GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO III **N.º 12** OUTUBRO - 1942

SUMÁRIO

Sophus Lie, por *A. de Mira Fernandes*
Henri Lebesgue, por *J. Vicente Gonçalves*
Fernand Holweck, por *A. Marques da Silva*
Os teoremas de Baire, Cantor, Weierstrass e Cauchy, por *J. Albuquerque*

Pedagogia

Como estudar Matemática, por *W. C. Arnold*
A teoria dos logaritmos no ensino liceal, por *J. Sebastião e Silva*
Resposta às considerações anteriores, por *Bento Caraça*

Movimento matemático

Sociedade Portuguesa de Matemática
Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências, por *A. Pereira Gomes*
Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto
Escolas Superiores de Zürich — A Escola Politécnica Federal
O Real Instituto Nacional de Alta Matemática de Itália, por *F. Severi*

Clubes de Matemática

Noticiário — Livros para Clubes de Matemática

Antologia

Sôbre as ciências e a técnica, por *Henri Mineur*
«Eppur si muove!», por *Gino Loria*
Bom senso e racionalismo científico, por *P. Couderc*
Mentalidade matemática, por *Federigo Enriques*

Matemáticas Elementares

Pontos de Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1941)
Matemáticas gerais — Álgebra Superior — Complementos de Algebra e Geometria Analítica
Geometria Descritiva
Cálculo Infinitesimal — Mecânica Racional
Problemas propostos — Soluções recebidas
Boletim bibliográfico — ¿Que pensa da Gazeta?

NÚMERO AVULSO: ESC. 5$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / LARGO DO PÔÇO NOVO / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

FUNDADA POR

B. CARAÇA, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

21
20
23
15

Redacção e Administração: *Faculdade de Ciências*, Rua da Escola Politécnica — Lisboa

Composição e Impressão: *Soc. Ind. de Tipografia*, Rua Almirante Pessanha, 5 — Lisboa

SOPHUS LIE

por A. de Mira Fernandes

Faz, em Dezembro, cem anos que nasceu Sophus Lie [1]. Os seus primeiros estudos sôbre a *Representação dos imaginários da geometria plana* foram publicados em Christiania, em 1869 e, nesse mesmo ano, no Jornal de Crelle, em Berlim. O tema não era inteiramente novo: dez anos antes, outro norueguês, C. A. Bjerknes, professor de Lie, ocupara-se da *representação geométrica das equações entre duas variáveis reais ou complexas*. De certo, Sophus Lie conhecia êste trabalho; mas devem ter sido os escritos de Plücker os principais orientadores do seu espírito. Aparte o uso do têrmo *representação*, não há, na memória de Bjerknes, nada que possa sugerir a análise de Lie; mas o seu espaço, a quatro dimensões, das rectas complexas do plano é bem próximo visinho do espaço plückeriano, também a quatro dimensões, de tôdas as rectas do espaço ordinário.

Quatro anos antes, em 1865, terminara os seus estudos universitários, *ainda hesitante* (aos 23 anos) *entre a filologia e as matemáticas,* como adverte Darboux, na sua conferência de 1904, no Congresso de S. Luiz, *sôbre o desenvolvimento dos métodos geométricos.*

Sophus Lie não foi, portanto, um precoce, como Clairaut, Lagrange, Galois, Abel e tantos outros. Mas com que firmeza de consciência a sua verdadeira vocação lhe foi revelada pela leitura da obra de Plücker! E com que mestria êle soube construir e dominar, persistente e confiante, um dos mais belos monumentos da ciência moderna! Desde 1870 (di-lo, ainda, Darboux) Sophus Lie estava de posse das idéias directrizes de tôda a sua carreira científica. O depoimento é insuspeito.

Tendo conseguido obter uma bôlsa de estudo, Lie esteve em Berlim nos últimos meses de 1869, e aí conheceu Klein (um pouco mais novo) de quem foi amigo íntimo. Nos princípios de 1870 estavam ambos em Paris, onde viveram juntos, onde publicaram trabalhos comuns e onde privaram com Darboux e Jordan. A separação deu-se no princípio do outono, quando a guerra franco-prussiana obrigou Klein a regressar à Alemanha, saindo Sophus Lie para a Itália.

Foi um curso de Sylow, por êles seguido, que lhes revelou a grande importância da teoria das substituições; estudavam-na, em comum, à data dessas suas primeiras relações com Darboux, no grande tratado de Jordan. Nos seus espíritos nascera a convicção de que o conceito de grupo ia ser chamado a desempenhar um papel fundamental em muitos ramos das ciências matemáticas. E todos nós sabemos como as obras de um e de outro vieram demonstrar a justeza dessa convicção. Numa Nota, publicada nos Comptes Rendus, em outubro de 1870, e apresentada por Chasles, estabelecia Sophus Lie uma interessante transformação que faz corresponder a cada recta uma esfera, e que lhe permitia, conhecidas as linhas assintóticas duma superfície, determinar as linhas de curvatura doutra superfície, e recìprocamente. E assim determinava êle as assintóticas da superfície de Kummer.

Dessa Nota diz Darboux:

Le nom de Lie demeurera attaché à ces relations si cachées qui rattachent l'une à l'autre la ligne droite et la sphère, ces deux éléments essentiels et fondamentaux de la recherche géométrique.

Em dezembro dêsse mesmo ano de 70 aparecia, sôbre o mesmo tema das assintóticas da superfície de Kummer, uma Nota de Lie, em colaboração com Klein, publicada nos *Monatsberichte* da Academia de Berlim. Já então Sophus Lie estava em Christiania e Klein em Düsseldorf. E no verão seguinte (1871) publicavam os *Mathematische Annalen* outra Nota comum *sôbre as curvas planas que a si mesmas se sobrepõem por um sistema fechado de transformações lineares permutáveis.* Estava Klein em Göttingen. Da penúltima Nota mencionada dizia Klein, mais tarde, que ela marcava *o ponto culminante da sua colaboração.*

Da convivência de ambos, pessoal e epistolar, há larga documentação, devida, sobretudo, a Klein que sobreviveu um quarto de século a Sophus Lie. Aqui e além, uma sentida homenagem à memória do Mestre Plücker:

Es ist eigentlich merkwürdig, wie wenig Menschen sich eine wirklich kühne geometrische Denk-

---

(1) Marius Sophus Lie nasceu em 17 de Dezembro de 1842. É a data por êle mencionada no seu *curriculum* de 1867, apresentado à Universidade de Christiania. Alguns autores dizem, erradamente, 12 de Dezembro.

weise angeeignet haben. Wir werden es wohl bei Plücker gelernt haben. (2)

Às vezes... um comentário sem desprimor: *Ich schätze Kleins Talente hoch... aber ich glaube, dass er z. B. nicht genug zwischen Induktion und Beweis, zwischen der Einführung eines Begriffs und seiner Verwertung unterscheidet.* (3)

Será assim?

Em 1872, Sophus Lie era professor da universidade de Christiania. A concepção de Plücker relativa à geração do espaço por elementos não pontuais (rectas, curvas ou superfícies quaisquer), de tão grande alcance nas teorias algébricas, foi utilizada por Sophus Lie, em geometria infinitesimal, definindo os conceitos de congruência e complexo de curvas e em seguida, o de *transformação de contacto*.

Com êste instrumento, aperfeiçoou os métodos de integração de Jacobi, relativos às equações às derivadas parciais de primeira ordem e, sobretudo, esclareceu a teoria das equações de ordem superior. Durante o inverno de 1873-1874, pode dizer-se que estruturou, nas suas grandes linhas, a teoria dos grupos contínuos finitos de transformações. E esta teoria (bem como a dos grupos infinitos) não mais deixou de ser a preocupação principal do seu engenho de analista. O conceito de transformação infinitesimal, os três teoremas fundamentais puseram em evidência tôda a importância do conceito de grupo em Geometria.

Outros domínios, mais ou menos relacionados com estes, lhe devem grandes progressos: superfícies mínimas, geodésicas, fundamentos da Geometria, etc.

Em 1886 foi nomeado professor em Leipzig; e lá se conservou até 1898. Tendo sido criada para êle uma cadeira privativa na universidade de Christiania, regressou então, à Noruega. Morreu alguns meses depois, em 18 de Fevereiro de 1899, com 57 anos incompletos.

A obra de Sophus Lie não teve, de princípio, no mundo matemático (e disso êle se queixava amargamente) o realce a que tinha jus. O tempo se encarregaria (e com que usura!) de lhe fazer justiça.

Não quero terminar esta breve comemoração da sua grande personalidade científica sem um reparo que se me afigura ser da mais flagrante actualidade. É êste:

Coeva da concepção kleineana das geometrias holónomas, a idéia de Lie de utilizar um elemento gerador que já não é o ponto, por êle largamente aproveitada em tôda a sua obra, volta a ser, neste meado do século XX, embora ao serviço doutra aparelhagem analítica, o recurso de maior valia da moderna geometria diferencial, quando pretende relacionar os conceitos de Riemann e Klein, exhaustos, sob forma pontual, na sua capacidade de entendimento. E, ainda aqui, em estreita colaboração com o mundo algébrico.

---

(1) Duma carta de Klein para Lie, de Abril de 1878. (Plücker morreu em 1868).

(2) Do prólogo do terceiro volume da *Teoria dos grupos de transformações* (Lie).

HENRI LEBESGUE

por J. Vicente Gonçalves

O assunto, sem a frescura aliciante das novidades nem o prestígio forte da elevação, parecia rejuvenescer e altear-se na exposição originalíssima do Mestre. Um halo de luz fecundante dava novos contornos às coisas e acendia nos espíritos a ambição de as devassar. Quantos ali couberam, na pequena sala de Geometria, viviam uma hora de encanto naquele ambiente de primado espiritual.

Não fôra de-certo o assunto que ali os trouxera pressurosos. ¿Superfícies planificáveis? Todos as tinham por tema medíocre, para mais já ressequido por longa clausura em rigidos moldes clássicos. — Superfícies regradas de curvatura nula, em geral geradas pela tangente a uma curva torsa, a aresta de reversão; e sabiam bem como as *aplicar* no plano, deformando com continuïdade a aresta, sem rasgar ou enrugar o leque em que as suas tangentes se abrem. Nenhum recanto sombrio, com a promessa, embora vã, de um mistério. ¿Que havia a esperar dali?

E, realmente, no campo dos factos, nenhuma revelação sensacional viera surpreender os ouvintes; mas a finura da análise, a justesa do comentário, a luminosidade da síntese renovavam e enalteciam a matéria, tornando-a digna de interêsse. Depois, aqui e além, sempre havia novidade: certa particularidade na configuração de uma zona plana a descoberto, tal vicissitude no curso da geratriz rectilínea, etc.; e o ponteiro, fazendo de geratriz, evoluía lentamente no ar, simulando permanente contacto com uma aresta invisível. Todos

seguiam atentos aquele esquema de recurso, procurando reconstituir a fôlha de superfície que a vara ia deixando para trás.

Depois vieram os exemplos. Uma longa tira de papel, sulcada de linhas finíssimas que iam oblìquamente perder-se no traço negro que orlava um dos lados maiores, deu logo, numa torsão feliz, um elicoide aceitável; um lenço, por encanto, fêz-se bela fôlha ondulada, que lentamente se foi planificando, até se espraiar, em perfeita aplicação, no plano da pequena mesa. De repente, aquele lenço, amarfanhado, comprimido, coisa informe, desaparece numa mão que se fecha, — e parte esta estocada:

Et maintenant, est-ce que ça a encore des génératrices rectilignes?

A asa da fantasia que perpassa na anecdota de certo corre, em vôo rasante, pelos beirais da verdade. Era assim, de facto, Lebesgue.

Com os olhos afeitos à luz crua das realidades, nunca o tentaram ou iludiram as visões simplistas das coisas. Todos os seus estudos são trabalhos profundos, castigadíssimos, onde nada fica esquecido com mira em triunfos fáceis. Para o seu alto espírito, esquecer, para simplificar, é renúncia; pôr hipótese arbitrária, profanação.

O lenço de Lebesgue, sacudindo da teoria dos planificáveis o pó enganador da continuïdade das derivadas, é o símbolo de uma atitude científica, bandeira de bom combate.

Aos 25 anos (senão antes), empreende Lebesgue o estudo do problema fundamental da análise clássica — medida de arcos e áreas, — enfrentando-o em tôda a dureza da sua máxima generalidade. Isso o leva ao conceito de integral L, cuja teoria desenvolve com segurança verdadeiramente excepcional em matéria de tanto melindre. O novo integral, modestamente apresentado como uma extensão natural do de Riemman, é na realidade um conceito inteiramente original, filho de inspirada atitude em face do problema da medida. Genialmente simples na sua arquitectura e sem entraves a impedir-lhe a aplicação no domínio das funções limitadas, o integral L possui como nenhum outro uma fina sensibilidade às passagens ao limite, e isso definitivamente o consagrou.

Desde Newton e Leibnitz que a Análise matemática se não enriquecia com instrumento de tanto préstimo e alcance. Com êle se derimiram com brilho questões pendentes havia mais de duzentos anos (arcos, áreas, primitiva das derivadas limitadas) e se reacendeu o debate em tôrno de outras tidas por exaustas (aproximações, séries de Fourier, etc.) Nas doutrinas modernas, nenhum lhe disputa o primado.

Fora do cálculo integral, monumentos perduráveis atestam também a extraordinária capacidade de Lebesgue. É enorme a sua contribuïção para a teoria dos conjuntos, para a métrica e descritiva das funções [1] (lembro sempre com particular admiração a transcendental Memória sôbre as funções representáveis analìticamente) e há notáveis escritos seus em geometria algébrica, geometria diferencial, topologia, física matemática, etc. E quem não conhece os novos métodos de análise (aproximação, cadeias, crivos) que inventou de ponta a ponta ou a que deu renovada eficiência?

Morreu Henri Lebesgue, aos 66 anos de idade, no verão do ano passado. Os fumos da guerra ocultaram-me então a notícia; e, com o correr do tempo, nunca me resignei a vê-lo prostrado no leito de morte.

E tinha razão. Homens tais não os derruba a morte. Lá na eternidade, na constância e fervor do nosso culto, onde mais pura lhes refulge a glória, estão servindo sempre, com o exemplo memorável, a pátria em que nasceram e a ciência a que se devotaram.

---

(1) Vejam-se as *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* e as *Leçons sur les séries trigonométriques*, Gauthier Villars, Paris.

FERNAND HOLWECK

por A. Marques da Silva

Foi para todos os físicos e homens de ciência em geral uma notícia profundamente triste a da morte trágica de Fernand Holweck, em Paris, em 21 de Dezembro de 1941.

Fernand Holweck era um dos mais brilhantes investigadores do Laboratório Curie do Instituto do Rádio, e êste facto chega para dar indicação do seu excepcional valor.

Com um espírito extraordinàriamente apto para tôdas as questões científicas, dividiu a sua atenção sucessivamente por numerosos capítulos da Física, em todos deixando bem vincada a sua passagem por trabalhos de excepcional merecimento. E não só no campo da Ciência pura êle foi notável; no domínio da técnica numerosos são os instrumentos que inventou ou aperfeiçoou.

A sua obra é demasiado vasta para que possa ser apreciada, mesmo resumidamente, num artigo da natureza dêste. Limitar-nos-emos por isso a uma simples indicação de alguns dos seus trabalhos de maior vulto.

No domínio dos raios X ocupou-se particularmente do estudo dos raios X moles, tendo conseguido fazer a ligação e mesmo a sobreposição parcial do espectro ultra-violeta e do espectro X. Foi êle que obteve os raios X de maior comprimento de onda até hoje produzidos.

Estudou a acção biológica das radiações nos organismos unicelulares, tendo conseguido pôr em evidência a existência, nas células, de zonas sensíveis, de superfície muito inferior à superfície total da célula. Uma radiação só actua sôbre a célula quando atinge uma destas zonas sensíveis.

No domínio da técnica deve-se-lhe a invenção da bomba molecular Holweck que permite obter o vácuo mais perfeito que se consegue actualmente.

Deve-se-lhe também o invento do pêndulo gravimétrico Holweck, destinado a medir a intensidade da gravidade e que constituiu uma notabilíssima descoberta, por reduzir extraordinàriamente o tempo necessário para tais medições, e com o qual se consegue uma grande precisão. Esta descoberta valeu-lhe o prémio Alberto I de Mónaco, a mais elevada distinção internacional para os trabalhos de gravimetria.

Não podemos alongar-nos mais sôbre os numerosos trabalhos que tornaram o nome de Fernand Holweck universalmente conhecido e estimado.

Êste sábio morreu na fôrça da vida, quando a Ciência e o Progresso humano a que votara tôda a sua actividade muito tinham ainda a esperar do seu excepcional talento.

Acrescentaremos apenas mais uma breve indicação biográfica. Holweck, que dedicara sempre tôda a sua actividade ao serviço da humanidade, poz galhardamente a sua vida ao serviço da Pátria quando esta estava em perigo. Na guerra de 1914-18, Holweck serviu heròicamente no exército francês, tendo merecido pelos seus feitos a roseta de oficial da Legião de Honra.

Com o seu desaparecimento perdeu a Humanidade não só um grande sábio mas também um homem de carácter firme e de coração largo. Holweck é daqueles de quem se pode dizer que deixou por sua morte uma vaga difícil de preencher.

A «Gazeta de Matemática», dando notícia da perda de Fernand Holweck, inclina-se respeitosamente perante a memória do grande cientista que viveu como um justo e morreu como um mártir.

OS TEOREMAS DE
BAIRE, CANTOR, WEIERSTRASS E CAUCHY

por J. Albuquerque (C. E. M. L.)

Quando se estuda a continuïdade das funcões reais de variável real, encontram-se alguns resultados muito importantes e que se estabelecem fàcilmente; entre êles ocupam um lugar de relêvo os teoremas de Cantor, Weierstrass e Cauchy.

Estes três teoremas demonstram-se de uma maneira tão fácil que nos surpreende, e os seus enunciados tornam-se-nos evidentes em pouco tempo.

René Baire, matemático francês, um dos geniais fundadores da moderna teoria das funções de variável real, deixou-nos um teorema que num caso muito particular se reduz ao clássico teorema de Cantor.

Olharemos primeiro o resultado de Baire e em seguida os de Weierstrass e Cauchy. Mas antes dêles vejamos algumas noções fundamentais, indispensáveis.

No que se vai seguir suporemos sempre que $y=f(x)$ é uma função real definida no conjunto E da variável real x.

Seja x um ponto de E e representemos por $V(x, E, \varepsilon)$ o conjunto dos pontos de E que caiem num intervalo aberto de centro em x e de comprimento 2ε.

Os valores de f no conjunto V formam um conjunto limitado por dois números reais que representaremos por $L(x, \varepsilon) \geq l(x, \varepsilon)$.

Os números $L(x, \varepsilon)$, $l(x, \varepsilon)$ e $\omega(x, \varepsilon)=L(x, \varepsilon)-l(x, \varepsilon)$ chamam-se respectivamente *limite superior, limite inferior e oscilação* da função f no conjunto $V(x, E, \varepsilon)$.

Fazendo tender ε para zero, $L(x,\varepsilon)$ não cresce, $l(x,\varepsilon)$ não diminui, e estes dois números tendem para limites $L(x)$ e $l(x)$ que se designam como limites superior e inferior de f no ponto x.

Tem-se também, visto ser para todo o ε, $L(x,\varepsilon) \geq \geq l(x,\varepsilon)$,

$$\omega(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(x,\varepsilon) = L(x) - l(x) \geq 0,$$

e esta diferença chama-se **oscilação** de f no ponto x.

Os três números $L(x)$, $l(x)$ e $\omega(x)$ são funções reais de variável real definidas no conjunto E.

Vejamos em seguida o que se entende por continuïdade da função f num ponto do conjunto E.

A função $y=f(x)$ definida no conjunto E será contínua num ponto x de E se, e só se, escolhido um número real $\delta > 0$, for sempre possível determinar um número real $\varepsilon > 0$ tal que para todo o ponto x' do conjunto $V(x,E,\varepsilon)$ se tenha $|f(x') - f(x)| < \delta$. A função f será contínua no conjunto E se o fôr em todos os pontos de E.

Analisemos mais de perto esta definição, que nos foi dada por Cauchy. Esta definição mostra-nos que para a função ser contínua no ponto x, os valores da função em pontos de E visinhos de x não são arbitrários, mas sujeitos à condição de serem visinhos de $f(x)$. Em particular isso sucede sempre nos pontos isolados de E, e se não sucede algures isso é certamente num ponto de acumulação de E, pertencente a E.

A continuïdade de f em E, pode, conforme resulta desta análise, ser definida sòmente nos pontos de acumulação de E que pertencem a E, e para isso vai naturalmente fazer-se uso de sucessões convergentes no domínio e contra-domínio da função.

É o que faz Heine.[1] Para êste matemático a função $f(x)$ é contínua no ponto x de acumulação do conjunto E:

1.º: se x pertence a E,

2.º: se para tôda e qualquer sucessão, $x_1, x_2, \cdots \cdots, x_n, \cdots$ de pontos de E, convergindo para x, os valores da função, $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$ constituem uma sucessão convergindo para $f(x)$.

A função f será contínua em E se o fôr em todos os pontos de acumulação de E, pertencentes a E.

É fácil demonstrar a equivalência destas duas difinições uma vez que se aceite o axioma de Zermelo.[2] A equivalência será por nós francamente aceite, passando aqui em claro a demonstração que é de tôda a gente conhecida.

Seja x um ponto de continuïdade da função f e consideremos o conjunto dos valores da função nos pontos x' de E, visinhos de x, isto é, nos pontos de $V(x,E,\varepsilon)$; êsse conjunto de valores é limitado, como o prova a condição: $|f(x') - f(x)| < \delta$ para, $|x' - x| < \varepsilon$, que é condição suficiente para o conjunto dos valores $f(x')$ ter por limite $f(x)$.

Então se todos os pontos de acumulação de E pertencem a E, ou por outras palavras, se E é fechado, e se $f(x)$ é contínua em E, ou em todos os pontos de acumulação, conclui-se que $f(x)$ é limitada em todos os pontos de E.

Duma maneira mais simples: *tôda a função contínua num conjunto fechado é limitada nêsse conjunto.*

Também num ponto x de continuïdade se tem imediatamente: $L(x) = f(x) = l(x)$. Portanto: $\omega(x) = = L(x) - l(x) = 0$.

Se fôr sòmente: $L(x) = f(x) \neq l(x)$, ou sòmente: $L(x) \neq f(x) = l(x)$, diz-se então que $f(x)$ é semi-contínua superiormente ou inferiormente (por sua ordem) no ponto x.

Depois destas noções ràpidamente relembradas, vamos demonstrar o teorema de Baire. Pode êle ser enunciado como segue:[3]

Teorema de Baire. *Se* f(x) *é uma função real de variável real definida num conjunto* E *fechado e limitado, e se em cada ponto* x *de* E *se tem:* $\omega(x) < k$, *então existe um número positivo* α *tal que, para todo o par de pontos* (x', x'') *de* E, *para os quais,* $|x' - x''| < \alpha$, *será*: $|f(x') - f(x'')| < k$.

Para demonstrarmos êste teorema notemos que, se x é um ponto de E existe um $h > 0$, mas suficientemente pequeno, tal que para dois pontos (x', x'') do intervalo aberto $(x-h, x+h)$ se tenha: $|f(x') - f(x'')| < k$. O conjunto E será coberto por êstes intervalos abertos e, por maioria de razão pelos respectivos segmentos; por outras palavras, qualquer que seja o ponto x de E existe um segmento a que x é interior.

Pois bem: existe um *número finito* daqueles segmentos igualmente com a propriedade de cobrir E, ou de cada ponto x de E ser interior a um dêles, (Heine-Borel).

Com efeito[4] se não houvesse um número finito de segmentos cobrindo E, também não haveria um número finito dêsses segmentos cobrindo um

[1] *Heine — Journal de Crelle*, vol. LXXIV (1872) p. 182, *Hobson* — vol. 1.º, p. 282.

[2] *Sierpinski — Comptes Rendus*, Paris, vol. CLXIII (1916), p. 688.

[3] *Baire, Sur les fonctions des variables réelles*, Annali di Mat. (3 A), vol. III, p. 15.

[4] Reproduzimos um raciocínio do prof. *Esparteiro* da Universidade de Coimbra. Ver: *Vicente Gonçalves, Lições de Cálculo e Geometria*, p. 101.

conjunto fechado E_1 contido em E e de diâmetro igual a 1/2 do diâmetro de E, ou cobrindo um conjunto fechado E_2 contido em E_1 e de diâmetro igual a 1/4 do diâmetro de E, e assim sucessiva e indefinidamente.

Mas então os conjuntos $E, E_1, E_2, \cdots$ teriam um ponto c em comum (Cantor [1]), para o qual não haveria um número finito de segmentos aos quais êle fôsse interior.

Mas c pertence a E e portanto é interior pelo menos a um segmento. A contradição assegura a existência de um número finito de segmentos cobrindo E.

As extremidades dêstes segmentos em número finito situadas em E constituem um conjunto finito de pontos. Se fôr α a menor distância entre dois quaisquer dêstes pontos, para (x', x'') pertencentes a E e com $|x'-x''| < \alpha$, é certo x' e x'' caírem num mesmo segmento que cobre E e portanto será: $|f(x')-f(x'')| < k$. c. q. d.

Se quizermos deduzir do teorema de Baire o teorema de Heine-Cantor, bastará supormos que $f(x)$ é contínua em todos os pontos do conjunto fechado e limitado E.

Então neste caso muito particular, é, conforme já se viu: $\omega(x)=0<\varepsilon$. Obtem-se imediatamente o seguinte enunciado:

Teorema de Heine. *Se* f(x) *é contínua num conjunto fechado e limitado* E, *então a cada* $\varepsilon > 0$ *corresponde um* $\alpha > 0$, *tal que se tem:* $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$, *para todo o par de pontos com:* $|x_1-x_2| < \alpha$.

Êste teorema foi apresentado e demonstrado pela primeira vez por Heine, o que nos leva a pôr-lhe o nome dêste matemático. [2] Uma proposição muito semelhante a esta no seu conteúdo é o clássico teorema de Cantor ou teorema da *continuïdade uniforme*.

Teorema de Cantor. *Se uma função é contínua num intervalo finito e fechado, então o intervalo pode ser dividido num número finito de sub-intervalos em cada um dos quais o incremento da função é menor que um número positivo prèviamente dado.*

Seja E um conjunto fechado (de números reais) e $f(x)$ uma função real contínua em E. Representemos abreviadamente por $f(E)$ o conjunto de valores de f nos pontos de E. Suponhamos E limitado. Seja p um ponto de acumulação de $f(E)$; haverá infinitos pontos x' tais que $|f(x')-p| < \delta$ e qualquer ponto de acumulação, x, do conjunto dos x' será tal [3] que, devido à continuïdade de f, se tem: $f(x)=p$. Sendo E um conjunto fechado, x pertence-lhe, e portanto p pertencerá a $f(E)$. Conclui-se assim que: *se* E *é limitado e fechado, e* f *contínua em* E, *então* f(E) *será fechado.*

Dêste resultado vem imediatamente o conhecido:

Teorema de Weierstrass. *Os limites* l *e* L *duma função contínua num conjunto limitado e fechado são valores da função.*

Com efeito l e L pertencem ao derivado do conjunto dos valores da função. A l e L, quando atingidos, dá-se os nomes de *mínimo* e *máximo* de f. Vejamos finalmente uma última definição:

Chamaremos *contínuo de Jordan* a todo o conjunto fechado tal que dados dois quaisquer dos seus pontos é sempre possível uni-los por uma linha poligonal ou cadeia, com extremos nos dois pontos, com os vértices no conjunto e cujos lados ou elos sejam inferiores em comprimento a qualquer número positivo dado.

Um contínuo de Jordan na recta, é pois um segmento.

