$\lambda \cdot T : (A_1, \cdots, A_p) \to \lambda \cdot T(A_1, \cdots, A_p)$$

onde $A_1, \cdots, A_p \in L$ e $\lambda \in R$. Este espaço vectorial, por ser isomorfo a R^{n^p}, tem a dimensão n^p, isto é,

$$\dim \mathcal{T}_p(L) = (\dim L)^p .$$

Proposição II. *Sejam* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ e $\{B'_1, \cdots, B'_n\}$ *duas bases de* L *e designe* $S = [S_j^i]$ *a matriz (de ordem* n *e não-singular) que exprime os vectores da segunda base nos vectores da primeira, isto é,*

$$B'_i = S_i^j B_j \qquad (i = 1, \cdots, n) .$$

Então, as componentes $T'_{i_1 \ldots i_p}$ *do tensor* $T \in \mathcal{T}_p(L)$ *na base* $\{B'_1, \cdots, B'_n\}$ *exprimem-se nas componentes na base* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *por intermédio da fórmula*

$$T'_{i_1 \ldots i_p} = T_{j_1 \ldots j_p} \cdot S_{i_1}^{j_1} \cdots S_{i_p}^{j_p} .$$

Dem. Temos sucessivamente

$$T'_{i_1 \ldots i_p} = T(B'_{i_1}, \cdots B'_{i_p}) =$$
$$= T(S_{i_1}^{j_1} B_{j_1}, \cdots, S_{i_p}^{j_p} B_{j_p} =$$
$$= S_{i_1}^{j_1} \cdots S_{i_p}^{j_p} \cdot T(B_{j_1}, \cdots, B_{j_p}) =$$
$$= S_{i_1}^{j_1} \cdots S_{i_p}^{j_p} \cdot T_{j_1 \ldots j_p} .$$

Introduzamos agora a *multiplicação tensorial* de tensores covariantes. É a operação

$$\otimes : \mathcal{T}_p(L) \times \mathcal{T}_q(L) \to \mathcal{T}_{p+q}(L)$$

(onde $p > 0$ e $q > 0$) definida pela regra

$$(T \otimes T')(A_1, \cdots, A_{p+q}) = T(A_1 \cdots, A_p) \cdot \\ \cdot T'(A_{p+1}, \cdots, A_{p+q}) .$$

Estende-se a definição ao caso $p = 0$, $q \geqq 0$ pondo $\lambda \otimes T' = \lambda T'$ e ao caso $p > 0$, $q = 0$ pondo $T \otimes \lambda = \lambda T$; para todo $\lambda \in R = \mathcal{T}_0(L)$.

A operação $(T, T') \to T \otimes T'$ que acabamos de definir é *R-bilinear* e *associativa,* mas não é comutativa.

O tensor $T \otimes T'$ diz-se *produto tensorial* dos tensores T e T'. A sua ordem é a soma das ordens dos factores.

Proposição III. *Seja* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *uma base para* L *e* $\{\beta^1, \cdots, \beta^n\}$ *a base dual dessa para o espaço dual* L^*. *Para todo o tensor* $T \in \mathcal{T}_p(L), p \geqq 1$, *tem-se então*

$$T = T_{i_1 \ldots i_p} \cdot \beta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \beta^{i_p} .$$

Por conseguinte, os n^p *tensores* $\beta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \beta^{i_p}$ *constituem uma base do espaço vectorial* $\mathcal{T}_p(L)$.

Para estabelecer esta Proposição, bastará verificar que as componentes do tensor T', definido pelo segundo membro da fórmula acima, coincidem com as componentes homólogas do tensor dado T:

$$T'_{i_1 \ldots i_p} = T'(B_{i_1 \ldots i_p}) = T_{j_1 \ldots j_p} \cdot \beta^{j_1} \otimes \ldots \otimes \beta^{j_p}$$
$$(B_{i_1} \cdots B_{i_p}) = T_{j_1 \ldots j_p} \cdot \beta^{j_1}(B_{i_1}) \cdots \beta^{j_p}(B_{i_p}) =$$
$$= T_{j_1 \ldots j_p} \cdot \delta_{i_1}^{j_1} \cdots \delta_{i_p}^{j_p} = T_{i_1 \ldots i_p} .$$

2. Tensores alternados.

Conforme advertimos na nota preliminar, supomos o leitor familiarizado com as propriedades elementares do grupo simétrico de grau p, ou seja, o grupo S_p das permutações do conjunto $\{1, \cdots, p\}$.

Há todavia um conceito que desejamos destacar, o de *signum de uma permutação* $\varphi \in S_p$: é o número real $\operatorname{sg}\varphi$ calculado pela fórmula (HU [5], p. 58)

$$\operatorname{sg}\varphi = \prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\varphi(j) - \varphi(i)}{j - i}.$$

Utilizando esta fórmula é fácil reconhecer que

(1) $\operatorname{sg}\varphi = -1$ se φ é uma transposição.

Por outro lado, se φ e ψ são dois elementos quaisquer de S_p, tem-se

(2) $$\operatorname{sg}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{sg}\psi \cdot \operatorname{sg}\varphi$$

visto que

$$\operatorname{sg}(\psi \circ \varphi) = \prod_{i<j} \frac{(\psi \circ \varphi)(j) - (\psi \circ \varphi)(i)}{j - i} =$$

$$= \prod_{i<j} \frac{\psi(\varphi(j)) - \psi(\varphi(i))}{\varphi(j) - \varphi(i)} \cdot \frac{\varphi(j) - \varphi(i)}{j - i}$$

$$= \prod_{\varphi(i) < \varphi(j)} \frac{\psi(\varphi(j)) - \psi(\varphi(i))}{\varphi(j) - \varphi(i)} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i<j} \frac{\varphi(j) - \varphi(i)}{j - i} = \operatorname{sg}\psi \cdot \operatorname{sg}\varphi .$$

Ora, como toda a permutação é decomponível em produto de transposições, infere-se de (1) e (2) termos um *morfismo*

$$\operatorname{sg} : S_p \to \{1, -1\}$$

do grupo simétrico S_p para o grupo multiplicativo $\{1, -1\}$.

Infere-se também que o número de transposições em que uma dada permutação é decomponível sai sempre par ou sempre ímpar.

Posto isto, dado um tensor $T \in \mathfrak{T}_p(L), p \geq 1$, e dada uma permutação $\sigma \in S_p$, é claro que a regra

$$(\sigma T)(A_1, \cdots, A_p) = T(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(p)})$$

define um tensor $\sigma T \in \mathfrak{T}_p(L)$. Provemos o seguinte

Lema. *Para quaisquer* $\mathrm{T} \in \mathfrak{T}_{\mathrm{p}}(\mathrm{L}), \mathrm{p} \geq 1$, *e* $\sigma, \nu \in \mathrm{S}_{\mathrm{p}}$ *tem-se*

$$(\nu \circ \sigma)\mathrm{T} = \nu(\sigma \mathrm{T})$$

Dem. Fazendo $\sigma T = T'$ e $A_{v(i)} = B_i$ vem $(v(\sigma T))(A_1, \cdots, A_p) = (v T')(A_1, \cdots, A_p) = = T'(A_{v(1)}, \cdots, A_{v(p)}) = T'(B_1, \cdots, B_p) = = \sigma T(B_1, \cdots, B_p) = T(B_{\sigma(1)}, \cdots, B_{\sigma(p)}) = = T(A_{v(\sigma(1))}, \cdots, A_{v(\sigma(p))}) = T(A_{(v \circ \sigma)(1)}, \cdots, A_{(v \circ \sigma)(p)}) = ((v \circ \sigma) T)(A_1, \cdots, A_p)$, o que estabelece o Lema.

Definição. Um tensor $T \in \mathfrak{T}_p(L), p > 1$, diz-se *tensor alternado de ordem* p se resulta

$$T(A_1, \cdots, A_p) = 0$$

todas as vezes que dois dos vectores $A_1, \cdots, A_p$ sejam iguais.

Os covectores, elementos de $\mathfrak{T}_1(L) = L^*$ consideram-se como tensores alternados de ordem 1; e os escalares, elementos de $\mathfrak{T}_0(L) = R$, como tensores alternados de ordem 0.

Reconhece-se imediatamente que, se a sequência $\{A_1, \cdots, A_p\}$ é linearmente dependente, e se $T \in \mathfrak{T}_p(L)$ é alternado, então $T(A_1, \cdots, A_p) = 0$.

Em particular, todo o tensor alternado de ordem $p > n = \dim L$ é nulo.

Proposição I. *Se* T *é tensor alternado de ordem* $p \geq 1$, *então tem-se, para toda a permutação* $\sigma \in S_p$,

(3) $$\sigma T = \operatorname{sg} \sigma \cdot T$$

isto é,

$$T(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(p)}) = \operatorname{sg} \sigma \cdot T(A_1, \cdots, A_p).$$

Dem. Porque toda a permutação é produto de transposições o Lema anterior e o morfismo $\operatorname{sg}: S_p \to \{1, -1\}$ permitem reduzir a demonstração ao caso em que σ é uma transposição (ver Nota (1)).

Seja, em primeiro lugar, $p=2$ (o caso $p=1$ é trivial). Temos na verdade $T(A_2, A_1) = -T(A_1, A_2)$ visto ser

$$0 = T(A_1 + A_2, A_1 + A_2) = T(A_1, A_1) + T(A_1, A_2) + T(A_2, A_1) + T(A_2, A_2) = T(A_1, A_2) + T(A_2, A_1).$$

Seja agora $p>2$ e $\sigma=(i_0, j_0)$ com $i_0<j_0$. Fixados $p-2$ vectores

$$A_1, \cdots, \hat{A}_{i_0}, \cdots, \hat{A}_{j_0}, \cdots, A_p$$

(o sinal $\wedge$ indicando omissão do elemento que encima), defina-se $T' \in \mathcal{T}_2(L)$ mediante a regra

$$T'(A, B) = T(A_1, \cdots A_{i_0}, \cdots, A_{j_0}, \cdots, A_p)$$

com $A_{i_0} = A$ e $A_{j_0} = B$. Porque T' é tensor alternado de ordem 2, tem-se $T'(B, A) = -T'(A, B)$, donde

$$T(A_1, \cdots, A_{i_0}, \cdots, A_{j_0}, \cdots, A_p) = -T(A_1, \cdots, A_{j_0}, \cdots, A_{i_0}, \cdots, A_p)$$

e daí $\sigma T = -T = \operatorname{sg} \sigma \cdot T$ como desejávamos.

Observação. Recordemos que toda a permutação é decomponível em produto de transposições de inteiros consecutivos (por exemplo, $(2, 4) = (2, 3) \circ (3, 4) \circ (2, 3)$). Sendo assim, a fórmula (3) mantém-se válida (mesma demonstração, com $j_0 = i_0 + 1$) se o tensor $T \in \mathcal{T}_p(L)$ satisfaz apenas à condição mais fraca: $T(A_1, \cdots, A_p) = 0$ todas as vezes que dois vectores *consecutivos* sejam iguais. Por conseguinte, esta condição mais fraca, por implicar a fórmula (3), implica em particular $\sigma T = -T$ para qualquer transposição σ; e isto por sua vez implica logo que o tensor T é alternado: $T:(A_1, \cdots, A_p) = 0$ se dois vectores (consecutivos ou não) são iguais. (Ver Nota (2)).

Proposição II. *O tensor covariante* $T \in \mathcal{T}_p(L)$, $p > 1$, *é alternado se e só se em alguma base* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *de* L *as suas componentes saem anti-simétricas, isto é,*

$$T_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}} = -T_{i_1 \cdots i_p}$$

para toda a transposição $\sigma \in S_p$.

Dem. Se T é alternado temos, pela Prop. I,

$$T_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}} = T(B_{i_{\sigma(1)}}, \cdots, B_{i_{\sigma(p)}}) = \operatorname{sg} \sigma \cdot T(B_{i_1}, \cdots, B_{i_p}) = -T_{i_1 \cdots i_p}.$$

Para provarmos a recíproca, tomemos p vectores $A_1, \cdots, A_p$ e suponhamos que é $A_u = A_v$ $(1 \leq u < v \leq p)$. Na base $\{B_1, \cdots, B_n\}$ em que, por hipótese, as componentes saem anti-simétricas virá na verdade, usando a Prop. I do § 1,

$$T(A_1, \cdots, A_p) = T_{i_1 \cdots i_p} A_1^{i_1} \cdots A_p^{i_p} = T_{i_1 \cdots i_u \cdots i_v \cdots i_p} \cdot A_1^{i_1} \cdots A_u^{i_u} \cdots A_v^{i_v} \cdots A_p^{i_p} = 0$$

porquanto se tem

$$T_{i_1 \ldots i_u \ldots i_v \ldots i_p} = - T_{i_1 \ldots i_v \ldots i_u \ldots i_p}$$

e

$$A_u^j = A_v^j \quad (j = 1, \cdots, n).$$

Vimos na Prop. III do § 1 que, sendo $\{B_1, \cdots, B_n\}$ base de L e $\{\beta^1, \cdots, \beta^n\}$ a base dual para L^*, então ter-se-á para todo $T \in \mathcal{T}_p(L)$, $p \geq 1$,

$$T = T(B_{j_1}, \cdots, B_{j_p}) \cdot \beta^{j_1} \otimes \ldots \otimes \beta^{j_p}.$$

Se T é alternado, este somatório pode ser reordenado na forma

$$T = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} T(B_{i_{\sigma(1)}}, \cdots, B_{i_{\sigma(p)}}) \cdot \beta^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \beta^{i_{\sigma(p)}}$$

como fàcilmente se reconhece; ou seja, usando a Prop. I deste §,

$$T = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sg} \sigma \cdot T(B_{i_1}, \cdots, B_{i_p}) \cdot \beta^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \beta^{i_{\sigma(p)}},$$

donde a seguinte

Proposição III. *Seja* $\{\mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_n\}$ *base de* L *e* $\{\beta^1, \cdots, \beta^n\}$ *a sua dual. Então, todo o tensor alternado de ordem* $\mathrm{p} \geq 1$, *sobre* L, *é representável na forma*

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{T} = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \mathrm{T}_{i_1 \ldots i_p} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sg} \sigma \cdot \beta^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \beta^{i_{\sigma(p)}}.$$

Mostra a fórmula (4) que as $\binom{n}{p}$ componentes $T_{i_1 \ldots i_p}$ com $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, uma vez arbitràriamente fixadas (cf. Prop. II), determinam unìvocamente um tensor alternado T de ordem p $(1 \leq p \leq n)$.

Por conseguinte, a colecção $\mathrm{Alt}_p(L)$ dos tensores alternados de ordem p sobre L possue uma estrutura de espaço vectorial sobre R — subespaço de $\mathcal{T}_p(L)$ — cuja dimensão é

$$\dim \mathrm{Alt}_p(L) = \binom{\dim L}{p}.$$

Em particular tem-se $\dim \mathrm{Alt}_n(L) = 1$; $\dim \mathrm{Alt}_p(L) = 0$ se $p > n = \dim L$; e $\dim \mathrm{Alt}_p(L) = \dim \mathrm{Alt}_{n-p}(L)$ $(1 \leq p \leq n)$.

3. Anti-simetrização. Produto exterior.

Fixemos s números naturais $p_1, \cdots p_s$ e tomemos uma permutação $\sigma \in S_{p_1 + \ldots + p_s}$. Esta dir-se-á $(p_1, \cdots, p_s)$-admissível se e só se forem satisfeitas as seguintes s cadeias de desigualdades

$$\begin{array}{ll} \sigma(1) < \cdots < \sigma(p_1) & (\text{se } p_1 > 1) \\ \sigma(p_1 + 1) < \cdots < \sigma(p_1 + p_2) & (\text{se } p_2 > 1) \\ \sigma(p_1 + p_2 + 1) < \cdots < & \\ \quad < \sigma(p_1 + p_2 + p_3) & (\text{se } p_3 > 1) \\ \cdots & \\ \sigma(p_1 + p_2 + \cdots + p_{s-1} + 1) < \cdots < & \\ \quad < \sigma(p_1 + p_2 + \cdots + p_{s-1} + p_s) & (\text{se } p_s > 1). \end{array}$$

Proposição I. *Consideremos a aplicação*

$$\mathrm{A}_{p_1, \ldots, p_s} : Alt_{p_1}(\mathrm{L}) \times \cdots \times Alt_{p_s}(\mathrm{L}) \to \mathcal{T}_{p_1 + \ldots + p_s}(\mathrm{L})$$

definida pela regra

$$\mathrm{A}_{p_1, \ldots, p_s}(\mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_s) = \sum_{\substack{\sigma \\ (p_1, \cdots, p_s)-ad}} \operatorname{sg} \sigma \cdot \sigma(\mathrm{T}_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{T}_s).$$

Então tem-se

$$\mathrm{A}_{p_1,\dots,p_s}(\mathrm{T}_1,\cdots,\mathrm{T}_s) \in Alt_{p_1+\dots+p_s}(\mathrm{L}),$$

isto é,

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{A}_{p_1,\dots,p_s} \subset Alt_{p_1+\dots+p_s}(\mathrm{L}).$$

A Prop. I justifica que se denomine *operador de anti-simetrização relativo às ordens* $p_1,\cdots,p_s$ a aplicação $A_{p_1,\dots,p_s}$. O tensor alternado, de ordem $p_1+\cdots+p_s$, nela construído, indica-se com a notação $T_1\wedge\cdots\wedge T_s$, abreviável para $\bigwedge\limits_{i=1}^{s} T_i$; e chama-se *produto exterior* dos tensores alternados $T_1,\cdots,T_s$ (ver Nota (3)):

$$(1)\quad T_1\wedge\cdots\wedge T_s = \sum_{\sigma-\mathrm{ad}} \mathrm{sg}\,\sigma\cdot\sigma(T_1\otimes\cdots\otimes T_s).$$

Dem. da Prop. I. Fixados $p_1+\cdots+p_s$ vectores $A_1,\cdots,A_{p_1+\dots+p_s}$, teremos, sempre com $\sigma\in S_{p_1+\dots+p_s}$ e $(p_1,\cdots,p_s)$-admissível,

$$(A_{p_1,\dots,p_s}(T_1,\cdots,T_s))(A_1,\cdots,A_{p_1+\dots+p_s}) =$$
$$= \sum_{\sigma-\mathrm{ad}} \mathrm{sg}\,\sigma\cdot\sigma(T_1\otimes\cdots\otimes T_s)(A_1,\cdots,A_{p_1+\dots+p_s})$$
$$= \sum_{\sigma-\mathrm{ad}} \mathrm{sg}\,\sigma\cdot(T_1\otimes\cdots\otimes T_s)(A_{\sigma(1)},\cdots,A_{\sigma(p_1+\dots+p_s)})$$
$$= \sum_{\sigma-\mathrm{ad}} \mathrm{sg}\,\sigma\cdot T_1(A_{\sigma(1)},\cdots,A_{\sigma(p_1)})\cdots$$
$$T_s(A_{\sigma(p_1+\dots+p_{s-1}+1)},\cdots,A_{\sigma(p_1+\dots+p_s)}).$$

Devemos mostrar que este último somatório sai nulo sempre que dois vectores consecutivos entre os $p_1+\cdots+p_s$ vectores $A_1,\cdots,A_{p_1+\dots+p_s}$ sejam iguais — tendo em conta a Obs. feita no § 2. Suponhamos pois que é $A_i = A_{i+1}$ para certo i $(1 \leqq i < p_1 + + \cdots + p_s)$.

Consideremos o termo do referido somatório relativo à permutação admissível σ. Se tivermos

$$i,\, i+1 \in \{\sigma(1),\cdots,\sigma(p_1)\}$$

sairá nulo o valor de T_1 e portanto nulo tal termo. Anàlogamente, se tivermos

$$i,\, i+1 \in \{\sigma(p_1+1),\cdots,\sigma(p_1+p_2)\}$$

sairá nulo o valor de T_2 e portanto nulo o mesmo termo. E assim por diante, até à hipótese

$$i,\, i+1 \in \{\sigma(p_1+\cdots+p_{s-1}+1),\cdots,$$
$$\sigma(p_1+\cdots+p_s)\}.$$

Suponhamos agora que se tem, por exemplo,

$$\sigma(1) < \cdots < i < \cdots < \sigma(p_1)$$

e

$$\sigma(p_1+1) < \cdots < i+1 < \cdots < \sigma(p_1+p_2).$$

Então também se terá, apenas trocando entre si i e $i+1$,

$$\sigma(1) < \cdots < i+1 < \cdots < \sigma(p_1)$$

e

$$\sigma(p_1+1) < \cdots < i < \cdots < \sigma(p_1+p_2).$$

Por conseguinte, da admissibilidade da permutação σ resulta a admissibilidade da permutação $\sigma' = \tau\circ\sigma$, onde τ é a transposição $\tau = (i, i+1)$. Ora, como $A_i = A_{i+1}$, o termo relativo à permutação admissível σ' resulta simétrico do termo considerado, relativo a σ: estes dois termos dão pois soma nula.