Suponhamos agora que E era um contínuo no sentido de Jordan e que f é contínua em E. Sejam p e q dois pontos de $f(E)$ e x' e x'' dois dos pontos de E tais que: $f(x')=p$ e $f(x'')=q$.

Em virtude da continuïdade de f, existe para cada $\varepsilon>0$, uma cadeia: $x', x_1, x_2, \cdots, x_n, x''$ de pontos de E e de elos de comprimento menor que ε, e portanto uma cadeia: $p, f(x_1), (x_2), \cdots, \cdots, f(x_n), q$ de pontos de $f(E)$ e de elos de comprimento menor que δ. Conclui-se assim que: *se* E *fôr um contínuo de Jordan e* f *contínua em* E, *então* f(E) *será um contínuo de Jordan.*

Por outras palavras bem mais sugestivas: o transformado de um segmento por uma função contínua é um segmento.

Concluimos também que:

Os valores de uma função real de variável real num segmento, preenchem o intervalo entre o mínimo e o máximo.

Finalmente concluimos ainda, sem grande esfôrço, o conhecido teorema seguinte:

Teorema de Cauchy. *Uma função real e contínua sôbre um contínuo de Jordan, não muda de sinal sem passar por zero.*

A quási todos os enunciados que apresentámos mantivemos uma forma que lhes conserva sentido mesmo no caso de sairmos do campo das funções de uma só variável real. Fica para passatempo do leitor o antever essa generalisação imediata.

---

[1] Fêz-se uso de um teorema quási evidente de Cantor conhecido com o nome de *Durchschnittssatz*.

[2] *Heine, Journal de Crelle*, vol. LXXI (1870) p. 361, e vol. LXXIV (1872) p. 188; ver também: *Hobson*, vol., I, p. 290.

[3] Êsse ponto de acumulação existe visto que E é limitado (Bolzano-Weierstrass).

PEDAGOGIA

COMO ESTUDAR MATEMÁTICA

por W. C. Arnold

(Publicado em «The American Mathematical Monthly», vol. 47, 1940)

Êste artigo foi escrito para auxiliar o *caloiro* de matemática e tem por fim instruí-lo na técnica do seu estudo. Estudar vai ser a sua profissão durante alguns anos e é preciso adquirir o suficiente brio profissional para que o trabalho seja o mais proveitoso possível.

O assunto será apresentado subordinando-se aos seguintes tópicos: *Instruções gerais; O Estudo do texto; Resolução dos problemas; Fixação do estudo feito; O Auxilio do professor.*

A) Instruções gerais

1) Não se dedique a actividades extra-escolares antes de cumprir devidamente o trabalho escolar; depois dêste feito pode pensar noutras coisas.

2) Comece a trabalhar desde os primeiros dias do ano escolar. Em matemática, uma boa arrancada é muito importante. Dá-lhe o ímpeto para poder prosseguir.

3) Tome parte nas discuções do curso. O estudo é um processo activo e não passivo. Não basta ler os livros e ouvir o mestre, isto é o mesmo que ouvir palavras novas sem as empregar, pois não as dominará enquanto delas não fizer uso várias vezes, quer na conversa quer na escrita.

4) Estude a lição logo a seguir à exposição. É mais facil a aprendizagem da matéria recentemente exposta. Recapitule a lição antes de ir para a aula, recitando-a para si.

5) Evite quaisquer maus hábitos que porventura tenha adquirido no estudo da matemática no liceu. Tome muita atenção às observações do professor acêrca dêsses maus hábitos.

6) Verifique, logo que possa, se está senhor das bases necessárias para poder seguir o curso. Se não estiver consulte o professor sôbre as suas falhas.

7) Um ponto fundamental no estudo da matemática é o comêço no estudo. Tem muito que se lhe diga e muitos estudantes não conseguem triunfar por causa disso. Pensam que estudam pelo facto de terem um livro aberto à sua frente. Mas não basta abrir o livro, é necessário criar um estado de espírito propício ao estudo; para isso começa por escolher uma hora pouco depois da prelecção. É preciso que já tenha descansado o suficiente para que o espírito esteja pronto a abordar o estudo. É claro que em virtude do horário nem sempre se encontrará a situação ideal, mas é sempre possível descobrir uma hora apropriada. Não espere que essa hora seja aquela em que esteja de boa disposição, comece a estudar e é possível que a adquira. Feche o aparelho de rádio e avise o seu companheiro de quarto que tem um trabalho muito importante a fazer; puxe uma cadeira e sente-se direito à secretária com papel e lápis: abra o livro e ataque a lição com uma atitude semelhante à que teria numa competição desportiva. Concentre-se na lição. Vença todas as distracções e não se sirva delas como pretexto para não estudar. O somatório de todos estes esforços provocará em si o tal estado de espírito a que poderemos chamar «atitude agressiva» com o fim de estudar matemática.

8) O seu trabalho será mais profícuo se tiver sempre presente que o *caloiro* de matemática deve:

a) Aprender e estudar matemática eficientemente;

b) Aprender a ajuizar, a fazer uso do raciocínio e a empregar uma linguagem cuidadosa e precisa;

c) Adquirir a técnica de cálculo de forma a poder aplicar o que estudou aos diversos campos onde a matemática elementar tem aplicação e que são entre outros: as matemáticas superiores, a astronomia, a física, a química, a meteorologia, a navegação, a engenharia e a estatística na sua aplicação aos estudos da psicologia, educação, sociologia, biologia e economia.

Se o Mundo não necessita de um número muito grande de professores de matemática precisa no entanto de muitíssimas pessoas que possam fazer uso da matemática inteligentemente.

d) Aprender a compreender e a apreciar a frase: «A matemática é a ciência das conclusões necessárias».

e) Aprender a apreciar a beleza de certos problemas de matemática ainda quando não tenham aplicação para fins lucrativos.

B) O estudo do texto

1) Leia os livros e aprenda a servir-se dêles. Sirva-se das táboas e outro material matemático.

2) Apresenta-se seguidamente um método para estudar o livro de texto que põi imediatamente o estudante em acção fornecendo-lhe processos para o manejo do livro de preferência a lê-lo passivamente. Para isso:

a) Tome a «atitude agressiva».

b) Faça uma primeira leitura com o fim de descobrir a ideia principal do autor. Não se importe com os pormenores, deixe-os para mais tarde. Leia de vagar. Se encontrar termos que não conheça procure a sua definição.

c) Leia o assunto novamente, com cuidado, estudando agora os pormenores. Copie todas as demonstrações, linha por linha, estudando os casos particulares. Verifique a razão por que cada fase é uma conseqüência lógica do que precede. Se encontrar algum passo obscuro não perca muito tempo com êle; tome nota e pregunte ao mestre. Não deve, no entanto, abusar da sua boa vontade procurando constantemente o seu auxílio. Quando se resolve uma dificuldade aumenta-se a confiança em si próprio.

d) Depois da segunda leitura escreva um resumo do assunto; êste deve ser curto e sintético e feito de tal modo que permita repetir a lição. Terá ainda outra aplicação que adiante será descrita.

e) Aprenda a expôr. Para isso feche o livro e procure reproduzir a lição servindo-se apenas do resumo que acabou de fazer. Recite as partes que podem ser ditas oralmente. Escreva as mais importantes. Esta é a parte essencial do método. Assim se revela se o aluno domina a lição. Não é preciso empregar a linguagem do livro, é mesmo conveniente que faça a exposição por palavras suas; no entanto deve observar-se que se o livro de texto fôr bom, será difícil apresentar melhores definições dos termos da matemática.

f) Procure as aplicações da teoria que acabou de estudar. Às vezes a sua aplicação só poderá fazer-se mais tarde, outras vezes as aplicações são a resolução de problemas. O conhecimento das aplicações da teoria tornam o trabalho mais eficaz. Quási sempre é o mestre que dá os exemplos, mas melhor será se os descobrir por si só. Deve de vez em quando procurar construir uma teoria, porque é interessante o sentirmo-nos mais fortes e para isso sempre terá tempo, pois os trabalhos diários que nos dão o pão, não nos consomem todas as horas do dia.

g) Reveja a lição pouco antes de ir para a aula. Sirva-se do resumo e verifique se se esqueceu de alguma coisa.

h) Se apreender o espírito dêste método sentir-se-à contente com o resultado dos seus esforços. As *certezas* que se encontram na matemática satisfazem a maior parte das pessoas, porque as suas conclusões não são uma questão de opinião — aqui pode saber-se quando se tem ou não razão.

C) Resolução dos problemas

1) Tome a «atitude agressiva».

2) Estude cuidadosamente a teoria que precede os problemas e os exemplos do texto ou os fornecidos pelo professor.

3) Comece pelos mais simples e vá resolvendo-os gradualmente por ordem de dificuldade. Se encontrar algum que lhe dê muito trabalho, ponha-o de lado por momentos e volte a resolvê-lo mais tarde como se fôsse um problema novo, de forma a evitar os possíveis êrros que tenha praticado.

4) Aprenda a trabalhar com precisão. Se cometer constantemente êrros verifique a cada passo. Assim melhorará até conseguir resolver o problema à primeira tentativa. A princípio não trabalhe depressa nem sob pressão; disponha do tempo bastante para resolver os problemas. Á medida que fôr triunfando mais depressa os resolverá. Finalmente resolvê-los-à depressa e correctamente.

5) Em quási todos os problemas é possível verificar os resultados. Deve habituar-se a verificar de preferência a comparar os resultados do livro com os seus. É uma grande fonte de satisfação a verificação, especialmente num exame.

6) Para resolver um problema por meio de álgebra, leia-o primeiramente com cuidado, em seguida reproduza o problema por palavras suas, Isto é absolutamente necessário se quizer triunfar. Designe por letras as incógnitas e escreva as relações traduzidas no enunciado entre os dados e as incógnitas. Feito isto terá tantas equações quantas as incógnitas e poderá resolver a equação ou sistema de equações. Se o tipo de equação achada não corresponder à teoria que acabou de estudar é natural que tenha errado, embora nem sempre isso aconteça.

7) Para resolver um problema de geometria por meio de álgebra determine em primeiro lugar o que é conhecido e o que se procura conhecer. Em seguida faça um desenho com todos os dados do problema estabelecendo as relações geométricas

existentes entre os dados e as incógnitas por meio de equações e resolva-as.

8) Se o problema geométrico tiver de ser resolvido por métodos puramente geométricos (sem auxílio da álgebra) procure determinar com cuidado a hipótese e a tese e faça um desenho. Geralmente o melhor processo é partir do princípio de que a tese é verdadeira e resolver o problema regressivamente até à hipótese e depois inverter o processo que se acabou de seguir.

9) A resolução dos problemas de trigonometria requere métodos especiais, embora seja útil tudo quanto foi dito acêrca dos problemas algébricos e geométricos.

10) Lembre-se sempre que as letras usadas representam números. Se tiver dúvidas sôbre se determinado resultado estará certo, substitua as letras por números. Assim é freqüente escrever $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ que se verifica ser êrro quando se substituam as letras por números, pois que se tem por exemplo: $\sqrt{4^2+3^2}=5$ e não igual a $4+3$.

11) Muitos estudantes atrapalham-se com as fracções. Uma regra simples mas muito importante é a traduzida pela igualdade $a/b=(a/b)\times 1$. Como exemplo da sua aplicação temos o seguinte: por ser $c/c=1$ vem $a/b=a/b\times c/c=ac/bc$. Aquela igualdade tem, como é fácil de ver, muitas outras aplicações.

D) Fixação do estudo feito

Quási sempre o aluno prepara as lições do dia e descobre no fim da semana que se esqueceu de grande parte do que aprendeu durante a semana. Isto é muito grave porque o trabalho de cada dia depende do dos dias antecedentes. O exame torna-se assim muito difícil e não se consegue triunfar. É pois preciso reter tudo o que se aprendeu. O primeiro exame do *caloiro* é muitas vezes um fracasso e êste facto afecta-o de uma das duas seguintes formas: serve-lhe de lição para se dedicar mais a fundo ao estudo, ou torna-se pessimista e abandona o trabalho. Em qualquer dos casos a situação não é agradável e pode ser evitada. Para tanto:

1) Deve contìnuamente rever. Dedique parte do tempo destinado à preparação das lições do dia a revisões da matéria estudada. Depois de rever, suponhamos umas vinte páginas do livro, recapitule os princípios básicos e veja o que conseguiu reter. Da vez seguinte gaste mais tempo com os pontos que notou mais fracos da primeira vez. Utilise agora os resumos de cada lição para a recapitulação. Uma vez que siga êste método verificará ao fim de certo tempo que prepara as lições diárias mais fàcilmente e que necesssita menos tempo que anteriormente para estudar qualquer assunto novo.

2) Na recapitulação de problemas não resolva os mais difíceis. Poder-se-á embaraçar num que seja muito difícil ou longo. Numa recapitulação precisamos de reter os pontos principais; resolver muitos problemas fáceis ou com ligeiras dificuldades e de preferência aqueles que apresentem uma variedade de tipo.

E) Auxílio do professor

1) O professor averiguará de início se o aluno está de posse dos conhecimentos necessários para poder seguir o curso.

2) Demonstrará a técnica descrita neste artigo elucidando o curso e convencendo-o da sua eficácia.

3) Dar-lhe-à todas as explicações necessárias desde que o aluno não abuse e traga por escrito as dificuldades a resolver.

4) Fará um ponto modêlo antes do exame e o seu resultado não terá influência na classificação final do exame. Por êste ponto o aluno fará ideia do que se pretende. O ponto será corrigido pelo professor, discutido na aula e entregue ao aluno.

5) O professor comentará a matéria que tenha saído no ponto e tirará as dificuldades que se apresentem na resolução dos problemas. Estas explicações só podem ser úteis aos alunos que tenham dominado a matéria dada até essa data.

6) O professor não fará prelecções. Levará o aluno a entrar na matéria auxiliado por êle.

7) O professor fornecerá exemplos de aplicação afim de criar interêsse nos alunos.

8) Interrogará freqüentemente os alunos afim de verificar se compreenderam os métodos aqui descritos e se estão a pô-los em prática. Êste interrogatório servirá também para averiguar em qual das seguintes categorias o aluno se encontra:

a) Não domina os princípios fundamentais necessários para poder seguir o curso.

b) Não estuda.

c) Tenta estudar e não sabe como.

d) Consegue triunfar mercê de habilidades.

e) Dá conta do recado.

Tradução de F. SCHÄLLER DIAS e de J. PAULO

A TEORIA DOS LOGARITMOS NO ENSINO LICEAL

por J. Sebastião e Silva (C. E. M. L.)

«*Tem-se desenvolvido e espalhado muito o conhecimento dos logaritmos, a tal ponto que já os alunos manejam as* tábuas de logaritmos *e delas se utilizam para o cálculo prático; há contudo estabelecimentos de ensino (no meu tempo era isto o normal) em que nada se diz de como se construem essas tábuas. Não podemos deixar de condenar êste facto, inspirado no mais baixo utilitarismo e contrário a todo o princípio de elevada pedagogia*».

(F. Klein, «Matematica Elemental desde un punto de vista superior», tradução espanhola de R. Araújo, p. 194).

«*... não deve estranhar-se, nem parecer casual, que um homem como* Leibniz, *pensador abstracto de primeira linha, mas dotado dum espírito eminentemente prático, fôsse ao mesmo tempo o* pai da Matemática formal *e o* inventor da primeira máquina de calcular».

(F. Klein, obra citada, p. 22).

Para nós e para muitos, é indiscutível que a Matemática deve desempenhar no ensino liceal um papel essencialmente formativo. Pouco interessa que o aluno fique a conhecer muitos teoremas e os processos de resolução de muitas classes de problemas: o que importa, acima de tudo, é que êle tenha exercido as suas faculdades na demonstração dos teoremas e na resolução dos problemas; é que tenha adquirido o hábito de pensar *matemàticamente*, quer estudando o desenvolvimento lógico das teorias, quer aplicando os factos estabelecidos à resolução de numerosas questões procedentes da realidade tangível. Exige-se, evidentemente, um mínimo de informação matemática, a aquisição duma técnica segura de cálculo elementar (numérico e algébrico); mas isso pouco deverá ser, comparado com o trabalho de criação dos hábitos de raciocínio, de abstracção, de disciplina mental, que distinguem a formação matemática. E é ainda manifesto que êsse mínimo de informação se refere quási exclusivamente aos alunos que vão seguir determinados cursos, enquanto os benefícios da formação matemática interessam à *totalidade* dos alunos.

Ora o estudo dos logaritmos constitui, há muitos anos, um dos assuntos capitais dos programas de Matemática dos liceus portugueses, e não nos parece plausível, *por ora,* que se mude de orientação, suprimindo essa parte do programa. É possível, sim, que venha a reconhecer-se a necessidade de nêle introduzir o ensino de outros métodos expeditos de cálculo numérico, nomeadamente métodos mecânicos; mas isso mesmo não implicará a vantagem de excluir o ensino dos logaritmos. E não se deverá então deixar de ensinar, na medida do possível, o princípio teórico dêsses métodos — a não ser que o objectivo da Educação consista em formar autómatos, em vez de *homens*. (Ver nota final).

Do ponto de vista informativo, parece-nos inatacável a inclusão dos logaritmos no ensino liceal — mas é do ponto de vista formativo que mais útil se deve considerar êsse estudo, pela oportunidade que oferece de pôr em evidência aspectos importantes do método matemático, dando uma idéia das suas admiráveis possibilidades. Não é portanto razoável que se faça predominar a feição prática, estreitamente utilitária, no modo de ensinar essa matéria, sem preocupações a respeito do seu enquadramento lógico no conjunto harmonioso das aquisições matemáticas.

E como se tem procedido, nêste assunto, entre nós? Costuma dar-se, é verdade, a demonstração de vários teoremas, relativos ao logaritmo dum produto, dum cociente, etc. etc. — mas todos nós sabemos quanto é precária a base em que vão assentar semelhantes demonstrações. É preciso ter a coragem de o afirmar: essa maneira de proceder não passa de pura mistificação, desde que se não tenha dado ao aluno uma noção conveniente de logaritmo. E o que temos visto fazer, neste ponto, é apresentar uma definição nominal, com a mais insensata despreocupação a respeito da existência das entidades definidas; isto é, sem ter o cuidado de mostrar que a equação $a^x=b$ admite solução, quaisquer que sejam a e b positivos. Por exemplo, segundo a definição, o logaritmo de 8 no sistema de base 2 é o expoente da potência a que se deve elevar 2 para obter 8: muito bem, êsse logaritmo é igual a 3. Mas qual é então o logaritmo de 2 no sistema de base 10? Aqui envereda-se pela via condenável do silêncio e do mistério: o aluno pode vir a saber, socorrendo-se duma tábua de logaritmos, que o logaritmo procurado é aproximadamente 0,30103; mas nunca lhe é dado penetrar nas altas razões que decidem ser êsse e não outro, o logaritmo decimal de 2, com cinco casas decimais. E é na mais santa ignorância do que sejam afinal os logaritmos, que o aluno se dará ao luxo de demonstrar belos teoremas sôbre essas entidades, de que êle sabe tanto, quanto nós sabemos dos habitantes do planeta Marte!...

Não se pode negar que o problema é delicado. Parece que chegámos a êste dilema: ou renunciar de todo a uma teoria matemática dos logaritmos, contentando-nos com o ensino de regras mecânicas, de receitas a aplicar cegamente; ou sujeitar o inditoso jóvem a um estudo sério dos irracionais e das funções contínuas, para, sôbre essa base inabalável, erigir o soberbo edifício dos logaritmos. Ora é forçoso encontrar aqui uma saída, uma terceira hipótese menos cruel... [1]

Pois bem: nós cremos na possibilidade de resolver a questão, sem recorrer ao luxo duma exploração analítica do corpo real, e sem cair em mistificações escandalosas. Basta lembrar que os logaritmos foram inventados muito antes de Dedikind, Cantor e Weierstrass terem vindo ao mundo — e que não devemos acusar Neper de ter feito uma descoberta prematura...

Aqui a norma a adoptar parece-nos que deve ser esta: dar ao ensino uma orientação de tal modo natural, que o aluno seja levado a aceitar os factos *intuïtivamente*, [2] e com uma fôrça de convicção semelhante à que nos vem da demonstração rigorosa dêsses factos. A solução que vamos propôr não constitui pròpriamente novidade. Não. Achámos, contudo, nosso dever chamar a atenção das pessoas distraídas para uma solução aceitável, que, apesar da sua singeleza, tem andado imerecidamente oculta e desprezada.

Suponhamos que foi dada a definição usual de logaritmo dum número, relativamente a uma determinada base, e procuremos, armados com essa definição, calcular, por exemplo, o logaritmo decimal de 3. Trata-se portanto de achar um número k tal que $10^k=3$. Diga-se ao aluno: *se um número tal existe,* é natural que esteja compreendido entre 0 e 1, pois que $10^0=1$, $10^k=3$, $10^1=10$ e $1<3<10$ [3].

Dividamos então em 10 partes iguais o intervalo de extremos 0 e 1: os intervalos obtidos terão por extremos 0; 0,1; 0,2; $\cdots$; 0,9; 1. Em qual dêstes novos intervalos se deve encontrar k? Para o saber, basta comparar o número $10^k=3$ com cada uma das potências $10^{0,1}, 10^{0,2}, \cdots, 10^{0,9}$; mas isso equivale a comparar, entre si, as décimas potências dêsses números. Ora

$$3^{10}=[(3^2)^2]^2\cdot 3^2=6561\times 9=59049$$

e por outro lado

$$(10^{0,1})^{10}=10,\,(10^{0,2})^{10}=10^2,\cdots,(10^{0,9})^{10}=10^9.$$

Como $10^4<59049<10^5$, segue-se que $10^{0,4}<10^k<10^{0,5}$ e portanto $0,4<k<0,5$. Assim, o logaritmo decimal de 3, *se existe,* deve encontrar-se entre 0,4 e 0,5. Tomando 0,4 para valor aproximado dêsse logaritmo, comete-se portanto (na hipótese de êle existir) um êrro por defeito inferior a 0,1: podemos então *convencionar* dizer que 0,4 é *o logaritmo decimal de* 3 *a menos de uma décima.*

Pretendendo calcular $\log 3$ a menos de uma centésima, procederemos anàlogamente, dividindo o intervalo de extremos 0,4 e 0,5 em 10 partes iguais, e comparando $10^k=3$ com os números $10^{0,41}, 10^{0,42}, \cdots, 10^{0,49}$. Mas tem-se $3^{100}=(3^{10})^{10}\approx(5,90\times 10^4)^{10}\approx 5,1\times 10^{47}$ [4] e, por outro lado, $(10^{0,41})^{100}=10^{41}, (10^{0,42})^{100}=10^{42}, \cdots, (10^{0,49})^{100}=10^{49}$; como $10^{47}<5,1\times 10^{47}<10^{48}$, será $10^{0,47}<10^k(=3)<10^{0,48}$, donde $0,47<k<0,48$. Tem-se portanto, a menos de uma centésima, $\log 3=0,47$.

Anàlogamente se calculava $\log 3$ a menos de uma milésima, etc. E agora que já o *descobrimos,* podemos reduzir o método às suas linhas estruturais, dando-lhe até maior generalidade: Seja a o número dado. Calculemos a sua potência de expoente p, sendo p um inteiro qualquer. Se fôr $10^n<a^p<10^{n+1}$, ter-se-á $10^{\frac{n}{p}}<a<10^{\frac{n+1}{p}}$ e, por-

[1] Como solução, já ouvimos propor que se voltasse ao ensino dos logaritmos a partir de duas progressões, uma aritmética e a outra geométrica, com os termos em correspondência biunívoca; mas nós achamos que dêste modo as dificuldades apontadas subsistem completamente, com acréscimo de inconvenientes.

Há dez anos fazia-se na 7.ª classe um estudo pretencioso das funções exponencial e logarítmica.

[2] Que nos perdôem aquêles para quem a palavra *intuïção* deixou de ter sentido e ainda aquêles para quem a intuïção matemática termina, onde os números irracionais começam.

[3] Supomos, evidentemente, que já foi demonstrada a proposição: «*Se* $a>1$ *e* $p>q$, *tem-se* $a^p>a^q$, *para* p *e* q *racionais*». Aqui, procura-se determinar $\log 3$, como se êle fôsse racional. Veja-se que não se trata por enquanto de *demonstrar*, mas apenas de *investigar*. Só depois se colocará o aluno perante a hipótese da irracionalidade, sem que o resultado fique lògicamente comprometido. *Supomos aqui já definida potência irracional de expoente racional, mas não potência de expoente irracional.* É o estudo dos logaritmos que faz sentir ao aluno a necessidade de introduzir esta última noção.

[4] O sinal $\approx$ deve ler-se «*aproximadamente igual a*». Nestes cálculos, basta operar com valores aproximados; mas é necessário, evidentemente, fixar o número de algarismos significativos a conservar de cada vez, para que o resultado não seja comprometido. Patenteia-se aqui, uma vez mais, a necessidade premente de ministrar, nos nossos liceus, algumas noções sôbre cálculo aproximado — necessidade que, desgraçadamente, ainda não foi tomada em devida consideração.

tanto (se existe $\log a$), $\frac{n}{p} < \log a < \frac{n+1}{p}$. Para atingir depressa um expoente p bastante elevado, pode adoptar-se o processo de repetidas elevações ao quadrado, utilizando uma tábua de quadrados [5], que nada tem já de misterioso para o aluno. Com 10 consultas da tábua e uma divisão por 1024 — calcula-se um logaritmo com 3 decimais.

E... o problema da existência? Mas é evidente que êsse problema perdeu agora grande parte do seu interêsse prático, e mesmo lógico! O aluno encontra-se apto a determinar números k' que satisfazem *aproximadamente* à condição $10^{k'}=3$, com um êrro tão pequeno, *quanto êle quiser;* isto é, números k', tais que a potência $10^{k'}$ seja tão *próxima* de 3, *quanto êle quiser*. E não é isto suficiente nas aplicações ao mundo físico? Não sabe o aluno já que, nessas aplicações, os números exprimem medidas, irremediàvelmente sujeitas a êrro? Que significado pode ter, por exemplo, num resultado, um êrro inferior a uma décima de milímetro, quando o processo de medição utilizado é insuficiente para distinguir grandezas inferiores a êsse limite? E tôda a teoria dos logaritmos pode ser adaptada a êste novo modo de encarar o assunto, sem cometer a mínima falta em relação à lógica. Bastará, então, estabelecer os teoremas, só no caso em que logaritmos são racionais, e mostrar ao aluno como, aplicando êsses teoremas, se pode fazer o cálculo logarítmico dum produto, dum cociente, etc., com um êrro inferior a um limite prèviamente fixado.

Mas também a atitude filosófica não deve ser desprezada, mesmo nesta fase de iniciação! É que, além do mais, há nessa orientação ainda um sentido prático, embora de outra ordem — uma utilidade que não se refere já às relações da Matemática com a Técnica, mas às necessidades intrínsecas da própria Matemática. Uma noção matemática impõe-se na medida em que é cómoda e fecunda — e êste princípio é verificado com o conceito de número irracional [6]. Tôda a Análise Matemática podia ser feita sem recorrer a tal conceito: simplesmente, os enunciados das proposições perderiam muito da sua luminosa simplicidade, quebrando-se aquela harmonia que não só lisonjeia o sentido estético, como também é condição de fecundidade. *Pràticamente*, não chegam a ser criados novos números — apenas é adoptada uma nova linguagem, que faz conceber como equivalentes a números, certas sucessões infinitas de números. E já isso representa alguma economia...

Tornemos agora ao cálculo dos logaritmos. Depois das considerações que foram feitas, é muito natural que o aluno sinta espontânea curiosidade em saber se as operações indicadas têm ou não um têrmo. Mesmo que esta sua curiosidade não seja então satisfeita (pode satisfazê-la mais tarde, em Aritmética Racional) ficará êle a conhecer os dois casos que se podem verificar, no cálculo do logaritmo dum número a, pelo método apresentado: a possibilidade ou a impossibilidade de encontrar, ao fim dum certo tempo, um número decimal k, tal que $10^k=a$; e terá aprendido a distinguir duas hipóteses, no segundo caso: a da periodicidade e a da não periodicidade da dízima obtida. Finalmente, virá a saber que, só na última hipótese, é impossível determinar um número racional k, tal que $10^k=a$; mas que, nesse caso, a sucessão dos números decimais (ou a dízima infinita) a que conduziria a aplicação indefinida do método indicado, define, *por convenção*, um número irracional λ, e que se tem, *ainda por convenção*, $10^\lambda=a$.

Mas não será preciso continuar a desenvolver êste ponto de vista. Resta-nos lembrar que, já antes do estudo dos logaritmos — a propósito dos radicais — o aluno tomou um primeiro contacto com o fenómeno da irracionalidade. E observações em tudo análogas às precedentes devem ser feitas acêrca da noção de raiz aritmética dum número.

Agora, outro aspecto da questão. Com as anteriores indicações e pouco mais, *fica o aluno habilitado a construir uma tábua de logaritmos:* — é tudo uma questão de tempo e de paciência, relacionada com o número de casas dècimais adoptado. Como exercício, não será preciso ir além de 3 ou 4

---

(5) Estas tábuas, muito úteis para abreviar os cálculos, no método dos mínimos quadrados e no método de Gräffe (equações algébricas), têm ainda interêsse pedagógico e prático por oferecerem uma possibilidade de calcular produtos, efectuando apenas adições, subtracções e divisões por 2 — com o emprêgo da fórmula $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. No livro de J. Hoüel «Recueil de Formules et Tables Numériques», encontra-se a p. 62-63 (duas páginas apenas!) uma tábua de quadrados a quatro decimais — que permite ainda, sem grande trabalho, calcular quadrados de números com 8 algarismos significativos.

(6) Somos levados a aplicar aqui o critério de comodidade, de que H. Poincaré usou, mas também abusou, nas suas explicações.

Só no século XIX se reconheceu que os conceitos de número negativo, número irracional, etc., não obedecem a uma *necessidade lógica*.

dècimais: uma tábua para 4 decimais não ocupa mais de duas páginas duma tábua vulgar. Mesmo que o aluno não chegue a construir uma dessas tábuas, ficará (e é isto o fundamental) a ter a legítima convicção de que *seria capaz de a construir, se tanto quizesse,* — e dêste modo se evita o seu complexo de inferioridade perante um instrumento que não se deve, positivamente a artes mágicas — que não foi criado por entes sobrenaturais, mas *por homens!* A construção efectiva duma tábua é na verdade uma tarefa maçadora, monótona, mas isso também não constitui razão para a condenar. Perigosa educação a que leve ao convencimento de que tudo se consegue na vida sem grande maçada! De-resto, êste trabalho é dos que se podem repartir por uma *équipe* de alunos, aplicando o salutar preceito do trabalho colectivo.

«Trabalho vão! Tempo perdido!» ouvimos clamar. «A trôco de alguns escudos, o aluno pode adquirir uma tábua de logaritmos na livraria mais próxima!» Mas—insistiremos—não se trata aqui de atingir uma finalidade prática imediata! Também, segundo êsse critério, cem por cento utilitário, será *inútil* que o aluno aprenda a improvisar. por exemplo, certos aparelhos de física (supondo que tem um bom laboratório à sua diposição, e que não tenciona especializar-se nêsse género de construções) — e, não obstante, o prazer que fruïrá, trabalhando com os *seus* aparelhos, é um dos mais poderosos agentes de que pode socorrer-se a bôa pedagogia.[7] Êsse prazer tem algo de semelhante à emoção que se apodera do investigador (pensamos em Pasteur, neste momento,,,.), ao pressentir o êxito das suas pesquisas — mesmo que daí não venha a resultar nada que possa exprimir-se em unidades do sistema monetário Ai da Ciência, ai da Humanidade — se deixasse de haver gente *sonhadora,* capaz de sentir essa emoção!

Também se pode objectar que as tábuas logarítmicas de que nos servimos hoje não foram construídas pelo processo aqui apresentado, mas por outro mais expedito, que não se pode ensinar devidamente a alunos do liceu. Os anteriores argumentos servem ainda para nos defender desta objecção.

Resta-nos responder àquelas pessoas que se consomem em eternos cuidados, a respeito da extensão dos programas, incompatível com a saúde preciosa da juventude que se bate... por um diploma. — É evidente que, ao preconizar a introdução de uma nova matéria, não se exclui a hipótese de compensar êsse acréscimo, sacrificando outra parte, menos importante, do programa — e no nosso caso não será difícil descobrir, onde cortar... Não deixaremos, contudo, de lembrar humildemente êste humilde preceito: *nunca se deve lamentar o tempo gasto em estabelecer sòlidamente uma noção fundamental.* Mais até: *há acréscimos que têm o valor de simplificações* – princípio que só repugna a quem sofra de miopia intelectual. Tudo que sirva para elucidar — longe de constituir um pêso, uma sobrecarga — só contribui para suavizar a marcha... E — como diria êsse inimitável observador que é ainda M. de la Palisse — *nunca se perde tempo num trabalho que oferece a garantia de chegar mais depressa ao fim.*

Nota: As considerações precedentes são, em grande parte, o produto da nossa legítima reacção, a várias críticas que nos foram dirigidas a propósito da nossa 3.ª interrogação, formulada na secção pedagógica do n.º 11 da «G. M.». Em especial, referir-nos-emos às observações feitas, no mesmo número, pelo Sr. Prof. Bento Caraça, com quem estamos em desacôrdo neste ponto — mas a quem apoiamos na enérgica atitude que tem mantido a favor duma reforma do ensino das matemáticas em Portugal. Algumas das suas observações acêrca do nosso ponto de vista referem-se à necessidade de ensinar, a alunos do liceu, o manejo da régua de cálculo, e à gradual substituïção dos logaritmos pela máquina de calcular. É interessante notar que F. Klein, na sua tão celebrada obra, a que temos aludido, depois de afirmar categòricamente que *nenhum aluno devia sair da escola sem ter manejado uma máquina de calcular* (cujo segrêdo nos revela, num exemplo típico), dedica um extenso e substancial capítulo ao ensino dos logaritmos... E que vem a ser, afinal, uma régua de cálculo? É ainda F. Klein quem no-lo diz: «... como se sabe, não é outra coisa senão uma *tábua de logaritmos com 3 decimais...*» (Aqui se vê ainda um belo exemplo de união da Matemática e da Técnica, da teoria e da prática!)

Finalmente, transcrevemos do artigo «Os logaritmos», publicado na secção «Antologia» do n.º 11 da «G. M.», a seguinte passagem: «*E uma vez os logaritmos inventados, êles conduziram a uma teoria dos limites, das exponenciais, dos indivisíveis, que vieram a ser os preliminares essenciais da criação da análise*».

Somos levado a crer que o Sr. Prof. Bento Caraça não reflectiu maduramente, ao escrever a sua nota, em que afirma o propósito, na verdade simpático, de iniciar a discussão à volta das nossas interrogações. Mas o que é um facto — e muito grave — é que os seus argumentos (?) se insinuaram fàcilmente no espírito duma extensa camada de leitores, alimentando erros e confusões, que é preciso a todo o transe desenraïzar.

---

(7) É absolutamente necessário que o aluno adquira a suficiente confiança em si, para que não se sinta mais como um estranho, um tímido visitante, um espectador inerte e mudo, no imenso domínio da Ciência.

RESPOSTA ÀS CONSIDERAÇÕES ANTERIORES

por Bento Caraça

Cometi, pelo visto, um grave crime contra a teoria dos logaritmos e o Dr. Sebastião Silva, animado daquela sagrada ira que só as grandes dedicações inspiram, despeja sôbre mim, de cambulhada com a acusação de irreflectido e responsável pela propagação de erros nefastos, uma taleigada de citações eruditas.

É pouco do meu gôsto êsse jôgo da *citaçãozinha.* Lembro-me sempre do fim lamentável daquele pobre bibliotecário de que nos fala Anatole France, afogado nas fichas da sabença universal. Por isso, vou propôr ao Dr. Sebastião Silva outro jôgo: que deixemos em paz o Leibniz, e o Pasteur e o Klein e que, como homens do nosso tempo, virados para os problemas do nosso tempo e do nosso meio, analisemos, com cuidado e sentido das realidades, o problema em questão.

I — Trata-se do ensino liceal, do ensino ministrado a rapazes e raparigas entre os 10 e os 17 anos, portanto com um condicionamento psicológico próprio, uma capacidade de recepção e de sensibilidade ao facto matemático limitadas por êsse condicionamento.

O ensino liceal é dirigido a *todos*, quer vão ou não freqüentar mais tarde cursos superiores e deve ter, conseqüentemente, por objectivo fornenecer os elementos de cultura geral e a capacidade de actuação indispensável a todo o cidadão.

Esta me parece que deve ser a sua finalidade — *formar cidadãos* — e não formar matemáticos, ou físicos, ou geógrafos, ou alfaiates. Nessa formação, a matemática desempenha um papel de primeira plana, quer pela disciplina mental que pode contribuir para crear, quer pela cultura geral que o conhecimento dos seus conceitos e métodos proporciona, quer ainda pelas suas aplicações práticas imediatas à vida corrente. O seu ensino deve portanto ser orientado dêste triplo ponto de vista. Mas é preciso, se não quizermos estar apenas a construir castelos de cartas, ter em conta o condicionamento a que atraz me referi. Por isso, quando o Dr. Sebastião Silva diz que o ensino liceal da Matemática deve ter um objectivo essencialmente formativo, concordo com êle, mas já o não posso acompanhar quando pretende que êle deve levar ao hábito de *pensar matemàticamente* e ao estudo do *desenvolvimento lógico das teorias.* ¿Reflectiu o Dr. Sebastião Silva maduramente sôbre o que estas duas exigências implicam? ¿e nas suas possibilidades de realização em face de mentalidades médias de menos de 17 anos?

II — A teoria dos logaritmos pode ser encarada de um triplo ponto de vista também — o seu aspecto teórico (construção orgânica da teoria, relações com outras teorias), o seu aspecto de cultura geral, o seu aspecto prático.

Ocupemo-nos do primeiro.

Para se poder fazer uma teoria elementar dos logaritmos, completa e rigorosa, satisfatória do ponto de vista lógico, é preciso conhecer: a teoria do crescimento, a teoria da continuïdade, a teoria da inversão, a teoria da exponencial.

Com estes elementos, a teoria dos logaritmos faz-se com uma simplicidade enorme; não há que estabelecer convenções nem que fazer demonstrações de existência; há apenas que dar uma definição — a da função logarítmica como inversa da exponencial — e que tirar conseqüências imediatas.

Tôda a teoria elementar dos logaritmos que não recôrra a estes elementos é necessàriamente incompleta. ¿Pode fazer-se no liceu uma teoria rigorosa nos moldes que apontei? É evidente que não. Há, portanto, só dois caminhos a seguir — ou renunciar de todo a falar de logaritmos no ensino secundário ou resignarmo-nos a dar uma teoria incompleta.

Sou desta segunda opinião e já pùblicamente a expuz. ¿Como proceder? dar a definição a partir de duas progressões, uma aritmética outra geométrica, em correspondência biunívoca; deduzir, a partir dessa definição, as regras operatórias (para logaritmos racionais) referentes ao produto, cociente e potência de expoente racional e, em seguida, tomar para com os alunos esta atitude clara e simples — a teoria que acaba de ser feita não é rigorosa nem completa; em particular, a regra operatória da potência é generalizável a outros valores do expoente; mas não se pode fazer aqui uma teoria completa; aqueles que seguirem para estudos superiores de Matemática verão mais tarde como ela se faz; aqueles que não seguirem para cursos superiores têm, na teoria que acaba de ser feita, todos os elementos para as aplicações práticas.

Era esta a atitude, pouco mais ou menos, a dos antigos programas do liceu, que neste particular, como em muitos outros, eram incomparàvelmente mais sensatos do que os de hoje.

III — O Dr. Sebastião Silva diz-nos que descobriu outra maneira de tratar a questão, a qual resolve todas as dificuldades: foge ao carácter precário da definição por progressões e evita o recurso a noções que no liceu não podem ser dadas. Vamos analisar essa solução.

Assenta ela no critério seguinte — «dar ao ensino uma orientação de tal modo natural que o aluno seja levado a aceitar os factos intuïtivamente e com uma fôrça de convicção semelhante à que nos vem da demonstração rigorosa dêsses factos».

Notemos, antes de mais:

a) Que se não fala já aqui de «desenvolvimento lógico das teorias». ¿Será esta uma questão de «realidade tangível?»

b) Que a maneira indiscriminada pela qual o Dr. Sebastião Silva emprega, nesta passagem e na nota n.º 2, o termo ***intuïção*** me parece susceptível de alimentar, no espírito do leitor desprevenido, êrros e confusões. A intuïção é uma faculdade que, como tôdas as faculdades humanas, é susceptível de desenvolvimento. Um artista pode ter, da combinação de côres ou de sons, uma intuïção que escape completamente a quem o não é. Do mesmo modo, um obreiro da Matemática, largamente exercitado no estudo dos seus métodos, pode ter do facto matemático um grau de intuïção totalmente inatingível para pessoas não adextradas. Estou convencido, e já fiz pùblicamente essa afirmação, de que o conceito de número irracional não tem nada de intuïtivo ***para mentalidades não adextradas matemàticamente***, o que não exclui que o tenha para outras. Fica assim rectificada a ***confusãozinha*** da nota n.º 2.

Passemos adiante.

O Dr. Sebastião Silva utiliza para a definição de logaritmo a equação $a^x=b$ a respeito da qual vai até exigir que se mostre que admite solução, quaisquer que sejam a e b positivos ($a \neq 1$). A primeira coisa a fazer quando se tem que trabalhar com símbolos matemáticos é determinar com cuidado o seu significado. ¿O que é a função a^x que figura no primeiro membro da equação? Do que diz na nota 3 depreende-se:

a) que se supõe adquirida a noção de número irracional;

b) que se supõe a função a^x definida para x racional mas não para x irracional.

Quere dizer, o Dr. Sebastião Silva utiliza na sua definição um instrumento — a função a^x — imperfeitamente definido. É curioso que seja a mesma pessoa que condena o uso dum instrumento ***prático*** que se não aprendeu a construir (mas que se conhece na sua essência e no seu manejo) e que neste mesmo artigo se revolta contra «a insensata despreocupação a respeito da existência das entidades definidas» que venha em seguida advogar o uso dum instrumento ***teórico*** (donde há de sair tôda a construção) incompletamente definido, de que ***se não sabe nada*** numa infinidade de casos! infinidade de casos em que a equação de partida é falsa para x racional!

Mas há mais. Depois de mostrar como se pode, a partir da equação $10^x=3$, determinar um valor aproximado do logaritmo decimal de 3, diz-nos que «o problema da existência perdeu agora grande parte do seu interêsse prático e mesmo lógico». Essa agora! Então parte-se duma equação, $10^x=a$, que, para o conjunto de valores em que é definido o primeiro membro, é em geral falsa, e a questão de saber se existe um valor, em geral, fora dêsse conjunto, que a torne verdadeira não tem interêsse lógico?!

¿Tem, ao menos, êste tratamento a vantagem de ser completo? O próprio Dr. Sebastião Silva diz que não, visto que limita o estudo das propriedades operatórias ao caso em que os logaritmos são racionais.

IV. — A solução apresentada não é mais satisfatória se a encararmos do ponto de vista pedagógico.

A função a^x não foi ainda definida para x irracional e o Dr. Sebastião Silva diz na nota 3 que «é o estudo dos logaritmos que faz sentir ao aluno a necessidade de introduzir esta última noção».

A definição de potência de expoente irracional é delicada e pertence ao número daquelas que não podem ser dadas no ensino secundário em condições de eficiência. O introduzi-la a propósito da definição de logaritmo tem, além disso, os seguintes inconvenientes:

a) O de não respeitar o princípio pedagógico da seriação das dificuldades, metendo num único problema duas questões delicadas.

b) O de tirar perspectiva e importância à noção de potência de expoente irracional; o seu papel é mais largo — é o da conservação da continuïdade. Mas disto não pode falar-se no ensino secundário.

c) O de tornar extremamente difícil ***para mentalidades de menos de 17 anos*** o apreender, neste caso, o carácter convencional que tem tôda a definição. Depois de ter mostrado que da equação

$10^x = a$ se tira, *como único valor possível*, $\alpha = \log_{10} a$ ¿como fazer perceber claramente ao aluno médio do liceu que se toma, para definição, *convencionalmente* e não *obrigatòriamente* $10^\alpha = a$?

¿Não será muito mais sensato evitar no liceu êste escôlho, difícil de ultrapassar? ¿Para fazer compreender o carácter convencional das definições não dispomos de exemplos simples, como as definições de a^0, a^{-n}, etc., que, no entanto, a despeito da sua simplicidade, nem sempre são bem percebidos?

V. — A determinação aproximada dum logaritmo pode fazer-se partindo da definição por duas progressões. O mesmo problema numérico que o Dr. Sebastião Silva trata pode ser posto assim — se existir $\log_{10} 3$ deve poder fazer-se uma inserção conveniente de meios nas duas progressões de modo que na geométrica figure 3 como um dos seus termos; o meio correspondente na progressão aritmética será o seu logaritmo. A inserção de 10 meios leva à construção das duas progressões auxiliares

1	$\sqrt[10]{10}$	$\sqrt[10]{10^2}$	$\sqrt[10]{10^3}$	$\sqrt[10]{10^4}$	$\sqrt[10]{10^5}$	$\sqrt[10]{10^6}$
0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
		$\sqrt[10]{10^7}$	$\sqrt[10]{10^8}$	$\sqrt[10]{10^9}$	$\sqrt[10]{10^{10}} = 10$	
		0,7	0,8	0,9	1	

Verificado que $\sqrt[10]{10^4} < 3 < \sqrt[10]{10^5}$ e que, portanto, se existir $\log_{10} 3$, deve ser $0{,}4 < \log_{10} 3 < 0{,}5$, o raciocínio prosseguirá, levando *exactamente às mesmas contas* e a considerações análogas *de carácter prático e teórico,* mas com as vantagens seguintes:

a) Constituir uma aplicação imediata de um problema já tratado e conhecido — o da inserção de meios.

b) Não introduzir noções novas, o que é conveniente, dada a natureza longa e maçadora dos cálculos a efectuar.

c) Evitar o recurso a instrumentos analíticos mal definidos.

Em resumo, do que se trata é apenas disto — de escolher e dosear as noções e as dificuldades, apropriando-as às necessidades do ensino e às mentalidades dos alunos; é, no fundo, apenas, uma questão de sensatez.

VI. — É tempo de passar ao segundo aspecto que a teoria dos logaritmos apresenta no ensino do Liceu — o seu aspecto de instrumento de cultura geral.

Pelo papel que essa teoria desempenhou na história da Matemática, é justificável que os programas do Liceu não a excluam. Mas é preciso não esquecer que outras teorias, dum valor de cultura geral não menor, se não maior, lá podiam figurar e não figuram. Refiro-me em especial à teoria dos complexos e aos elementos da Geometria Analítica; estas matérias já se ensinaram no Liceu e foram depois suprimidas.

VII. — Ocupemo-nos, finalmente, do último aspecto da questão — o aspecto prático.

Encarados dêste ponto de vista, os logaritmos constituem um *expediente de cálculo,* importante sem dúvida, mas um expediente, que deve ser colocado no seu lugar, sem roubar o espaço necessário para o tratamento de outras questões igualmente, ou mais, importantes.

Nem sempre se tem o bom senso de proceder assim e há uma tendência entre nós para a idolatria da táboa de logaritmos. Um ponto de exame no Liceu vi eu já em que se exige um cálculo tão rigoroso, tão rigoroso, que se determina a posição dum navio no mar a menos de um milímetro! Quando as coisas são levadas a êste ponto, os instrumentos de cálculo deixam de ser instrumentos de cálculo para se transformarem em manipansos exercendo, por intermédio dos seus sacerdotes, a sua *tiraniazinha* sôbre a pobre massa académica.

Há entre nós mais *sacerdotes do manipanso* do que parece à primeira vista, e o Dr. Sebastião Silva, ao sugerir que os alunos do Liceu construam uma táboa de 4 decimais — o que se assemelha mais a um castigo em regime de trabalhos forçados do que a um exercício de classe — não está muito longe dessa posição. E não são as comparações mais ou menos arbitrárias, nem o palavreado mais ou menos sonoro e floreado, nem a invocação de Pasteur e da humanidade sonhadora que o afastam dessa posição.

Na nota que escrevi no n.º 11 da «Gazeta», a propósito da sua 3.ª interrogação, discordei da sua sugestão para se ensinasse no Liceu a construir uma táboa de logaritmos. Os motivos da discordância foram, como escrevi então:

a) Que o processo pelo qual as tábuas são *efectivamente* construídas não está ao alcance do ensino do Liceu.

b) Que o tempo que se levaria a ensinar *como se pode fazer mas se não faz* é precioso para ensinar coisas mais importantes. Lembrei nessa altura o manejo da régua de cálculo e da máquina de calcular; lembro agora tôdas aquelas matérias que indevidamente foram cortadas dos programas, como a importantíssima questão das aproximações no cálculo numérico, a resolução de triângulos não rectângulos etc. e ainda aquelas que nunca lá figuraram mas que na vida contemporânea têm uma importância tal que devem ser ensinadas a todos; estão neste caso, por exemplo, a noção de probabilidade e os rudimentos da estatística.

c) Que não há vantagem em mostrar *como se pode construir mas não se construe* um instrumento que encontramos já construido no mercado.

d) Que o estudo detalhado da questão poderia interessar aqueles que mais tarde se destinem à construção de táboas de logaritmos (quantos serão?) mas não a todos.

O Dr. Sebastião Silva parece ter lido essa nota com uma estranha lente que o fêz ver coisas que lá não estão. Efectivamente, no seu artigo acusa-me, com o auxílio de algumas *citaçõezinhas,* de cair em grave contradição por preconizar o ensino do manejo da régua de cálculo sem o conhecimento dos logaritmos, contradição essa que deve radicar na minha ignorância do que seja uma régua de cálculo. O Dr. Sebastião Silva podia ter *reflectido maduramente* em que a primeira coisa a fazer quando se pretende atacar a posição de alguém é conhecê-la. ¿Onde é que eu digo nessa nota que sou contra o ensino dos logaritmos no Liceu? Ou, para o Dr. Sebastião Silva ¿é a mesma coisa saber o que é um logaritmo e saber construir uma táboa de logaritmos?

VIII — Causou estranheza a várias pessoas a minha interrogação, na nota do n.º 11 da *Gazeta,* sôbre a vantagem de mostrar como se pode construir um instrumento que encontramos construído no mercado.

Entendamo-nos. Que um profissional deve possuir a fundo, não só a essência e o manejo, mas os segredos da construção dos instrumentos que usa, é evidente, e nunca o puz em dúvida. Mas o ensino liceal não se destina à formação de profissionais, como disse no começo.

Que todo o cidadão deva ser capaz de improvisar aqueles instrumentos de que na sua vida mais necessita, também é fora de dúvida. ¿Mas está a táboa de logaritmos nesse caso? Quantas vezes tem, aquele que se não dedica a uma carreira de profissional da Matemática, que recorrer na sua vida a uma táboa de logaritmos? ¿E está-se vendo um indivíduo, com um cociente ou um raiz a calcular urgentemente, pôr-se a calcular prèviamente uma táboa de logarítmos? ¡Quantas outras coisas mais importantes, e interessando incomparàvelmente mais a vida do cidadão, há a conhecer — uma táboa de mortalidade, por exemplo — e de que no ensino liceal nem sequer se fala!

Uma vez que a táboa de logaritmos desempenha na vida do cidadão um papel reduzidíssimo — e cada vez mais reduzido, pela generalização do emprêgo da régua de cálculo e da máquina de calcular — o perder um tempo precioso com a maneira pela qual ela se pode construir e não se construe só se justificaría por qualquer destas razões: ou por ser um objecto duma raridade extrema, o que não é verdade; ou porque êsse modo hipotético de construção lançasse luz sôbre algum método importante da Matemática que pedagògicamente conviesse pôr em relêvo por êsse meio, o que também não é verdade; ou ainda porque êsse processo fôsse de tal modo atraente que pudesse contribuir para fazer amar a Matemática pelos estudantes, o que ainda é menos verdade.

Então, para quê?

IX — Resumindo, a minha opinião a respeito dos logaritmos no ensino secundário é a seguinte:

Que se mantenha nos programas o ensino dos logaritmos mas a partir de duas progressões, como indico em II.

Que, em relação com o problema da inserção de meios, se dêem alguns exemplos em que o logaritmo é racional e se ponham os alunos em face do problema da irracionalidade.

Que, após estes conhecimentos teóricos, se ensine o manejo dos dois instrumentos, táboa de logaritmos e régua de cálculo, mostrando os inconvenientes e vantagens de cada um em relação ao outro, dentro do problema das aproximações no cálculo numérico e da necessidade que o homem-de-todos-os-dias naturalmente virá a ter de um e de outro.

Que o tempo a tomar com êsse ensino seja proporcionado à sua importância dentro do problema do cálculo numérico e à dêste dentro do ensino secundário, das suas exigências e dos seus objectivos.

Nota — O Dr. Sebastião Silva diz na nota final do seu artigo que me apoia na atitude que tenho tomado dentro da Comissão Pedagógica da Sociedade Portuguesa de Matemática por uma reforma do ensino secundário. Como nunca tinha dado por isso, apesar de nos termos muitas vezes encontrado em ocasiões e locais em que êle poderia ter dado a êsse movimento a cota parte do seu esfôrço, registo agora o facto com satisfação.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

No dia 10 de Julho passado realizou-se uma Assembléia Geral da S. P. M. Após terem sido resolvidos alguns assuntos administrativos foi apresentada pela Comissão Pedagógica a seguinte proposta para a criação de uma Biblioteca Matemática.

PROPOSTA

É de todos sabido que a bibliografia científica em língua portuguesa tem sido sempre e continua a ser escassa.

No domínio das Ciências Matemáticas essa escassez revela-se principalmente em relação a obras de duas categorias:

a) Obras que sirvam os estudantes das Universidades.

b) Obras de um nível um pouco mais elevado, destinadas ao licenciado que queira adquirir uma cultura matemática complementar ou àquêle que, por fôrça da sua profissão, tal o professor do liceu, necessite de mais ampla informação especializada.

É, por conseqüência, de tôda a vantagem e de manifesta urgência, a criação de uma Biblioteca Matemática com os fins mencionados; ela seria constituída por originais portugueses e traduções de livros estrangeiros que, com êsse objectivo, fôssem seleccionados.

Em vista do exposto, tenho a honra de propor, em nome da Comissão Pedagógica:

1.º — Que a Sociedade Portuguesa de Matemática promova a publicação de uma Biblioteca Matemática com os objectivos mencionados por uma comissão de três membros da Sociedade, na qual estará representada a Direcção e a Comissão Pedagógica.

2.º — Que se represente imediatamente à Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências pedindo-lhe a concessão de um subsídio financeiro substancial que sirva de base à realização desta iniciativa.

S. P. M. em 10 de Julho de 1942.

Bento Jesus Caraça

Esta proposta foi aprovada por unanimidade.

Em seguida o prof. Bento Caraça a quem a Direcção da S. P. M. encarregara de representar a Sociedade no Congresso para o Progresso das Ciências que se realizou em Junho no Pôrto, fêz uma sucinta exposição sôbre o mesmo Congresso, encarando, em especial, o modo de trabalho que serve de base a tais reüniões científicas e terminando por apresentar a seguinte proposta que foi aprovada por unanimidade menos uma abstenção:

PROPOSTA

A Sociedade Portuguesa de Matemática, ouvido o relatório do seu delegado ao recente Congresso da Associação Luso-Espanhola para o Progresso das Ciências, realizado no Pôrto,

prestando homenagem a todos os esforços, individuais e colectivos, dispendidos no sentido de lhe conseguir brilho e utilidade,

reconhece, no entanto, que o método de trabalho seguido não é talvez o mais próprio para assegurar a reüniões científicas desta natureza plena eficiência de resultados e, por isso,

resolve sugerir à Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências que a organização dos futuros Congressos seja modificada, de acôrdo com as bases seguintes:

Base 1.ª — O Congresso assentará essencialmente no método de trabalho colectivo e planificado, relegando para segundo plano as comunicações expontâneas cujo quadro é, mais propriamente, o das Revistas da especialidade.