Porque o caso que acabamos de analisar é típico dos restantes casos possíveis, a demonstração está concluída.

Como exemplo, construamos o *produto exterior de s covertores*. Se $s=2$ e $\alpha, \beta \in \mathrm{Alt}_1(L)=L^*$, teremos $\alpha\wedge\beta \in \mathrm{Alt}_2(L)$ com

$$(\alpha\wedge\beta)(A, B)=\alpha(A)\cdot\beta(B)-\alpha(B)\cdot\beta(A).$$

No caso geral será

$$\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^s=\bigwedge_{i=1}^{s}\alpha^i \in \mathrm{Alt}_s(L)$$

com

$$(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^s)(A_1, \cdots, A_s)=\sum_{\sigma\in S_s}\mathrm{sg}\,\sigma\cdot$$
$$\cdot(\alpha^1\otimes\ldots\otimes\alpha^s)(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(s)})$$

(ver Nota (4)), já que toda a permutação $\sigma\in S_s$ é trivialmente $(1, \cdots, 1)$-admissível; ou ainda

$$(2)\quad (\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^s)(A_1, \cdots, A_s)=\sum_{\sigma\in S_s}\mathrm{sg}\,\sigma\cdot$$
$$\cdot\,\alpha^1(A_{\sigma(1)})\cdots\alpha^s(A_{\sigma(s)}).$$

(Ver Nota (5)). Façamos $\sigma(i)=i'$, donde $i=\sigma^{-1}(i')=\nu(i')$ posto $\sigma^{-1}=\nu$; fica

$$\alpha^i(A_{\sigma(i)})=\alpha^{\nu(i')}(A_{i'})\qquad(i=1, \cdots, n)$$

o que dá, por ser $\mathrm{sg}\,\sigma=\mathrm{sg}\,\sigma^{-1}=\mathrm{sg}\,\nu$, e reordenando factores,

$$(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^s)(A_1, \cdots, A_s)=\sum_{\nu\in S_s}\mathrm{sg}\,\nu\cdot$$
$$\cdot\,\alpha^{\nu(1)}(A_1)\cdots\alpha^{\nu(s)}(A_s).$$

Em consequência, não só temos por definição

$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha^s=\sum_{\sigma\in S_s}\mathrm{sg}\,\sigma\cdot\sigma(\alpha^1\otimes\ldots\otimes\alpha^s)$$

como também agora inferimos ter-se

$$(3)\quad \alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^s=\sum_{\sigma\in S_s}\mathrm{sg}\,\sigma\cdot\alpha^{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes\alpha^{\sigma(s)}.$$

(Ver Nota (6)).

Nesta fórmula (3) mudemos s para p e tomemos

$$\alpha^j=\beta^{i_j}\qquad(j=1, \cdots, p);$$

vem

$$\beta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\beta^{i_p}=\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sg}\,\sigma\cdot\beta^{i_{\sigma(1)}}\otimes\ldots\otimes\beta^{i_{\sigma(p)}}$$

o que, introduzido na fórmula (4) do § 2 dá a seguinte

Proposição II. *Se* $\{\beta^1, \cdots, \beta^n\}$ *é a dual de uma base* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *de* L, *então todo o tensor alternado* T *sobre* L, *de ordem* $p\,(1\leqq p\leqq n)$ *é representável na forma*

$$(4)\quad T=\sum_{i_1<\ldots<i_p}T_{i_1\ldots i_p}\cdot\beta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\beta^{i_p}.$$

Este resultado diz-nos em particular que, suposto $1\leqq p\leqq n$, os $\binom{n}{p}$ tensores alternados de ordem p

$$\beta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\beta^{i_p}\qquad(1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n)$$

constituem uma base do espaço vectorial $\mathrm{Alt}_p(L)$, cuja dimensão já vimos, no final do § 2, ser $\binom{n}{p}$.

4. Propriedades da multiplicação exterior.

Na Prop. I do § 3 tomemos em particular $s=2$, $p_1=p$ e $p_2=q$, para o fim de considerarmos a multiplicação exterior

$$\wedge_{p,q}:\mathrm{Alt}_p(L)\times\mathrm{Alt}_q(L)\to\mathrm{Alt}_{p+q}(L)$$

com

$$\wedge_{p,p}(T, T') = T \wedge T' \qquad (= A_{p,q}(T, T')).$$

Estendemos a operação aos casos $p = 0$ e $q = 0$ pondo $\lambda \wedge T' = \lambda T'$ e $T \wedge \lambda = \lambda T$ ($\lambda \in R$), respectivamente.

As propriedades desta operação fundamental constam do seguinte

Teorema. *A multiplicação exterior é*

(1) R-bilinear:

$$(T + T') \wedge T'' = T \wedge T'' + T' \wedge T'',$$
$$(\lambda T) \wedge T' = \lambda (T \wedge T'),$$
$$T \wedge (T' + T'') = T \wedge T' + T \wedge T'',$$
$$T \wedge (\lambda T') = \lambda (T \wedge T');$$

(2) associativa:

$$T \wedge (T' \wedge T'') = (T \wedge T') \wedge T'';$$

(3) anti-comutativa, *significando que*

$$T \wedge T' = (-1)^{pq} \cdot T' \wedge T$$

onde p *e* q *são as ordens respectivas de* T *e* T'.

Por consequência, a multiplicação exterior introduz na soma directa de espaços vectoriais

$$\mathrm{Alt}(L) = \bigoplus_{p=0}^{n} \mathrm{Alt}_p(L) \qquad (n = \dim L)$$

uma estrutura de *R-álgebra graduada associativa e anti-comutativa: a álgebra exterior do espaço vectorial* L. (Para a definição de álgebra graduada, ver Hu [5], p. 173).

Dem. do Teorema. A R-bilinearidade é imediata.

Para provarmos a associatividade, mostra a Prop. II do § 3 que bastará estabelecermos a identidade

$$(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) \wedge (\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q}) = \\ = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q}$$

relativa a $p+q$ covectores $\alpha^1, \cdots, \alpha^{p+q}$.

Tomando $p+q$ vectores $A_1, \cdots, A_{p+q}$ teremos

$$[(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) \wedge (\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q})] \\ (A_1, \cdots, A_{p+q}) = \sum_{\substack{\sigma \\ (p,q)\text{-ad}}} \mathrm{sg}\,\sigma \cdot \sigma[(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) \otimes \\ \otimes (\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q})](A_1, \cdots, A_{p+q}) = \\ = \sum_{\sigma-\mathrm{ad}} \mathrm{sg}\,\sigma \cdot (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p)(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(p)}) \cdot \\ \cdot (\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q})(A_{\sigma(p+1)}, \cdots, A_{\sigma(p+q)}).$$

Mas temos

$$(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p)(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(p)}) = \\ = \sum_{\nu} \mathrm{sg}\,\nu \cdot \alpha^1 (A_{\nu(\sigma(1))}) \cdots \alpha^p (A_{\nu(\sigma(p))})$$

e anàlogamente

$$(\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q})(A_{\sigma(p+1)}, \cdots, A_{\sigma(p+q)}) = \\ = \sum \mathrm{sg}\,\pi \cdot \alpha^{p+1}(A_{\pi(\sigma(p+1))}) \cdots \alpha^{p+q}(A_{\pi(\sigma(p+q))})$$

o que substituído acima dá

$$[(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) \wedge (\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q})] \\ (A_1, \cdots, A_{p+q}) = \sum_{\substack{\sigma \\ (p,q)\text{-ad}}} \sum_{\nu} \sum_{\pi} \mathrm{sg}\,\sigma \cdot \mathrm{sg}\,\nu \cdot \mathrm{sg}\,\pi \cdot \\ \cdot \alpha^1 (A_{(\nu \circ \sigma)(1)}) \cdots \alpha^p (A_{(\nu \circ \sigma)(p)}) \cdot \\ \cdot \alpha^{p+1}(A_{(\pi \circ \sigma)(p+1)}) \cdots \alpha^{p+q}(A_{(\pi \circ \sigma)(p+q)}) \cdot$$

Atendendo a que os conjuntos

$$\operatorname{dom}\nu = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(p)\}, \quad \operatorname{dom}\pi = = \{\sigma(p+1), \cdots, \sigma(p+q)\}$$

são disjuntos, poderemos dar ao triplo somatório a forma (com ν e π trivialmente prolongadas a $\{1, \cdots, p+q\}$)

$$\sum_{\substack{\nu\circ\pi\circ\sigma \\ \sigma-\mathrm{ad}}} \operatorname{sg}(\nu\circ\pi\circ\sigma)\cdot\alpha^1(A_{(\nu\circ\pi\circ\sigma)(1)})\cdots \cdots\alpha^{p+q}(A_{(\nu\circ\pi\circ\sigma)(p+q)}).$$

E atendendo a que toda a permutação $\varphi \in S_{p+q}$ é manifestamente decomponível na forma $\varphi = \nu\circ\pi\circ\sigma$ com σ, ν e π nas condições anteriores, obtém-se para o mesmo somatório a expressão

$$\sum_{\varphi\in S_{p+q}} \operatorname{sg}\varphi\cdot[\varphi(\alpha^1\otimes\ldots\otimes\alpha^{p+q})](A_1, \cdots, A_{p+q})$$

ou seja $(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+q})(A_1, \cdots, A_{p+q})$, que é o resultado desejado.

Passemos à prova da anti-comutatividade. Uma vez mais usando a Prop. II do § 3, bastará provar a identidade em covectores

$$(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^p)\wedge(\gamma^1\wedge\cdots\wedge\gamma^q) = (-1)^{pq}\cdot \cdot(\gamma^1\wedge\cdots\wedge\gamma^q)\wedge(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^p).$$

Mas esta fàcilmente decorre da associatividade e da relação imediata $\alpha\wedge\gamma = -\gamma\wedge\alpha$ para covectores α e γ.

5. Determinantes.

Recordemos que é $\dim \mathrm{Alt}_n(L) = 1$ (com $n = \dim L$). Fixemos uma base $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_n\}$ de L e seja $\{\beta^1, \cdots, \beta^n\}$ a base dual. Para $T\in \mathrm{Alt}_n(L)$, a fórmula (4) do § 3 dá

$$T = \lambda_\beta\cdot\beta^1\wedge\cdots\wedge\beta^n$$

sendo

$$\lambda_\beta = T_{12\ldots n} = T(B_1, B_2, \cdots, B_n).$$

O caso particular em que é $\lambda_\beta = 1$ vem considerado na seguinte

Definição I. O tensor alternado de ordem n

$$\det_{\mathcal{B}} := \beta^1\wedge\cdots\wedge\beta^n$$

denomina-se *determinante relativo à base* $\mathcal{B}$ *do espaço vectorial* L.

E o seu valor na sequência $A_1, \cdots, A_n$ de vectores de L

$$\det_{\mathcal{B}}(A_1, \cdots, A_n)$$

diz-se *determinante relativo à base* $\mathcal{B}$ *da sequência de vectores* $\{A_1, \cdots, A_n\}$. (Ver Nota (7)).

Proposição I. *Tem-se, na base* $\mathcal{B} = \{\mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_n\}$,

(1) $$det_{\mathcal{B}}(\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n) = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} sg\,\sigma\cdot \mathrm{A}_1^{\sigma(1)}\cdots\mathrm{A}_n^{\sigma(n)}$$

posto

$$\mathrm{A}_i = \mathrm{A}_i^j\,\mathrm{B}_j \qquad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{n}).$$

E se $\mathcal{B}'$ *é outra base de* L, *então*

(2) $$det_{\mathcal{B}'}(\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n) = = det_{\mathcal{B}}(\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n)\cdot det_{\mathcal{B}'}\mathcal{B}$$

donde

$$det_{\mathcal{B}'} = det_{\mathcal{B}'}\mathcal{B}\cdot det_{\mathcal{B}}.$$

Dem. Temos

$$\det_{\mathcal{B}'}(A_1, \cdots, A_n) = \det(A_1^{i_1}B_{i_1}, \cdots, A_n^{i_n}B_{i_n}) = = A_1^{i_1}\cdots A_n^{i_n}\cdot\det_{\mathcal{B}'}(B_{i_1}, \cdots, B_{i_n}),$$

somatório em que basta reter os termos nos quais é $\{i_1, \cdots, i_n\}$ uma permutação σ de $\{1, \cdots, n\}$, já que os restantes termos são nulos; vindo então

$$\det_{\mathcal{B}'}(A_1, \cdots, A_n) = \sum_{\sigma \in S_n} A_1^{\sigma(1)} \cdots A_n^{\sigma(n)} \cdot$$
$$\cdot \det_{\mathcal{B}'}(B_{\sigma(1)}, \cdots, B_{\sigma(n)}) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} A_1^{\sigma(1)} \cdots A_n^{\sigma(n)} \cdot \operatorname{sg}\sigma \cdot \det_{\mathcal{B}'}(B_1, \cdots, B_n)$$

donde

$$\det_{\mathcal{B}'}(A_1, \cdots, A_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sg}\sigma \cdot$$
$$A_1^{\sigma(1)} \cdots A_n^{\sigma(n)} \cdot \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}.$$

Este resultado dá-nos primeiramente a fórmula (1), ao tomarmos $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, visto que é (ver Nota (5))

$$\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = (\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n)(B_1, \cdots, B_n) = 1.$$

Depois, introduzindo (1), o mesmo resultado dá-nos (2).

Proposição II. *Designe* $\Phi : \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ *um endomorfismo do espaço vectorial* L. *Então existe um e um só escalar,* $\det \Phi$, *que satisfaz à igualdade*

$$(3) \qquad det_{\mathcal{B}}(\Phi(\mathrm{A}_1), \cdots, \Phi(\mathrm{A}_n)) =$$
$$= det\, \Phi \cdot det_{\mathcal{B}}(\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n)$$

qualquer que seja a base $\mathcal{B}$ *de* L *e qualquer que seja a sequência de vectores* $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$.

Definição II. O escalar $\det \Phi$ denomina-se *determinante do endomorfismo* $\Phi : \mathrm{L} \to \mathrm{L}$. (Ver Nota (8)).

Dem. da Prop. II. Começaremos fixando uma base $\mathcal{B}$. A aplicação T dada pela correspondência

$$(A_1, \cdots, A_n) \to \det_{\mathcal{B}}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n))$$

é uma composição

$$(A_1, \cdots, A_n) \to (\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n)) \to$$
$$\to \det_{\mathcal{B}}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n))$$

por onde se vê que $T : L^n \to R$ é n-linear. E se dois dos vectores $A_1, \cdots, A_n$ são iguais, o valor de T sai nulo, pois que $\det_{\mathcal{B}}$ é tensor alternado. Logo, $T \in \mathrm{Alt}_n(L)$ e existe por isso um escalar $\lambda_{\mathcal{B}}$ tal que $T = \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}$, donde

$$\det_{\mathcal{B}}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n)) = T(A_1, \cdots, A_n) =$$
$$= \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}(A_1, \cdots, A_n).$$

Em segunda base $\mathcal{B}'$ teremos, usando (2),

$$\det_{\mathcal{B}'}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n)) =$$
$$= \det_{\mathcal{B}}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n)) \cdot \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} =$$
$$= \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}(A_1, \cdots, A_n) \cdot \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} =$$
$$= \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}'}(A_1, \cdots, A_n).$$

Por consequência, existe um escalar $\lambda_{\mathcal{B}}$ tal que para toda a base $\mathcal{B}'$ e para qualquer sequência de vectores $A_1, \cdots, A_n$ se tem

$$\det_{\mathcal{B}'}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n)) =$$
$$= \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}'}(A_1, \cdots, A_n).$$

Tomando nesta igualdade $A_i = B'_i$ e $\mathcal{B}'$ $(i = 1, \cdots, n)$ sai

$$\det_{\mathcal{B}'}(\Phi(B'_1), \cdots, \Phi(B'_n)) = \lambda_{\mathcal{B}}$$

(visto ser $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}' = 1$), o que prova a unicidade do escalar $\lambda_{\mathcal{B}}$. Resta pôr $\lambda_{\mathcal{B}} = \det \Phi$.

DEFINIÇÃO III. Designe

$$\mathfrak{A}=[A^i_j] \quad (i,j=1,\cdots,n)$$

uma matriz real, quadrada e de ordem n. Denomina-se *determinante da matriz* $\mathfrak{A}$ o número real

$$\det\mathfrak{A}:=\det_K(A_1,\cdots,A_n)$$

onde K é a base canónica do espaço vectorial R^n, constituída pelas matrizes-colunas

$$K_1=\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\quad K_n=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}$$

e os vectores $A_1,\cdots,A_n$ de R^n são as matrizes-colunas de $\mathfrak{A}$:

$$A_j=\begin{bmatrix}A^1_j\\A^2_j\\ \vdots\\A^n_j\end{bmatrix} \quad (j=1,\cdots,n).$$

(Ver Nota (9)).

OBSERVAÇÃO. Equivalentemente, poderemos definir $\det\mathfrak{A}:=\det\Phi$ com $\Phi:R^n\to R^n$ o endomorfismo de R^n representado pela matriz $\mathfrak{A}$ na base canónica K (visto ser $A_j=\Phi(K_j)$, $j=1,\cdots,n$ e tendo em conta a fórmula (3) com $\mathfrak{B}=K$). (Ver Nota (10)).

6. Produto mixto. Produto vectorial.

No decurso deste § suporemos L *espaço euclidiano orientado*. (Ver Nota (11)). O produto escalar dos vectores A e B será indicado por $\langle A,B\rangle$ e a norma do vector A por $\|A\|$.

Designaremos por $\mathfrak{B}^+_{\text{ort}}$ uma base ortonormada de L fixando a orientação (base ortonormada positiva). Se $\mathfrak{B}'^+_{\text{ort}}$ é outra base ortonormada positiva, tem-se

$$\det_{\mathfrak{B}'^+_{\text{ort}}}\mathfrak{B}^+_{\text{ort}}=1$$

atendendo a que o primeiro membro é o determinante de uma matriz ortogonal (cf. (1), § 5). De (2), § 5 resulta então

$$\beta^1\wedge\cdots\wedge\beta^n=\det_{\mathfrak{B}^+_{\text{ort}}}=\det_{\mathfrak{B}'^+_{\text{ort}}}=$$
$$=\beta'^1\wedge\cdots\wedge\beta'^n.$$

É portanto lícita a seguinte

DEFINIÇÃO I. O tensor alternado de ordem n

$$\mu=\det_{\mathfrak{B}^+_{\text{ort}}}=\beta^1\wedge\cdots\wedge\beta^n$$

(independente da base ortonormada positiva $\mathfrak{B}^+_{\text{ort}}$) denomina-se *produto mixto sobre o espaço euclidiano orientado* L.

PROPOSIÇÃO I. *Seja* L *um espaço euclidiano orientado de dimensão* n. *A aplicação*

$$\varphi:\mathrm{L}\to Alt_{n-1}(\mathrm{L})$$

definida pela regra

$$(\varphi(\mathrm{A}))(\mathrm{A}_1,\cdots,\mathrm{A}_{n-1})=\mu(\mathrm{A},\mathrm{A}_1,\cdots,\mathrm{A}_{n-1})$$

é um isomorfismo de espaços vectoriais.

E se $\{\beta^1,\cdots,\beta^n\}$ *é a dual de uma base ortonormada positiva* $\mathfrak{B}^+_{ort}=\{\mathrm{B}_1,\cdots,\mathrm{B}_n\}$, *então tem-se para cada* $\mathrm{i}=1,\cdots,\mathrm{n}$:

$$(1)\quad \varphi(B_i)=(-1)^{i-1}\cdot\beta^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\beta^i}\wedge\cdots\wedge\beta^n$$

(o sinal $\frown$ indicando omissão do elemento que encima).

DEM. É claro que φ é um morfismo de espaços vectoriais.

É $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Com efeito, dado um vector $A \neq 0$, pode construir-se uma base ortonormada positiva da forma

$$\mathcal{B}^+_{\text{ort}} = \left\{ \frac{1}{\|A\|} A, A_2, \cdots, A_n \right\}$$

donde

$$\frac{1}{\|A\|} \varphi(A)(A_2, \cdots, A_{n-1}) =$$

$$= \mu\left(\frac{1}{\|A\|} A, A_2, \cdots, A_{n-1} \right) = \det_{\mathcal{B}^+_{\text{ort}}} \mathcal{B}^+_{\text{ort}} = 1$$

o que exige $\varphi(A) \neq 0$; provando que $\varphi(A) = 0 \Rightarrow A = 0$.