Base 2.ª — Conseqüentemente, o Congresso será destinado, em relação a cada um dos ramos da Ciência, ao estudo e debate de questões prèviamente determinadas e escolhidas de entre as julgadas mais importantes para o progresso e orientação do trabalho científico.

Base 3.ª — A Associação, escolhidos os temas do Congresso, dirigir-se-á às entidades competentes, individuais ou colectivas, que elaborarão relatórios e actualizações dos mesmos temas. Êsses trabalhos serão impressos e distribuídos por todos os congressistas com, pelo menos, um mês de antecedência, e servirão de base aos trabalhos do Congresso.

Base 4.ª — Além desta actividade central, poderá haver sessões especiais destinadas à apresentação e discussão de comunicações expontâneas.

A Sociedade Portuguesa de Matemática lembra ainda à Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências os inconvenientes que, para o rendimento da actividade do Congresso resultam do facto de se marcarem, nos mesmos dias e dentro do período útil de trabalho, sessões de estudo e manifestações extra-científicas.

S. P. M. em 10 de Julho de 1942.

O relator *Bento Jesus Caraça*

Os textos destas propostas foram comunicados à Direcção da Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências, aguardando-se ainda a sua resolução sôbre os dois assuntos. *B. C.*

CONGRESSO LUSO-ESPANHOL PARA O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS
PORTO-1942

por A. Pereira Gomes

A actividade científica da Secção de Matemática do Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências pode ser encarada sob muitos aspectos. Interessa-nos fixar a atenção, por um lado, sôbre a sua organização interna; por outro lado, relacionar essa actividade com a vida científica universitária e extra-universitária.

Os trabalhos abriram com o discurso inaugural do Prof. Mira Fernandes que deu em sínteses brilhantes uma visão de conjunto dos «*Aspectos da moderna geometria diferencial*».

Nas sessões seguintes, que se distribuiram por 5 dias, foram apresentadas 22 comunicações, das quais 15 de congressistas portugueses.

Numa apreciação de conjunto (a única que podemos fazer), choca-nos a reduzida comparticipação por parte dos cientistas espanhois, conseqüência, sem dúvida, das circunstâncias do momento pois não podemos acreditar que ela esteja em relação com as possibilidades efectivas da produção científica de Espanha no domínio da Matemática. De resto, San Juan e Sixto Rios afirmaram-se como dois investigadores de grandes recursos.

Ao contrário, pelo que diz respeito à comparticipação portuguesa parece-nos não ser arrojado encarar esta representação no Congresso como uma imagem expressiva do labor de investigação nos nossos meios científicos, no que toca à Matematica.

Uma análise da distribuïção dos trabalhos portugueses pelos respectivos centros universitários revela-nos: que a colaboração do Pôrto é exclusivamente de profesores e assistentes universitários; existência em Lisboa dum núcleo de estudiosos trabalhando ao lado da Universidade e não exercendo, em geral, funções docentes.

Uma nota de interêsse, e que merece por isso destaque especial, foi o aparecimente de um grupo de trabalhos de estatística matemática nas suas relações com a biologia e a economia, domínios de tão grande actualidade e infelizmente tão esquecidos nas secções de Matemática das nossas Universidades.

Estas observações vêm de certo modo confirmar mais uma vez algumas características que tem entre nós a investigação científica.

Sabe-se, com efeito, que nas nossas Universidades a investigação científica tem ocupado um lugar de importância relativa muito restrita. E tem-se mesmo apresentado, julgo que sempre, com um aspecto de esfôrço individual, sem coordenação com o esfôrço alheio e, por isso, sem continuïdade através das gerações. Poderia, se necessário, citar-se exemplos de individualidades marcantes na investigação científica, ou de professores de forte personalidade, mas que não souberam ou não puderam rodear-se de uma colaboração que a sua acção docente ou influente orientasse no sentido de deixar continuadores.

Começam hoje a encarar-se os inconvenientes que para a produção científica portuguesa resultam duma tal situação. E a existência do núcleo a que acima aludi, trabalhando em conjunto e afirmando já uma unidade bem marcada, indica o sentido para que tenderá uma nova orientação.

Pode dizer-se que o ambiente em que decorreram as sessões do congresso foi mais de espectativa e curiosidade do que pròpriamente de trabalho efectivo. Isso deve-se exclusivamente à maneira como essas sessões foram previstas e organizadas. Vale a pena, por isso, fazer alguns reparos e apontar algumas deficiências, que, de resto, já foram devidamente focados pelo Prof. Bento Caraça em sessão da Sociedade Portuguesa de Matemática:

Não se divulgou com antecedência bastante, e o pormenor e critério necessários, a natureza e o conteúdo das comunicações, de forma a permitir aos congressistas uma análise e crítica atentas de cada comunicação — no que residiria, afinal, com a conseqüente troca de ideias, o trabalho mais útil do congresso.

Não houve preocupação de agrupar as comunicações por especialidades, o que manifestamente viria facilitar e coordenar aquele trabalho de análise e crítica a que aludi.

Dado o programa geral em que estavam enquadradas as sessões de trabalhos, estes foram por vezes prejudicados por preocupações de outra ordem.

Não pode também ficar sem referência a nota desconcertante que emprestava às sessões aquela praxe das palavras *sem convicção* que se faziam ouvir no final de cada uma das comunicacões.

Êstes vícios de organização, e as conseqüencias bem manifestas, são tanto mais para lamentar quanto é certo que as personalidades científicas dos Professores Sarmento de Beires e Vicente Gonçalves reünidas, por uma feliz escolha, na presidência da Secção de Matemática, são garantia segura da elevação e inteligência no desenvolvimento destes trabalhos.

Muitas questões se poderiam levantar a propósito da actividade do Congresso, mas que evidentemente não caberiam no âmbito duma breve notícia como esta.

Podemos afirmar que, apesar de tudo quanto se possa apontar de deficiente na sua orientação e organização, o Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências foi, na quási estagnação do nosso meio científico, um acontecimento de relêvo e importância marcantes: dando oportunidade ao conhecimento e convívio de pessoas com tendências e formações intelectuais muito diferentes, mas irmanadas numa preocupação comum, constituiu — muito em especial para os novos — um forte estímulo à sua vontade de trabalhar.

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PÔRTO

Em continuação dos trabalhos do C. E. M. da Universidade do Pôrto, estão previstos desde já, para êste ano lectivo, três séries de lições.

A primeira, pelo Dr. António Monteiro, teve início ainda em Outubro e versará sôbre Funções Contínuas: a noção de função contínua será analisada e caracterizada nas diferentes categorias de espaços topológicos.

Em Janeiro de 1943 terão lugar as lições do Prof. Dr. Mira Fernandes sôbre as modernas tendências do Cálculo Tensorial; nomeadamente a sua contribuïção pessoal e os últimos resultados de Synge e Kawaguchi.

A encerrar o ano lectivo virá ao Pôrto o Prof. Dr. Vicente Gonçalves que fará um curso sôbre a Teoria das Funções.

Começam no dia 10 de Outubro os trabalhos do Seminário de Física Teórica, integrado no C. E. M da Universidade do Pôrto. Estes trabalhos serão orientados pelo Dr. Guido Beck e nêles tomarão uma parte activa os Assistentes Fernandes de Sá (F. C. do Pôrto) e Rodrigues Martins (F. C. de Coimbra).

Na primeira sessão, o Dr. G. Beck traçará o plano dos trabalhos a realizar e iniciará uma exposição sôbre o estado actual do Teoria das Fôrças Nucleares. Numa das sessões seguintes contamos com uma comunicação do Prof. Dr. Mário Silva, da Universidade de Coimbra.

Damos a seguir um esquema do funcionamento dêste Seminário que reünirá todos os sábados, de tarde, num dos anfiteatros da Secção de Matemática.

A) Comunicações sôbre trabalhos de actualidade.

B) Trabalhos a realizar.

1) Trabalhos de investigação.

a) Sôbre a transformação relativa das grandezas quânticas — por Fernandes de Sá.

b) Sôbre a influência da inversão do spin sôbre a difusão dos neutrões pelos núcleos — por Rodrigues Martins

2) Trabalhos bibliográficos:

Uma memória sôbre a teoria quântica dos campos, a publicar por Dr. G. Beck.

Nos próximos números dar-se-ão notícias mais detalhadas sôbre a actividade do Centro.

SÔBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA NA SUÍÇA

I — ESCOLAS SUPERIORES DE ZÜRICH

A ESCOLA POLITÉCNICA FEDERAL

Compilação de publicações oficiais por Maria do Pilar Ribeiro

A Escola Politécnica Federal E. T. H., procura, como escola técnica que é, principalmente nos últimos anos, pelos seus cursos e exercícios relativos às ciências aplicadas, desenvolver o sentido de adaptação dos conhecimentos teóricos às exigências da vida industrial. Procura, além disso, no contacto entre professores e alunos, quer nas aulas de exercícios, quer nos colóquios ou seminários, prepará-los para para um trabalho independente, que a pouco e pouco tomará a forma de trabalho de investigação.

«Uma alta escola técnica deve dedicar-se tanto à investigação científica como ao ensino. As influências recíprocas exercidas pela indústria dum lado e pelas altas escolas técnicas doutro, exigem destas últimas uma elasticidade particular de adaptação às necessidades técnicas e económicas do país e do estrangeiro. O fim essencial da E. T. H. é, actualmente, o desenvolvimento dos seus laboratórios e dos seus institutos de investigação, com o fim de preparar melhor os estudantes para a sua futura actividade».

Para realizar o seu fim, a Escola Politécnica Federal, que é a única escola de altos estudos técnicos federal, está dividida nas 13 secções seguintes:

I — Escola de Arquitectura
II — Escola de Engenharia Civil
III A — Escola de Mecânica
III B — Escola de Electrotecnia
IV — Escola de Química
V — Escola de Farmácia
VI — Escola Florestal
VII — Escola de Agricultura
VIII — Escola de Engenharia rural e Topografia
IX — Escola de Ciências Matemáticas e Físicas
X — Escola de Ciências Naturais
XI — Escola de Ciências Militares
XII — Secção geral de cursos livres — dividida em 2 sub-secções: 1.ª de letras, história, filosofia e ciências económicas; 2.ª de ciências matemáticas, naturais, técnicas e militares.

Esta XII secção tem por fim dar aos alunos uma cultura geral, de modo a evitar uma deformação profissional. Cada aluno, das outras secções, é obrigado a inscrever no seu programa de cada semestre uma hora semanal dêste curso.

Para o ensino nas diferentes secções, há um plano normal de estudo, não obrigatório, mas que dá indicações sôbre o caminho a seguir.

A duração dos cursos é, segundo êste plano, de 7 a 8 $^1/_2$ semestres, compreendendo nêste período as provas de diploma (correspondentes à nossa licenciatura). Estas realizam-se em 3 sessões de exames das quais duas são propedêuticas.

O grau de doutor, pode ser obtido, a seguir, com a apresentação duma tése em que se prove que o candidato está apto para fazer investigações científicas pessoais e depois dum exame especial.

Para a admissão na E. T. H. é necessário ter, pelo menos, 18 anos e ser portador dum certificado de aptidão duma escola secundária, ou ser submetido, na falta dêste, a um exame de admissão. O número de entradas não é limitado.

Em 1929 o corpo docente da E. T. H. era constituido por 70 professores ordinários, 3 professores extraordinários; 23 engenheiros e outros especialistas, 52 encarregados de curso e 97 assistentes. O número dos seus alunos era de cêrca de 2500 e o de auditores de 700.

Além da Biblioteca principal há bibliotecas especiais dos diferentes institutos. A biblioteca principal em 1929 tinha 131.182 volumes, dos quais 16.754 eram de matemática e física.

No mesmo espírito de que «um estabelecimento de instrução superior se não deve limitar ao ensino; é indispensável que êle seja um centro de investigação científica e que sustente materialmente, nos seus estudos, os alunos bem dotados» criaram-se na E. T. H. as seguintes fundações e organizações:

Casa dos estudantes, caixa de auxílio em casos de doença, sanatório e seguros contra acidentes. A par destas fundações são concedidas bôlsas de estudo, além de inúmeros fundos particulares, que não só aumentam o número de bôlsas, como ainda concedem prémios a um elevado número de estudantes.

Para estas fundações contribuem anualmente, não só o Estado, mas, e em grande escala, as mais importantes emprêsas industriais, bancos, companhias, etc.

O ensino na E. T. H. é feito principalmente em alemão, embora nalgumas cadeiras seja simultâneamente em francês e noutras alternadamente.

IX Secção — Escola de Ciências Matemáticas e Físicas

Na Escola de Ciências Matemáticas e Físicas o ensino está organizado de modo a preparar não só professores de ensino secundário, mas também actuários e físicos destinados à indústria.

Os planos de estudo comportam 8 semestres.

Os 4 primeiros semestres são dedicados a adquirir uma técnica indispensável de cálculo. Os exercícios habituam os alunos ao trabalho pessoal desenvolvendo-lhes a iniciativa. De problemas concretos passam, nos seminários, a questões mais vastas e ao estudo e discussão de investigações recentes.

Êste último trabalho tem lugar nos 4 últimos semestres em que os alunos têem liberdade na escôlha das cadeiras, o que lhes permite orientar o seu interêsse por êste ou aquêle ramo da Matemática ou da Física.

O Seminário de Matemática tem por fim iniciar os estudantes no pensamento matemático e na investigação pessoal. Procura atingir êste fim por exposições, feitas pelos alunos, de memórias de Matemáticas e por resolução de problemas e sua discussão com os professores.

Em 1929, a biblioteca do seminário possuia 1.400 volumes e uma colecção de modêlos geométricos.

As obras completas de grandes matemáticos e um número importante de revistas encontram-se à inteira disposição dos alunos.

Damos a seguir um plano de estudos do ensino da Matemática:

1.º semestre

CADEIRAS:	N.º de horas semanais		
	Curso	Ex.	Colóquio
Cálculo diferencial e integral...	6	2	2
Geometria descritiva I e Geometria vectorial	4	4	1
Geometria analítica I e Geometria vectorial	4	4	1
Álgebra linear	3		
Aconselhada:			
Fotografia	2	2	

2.º semestre

Cálculo diferencial e integral II	6	2	2
Geometria descritiva II	2	2	
Mecânica I...	6	2	1
Geometria analítica e Algebra linear	2		
Geometria projectiva...	3	1	
Aconselhada:			
Fotografia		2	

3.º semestre

Aplicações da Matemática	2	2	
Questões escolhidas de Geometria elementar	2		
Geometria diferencial com exercícios	4		
Mecânica II	4	3	1
Física I (Mecânica, teoria ondulatória, óptica)	4	2	
Prática de Física	4		

4.º semestre

Física II	4	1	
Laboratório de Física		4	
Teoria das funções I	4		1
Geometria projectiva	3	1	
Curso superior de Matemática e física:			
Seminário de Matemática		2	

Do 4.º ao 8.º semestre há 56 cadeiras à livre escolha dos alunos dalgumas das quais se dá o plano relativo ao 5.º e 7.º semestre:

Algumas questões de Geometria elementar	2	
Espaços topológicos	4	
Teoria das funções analíticas II com exercícios	4	
Geometria diferencial com exercícios	4	
Teoria do potencial	3	1
Teoria dos conjuntos	3	
Séries trigonométricas e integrais	2	
Seminário de Matemática	2	

etc.

As restantes cadeiras são relativas à Física, Astronomia, Geodesia, Seguros, Didática das Matemáticas, Pedagogia e Filosofia.

Prémios

São instituidos dois prémios para cada uma das secções da Escola. Um de 500 e outro de 1.000 fr. s.

Para a secção de Matemática e Física, as questões agora a prémio são:

1.ª «Novos trabalhos da teoria do potencial de N. Wiener, Ch. J. de la Vallée Poussin, O. Frostman, etc., ampliaram essencialmente os nossos conhecimentos do problema de Dirichlet. Procura investigar-se se, com o auxílio dos métodos aplicados ali, resultados análogos poderão estender-se ao problema de Neumann».

2.ª «A idéia do método das Ciências de Laplace a Poincaré (Estudo crítico)».

O REAL INSTITUTO NACIONAL DE ALTA MATEMÁTICA DE ITÁLIA

por F. Severi

(Abreviado de «Euclides», n.º 20)

Começarei por sintetisar as razões que motivaram a criação dum Instituto original na sua estructura técnica e administrativa e que, depois de dois anos de vida, encontrou com segurança e êxito científico o seu próprio caminho. Resultado considerável porque faltavam modêlos que servissem de norma precisa de organização e acção.

Com efeito, cada uma das instituïções similares estrangeiras, tendo sido concebida de modo diferente da nossa, não podia oferecer orientações com a sua própria experiência.

Que a instituïção possui características de originalidade quási completa demonstra-o o interêsse com que foi acolhida e com que é hoje seguida, mesmo nas difíceis circunstâncias internacionais presentes, por parte dos centros estrangeiros de matemática.

*

As razões pelas quais surgiu o Instituto podem resumir-se do modo seguinte:

Primeira. A Universidade foi durante séculos, e de maneira especial entre nós, onde possui as tradições mais antigas e gloriosas, o grande organismo unificador e propulsor do progresso científico; mas, hoje em dia, a Universidade não pode, por si só, realizar essa alta missão.

Segunda. Embora a parte já formada da Ciência possa continuar dando, e por muito tempo, ajudas e directrizes valiosas às aplicações, o entorpecimento do progresso científico e a esterelização das mais elevadas fontes do saber determinariam num prazo mais ou menos longo a interrupção fatal das aplicações e do nível do rendimento produtivo.

Terceira. A ciência, para progredir, necessita que a cultivem não só em relação às aplicações, mas também como investigação desinteressada, animada por alentos de poesia e calor de fé, ao lado e além da razão prática.

Destas premissas decorrem alguns corolários importantes.

É necessário, antes de mais nada, criar Institutos destinados à investigação pura, a contribuir para a obra de proselitismo científico e a afirmar, mesmo no estrangeiro, os valores da ciência nacional, coadjuvando nesta direcção tão importante a obra das entidades universitárias.

É necessário, em segundo lugar, que estes Institutos, que têm de desempenhar com grande agilidade funções sem relação alguma com a rigidez das normas a que está subordinada a instrução profissional, sejam constituídos como pessoas jurídico-administrativas autónomas; muito embora ainda ligadas de certa maneira à Universidade, guarda das gloriosas tradições do nosso pensamento e vivificada por explosões sempre renovadas de juventude italiana.

É necessário, por fim, que a investigação pura, dominada pelo princípio da superior harmonia estética e filosófica que regula o seu desenvolvimento, alie nos referidos Institutos a visão teòricamente elevada de problemas de aplicação e o estudo e o afinamento dos meios aptos para a sua resolução, segundo o princípio de *Leonardo* de que a boa prática tem de edificar-se sôbre a teoria e que a própria experiência é filha da sabedoria.

Concluindo, estes Institutos têm de constituir, além disso, o traço de união entre o progresso científico e a técnica da aplicação, entre a Universidade, considerada essencialmente na sua função científica, e o Conselho Nacional de Investigações.

Depois da feliz experiência, do nosso Instituto convirá, por conseqüência, pensar em Institutos análogos para os outros ramos da ciência.

*

A técnica mediante a qual se puzeram em prática estes princípios tem reduzido interêsse num artigo de carácter geral, como êste.

Direi ùnicamente que os objectivos fundamentais do Instituto são: o progresso dos ramos em formação da matemática; a coordenação do movimento matemático nacional e estrangeiro e a organização duma bibliografia em dia do movimento matemático mundial; a difusão das directrizes mais importantes do pensamento matemático nacional; a união entre as investigações de alta matemática e as ciências laterais; e a colaboração com o Instituto Nacional de Aplicações do Cálculo, do Conselho Nacional de Investigações.

Cursos de carácter post-universitários; ciclos de conferências de homens de ciência italianos e estrangeiros; relatos bibliográficos; publicação de monografias sôbre os mais recentes objectivos de estudo; discussões sôbre temas de investigação entre professores e alunos do Instituto; tais são os aspectos principais da actividade do novo organismo científico.

Desejo, todavia, pôr em relêvo alguns aspectos da nossa organização.

O Instituto escolhe por si mesmo os seus discípulos investigadores entre os que possuem as aptidões e a maturidade necessárias e que pretendam dedicar-se à investigação. Não se lhes pede contribuïção alguma. Pelo contrário, recebem gratuïtamente as publicações do Instituto e, especialmente, as entregas correspondentes aos cursos, à medida da sua publicação. Concedem-se bôlsas a italianos e a estrangeiros, duma maneira substancial e rápida, sem complicadas formalidades burocráticas.

Não há exames, nem diplomas; mas ensaios permanentes das aptidões dos alunos, aos quais se pede sòmente que se familiarizem com o uso do maior número de instrumentos de investigação e que levem a cabo investigações científicas, cujos resultados, publicados em revistas de matemáticas italianas ou estrangeiras, ou em memórias académicas, constituïrão depois o único documento comprovativo da sua permanência activa no Instituto; título que redundará em honra dos discípulos e dos mestres e contribuirá, em maior ou menor medida, para o progresso da ciência.

*

Em cada um dos dois anos de vida do Instituto tivemos uns trinta discípulos, dedicados aos diferentes ramos da investigação matemática; no primeiro ano meia dúzia de bolseiros italianos e no segundo uma dezena de bolseiros italianos e estrangeiros.

Os «Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni», publicados pelo Instituto de Alta Matemática de colaboração com o Instituto Matemático da Universidade de Roma documentam uma parte da nossa actividade.

Quem examine a relação e os programas dos cursos realizados até agora e dos que serão realizados no próximo biénio encontra, amplamente representadas, estudadas e discutidas, um grande número das teorias mais vivas e vitais da matemática e das suas aplicações mais palpitantes.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

CLUBES DE MATEMÁTICA

A campanha iniciada pela «Gazeta de Matemática», destinada a promover a fundação de núcleos de estudo da matemática nas nossas universidades, tomou, desde o seu início, um aspecto dos mais satisfatórios pelo interêsse que prontamente se manifestou à volta desta iniciativa e pelas decisões que, em pouco tempo, foram tomadas por vários grupos de alunos das escolas superiores.

No último número da «Gazeta» deu-se a notícia da fundação do primeiro clube de matemática português na Faculdade de Letras de Lisboa. No presente número damos a notícia do surgimento de mais dois clubes, um no Instituto Superior de Agronomia, outro na Faculdade de Ciências de Lisboa, e transcrevemos as comunicações feitas à «Gazeta de Matemática» pelos delegados dos respectivos clubes.

Existem pois, actualmente, três clubes de matemática nas escolas superiores de Lisboa. É um resultado importante atendendo ao pouco tempo decorrido desde a fundação do 1.º clube e atendendo ainda ao papel que os clubes de matemática devem desempenhar dentro das respectivas escolas.

No Pôrto, há também um movimento destinado à fundação de clubes nesta cidade, sôbre que serão dadas notícias oportunamente. A «Gazeta de Matemática» tem, além disso, delegados seus no Instituto Superior Técnico e na Faculdade de Medicina de Lisboa que se ocupam do problema dos clubes nestas duas escolas, sendo pois natural que, dentro de pouco tempo, haja mais dois clubes de Matemática em Lisboa.

A «Gazeta de Matemática» põe as suas páginas à disposição de todos os clubes e incita vivamente todos os estudantes de matemática a que não se limitem a pertencer aos clubes mas metam ombros, desde já, ao trabalho dentro da organização geral do clube a que pertencem.

Guida Lami

NOTICIÁRIO

Clube de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa

Um grupo de alunos da F. C. L., reconhecendo a necessidade da criação dum Clube de Matemática na sua Faculdade, apresentou, ao seu Director, prof. Vítor Hugo de Lemos, um pedido para a necessária autorização, acompanhado dum projecto do trabalho a realizar no ano lectivo de 1942-43.

O Director da Faculdade mostrou-se interessado pela iniciativa e não só prometeu todo o auxílio como também autorizou os trabalhos preparatórios do Clube até se obter do Conselho Escolar a autorização definitiva.

O projecto que acompanhava o pedido tem como objectivo fundamental o aumento da cultura matemática, do interêsse por esta ciência e a melhoria das relações entre os alunos da Faculdade.

Procura-se para isso:

1) — Realizar palestras, por professores e alunos sôbre:

a) A História e Filosofia da Matemática;

b) A Relação da Matemática com as outras ciências;

c) A Vida dos matemáticos ilustres;

d) Outros assuntos estreitamente relacionados com a Matemática.

2) Criar uma biblioteca.

3) Colaborar com:

a) Os Núcleos de Investigação da Escola;
b) Outros Clubes;
c) A «Gazeta de Matemática»;

4) Organisar:

a) Concursos e outras competições;
b) Bibliografias;
c) Selecções de curiosidades matemáticas;

5) Publicar:

a) Comunicações julgadas de interêsse geral;
b) Noticiário sôbre a actividade do Clube;

6) Cobrar de todos os sócios uma cota mensal mínima de 1$50;

Se bem que ainda se aguarde a autorização do Conselho Escolar da Faculdade, procurou-se já dar início ao programa estabelecido.

Convidaram-se, para isso, os Srs. Professores Vítor Hugo de Lemos, Director da Faculdade, e Ramos e Costa a realisar palestras da série que se pretende levar a efeito.

Alguns alunos estão também preparando subseqüentes conferências.

Espera-se, finalmente, que o reatamento dos trabalhos escolares venha permitir uma rápida evolução da vida do Clube.

Clube de Matemática do Instituto Superior de Agronomia

Tendo chegado ao conhecimento dum grupo de alunos do I. S. A. o artigo do Prof. António Monteiro sôbre «Clubes de Matemática» publicado no n.º 11 da «Gazeta de Matemática» e considerada de real interêsse a existência duma agremiação dessa natureza na sua Escola, foi resolvido que se realizasse uma reünião onde fôsse proposta a fundação do «Clube de Matemática do I. S. A.»

Efectuada essa reünião no dia 14 de Julho, com a autorização do Director do Instituto, Prof. Boaventura de Azevedo, e da direcção da Associação dos Estudantes de Agronomia, foi a proposta aprovada e apresentado o seguinte plano de trabalhos:

I — Estudo das questões matemáticas versadas nas aulas.

A par e passo que o programa das cadeiras de Matemáticas fôsse sendo dado, aquêles assuntos julgados merecedores de tratamento mais profundo seriam discutidos nas reüniões do Clube, procurando-se sempre que fôsse necessário e possível que um aluno do Instituto ou não, ou qualquer outra pessoa considerada idónea, se encarregasse de os estudar e fazer as preleções julgadas suficientes para a sua perfeita compreensão.

II — Estudo de assuntos matemáticos intimamente ligados à índole dos cursos versados no I. S. A. que, por qualquer razão, não sejam dados nas diversas cadeiras.

Será dada especial atenção ao Cálculo de Probabilidades, à Biometria, ao Cálculo de Fisher, ao cálculo gráfico, à construção de ábacos, réguas de cálculo, etc. Proceder-se-á à organização duma biblioteca especializada.

III — Aplicação dos conhecimentos de matemática a questões técnicas.

Os estudos de matemática serão orientados de modo que os conhecimentos adquiridos possam ser aplicados imediatamente às questões de carácter técnico que os licenciados pelo Instituto tenham que resolver na sua vida profissional. Para isso procurar-se-á entregar ao «Clube de Matemática» a preparação e discusão de carácter matemático das diversas experiências que se realizam nos laboratórios e campos experimentais do Instituto para dar aos associados, futuros técnicos, mais um instrumento que possam manejar com a maior segurança.