Sendo φ monomorfismo, tem-se $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim L = n$. E porque $\dim \operatorname{Alt}_{n-1}(L) = n$, conclue-se que φ é na verdade um isomorfismo.

A fórmula (1) estabelece-se fàcilmente verificando a igualdade das componentes homólogas (valores nas n sequências de vectores $B_1, \cdots, \widehat{B}_j, \cdots, B_n; j = 1, \cdots, n$) dos tensores alternados de ordem $n-1$ que são $\varphi(B_i)$ e $(-1)^{i-1} \cdot \beta^1 \wedge \cdots \widehat{\beta^i} \wedge \cdots \wedge \beta^n$.

Da fórmula para a mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{B}'$:

$$B'_i = S^j_i B_j$$

deduz-se

$$\beta'^i = (S^{-1})^i_j \cdot \beta^j .$$

Sendo $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases ortonormadas do espaço euclidiano L, a matriz $S = [S^i_j]$, da mudança de base, sai ortogonal:

$$(S^{-1})^i_j = S^j_i \qquad (i, j = 1, \cdots, n).$$

Daí decorre fàcilmente que a aplicação

$$\psi : L \to L^*$$

dada pela correspondência

$$A = A^i B_i \longmapsto \alpha = \sum_{i=1}^{n} A^i \beta^i$$

é um isomorfismo independente da base ortonormada $\mathcal{B}$. É o *isomorfismo canónico* $L \to L^*$ *relativo ao espaço euclidiano* L.

DEFINIÇÃO II. Designe L um espaço euclidiano orientado. Chama-se *multiplicação vectorial sobre* L a aplicação

$$\wedge : L^{n-1} \to L$$

definida pela regra

$$\wedge(A_1, \cdots, A_{n-1}) = A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1} :$$
$$= \varphi^{-1}(\psi(A_1) \wedge \cdots \wedge \psi(A_{n-1}))$$

onde $\psi : L \to L^*$ e $\varphi : L \to \operatorname{Alt}_{n-1}(L)$ são os isomorfismos acima considerados.

O vector de L que é $A = A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}$ diz-se *produto vectorial* (ou externo) dos vectores $A_1, \cdots, A_{n-1}$.

A operação $\wedge : L^{n-1} \to L$ reduz-se no caso $L = R^3$ ao produto vectorial usual sobre R^3 (ver Nota (12)) como se infere da seguinte

PROPOSIÇÃO II. *O vector* $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{A}_{n-1}$ *tem por componente número* i *numa base* $\mathcal{B}^+_{\text{ort}} = \{\mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_n\}$ *o produto de* $(-1)^{i-1}$ *pelo determinante da matriz obtida suprimindo a linha número* i *da matriz* $\mathrm{n} \times (\mathrm{n}-1)$ *formada pelas componentes dos vectores* $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_{n-1}$:

$$(2) \qquad [\,\mathrm{A}^i_j\,]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n-1}}$$

DEM. Temos em primeiro lugar

$$\psi(A_1) \wedge \cdots \wedge \psi(A_{n-1}) =$$

$$= \sum_{j_1} A_1^{j_1} \beta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{j_{n-1}} A_{n-1}^{j_{n-1}} \beta^{j_{n-1}} =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-1} \leq n} \left(\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sg} \sigma \cdot A_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots A_{n-1}^{i_{\sigma(n-1)}} \right) \cdot$$
$$\cdot \beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_{n-1}}$$

como fàcilmente se reconhece (cf. fórmula da Nota (6), *a*)). Usando a fórmula (1) da Prop. I vem portanto

$$\varphi^{-1}(\psi(A_1) \wedge \cdots \wedge \psi(A_{n-1})) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \Big(\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sg} \sigma \cdot A_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots A_{n-1}^{i_{\sigma(n-1)}} \Big) \cdot B_i$$

com $i_1, \cdots, i_{n-1}$ designando os inteiros, por ordem natural, do conjunto $\{1, \cdots, \hat{i}, \cdots, n\}$; o que estabelece a Prop. II.

PROPOSIÇÃO III. *Tem-se*

$$< A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}, A_i > = 0 \quad (i = 1, \cdots, n-1),$$

quer dizer: o produto vectorial de $n-1$ *vectores é ortogonal a qualquer deles.*

DEM. Ampliar a matriz (2) à esquerda com a matriz-coluna das componentes do vector A_i e desenvolver o determinante da matriz quadrada obtida segundo a primeira coluna.

PROPOSIÇÃO IV. *A sequência dos* $n-1$ *vectores* $A_1, \cdots, A_{n-1}$ *é linearmente independente, se e só se o seu produto vectorial é diferente de zero. E a sequência*

$$\{A_1, \cdots, A_{n-1}, (-1)^{n-1} A_1, \wedge \cdots \wedge A_{n-1}\}$$

é então uma base de L *com a orientação de* L.

DEM. A independência linear de $\{A_1, \cdots, A_{n-1}\}$ equivale à de $\{\psi(A_1), \cdots, \psi(A_{n-1})\}$, ou seja a $\psi(A_1) \wedge \cdots \wedge \psi(A_{n-1}) \neq 0$ (ver Nota (6), b)) e portanto a $\varphi^{-1}(\psi(A_1) \wedge \cdots \wedge \psi(A_{n-1})) \neq 0$, isto é $A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1} \neq 0$.

Para estabelecer a segunda parte, ampliar a matriz (2) à direita com a matriz-coluna das componentes do vector $(-1)^{n-1} \cdot A_1 \wedge \wedge \cdots \wedge A_{n-1}$ (dadas pela Prop. II) e desenvolver o determinante da matriz quadrada obtida segundo a última coluna: obtem-se um número real > 0.

NOTAS

(1) Tensor alternado é, portanto, o mesmo que tensor covariante *anti-simétrico;* $\sigma T = -T$ para toda a transposição σ. Esta anti-simetria equivale à anti-simetria das componentes, em conformidade com a Prop. II a seguir.

Sobre as simetrias dos tensores covariantes, consultar SOURIAU [8], p. 198-202.

(2) Tensor alternado é, portanto, o mesmo que tensor covariante com o valor zero sempre que dois vectores consecutivos sejam iguais. É a definição que dá CARTAN [2], p. 11.

(3) Com a fórmula (1) exprimimos o produto exterior de tensores alternados em termos do seu produto tensorial, o que não é usual salientar-se.

CARTAN [2], p. 14 e DIXMIER [3], vol. 2, p. 66 definem o operador de anti-simetrização apenas para $s = 2$.

A generalização ao caso $s > 2$ é imediata e tem a vantagem de conduzir-nos directamente à importante representação (4) dos tensores alternados em termos de covectores.

(4) Pode definir-se um outro operador de anti-simetrização $\mathcal{T}_p(L) \to \mathrm{Alt}_p(L)$ mediante a regra

$$T \to \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sg} \sigma \cdot \sigma T.$$

Aplicado ao produto tensorial de p covectores, $\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^p$, estamos vendo que este operador igualmente nos dá o produto exterior $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p$.

(5) Se a sequência de s covectores $\{\beta^1, \cdots, \beta^s\}$ $(1 \leq s \leq n)$ é linearmente independente, ela pode ser ampliada a uma base $\{\beta^1, \cdots, \beta^s, \beta^{s+1}, \cdots, \beta^n\}$ de L^*. Seja $\{B_1, \cdots, B_n\}$ a base dual para L. Então, a fórmula (2) dá-nos logo

$$(\beta^s \wedge \cdots \wedge \beta^s)(B_1, \cdots, B_s) = 1.$$

(6) Da fórmula (3) vem fàcilmente o seguinte:

a) para toda a permutação $\sigma \in S_s$.

$$\alpha^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha^{\sigma(s)} = \operatorname{sg} \sigma \cdot \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s;$$

b) para que s covectores $\alpha^1, \cdots, \alpha^s$ sejam linearmente independentes é condição necessária e suficiente que o seu produto exterior seja diferente de zero (cf. Nota (5)).

(7) Tem-se $\det_{\mathcal{B}}(A_1, \cdots, A_n) = 0$ se e só se os vectores $A_1, \cdots, A_n$ são linearmente dependentes. (Observar que

$$\{T, T' \in \mathrm{Alt}_n(L),\ T \neq 0,\ T(A_1, \cdots, A_n) = 0\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow T'(A_1, \cdots, A_n) = 0.)$$

(8) Se Φ e Ψ são endomorfismos $L \to L$, conclue-se que é $\det(\Psi \circ \Phi) = \det \Psi \cdot \det \Phi$.

(9) O desenvolvimento de LAPLACE de um determinante por menores complementares estabelecer-se-ia nesta altura com um simples cálculo exterior; ver FLANDERS [4], p. 10.

(10) Na sequência da Nota (8) deduz-se imediatamente a regra para o determinante do produto de duas matrizes quadradas da mesma ordem.

(11) A fórmula $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} \cdot \det_{\mathcal{B}}$ da Prop. I do § 5 permite definir uma relação de equivalência: $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ se e só se $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0$. Então, fixar uma orientação de L é fixar uma das duas classes desta relação de equivalência.

Posto $B'_i = S^j_i B_j$, notemos que é $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \det [S^j_i]$.

(12) Para um estudo do produto vectorial em R^3 ver o Cap. IV de NICKERSON-SPENCER-STEENROD [6].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BIRKHOFF-S. MAC LANE, *Algebra* (Mac Millan, 1968).

[2] H. CARTAN, *Formes différentielles* (Hermann, 1967).

[3] J. DIXMIER, *Cours de Mathématiques du premier cycle* (Gauthiers-Villars, dois tomos: première année, 1969; deuxième année, 1968).

[4] H. FLANDERS, *Differential Forms* (Academic Press, 1963).

[5] S.-T. HU, *Elements of Modern Algebra* (Holden Day, 1965).

[6] H. K. NICKERSON-D. C. SPENCER-N. E. STEENROD, *Advanced Calculus* (Van Nostrand, 1959).

[7] S. LANG, *Introduction to Differentiable Manifolds* (J. Wiley, 1966).

[8] J.-M. SOURIAU, *Géométrie et Relativité* (Hermann, 1964).

Partições de um conjunto formadas por conjuntos de cardinalidade dada

por Edison Farah
Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo ; São Paulo, Brasil

1. Nesta pequena Nota apresentamos uma solução do seguinte problema, que nos foi proposto pelo Prof. NEWTON C. A. da COSTA, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo:

Dado um conjunto M, *de número cardinal* $\alpha \geq 2$, *e sendo* β *um número cardinal verificando* $2 \leq \beta \leq \alpha$, *calcular o número cardinal do conjunto das partições de* M, *formadas, cada uma, por conjuntos de mesmo cardinal* β.

Calculemos, primeiramente, o número $P(n,r)$ de partições de um conjunto *finito* com nr elementos $n \geq 2$, $r \geq 1$ formadas por conjuntos possuindo o mesmo número n de elementos. Deixando de lado o caso trivial $r=1$ (é óbvio que $P(n,1)=1$), consideremos um conjunto A, com nr elementos e fixemos um subconjunto B, de n elementos, de A. É claro que o número de partições de A, formadas, cada uma, por conjuntos com o mesmo número n de elementos, e ainda, em cada uma das quais figura o conjunto B, é $P(n,r-1)$, donde

$$P(n,r) = \binom{nr}{n} P(n,r-1);$$

e o leitor poderá, fàcilmente, verificar que, nesse cômputo, não houve omissão nem repetição de partições. Da fórmula acima se tira, sem dificuldade,

$$P(n,r) = \binom{n}{n}\binom{2n}{n}\cdots\binom{rn}{n},$$

que se aplica, também, para $r=1$.

Suponhamos, agora, M infinito e, para cada conjunto X, ponhamos $\overline{\overline{X}}$ = número cardinal de X. Observemos, primeiramente, que, dado um conjunto *infinito*, qualquer, A, de cardinal α, e considerando-se o número cardinal β, $2 \leq \beta \leq \alpha$, existem ao menos duas partições de A formadas, cada uma, por conjuntos de mesmo cardinal β. Com efeito, sendo B um subconjunto de A, de cardinal β, e atendendo-se a que o produto cartesiano $B \times A$ é equipotente a A (o que decorre do Axioma da Escolha) por uma bijeção, digamos f, de $B \times A$ sôbre A, então, pondo-se, para cada $x \in A$, $B_x = f(B \times \{x\})$, os B_x formarão uma partição de A, com $\overline{\overline{B_x}} = \beta$, $\forall x \in A$; fixando-se, nessa partição, dois conjuntos diferentes e, em cada um dêstes, um elemento, então, trocando-se entre si êsses dois elementos, obtém-se, evidentemente, uma nova partição nas condições desejadas, donde a veracidade de nossa afirmação. Notemos também, que se γ é o número cardinal de um conjunto *infinito*, C, então o conjunto de tôdas as partições de C tem número cardinal inferior ou igual a 2^γ; com efeito, o referido conjunto de partições é equipotente ao conjunto das relações de equivalência sôbre C, e portanto, equipotente a uma parte do conjunto das partes do produto cartesiano $C \times C$, donde, por ser $\overline{\overline{C \times C}} = \overline{\overline{C}} = \gamma$, resulta o que se afirmou.

Consideremos, agora, uma partição de M formada pelos conjuntos M_x, $x \in M$, ($M_x \cap M_y = \emptyset$ para $x \neq y$), partição essa, cuja existência se pode assegurar, em virtude da primeira das observações acima; e, para cada $x \in M$, seja P_x o conjunto das partições de M_x, cada uma formada por conjuntos de mesmo cardinal β. Então, pelas observações de há pouco, tem-se:

$$2 \leqq \overline{\overline{\mathsf{P}}}_x \leqq 2^\alpha, \qquad \forall x \in M,$$

donde, pondo-se

$$\mathsf{H} = \prod_{x \in M} \mathsf{P}_x$$

(produto cartesiano da família $(P_x)_{x \in M}$ de conjuntos P_x de partições), resulta $\overline{\overline{\mathsf{H}}} \leqq 2^\alpha$. Consideremos, agora, para cada $\lambda \in \mathsf{H}$, a reunião

$$\mathsf{H}_\lambda = \bigcup_{x \in M} P_x.$$

onde $\lambda = (P_x)_{x \in M}$ (e portanto, para cada $x \in M$, $P_x \in \mathsf{P}_x$). Ora, é óbvio que H_λ é uma partição de M, formada por conjuntos de mesmo número cardinal β; por outro lado, se $\mu \neq \lambda$, $\mu \in \mathsf{H}$, então $\mathsf{H}_\lambda \neq \mathsf{H}_\mu$. Logo, *o número cardinal do conjunto das partições de* M, *cada uma formada por conjuntos de mesmo número cardinal* β, *é* 2^α.

2. Número de partições de um conjunto. Do que se constatou no n.º precedente, resulta, imediatamente, que: *se* α *é o número cardinal de um conjunto infinito,* M, *então o número cardinal do conjunto de tôdas as partições de* M *é* 2^α. Êste resultado, aliás, foi obtido diretamente, em [1], mostrando-se que *o número cardinal do conjunto das partições binárias do conjunto infinito* M *é* 2^α, o que, por sua vez, decorre do fato de que, fixando-se um elemento $a \in M$, a função

$$X \to \{X, M - X\},$$

definida no conjunto das partes não vazias de $M - \{a\}$, é biunívoca (e, naturalmente, também do fato, já observado no n.º 1 desta Nota, de que o número cardinal do conjunto de todas as partições de M é inferior ou igual a 2^α). Quando M é finito, o cálculo do número de partições de M se torna menos trivial. Acolhendo uma sugestão do Prof. NEWTON C. A. da COSTA, reproduziremos, a seguir, a solução apresentada em [1].

Seja m o número de elementos do conjunto finito $M \neq \phi$. Designando-se por x_r $(1 \leqq r \leqq m)$ o número de partições de M, cada uma com r conjuntos, e por $S_{m,r}$ o número de aplicações de M *sôbre* o conjunto $\{1, \cdots, r\}$, tem-se:

$$r!\, x_r = S_{m,r}.$$

Multiplicando-se ambos os membros dessa igualdade por $\binom{p}{r}$ $(1 \leqq p \leqq m)$ e somando-se em relação a r, vem

$$\sum_{r=1}^{p} r! \binom{p}{r} x_r = \sum_{r=1}^{p} \binom{p}{r} S_{m,r}.$$

Como somatório da direita é, precisamente, o número das aplicações de M *no* conjunto $\{1, \cdots, r\}$, ter-se-á

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{p} a_{p,r}\, x_r = p^m,$$

onde, por comodidade, puzemos $a_{p,r} = n! \binom{p}{r}$ (para $p < r$, poremos $a_{p,r} = 0$). Tomando-se $p = 1, \cdots, n$ $(n \leqq m)$ obteremos, a partir de (1), um sistema de n equações lineares nas incógnitas $x_1, \cdots, x_n$. Ora, sendo $P_{m,n}$ o número de partições de M, cada uma possuindo no máximo n conjuntos, ter-se-á $P_{m,n} = x_1 + \cdots + x_n$. Pondo-se, então, $b_{p,r} = a_{p,r} + p^m$ $(1 \leqq p \leqq n,\ 1 \leqq r \leqq n)$ e sendo D_n o determinante da matriz $((b_{p,r}))$, obtém-se, efectuando-se os cálculos:

$$P_{m,n} = \frac{D_n}{1!\,2!\cdots n!} - 1\,,$$

donde o número de partições de M é

$$P_{m,m} = \frac{D_m}{1!\,2!\cdots m!} - 1\,.$$

OBSERVAÇÃO. A noção de conjunto finito é aqui considerada no sentido aritmético habitual (um conjunto A é *finito* se existe um número natural n tal que A é equipotente ao conjunto dos naturais estritamente inferiores a n); e um conjunto será *infinito* se não fôr finito. No caso em que M é infinito, pressupuzemos, na solução do problema, o Axioma da Escolha, notadamente ao considerarmos a equipotência entre M e $M \times M$ (ver [2], págs. 148-150).

BIBLIOGRAFIA

[1] EDISON FARAH, «*Number of equivalence relations on a set*» (Ciência e Cultura, Vol 18, n.º 4, 1966).

[2] A. TARSKI, «*Sur quelques théorèmes qui equivalent à l'axiome du choix*» (Fundamenta Mathematicae, Vol. 5, 1924).

Concurso

A «Gazeta de Matemática» com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian, promoveu no seu número 94-95 de Janeiro-Junho de 1964 concurso de trabalhos de matemática a que podiam concorrer quaisquer indivíduos residentes no País.

Infelizmente as respostas recebidas foram em número tão reduzido que se considera não atingido o objectivo a que se propunha.

O Júri, constituído por:

Fernando Roldão Dias Agudo
Fernando de Jesus
José Duarte da Silva Paulo
José Gaspar Teixeira,

tendo submetido a apreciação dos trabalhos a especialistas portugueses e estrangeiros resolveu apresentar os resultados seguintes:

1 — Número de concorrentes — 4

Assuntos versados:
Matemática Elementar
Pedagogia da Matemática
Matemática Pura
Matemática Aplicada

2 — Candidatos premiados, títulos dos trabalhos e classificação do prémio:

Manuel Joaquim Sousa Ventura
Didáctica da Matemática
Secção B — 1.º prémio — 7.000$00.

Francisco Teixeira de Queiroz
Panorama da Geodesia Contemporânea
Secção B — 2.º prémio — 3.000$00

Pelo Júri
A Redacção

XII Congresso Internacional de História da Ciência

Em Paris, no Conservatório Nacional de Artes e Ofícios, realizou-se de 25 a 31 de Agosto de 1968 o XII Congresso Internacional de História da Ciência.

Desta notável reunião científica estão a ser publicados em 13 ou 14 volumes as actas dos diversos colóquios realizados, as comunicações apresentadas e as discussões, os discursos e as conferências plenárias proferidas.

M. Albert Blanchard e a sua Livraria Científica A. Blanchard, mais uma vez dão a sua activa colaboração à História da Ciência com a publicação dos referidos trabalhos que ficará completa ainda no decorrer de 1971.

A «Gazeta de Matemática» espera poder contribuir pelo seu lado com uma referência pormenorizada a estas realizações.

J. G. T.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

PROGRAMA DA CADEIRA DE INTRODUÇÃO AOS COMPUTADORES E PROGRAMAÇÃO, DO 1.º SEMESTRE DO 1.º ANO DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

1. Evolução histórica dos instrumentos de cálculo e das máquinas de cartões e de fita perfurada, com particular referência para os de carácter digital: o ábaco, a máquina de PASCAL, a máquina de calcular vulgar, as máquinas de JACQUARD, de BABAGGE, de HOLLERITH, as tabuladoras, calculadoras, etc.

2. Estrutura dos modernos computadores, com indicação de algumas das suas possíveis unidades de entrada e saída. Breve referência aos primeiros computadores e às várias gerações de computadores. Conceito de computador de programa armazenado internamente.

3. Sistemas de numeração. Operações em várias bases e conversão de umas para outras. Exemplos da mesma operação realizada com os mesmos números considerados em bases diferentes. Bases binária e hexadecimal. Referência especial à base octal.

4. Estudo de um computador virtual. Discussão de tópicos tais como comprimento das palavras, sistema de numeração, capacidade de memória, reportório de instruções e seus formatos, registos, etc. Ciclos de instrução. Ciclos de execução. Entradas e saídas; interrupções. Conceitos de programa e instrução. Os vários tipos de instruções: aritméticas, de controle, de entrada e saída e declarativas.

5. Técnicas de programação. Diagramas de blocos. Modificação de endereços em memória. Breve referência às sub-rotinas.

6. Estudo da linguagem simbólica do computador estudado no Capítulo 4. As várias fases da passagem de programas em computadores: tradução para linguagem máquina e execução. Macroinstruções.

7. Estudo de alguns dos possíveis erros e seus diagnósticos. Breve estudo da análise numérica de erros, com enfase para a sua propagação. Exemplos.

8. Aritmética de vírgula flutuante. Notações. Números normalizados. Precisão dos cálculos efectuados em vírgula flutuante. Precisão simples e precisão aumentada.

9. Aritmética de precisão multipla; aritmética modular. Métodos digitais e modulares da multiplicação. Aritmética racional.

10. Estudo intensivo de algumas linguagens automáticas: FORTRAN, ALGOL, linguagem de IVERSON, etc. Resolução numérica de problemas matemáticos de carácter elementar: cálculos com polinómios, sucessões e séries, funções transcendentes elementares, números complexos, vectores e matrizes, etc.

11. Técnicas digitais de tracejamento de gráficos. Técnicas interactivas.

12. Breve referência a técnicas avançadas, tais como: linguagens conversacionais, multiprogramação e multiprocessamento, tempo partilhado, memórias virtuais, etc.

J. M. H.

Leitores da «Gazeta de Matemática»! Enviem-nos os nomes e moradas dos vossos amigos que podem e devem interessar-se por esta revista. Contribuirão assim eficientemente para que a «Gazeta de Matemática» se torne cada vez mais interessante e útil.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência (1.ª chamada) — 14-3-1969.

I

5706 — 1) A partir da axiomática de corpo prove que, para qualquer corpo K,

a) $0 = -0$

b) $a \cdot b = a \cdot c \wedge a \neq 0 \Longrightarrow b = c$

c) $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

2) Demonstre que o lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que

$$\forall \lambda \in R \text{ e } z_1, z_2 \in C \; \frac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda$$

é a recta corrente pelas imagens de z_1 e z_2.

R.: 1) a) *Como* $0 + 0 = 0$ *resulta logo* $0 = -0$.

b) *Como* $a \neq 0$ *existe* a^{-1} *e então de* $a \cdot b = a \cdot c$ *conclui-se que* $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$ *ou* $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c \cdot$ *Dado que* $a^{-1} \cdot a = 1$, *vem finalmente* $1 \cdot b = 1 \cdot c$ *ou* $b = c$.

c) *Supondo, por exemplo,* $b \neq 0$, *vem de* $a \cdot b = 0$ *a relação* $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0$, *ou* $a \cdot 1 = 0$, *donde* $a = 0$. Mutatis mutandis *para* $a \neq 0$.

2) *Fazendo* $z = x + iy$, $z_1 = a + bi$ *e* $z_2 = c + di$, *a relação* $\frac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda$ *pode escrever-se na forma*

$$\frac{(x - a) + (y - b)i}{(x - c) + (y - d)i} = \lambda,$$

ou

$$(x - a) + (y - b)i = \lambda[(x - c) + (y - d)i].$$

Vem então $\begin{cases} x - a = \lambda(x - c) \\ y - b = \lambda(y - d) \end{cases}$ *e, eliminando* λ, *vem* $\frac{x - a}{y - b} = \frac{x - c}{y - d}$ *que é a equação da recta que passa pelos pontos* (a, b) *e* (c, d).

II

5707 — 1) Seja

$$X = \{x : x = (-1)^n + 1/m \quad (m, n = 1, 2, \cdots)\}.$$

Justificando as respostas, indique os seguintes conjuntos: $\operatorname{int} X$, $\operatorname{ext} X$, $\operatorname{front} X$ e derivado de X. Indique também $\sup X$ e $\inf X$. O conjunto X é fechado? É aberto? Porquê?

2) Seja u_n o termo geral de uma sucessão que possui a propriedade seguinte: existe um número natural m e um número real k $(0 < k < 1)$ tais que, para todo o número natural $n \geqq m$, é $|u_{n+1}| \leqq k\,|u_n|$. Mostre que $\lim u_n = 0$.

Calcule $\lim \left(\sqrt[9]{1 + \frac{n^2}{e^n}} - 1 \right) \frac{n}{\log n}$.

R.: 1) $\mathit{int}\, X = \emptyset$

$\mathit{ext}\, X = R - (X \cup \{-1, 1\})$

$\mathit{front}\, X = X \cup \{-1, 1\}$

$X' = \{-1, 1\}$

$\mathit{sup}\, X = 2$

$\mathit{inf}\, X = -1$.

O conjunto X *não é fechado porque não contém o seu derivado e também não é aberto porque* $X \neq \mathit{int}\, X$.

2) *De*

$$|u_{m+1}| \leqq k\,|u_m|$$
$$|u_{m+2}| \leqq k\,|u_{m+1}|$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|u_{m+p}| \leqq k\,|u_{m+p-1}|,$$

vem

$$|u_{m+p}| \leqq k^p\,|u_m|, \text{ ou } |u_n| \leqq k^{n-m}\,|u_m| \quad (n = m + p).$$

Como $k^{n-m} \to 0$, *resulta imediatamente* $\lim u_n = 0$.

Notando que

$$\sqrt[9]{1 + \frac{n^2}{e^n}} - 1 = \frac{1}{9} \zeta \frac{n^2}{e^n} \, (\zeta \to 1),$$

vem

$$lim\left(\sqrt[9]{1+\frac{n^2}{e^n}}-1\right)\frac{n}{log\,n}=$$

$$=\frac{1}{9}\,lim\,\zeta\,\frac{n^3}{e^n}\cdot\frac{1}{log\,n}=0\,.$$

III

5708 — 1) Admitindo que Σu_n converge absolutamente, e tendo em conta a evanescência do termo geral, demonstre que cada uma das séries seguintes também converge absolutamente:

$$a)\ \Sigma u_n^2\quad b)\ \Sigma\frac{u_n}{1+u_n}\ (u_n\neq-1)\quad c)\ \Sigma\frac{u_n^2}{1+u_n^2}\,.$$

2) Supondo que $\lim\limits_{x=a} f(x)=A$ e que $f(x)>0$ em certa vizinhança do ponto a, prove que $A\geqq 0$. Utilize esta proposição para demonstrar que, sendo $\lim\limits_{x=a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x=a} g(x)=B$ e $f(x)<g(x)$ em certa vizinhança do ponto a, então $A\leqq B$.

R.: 1) a) $lim\,\frac{u_n^2}{|u_n|}=0$, *isto é, a partir de certa ordem é* $\frac{u_n^2}{|u_n|}<\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ *ou* $u_n^2<\varepsilon\,|u_n|$. *Como* $\Sigma\,\varepsilon\,|u_n|$ *converge, também converge (absolutamente)* Σu_n^2.

b) $lim\left|\frac{u_n}{1+u_n}\right|/|u_n|=1$ *o que implica que a série* $\Sigma\left|\frac{u_n}{1+u_n}\right|$ *é convergente.*

c) $lim\,\frac{u_n^2}{1+u_n^2}/u_n^2=1$ *e portanto, atendendo à alinea* a), *pode garantir-se que* $\Sigma\,\frac{u_n^2}{1+u_n^2}$ *converge (absolutamente).*

2) *Supondo* A *finito, se pudesse ser* $A<0$, *então, escolhido* $\delta<0$ *tal que* $A+\delta<0$, *existiria* $\varepsilon>0$ *tal que* $x\in V_\varepsilon(a)\wedge x\neq a\Longrightarrow A-\delta<f(x)<A+\delta<0$ *e já não poderia ter-se* $f(x)>0$ *numa vizinhança do ponto* a. *Idêntico raciocínio para* A *infinito.*

A segunda parte tira-se imediatamente desta proposição, notando que $g(x)-f(x)>0$ *em certa vizinhança do ponto* a *e que* $\lim\limits_{x=a}[g(x)-f(x)]=B-A$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência (2.ª chamada) — 22-3-1969.

I

5709 — 1) A partir da axiomática de corpo prove que, em qualquer corpo K, são satisfeitas as propriedades seguintes:

a) Se $a\neq 0$ então $a\cdot c=b$ se e só se $c=a^{-1}\cdot b$.
b) $a\cdot 0=0\cdot a=0$.
c) $a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$.

2) Designando x e y números reais, demonstre que

a) $x>0\wedge y>0\Longrightarrow x+y>0\wedge x\cdot y>0$.
b) $x<0\wedge y>0\Longrightarrow x\cdot y<0$.

R.: 1) a) *Se* $a\neq 0$ *existe* a^{-1} *e, de acordo com a relação* $a\cdot c=b$, *vem* $a^{-1}\cdot(a\cdot c)=a^{-1}\cdot b$ *ou* $c=a^{-1}\cdot b$. *Recìprocamente, de* $c=a^{-1}\cdot b$ *vem* $a\cdot c=a\cdot(a^{-1}\cdot b)$ *ou* $a\cdot c=b$.

b) *Notando que* $a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$, *tem-se* $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

c) *Basta observar que*

$$0=a\cdot 0=a\cdot[b+(-b)]=a\cdot b+a\cdot(-b)\,.$$

Desta relação se tira que $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$. *Anàlogamente se conclui que* $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$.

2) a) *Sendo* $x=[X_1,X_2]$ *e* $y=[Y_1,Y_2]$, *tem-se*

$$x>0\Longleftrightarrow 0\in X_1$$
$$y>0\Longleftrightarrow 0\in Y_1\,.$$

Ora $0\in X_1\wedge 0\in Y_1\Longrightarrow 0\in X_1+Y_1$ *o que prova que* $x+y>0$. *Designando* X_1Y_1 *o conjunto dos produtos inferiores* $x_1y_1\ (x_1>0\wedge y_1>0)$ *é também evidente que a secção inferior de* xy *contém* 0 *e portanto* $xy>0$.

b) *Sendo* $x<0$ *é fácil mostrar que* $-x>0$ *e, por definição, vem* $xy=-[(-x)y]$. *O resultado anterior assegura que* $(-x)y>0$ *e portanto* $xy<0$.

II

5710 — 1) Sendo $A=\{a:a=(-1)^n(1+2/n)^n\ (n=1,2,\cdots)\}$ e $B=[-10,1]$, indique, justificando as respostas, o derivado de $A\cup B$, o fecho de $A\cup B$, $\mathrm{int}(A\cup B)$, $\mathrm{front}(A\cup B)$, $\sup(A\cup B)$ e $\inf(A\cup B)$.

2) Seja u_n o termo geral de uma sucessão limitada que não possui um termo superior a todos os outros. Prove que $\sup(u_n)=\overline{\lim}\,u_n$. Verifique a proposição com $u_n=(-1)^n(1-1/n)$:

Determine a e b, sabendo que $a+b=1$ e que $\lim n\left(e^{a/n}-\dfrac{b}{n}-1\right)=2$.

R.: 1) $(A\cup B)'=[-10,1]\cup\{e^2\}$.

$\overline{A\cup B}=[-10,1]\cup$

$\cup\left\{a:a=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n (n=2,4,6,\cdots)\right\}\cup\{e^2\}$.

$int(A\cup B)=]-10,1[$.

$front(A\cup B)=\{-10,1,\ a=(-1)^n(1+2/n)^n\ (n=1,2,\cdots),e^2\}$.

$sup(A\cup B)=e^2$.

$inf(A\cup B)=-10$.

2) *Como a sucessão é limitada e não possui um termo superior a todos os outros, pode garantir-se que* (u_n) *tem supremo finito e esse supremo terá de ser ponto de acumulação de* (u_n) *não pertencente a* (u_n). *Tal ponto de acumulação será o maior dos sublimites e portanto* $\overline{lim}\, u_n$.

A sucessão $u_n=(-1)^n(1-1/n)$ *é limitada* ($|u_n|<1$) *e não possui um termo superior a todos os outros. O* $sup(u_n)=1$ *e* 1 *é* $\overline{lim}\, u_n$ *pois* $u_{2n}\to 1$ *e* $u_{2n-1}\to -1$. *Notando gue*

$$lim\ n\left(e^{a/n}-\frac{b}{n}-1\right)=lim\ n\left(\xi\frac{a}{n}-\frac{b}{n}\right)=$$
$$=lim(\xi a-b)=a-b,$$

vem $a-b=2$ *que, juntamente com a condição* $a+b=1$, *dá* $a=3/2$ *e* $b=-1/2$.

III

5711 — 1) Mostre que as séries de potências $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma n\, a_n x^{n-1}$ e $\Sigma \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ possuem o mesmo intervalo de convergência absoluta $]-\lambda,\lambda[$. Tome $a_n=1/n$ para justificar que as três séries podem apresentar comportamentos diferentes para $x=\pm\lambda$.

2) Considere a função real de variável real

$$x\to f(x)=\lim_{n=\infty}\frac{x^n+2}{x^{n+1}+x^n+1}.$$

Mostre que ela também pode ser definida do modo seguinte:

$$x\to f(x)=\begin{cases}1/x+1 & (x<-1)\\ 2 & (-1<x<1)\\ 1 & (x=1)\\ 1/x+1 & (x>1).\end{cases}$$

A função é contínua para $x=1$? Porquê?

R.: 1) *As três séries possuem o mesmo intervalo de convergência absoluta porque*

$$\overline{lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{lim}\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}=\overline{lim}\sqrt[n]{|a_{n-1}|/n}.$$

Tomando $a_n=1/n$ *obtêm-se as séries* $\Sigma\dfrac{x^n}{n}$, Σx^{n-1} *e* $\Sigma\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ *para as quais o intervalo de convergência absoluta é* $]-1,1[$. *No entanto,* $\Sigma\dfrac{x^n}{n}$ *diverge para* $x=1$ *e converge para* $x=-1$; Σx^{n-1} *diverge para* $x=\pm1$; *e* $\Sigma\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ *converge para* $x=\pm1$.

2) *Com* $|x|>1$ *vem*

$$\lim_{n=\infty}\frac{x^n+2}{x^{n+1}+x^n+1}=\lim_{n=\infty}\frac{1+2/x^n}{x+1+1/x^n}=\frac{1}{x+1}.$$

Para $|x|<1$ *é* $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{x^n+2}{x^{n+1}+x^n+1}=2$ *e* $f(1)=1$. *Para* $x=-1$ *a função não é definida porque não existe* $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{(-1)^n+2}{(-1)^{n+1}+(-1)^n+1}=\lim\limits_{n=\infty}[(-1)^n+2]$.

A função não é contínua em $x=1$ *porque não existe* $\lim\limits_{x=1}f(x)$. *De facto,* $f(1-0)=2$ *e* $f(1+0)=1/2$. *A função não apresenta continuidade lateral no ponto* $x=1$ *porque* $f(1-0)\neq f(1+0)\neq f(1)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência — 1.ª chamada — Duração — 3 horas — 14-6-1969.

I

5712 — 1) Utilize a identidade $2\max(f,g)=|f-g|+f+g$ para demonstrar que, sendo f e g funções contínuas para $x=a$, também $\max(f,g)$ é função contínua para $x=a$. Mostre também que $\min(f,g)$ é contínua para $x=a$.

Estude a continuidade e extreme a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2\ (1\leq x<2)\\ 5\ (x=2)\\ -x\ (2<x\leq 3).\end{cases}$$

Indique os extremos absolutos (caso existam) e relativos. Justifique as respostas.

R.: *Basta notar que* $|f-g|$ *e* $f+g$ *são funções contínuas para* $x=a$. *Para a segunda parte observe-se que* $\min(f,g) = -\max(-f,-g)$.

A função $f(x)$ *é contínua em* $[1,2[\cup]2,3]$ *e descontínua para* $x=2$. *Tem-se*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & (1 \leq x < 2) \\ \pm\infty & (x=2) \\ -1 & (2 < x \leq 3) \end{cases}$$

o que permite concluir que os mínimos locais são $f(1)=1$ e $f(3)=-3$, *e o máximo local é* $f(2)=5$. *É claro que o máximo absoluto é* $f(2)=5$ *e o mínimo absoluto é* $f(3)=-3$.

2) Supondo que f admite primeira e segunda derivada em $[a,b]$ e que são cumpridas as condições $f(a)=f(b)=0$ e $f(c)>0$ $(a<c<b)$, demonstre que $\exists\, \xi \in\,]a,b[: f''(\xi)<0$.

R.: *A função* f *é regular. A aplicação do teorema de Lagrange dá*

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(c_1) > 0 \quad (a<c_1<c)$$

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(c_2) < 0 \quad (c<c_2<b)$$

$$\frac{f'(c_2)-f'(c_1)}{c_2-c_1} = f''(\xi) < 0 \quad (c_1<\xi<c_2)$$

o que prova a proposição.

3) Prove que o desenvolvimento em série de Mac-Laurin de $y = \dfrac{1}{(1-k^2x^2)^2}$ $(k>0)$ é

$$\sum_0^\infty (n+1)\, k^{2n} x^{2n}$$

para $|x|<1/k$.

R.: *A fórmula do binómio dá, para* $|x|<1/k$,

$$(1-k^2x^2)^{-2} =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{-2(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-k^2x^2)^n$$

$$= \sum_0^\infty \frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!} k^{2n} x^{2n}$$

$$= \sum_0^\infty (n+1)\, k^{2n} x^{2n}.$$

4) Calcule $P\dfrac{1}{2+\cos x}$.

R.: *Fazendo a substituição* $tg\dfrac{x}{2}=t$, *vem*

$$P\frac{1+2\cos x}{1} = P\frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2} =$$

$$= 2P\frac{1}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, P\frac{1\sqrt{3}}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\, arctg\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\, arctg\left(\frac{tg\dfrac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

II

5713 — 1) Seja dada $A=[a_{ij}]\,(m\times n)$ e considerem-se as somas por colunas $\sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ $(j=1,2,\cdots,n)$. Define-se o módulo de A, $M(A)$, como

$$\max_j\left\{\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (j=1,2,\cdots,n)\right\}.$$

Prove que

a) $M(I)=1$.

b) $M(\lambda A) = |\lambda|\, M(A)$ para qualquer escalar λ.

c) $M(A+B) \leq M(A)+M(B)$.

R.: a) *Para a matriz identidade* I *tem-se*

$$\sum_{i=1}^m |a_{ij}| = 1, \ \forall j.$$

Logo é $M(I)=1$.

b) *Como* $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$ *e*

$$\sum_{i=1}^m |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \sum_{i=1}^m |a_{ij}|,$$

tem-se imediatamente o resultado.

c) *Com* $A=[a_{ij}]$ *e* $B=[b_{ij}]$ *é* $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$

e $\sum_{i=1}^m |a_{ij}+b_{ij}| \leq \sum_{i=1}^m |a_{ij}| + \sum_{i=1}^m |b_{ij}|$, *relação que conduz fàcilmente ao resultado.*

2) Utilize a teoria dos determinantes para calcular os valores de a e b por forma que os sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = b \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 + a\,x_2 = b \\ x_1 + x_3 = b \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

sejam equivalentes. Mostre que para esses valores de a e b os sistemas são ambos possíveis determinados e ache a solução comum.

R.: *O primeiro sistema é possível determinado porque* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

A sua solução vem dada pela regra de Cramer:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - b$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = b - 1$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 1 .$$

Para que o segundo sistema também seja possível determinado é preciso que $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a + 1 \neq 0$ *ou* $a \neq -1$. *E, para que seja equivalente ao primeiro, a sua solução terá de ser* $x_1 = 3 - b$, $x_2 = b - 1$ *e* $x_3 = 1$, *isto é,*

$$\begin{cases} 3 - b + a(b-1) = b \\ 3 - b + 1 = b \\ 3 - b - (b - 1) = 0 \end{cases}$$

sistema que dá $a = 1$ *e* $b = 2$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência — 2.ª chamada — Duração — 3 horas — 20-6-1969.