IV — Relações com outros «Clubes» e com a «Gazeta de Matemática».

Procurar-se-á estabelecer um intenso intercâmbio entre os diversos «Clubes de Matemática». Aquelas reüniões que possam interessar mais de uma agremiação poderão ser comuns aos vários «Clubes» interessados. Sempre que se tiver de realizar qualquer trabalho que ultrapasse o âmbito da Escola procurar-se-á interessar os outros «Clubes» de modo a conseguir-se uma colaboração a mais eficiente possível.

A «Gazeta de Matemática» servirá de intermediária entre os diversos «Clubes». Ser-lhe-á fornecida a lista das obras adquiridas pelo «Clube de Matemática do I. S. A.» e todos os trabalhos realizados sôbre o patrocínio do «Clube» e que possam interessar as outras agremiações.

Êste plano de trabalhos deve ser discutido e modificado, onde for julgado necessário, numa próxima reünião a efectuar-se em Novembro, sendo então aprovados os estatutos do «Clube» e eleita a direcção. Com carácter provisório, foram encarregados os alunos Ário Lôbo Azevedo, Artur Rocha de Medina, Camilo Lemos de Mendonça e Mário Rodrigues de Carvalho dos trabalhos da direcção do «Clube», de reünir e criticar as diferentes sugestões que apareçam.

O «Clube de Matemática» funcionará como um organismo autónomo dentro da «Associação de Estudantes de Agronomia» sendo as relações entre as duas agremiações feitas através dum delegado da «Associação» junto do «Clube».

ÚLTIMA HORA

Clube de Matemática do Instituto Superior Técnico

Acaba de ser fundado o «Clube de Matemática dos Alunos do Instituto Superior Técnico».

Numa reünião efectuada em 20 de Outubro de 1942, um grupo de alunos do I. S. T. tomou a iniciativa da fundação nêste Instituto dum núcleo de estudos de matemática cuja necessidade é considerada grande, e propõe-se desde já iniciar o ano escolar com um programa de trabalhos que inclue o estudo de matemáticas aplicadas aos diversos ramos da engenharia, a organização de palestras e cursos por professores e alunos sôbre assuntos de interêsse geral e particular, a aquisição de livros e revistas que formarão a biblioteca do clube, intercâmbio com outros clubes por meio de concursos, reüniões, etc., e, duma maneira geral, o estudo de todos os assuntos que contribuam para aumentar a cultura matemática dos futuros engenheiros.

Foi eleita uma direcção composta por três membros, que está encarregada de elaborar os estatutos do clube. Esses estatutos, numa próxima reünião, devem ser estudados e aprovados por uma mêsa directiva composta pelos sócios fundadores do clube.

A mesma mêsa directiva elegeu já uma comissão de cinco membros cujo trabalho imediato será proceder a um inquérito junto dos professores do I. S. T. sôbre quais devem ser os assuntos matemáticos, interessando cada uma das especialidades, que devem ser mais urgentemente começados a estudar pelos membros do clube. Os alunos do curso geral do I. S. T. serão também encarregados de indagar junto dos professores quais os assuntos de matemáticas elementares não incluidos nos programas que devem estudar.

A mêsa directiva projectou ainda que sejam estudados por quem se interessar certos assuntos de pedagogia matemática como, por exemplo, a importância do cinema no ensino da matemática, etc.

O clube de matemática do I. S. T. é uma das actividade da Associação dos Estudantes e faz parte integrante dela, dispondo assim dos recursos materiais que a mesma Associação lhe fornece, como dinheiro, livros, revistas, etc. Todos os alunos do I. S. T. podem ser sócios do clube de matemática, desde o momento que se inscrevam como tal.

Os sócios do clube não têm de pagar qualquer espécie de cota.

Os estatutos do clube, uma vez elaborados, serão apresentados ao Director do I. S. T., e o clube começará os seus trabalhos o mais depressa possível.

LIVROS PARA CLUBES DE MATEMÁTICA

Esta lista continua nos números seguintes da Gazeta

Da colecção «Que sais-je?», editada por «Presses Universitaires de France» — Paris:

17) *M. Boll — Les certitudes du hasard.*

18) *P. Rousseau — L'astronomie sans teléscope.*

19) *P. Devana — Automates et automatismes.*

20) *P. Couderc — La Relativité.*

21) *M. Boll — Les étapes des mathématiques.*

22) *M. Boll — L'exploitation du hasard.*

23) *M. Fauque — Les assurances.*

Preço de cada volume desta colecção 15 fr.

24) *Marcel Boll—La chance et les jeux de Hasard.* Librairie Larousse, Paris, preço 28,50 frs.

25) *M. Boll — Le Mystère des nombres et des formes.* Lib. Larrousse. Paris.

26) *M. Boll* e *G. Urbain — La Science, ses progrès, ses aplications.* 2 vols. Libr. Larousse. Paris.

27) *M. Boll — Les deux infinis.* Libr. Larousse. Paris.

28) *G. Boucheny— Curiosités & Récréations Mathématiques.* Lib. Larousse. Paris. Preço 20 fr.

29) *H. Wieleitner — Historia de La Matematica.* Coleccion Labor. Seccion XI — n.º 138 — 1939. Editorial Labor, S. A. — Barcelona — Buenos Aires.

30) *A. Rebière — Pages choisies des Savants Modernes.* Lib. Vuibert. Paris.

31) *A. Rebière—Mathématiques et Mathématiciens.* Lib. Vuibert. Paris. Preço 10 frs.

32) *A. Rebière — La vie et Les travaux des savants Modernes.* Lib. Vuibert. Paris. Preço 10 frs.

33) *Hermann Schubert — Mathematical essays and Recreations* tradução de J. Mc. Cormack. The Open Court Publishing Company Chicago — London: Kegan Paul, Trench, Teubner & C.º — 1898.

34) *C. A. Laisant — Initiation Mathématique.* Lib. Hachette & C.º Paris 1909. Existe uma tradução portuguesa editada pela Livraria Editora Guimarães & C.ª. Lisboa.

35) *F. Gomes Teixeira — História das Matemáticas em Portugal.* Academia das Ciências de Lisboa. Lisboa 1934.

36) *F. Gomes Teixeira— Panegíricos e Conferências.* Academia das Ciências de Lisboa. Coimbra. Imprensa da Universidade. 1925.

ANTOLOGIA

SÒBRE AS CIÊNCIAS E A TÉCNICA

por Henri Mineur

(duma conferência realizada em Paris)

São múltiplas as ligações da ciência e da técnica. A ciência tem um objectivo técnico num certo número de casos mas sempre de início ou quando dum renascimento. A astronomia egípcia é o resultado das circunstâncias materiais da vida humana no vale do Nilo; o renascimento da astronomia no século XVI é o resultado da economia nesta época.

A técnica, pelo contrário, tem por vezes o seu objectivo fixado pela ciência que procura auxiliar e isto acontece sempre que a ciência adquiriu um desenvolvimento suficiente para ter a sua vida própria sem ter um fim técnico definido. É o caso da mecânica de precisão e da fabricação das superfícies ópticas.

Entre estes extremos encontram-se todos os casos intermédios. Capítulos há da ciência com um objectivo técnico preciso no passado e para os quais êsse objectivo se tornou mais vago e mais longínquo, como a Mecânica Celeste. Encontramos também capítulos da ciência que não actuam senão indirectamente sôbre a técnica por intermédio de outros domínios da ciência, como acontece com alguns capítulos da astrofísica. Outros capítulos da ciência que tiveram determinado objectivo técnico perderam-no substituindo-o por um outro como acontece com o problema das longitudes.

Em suma, um impulso inicial é dado pela técnica à ciência e desde que esta adquiriu desenvolvimento assistimos a reações múltiplas, mais ou menos complexas entre a ciência e a técnica.

Notam-se domínios da ciência que não têm objectivo utilitário nem longínquo nem próximo mas que o têm filosófico: o de dar uma explicação total do universo.

Isto faz-nos compreender porque tôdas as ciências estão ligadas e quanto a história das ciências é complexa, visto que os resultados dumas actuam sôbre as outras e estamos habituados a ver investigações desinteressadas de comêço darem origem a resultados práticos da mais alta importância no fim de alguns séculos; tal é o caso da electricidade.

Não só as ciências estão intimamente ligadas entre si em cada instante como reagem umas sôbre as outras no tempo; os trabalhos de mecânica estatística dos gazes do século XIX, por exemplo, sofreram a influência dos trabalhos astronómicos do século XVII.

Vemos também a estrutura social e as tendências filosóficas de cada época influir duma maneira considerável na investigação científica estimulando-a ou procurando asfixiá-la ou canalisá-la, ao mesmo tempo que observamos os resultados da ciência levar o homem a modificar a sua concepção filosófica do universo.

Estamos em presença dum complexo de fenómenos que actuam uns sôbre os outros e onde se torna muitas vezes impossível destacar as relações simples de causa e efeito. Pode precisar-se esta íntima ligação da ciência, da técnica e da vida social tentando responder à seguinte questão: ¿Pode imaginar-se a história da ciência, a da técnica e a da sociedade idênticas ao que já foram mas desfasadas no tempo, isto pelo menos em certos domínios? Penso que um tal desfasamento não pode exceder senão poucos anos e convencer-nos-emos disto fàcilmente estudando cada caso particular.

Tal diminui muito o papel dos génios na ciência e creio que cada sociedade tem os sábios e a ciência que deve ter; numa colectividade tão numerosa, como a humanidade, uma descoberta encontra sempre um autor quando as circunstâncias científicas, económicas e sociais são favoráveis.

De resto, o trabalho de um sábio é função do trabalho dos seus pioneiros e dos seus contemporâneos. A ciência só se faz colectivamente; as investigações dum trabalhador distinguem-se mal, a maioria das vezes, das dos que o acompanham no espaço e no tempo; quando uma tal distinção é possível não é muitas vezes mais do que uma ilusão.

Além disso, para trabalhar, o sábio deve ter um objectivo e, ainda que o não distinga, não é menos verdade que êle trabalha porque atribui um valor ao seu trabalho; ora, o que constitui o valor da ciência para o sábio é o seu carácter colectivo porque tôda a ciência constitui um edifício que cada sábio construiu com os que o precederam e com os seus contemporâneos e ao qual não trouxe mais do que uma pedra. Não se fantasia finalmente um sábio trabalhando numa ilha deserta e sabendo que o seu trabalho não será continuado.

Este carácter colectivo da ciência mostra-nos porque, apesar das aparências, ela forma um todo com a vida técnica, social e filosófica da humanidade e esta é a causa por que não se pode separar a ciência dos outros domínios da actividade humana.

Tradução de M. ZALUAR.

«EPPUR SI MUOVE!»

[TODAVIA, MOVE-SE!]

por Gino Loria

Segundo voz que corre mundo há séculos e que provém de qualquer anónimo contemporâneo de *Galileo*, êste gigante, uma vez assinada a abjuração, teria gritado de cabeça erguida, na presença dos seus juízes: «Eppur si muove!». Trata-se de uma lenda criada, ou por um admirador de *Galileo* para demonstrar a firmeza das suas opiniões científicas, ou por qualquer detractor para apresentá-lo como perjuro [1]; mas, trata-se, certamente, de pura invenção, sendo inadmissível que êle, no estado de ânimo resultante dos interrogatórios e da abjuração e nas suas deploráveis condições de saúde, tenha podido dar uma prova de coragem verdadeiramente leonina. Se êle tivesse pronunciado aquelas tremendas palavras, uma nova pira ter-se-ia acendido em *Campo dei Fiori*, *Giordano Bruno* teria contado com um grande partidário e uma nova página teria sido escrita para a história dos mártires da liberdade do pensamento.

Todavia, a humanidade, ao aceitar sem duvidar da autenticidade e ao divulgar aquele episódio piedoso, acreditou e quiz afirmar que não existe fôrça humana, nem a que emana dum tribunal a sentenciar em nome de deus, capaz de arrancar do ânimo dum verdadeiro homem de ciência uma convicção amadurecida depois de demorados estudos e reiteradas experiências.

E que em *Galileo* tenha permanecido inabalável a confiança na doutrina copernicana demonstram, de forma a não admitir contestação, as seguintes palavras por êle escritas nas margens dum exemplar do famoso *Dialogo* [2]:

«Sôbre a introdução de novidades.

«¿Quem duvida que a nova introdução de querer que os intelectos, criados livres por deus, se tornem escravos da vontade de outrem, não seja causadora de escândalos gravíssimos?

«¿E o querer que outros neguem os próprios sentidos e os posterguem ao arbítrio dêles?

«¿E o admitir que pessoas ignorantíssimas duma ciência ou arte sejam juízes dos inteligentes, e que pela autoridade concedida, tenham poderes para a dirigir a seu modo?

«Estas são as novidades capazes de arruïnar as repúblicas e subverter os estados.

«Prudentes, teólogos, que querendo fazer matéria de fé das proposições referentes ao movimento ou à imobilidade do sol e da terra, vos expondes ao perigo de ter, por fôrça do tempo, de condenar como heréticos os que afirmam estar a terra imóvel e mover-se, de há muito, o sol: com o tempo, digo, quando sensata e necessàriamente vos fôr demonstrado, o movimento da terra e a imobilidade do sol».

E, isto é afirmar muito mais do que exclamar: «Eppur si muove!». (de «Galileo Galilei»)

---

[1] O leitor desejoso de pormenores sôbre a origem desta lenda, encontrá-los-à nos artigos: *G. Berthold, «Eppur si muove»*, (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 42 Jahg. 1897, Hist. lit. Absh. p. 5 e Bibl. mathem. Nouv. Sés. T. XI, 1897, p. 57); *A. Favaro, Alla ricerca delle origine di «Eppur si muove»* (Atti del R. Ist. Ven., T. LXX, 1919-11). Limitamo-nos aqui a notar que, apesar de repetidas e cuidadosas investigações não se chegou, contudo, a uma conclusão definitiva acêrca da célebre frase; a sua citação mais antiga encontrar-se-ia num quadro flamengo de autor desconhecido, mas dos meados do século XVII, quadro que teria constituido uma antecipação do muito conhecido quadro de *Nicoló Barabino*.

[2] «Dialogo di Galileo Galilei Linceo, matematico sopraordinario dello studio di Pisa, e filosofo e matematico primario del Serenissimo Gr. Duca di Toscana, dove ne i congressi di quatro giornate si discorre sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico e copernicano, proponendo indeterminatamente le ragioni filosofiche e naturalitanto per l'una quanto per l'altra parte».

Tradução de A. SÀ DA COSTA.

BOM SENSO E RACIONALISMO CIENTÍFICO

por P. Couderc

(de «La Relativité», Col. «Que sait-je?»)

Para abordar o exame das idéias novas com a permeabilidade necessária, para ter perante o veredicto da experiência a docilidade conveniente, pensemos nas derrotas mais famosas do bom senso. Vejamos se esta «puissance de bien juger et distinguer le vrai d'avec le faux» como diz *Descartes*, é um guia suficiente no estudo da natureza.

a) A observação corrente mostra a Terra plana, com irregularidades locais de relêvo. Às primeiras concepções da sua *esfericidade*, pelo século IV a. C., o bom senso dos Antigos replica que não se pode caminhar de cabeça para baixo e nega a existência dos antípodas.

b) Alguns séculos mais tarde, a esfericidade da Terra é aceita; a Terra é uma esfera que se sabe já medir. Mas, o bom senso afasta com espanto a sua *rotação* sôbre si mesma, que alguns filósofos encaram. Nós bem vemos que está imóvel, se não sentiríamos bem a trepidação da máquina! Um astrónomo eminente — *Ptolomeu* — rejeita a rotação com um argumento de bom senso um pouco mais elevado: «Uma roda que gira, escreve êle, possue uma fôrça centrífuga tanto mais intensa quanto maior fôr a velocidade; se a Terra girasse em 24 horas, como alguns propõem, os pontos do seu equador teriam uma velocidade fantástica (1) e os seres, as casas, as pedras, as águas, seriam lançados nos ares; o próprio solo voaria em estilhaços (2).»

c) A Terra gira em tôrno do Sol num ano. Desde o ano 270 a. C., *Aristarco de Samos* admite êste movimento de translação. Mas, a imobilidade da Terra, o «fogo» das suas profundezas e a necessidade da sua posição central no Universo eram para os Gregos dogmas filosóficos ou religiosos. Lê-se em *Plutarco*: «*Cleanto* o estóico pretendia que *Aristarco* fôsse processado por ter proposto, à custa duma profanação sacrílega, a deslocação do fôgo do Mundo».

Dezóito séculos mais tarde, *Copernico* ressuscita a teoria de *Aristarco*: o seu livro é incluído no Index *(«donec corrigatur!»)*; a seguir é a famosa condenação de *Galileo*, por ter defendido a heresia do movimento da Terra, é *Descartes* a destruir para sempre a sua Física ao saber destas perseguições: tantas perdas a imputar a uma fé cega nas aparências.

d) Como o bom senso, enfim, enganou a humanidade sôbre os princípios da Mecânica! O senso comum ensinou aos Antigos que um movimento não mantido se interrompe e que o movimento *natural* dos astros é circular. Estes dois erros iniciais reduziram a nada os esforços dos Gregos para edificar uma Mecânica; 2.000 anos decorreram até que *Galileo* e *Descartes* descobrissem a lei da inércia: um movimento não perturbado persiste indefinidamente rectilíneo.

Haverá alguma coisa mais revoltante para o bom senso que êste princípio da inércia? Todavia, sem êle não teria podido surgir a dinâmica.

Assim, o bom senso de ontém não será amanhã mais do que cegamente obstinado: desconfiemos do guia que tanto prejudicou a ciência. A História mostra que as aparências são falaciosas e que a razão humana, por si só, é incapaz de descobrir a verdade. As discussões escolásticas que esterilizaram a Idade Média são exemplos dos desvios da razão quando ela trabalha em falso, sem mergulhar no real.

O verdadeiro guia, o racionalismo científico, cujo mérito se mede pelo progresso acelerado das ciências, reside na aplicação do método experimental, no qual a experiência e a razão se apoiam mútuamente

(1) 450 metros por segundo.

(2) Foi preciso esperar pelo ano de 1669 para que êste paradoxo desaparecesse perante uma interpretação correcta. *Huygens* mostrou que a fôrça centrífuga tem por expressão v^2/r. No caso da Terra r é tão grande que êste quociente é quási nulo.

Tradução de A. SA DA COSTA.

MENTALIDADE MATEMÁTICA

por Federigo Enriques

(de «Le Matematiche nella storia e nella cultura»)

Para compreender bem o lugar correspondente na cultura às Matemáticas e aos matemáticos, não pode prescindir-se da análise dalguns problemas psicológicos.

Antes de tudo, ¿que coisa distingue a mentalidade do matemático?

Segundo a observação comum, os rapazes que, na escola, mostram um certo talento para as matemáticas não são sempre os mais inteligentes; são tímidos, embaraçados, concentrados, por nada se interessam além dos seus cálculos e das suas figuras. Então, os camaradas apelam de boa vontade para o antigo adágio «*mathematicus purus, purus asinus*». Em substância, o juízo pode atribuir-se a *Aristóteles*: «um homem estúpido — diz êle — pode ser um excelente geómetra, como sucede com *Hipócrates de Chio*, que, sendo comerciante, perdeu o seu dinheiro por inaptidão e estultícia, deixando-se defraudar pelos cobradores da alfândega de Bisâncio».

Esta tendência para considerar a matemática uma faculdade independente das outras atitudes do intelecto (e também a nossa ciência um compartimento isolado, como a música), é valorizada pela constatação de brilhantes qualidades de engenho em homens que se reconhecem e confessam incapazes de compreender a mais simples verdade matemática, a demonstração dum teorema ou duma fórmula assaz elementar. Mas, os juízos da opinião comum sôbre esta matéria não podem aceitar-se sem crítica.

Em primeiro lugar, os rapazes que, como se disse, parecem dotados dum exclusivo talento matemático e negações para qualquer outro estudo, não é de crer que cheguem a ser matemáticos de algum mérito. Se se examinarem exemplos mais conhecidos, o engenho matemático em grau um pouco elevado, pode apresentar lacunas e, por vezes, aspectos bizarros, mas requere um conjunto de qualidades que conferem ao possuidor uma grande versatilidade, além da aptidão para aprofundar os mais diversos campos do conhecimento. Não há testemunhos para verificar ou contestar o que *Aristóteles* disse de *Hipócrates de Chio* (embora a distracção ou inaptidão de quem se deixa defraudar revele antes um defeito de inteligência prática em lugar duma não inteligência em geral), mas, entre os matemáticos célebres da história, encontram-se alguns dos melhores talentos da humanidade: homens que, não só conseguem dominar outros ramos da ciência teórica ou possuir uma técnica, mas também são, simultâneamente, filósofos, juristas, médicos, artistas, escritores de estilo maravilhoso como *Galileo* e *Pascal*, por vezes até poetas.

As disposições práticas repartem-se desigualmente entre os matemáticos. Na antiguidade muitos ocuparam cargos políticos nas suas cidades, como *Archita di Taranto*, que foi sete vezes estratega e chefe do govêrno de Taranto. *Napoleão*, que estimava as matemáticas e dizia que «o seu estudo está intimamente ligado com a prosperidade do estado», nomeou para o govêrno *Laplace*, mas, poucos dias depois, demitia o seu ministro com esta observação: «cet homme portait dans les affaires publiques l'esprit des infiniments petits». Todavia, não deveriam perder-se, igualmente, nas minúcias *Monge* e *Carnot*. O primeiro é o fundador da Escola Politécnica de Paris, inspirada no mais alto sentido prático, que tem dado à França os seus estrategas e alguns dos seus mais célebres matemáticos, um organismo de estudos que deixa ainda a sua marca na formação espiritual de todo o país. O outro, o altivo jacobino da Convenção Nacional, é o *organizador da vitória*, que nas horas mais trágicas da Revolução Francesa salvou a nação da invasão do estrangeiro.

Também a ostentada incompreensão total da matemática por parte de homens inteligentes deve ser posta em dúvida. Na maioria dos casos, trata-se duma antipatia que afasta dêste estudo jovens cujo interêsse se não soube despertar; e a responsabilidade cabe ao professor. Proponha-se a um ignorante em geometria que duplique um quadrado: possìvelmente êle, como o escravo do *Menone* platónico, será levado, em primeiro lugar, a duplicar o lado; um sentido de falsa analogia a induz em êrro. Mas, corrigir-se-á logo que lhe seja mostrada a figura do quadrado de lado duplo decomposta em quatro quadrados. Anàlogamente, compreenderá fàcilmente o significado geométrico da identidade

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab.$$

Contudo, se esta lhe fôr apresentada como expressão abstracta dum cálculo algébrico, deve esperar-se que ela desperte a sua repugnância: na verdade é preciso explicar com cuidado ao principiante o que significam os símbolos a e b, isto é, como são substituidos por números arbitrários e, depois, compreender a lei distributiva do produto em relação à soma. Enfim, a referida fórmula, para ser compreendida e assimilada, exige uma preparação não muito curta do aluno, feita com senso pedagógico; na falta desta, se a fórmula é comunicada por um simples repetidor, como uma regra mecânica, suscitará rebeliões não de todo injustificadas, que surgem naturalmente no nosso espírito contra o uso duma língua estrangeira desconhecida.

Resta, de qualquer maneira, um pequeno número de espíritos aos quais repugna totalmente a disciplina lógica da dedução matemática, que são de facto incapazes de seguir um raciocínio abstracto ou de impedir os movimentos efectivos das associações psicológicas, atentando na própria abstracção. São os que no *homo œconomicus* de *Adam Smith* vêem, não o tipo de relações económicas, mas um monstro privado dos sentimentos mais humanos de «pai», de «irmão» ou de «cidadão», a pôr à margem da humanidade. Ou, aquêles que vêem na hipótese, de que parte um raciocínio de redução ao absurdo, uma «concessão» que se faz ao adversário. São homens, inaptos para todo o trabalho pròpriamente científico, aos quais falta a faculdade elementar da lógica, no sentido estricto da palavra, e que, inferiorizados não se vangloriam decerto das suas deficiencias. Não se exclui, todavia, que entre êsses surjam tipos de excepção, extraindo o vigor da sua própria afectividade indisciplinada, que comunicam muitas vezes à sua arte ou à sua personalidade, nas relações com os outros homens. Até há nesta categoria génios filosóficos, como *Hegel* (tão pobre inteligência, no sentido estricto do têrmo por êle próprio definido!), mas de tal ninguém deve admirar-se, porque os filósofos não devem tomar-se como uma espécie de santos do pensamento, exemplos do bem raciocinar, mas, pelo contrário como representantes de diversas atitudes do espírito, que muitas vezes, são chamados a exprimir na sua pureza e até como paradoxo: então não é o equilíbrio das diferentes faculdades, mas a proeminência característica dada a alguns motivos e, por isso, o aspecto unilateral da sua inteligência, pelo qual influem sôbre as idéias correntes, que lhes confere uma importância histórica particular.

A grandeza dêstes homens não afecta, em qualquer caso, o juízo sôbre o que falta à sua inteligência: do ponto de vista fisiológico são, igualmente, deficiências que, em circunstâncias especiais, são largamente compensadas, mas, nem por isso, deixam de ser deficiências efectivas.

Entre os espíritos avessos, dêste modo, à compreensão científica, pode recordar-se o grande romântico histórico *Carlyle* que considerava ridículo que alguém pudesse ocupar-se da velocidade de deslocamento dum glaciar. *C. Darwin*, que com êle estava ligado pela amizade do irmão *Erasmo*, dizia: «Por quanto posso julgar, nunca encontrei um homem cujo espírito seja tão pouco dado à investigação científica» e, acrescentava, «as suas descrições são vivas: ¿são também exactas?»

Como acontece habitualmente com as coisas humanas, o que é capaz de suscitar os maiores entusiasmos provoca também, naturalmente, o ódio e o desprêzo dos que não sabem compreender o seu valor; por isso não pasma o juízo desfavorável que têm formulado, sôbre a matemática e sôbre a ciência em geral, alguns poetas:

«Verdadeiro deserto que dos vates é tumba». *(Monti)*.

«O ensino das matemáticas faz do homem máquina e degrada o pensamento. A alma dum povo não é êsse número mudo e morto com auxílio do qual êle conta as quantidades e mede as extensões: a toesa e o compasso fazem outro tanto» *(Lamartine)*.

«Desconfiai das bruxarias e das atracções diabólicas da geometria» *(Fenelon)*.

Owen, filósofo da natureza, pretendia constituir uma subespécie humana com o «homo mathematicus».

Ao contrário, *Sully Prudhomme* conta assim a felicidade dos geómetras: «Oh, produzir a beleza indiscutível, como a dum teorema demonstrado com uma simplicidade engenhosa, com elegância numa palavra, e dum alcance tão largo que dela depende a predição dos movimentos celestes! É-vos permitida tal coisa, a vós artistas, a vós sobretudo poetas, experimentar jamais o orgulho tranqüilo duma tal criação?»

Tradução de A. SÁ DA COSTA

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1941)

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 1

1091 — Determine as condições a que devem satisfazer os valores de x que verificam a desigualdade: $3+1:(x-1)>1:(2x+1)$. R: *A desigualdade proposta é equivalente a* $\frac{3x-3+1}{x-1}-\frac{1}{2x+1}>0$ *ou* $\frac{(3x-2)(2x+1)-(x-1)}{(x-1)(2x+1)}>0$ *ou ainda* $(6x^2-2x-1):[(x-1)\times(2x+1)]>0$. *Os valores de* x *pedidos são então os que tornam simultâneamente positivos ou negativos ambos os termos da fracção primeiro membro desta última desigualdade. Ora o primeiro termo é positivo para valores de* x *superiores a* $\frac{1+\sqrt{7}}{6}$ *ou inferiores a* $\frac{1-\sqrt{7}}{6}$, *e negativo para os valores de* x *compreendidos entre êstes dois valores. O segundo têrmo torna-se positivo para valores de* x *superiores a* $+1$ *ou inferiores a* $-\frac{1}{2}$, *e negativo para os valores de* x *compreendidos entre estes dois valores. Logo os valores de* x *que verificam a desigualdade proposta são os valores de* x *que verificam uma qualquer das desigualdades:* $x<-\frac{1}{2}$; $x>1$ *e* $\frac{1-\sqrt{7}}{6}<x<\frac{1+\sqrt{7}}{6}$.