I

5714 — 1) Seja f contínua em $[a, b]$ e admita que x_1 e x_2 são maximizantes (minimizantes) de f que se supõe não constante entre x_1 e x_2. Prove, utilizando o teorema de Weierstrass, que existe um minimizante (maximizante) de f entre x_1 e x_2.

Indique, justificando, os pontos (próprios e impróprios) de continuidade) e de descontinuidade de $x \to f(x) = x\, e^{1/x}$.

R.: *Suponha-se que* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *são dois máximos de* $f(x)$. *Como* $f(x)$ *não é constante entre* x_1 *e* x_2, *seja* $f(x_3)$ *o mínimo absoluto em* $[x_1, x_2]$ *cuja existência é garantida pelo teorema de* Weierstrass. *Se* x_3 *não pertence a qualquer secção de invariabilidade,* $f(x_3)$ *é mínimo e não é máximo; se* x_3 *pertence a uma tal secção algum dos extremos desta cai entre* x_1 *e* x_2 *e ainda em tal ponto* $f(x)$ *tem ùnicamente mínimo.* Mutatis mutandis *para o caso de* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *serem dois mínimos.*

A função $x \to f(x)$ *é contínua em todos os pontos de* R *excepto* $x = -\infty$, $x = 0$, $x = +\infty$.

2) Utilize a função auxiliar definida por $g(x) = [f(x) - f(a)](x - b)$ para demonstrar que, sendo f regular em $[a, b]$, então $\exists\, c \in \,]a, b[$:

$$\frac{f(c) - f(a)}{b - c} = f'(c) .$$

R.: *A função* $g(x)$ *é regular e, como* $g(a) = g(b) = 0$, *o teorema de* Rolle *garante que* $g'(x) = f'(x)(x - b) + [f(x) - f(a)]$ *se anula para* $x = c$ $(a < c < b)$. *Então* $f'(c)(c - b) + [f(c) - f(a)] = 0$, *o que prova o teorema.*

3) Sabendo que $x \to f(x) = k\,x - \dfrac{x^3}{1 + x^2}$ é crescente $\forall\, x \in R$, mostre que $k \geq 9/8$.

R.: $$f'(x) = K - \frac{x^4 + 3x^2}{(1 + x^2)^2} \geqq 0, \forall\, x \in R .$$

Tomando $g(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(1 + x^2)^3}$, *o seu máximo terá de ser inferior ou igual a* k. *Ora*

$$g'(x) = \frac{-2x^3 + 6x}{(1 + x^2)^3}$$

e $g'(0) = g'(\pm\sqrt{3}) = 0$. *Não é difícil reconhecer que* $\pm\sqrt{3}$ *são maximizantes e* $g(\pm\sqrt{3}) = 9/8$. *Logo,* $k \geqq 9/8$.

4) Calcule $P\,\dfrac{e^x(1 + x\log x)}{x}$.

R.: $$P\,\frac{e^x(1 + x\,log\,x)}{x} = P\,\frac{e^x}{x} + P\,e^x\,log\,x = $$
$$= P\,\frac{e^x}{x} + e^x\,log\,x - P\,\frac{e^x}{x} = e^x\,log\,x .$$

II

5715 – 1) Sendo A e B matrizes quadradas tais que AB e BA existem, demonstre que a soma dos elementos principais de AB e BA é a mesma.

Prove que matrizes diagonais da mesma ordem são permutáveis na multiplicação.

R.: *Fazendo* $P = AB$ *e* $Q = BA$ *vem* $p_{ij} = a_{i\alpha} b_{\alpha j}$ *e* $q_{ij} = b_{i\alpha} a_{\alpha j}$ *com* α *(mudo)* $= 1, 2, \cdots, n$. *Então* $p_{ll} = a_{l\alpha} b_{\alpha l}$ *e* $q_{ll} = b_{l\alpha} a_{\alpha l}$ *com* α *(mudo)* $= 1, 2, \cdots, n$. *Logo,* $\sum\limits_{l} p_{ll} = \sum\limits_{l} q_{ll} = a_{l\alpha} b_{\alpha l}$ *com* α *(mudo)* $= 1, 2, \cdots, n$ *e* l *(mudo)* $= 1, 2, \cdots, n$.

Para a segunda proposição, supondo A *e* B *diagonais da mesma ordem, vem*

$$p_{ij} = a_{i\alpha} b_{\alpha j} = \begin{cases} a_{ii} b_{ii} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$q_{ij} = b_{i\alpha} a_{\alpha j} = \begin{cases} b_{ii} a_{ii} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

o que prova que $P = Q$.

2) Utilize a teoria dos determinantes para calcular os valores de a e b por forma que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 - x_2 = b \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = a \end{cases}$$

seja possível. Ache nesse caso a solução do sistema.

R.: *A característica da matriz dos coeficientes é* 2 *pois, por exemplo,*

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. *Para que o sistema seja possível o teorema de* Rouché *exige que os determinantes característicos*

$$\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + b + 3a$$

$$\Delta'_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a - b$$

sejam nulos, isto é

$$\begin{cases} -2 + b + 3a = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

que dá $a = b = 1/2$. *O sistema dado é pois possível (determinado) para estes valores de* a *e* b *e é equivalente ao sistema constituído pelas equações principais* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1/2 \\ x_1 - x_2 = 1/2 \end{cases}$ *cuja solução é* $x_1 = 1/2$ *e* $x_2 = 0$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Julho — 1.ª chamada — Duração 3 horas — 5-7-1969.**

I

5716 — 1) Seja A subconjunto do conjunto fundamental U. A aplicação φ_A de U em $\{0, 1\}$ definida por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

é a chamada *função característica* de A. Demonstre que

a) $\varphi_{\sim A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$
b) $\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$
c) $\varphi_{A \cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_{A \cap B}(x)$.

R.: a) *Como*

$$\varphi_{\sim A}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \notin A \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0$$
$$\varphi_{\sim A}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in A \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1,$$

a igualdade é óbvia.

b) *Notando que*

$$\varphi_{A \cap B}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 1$$

$$\varphi_{A \cap B}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \notin A \cap B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 0 \\ x \notin A \wedge x \in B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 1 \\ x \notin A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 0, \end{cases}$$

vem imediatamente

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x).$$

c) *Tem-se*

$$\varphi_{A \cup B}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A \cup B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 0 \\ x \notin A \wedge x \in B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 1 \\ x \in A \wedge x \in B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 1 \end{cases}$$

$$\varphi_{A \cup B}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \notin A \cup B \Longleftrightarrow x \notin B \wedge x \notin B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 0$$

e, atendendo ao resultado da alínea b), *vem*

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_{A\cap B}(x).$$

2) Desenvolva $\log x$ segundo as potências de $y=(x-1)/(x+1)$. Para que valores de x é válido o desenvolvimento? Justifique.

R.: *De* $y=(x-1)/(x+1)$ *vem* $x=(1+y)/(1-y)$ *e portanto*

$$\log x = \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \log(1+y) - \log(1-y) =$$

$$= 2\sum_0^\infty \frac{y^{2n+1}}{2n+1} = 2\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$

terá de ser $|y| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$, *donde resulta* $x>0$.

3) Calcule $P\,1/(\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x})$.

R.: *Fazendo* $5-x=t^4$, *vem*

$$P\frac{1}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}} = -P\frac{4t^3}{t+t^2} =$$

$$= -4P\frac{t^2}{t+1} = -4P\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right) =$$

$$= -4\frac{t^2}{2} + 4t - 4\log|t+1| =$$

$$= -2\sqrt{5-x} + 4\sqrt[4]{5-x} - 4\log|\sqrt[4]{5-x}+1|.$$

4) Estude a monotonia de $x \to f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ em $]0,\pi/2]$ e deduza desse estudo que $\forall x \in]0,\pi/2]$ $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq 2/\pi$ (a igualdade é verificada se e só se $x=\pi/2$).

R.: $f' = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \cos x\,\frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2}$ *e, como no intervalo indicado é* $\cos x > 0$ *e* $x - \operatorname{tg} x < 0$, *vem* $f' < 0$ *o que indica que a função é incessantemente decrescente em* $]0,\pi/2]$. *É claro que*

$$\forall x \in]0,\pi/2]\ \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \frac{\operatorname{sen}\pi/2}{\pi/2} = 2/\pi.$$

II

5717 — 1) Mostre que todas as matrizes permutáveis com $A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ têm a forma

$$B = \begin{bmatrix} \alpha&\beta&\gamma&\delta\\0&\alpha&\beta&\gamma\\0&0&\alpha&\beta\\0&0&0&\alpha\end{bmatrix}.$$

R.: *Fazendo* $B = \begin{bmatrix} a&b&c&d\\e&f&g&h\\i&j&k&l\\m&n&o&p\end{bmatrix}$, *vem*

$$AB = \begin{bmatrix} e&f&g&h\\i&j&k&l\\m&n&o&p\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad e \quad BA = \begin{bmatrix} 0&a&b&c\\0&e&f&g\\0&i&j&k\\0&m&n&o\end{bmatrix}$$

e a condição $AB = BA$ *implica*

$$\begin{cases} e=i=j=m=n=o=0\\ a=f=k=p\\ b=g=l\\ c=h\end{cases}$$

2) Prove que o determinante $|a_{ij}|$ não sofre alteração se se multiplica cada a_{ij} por p^{i-j}. Calcule

$$\begin{vmatrix} 1&1&1\cdots1\\-1&0&1\cdots1\\-1&-1&0\cdots1\\ \vdots&\vdots&\vdots\quad\vdots\\-1&-1&-1\cdots0\end{vmatrix}.$$

R.: *Como qualquer termo da matriz* $[a_{ij}]$ *é da forma* $t = a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\cdots a_{\alpha_n\beta_n}$, *multiplicando cada* a_{ij} *por* p^{i-j} *vem*

$$t' = p^{\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_i}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots a_{\alpha_n\beta_n} = t$$

pois $\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_i = 0$.

Adicionando a primeira linha do determinante dado a cada uma das restantes, vem o determinante triangular

$$\begin{vmatrix} 1&1&1\cdots1\\0&1&2\cdots2\\0&0&1\cdots2\\ \vdots&\vdots&\vdots\quad\vdots\\0&0&0\quad1\end{vmatrix}$$

cujo valor é 1.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª Cadeira — Exame final — Epoca de Julho — 2.ª chamada — Duração 3 horas — 11-7-1969.

I

5718 – 1) Prove as seguintes proposições relativas a conjuntos:

a) $A \cap B = A - (A - B)$

b) $B \subseteq A \Longleftrightarrow B = A - (A - B)$.

R.: a) $A - (A - B) = A \cap (\widetilde{A - B}) = A \cap$ $\cap (\widetilde{A \cap \sim B}) = A \cap (\sim A \cup B) = (A \cap \sim A) \cup$ $\cup (A \cap B) = \varphi \cup (A \cap B) = A \cap B$.

b) $B \subseteq A \Longleftrightarrow A \cap B = B \Longleftrightarrow B = A - (A - B)$

2) Supondo que a função f é par (ímpar), mostre que, possuindo derivadas para $x = 0$, são nulas as derivadas de ordem ímpar (par).

Sejam f e g funções ímpares com derivadas contínuas de ordem $\leqq 3$. Admitindo que $g'''(0) \neq 0$, calcule $\lim\limits_{x=0} \dfrac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)}$

R.: *Para função par tem-se*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ f'(x) &= -f'(-x) \\ f''(x) &= f''(-x) \\ f'''(x) &= -f'''(-x) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

o que implica $f'(0) = f'''(0) = \cdots = 0$. *Para função ímpar tem-se*

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ f'(x) &= f'(-x) \\ f''(x) &= -f''(-x) \\ f'''(x) &= f'''(-x) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

o que implica $f(0) = f''(0) = \cdots = 0$.

O limite apresentado conduz a uma indeterminação da forma $0/0$ *e a regra de Cauchy dá*

$$\lim_{x=0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{f'(x) - 4f'(2x) + 3f'(3x)}{g'(x) - 4g'(2x) + 3g'(3x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{f''(x) - 8f''(2x) + 9f''(3x)}{g''(x) - 8g''(2x) + 9g''(3x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{f'''(x) - 16f'''(2x) + 27f'''(3x)}{g'''(x) - 16g'''(2x) + 27g'''(3x)} = \frac{f'''(0)}{g'''(0)}.$$

3) Calcule $P \dfrac{1}{1 + 3\cos^2 x}$.

R.:

$$P \frac{1}{1 + 3\cos^2 x} = P \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + 3} = P \frac{\sec^2 x}{4 + tg^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2} P \frac{\frac{1}{2}\sec^2 x}{1 + \left(\frac{tg\, x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{tg\, x}{2}\right).$$

4) Para que valores de a e b o ponto $P(1, 3)$ é ponto de inflexão da imagem de $x \to f(x) = a x^3 + b x^2$? Justifique.

Escreva a equação da tangente à curva no ponto de inflexão.

R.:
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

A condição $f(1) = 3$, *juntamente com* $f''(1) = 0$, *dá* $a = -3/2$ *e* $b = 9/2$.

A tangente de inflexão é $Y - 3 = \dfrac{9}{2}(X - 1)$.

II

5719 – 1) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, ache as matrizes X que satisfazem à equação matricial $AX = XA$.

R.: *Tomando* $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, *vem*

$$AX = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_3 & x_2 - 2x_4 \\ -3x_1 + 4x_3 & -3x_2 + 4x_4 \end{bmatrix}$$

e

$$XA = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 & -2x_1 + 4x_2 \\ x_3 - 3x_4 & -2x_3 + 4x_4 \end{bmatrix}.$$

A condição $AX = XA$ *conduz ao seguinte sistema homogéneo duplamente indeterminado:*

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Um sistema fundamental de soluções é dado por

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ *e portanto a solução geral é*

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \dfrac{2}{3}\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

para quaisquer valores dos parâmetros α *e* β. *Tem-se então*

$$X = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & \dfrac{2}{3}\alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

2) Prove as relaçõss:

a)
$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

b)
$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ b_1 & a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_n & a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_1 \cdots c_n \\ 0 & a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

R.: a) *Basta desenvolver pelo teorema de Laplace o determinante no primeiro membro ao longo da primeira linha (coluna) e proceder de modo idêntico para o determinante no segundo membro para se obter o resultado.*

b) *Utilizando o teorema de Laplace para o segundo determinante ao longo da primeira linha e para o terceiro determinante ao longo da primeira coluna, obtém-se o primeiro.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Outubro (1.ª chamada) — Prova escrita — 1-10-1969.

I

5720 — 1) Estude do ponto de vista da reflexividade, simetria e transitividade as relações binárias seguintes:

a) $x \, S \, y \Longleftrightarrow x$ e y são primos entre si em N;
b) $x \, S \, y \Longleftrightarrow x - y < 1$ em R;
c) $x \, S \, y \Longleftrightarrow |x - y| < 3$ em R.

R.: a) *Não reflexiva, simétrica e não transitiva.*
b) *Reflexiva, não simétrica e não transitiva.*
c) *Reflexiva, simétrica e não transitiva.*

2) Utilizando os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, determine a, b e c por forma que $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x(a + b\cos x) - c \operatorname{sen} x}{x^5} = 1$.

R.: $$\frac{x(a + b \cos x) - c \operatorname{sen} x}{x^5} =$$

$$= \frac{x\left(a + b - \dfrac{b x^2}{2} + \dfrac{b x^4}{24} - \dfrac{b x^6}{6!} + \cdots\right) - cx + \dfrac{c x^3}{6} - \dfrac{c x^5}{120} + \cdots}{x^5} =$$

$$= \frac{(a + b - c)\, x + \left(\dfrac{c}{6} - \dfrac{b}{2}\right) x^3 + \left(\dfrac{b}{24} - \dfrac{c}{120}\right) x^5 + \cdots}{x^5}$$

Para que o limite seja 1 *é preciso que*

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ \dfrac{c}{6} - \dfrac{b}{2} = 0 \\ \dfrac{b}{24} - \dfrac{c}{120} = 1 \end{cases}$$

sistema cuja solução é $\begin{cases} a = 120 \\ b = 60 \\ c = 180 \end{cases}$.

3) Calcule $P \dfrac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^3}$.

R.: $$P \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^3} = P \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}(\log x) \frac{1}{x} =$$

$$= -\cos(\log x) \frac{1}{x^2} - 2 P \cos(\log x) \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= -\cos(\log x) \frac{1}{x^2} - 2\left[\frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^2} + 2P \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^3}\right] =$$

$$= -\frac{\cos(\log x)}{x^2} - 2\frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^2} - 4P\frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^3}$$

donde resulta

$$P \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^3} = \frac{1}{5}\left[-\frac{\cos(\log x)}{x^2} - 2\frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^2}\right].$$

4) Represente geomètricamente a função definida por $f(x) = 1 - e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x}$.

R.: *Domínio:* $]-\infty, +\infty[$.

Continuidade: contínua em todos os pontos próprios e em $x = +\infty$; *descontínua para* $x = -\infty$.

Variação: $f'(x) = e^{-x}(1 - e^{-x})$ *e portanto a função é decrescente em* $]-\infty, 0]$ *e crescente em* $[0, +\infty[$; *possui o mínimo* $f(0) = 1/2$.

Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = e^{-x}(2e^{-x} - 1)$$

e portanto a concavidade está voltada para cima em $]-\infty, \log 2]$ *e para baixo em* $]\log 2, +\infty[$; *existe um ponto de inflexão para* $x = \log 2$.

Assíntotas: $Y = 1$.

II

5721 — 1) Discuta a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 & m \\ 2 & -3 & 2 & n & -1 \end{bmatrix}$$

consoante os valores assumidos por m e n.

R.: *Condensando* A, *obtém-se*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & n+2 & 0 \end{bmatrix}$$

donde é fácil concluir a resposta:

$$m \neq 0 \begin{cases} n \neq -2 & r = 4 \\ n = -2 & r = 3 \end{cases}$$

$$m = 0 \begin{cases} n \neq -2 & r = 3 \\ n = -2 & r = 2 \end{cases}$$

2) Utilizando a teoria dos determinantes, calcule α e β por forma que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = \alpha \\ x_1 \qquad + \beta x_3 = 0 \end{cases}$$

seja possível indeterminado.

R.: *Tomando a matriz dos coeficientes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \beta \end{bmatrix},$$

β *terá de ser determinado por forma que a característica de* A *seja inferior a* 3. *Basta tomar* $|A| = 0$ *para obter* $\beta = 1$. *É claro que a característica de* A *passa a ser* 2 *porque* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Para que o sistema seja possível é preciso que o característico $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *se anule o que acontece para* $\alpha = 2$.

Portanto, para $\alpha = 2$ *e* $\beta = 1$ *o sistema é possível e simplesmente indeterminado.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Outubro (2.ª chamada) — 7-10-1969.

I

5722 — 1) Para quaisquer conjuntos A e B de U define-se a *soma simétrica* $A \oplus B$ do modo seguinte: $A \oplus B = A \cup B - (A \cap B)$. Prove que

a) $A \oplus B = B \oplus A$
b) $A \oplus A = \emptyset$
c) $(A \oplus B) \cap C = (A \cap C) \oplus (B \cap C)$

R: a) $A \oplus B = A \cup B - (A \cap B) = B \cup A - (B \cap A) = B \oplus A$

b) $A \oplus A = A \cup A - (A \cap A) = A - A = \emptyset$

c)
$$\begin{aligned}(A \oplus B) \cap C &= [(A \cup B) - (A \cap B)] \cap C = \\ &= [(A \cup B) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B})] \cap C = \\ &= \{[(A \cup B) \cap \tilde{A}] \cup [(A \cup B) \cap \tilde{B}]\} \cap C = \\ &= \{[(B \cap \sim A) \cup (A \cap \tilde{B})]\} \cap C = \\ &= [(B \cap C) \cap \tilde{A}] \cup [(A \cap C) \cap \tilde{B}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A \cap C) \oplus (B \cap C) &= [(A \cap C) \cup (B \cap C)] - \\ &\quad - [(A \cap C) \cap (B \cap C)] = \\ &= [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \cap [(\widetilde{A \cap C}) \cup (\widetilde{B \cap C})] \\ &= [(A \cap C) \cap (\widetilde{B \cap C})] \cup [(B \cap C) \cap (\widetilde{A \cap C})] \\ &= [(A \cap C) \cap \tilde{B}] \cup [(B \cap C) \cap \tilde{A}].\end{aligned}$$

2) Prove que $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = 1 + \sum_{1}^{\infty} (4n^2 + 2) x^n$ para $|x| < 1$:

R:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = (1+x)^3(1-x)^{-3} =$$
$$= (1+3x+3x^2+x^3)\sum_1^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n =$$
$$= (1+3x+3x^2+x^3)(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots) =$$
$$= 1+6x+18x^2+38x^3+\cdots$$

para $|x|<1$.

Para obter o termo geral do desenvolvimento note-se que o coeficiente de x^n $(n \geq 3)$ *é*

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 3\frac{(n-1)n}{2} +$$
$$+ \frac{(n-2)(n-1)}{2} = 4n^2+2.$$

Tem-se então

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = 1 + \sum_1^\infty (4n^2+2)x^n.$$

3) Calcule $P\left(\frac{\log x}{x}\right)^2$.

R:

$$P\left(\frac{\log x}{x}\right)^2 = P\frac{1}{x^2}\log^2 x =$$
$$= -\frac{1}{x}\log^2 x + 2P\frac{\log x}{x^2} =$$
$$= -\frac{1}{x}\log^2 x + 2\left(-\frac{1}{x}\log x + P\frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{x}\log^2 x - \frac{2}{x}\log x - \frac{2}{x}.$$

4) Determine os valores de a e b por forma que a função $x \to f(x) = a\log x + b x^2 + x$ tenha extremos para $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Mostre que com esses valores de a e b x_1 é minimizante e x_2 é maximizante.

R: $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$ *e o sistema*

$$\begin{cases} a+2b+1=0 \\ \frac{a}{2}+4b+1=0 \end{cases} \quad dá \quad \begin{cases} a=-2/3 \\ b=-1/6 \end{cases}$$

Para estes valores de a *e* b *vem* $f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$ *e, como* $f''(1) = \frac{1}{3} > 0$, $f''(2) = -\frac{1}{6} < 0$, $x_1 = 1$ *é minimizante e* $x_2 = 2$ *é maximizante.*

II

5723 — 1) Ache as matrizes X e Y tais que

$$2X+Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad X-3Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

R: $$6X+3Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$$

e

$$X-3Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

donde resulta

$$7X = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} \quad ou \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

De

$$2X+Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad -2X+6Y = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$$

vem

$$7Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -14 & 7 \end{bmatrix} \quad ou \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Prove que $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n+1.$

Sugestão: Estabeleça préviamente a relação $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.

R: *Desenvolvendo* D_n *pelo teorema de Laplace ao longo da primeira coluna, vem* $D_n = 2D_{n-1} - 1 . D_{n-2}$ *ou* $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$. *Esta relação mostra que* $D_1\, D_2\, D_3 \dots$ *estão em progressão aritmética e, como* $D_1 = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, *a razão dessa progressão é* 1 *o que prova o resultado*: $D_n = n+1$.

Enunciados e soluções dos n.os 5706 a 5723 de Fernando de Jesus

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **15-1-1969.**

5724 — 1) Uma aplicação $\varphi : A \to B$ diz-se constante sse $\underset{x,y \in A}{\forall} \varphi(x) = \varphi(y)$

a) Dadas duas aplicações $f : A \to B$ e $g : B \to C$, prove que a aplicação composta $h = g \circ f$ é constante sempre que pelo menos uma das aplicações f ou g o for.

b) Mostre por meio de um exemplo que $g \circ f$ pode ser constante não o sendo f nem g.

5725 — 2) Indique, justificando, se são

a) reflexivas *b*) simétricas *c*) transitivas

as relações F, G e H, no conjunto dos reais, determinadas pelas condições seguintes:

1.ª) $x F y \Longleftrightarrow |x-y| \leqq 1$

2.ª) $x G y \Longleftrightarrow x-y \in Z$

3.ª) $x H y \Longleftrightarrow \underset{k \in Z}{\exists} (x \in [k, k+1[\wedge y \in [k, k+1[)$

onde Z designa o conjunto dos inteiros.

Nos casos em que se trate de relações de equivalência descreva as classes de equivalência a que pertencem os números 0, $1/2$ e 1.

5726 — 3) Quando possível dê um exemplo de um conjunto X, majorado no conjunto ordenado **R** e cujo supremo seja:

a) ponto de acumulação de X

b) » isolado de X

c) » interior de X

d) » fronteiro de X

e) » exterior de X.

Nos casos em que não seja possível indicar um exemplo prove que efectivamente o não é.

5727 — 4) Seja u_n o termo geral de uma sucessão limitada, verificando a condição

$$\underset{m, n \in N}{\forall} (n \neq m \Longrightarrow u_n \neq u_m)$$

e seja U o conjunto dos termos da sucessão:

Das proposições

a) U não é majorado

b) U tem elemento mínimo

c) u_n é convergente

d) o derivado de U não é vazio

indique as que são necessàriamente verdadeiras, as que são necessàriamente falsas e as que podem ser verdadeiras ou falsas consoante a sucessão u_n que seja escolhida.

Justifique cuidadosamente as suas respostas.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 15-1-1969.

5728 — 1) Represente A, sucessivamente, cada um dos conjuntos: $\{-1, 0\}$, $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ e Q (conjunto dos racionais). Diga quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas:

a) $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{x \in A}{\exists} \; x \in V_\varepsilon(-1)$

b) $\underset{\varepsilon > 0}{\exists} \; \underset{x \in A}{\forall} \; x \in V_\varepsilon(+\infty)$

c) $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{x \in A}{\exists} \; x \in V_\varepsilon(\varepsilon)$

Justifique resumidamente.

5729 — 2) *a*) Seja A o subconjunto de **R** formado por todos os números x tais que $x \in \mathbf{R}$ e $x^2 < 4$. Prove que a intersecção dos derivados de A e de Q é igual ao derivado da intersecção de A e Q:

$$(A \cap Q)' = A' \cap Q'$$

b) Dê exemplos de dois conjuntos (por exemplo, dois intervalos abertos de **R**, escolhidos convenientemente) tais que a intersecção dos seus derivados não seja igual ao derivado da sua intersecção.

5730 — 3) *a*) Demonstre que sendo $A_1, A_2, \cdots, A_k$ ($k \in N$) subconjuntos majorados de **R**, a sua reunião, $A = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_k\}$ é também um conjunto majorado.

b) Se em vez de um número finito considerarmos uma infinidade de conjuntos majorados. será ainda verdadeira a afirmação de que a sua reunião é necessàriamente um conjunto majorado? Justifique.

5731 — 4) Seja u_n o termo geral de uma sucessão limitada verificando a condição $\underset{n \in N}{\forall} u_n \in N$ e seja U o conjunto dos termos da sucessão.

Das proposições:

a) U é um conjunto finito

b) U é um conjunto fechado

c) u_n é estritamente monótona

d) u_n é convergente

indique as que são necessàriamente verdadeiras, as que são necessàriamente falsas e as que podem ser falsas ou verdadeiras consoante a sucessão u_n que seja escolhida. Justifique cuidadosamente as respostas.

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 22-1-1969.

5732 — 1) Para cada $x \in R$, seja

$f(x) = \max \{k : k \in Z \wedge k \leqq x\}$ e $g(x) = x - f(x)$.

a) Determine os contradomínios das aplicações f e g (de R em R) e indique se elas são injectivas ou sobrejectivas.

b) Determine as aplicações compostas $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$. Justifique abreviadamente as respostas.

2) Indique, justificando, o derivado de cada um dos seguintes conjuntos:

$$A = \{x : x \in N \wedge \underset{y \in N}{\exists} \; x y = 100\}$$
$$B = \{x : x \in R \wedge 0 < |x - 1| \leqq 3\}$$
$$C = \{x : x \in R \wedge |x| < \min \{|x - 2|, |x + 2|\}\}$$
$$D = \left\{x : x \in R \wedge \underset{m, n \in N}{\exists} \; x = \frac{m}{m + n}\right\}$$

3) Das proposições

$$\underset{X, Y \subset R}{\forall} \; X \subset Y \Rightarrow \text{int } X \subset \text{int } Y$$
$$\underset{X, Y \subset R}{\forall} \; X \subset Y \Rightarrow \text{ext } X \subset \text{ext } Z$$
$$\underset{X, Y \subset R}{\forall} \; X \subset Y \Rightarrow \text{front}\, X \subset \text{front}\, Y$$

só uma é verdadeira. Demonstre-a e mostre, por meio de exemplos convenientes, que as outras duas são falsas.

4) Seja $X_1, X_2, X_n, \cdots$ uma sucessão crescente de conjuntos não vazios, todos contidos num mesmo conjunto X, limitado em R.

Para cada $n \in N$, seja ainda $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$.

a) Prove que as sucessões de termos gerais a_n e b_n são convergentes e que

$$\lim a_n \leqq \lim b_n .$$

b) Em que caso se verifica a igualdade? Justifique.

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 22-1-1969.

5733 — 1) Sejam A e B dois conjuntos totalmente ordenados (com relações de ordem que, em ambos os casos, serão designadas pelo sinal $<$) e φ uma aplicação de A em B tal que

$$\underset{x, y \in A}{\forall} \; (x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)) .$$

Nestas condições:

a) prove que as proposições «φ é sobrejectiva» e «φ é bijectiva» são equivalentes;

b) prove que, se X é uma parte majorada de A, a imagem $\varphi(X)$ é uma parte majorada de B;

c) poderá haver partes não majoradas de A que tenham por imagem uma parte majorada de B? Justifique.

2) Sendo G a relação em R formada por todos os pares $(x, y) \in R^2$ que verificam a condição

$$x \in Z \wedge x \leqq y < x + 1 ,$$

a) indique o domínio e o contradomínio de G e da relação inversa G^{-1}. Algumas destas relações é uma função? Justifique.

b) Verifique se G é reflexiva, simétrica ou transitiva.

3) Sendo

$$A = \{x : x \in R \wedge x^2 - 1 < 0\}$$
$$B = \{x : x \in R \wedge 0 < x - 3 \leqq |x - 5|\}$$
$$C = \left\{x : \underset{n \in N}{\exists} \; x = 2 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$$

indique, justificando abreviadamente as respostas, o derivado, o interior e o fecho do conjunto

$$X = A \cup B \cup C .$$

4) Segundo o princípio de encaixe, se $I_1, \cdots, I_n, \cdots$ é uma sucessão decrescente de intervalos limitados e fechados de R, de comprimentos $c_1, \cdots, c_n, \cdots$ tais que $\lim c_n = 0$, existe um e um só ponto comum a todos os intervalos I_n.

Mostre por meio de exemplos convenientes, que se obteriam proposições falsas se, no enunciado precedente, se suprimisse a hipótese de:

a) a sucessão de intervalos ser decrescente;

b) $\lim c_n = 0$;

c) os intervalos I_n serem fechados.

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 16-4-1969.

5734 — 1) *a*) Determine os limites das sucessões de termos gerais

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} + (-1)^n \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}}\right],$$

$$v_n = \frac{n^{n-1}}{2^{n^2-1}}$$

b) Sendo a_n o termo geral de uma sucessão de termos positivos, com limite $+\infty$, considere as séries:

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n}, \sum \frac{1}{n^2+a_n}, \sum \frac{1}{e^{a_n}}$$

e indique, justificando, as que são necessàriamente convergentes ou necessàriamente divergentes e as que podem ser de uma ou outra natureza consoante a sucessão a_n considerada.

5735 — 2) *a*) Para cada $x \in R$, estude o $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos \pi x)^n$, (considere separadamente os valores de x não inteiros, inteiros pares e inteiros ímpares).

b) Sendo g a função definida pela fórmula:

$$g(x) = x + \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\cos \pi x)^n}{2+(\cos \pi x)^n},$$

no conjunto dos pontos x para os quais existe o limite indicado no segundo membro, determine os pontos em que g é contínua, descontínua ou prolongável por continuidade.

5736 — 3) Suponha que f é uma função com derivada contínua em R e que a equação $f'(x)=0$ não tem raízes reais. Enunciando os principais teoremas a que fizer referência prove que:

a) f é estritamente monótona;

b) a função inversa de f é contínua;

c) f é limitada em qualquer intervalo limitado;

d) o contradomínio de f é um intervalo aberto.

Mostre também, por meio de exemplos, que podem ser verdadeiras ou falsas as proposições:

e) a equação $f(x)=0$ tem uma e uma só raíz real;

f) f é limitada (em R).

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 16-4-1969.

5737 — 1) *a*) Determine os limites das sucessões de termos gerais:

$$u_n = \frac{2^{2n}}{5^n+3}, \quad v_n = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$$

b) Sendo $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes de termos positivos, considere as séries:

$$\sum \left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right), \quad \sum \frac{a_n}{b_n}, \quad \sum a_n b_n,$$

e indique, justificando, as que são necessàriamente convergentes ou necessàriamente divergentes e as que podem ser de uma ou de outra natureza consoante as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ consideradas.

5738 — 2) *a*) Para cada $x \in R$, calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2 \operatorname{sen} \pi x}$$

(considere separadamente valores de x inteiros e não inteiros).

b) Estude, quanto à continuidade lateral, em todos os pontos de R, a função definida pela fórmula:

$$g(x) = C(x) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2 \operatorname{sen} \pi x},$$

onde $C(x)$ designa o maior inteiro $\leqslant x$. Esboce um gráfico aproximado de $g(x)$.

5739 — 3) Suponha que f é uma função contínua em R e que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

a) Justifique cuidadosamente as duas afirmações seguintes:

1.ª Existe um número $a > 0$ tal que $|x| > a \Rightarrow f(x) > f(0)$;

2.ª No intervalo $[-a, a]$, f tem mínimo.

b) Utilizando as duas afirmações anteriores, prove que f tem mínimo absoluto (isto é, em todo o seu domínio, R) e, designando esse mínimo por b, indique, justificando, o contradomínio da função.

c) Dê exemplos de duas funções nas condições da função f deste enunciado, uma que atinja o seu mínimo num único ponto, no qual seja diferenciável, outra que atinja o mínimo em dois e só dois pontos, nos quais não seja diferenciável.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 23-4-1969.

5740 — 1) *a*) Determine os limites das sucessões de termos gerais u_n e v_n, sendo

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}; \; u_{n+1} = u_n \cdot \dfrac{n+1}{n+2}, \quad \forall n \in N \\ v_n = \sqrt{4^n + 3^{2n} + 2^{3n}}. \end{cases}$$

b) Supondo $a_n > 0$, justifique que se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to r \in]0,1[$$

então $a_n \to 0$.

Dê exemplos de sucessões cujo termo geral a_n seja um infinitésimo e tais que:

$$1.^{\circ} \ \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \quad 2.^{\circ}) \ \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

$$3.^{\circ}) \ \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2.$$

5741 — 2) Seja φ a função definida pela fórmula:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

no conjunto dos pontos $x \in R$ nos quais a série que figura no 2.º membro é convergente.

a) Mostre que o domínio de φ é um intervalo e indique os extremos desse intervalo.

b) Mostre que φ é uma função ímpar e estritamente monótona.

c) Determine o máximo de φ.

d) Obtenha uma equação da tangente à curva $y = \varphi(x)$ no ponto de abcissa 0.

5742 — 3) Sendo I e J dois intervalos de R tais que $I \subset J$, diz-se que uma função f, definida e contínua em I, é contìnuamente prolongável a J, sse existe pelo menos uma função g definida e contínua em J e tal que:

$$f(x) = g(x), \ \forall x \in I.$$

Uma tal função g diz-se um prolongamento contínuo da função f ao intervalo J.

a) Das funções definidas no intervalo $]0,1[$, pelas expressões

$$\frac{1}{x-1}, \ x - C(x), \ \cos^2 \frac{\pi}{2x}, \ (e^x - 1) \operatorname{sen} \frac{\pi}{x},$$

(onde $C(x)$ designa o maior inteiro $\leqq x$), indique, justificando, as que são contìnuamente prolongáveis ao intervalo $[0,1]$.

b) Supondo que f é uma função definida e contínua em $]a,b[$ e contìnuamente prolongável a $[a,b]$ prove que:

1.º f é limitada em $]a,b[$;

2.º o prolongamento contínuo de f a $[a,b]$ é único;

3.º f é também contìnuamente prolongável a R, admitindo, porém, uma infinidade de prolongamentos contínuos distintos.

c) Para uma das funções consideradas na alínea *a*) dê dois exemplos de prolongamentos contínuos a R, por forma que num desses exemplos o prolongamento seja uma função ilimitada mas com limite finito quando $x \to +\infty$ e no outro seja uma função limitada mas sem limite quando $x \to +\infty$.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 23-4-1969.

5743 — 1) *a*) Estude, quanto à convergência, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ e $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdots \frac{1}{2n} + \cdots$

b) Prove que, se Σa_n é uma série convergente de termos positivos, as séries $\Sigma (-1)^n \cdot a_n$ e Σa_n^2 também são convergentes. Mostre, por meio de exemplos, que qualquer destas duas séries pode ser divergente se Σa_n for uma série convergente, mas de termos não necessàriamente positivos.

5744 — 2) Considere a função φ definida em R pela fórmula:

$$\varphi(x) = [1 + C(x)] \cdot [2x - C(x)],$$

onde $C(x)$ designa o maior inteiro $\leqq x$.

a) Mostre que φ é contínua em R.

b) Mostre que φ não é diferenciável nos pontos $x \in Z$, mas que o é em todos os outros pontos de R, sendo precisamente:

$$\varphi'(x) = 2[1 + C(x)], \quad \forall x \notin Z.$$

c) Indique, justificando, o contradomínio de φ.

Sugestão: para a resolução de algumas das questões anteriores, poderá ser-lhe útil observar que, sendo $k \in Z$, para todo o $x \in [k, k+1[$ se tem

$$\varphi(x) = (1 + k)(2x - k).$$

5745 — 3) Sendo a um ponto de acumulação do domínio D de uma função f, diz-se que b é *sublimite* de f no ponto a sse existe uma sucessão x_n de termos em $D \,|\, \{a\}$ tal que $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = b$.

a) Justifique que, se f tem limite (finito ou infinito) quando $x \to a$, esse limite é o único sublimite da função no ponto a.

b) Determine os sublimites no ponto 0, das funções:

$$\frac{|x|}{x}(1+x), \quad \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in Q \\ 0 & \text{se } x \in R \setminus Q. \end{cases}$$

c) Supondo que f é uma função monótona numa vizinhança do ponto a, indique, justificando, quais são os sublimites de f no mesmo ponto.

d Dê exemplos de funções que tenham como únicos sublimites finitos no ponto $a = +\infty$,

1.º — os números 0 e 2;

2.º — todos os números do intervalo $[0, 4]$;

3.º — todos os números reais.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 2-6-1969

5746 — 1) Designe por I o intervalo $[0, 1]$, no conjunto ordenado R.

a) Admitindo que $X \subset I$, indique, justificando, quais das condições seguintes são *equivalentes* à condição «o supremo de X é menor do que 1»:

1.ª — $1 \notin X$

2.ª — $\forall_{x \in X} \; \exists_{y \in I \setminus X} \; y > 2x$

3.ª — $\exists_{y \in \operatorname{int} I} \; \forall_{x \in X} \; x \leq y$.

b) Prove que não é possível dar exemplos de funções f, definidas no intervalo I e verificando alguma das condições seguintes:

1.ª — f é contínua em I e $f\left(\frac{1}{n}\right) = n, \forall n \in N$;

2.ª — f é monótona mas não limitada em I;

3.ª — f é contínua e não constante em I e $f(x)$ é racional, $\forall x \in I$.

Se, em vez de ser $I = [0, 1]$ fosse $I =]0, 1[$, em quais dos casos anteriores seria possível dar exemplos? Justifique.

5747—2) *a*) Estude a função g, contínua em R e tal que:

$$g(x) = x^2 \cdot \log x^2, \quad \forall x \in R \setminus \{0\}.$$

Esboce o gráfico de g. *b*). É a função desenvolvível em série de Mac-Laurin? Justifique. Obtenha o desenvolvimento de $g(x)$ em série de potências de $x - 1$ e indique o raio de convergência dessa série.

b) Determine a área limitada pelo gráfico da função g e pelas tangentes ao mesmo gráfico nos pontos (distintos da origem) em que ele intersecta o eixo das abcissas.

5748—3) *a*) Sendo $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base do espaço vectorial E e φ e ψ duas aplicações lineares de E em si mesmo, prove que, para que φ e ψ sejam permutáveis — isto é, para que se tenha $\varphi[\psi(x)] = \psi[\varphi(x)], \forall x \in E$ — é necessário e suficiente que $\varphi[\psi(e_j)] = \psi[\varphi(e_j)]$, para $j = 1, 2, \cdots, n$.

Se forem A e B as matrizes correspondentes a φ e ψ (em relação à base referida, suposta ordenada) de que forma se traduz, na álgebra matricial, a permutabilidade de φ e ψ? Justifique.

b) Designe por $C(R)$ o espaço vectorial real formado pelas funções contínuas em R (com as operações usuais) e por θ a aplicacão de $C(R)$ em si mesmo que associa a cada função $f \in C(R)$ a função $g = \theta(f)$ definida pela fórmula:

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \forall x \in R.$$

Mostre que θ é uma aplicação linear, cujo contradomínio é o conjunto de todas as funções que têm derivada contínua em R e se anulam no ponto 0. Diga se θ é ou não injectiva e indique, justificando cuidadosamente as respostas, qual é o transformado por θ do subconjunto de $C(R)$ formado pelas funções f que verificam a condição:

$$f(x) \geqq 0, \qquad \forall x \in R.$$

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 21-7-69.

5749 — 1) Sendo $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ uma base ordenada do espaço vectorial E e k um número natural menor do que n, designe respectivamente por F e G os subespaços de E gerados pelos conjuntos de vectores $\{e_1, \cdots, e_k\}$ e $\{e_{k+1}, \cdots, e_n\}$. Nestas condições, demonstre que:

1.º — $F \cap G = \{0\}$;

2.º — Qualquer que seja $x \in E$ existe um e um só par (y, z), verificando as condições: $y \in F$, $z \in G$ e $x = y + z$.

5750 — 2) Determine os valores reais de a para os quais o sistema de equações:

$$\begin{cases} a x + y + z + a^4 u = 0 \\ x + a y + z + a^3 u = 0 \\ x + y + a z + a^2 u = 0 \\ x + y + z + a u = 0, \end{cases}$$

(nas incógnitas x, y, z e u) é indeterminado e, para cada um desses valores, indique, justificando, o grau de indeterminação do sistema.

5751 — 3) Seja g uma função crescente e limitada em R.

Escolhido arbitràriamente um número real c_1, ponha-se $g(c_1) = c_2$, e duma forma geral,

$$g(c_n) = c_{n+1}, \quad \forall n \in N.$$

Nestas condições:

1.º — Prove que a sucessão de termo geral c_n é convergente (considere separadamente as hipóteses $c_2 \geqslant c_1$ e $c_2 < c_1$).

2.º — Designando por c o limite de c_n prove que, se g é contínua no ponto c, a equação $g(x) = x$ tem pelo menos uma raíz real.

5752 — 4) Qual é o maior valor que pode assumir o volume de um cilindro circular recto inscrito numa superfície esférica de raio r? Prove que o valor encontrado é realmente o máximo.

5753 — 5) Seja f uma função definida e majorada no intervalo $I = [a, b]$ $(a, b \in R, a < b)$ e, para todo o $x \in I$, seja $\varphi(x)$ o supremo de f no intervalo $[a, x]$:

$$\varphi(x) = \sup_{t \in [a, x]} f(t), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Das proposições seguintes, prove as que são verdadeiras e mostre, por meio de exemplos, que as restantes são falsas:

1.º — Para que se tenha $\varphi = f$ é necessário e suficiente que f seja crescente em I.

2.º — φ é integrável em I, mesmo que f o não seja e, no caso de f ser integrável em I, tem-se: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\, dx$.

3.º — Se φ é contínua em I, f também o é.

Indique ainda, justificando a resposta, uma condição (a impor a f) necessária e suficiente para que φ seja constante em I.

5754 — 6) Calcule o comprimento do arco de curva definido pelas relações:

$$y = 1 - \log \cos x$$

e

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 24-7-69.

5755 — 1) Sejam $u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}$ vectores de um espaço vectorial E, tais que:

1.º) $u_1, u_2, \cdots, u_k$ são linearmente independentes;

2.º) $u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}$ são linearmente dependentes.

Nestas condições, prove que u_{k+1} pode exprimir-se, de forma única, como combinação linear de

$$u_1, u_2, \cdots, u_k.$$

Se φ for uma aplicação linear de E noutro espaço vectorial F, indique, justificando, qual das proposições seguintes é necessàriamente verdadeira:

1.ª — Os vectores $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \cdots, \varphi(u_k)$ são linearmente independentes;

2.ª — Os vectores $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \cdots, \varphi(u_k), \varphi(u_{k+1})$ são linearmente dependentes.

5756 — 2) Sendo p um número natural, calcule a área limitada pelos gráficos das funções f e g, contínuas no intervalo $[0, +\infty[$ e tais que

$$f(x) = x^p \cdot \log x \;\text{ e }\; g(x) = x^{p+1} \cdot \log x, \qquad \forall x > 0.$$

5757 — 3) Prove que, se uma série de potências de x é absolutamente convergente no ponto $\alpha > 0$, converge também sbsolutamente em qualquer ponto x tal que $|x| \leqslant \alpha$. Admitindo apenas que a série é convergente no ponto α, para que valores de x poderá ainda garantir-se a convergência absoluta da série? Justifique.

Se as séries $\Sigma a_n x^n$ e $\Sigma b_n x^n$ tiverem o mesmo raio de convergência e se, num dos extremos do intervalo de convergência, uma das séries for convergente e a outra divergente, qual será o raio de convergência da série $\Sigma (a_n + b_n) x^n$? Justifique.

5758 — 4) Recorrendo ao desenvolvimento de Mac-Laurin da função $\operatorname{sen} x$, calcule uma aproximação, a menos de $0,01$, do integral:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx .$$

Indique, justificando, se se trata de uma aproximação por excesso ou por defeito.

5759 — 5) Seja f uma função definida em $I = [a, b]$ e $d = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$ uma decomposição deste intervalo; supondo $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, designa-se por variação de f, relativa à decomposição d, o número:

$$V_d = \sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | .$$

Diz-se que f é uma função de variação limitada em I sse existe um número k tal que, qualquer que seja a decomposição d de I, se tem $V_d < k$.

1.° — Prove que qualquer função monótona em $I = [a, b]$ é uma função de variação limitada nesse intervalo.

2.° — Prove que, se f é diferenciável em $[a, b]$ e se f' é uma função limitada no mesmo intervalo, então f é uma fuução de variação limitada em $[a, b]$. (Utilize o teorema de Lagrange, em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$).

5760 — 6) Mostre que o gráfico da função definida em $R \setminus \{0\}$ pela fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$$

tem uma assímptota e obtenha uma equação dessa assímptota.

Enunciados dos n.os 5724 a 5760 de J. Campos Ferreira

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. L. — Análise Infinitesimal II — (1.ª chamada) — 11-6-69.

I

5761 — 1) Defina espaço compacto e prove que toda a bijecção contínua dum espaço compacto num espaça separado é um homeomorfismo.

2) Defina espaço métrico completo e prove que todo o espaço métrico compacto é completo.

3) *a*) Prove que um espaço topológico E é conexo sse toda a parte própria não vazia $A \subset E$ tem fronteira não vazia.

b) Mostre que os únicos conjuntos conexos da recta racional Q são o vazio e os conjuntos singulares.

II

5762 — 1) Zeros duma função holomorfa.

2) seja $\mathcal{H}$ o espaço das funções complexas definidas e holomorfas em $\mathbf{C}$ e ponhamos, para cada $f \in \mathcal{H}$,

$$\| f \| = \sup_{|z|=1} | f(z) | .$$

Prove que:

a) $\| \cdot \|$ é uma norma sobre $\mathcal{H}$.

b) Uma série $\Sigma a_n z^n$, $a_n \in \mathbf{C}$, converge no espaço normado $\mathcal{H}$ sse o seu raio de convergência é $+\infty$. Deduza daí que $\mathcal{H}$ não é completo.

3) Prove que o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x(x^2 + \lambda^2)}\, dx$ é absolutamente convergente para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ e calcule o seu valor em função de λ.

F. C, L. — Análise Infinitesimal II — (2.ª chamada) — 25-6-69.

I

5763 — 1) Continuidade uniforme em espaços métricos.

2) Considere um espaço métrico E em que toda a bola fechada é compacta.

Prove que:

a) E é completo;

b) todos os fechados e limitados são compactos.

3) Defina espaço conexo e conjunto conexo.

Prove que a união de dois conjuntos conexos de intersecção não vazia é um conjunto conexo. Generalize para uma família qualquer de conjuntos conexos.

II

5764 — 1) Série de Laurent. Pontos singulares de funções holomorfas.

2) Seja $f(z)$ uma função não identicamente nula definida e holomorfa em $\mathbf{C} - \{0\}$. Prove que, se para todo $\delta > 0$ existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tal que $0 < |z_0| < \delta$ e $f(z_0) = 0$, então a origem é uma singularidade essencial de $f(z)$.

3) Mostre que $\dfrac{\operatorname{sen} \lambda x}{x(1+x^2)}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ é somável (como função de x) sobre $\mathbf{R}$ e calcule pelo método dos resíduos uma expressão de

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x(1+x^2)} dx .$$

Mostre, aproveitado o resultado anterior que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2} dx = \pi e^{-(\lambda)}$$

F. C. L. — Análise Infinitesimal II — (2.ª chamada) — 21-7-69.

I

5765 — *a*) Defina seminorma sobre um espaço vectorial E (real ou complexo) e indique como pode definir uma topologia sobre E a partir de uma seminorma. Prove que tal topologia é separada sse a seminorma é uma norma.

b) Prove que, num espaço separado, a intervenção de um conjunto compacto com um conjunto fechado é um conjunto compacto. Mostre, com um exemplo, que a propriedade não é necessàriamente verdadeira se o espaço não é separado.

c) Prove que num espaço métrico a distância entre um compacto e um fechado disjuntos é > 0.

II

5766 — *a*) Pontos singulares duma função holomorfa.

b) Prove que se $f(z)$ possui um pólo de ordem 1 na origem, $e^{f(z)}$ tem uma singularidade essencial neste ponto.

III

5767 — *a*) Prove, com base no critério de derivabilidade do integral paramétrico (Lebesgue) que a função

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x^2+\lambda^2} dx, \quad \lambda \in]0, +\infty[,$$

é diferenciável.

b) Calcule pelo método dos resíduos, $\varphi'(\lambda)$.

Enunciados de V. Ferreira

Université Libre de Bruxelles — Faculté des Sciences Appliquées — Algèbre Supérieure — 1969.

5768 — 1. Soit N une matrice carrée nilpotente (c'—à—d il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que $N^r = 0$). Si on pose $M = I + N + N^2 + N^3 + \cdots$.

1) Calculer $(I - N) M$.

2) En déduire que $I - N$ est inversible; que vaut $(I - N)^{-1}$?

3) Application.

On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1} (mettre A sous la forme $I - N$).

R: 1) $(I-N)M = (I-N)(I+N+N^2+\cdots+N^{r-1})$
$= I + N + N^2 + \cdots + N^{r-1} -$
$- (N + N^2 + \cdots + N^{r-1})$
$= I.$

2) $(I-N)^{-1} = M$.

3) $A = I - N \;\rightarrow N = I - A$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^2=\begin{pmatrix}0&0&4&2\\0&0&0&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$N^3=\begin{pmatrix}0&0&0&-8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad N^4=\begin{pmatrix}&&\\&0&\\&&\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=(I-N)^{-1}=I+N+N^2+N^3$$

$$=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Vérification:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}&&\\&I&\\&&\end{pmatrix}.$$

5769 — 2. Résoudre et discuter le système

$$\begin{cases}ax+y+z=1\\x+ay+z=1\\x+y+az=1\end{cases}\quad \text{avec } a\in\mathbf{R}.$$

R.: 2 — *Th. Fontené-Rouché*

$$\begin{cases}ax+y+z=1\\x+ay+z=1\\x+y+az=1\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2&1&1\\a+2&a&1\\a+2&1&a\end{vmatrix}=$$

$$=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&a-1&0\\1&0&a-1\end{vmatrix}=$$

$$=(a+2)\,(a-1)^2.$$

1er cas

$$(a+2)\,(a-1)\neq 0$$

$\rightarrow$ *Cramer* $\rightarrow$ *une solution*

$$\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\end{cases}\rightarrow\quad (a+2)\,(x+y+z)=3 \qquad x+y+z=\frac{3}{a+2}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\ldots\ldots\ldots=1\\\ldots\ldots\ldots=1\\\ldots\ldots\ldots=1\\x+y+z=\dfrac{3}{a+2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(a-1)\,x=1-\dfrac{3}{a+2}\\\vdots\\\vdots\end{cases}$$

$$\rightarrow (a-1)\,x=(a-1)\,y=(a-1)\,z=1-\frac{3}{a+2}$$

comme

$$(a-1)\neq 0\rightarrow x=y=z=\frac{a+2-3}{(a-1)\,(a+2)}=$$

$$=\frac{a-1}{(a-1)\,(a+2)}=\frac{1}{a+2}.$$

2ème cas

$$a=-2$$

$\rightarrow$ *système de rang* 2 *car* $\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=$

$$=-8+1+1+2+2+2=0$$

$$\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}=4-2\neq 0$$

il y a un seul déterminant caractéristique

$$\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1&0\\1&-2&0\\1&1&3\end{vmatrix}=2\cdot 3=6$$

déterminant caractéristique non nul $\Rightarrow$ *pas de solution.*

3ème cas

$$a=1$$

$\rightarrow$ *3 équations identiques* $x+y+z=1$

$\rightarrow$ *on fixe arbitrairement les valeurs de deux inconnues (les non-principales) et on en déduit la valeur de l'inconnue principale*

$\rightarrow$ *remarque: le rang de la matrice est 1.*

5770 — 3. *a*) Démontrer que si deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont telles que pour tout n $a_n \leqslant b_n$ alors $\lim_n a_n \leqslant \lim_n b_n$ si ces deux limites existent.

b) Montrer qu'une suite $\{a_n\}$ converge vers 0 si et seulement si il existe une suite $b_n \geqslant 0$ telle que $|a_n| \leqslant b_n$ et $b_n \to 0$.

5771 — 4. Etant donné la fonction $f(x) = x^3 + \sin x$.

a) Ecrire le développement de TAYLOR d'ordre 2 de cette fonction au voisinage du point $x = \frac{\pi}{2}$.

b) Développer $f(2x)$ en puissances successives de $(x-1)$, jusque et y compris $(x-1)^4$.

c) Calculer, à l'aide du développement de MAC LAURIN $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin x}{e^x}$.

R.: 4 — $f(x) = x^3 + \sin x$

a) $f'(x) = 3x^2 + \cos x$

$f''(x) = 6x - \sin x$

$f'''(x) = 6 - \cos x$

au point $x = \frac{\pi}{2}$

$$\to = 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$$

$$\to = \frac{3\pi^2}{4}$$

$$\to = 6 - \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\to = 0.$$

5772 — 5. On considère la suite de fonctions $f_n(x) = e^{x-n}$ (n entier positif).

a) Montrer que sur tout intervalle compact $[a, b]$ $\{f_n\}$ converge uniformément vers 0.

b) La suite f_n converge-t-elle vers 0 uniformément sur $\mathbf{R}$?

R.: 5 — a) *Si* $x \in [a, b]$ *on a* $e^{x-n} < e^{b-n}$

— *ainsi la suite de fonctions* f_n *est majorée sur* $[a, b]$ *par une suite numérique qui converge vers* 0; *il en résulte que la suite de fonctions converge uniformément vers* 0

— *en effet à tout* $\varepsilon > 0$ *on peut associer* N *tel que*

$$n \geqslant N \Longrightarrow e^{b-n} < \varepsilon$$

— *a fortiori on a alors* $\forall x \in [a, b] : e^{x-n} < \varepsilon$; *le nombre* N *est bien indépendant de* x, *il ne dépend que de* ε *et de* b.

b) — *Quel que soit* n *on a* $\sup_{x \in \mathbf{R}} e^{x-n} = \infty$; *la suite* f_n *ne peut donc pas converger uniformément vers* 0 *sur* $\mathbf{R}$, *car sinon* $\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x)|$ *devrait être fini et tendre vers* 0.

Enunciados e resoluções de J. M. Teixeira

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

178 — XII^e Congrès Internacional d'Histoire des Sciences — Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard — Paris.

A União Internacional de História e de Filosofia da Ciência na sua assembleia geral de 1965 quando do XI Congresso Internacional de História da Ciência realizado na Polónia encarregou o Comité nacional francês de história e de filosofia da ciência de organizar o congresso seguinte.

Este realizou-se em Paris no Conservatório Nacional das Artes e Ofícios nos dias 25 a 31 de Agosto de 1968.

Os trabalhos dos congressistas foram distribuídos entre as sessões realizadas em onze secções.

Para uso dos congressistas já foi publicado pela *Revue de Synthese* um volume que reuniu todos os relatórios. Na edição A. Blanchard estes estão incluídos num único volume, o **Tomo 1A** das Actas do Congresso. O **Tomo 1B** contém os complementos destes relatórios, as discussões às quais eles deram lugar, o discurso de abertura feito pelo Prof. JEAN ROSTAND, a síntese dos trabalhos do Congresso do Prof. LUCIEN PLANTEFOL, as conferências plenárias dos Profs. MARCEL FLORKIN e ALISTAIN CROMBIE, e a lista dos congressistas.

As comunicações, em número superior a três centenas, são publicadas em volumes de acordo com a repartição adoptada no Congresso.

Assim, o **Tomo 1A** contém:

Avant-propos.

Colóquio n.° 1 — *Conditions et progès de l'objectivité en Histoire des Sciences* (Organizador: Pierre Costabel).

Relatórios de:

A. P. Youschkevitch — Histoire des sciences et civilisations.

Bogdan Suchodolski — Les facteurs du développement de l'histoire des sciences.

Suzanne Bachelard — Epistémologie et histoire des sciences.

Charles C. Gillispie — Remarks on social selection as a facteur in the Progressivism of Science.

Colóquio n.° 2 — *Fautes et contresens des traductions scientifiques médiévales* (Organizador: Guy Beaujouan).

Relatórios de:

John Murdoch — The medieval Euclid: salient aspects of the translations of the **Elements** by Adelard of Bath and Campanus of Novara.

Boris Rozenfeld — Traductions et publications soviétiques d'oeuvres mathématiques médiévales.

Richard Lémay — Faustes et contresens dans les traductions arabo-latines médiévales: l'**Introductorium in astronomian** d'Abou Macshar de Balkh.

Marie Thérèse d'Alverny—Les traductions d'Aristote et de ses continuateurs.

Guy Beaujouan — Fautes et obscurités dans les traductions médicales du Moyen Age.

Jerry Stannard — Medieval reception of classical plant names.

Colóquio n.° 3 — *Les origines de l'«Algèbre moderne«* (Organizador: René Taton).

Relatórios de:

Jean Itard — La théorie des nombres et les origines de l'algèbre moderne.

Isabelle Bachmakova — Sur l'histoire de l'algèbre commutative.

Paul Dubreil — La naissance de deux jumelles: la logique mathématique et l'algèbre ordonnée.

Lubos Novy — L'Ecole algébrique anglaise

Hans Freudenthal — L'algèbre topologique, en particulier les groupes topologiques et de Lie.

Colóquio n.° 4 — *Développement de la notion de structure en Physique mathématique* (Organizador: Marie-Antoinette Tonnelat).

Relatórios de:

J. B. Pogrebysski — Structures mathématiques et théories physiques depuis Archimède jusqu'à Lagrange.

Léon Rosenfeld—The structure of quantum Theorie.

Marie Antoinette Tonnelat — Rôle et portée des structures dans la physique relativiste.

Colóquio n.° 5 — *La génération spontanée, de l'Antiquité a 1700* (Organizador: Lucien Plantefol).

Relatórios de:

Pierre Louis — La génération spontanée chez Aristote.

Paul Brien — La génération des êtres vivants dans la philosophie épicurienne.

Carlo Castellani — Les idées sur la génération spontanée dans l'oeuvre de Fortunio Liceti.

Everett Mendelsohn — Philosophical Biology vs expérimental Biology: Spontaneous Generation in the seventeenth Century (**Summary**).

Colóquio n.° 6 — *L'élaboration des concepts et des méthodes de la psychologie différentielle au XIX^e siècle et au début du XX^e* (Organizador: Georges Canguilhem).

Relatórios de:

L. S. Hearnshaw — The concepts of aptitude and capacity.

Robert I. Watson — The individual, social, educational, economic and political conditions for the original practices of detection and utilization of individual aptitude differences.

J. F. Richard — La découverte du fait des différences individuelles comme obstacle dans les premières expériences de mesure en psychologie.