1092 — Forme a equação do 2.º grau cujas raízes são: $-3+2i$ e $-3-2i$. R: *A equação é* $(x+3-2i)(x+3+2i)=0$ *ou* $x^2+6x+13=0$.

1093 — Enuncie os teoremas que conhece sôbre a existência das soluções inteiras e a existência de soluções inteiras e positivas da equação do 1.º grau em x e 7.

1094 — Sendo $\operatorname{tg} x=b/a$ verifique que é $a\cos 2x+b\operatorname{sen} 2x=a$. R: *De* $\operatorname{tg} x=b/a$ *deduzem-se sucessivamente as igualdades* $a\operatorname{sen} x=b\cos x$; $a\operatorname{sen}^2 x=b\operatorname{sen} x\cos x$; $2a\operatorname{sen}^2 x=2b\operatorname{sen} x\cos x$; $a\operatorname{sen}^2 x+a\operatorname{sen}^2 x=b\operatorname{sen} 2x$; $a(1-\cos^2 x)+a\operatorname{sen}^2 x=b\operatorname{sen} 2x$ *ou finalmente* $a=a\cos 2x+b\operatorname{sen} 2x$.

1095 — Determine sem recorrer às tábuas os valores do seno e do coseno de um ângulo de 3º quadrante cuja tangente é igual a $3/4$. R: *como* $\operatorname{tg} x=3/4$ *é* $\operatorname{sen}^2 x/\cos^2 x=9/16$ *e* $25\operatorname{sen}^2 x=9$ *donde* $\operatorname{sen} x=\pm 3/5$ *e como o arco é de* 3º *quadrante será* $\operatorname{sen} x=-3/5$ *e* $\cos x=-4/5$.

1096 — Determine, recorrendo ao cálculo logarítmico o valor dos ângulos de um triângulo em que dois vértices são os extremos do diâmetro de uma circunferência com um raio de 11,536 metros e o terceiro vértice é o extremo da corda com o comprimento de 16,951 metros, tirada de um dos extremos do referido diâmetro. R: *O triângulo é rectângulo sendo a hipotenusa o diâmetro da circunferência, logo um dos ângulos mede* 90^o. *O seno do ângulo opôsto ao cateto que mede* 16,951 *metros, será* $\operatorname{sen} B=\frac{16,951}{23,072}$ *visto a hipotenusa medir* 23,072 *metros. Então será* $\log \operatorname{sen} B=\log 16,951+$ $+\operatorname{colg} 23,072=1,22920+\bar{2},63692=\bar{1},86612$ *e* $B=47^o17'$. *O outro ângulo agudo será* $C=90-B=42^o\,34'$.

1097 — Determine os divisores comuns dos três números: 1800, 840 e 120. R: *Como* 120 *é o* m. d. c. *dos três números e é* $120=2^3\times3\times5$, *os divisores comuns aos três números serão as parcelas do desenvolvimento do produto* $(1+2+4+8)(1+3)(1+5)$ *que são os números:*

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120$.

1098 — Figure duas circunferências tangentes interiormente em A. Pelo ponto B diametralmente opôsto a A na circunferência de maior raio, tire a corda BC, tangente em D à circunferência interior. Una A com C. Demonstre que a recta AD é bissectriz do ângulo BAC. R: *O triângulo* BAC *é rectângulo em* C. *Unamos* O', *centro da circunferêdcia de menor raio, com* D. O'D *é perpendicular a* BC, *logo paralela a* AC. *Os ângulos* CAD *e* ADO' *são iguais por serem alternos internos (paralelas* AC *e* DO', *secante* DA*). Por outro lado é* $\widehat{ADO'}=\widehat{DAB}$ *por serem dois ângulos da base do triângulo isósceles* ADO'. *Logo será* $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$ *e portanto* AD *bissectriz do ângulo* BAC.

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

Ponto n.º 1

1099 — Indique as condições a que deve satisfazer k para que a inequação $x^2-2kx-k^2+x-$ $-2k+1>0$ seja verificada por qualquer valor real atribuído a x. R: *Sendo o primeiro membro um trinómio do 2.º grau em* x, *é necessário e suficiente que o seu descriminante seja negativo para o trinómio tomar, para qualquer valor real de* x, *o sinal do coeficiente do têrmo em* x^2 *que neste caso é a unidade positiva. Será então* $(2k-1)^2+$ $+4(k^2+2k-1)<0$ *ou* $8k^2+4k-3<0$; *e como as raízes dêste trinómio são* $k=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{4}$ *os valores de* k *pedidos são os que satisfazem à dupla desigualdade* $\frac{-1-\sqrt{7}}{4}<x<\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$.

1100 — A equação $143x-22y=121$ admite soluções inteiras e positivas? Justifique a resposta. R: *A equação proposta é equivalente a* $13x-$ $-2y=11$ *a qual admite soluções inteiras por os coef. de* x *e* y *serem primos entre si, e uma infinidade de soluções inteiras e positivas em vista daqueles coeficientes serem de sinais contrários.*

1101 — Calcule $1/5 \operatorname{colog} 1000$.
R: $1/5 \operatorname{colog} 1000=1/5\log 1/10^3=1/5.(-3)=-3/5$.

1102 — Determine, por logaritmos, o comprimento de uma corda que subtende um arco de $59^o31'$ num círculo de raio 3,54 metros. R: $l=2\times$ $\times3,54\times\operatorname{sen} 29^o\,45'\,30''$ *donde é* $\log l=\log 2+$ $+\log 3,54+\log\operatorname{sen} 29^o\,45'\,30''=0,30103+0,54900+$ $+\bar{1},69578=0,54581$ *donde* $l=3,514$ metros.

1103 — Determine o valor de $\operatorname{cosec}\alpha$ sabendo que $3\operatorname{tg}\alpha=2\sec\alpha$. R: *Tem-se a partir de* $3\operatorname{tg}\alpha=$ $=2\sec\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha=2/3$ *e* $\operatorname{cosec}\alpha=3/2$.

1104 — Dedusa o valor da razão dos volumes de um cubo e de uma esfera que tem áreas iguais. R: *Será* $6l^2=4\pi r^2$ *se forem* l *e* r *a aresta do cubo e o raio da esfera; e por isso é* $l=1/3\sqrt{6\pi}\cdot r$: *o volume do cubo é* $V_1=l^3=2\pi r^3\sqrt{6\pi}:9$ *e o volume da esfera* $V_2=4/3\,\pi r^3$, *donde a razão dos volumes* $V_1:V_2=\sqrt{\pi/6}$.

1105 — Quanto mede em unidades sexagessimais o ângulo interno de um octogono regular. R: *mede* $180^o-360^o:8=135^o$.

1106 — Defina triedros suplementares e indique as relações que existem entre as medidas dos seus elementos (faces e diedros).

1107 — Demonstre que se adicionar uma unidade ao produto de dois números ímpares consecutivos obtém um quadrado perfeito. R: *Sejam* $2k+1$ *e* $2k+3$ *os 2 n.*os *impares consecutivos; então:* $(2k+1)(2k+3)+1=4k^2+8k+3+1=(2k+2)^2$.

Ponto n.º 5

1108 — Indique as condições a que deve satisfazer K para que as raízes da equação $x^2+1/4(3+Kx)^2-1=0$ sejam números imaginários. R: *A equação dada é equivalente a* $(4+K^2)x^2+$

$+6\,Kx+5=0$, *cujo descriminante* $9\,K^2-5(4+K^2)$ *deverá ser negativo, isto é* $K^2-5<0$ *logo* K *satisfará a dupla desigualdade* $-\sqrt{5}<K<\sqrt{5}$.

1109 — Determine *n* de modo que se verifique a seguinte igualdade: ${}^{n-1}A_6 : {}^{n}A_6=2/5$.
R: $[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)] : [n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)]=2/5$ *ou* $(n-6) : n=2/5$ *ou* $5n-30=2n$, $3n=30$ *e* $n=10$.

1110 — Torne racional o denominador da fracção $2/\sqrt[5]{20}$ e simplifique o resultado. R: $2/\sqrt[5]{20}=2\sqrt[5]{20^4}/20=\sqrt[5]{4^4.5^4}/10=2\sqrt[5]{2^3\times5^4}/10=\sqrt[5]{5000}/5$.

1111 — Determine, por logaritmos, a área de um triângulo rectângulo cuja hipotenusa mede $23^m,12$ e em que um dos ângulos mede $49^o\,37'\,23''$. R: *A área é dada pela expressão* $a^2/4$ sen $2\,\alpha$ *sendo* a *a hipotenusa e* α *um dos ângulos. Então é* $A=23{,}12^2/4$ sen $99^o\,14'\,46''$ *e* $\log A=2\log 23{,}12+2\,\text{colg}\,2+\log\text{sen}\,80^o\,45'\,14''=2\times1{,}36399+\bar{1}{,}39794+\bar{1}{,}99432=2{,}12024$ *donde* $A=131{,}9\ ^{m2}$.

1112 — Exprima $\cot(3/2\,\pi-x)$ numa função circular do ângulo x. Justifique a resposta.
R: $\cot(3/2\,\pi-x)=\cot(\pi/2-x)=\text{tg}\,x$.

1113 — É dado um triângulo equilátero ABC; trace pelos seus vértices A, B e C rectas perpendiculares aos lados AB, BC e CA, respectivamente, de modo a formar um outro triângulo. Prove que êste é equilátero e deduza o valor da razão da sua área e da do triângulo dado. R: *Seja* A'B'C' *o novo triângulo em que* A'B' *é a perpendicular a* AB, B'C' *perpendicular a* BC *e* A'C' *perpendicular a* CA*; então será* $A'\hat{B}'C'=A\hat{B}C$*;* $B'\hat{C}'A'=B\hat{C}A$ *e* $C'\hat{A}'B'=C\hat{A}B$, *porque são ângulos que têm os lados perpendiculares e são da mesma natureza. Assim, se o primeiro triângulo é equilátero o segundo também o é. Se fôr* 1 *o lado do primeiro calculemos a razão de semelhança dos dois triângulos. Para isso calculemos o lado* A'B' *do triângulo maior. Êste lado é dividido pelo vértice* A *em dois segmentos* AA' *e* B'A=CA' *que são a hipotenusa e um cateto do triângulo* AA'C *rectângulo em* C, *e semelhante a um dos triângulos que se determinam em* ABC *quando se baixa a altura relativa a qualquer dos lados, e medindo a altura* $1\sqrt{3}/2$ *será* $1 : AA'=1\sqrt{3}/2 : 1$ *donde* $AA'=2\,1\sqrt{3}/3$. *Por outro lado é* $4\,1^2/3=1^2+A'C^2$ *e* $A'C=1\sqrt{3}/3$; *finalmente* $A'B'=2\,1\sqrt{3}/3+1\sqrt{3}/3=1\sqrt{3}$. *Como a razão das áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança e esta é* $1\sqrt{3}/1=\sqrt{3}$ *temos que a razão pedida é igual a* 3.

1114 — Qual é a posição, em relação ao centro de homotetia, de duas figuras homotéticas quando a razão de homotetia é igual à unidade negativa. R: *São simétricas, pois a homotetia de razão* $r=-1$ *é uma simetria em relação ao centro da homotetia.*

1115 — Qual é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de dois pontos dados. R: *É o plano perpendicular ao meio no segmento que une os dois pontos.*

1116 — Defina fracções iguais e enuncie a condição necessária e suficiente para que as duas fracções o sejam. R: *Duas fracções são iguais quando medem a mesma grandeza. É condição necessária e suficiente, para que duas fracções* a/b *e* c/d *sejam iguais que se verifique a igualdade* ad=bc.

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 2

1117 — As distâncias de um ponto às duas faces de um angulo diedro de $65^o\,35'$ são iguais a $5^m,32$ e $3^m,65$. Calcule a distância do mesmo ponto à aresta do diedro. R: *Seja* d *a distância pedida* α *o ângulo que forma a recta sôbre a qual se conta* d *com a recta sôbre a qual se marca a distância* $5^m,32$ *do ponto a uma das faces do diedro; o ângulo formado pela recta sôbre a qual se marca* $3^m,65$, *distância do ponto à outra face com a perpendicular baixada do ponto para a aresta do diedro medirá* $(180^o-65^o\,35')-\alpha=114^o\,25'-\alpha$. *Por isso será* $d=5{,}32\cos\alpha$ *ou* $d=3{,}65\cos(114^o\,25'-\alpha)$ *donde* $5{,}32\cos\alpha=3{,}65\,[\cos 114^o 25'\cos\alpha+\text{sen}\,114^o 25'\,\text{sen}\,\alpha]$ *e* $5{,}32:3{,}65=\cos 114^o\,25'+\text{sen}\,114^o\,25'\,\text{tg}\,\alpha$ *e portanto* $\text{tg}\,\alpha=[5{,}32/3{,}65-\cos 114^o\,25'] : \text{sen}\,114^o\,25'$ *ou* $\text{tg}\,\alpha=1{,}47\,\text{cosec}\,66^o 35'+\text{cotg}\,65^o 35'=1{,}47\times1/0{,}911+0{,}454=1{,}614+0{,}454=2{,}068$ *e* $\alpha=64^o\,11'$ *e finalmente* $d=5{,}32\cos 64^o\,11'=5{,}32\times0{,}435=2^m,31$.

1118 — Indique gràficamente como varia a secante de um ângulo, quando êste varia de 0^o a 360^o.

1119 — Simplifique a expressão:

$$(x^2-1-x^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha) : [(y^2x-x)(x-1)].$$

R: $$\frac{x^2-1-x^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{(y^2x-x)(x-1)}=\frac{x^2-1-\cos^2\alpha(x^2-1)}{x(y^2-1)(x-1)}=\frac{(x^2-1)(1-\cos^2\alpha)}{x(y^2-1)(x-1)}=\frac{\text{sen}^2\alpha\,(x+1)}{x(y^2-1)}.$$

1120 — Diga o que entende por combinações de 5 objectos 3 a 3. Forme essas combinações com as cinco primeiras letras do alfabeto e verifique o seu número pela respectiva fórmula.

1121 — Em que se baseia a prova dos 9 da multiplicação? Demonstre-o, Pondo fora de discussão a possível maior simplicidade da prova dos 9 sôbre a prova dos 3, apresenta ela outra vantagem? R: *A prova dos* 9 *baseia-se no seguinte teorema: «o produto dos restos da divisão de dois ou mais números por um dado divisor e o produto dos números quando divididos por êsse divisor dão restos iguais.»*

Seja $a \times b = p$ *e* $a = \dot{d} + r_1$ $b = \dot{d} + r_2$ *então é* $(\dot{d} + r_1)(\dot{d} + r_2) = p$ *ou* $\dot{d} + r_1 r_2 = p$ *o que prova o teorema.*

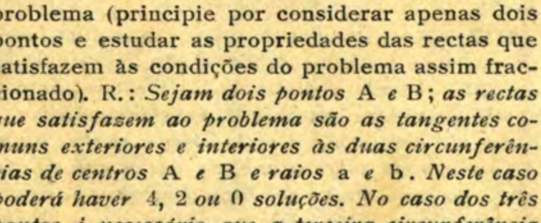
Teòricamente as duas provas são equivalentes simplesmente a prova pelo divisor 3 *não assinalando todos os êrros que a prova pelo divisor* 9 *não assinala, não dá conta ainda dos êrros que sejam múltiplos de* 3 *ou de* 6 *que não sejam de* 9.

1122 — Diga como traça uma recta cujas distâncias a, b e c a três pontos fixos A, B e C não colineares formem uma progressão geométrica de razão 2. Diga ainda quantas soluções tem o problema (principie por considerar apenas dois pontos e estudar as propriedades das rectas que satisfazem às condições do problema assim fraccionado). R.: *Sejam dois pontos* A *e* B; *as rectas que satisfazem ao problema são as tangentes comuns exteriores e interiores às duas circunferências de centros* A *e* B *e raios* a *e* b. *Neste caso poderá haver* 4, 2 *ou* 0 *soluções. No caso dos três pontos é necessário que a terceira circunferência de centro* C *e raio* c *seja tangente a uma das rectas anteriormente determinadas, para que o problema tenha solução e vê-se fàcilmente que poderá haver* 3, 2, 1 *ou* 0 *soluções.*

Soluções dos n.os 1091 a 1122 de J. Paulo.

I. S. C. E. F. — 29 de Julho de 1942

1123 — *a)* Dê a definição e as propriedades da semelhança de triângulos. *b)* Dada a semi-circunferência de raio r da figura junta, determine a posição do ponto P de modo tal que a área do triângulo EOD seja igual à área do semi-círculo



(ED é tangente em P à semi-circunferência e OE é perpendicular a OD). ¿Para que posição de P é mínima a área do triângulo? ¿E qual é êsse mínimo? R: *Área do semi-circulo* $\pi r^2/2$. *Área do triângulo* EOD $\overline{ED} \times \overline{OP}/2 = (\overline{EP} + \overline{PD}) r/2 = |\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha|\, r^2/2$. *Igualando vem* $\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha = \pi$ *donde* $\text{tg}^2\alpha - \pi\,\text{tg}\,\alpha + 1 = 0$ *e* $\text{tg}\,\alpha = (\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 4})/2$. *A área do triângulo* EOD *será mínima quando fôr mínimo*

$$|\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha| = \frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{|\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha|} = \frac{2}{|\text{sen}\,2\alpha|}$$

por conseqüência, para $|\text{sen}\,2\alpha| = 1$ *ou* $2\alpha = \pi/2 + k\pi$ *donde* $\alpha = \pi/4 + k\pi/2$. *O valor dêsse mínimo é* r^2.

1124 — Determine a, b e c de modo que a função $y = ax^2 + bx + c$ tome para $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ respectivamente, os valores $y = 1$, $y = 2$, $y = 7$. R: *Tem-se*

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 7 \end{cases} \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 3a + b = 1 \\ 5a + b = 5 \end{cases} \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 3a + b = 1 \\ a = 2 \end{cases} \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$y = 2x^2 - 5x + 4.$$

1125 — Dadas duas circunferências concêntricas de raios 18,37 metros e 25,43 metros, calcule a área da porção da corôa determinada por dois raios formando entre si um ângulo de 58° 18′. R: *Área duma porção de corôa circular determidada por dois raios cujo ângulo mede* α *graus é*

$$S = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi (R^2 - r^2) = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi (R + r)(R - r).$$

Substituindo valores e notando que $58°\,18' = 58°{,}3$

$$S = \frac{58{,}3}{360} \times 3{,}14 \times 43{,}8 \times 7{,}06.$$

Cálculo de S:

log 58,3	$= 1{,}7656686$
colog 360 (log 360 = 2,5563025)	$= \bar{3}{,}4436975$
log 3,14	$= 0{,}4969296$
log 43,8	$= 1{,}6414741$
log 7,06	$= 0{,}8488047$
	log S = 2,1965745

log S = 2,1965745	S = 157,24 metros
1965630	15724

1126 — *a)* Defina simetria em relação a um ponto e a um plano; enuncie algumas propriedades importantes. *b)* É dado um paralelipípedo cujas faces são losangos dos quais uma das diagonais é igual ao lado a. Calcule o volume dêsse paralelipípedo em função de a. R: *O paralelipípedo pode decompor-se em seis tetraedros regulares de aresta* a. *Logo* $V = 6v$ *onde* $v = \frac{1}{3} b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a h_b\, h = \frac{1}{6} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. *Então será*

$$V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1127 — Prove que $\sec^2\alpha + \text{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \text{cosec}^2\alpha$. Usando esta identidade, determine um par de números racionais cuja soma seja igual ao seu produto. R: $\frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$. *Seja* $\sec^2\alpha = p/q$. *Substituindo na identidade obtém-se* $\text{cosec}^2\alpha = p/(p - q)$. *Portanto, para* $p/q = 1/2$, *por* *exemplo, vem* $p/(p-q)=-1$. *Verificação*

$$\frac{1}{2}-1=-1\times\frac{1}{2}.$$

1128 — Calcule a soma $S=2+\frac{a+b}{a\cdot b}+\frac{a^2+b^2}{a^2\cdot b^2}+\cdots+\frac{a^n+b^n}{a^n/b^n}$. R: $S=2+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{a^n}=\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}\right)+\left(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+\cdots+\frac{1}{b^n}\right)=\frac{1-a^{-n-1}}{1-a^{-1}}+\frac{1-b^{-n-1}}{1-b^{-2}}=\frac{a^{n+1}-1}{a^{n+1}-a^n}+\frac{b^{n+1}-1}{b^{n+1}-b^n}$.

Soluções dos n.os 1123 a 1128 de A. Sá da Costa.

MATEMÁTICAS GERAIS - ÁLGEBRA SUPERIOR - COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **1.º exame de freqüência 26-2-1942**

Ponto n. 2

a) — Produto e cociente de números complexos (formas algébrica e trigonométrica).

b) — Produto interno e produto externo de 2 vectores. Definições e expressões cartesianas.

c) — Defina: feixe e estela de planos, feixe e estela de rectas. Escreva as equações destas famílias em coordenadas cartesianas.

d) — Sistemas de geratrizes rectilíneas no hiperboloide de 1 fôlha.

1129 — Estude o sistema: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+z=1 \\ x+3y+z=1 \\ x+y+3z+3. \end{cases}$

Interprete geomètricamente o estudo feito.

R: *4 planos os 3 primeiros pertencem ao mesmo feixe.*

1130 — Mostre que as raízes da equação $(z+i)^m-(z-i)^m=0$ são reais. (Resolva a equação reduzindo-a a uma equação binómia pela mudança de variável $\frac{z+i}{z-i}=u$). R: $\frac{z+i}{z-i}=u\rightarrow u^m-1=0\rightarrow$

$$\rightarrow u=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{m}\quad(k=0,1,\cdots m-1)$$

$$z=-i\frac{1+u}{1-u}=-i\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{m}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{m}}{1-\cos\frac{2k\pi}{m}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{m}}=$$

$$=\frac{\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{m}}{1-\cos\frac{2k\pi}{m}}=\mathrm{cotg}\,\frac{k\pi}{m}\quad(k=0,1,\cdots m-1).$$

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Exame final, Julho de 1942**

1131 — Escrever as equações da circunferência de raio $R=3$, cujo centro é um dos pontos da recta $2y=x=z$ à distância 4 da origem e cujo plano é normal à recta. R: *Seja* $C(2\alpha,\alpha,2\alpha)$ *o centro. Tem-se* $9\alpha^2=4^2$, $\alpha=\pm 4/3$, *donde* $C(8/3,4/3,8/3)$ *e* $C'(-8/3,-4/3,-8/3)$. *Há pois duas circunferências nas condições indicadas que podem ser definidas pela intersecção das superfícies: esfera de centro* C (*ou* C′) *e raio* R=3 *e plano normal à recta dada passando por* C (*ou por* C′). *Assim, por exemplo, a de centro* C *tem por equações*

$$\begin{cases}(x-8/3)^2+(y-4/3)^2+(z-8/3)^2=9\\ 2(x-8/3)+(y-4/3)+2(z-8/3)=0.\end{cases}$$

1132 — Mostrar que a equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}-2\lambda\frac{dy}{dx}+(\lambda^2+\mu^2)y=0$ é verificada por

$$y=e^{\lambda x}(A\cos\mu x+B\,\mathrm{sen}\,\mu x).$$

1133 — Mostrar que a equação $2xy-5z=0$ representa um paraboloide hiperbólico. (Efectuar uma rotação de 45º dos eixos OX e OY em tôrno de OZ). R: *Efectuando a transformação indicada:* $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$, $z=Z$, *vem, imediatamente*, $X^2-Y^2-5Z=0$.

1134 — Determinar os máximos e mínimos da função $y=x^4-6$. Representação geométrica da função.

Soluções dos n.os 1129 a 1134 de Manuel Zaluar.

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Outros pontos de exames finais de 1942**

1135 - Mostrar que a superfície de equação $(z-1)^3-(x^2+y^2)^2=0$ é de revolução. Escrever as equações do paralelo e as do meridiano que passam pelo ponto (1, 0, 2).

1136 — O polinómio $P(x)$ é do 5.º grau, é divisível por x^2+1, anula-se para $x=0$, admite a raiz real dupla -4 e toma o valor 100 para $x=1$. Determiná-lo.

1137 — Dada a circunferência de equações: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-10y=0\\ x-2z=0\end{cases}$ determinar: *a)* as equações da recta que passa pelo centro e é normal ao seu plano; *b)* as equações das esferas de raio 7 que contêm a circunferência; *e)* a equação da projecção sôbre o plano $z=0$; *d)* uma representação paramétrica da curva dada.

1138 — Indicar o domínio de definição da função real de variável real $y=\sqrt{\cos x}+x$ e determinar os máximos e mínimos da função, se os houver.

F. C. L. — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA — **Exame de freqüência, 31 de Maio de 1941**

A — *a)* Espaço algébrico e sub-espaço algébrico dum espaço. Definições e exemplos. *b)* isomorfismo de dois espaços. *c)* definição de espaço algébrico grupo. Exemplos. B — Substituïções lineares ortogonais. Definição e propriedades.

1139 — Determine o período da permutação $P=\begin{pmatrix}7&3&6&2&1&4&5\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}$, a permutação inversa, e a transformada de P por $T=\begin{pmatrix}5&7&1&6\\1&5&6&7\end{pmatrix}$.

1140 — Determine os valores próprios da matriz $A=\begin{Vmatrix}1&5\\4&2\end{Vmatrix}$. Verifique se são, ou não, permutáveis as matrizes A e $B=\begin{Vmatrix}1&0\\3&-1\end{Vmatrix}$.

1141 — Equação do feixe de circunferências passando por $(2,1)$ e $(4,0)$. Determine as curvas da família tangentes à recta $x+y=5$.

F. C. L. — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA — **Exame de freqüência, 9 de Junho de 1941**

A — *a)* Defina produto e soma de conjuntos. *b)* O conjunto A é a estela de planos de centro P, o conjunto B é a estela de planos de centro Q (distinto de P). ¿Que representa o conjunto $A\cap B$? R: *O feixe de planos de eixo* PQ.

B — Homomorfismo de um espaço sôbre outro. Propriedades. ¿A relação de homomorfismo é uma relação de equivalência? Justifique a resposta.

C — Substituïções lineares e matrizes. Definições. Tipos especiais.

1142 — ¿Que representa em geometria plana a equação $\frac{x^2}{3+\lambda}+\frac{y^2}{5+\lambda}=1$?

Determine as equações das curvas da família que passam pelo ponto $A(1,1)$ e faça o seu traçado gráfico aproximado. Prove analìticamente que as 2 curvas se cortam ortogonalmente. ¿Que representa a equação dada em geometria a 3 dimensões? R: *Uma família de cónicas homofocais* $\lambda=1\to\frac{1}{3+\lambda}+\frac{1}{5+\lambda}=1\to\lambda^2+6\lambda+7=0$ *donde* $\lambda_1=-3+\sqrt{2}$, $\lambda_2=-3-\sqrt{2}$, *valores a que correspondem uma elipse e uma hipérbole. Os coeficientes angulares das tangentes às duas curvas em* A(1,1) *são respectivamente* $-(\sqrt{2}+1)$ *e* $(\sqrt{2}-1)$ *cujo produto é* -1, *c. q. p.*

No espaço a equação dada representa uma família de superfícies cilíndricas de 2.ª ordem de geratrizes paralelas a OZ *e cujas directrizes são as cónicas homofocais citadas.*

Solução do n.º 1142 de M. Zaluar.

F. C. L. — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA E DE G. A. — **Alguns pontos dos exames finais, Julho de 1941**

1143 — O conjunto A do plano é definido por $4\leq x^2+(y-1)^2\leq 9$ e o conjunto B por $2\leq x\leq 4$, $y\geq 0$, e $y-x\leq 0$. Represente gràficamente A e B e determine os conjuntos $A\cap B$ e $A\cup B$.

1144 — Sã odadas a substituïção linear $y_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j$ $(i=1,2,3)$ de matriz $A=\begin{Vmatrix}2&1&5\\-1&0&3\\1&-1&4\end{Vmatrix}$ e a substituïção $x_k=\sum_{l=1}^{3}b_{kl}z_l$ $(k=1,2,3)$ de matriz $B=\begin{Vmatrix}1&0&0\\2&5&0\\3&-1&2\end{Vmatrix}$. Determine a substituïção produto da matriz AB e a substituïção transformada de A por B.

1145 — A cónica γ é a projecção sôbre o plano $z=0$ da curva $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2y-6z+9=0\\2x+3y-z=0.\end{cases}$

Indique o género de γ e reduza a respectiva equação à forma canónica utilizando o método dos invariantes.

1146 — Determine a transformação afim que transforma o elipsoide de equação $16(x-4)^2+y^2+4(z+1)^2=16$ na esfera de equação $(x-4)^2+y^2+(z+1)^2=16$. Determine o volume limitado pelo elipsoide.

I. S. C. E. F. — **Exame final, 6-12-1941**

1147 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=\operatorname{sen}x+\sqrt{3}.\cos x$. R: *A função é definida no intervalo* $(-\infty,+\infty)$ *e é periódica de período* 2π. *Tem-se* $y'=\cos x-\sqrt{3}\operatorname{sen}x$, $y''=-(\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\cos x)=-y$, $y'''=-(\cos x-\sqrt{3}\operatorname{sen}x)=-y'$. *A equação* $y'=0$ *é equivalente a* $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}/3$ *donde* $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$. *Destas,* $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

correspondem a máximos para a função cujo valor é $y=2$; $x=\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi$ *correspondem a mínimos cujo valor é* $y=-1$. *A função é crescente nos intervalos* $\left(\frac{\pi}{6}+(2k-1)\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$ *e descrescente nos intervalos* $\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi\right)$. *A equação* $y''=0$ *é equivalente a* $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ *donde* $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$, *a estes valores da variável independente correspondem pontos de inflexão para a curva representativa de* y *que toma o valor* $y=0$. *A concavidade da curva está voltada no sentido dos* yy *positivos nos intervalos* $\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+(2k+1)\pi\right)$ *e no sentido dos* yy *negativos nos intervalos* $\left(\frac{2\pi}{3}+(2k-1)\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$.

1148 — Calcular os primeiros quatro têrmos do desenvolvimento em série da função $y=\frac{1-x^4}{\cosh x}$.
R: *Seja* $y=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots$, *visto a função ser par. De* $y.\cosh x=1-x^4$ *resulta* $(a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots)(1+x^2/2!+x^4/4!+\cdots)=$ $=1-x^4$ *ou* $a_0+(a_0/2!+a_2)x^2+(a_0/4!+a_2/2!+a_4)x^4+$ $+(a_0/6!+a_2/4!+a_4/2!+a_6)x^6+\cdots=1-x^4$ *e identificando* $a_0=1$, $a_0/2!+a_2=0$, $a_0/4!+a_2/2!+a_4=-1$, $a_0/6!+a_2/4!+a_4/2!+a_6=0$, *donde* $a_0=1$, $a_2=-1/2$, $a_4=-19/24$, $a_6=11/180$. *Tem-se finalmente,* $y=1-x^2/2-19x^4/24+11x^6/180+\cdots$.

1149 — Dada a função $y=\varphi\left(\log\frac{1}{x}\right)$ calcular $x^3.y'''-2x^2y''-3xy'$. R: *Por ser* $y'=-\varphi'\left(\log\frac{1}{x}\right)\Big/x$,

$$y''=\left[\varphi'\left(\log\frac{1}{x}\right)-\varphi''\left(\log\frac{1}{x}\right)\right]\Big/x^2,$$

$$y'''=-\left[\varphi'''\left(\log\frac{1}{x}\right)-3\varphi''\left(\log\frac{1}{x}\right)+2\varphi'\left(\log\frac{1}{x}\right)\right]\Big/x^3$$

é $x^3.y'''-2x^2y''-3xy'=-\varphi'''\left(\log\frac{1}{x}\right)+$ $+5\varphi''\left(\log\frac{1}{x}\right)-\varphi'\left(\log\frac{1}{x}\right)$.

I. S. C. E. F. — Exame Final, 11-10-1941

1150 — Estudar, representar geomètricamente e inverter a função $y=(\log x)^2$. R: *A função é definida no intervalo aberto* $(0,\infty)$. *Para* $x=1$ *é* $y=0$ *e êste valor é um mínimo para a função visto que* $y\geq 0$ *qualquer que seja* x *no intervalo* $(0,\infty)$. *A função é decrescente no intervalo* $(0,1)$ *e crescente no intervalo* $(1,\infty)$ *por ser* $y'=2\log x/x$. *O ponto* $x=e$, $y=1$ *é de inflexão porque* $y''=$ $=2(1-\log x)/x^2$ *é nula para* $x=e$ *e* $y'''=2(2\log x-3)/x^3$ *toma o valor* $-2/e^3\neq 0$ *para* $x=e$. *A curva, imagem geométrica da função, tem a concavidade voltada no sentido dos* yy *positivos no intervalo* $(0,e)$ *e no sentido dos* yy *negativos no intervalo* (e,∞) *porque* y'' *é positiva no primeiro intervalo e negativa no segundo. A curva admite como assintota o eixo* Oy *porque* $\lim_{x\to 0}(\log x)^2=+\infty$. *A função é invertível nos intervalos* $(0,1)$ *e* $(1,\infty)$ *nos quais é monotónica decrescente e crescente, respectivamente. As expressões analíticas das funções inversas são* $y=e^{-\sqrt{x}}$ *e* $y=e^{+\sqrt{x}}$, *por esta ordem e uma vez repostos os eixos.*

1151 — Calcular as derivadas de 1.ª e 2.ª ordens da função $y=\sec x$ em ordem à função $u=\operatorname{tg} x$.
R: *Sabe-se que* $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ *donde* $\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\Big/\frac{du}{dx}$.
Portanto, $\frac{dy}{du}=\sec x.\operatorname{tg} x/\sec^2 x=\operatorname{sen} x$ *e*

$$\frac{d^2y}{du^2}=\left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x\right)\Big/\frac{du}{dx}=\cos x/\sec^2 x=\cos^3 x.$$

1152 — Calcular as ordenadas dos pontos de inflexão da curva de equação $y=e^{-2x^2}$ com um êrro inferior a $10^{-4}/2$, utilizando o desenvolvimento em série de potências. R: *Tem-se* $y=e^{-2x^2}=$ $=1-2x^2+\frac{4x^4}{2!}-\frac{8x^6}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{2^n.x^{2n}}{n!}+\cdots$,
$y'=-4xe^{-2x^2}$, $y''=-4e^{-2x^2}(1-4x^2)$ *e* $y'''=$ $=-4e^{-2x^2}(16x^3-12x)$. *As raizes da equação* $y''=0$ *são* $x=\pm 1/2$ *que correspondem a pontos de inflexão visto que* $y'''=0$ *tem por raizes* $x=0, \pm\sqrt{3}/2$.
Então $y\left(\frac{1}{2}\right)=y\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2!\,2^2}-\frac{1}{3!\,2^3}+\cdots+$ $+(-1)^n\frac{1}{n!\,2^n}+\cdots$. *O êrro sistemático cometido desprezando todos os têrmos da série a partir do* 7.º *é inferior ao módulo dêste por se tratar duma série alterna. Isto é,* $\varepsilon_s<1/46.080$ *com* $y\left(\frac{1}{2}\right)=$ $=y\left(-\frac{1}{2}\right)\simeq 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{48}+\frac{1}{384}-\frac{1}{3840}\simeq 1-0{,}5+$ $+0{,}125-0{,}020833+0{,}002604-0{,}00026\simeq 0{,}606511$, *sendo* $\varepsilon_c<1/50.000$. *O êrro absoluto é*

$$\varepsilon\leq\varepsilon_s+\varepsilon_c<\frac{1}{46.080}+\frac{1}{50.000}<10^{-5}<10^{-4}/2.$$

Soluções dos n.os 1147 a 1152 de A. Sá da Costa.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — 1.º exame de freqüência — 1941-1942

Ponto I

1153—GEOMETRIA DE MONGE—Apoiar uma paralela à L. T. em duas rectas enviezadas. Uma destas rectas é de perfil e a outra é frontal. R: *Aplique-se o método geral. Como plano auxiliar tome-se o plano que é paralelo à L. T. e contém a recta de perfil.*

1154—GEOMETRIA DE MONGE—Determinar a distância de um ponto ao segundo plano bissector. R: *Mude-se de plano vertical de projecção para qualquer plano de perfil.*

1155—GEOMETRIA COTADA—As projecções de quatro pontos A, B, C e D, de cotas $-1{,}4$ m., $0{,}8$ m., $2{,}7$ m., e $3{,}6$ m., são vertices de um quadrado de 10 m. de lado. Determinar o ângulo da recta AB com o plano de escala de declive CD (Escala 1 : 200). R: *O ângulo pedido é o complemento do ângulo da recta* AB *com a perpendicular conduzida por um dos seus pontos ao plano dado. Estas duas rectas pertencem ao mesmo plano projectante; o seu ângulo determina-se introduzindo um plano vertical de traço paralelo ao do plano projectante que as contém.*

Ponto II

1156 — GEOMETRIA DE MONGE — Conduzir por um ponto do segundo plano bissector a recta que se apoia em duas rectas enviezadas paraletas a êsse mesmo plano.

1157—GEOMETRIA DE MONGE—Determinar o ângulo de uma recta de perfil com o primeiro plano bissector. R: *Conduz-se por um ponto da recta de perfil uma perpendicular ao primeiro plano bissector. O ângulo destas duas rectas (complemento do ângulo pedido) determina-se mudando de plano vertical de projecção para o plano de perfil que as contém.*

1158—GEOMETRIA COTADA—São dados: um plano de declive 2 e um ponto A de cota 5,2 m. Conduzir pelo ponto as rectas de declive 1 paralelas ao plano. (Escala 1 : 50). R: *O problema tem duas soluções. Conduza-se pelo ponto um plano paralelo ao plano dado. A circunferência de raio* 1 *e centro na projecção do ponto* A, *intersecta a horisontal de cota 6,2 m. do plano em dois pontos que definem com o ponto dado as rectas pedidas.*

F. C. C. — 2.º exame de freqüência — 1941-1942

Ponto I

1159—GEOMETRIA COTADA—Determinar a distância de um ponto 3,5 m. de cota a uma recta de declive 1/2. O ponto e a recta pertencem ao mesmo plano vertical. (Escala 1 : 50). R: *Basta rebater os dados sôbre o plano de comparação.*

1160—PLANOS TANGENTES—Conduzir por um ponto do segundo plano bissector os planos tangentes à superfície de revolução gerada por um rectângulo, assente num plano horisontal, que roda em tôrno de um dos seus lados. Êsse lado faz com a L. T. um ângulo de 30°. R: *Aplique-se o método geral, rebatendo a base do cilindro para lhe conduzir as tangentes pelo ponto de intersecção do seu plano com a paralela às generatrizes que passa pelo ponto dado.*

1161 — SUPERFÍCIES — Determinar os pontos de intersecção de uma recta do segundo plano bissector com uma esfera de 4 cm. de raio, dada pelos contornos aparentes. O centro da esfera é um ponto do segundo plano bissector.

Ponto II

1162 GEOMETRIA DE MONGE—São dadas duas rectas enviezadas, uma do primeiro plano bissector e outra do segundo. Apoiar-lhes uma paralela a uma frontal dada.

1163—TRIEDROS—É dado um plano vertical que faz com o plano vertical de projecção um ângulo de 70°. Conduzir por um ponto dado a recta que faz com o plano vertical dado e com a L. T. ângulos de 60° e de 40°, respectivamente. R: *A recta pedida faz um ângulo de 30° com qualquer horizontal perpendicular ao plano dado.*

(Veja-se o n.º 10 da G. de M., probema n.º 973).

1164—PLANOS TANGENTES—Representar os planos perpendiculares a uma recta dada que distam 4 cm. do seu traço no segundo plano bissector. R: *Os planos pedidos são os planos perpendiculares à recta dada e tangentes à esfera de 4 cm. de raio e centro naquele traço.*

F. C. C. — Exame final — 1941-1942

Ponto I

1165 — GEOMETRIA DE MONGE — Dados dois pontos do mesmo plano de perfil, representar o plano mediador do segmento que definem. R: *Basta* *mudar de plano vertical de projecção para o plano de perfil que contém a recta.*

1166 — PLANOS TANGENTES — É dada uma superfície cónica de revolução de eixo horisontal. Conduzir-lhe os planos tangentes perpendiculares ao primeiro plano bissector. R: *Conduza-se pelo vértice uma recta perpendicular ao primeiro plano bissector e determinem-se os planos tangentes à superfície que contém essa recta.*

Ponto II

1167 — GEOMETRIA DE MONGE — Determinar o ângulo de dois planos dados pela sua recta de intersecção, que é uma recta de perfil, e um ponto de cada um. R: *Transformando a recta de perfil numa recta de tôpo por mudanças de planos de projecção, os planos dados ficam sendo de tôpo e o seu ângulo é o dos seus traços.*

1168 — PLANOS TANGENTES — Dados: Uma esfera de 4 cm. de raio e centro no segundo plano bissector, e uma recta dêsse mesmo plano; representar os planos tangentes à esfera e perpendiculares à recta dada. R: *Os planos pedidos são os planos tangentes à esfera nos pontos de intersecção dessa superfície com a paralela à recta dada conduzida pelo centro.*

Soluções dos n.os 1155 a 1168 de L. M. de Albuquerque.

CÁLCULO INFINITESIMAL E ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — CÁLCULO — Exame final, Outubro de 1941

1169 — Calcular $\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$. R: *Fazendo* $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ *e integrando por partes:*

$$I = \frac{1}{8}\,\{\,2x^2 - 2x \operatorname{sen} 2x - \cos 2x\,\} + c .$$

1170 — Integrar a equação $x^2 y'' + xy' + 4y = (\log x) \operatorname{sen}(2 \log x)$. R: *Fazendo* $x = e^t$ *tem-se* $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = t \operatorname{sen} 2t$.

Integral geral da equação sem 2.º membro:

$$y = c_1 \operatorname{sen} 2t + c_2 \cos 2t .$$

Integrais particulares:

$$\begin{cases} y_1 = \left(-\dfrac{t^2}{16} - \dfrac{i}{32}t + \dfrac{1}{128}\right) e^{2it} \\ y_2 = \left(-\dfrac{t^2}{16} + \dfrac{i}{32}t + \dfrac{1}{128}\right) e^{-2it} \end{cases}$$

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{64}\,\{-8t^2 \cos 2t + 4t \operatorname{sen} 2t + \cos 2t\,\} .$$

Integral geral:

$$y = c_1 \operatorname{sen} 2t + c_2 \cos 2t + \frac{1}{64}\,\{-8t^2 \cos 2t + 4t \operatorname{sen} 2t + \cos 2t\,\} \quad ou \quad y = \left(c_1 + \frac{1}{16}t\right) \operatorname{sen} 2t + \left(c_3 - \frac{1}{8}t^2\right) \cos 2t$$

em que $t = \log x$.

1171 — Dada uma fôlha rectangular $ABCD$ em que $\overline{AB} = a$, dobra-se pela recta MN (M ponto de $\overline{AB}$ e N de $\overline{BC}$) de modo que o vértice B venha a cair na recta AD. Determinar a distância $\overline{MB}$ de modo que $\overline{MN}$ seja máximo ou mínimo. R: *Seja* K *o ponto de* AD *com o qual* B *vai coincidir quando dobramos a fôlha por* MN. *Fazendo* $\overline{MN} = L$, $\overline{MB} = x$ *e* $N\hat{M}B = \theta$ *vem* $a = \overline{BK} \operatorname{sen} \theta$, $x = L \cos \theta$ *e* $\dfrac{\overline{BK}}{2} = x \operatorname{sen} \theta$, *donde:* $\dfrac{a}{2} = x \operatorname{sen}^2 \theta$, $\operatorname{sen}^2 \theta = \dfrac{a}{2x}$ *e* $x^2 = L^2\left(1 - \dfrac{a}{2x}\right) = L^2 \dfrac{2x-a}{2x}$. *Logo* $L^2 = \dfrac{2x^3}{2x-a}$ *donde* $L = \sqrt{2}\, x^{3/2} (2x-a)^{-1/2}$.

Tem-se ainda:

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{2}\,\left\{\frac{3}{2} x^{1/2} (2x-a)^{-1/2} - x^{3/2} (2x-a)^{-3/2}\right\} = 0$$

$$\frac{3}{2}(2x-a) - x = 0, \quad x = \frac{3a}{4}$$

$$L = \sqrt{2}\,\frac{3a\sqrt{3a}}{8} \sqrt{\frac{2}{a}} = \frac{3a}{4}\sqrt{3} .$$

Soluções dos n.os 1169 a 1171 de Jaime Rios de Sousa.

I. S. T. — Exame final, Outubro de 1941

1172 — Determinar os pontos em que a binormal da curva $\begin{cases} y = 2x - 4x^2 \\ z = 3x^2 - xy + 2y^2 \end{cases}$ é paralela ao plano xy.

1173 — Mudar as variáveis independentes na equação $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ sendo $x = \dfrac{1}{t}$ $y = \dfrac{ut}{2}$.

1174 — Integrar a equação $p(1+4y-p) = y(1+4y)$ $(p = y')$.

1175 — Integrar a equação $p(px-2y) + 4x = 0$.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

I. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — **Exame final, Outubro de 1941**

1176 — Mostrar que dois pontos materiais P e P_1, que se atraem segundo uma lei de fôrças que é função só da distância, podem rodar uniformemente (como se estivessem rìgidamente ligados entre si) em tôrno do centro de gravidade G do sistema por êles formado. ¿Qual deve ser a velocidade angular dessa rotação uniforme?

1177 — Um fio pesado, suspenso pelas suas extremidades em dois pontos fixos A e B, tem a forma duma cicloide. Determinar a densidade e a tensão em qualquer ponto do fio.

1178 — Dada uma superfície S e dado um ponto pesado P, fora da superfície, determinar a trajectória rectilínea sôbre a qual o ponto deve ser obrigado a mover-se, sem atrito e sem velocidade inicial, para atingir a superfície no menor tempo possível.

1179 — Uma homografia vectorial transforma os vectores $\begin{cases} u=3I+2J+4K \\ v=3I-4J+2K \\ w=2I+3J-4K \end{cases}$ respectivamente em $\begin{cases} u_1=\ \ I+2J-4K \\ v_1=2I-\ \ J+2K \\ w_1=aI+2J-2K. \end{cases}$

¿Quais são os transformados dos vectores I, J e K?

Será possível determinar a de modo que a homografia seja degenerada? ¿Será possível determinar a de modo que a homografia seja uma dilatação?

Contêm pontos de exames finais de *Mecânica Racional* e *Física Matemática* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 5, 7 e 9.

PROBLEMAS

Chamamos a atenção dos leitores, alunos dos últimos anos dos liceus e candidatos à admissão a escolas superiores, para os problemas de matemáticas elementares adiante propostos. Parece-nos útil que lhes dediquem alguma atenção, porque a selecção foi orientada pelas suas necessidades mais urgentes.

As resoluções de problemas propostos devem-nos ser remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da «Gazeta».

Pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel escrita só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados) com a indicação do nome e da morada do leitor.

Algumas resoluções de problemas propostos chegaram à redacção e não puderam ser incluidas neste número por êste se encontrar já composto.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Matemáticas Elementares

1180 — Calcular os coeficientes a, b e c, na identidade: $a+b\cos 2x+c\cos 4x=\operatorname{sen}^4 x$.

1181 — Sendo $A=\operatorname{sen} 2x-k\operatorname{sen} x-\cos x+k$, e $B=\cos 2x-k\cos x-\operatorname{sen} x$, exprimir $\frac{A}{B}$ em função de $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, e mostrar que é igual a $\frac{t-1}{t+1}$.

1182 — Os 3 lados de um triângulo e uma das alturas são 4 têrmos consecutivos de uma progressão geométrica. Dada uma dessas 4 quantidades, calcular as outras.

1183 — Dado o triângulo isósceles ABC rectângulo em A, e a recta XX', paralela a AC e passando por B, determinar o lugar geométrico das posições do vértice A, quando B se desloca sôbre XX', mantendo-se fixo o vértice C, e conservando-se o triângulo isósceles e rectângulo em A.

1184 — Mostrar que, se a, b e c são as medidas dos 3 lados de um triângulo, por ordem crescente de grandeza, se verifica a desigualdade:

$$a^3+b^3+c^3+3abc > (a^2+bc)(a+b+c).$$

1185 — Sendo a área da esfera circunscrita a um tronco de cone circular de bases paralelas seis veves maior do que a área da esfera inscrita no mesmo tronco, calcular a relação entre os raios das bases do tronco.

Problemas n.º 1180 a 1185 propostos por A. A. Ferreira de Macedo.

1186 — Num quadrilátero $ABCD$ inscrito numa circunferência de raio $r=5$ os lados medem respectivamente $\overline{AB}=5\sqrt{3}$, $\overline{BC}=5$ e $\overline{CD}=8$.

¿Qual é o comprimento da diagonal $\overline{BD}$?

1187 — É o problema d'Alhagen proposto por F. G. M. no «Cours de Géométrie Élémentaire». Consideremos num bilhar circular uma bola colocada num ponto A. ¿Em que direcção se deve lançar a bola para que torne a passar pelo ponto A, após duas reflexões sucessivas?

Problemas n.os 1186 e 1187 propostos por M. C. Guerra dos Santos (Lisboa).

Matemáticas Superiores

1188 — Para que a expressão $dz+Adx+Bdy$ admita um factor integrante independente de z é necessário e suficiente que seja da forma $dz+ +zd\varphi+e^{-\varphi}d\psi$ em que φ e ψ são funções só de x e y.

1189 — Ache o lugar geométrico dos centros das esferas que passam por dois pontos fixos A e B e são tangentes a um plano fixo ω. Discussão.

(Modificado de Cezar Cosnitã, *American Mathematical Monthly*, Agosto-Setembro 1937).

1190 — Mostre que os 6 planos perpendiculares às 6 arestas dum tetraedro passando pelos meios das projecções das mesmas arestas sôbre um mesmo plano têm um ponto comum.

(N. Court, *American Math. Monthly*, Junho-Julho 1937).

1191 — Em que sistema de numeração pode um número de 4 algarismos da forma (abab) ser o quadrado dum número de 2 algarismos da forma (ba)? Verifique se a solução é única.

(V. Thébault, *American Math. Monthly*, Junho-Julho 1937).

1192 — Ache a equação geral das superfícies tais que: se por um ponto M duma delas se tira a normal MN até ao plano Oxy, o comprimento MN é igual a ON. (Licenciatura, *Poitiers*, 1895).

Problema n.º 1192 proposto por M. Alenquer.

1193 — ¿Qual a fórmula da trigonometria plana análoga à fórmula fundamental da trigonometria esférica? Passar desta para aquela.

Problema n.º 1193 proposto por Heliodoro Lopes (Coimbra).

1194 — Calcular o limite da expressão:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\frac{n}{3}+\frac{n(n-1)}{2!\times5}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\times7}+\cdots+ +(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\times(2k+1)}+\cdots\right)$$

Problema n.º 1194 proposto por Rui Verdial (Lamego).

SOLUÇÕES RECEBIDAS

1006 — Mostre que a série $\sum^{\infty}(z^n+z^{-n})^{-1}$ converge em qualquer ponto z tal que $|z|\neq1$. R: *O têrmo geral é* $u_n=(z^n+z^{-n})^{-1}=z^{-n}(1+z^{-2n})^{-1}$. *Se fôr*

$$|z|>1 \quad |u_n|^{\frac{1}{n}}=|z|^{-1}|1+z^{-m}|^{-\frac{1}{n}}=$$

$$=|z|^{-1}\left|1-\frac{1}{n}z^{-2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|<1;$$ *logo pelo critério de Cauchy a série é convergente. Anàlogamente para* $|z|<1$ *visto que* $u_n(z)=u_n(z^{-1})$.

Solução de M. Alenquer.

1076 — Num rectângulo $OAMB$ é $\overline{OA}=a$ e $\overline{OB}=b$. Por M faz-se passar uma recta que corta os prolongamentos de OA e OB, respectivamente, em P e Q. Sendo α o ângulo $O\hat{P}Q$, mostrar que é: $\overline{PQ}=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ quando fôr: $\operatorname{tg}^3\alpha=b/a$.

R: *É:* $\overline{PQ}^2=(a+\overline{AP})^2+(b+\overline{BP})^2=(a+b\cot g\,\alpha)^2+ +(b+a\operatorname{tg}\alpha)^2$ *ou seja* $\overline{PQ}^2=a^2+2ab\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}+ +b^2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+b^2+2ab\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}+a^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=a^2+ +3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}+b^2=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3.$

Logo, $\overline{PQ}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. q. c. d.

Solução de R. Verdial (Lamego).

Enviaram também soluções exactas: A. Simões (Sangalhos), M. C. Guerra dos Santos e M. R. Muginstein (Lisboa).

1077 — Eliminar φ entre as equações

$$\begin{cases} x=3\cos\varphi+\cos3\varphi \\ y=3\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}3\varphi.\end{cases}$$

R: $\begin{cases} x=3\cos\varphi+\cos2\varphi\cos\varphi-\operatorname{sen}2\varphi\operatorname{sen}\varphi \\ y=3\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}2\varphi\cos\varphi-\cos2\varphi\operatorname{sen}\varphi.\end{cases}$ *Ou:*

$$\begin{cases} x=3\cos\varphi+(\cos^2\varphi-\operatorname{sen}^2\varphi)\cos\varphi-2\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi \\ y=3\operatorname{sen}\varphi-2\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi-(\cos^2\varphi-\operatorname{sen}^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi\end{cases}$$

donde, $\begin{cases} x=3\cos\varphi(1-\operatorname{sen}^2\varphi)+\cos^3\varphi=4\cos^3\varphi \\ y=3\operatorname{sen}\varphi(1-\cos^2\varphi)+\operatorname{sen}^3\varphi=4\operatorname{sen}^3\varphi\end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \cos^2\varphi=\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3} \\ \operatorname{sen}^2\varphi=\left(\frac{y}{4}\right)^{2/3}\end{cases}$ *Finalmente:* $\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{4}\right)^{2/3}=1$.

ou $x^{2/3}+y^{2/3}=4^{2/3}$.

Solução de R. Verdial (Lamego).

Enviaram também soluções exactas: M. C. Guerra dos Santos (Lisboa) e M. R. Muginstein (Lisboa).

1078 — Eliminar x entre as equações

$$\begin{cases} \operatorname{sen}x+\operatorname{tg}x=a \\ \operatorname{sen}x\,.\,\operatorname{tg}x=b.\end{cases}$$

R: *A equação* $u^2-au+b=0$ *determina-nos:*

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} . \end{cases}$$ *Daqui, tira-se:*

$(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x)(\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x) = a\sqrt{a^2-4b} = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = -\operatorname{sen}^2 x \operatorname{tg}^2 x = -b^2$. *Finalmente,* $a^2(a^2-4b)=b^4$ *ou* $a^4-b^4=4a^2 b$.

Solução de R. Verdial (Lamego).
Enviou também solução exacta: M. R. Muginstein (Lisboa).