Maurice Reuchlin — La psychologie différentielle au XIX^e siècle et au début du XX^e: métrique statistique et comparaison ordinale.

Colóquio da Divisão de Filosofia da *Union Internationale d'Histoire et de Philosophie des Sciences — L'histoire de la philosophie des sciences de la nature* (Organizador: Hans Freudenthal).

Relatórios de:

Calina Mare — Quelques aspects de l'évolution du concept de déterminisme dans la physique.

François Dagognet — Remarques sur une loi présumée de développment.

Hans Freudenthal — Les faits et gestes de l'âne de Buridan.

O **Tomo II** destinado aos *Problemas Gerais da História da Ciência-Epistemologia* contém as comunicações seguintes:

Agassi Joseph — Can we learn from history?

Batjushkova Irina — Regularities in the development of Science as manifested in the evolution of notions of the structure of the Earth.

Belloni Luigi — La répétition des expériences anciennes et son utilité pour l'Histoire des sciences.

Bennett John F. — An appeal for the History of scientific inspiration.

Bouligand Georges — Unité du théorique, du cognitif et de la création libre.

Dambska Izydora — L'instrument et l'objet de recherche à la lumière de la théorie physique d'après Duhem, Bridgman et Bohr.

Dubal Georges — Le cheminement vers la pensée scientifique.

Eisele Carolin — C. S. Peirce and the scientific Philosophy of Ernst Mach.

Ferraz Antonio—L'Histoire de la Science et l'Épistémologie.

Gabey Alan — Les trois genres de découverte selon Descartes.

Herlitizius Erwin — History of Science and Development.

Joja Crizantema — Pour une Histoire de la Philosophie des sciences.

Konfederatov Ivan — Exponential or logistical law of scientific development.

McCartney Paul et Vinaty Thomas — Expériences et comptes rendus d'expériences chez Galilée.

Mouloud Noël — Le développement axiomatique des sciences et les perspectives actuelles de la philosophie des sciences.

Price Derek J. de S. — Who's who in the History of Science: a survey of our profession.

Ravetz Jerome R. — The problem of «the scientific Revolution».

Rodnyi Naum J. — La Logique et l'Histoire des Sciences.

Sadovsky Vadim N. — General systems theory: evolution of ideas.

Schmitt Charles B. — Experience and experiment in Galileo's *De motu.*

Speziali Pierre — Aperçu historique des principaux essais de classification des sciences.

Whitrow Magda — The *Isis Cumulative Bibliography.*

Zvorikin Anatoli A. — The results of a socio-psychological study of creative activity in Science and Technology.

O **Tomo III A** — **Ciência e Filosofia** — *Antiguidade — Idade Média — Renascimento*, contém as comunicações:

Aaboe Asger — Some recently discovered Astronomical Tablettes from Babylon.

Aintabi Mohamed Fouad — Arab scientific Progress and Menelaus of Alexandria.

Bartsch Gerhard — Die Stellung von Nicolaus Cusanus in der Geschichte der Philosophie und Wissenschaft (1401-1464).

Burstyn Harold L. — The empirical basis of the four Elements.

Busard H. L. L. — Der *Codex orientalis 162* der leidener Universitätsbibliothek.

Cadden Joan — Two definitions of *Elementum* in a 13th century philosophical text.

Czekajewska-Jedrusik Anna — L'Homme de la Renaissance et la pensée historique polonaise au xvi^e siècle.

Dobrzycki Jerzy — John Werner's theory of the motion of the Eighth Sphere.

Drachmann Aage G. — Heron's model of the Universe (*Pneumatics* 2 : 7).

Eastwood Bruce Stansfield — Uses of Geometry in Medieval Optics.

Gingerich Owen — The Mercury theory from Antiquity to Kepler.

Grant Edward — The arguments of Nicholas of Autrecourt for the existence of interparticulate vacua

Haschmi Mohamed Yahia — Sur l'histoire l'alcool.

Hellman C. Doris — Sixteenth century manuscript material on Novae and Comets.

Hubicki Wlodzimierz — The religious background of the development of Alchimy at the turn of the xvi century.

Hujer Karel — Nicholas of Cusa and his influence on the rise of new Astronomy.

Joly Robert — La biologie d'Aristote.

Kary-Niazov T. N. — Exposé sur la langue de la version initiale du «Zidj d'oulougbek».

Kolman E. — L'anticipation de certaines idées de la logique mathématique chez al-Fārābī.

Lindberg David C. — Bacon, Witelo, and Pecham: the problem of influence.

Moutsopoulos Evanghelos — Science harmonique et empirisme musical chez Platon.

North John David — Walter of Odington and the history of the Eighth Sphere.

Peng-Yoke Ho — Alchemy in Ming China (A. D. 1367-A. D. 1644).

Pètri Winfried — La physique du Cosmes dans le traité arménien d'Eznik de Kolb : *De Deo.*

Rozenfeld Boris A. — Geometrical transformations in the Medieval East.

Sabra A. I. — The astronomical origin of Ibn al--Haytham's concept of experiment.

Tekeli Sevim — «The duplication of the cube». Zail-i Tahrir al Uqlidas, Majmua⊂ and sidra al Muntahâ.

Thomas Phillip D. — The alchemical thought of Walter of Odington.

Virieux-Reymond Antoinette — Quelques réflexions à propos d'un texte de Démocrite concernant la théorie de la vision.

O **Tomo III B — Ciência e Filosofia** — *Séculos XVII e XVIII,* contém as comunicações:

Augustyn Wladislaw — Le rôle du scepticisme dans la méthode de Descartes.

Beaude Joseph — Science et fausse science. Un débat sur un phénomène insolite, à la fin du xviii^e^ siècle: la baguette divinatoire.

Debus Allen G. — John Webster and the educational Dilemma of the seventheenth century.

Grmek Mirko Dražen — Descartes gérontologiste.

Guerlac Henry — Laplace's collaboration with Lavoisier.

Hahn Roger — The problems of the French scientific community, 1793-1795.

Hankins Thomas L. — D'Alembert and the great Chain of Being.

Heilbron John L. — Honoré Fabri, s. j., and the Accademia del Cimento.

Hine William Lewis — Marin Mersenne and Italian naturalism.

Jaquel Roger — La traduction française commentée (de 1801) des *Cosmologische Briefe* (de 1761) de Jean--Henri Lambert (1728-1777).

Kangro Hans — Joachim Jungius und die atomistik im 17. Jahrhundert.

Kreiling Frederick C. — Leibniz' views on the History of Scienee.

Loria Mario — Un manuscrit de l'Actdémie des Sciences de Turin : le *Traité de Physique* de Jean--Baptiste Beccaria (1754).

Maheu Gilles — Un projet d'édition de l'oeuvre littéraire et scientifique de Jean d'Alembert.

Marek Jiři — Kepler's inventions in physical Optics.

Popkin Richard — Joseph Glanvill's continuation of the *New Atlantis*: mitigated scepticism and the ideal of the Royal Society.

Robinet André — Originalité des conceptions de Malebranche en biologie.

Roger Jacques — Méthodes et modèles dans la préhistoire du vitalisme français.

Rothschuh Karl et Dechange Kl — La tradition et le progrès dans la *Physiologia* de Henricus Regius et ses relations avec les idées de Descartes.

Rousseau G. S. — Poiesis and Urania: the relation of Poetry and Astronomy in the English Enlightenment.

Scriba Christoph J. — The French edition of Newton's *Principia* (translation of the marquise du Châtelet): 1759 ou 1756?

Settle Thomas B. — Ostilio Ricci, a bridge between Alberti and Galileo.

Simon Isidore — Les sciecces naturelles, les mathématiques et l'astronomie hébraïques aux xvi^e^, xvii^e^ et xviii^e^ siècles, et leur place dans l'histoire générale des sciences.

Smolka Josef — L'Abbé Nollet et la physique en Bohême.

Steudel Johannes — Leibniz und die mikroskopische Forschung.

Sticker Bernhard — Leibniz et Bourguet. Quelques lettres inconnues sur la Théorie de la Terre.

Tabarroni Giorgio — Jean-Dominique Cassini, de Bologne à Paris.

Thackray Arnold — «The business of experimental Philosophy». The early Newtonian group at the Royal Society.

Tillman Alexandre — Descartes et la psycho-pédagogie de l'enfance. Brèves remarques.

Voisé Waldemar — La mathématique sociale au xvii^e^ siècle.

Whitrow Gerald J. — The nebular hypotheses of Kant and Laplace.

Os restantes Tomos, 12 ao todo, serão publicados ainda no decorrer do presente ano, e deles faremos apresentação mais pormenorizada no próximo número.

Para terminar e fazer ressaltar convenientemente o valor desta obra, diremos que ela beneficiou do concurso financeiro da

- UNESCO
- União Internacional da História e da Filosofia da Ciência
- Ministério da Educação Nacional francês
- Academia das Ciências (Fundação Lontreiuil) — Paris
- Delegação Geral para a Investigação Científica e Técnica.

J. G. T.

179 — J. L. Lions e E. Magenes — **Problemes aux limites non homogenes et applications**—Travaux et recherches mathematiques, Dunod-Paris.

Esta obra da qual a Editora Dunod acaba de publicar o terceiro volume, estuda de maneira sistematizada os problemas aos limites, relativos aos principais tipos de equações às derivadas parciais lineares, as suas aplicações, particularmente na teoria de controle óptimo.

No que respeita às aplicações os autores consideram os problemas com dados aos limites «não homogéneos» muito gerais: massas concentradas sobre a fronteira, discontinuidades interessando os controles...

O primeiro volume é consagrado às equações elípticas e às equações de evolução gerais num quadro hilberteano. A interpolação hilberteana é completamente apresentada e aplicada aos espaços de Sobolev de ordem qualquer.

No segundo volume prossegue-se no estudo dos problemas aos limites não homogéneos sobre classes particulares de equações de evolução.

O terceiro volume continua, para os operadores e os problemas aos limites do mesmo tipo dos estudados nos tomos anteriores, um tratamento análogo mas partindo de resultados de regularidade nas classes analíticas reais ou de Gevrey.

Assim é considerado o caso em que os dados f, g, j são funcionais de Gevrey ou funcionais analíticas.

Esta obra interessa sobretudo aos cultores de matemática pura e da matemática aplicada, os especialistas das equações às derivadas parciais e da teoria do controle, que aqui encontrarão igualmente um grande número de problemas abertos a futuras pesquisas.

180 — A. Donedu — **Analyse et Geometrie Differentielle** — Dunod-Paris.

Trata-se da segunda edição do tomo 2 da collecção «Mathématiques Supérieures et Spéciales» que com o tomo 1 da mesma colecção cobre a totalidade do programa de matemática superior e de MP_1. Os tomos 3 e 4 tratam do resto do programa de matemáticas especiais A', A, B', B e MP_2. Além disso, dois tomos de exercícios e problemas corrigidos, redigidos por M. Crestey, completam a colecção.

Este tomo 2 trata, com cuidado especial e profundidade, das funções numéricas de variável real e das funções numéricas ou vectoriais de variável vectorial. Assim a noção de função diferenciável é posta em relevo progressivamente para cada uma das categorias destas funções, de modo que o aluno apreende finalmente a estrutura essencial da diferenciação nos espaços de Banach. A integração é apresentada a partir das noções de conjuntos quadráveis ou cubáveis: os integrais simples, duplos, triplos, são assim tratados no mesmo espírito e as interpretações geométricas saltam à evidência, rigorosamente, de forma quase imediata. Em geometria diferencial a noção de curva é posta em evidência a partir de classes de arcos parametrados equivalentes que introduzem os métodos actuais de orientação; a parte teórica é ilustrada através de vários exemplos de construção de curvas parametradas ou em variáveis polares. A teoria moderna dos tensores é exposta e aplicada à cinemática do corpo sólido.

Para cada noção introduzida apresenta-se sempre o essencial; são propostos numerosos complementos mas apenas a título de exercícios. Assim o aluno não se perde num emaranhado de pormenores ao estudar o seu programa.

181 — Jean Hladik — **La transformation de Laplace à pluseurs variables** — Masson & Cie-Paris.

Não é necessário falar da importância das aplicações práticas da transformação de Laplace. Por si só ou associada a outras transformações funcionais, a transformação de Laplace constitue um dos métodos mais eficazes para a resolução de numerosas equações lineares que descrevem fenómenos físicos, biológicos ou económicos.

Este trabalho não se dirige apenas aos físicos, engenheiros e investigadores preocupados com problemas de matemática aplicada mas também aos estudantes de especialização em certos domínios, pois o estudo das transformações funcionais, particularmente o da transformação de Laplace, revela-se fundamental a este nível.

O livro está redigido com vista às aplicações práticas. O autor, porém, apresenta o essencial dos teoremas fundamentais e da sua demonstração o que assegura à transformação de Laplace as bases rigorosas, e o conhecimento dos fundamentos teóricos duma ciência matemática que facilita o tratamento dos métodos de aplicação que dela resultam.

A transformação de Laplace a uma ou a duas variáveis aparece em primeiro lugar assim como as diversas aplicações à resolução das equações diferenciais lineares de qualquer ordem, das equações recorrentes, ao estudo de numerosas funções da física matemática, da teoria analítica dos números, à integração das equações de derivadas parciais para condições aos limites muito variadas, e à resolução de equações integrais. A transformação de Laplace associada às transformações funcionais de Hankel e de Fourier aparece de seguida com numerosas aplicações destas transformações, por si, ou combinadas, o que constitue um ramo relativamente recente.

A segunda parte da obra é constituída por um dicionário de todas as correspondências operatórias e de imagens de funções actualmente calculadas.

A classificação adoptada pelo autor permite uma pesquiza fácil das imagens em vista duma aplicação prática. Este dicionário constitue um complemento indispensável para o prático: de acordo com o nosso conhecimento ele não existia até hoje em qualquer edição francesa para a transformação a duas variáveis.

182 — Pierre Vidal — **Systèmes échartillonnés non lineaires** — Gordon & Breach e Dunod — Paris.

O desenvolvimento recente da ciência e das técnicas força a um maior contacto entre a indústria e a universidade. Com efeito os engenheiros sentem-se obrigados a actualizar cada vez mais os seus conhecimentos, aparecendo a reciclagem como uma necessidade directamente ligada ao progresso científico.

A Colecção Téorie des Systèmes, de que esta obra é o volume 1.º, é realizada com este espírito e reune certo número de monografias de matemática e de física aplicadas. As matérias abordadas são vastas mas dá-se relevo fundamental à teoria dos sistemas que cobre as duas grandes disciplinas Automática e Informática. Dirigem-se aos estudantes dos anos avançados que procurem obter diploma de *études approfondies* francês ou doutoramento, aos alunos das escolas de engenharia e aos engenheiros de gabinetes de estudo ou de investigação.

As possibilidades dos sistemas lineares são já do conhecimento de grande número de automatistas que os aplicam com sucesso a diversos sistemas automáticos. Pelo contrário, os sistemas não lineares de informações discretas, tendo-se desenvolvido largamente no decurso da última década, encontravam-se dispersos em diferentes publicações e foram reunidos pelo Autor, professor do Instituto de Automática na Faculdade de Ciências de Lille. Esta obra faz uma sintese dos métodos matemáticos que intervem mais frequentemente nos trabalhos teóricos e apresenta nos últimos capítulos o exame de questões especializadas ligados aos problemas técnicos do comando automático.

O livro que apresenta uma bibliografia importante que permite o desenvolvimento e consulta a outras fontes mais permenorizadas contem os capítulos seguintes:

Elementos fundamentais do cálculo das diferenças finitas.
Método da transformada em Z.
Método do plano de fase discreto.
Método da primeira harmónica.
Método dos grafos de fluência.
Estabilidade dos sistemas não lineares.
Resposta transitória e oscilações limites.
Sistemas de modulação de largura de impulsos.
Sistemas quantificados.

183 — J. P. Kahane — **Séries de Fourier absolument convergentes** — Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete-Band 50 — Springer Verlag. Berlin-Heidelberg-New York — 1970.

Este livro tem como finalidade o estudo das funções da classe A, isto é, as funções contínuas sobre o círculo em que a série de Fourier é absolutamente convergente.

O pertencer à classe A é uma propriedade local. A teoria descritiva consiste em comparar esta propriedade local a outras propriedades (interessando por exemplo o módulo de continuidade). É a via mais antiga devida a S. Bernstein. O desenvolvimento deste ponto de vista tem incidido principalmente sobre as restrições a impor às funções da classe A por consideração de conjuntos fechados contidos no círculo. São as que o Autor designa por funções A (E). Os problemas aqui abordados já foram enunciados como temas de pesquiza por Paul Levy em 1934 e em geral resolvidos em 1953 por Beurling e Helson e 1958 por Katznelson. Enfim uma resenha histórica da teoria com longa bibliografia no fim do volume confere a este livro as características correspondentes à personalidade do Autor — professor da Faculdade de Ciências de Orsay, bem conhecido entre nós — e à colecção em que se insere, excelente.

184 — Leopoldo Nachbin — **Topology on Spaces of Holomorphic Mappings** — Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete-Band 47 — Springer Verlag. Berlin-Heidelberg-New York — 1969.

Na mesma colecção o colaborador da *Gazeta de Matemática*, L. Nachbin, publica o trabalho que constituiu a sua participação no Sexto Colóquio Brasileiro de Matemática realizado em Poços de Caldas, Minas Gerais, Julho de 1967. Encontram-se assim reunidos nesta monografia de 66 páginas as ideas do Autor já divulgadas nos seus cursos realizados em várias universidades dos Estados Unidos, para o que foi concedido um subsídio pela Fundação USA National Science.

Todos estes aspectos garantem o interesse extraordinário desta publicação como elemento didáctico.

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor — MASSON ET C.ie, Paris

J. Bass — *Cours de Mathématiques — Troisième Édition Revue et Corrigée.*
— *Exercices de Mathématiques.*
M. Bouix — *Les Fonctions Géneralisées ou Distributions.*
M. A. Tonnelet — *Les Vérifications Experimentales de la Relativite Générale.*
A. Hocquenghem & P. Jaffard — *Mathématiques. Tome I. Éléments de calcul différential et intégral.*

Editor — LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD — Paris

Marcel Doligez — *Gravitation — Contribution à la théorie corpuscular de la gravitation.*
H. Laurent — *Théorie des Jeux de Hasard.*

Editor — DUNOD, Paris

Monographies Universitaires de Mathematiques

22. A. G. Kurosch — *Algèbre générale.*
23. I. M. Guelfand et N. Y. Vilenkin — *Les distributions.* Tome 4: *Applications de l'analyse harmonique.*
24. C. Fourgeaud et A. Fuchs — *Statistique.*
25. J. Garsoux — *Analyse mathématique.*
26. A. Guichardet — *Analyse harmonique commutative.*
27. G. Hochschild — *La structure des groupes de Lie.*
28. Mme Y. Choquet-Bruhat — *Geometrie différentielle et systèmes extérieures.*
29. Pham Mau Quan — *Introduction à la géometrie des variétés différentiables,*
30. R. Isaacs — *Jeux differentiels. Théorie des jeux appliqués aux domaines de la guerre, des poursuites, du contrôle et de l'optimisation.*
31. O. A. Ladyzenskaja et N. N. Oral'ceva — *Equations aux derivées partielles de type elliptique.*
32. J. Lévy-Bruhl — *Introduction aux structures algébriques.*

BENTO DE JESUS CARAÇA

CONFERÊNCIAS E OUTROS ESCRITOS

Livraria Sá da Costa — Rua Garrett, 100-102

ENSAIOS de Geografia Humana e Regional

POR

ORLANDO RIBEIRO

(1 Volume)

Livraria Sá da Costa — Rua Garrett, 100-102

E. S. CABRERA y H. J. MEDICI

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN LA REPUBLICA ARGENTINA

Matematica 1 a 4
Trigonometria, nociones de limite continuidade y derivada
Ejercícios 1 a 4
Astronomia Elemental

Libreria del Colegio — BUENOS AIRES

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 30 escudos
Assinatura relativa a 1970 (4 números) 100 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 200 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.° ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 100, para o que basta indicar o nome, a morada e o local de cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática.* Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.os 16 a 49, cada número	12$50
N.os 50, 76-77	60$00
N.os 51 a 75, 78 a 99, 101 a 108 — cada número simples . . .	17$50
N.os 51 a 75, 78 a 99, 101 a 108 — » » duplo	35$00
N.° 100	100$00
N.° 109-112	120$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 120$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.°-Eq.° — LISBOA-2 — Telefone 369449

Composição e impressão — Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.°-Esq.° — Telefone 369449 — LISBOA-2