1079 — Dados quatro pontos A, B, C, D de um plano, tais que o quadrilátero que os tem por vértices não seja inscritível (numa circunferência), traçar uma circunferência equidistante dêsses quatro pontos. R: *Começamos por construir a circunferência que passa por 3 dos pontos, sejam* A, B *e* C. *Tomamos então metade da distância de* D *à circunferência e aumentamos ou diminuimos o seu raio, dêste comprimento, conforme* D *fôr exterior ou interior à primitiva circunferência traçada.*

Solução de R. Verdial (Lamego).
Enviou também solução exacta: A. Simões (Sangalhos).

1080 — Determinar a hipotenusa de um triângulo rectângulo, conhecida a soma dos catectos e o comprimento da bissectriz do ângulo recto. R: *Das equações*

$$\begin{cases} b+c=S \\ \dfrac{m}{b}=\dfrac{n}{c}=\dfrac{m+n}{b+c}=\dfrac{a}{S} \\ m^2=b^2+B^2-bB\sqrt{2} \\ n^2=c^2+B^2-cB\sqrt{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

cujas notações são evidentes, tira-se:

$$\begin{cases} b^2 a^2 = S^2(b^2+B^2-bB\sqrt{2}) \\ c^2 a^2 = S^2(c^2+B^2-cB\sqrt{2}) \end{cases}$$ *e por soma:* $a^2 \times a^2 = S^2(a^2+2B^2-SB\sqrt{2})$. *Desta equação resulta finalmente:*

$$\begin{cases} a=\sqrt{\sqrt{2}\,BS} \\ a=\sqrt{S^2-\sqrt{2}\,BS} . \end{cases}$$

Solução de R. Verdial (Lamego).
Enviou também solução exacta: M. C. Guerra dos Santos (Lisboa).

1086 — Resolva a equação $x^7+7px^5+14p^2x^3+7p^3x+q=0$. R: *Pela transformação* $x=yp^{1/2}$ *a equação dada* (1) *reduz-se à forma*

(2) $$y^7+7y^5+14y^3+7y+r=0$$

em que $r=qp^{-7/2}$; *fazendo agora* $y=z-z^{-1}$ *temos*

(3) $$z^7-z^{-7}+r=0$$

ou

(3') $$z^{14}+rz^7-1=0;$$

fazendo $z^7=u$ *temos uma equação do 2.º grau*

(4) $$u^2+ru-1=0$$

cujas raízes serão v *e* $w=-v^{-1}$. *As raízes de* (3') *serão pois* $z=v^{1/7}e^{2ki\pi/7}$, $z=w^{1/7}e^{2li\pi/7}$. *As raízes de* (2) *serão então* $y=v^{1/7}e^{2ki\pi/7}-v^{-1/7}e^{-2ki\pi/7}=v^{1/7}e^{2ki\pi/7}+w^{1/7}e^{-2ki\pi/7}$ *e esta expressão simétrica em* v *e* w *dá-nos as* 7 *raízes de* (2) *donde se tiram imediatamente as* 7 *raízes da proposta* (1).

1089 — O ortocentro dum triângulo circunscrito a uma parábola está sôbre a directriz. R: *Seja a parábola* $y^2=2px$. *Consideremos o triângulo circunscrito cujos lados são as rectas* $T_i\,(i=1,2,3)$ *tangentes à curva nos pontos de ordenada* y_i, *e cujos vértices são os pontos* V_i *(oposto a* T_i*). É fácil ver que a equação de* T_i *é*

$$2pX-2y_iY=y_i^2-2py_i . \qquad (T_i)$$

De T_i *e* T_j *pela regra de Cramer tira-se* V_k *de coordenadas* $$\begin{cases} x_k=\dfrac{y_i y_j}{2p} \\ y_k=\dfrac{y_i+y_j-2p}{2} . \end{cases}$$ *O suporte da altura* H_k *correspondente ao vértice* V_k *terá a equação* $\dfrac{X-x_k}{2p}=\dfrac{Y-y_k}{-2y_k}$ *ou* $y_k X+pY=\dfrac{y_1y_2y_3}{p}+\dfrac{p(y_i+y_j)-2p^2}{2}$ (H_k). *Para achar o ortocentro tomemos as rectas* H_k *e* H_j. *Subtraindo as respectivas equações vem* $(y_k-y_j)X=+\dfrac{P(y_j-y_k)}{2}$ *ou* $X=-\dfrac{P}{2}$ *que exprime que o ortocentro está sôbre a directriz.*

Soluções dos n.os 1086 e 1089 de M. Alenquer.

RECTIFICAÇÕES

Os enunciados correctos dos problemas números 1010 e 1090 são:

1010 — São dados um plano ω e um ponto O dêsse plano. Pede-se a equação geral das superfícies Σ tais que, sendo M um ponto de Σ, MN a normal em M ($N \in \omega$), MP a perpendicular a ω ($P \in \omega$), seja igual a uma constante dada a^2 a área do triângulo ONP. Com os mesmos dados fazer $N\widehat{O}P=$ *constante*.

1090 — Achar os máximos e mínimos de $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ em que x, y, z verificam a equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Organizado por J. da Silva Paulo

1 — Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band I. *Algebra und Zahlentheorie.* — O tomo I terá cêrca de 80 fôlhas de 16 páginas e será publicado em fascículos; preço RM. 90, com o desconto de 25 % para o estrangeiro. B. G. Teubner, Leipzig.

A publicação do Tomo I da Enciclopédia das Ciências Matemáticas da casa Teubner começou em 1898 e acabou em 1904. Durante os quarenta anos que decorreram depois da redacção dos primeiros fascículos, os diversos domínios da Álgebra e da Teoria dos Números receberam acréscimos consideráveis e a sua estrutura sofreu modificações. Uma redacção inteiramente nova tornava-se indispensável.

Esta segunda edição do Tomo I aparecerá sob a direcção dos dois sábios bem conhecidos H. Hasse (Goettingue) e E. Hecke (Hambourg) com a colaboração de matemáticos de diversos países.

O tomo I é dividido em dois volumes: I Aritmética e Álgebra; II Teoria dos Números.

O primeiro volume compreenderá dezoito artigos com os títulos:

A) *Grundlagen* — 1. Mathematische Logik, von H. Scholz, Münster. 2. Mathematische Grundlagenforschung, von A. Scmidt, Marburg. 3. Aufbau der Zalensystems, von F. Bachmman. 4. Darstellung der reellen Zahlen durch Grenzprozesse, von K. Knopp, Tübigen. 5. Allgemeine Mengenlehre, von E. Kamke.

B) *Algebra* — 6. Kombinatorik, von Schönhardt. 7. Lineare Algebra, von K. Henke, Bremen. 8. Algebraische Gleichungen mit reellen und komplexen Koeffizienten, von W. Specht. 9. Allgemeine Gruppentheorie, von W. Magnus. 10. Allgemeine Körpertheorie (Verfasser noch nicht bestimmt). 11. Allgemeine Modul-Ring-und Idealtheorie von W. Krull, Bonn. 12. Theorie der Polynomideale und Eliminationstheorie, W. Krull. 13. Theorie der Verbande. von H. Hermes, Münster und G. Köthe, Münster. 14. Algebra der hyperkomplexen Zahlensysteme. (Verfasser no chnicht bestimmt). 15. Allgemeine Darstellungstheorie von M. Deuring, Iena. 16. Theorie der Permutations-und Substitutionsgruppen (Verfasser noch nicht bestimmt). Mit einem Anhang: Theorie der Lieschen Ringe, von H. Zassenhaus. 17. Allgemeines über Invarianten, von W. Specht, Breslau. 18. Invarianten endlicher Gruppen von linearen Substitutionen. (Verfasser nich noch bestimmt).

Estas exposições apresentarão sob a forma de resumos sintéticos o estado actual dos principais domínios da Álgebra, com uma bibliografia tão completa quanto possível. No início de cada artigo, achar-se-à, a seguir ao sumário, um quadro dos principais termos técnicos acompanhados da sua tradução em inglês, francês e italiano. É uma inovação muito feliz e que será bem acolhida pelos leitores.

Apareceram já os fascículos com os números 2, 4 e 5 aos preços respectivamente de 6, 2,85 e 7,20 RM. para o estrangeiro. Os fascículos não são vendidos separadamente e só são fornecidos aos assinantes do vol. I.

(Extraído da notícia de H. Fehr publicada em L'Enseignement Mathématique, vol. 38 — 1939-1941).

2 — Harris HANCOCK — Development of the Minkowski Geometry of Numbers. — 1 vol. in 8.º de XXIV — 840 págs. preço $12.00. The Macmillan Company, New-York, 1939.

Bela obra americana inspirada pelo génio de Minkowski e o grande talento do prof. Harris Hancock. Nova passagem dos métodos hermitianos para as concepções modernas, na qual se acham os métodos matriciais, o descontínuo sob o contínuo, a aritmética sob a análise, as equações homogenizadas antes de serem aritmetizadas.

(Duma notícia de A. Buhl publicada em L'Enseignement Mathématique. vol. 38).

3 — L. E. DICKSON — Modern Elementary Theory of Numbers. — 1 vol. in 8.º, 309 págs. preço $3; The University of Chicago Press. 1939.

O autor propõe-se apresentar uma exposição concisa, elementar, dos capítulos clássicos da teoria dos números e de alguns dos grandes problemas a que se dedica a investigação moderna e para a resolução dos quais o autor deu valiosas contribuïções. O seu livro constitui um guia seguro e precioso para todos os que iniciam o estudo da teoria dos números.

(Duma notícia de H. Fehr publicada em L'Enseig. Math. vol. 38).

4 — C. E. VAN HORN — A Preface to Mathematics — 1 vol. in-16.º de 124 págs. Preço $2,50. Livraria Chapmann and Grimes, Boston. 1938.

Esta pequena obra é destinada principalmente à formação dos professores de matemáticas elementares do ensino secundário dos Estados Unidos da América. Contém uma série de artigos sôbre o objecto das matemáticas que se ensinam nos «colleges». É um livro útil também aos alunos universitários.

(Notícia publicada em L'Enseig. Math.).

5 — E. BOREL ET A. CHÉRON — **Théorie mathématique du bridge** — 1 vol. in-8.°, 410 págs; preço 175 frs.; Gauthier Villars. Paris, 1940.

Os Srs. E. Borel e A. Chéron, associaram-se para a publicação duma teoria matemática bastante desenvolvida dum dos jogos mais espalhados: o bridge. Não tiveram receio de falar a linguagem das probabilidades mesmo àqueles que não são «geómetras», contràriamente a Pascal que, por esta razão, se recusava discutir com qualquer contemporâneo notável.

Os bridgistas que, pela prática ou pela reflexão pessoal, adoptaram regras de conduta no bridge, acharão neste livro, quer uma confirmação destas regras, quer uma iniciação para as controlar ou corrigir conhecendo melhor as previsões teóricas.

(Duma notícia de Rolin Wavre (Genebra) publicada em L'Enseig. Math. vol. 38).

¿ QUE PENSA DA «GAZETA DE MATEMÁTICA» ?

RESULTADOS DO INQUÉRITO

Na impossibilidade de reproduzir todas as respostas recebidas, como era nosso desejo, limitamo-nos a publicar os nomes dos leitores que apresentaram respostas até à publicação do presente número, aos quais apresentamos os nossos agradecimentos.

Álvaro Simões (Sangalhos), António da Silva Raposo, António Vasques (Guarda), Carlos Guerra dos Santos (Lisboa), Carlos Serra, Isaías Brites (Lisboa), Rogério Gonçalves Ferreira (Lisboa), Rui Verdial (Bigorne), Tomaz Ferreira Rato (Cabo Verde).

Antes de passarmos a expôr os resultados é forçoso reconhecer:

1.° que é deminuto o número de respostas recebidas em relação à massa dos leitores da *Gazeta;*

2.° que o grupo de pessoas que responderam ao inquérito não constitui, nem se aproxima, duma amostra do conjunto dos leitores da *Gazeta.*

Na verdade, quanto ao primeiro ponto, basta chamar a atenção para o quadro da distribuïção geográfica dos assinantes da *Gazeta* que publicamos neste número, o qual apresenta um total de 472 assinantes, e observar que há muitos leitores da revista que a compram avulsamente. Podemos computar em 800 o número dos leitores actuais da *Gazeta* e constatar que as respostas obtidas correspondem a 1,1 % daquele número.

Relativamente ao segundo ponto, deve notar-se que a grande maioria das respostas não provêm de estudantes, muito embora estes constituam a quási totalidade dos leitores da *Gazeta.*

Em face dêste resultado a redacção é levada a solicitar, mais uma vez, de tôdas as pessoas que se interessam pela revista, uma resposta ao questionário publicado no n.° 11 e adiante transcrito.

Registamos a seguir as respostas recebidas. Possam estas servir de incentivo ao envio das outras.

A ordem pela qual se sucedem as respostas a cada pregunta dará uma ideia aproximada da predominância dumas em relação às outras.

1. *¿Quais são os defeitos que encontra na* Gazeta?

2. *¿Como julga que êsses defeitos poderiam ser atenuados ou eliminados?*

a) Excesso de pontos resolvidos em detrimento das outras secções. Resoluções por vezes mais extensas do que é exigido pelos enunciados.

Remédio: Dedicar-se menos aos pontos. Seleccionar os pontos cujas resoluções devem publicar-se.

b) Falta de artigos.

c) Falta de artigos de divulgação e iniciação.

d) Não ser publicada em dia certo.

e) Publicação muito espaçada. Deveria ser mensal.

3. *¿Das actuais secções da* Gazeta, *qual é a que mais lhe interessa?*

a) A secção pedagógica.

b) A secção de matemáticas elementares.

c) Tôdas.

4. *¿Gostaria de ver criadas na* Gazeta *quaisquer outras secções? ¿Quais? ¿Com que orientação?*

a) História das Matemáticas.
b) Estatística.
c) Astronomia.
d) Revista das revistas estrangeiras.
e) Indicações bibliográficas.
f) Iniciação matemática.
g) Lógica formal.
h) Curiosidades.

5. *¿Parece-lhe equilibrada a actual distribuïção do espaço pelas diferentes secções? ¿Que secções deveriam ser ampliadas?*

a) Ampliar a secção de «Pedagogia».
b) Reduzir o espaço destinado a pontos de exame em benefício de outras secções.
c) Ampliar a secção de «Problemas Propostos».
d) Ampliar a secção de assuntos teóricos
e) Publicar sempre a «Antologia».

6. *¿Será de adoptar o critério de que cada secção permanente deve apresentar, como conteúdo normal, um artigo de caracter didáctico, pontos, resoluções dêstes*?

a) Sim, com reduzido número de pontos.
b) Sim, com as resoluções reduzidas.
c) Sim, sem as resoluções, simplesmente os resultados.
d) Sim, com as resoluções desenvolvidas.
e) Sim.

7. *¿É de parecer que, além dos pontos de exames resolvidos, devem publicar-se também pontos de exames sem resoluções ou que o espaço destinado a estes deve ser consagrado a maior número daqueles?*

a) Todos os pontos devem ser acompanhados das resoluções ou dos resultados.

8. *¿Porque não utilisa a secção de consultas da* Gazeta?

a) Não tive ocasião.
b) Faço-o sempre que posso.
c) Porque não me responderam quando me dirigi pela primeira vez.

9. *¿Porque não nos tem enviado resoluções dos problemas propostos?*

a) Já enviei.
b) Por preguiça e falta de tempo.
c) Porque só no n.º 11 os encontrei ao meu alcance.

10. *¿Está disposto a colaborar na* Gazeta? *¿Como e em que medida poderá prestar colaboração?*

a) Propondo e resolvendo problemas.
b) Resolvendo pontos de matemáticas elementares.
c) Angariando assinantes.

*

Há quem alvitre, ainda, a criação duma editorial, sob a forma cooperativa, para a publicação de obras fundamentais de matemática.

Reservamos para o n.º 13, uma vez de posse de mais respostas, a exposição dos problemas levantados pelos resultados do inquérito e da maneira como a *Gazeta* os enfrentará.

Todavia, chamamos a atenção dos leitores para as modificações introduzidas neste número e as anunciadas para 1943, na capa da revista, as quais vêm ao encontro de alguns alvitres.

PUBLICAÇÕES PERIÓDICAS

Agros — Boletim dos estudantes de Agronomia. Ano 25, n.º 4 e 5 — Maio-Junho, 1942.

Boletin Matematico — (Buenos Aires). Revista argentina de Matemática. Ano XV, n.ºs 3-4, 5 e 7.

Euclides — (Madrid). Revista de Ciências Exactas, Fisico-Quimicas y Naturales. Ano I (1941) n.ºs 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ano II (1942) n.ºs 11 a 20.

Sintese — Revista semanal de cultura.

Portugaliae Mathematica — Vol. 3 (1942), Fasc. 3 — J. Vicente Gonçalves. *Sur les systèmes de fonctions à jacobien nul* — António Monteiro e Hugo Ribeiro. *L'opération de fermeture et ses invariants dans les systèmes partiellement ordonés* — J. Albuquerque. *La notion de «bord» en Topologie* — J. Vicente Gonçalves. *Sur quelques théorèmes classiques* — J. Vicente Gonçalves. *Sur une formule de récurrence.*

AOS ASSINANTES

Durante a primeira quinzena do próximo mês de Dezembro será feita a cobrança das assinaturas relativas aos números 13 (Janeiro de 1943) a 17 (Novembro de 1943). A Administração da *Gazeta de Matemática* pede e espera o melhor acolhimento da parte dos Srs. Assinantes para a referida cobrança. De acôrdo com as condições indicadas na última página da capa, a importância de cada cobrança é de Esc. 20$00, correspondendo a uma assinatura de cinco números.

A SITUAÇÃO FINANCEIRA DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

APÊLO AOS LEITORES

No número anterior da *Gazeta*, ao apresentarmos a situação financeira, dirigimos um apêlo aos leitores no sentido de angariarem novos assinantes, como meio — o único meio aceitável, como então se mostrou — para alcançar os objectivos impostos à revista e vencer os obstáculos de carácter financeiro.

Os primeiros resultados dêste apêlo estão patentes no quadro da distribuïção geográfica dos assinantes, que adiante se publica.

A *Gazeta* procurará corresponder à dedicação dos leitores. Assim, durante o ano de 1943 serão publicados cinco números, cada um com um mínimo de 32 páginas, ao preço anterior de Esc. 5$00 cada número avulso. O preço da assinatura anual, todavia, passará de Esc. 18$00 para Esc. 20$00, o que corresponde à redução de Esc. 4$50 para Esc. 4$00 no preço de cada número para os assinantes.

Como incentivo dum maior e mais continuado esfôrço na angariação de assinantes, a *Gazeta* deliberou oferecer uma assinatura de cinco números (N.^{os} 13 a 17) a todo o assinante que consiga a inscrição de dez novos assinantes até ao dia 30 de Novembro de 1942.

A angariação de dez novos assinantes não é extremamente difícil, tanto mais que teve início neste momento uma nova campanha de propaganda, dirigida especialmente aos alunos do primeiro ano de tôdas as escolas superiores, com cadeiras de matemática.

CONTA DO N.º 11 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Receita		*Despeza*	
Receita da venda avulso e por assinatura de 511 números	2.246$25	Composição, impressão, papel e brochura	2.525$35
Existência de 443 números ao preço de custo	1.178$75	Sua quota parte nas despezas gerais realizadas até 30 de Setembro de 1942	667$70
		30-IX-1942, *Superavit*	231$95
	3.425$00		3.425$00

CONTA DE RECEITA E DESPEZA

1942 Receita da venda avulso e por assinatura dos N.^{os} 1 a 13	13.506$35	1942 *Deficit em 1941*	1.072$70
		Composição, impresssão, papel e brochura do N.º 9	1.410$00
		Idem, idem do N.º 10	2.592$50
		Idem, idem do N.º 11	2.525$35
		Despezas de expedição, cobrança, propaganda, etc.	2.670$55
		SETEMBRO, 30 – *Saldo*	3.235$25
	13.506$35		13.506$35
1942 OUTUBRO, 1 — *Saldo*	3.235$25		

A. S. C. e O. M. R.

DISTRIBUIÇÃO GEOGRÁFICA DOS ASSINANTES DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Localidades	Na data da publicação do		
	N.º 10	N.º 11	N.º 12
Águeda	1	—	1
Alhandra	1	1	2
Amadora	1	2	1
Anadia	—	—	2
Aveiro	—	1	1
Barrozelas	—	—	1
Beja	—	1	1
Bombarral	1	1	1
Braga	1	2	3
Cacilhas	—	—	1
Campanhã	—	1	1
Caramulo	1	1	1
Carcavelos	1	1	2
Cascais	1	1	1
Castelo Branco	1	2	—
Cete	—	1	1
Chaves	1	1	1
Coimbra	8	8	14
Crato	—	1	—
Cruz Quebrada	1	1	—
Elvas	—	—	1
Ermezinde	—	1	1
Évora	—	1	—
Fafe	—	1	—
Famalicão	—	1	—
Figueira da Foz	2	2	2
Gaia	2	4	4
Guarda	—	—	1
Leiria	3	3	4
Lisboa	192	270	321
Mangualde	—	1	2
Miranda do Douro	—	—	1
Mont'Estoril	—	1	1
Moscavide	—	2	1
Oliveira do Hospital	—	—	1
Ovar	—	—	1
Paço d'Arcos	1	1	1
Parede	1	2	2
Pinheiro da Bemposta	—	—	1
Ponte da Barca	—	1	1
Portalegre	1	1	1
Pôrto	14	75	67
Póvoa	—	1	1
Queluz	2	2	2
Reguengos de Monsaraz	—	—	1
Ribeira de Santarém	1	1	1
Sangalhos	1	—	1
Santarém	3	5	7
Sintra	1	1	1
S. João do Estoril	—	1	1
Trofa	2	2	2
Urros	—	1	1
Vendas Novas	1	1	1
Viana do Castelo	—	1	1
Vila Franca de Xira	1	2	3
Totais	247	411	472

UM APÊLO

PONTOS DE EXAME

Escreveu-se no primeiro número da *Gazeta de Matemática* que nesta seriam publicados *todos* os pontos de exames de aptidão, de freqüência e finais das cadeiras de matemática de *tôdas* as escolas superiores.

Ao cabo de três anos de vida, a *Gazeta* tem de reconhecer que não cumpriu o que prometera. Pouco interessa averiguar das causas desta falta, porque entre estas avulta desmesuradamente uma outra falta da própria revista — a *Gazeta* nunca se dirigiu individualmente a *todos* os professores solicitando os pontos de exames. Alguns pedidos de pontos se fizeram, é certo, mas nunca se generalizaram, talvez como conseqüência da incipiente organização da redacção e secretaria duma revista que ensaiava os primeiros passos.

É justo referir ainda os oferecimentos expontâneos, que vários professores têm feito, dos pontos de exames das cadeiras que regem, e aos quais renovamos os nossos agradecimentos.

Como único meio, neste momento ao alcance da *Gazeta* e capaz de atenuar se não eliminar a falta em causa, lança-se um apêlo aos professores e assistentes das cadeiras de matemáticas de tôdas as escolas superiores para que enviem à *Gazeta*, logo após a realização de cada exame, os pontos respectivos, quando possível, acompanhados das resoluções. Tal envio, claro está, depende do prévio reconhecimento de alguma utilidade na publicação dos pontos de exames.

A *Gazeta de Matemática* agradece a atenção que êste apêlo merecer de todos os professores e assistentes das escolas superiores, quer ela se traduza no oferecimento de pontos, quer se manifeste pela reprovação fundamentada da publicação sistemática dos pontos de exames.

Com êste apêlo a *Gazeta* não perde de vista que é mais do que mero arquivo de pontos de exames, porque procura ser um jornal de cultura matemática.

Os quadros a seguir publicados, que mencionam os números da *Gazeta* correspondentes aos pontos dos exames indicados, têm em vista dois objectivos:

1.º — Documentar a falta a que atraz se aludiu;

2.º — Fornecer aos leitores da *Gazeta* um meio fácil de manusear a colecção da revista.

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Universidades clássicas				Universidade Técnica		
Faculdade de Ciências	Fac. Eng. P.	Geografia	Desenho	I. S. A.	I. S. C. E. F.	I. S. T.
1-2-3-4-6-7-8-9-10	1-2-3-5-7-8-10-11	3	1-3-8-9	1-8-10	1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11	1-3-5-7-8-10

UNIVERSIDADES CLÁSSICAS

Cadeiras	F. C. C.			F. C. L.			F. C. P.		
	1.º	2.º	Finais	1.º	2.º	Finais	1.º	2.º	Finais
Álgebra Superior	5-9	6	4-11	1-5	2-6-10	7-11			
Análise Superior		2	4	1	2-6	4			
Astronomia					2				
Cálculo Infinitesimal		6	8	1-5-9	2-10	4		10-11	9-11
Cálculo das Probabilidades. .				1-5-9	2-10				11
Complementos de A. e G. A .		2-5	5		2-5				
Física Matemática			7				5-9		
Geodesia				1					
Geometria Descritiva		10			10				
Geometria Projectiva.				1					
Geometria Superior.		2			2				
Matemáticas Gerais					11				
Mecânica Racional.				1	2-10-11	5	6	10	9
Mecânica Celeste.									5

UNIVERSIDADE TÉCNICA

Cadeiras	I. S. A.			I. S. C. E. F.			I. S. T.		
	1.º	2.º	Finais	1.º	2.º	Finais	1.º	2.º	Finais
Álgebra Superior. . } Matemáticas Gerais }		11		1-5-8-9	2-6-10	4-7-11	1-5-9	2-6-10-11	11
Cálculo Infinitesimal				1-5-9	2-6-10	7-8	1-5-9	2-6-10	8
Mecânica Racional. .				—	—	—	5-9	6-10	

Daedalo la Rim

A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

NO PRÓXIMO ANO DE 1943

publica cinco números por ano, no dia 15 de cada um dos meses seguintes:
Janeiro, Março, Maio, Julho, Novembro

Cada número terá um mínimo de 32 páginas e o preço de Esc. 5$00

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exame de freqüência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuïção normal dêstes pontos, pelos diferentes números da *Gazeta de Matemática* é a seguinte:

Exames de aptidão — N.os de Março, Maio e Julho.
1.º exame de freqüência — N.os de Novembro e Janeiro.
2.º exame de freqüência — N.os de Março e Maio.
Exames finais — N.os de Maio e Julho.

Cada um dêstes números poderá publicar e publicará, em geral, outros pontos além dos indicados.

A *Gazeta de Matemática* não é um mero arquivo de pontos, mas um jornal de cultura matemática.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A Administração da *Gazeta de Matemática* aceita assinaturas anuais de cinco números, ao preço de Esc. 20$00, para o que basta dar a indicação do nome, morada, local da cobrança e do número em que deve ter início. A assinatura será renovada, automàticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário.

Para simplificar o trabalho da cobrança, tôdas as assinaturas serão acertadas de modo tal que passem a ter início com o número de Janeiro de cada ano, pelo que a primeira cobrança das assinaturas, com início em qualquer outro número, será de Esc. 4$00, Esc. 8$00, Esc. 12$00 e Esc 16$00, correspondendo a 1, 2, 3 ou 4 números.

NÚMEROS ATRAZADOS

Encontram-se completamente esgotados os N.os 1, 9 e 10. Os restantes são ainda vendidos avulsamente ao preço de capa:

N.º 2 Esc. 3$00, N.º 3 Esc. 6$50, N.º 4 Esc. 3$00, N.º 5 Esc. 4$00, N.º 6 Esc. 4$00. N.º 7 Esc. 6$00. N.º 8 Esc. 4$00.

COLECÇÕES COMPLETAS

Com excepção duma pequena reserva que a Administração da *Gazeta de Matemática* retirou do comércio, estão inteiramente esgotadas as colecções completas. Encontram-se ainda à venda as seguintes colecções:

N.os 2 a 12 Esc. 55$00; N.os 10 a 12 Esc. 15$00.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial