GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXXII N.º 121-124 JANEIRO-DEZ. 1971

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração – Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º – Tel. 369449 – Lisboa-2

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo *prévio* entre o Autor e a Redacção.

ANO XXXII – N.os 121-124 GAZETA DE MATEMÁTICA JANEIRO/DEZ. – 1971

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA

Introdução à Teoria das Categorias, I

por **A. V. Ferreira** (*)

*Homenagem a Bento de Jesus Caraça
no XX aniversário da sua morte.*

Esta série de artigos tem como finalidade chamar a atenção do leitor de «Gazeta de Matemática» para algumas noções e resultados básicos de um capítulo fundamental da Matemática, cuja existência provàvelmente desconhece (1).

A Teoria das Categorias nasceu há cerca de um quarto de século e teve origem em certos desenvolvimentos da Topologia Algébrica. Os conceitos de *categoria, funtor, transformação natural* e *dualidade* de que nos ocupamos no primeiro capítulo deste trabalho, foram introduzidos no início da década de 40 por Eilenberg e MacLane em [5, 6] textos históricos de notável clareza que o leitor encontrará reproduzidos ([ ] apenas parcialmente) neste e no número 109-112 de «Gazeta de Matemática», na secção Antologia.

Embora os conceitos que citámos tivessem a sua origem numa determinada teoria matemática e se tornasse logo evidente a sua aplicabilidade noutros domínios, os progressos da Teoria das Categorias na década 45-55 foram assás lentos. Pode afirmar-se que o desenvolvimento desta teoria se operou verdadeiramente a partir dos anos 55-57 que foram assinalados pelo aparecimento de trabalhos fundamentais: Buchsbaum [2], Cartan e Eilenberg [4], Grothendieck [9].

Presentemente, a Teoria das Categorias é um capítulo vasto e autónomo da Matemática, cuja linguagem e métodos invadiram, e se tornaram essenciais à Álgebra, Topologia, Lógica Matemática, Análise Funcional, Geome-

(*) Do *Laboratório de Física e Engenharia Nucleares*, Sacavém, Portugal.

(1) Temos em vista especialmente os alunos dos dois últimos anos das Faculdades de Ciências e recèm-licenciados. Ao que sabemos, nos nossos cursos universitários, salvo raríssimas excepções, estas noções não são introduzidas e os aspectos funtoriais das teorias matemáticas clássicas não são convenientemente SALIENTADOS, daí resultando, em parte, aquela sensação de *pêle-mêle, imbroglio*, ou simples oportunismo expositivo, que tantas vezes nos assalta ao folhear textos universitários de conteúdo (eventualmente...) aceitável do ponto de vista científico. É doloroso constatar que num espaço muito breve será impossível a um licenciado pelas nossas Faculdades, e mesmo à maioria dos docentes, entender a mera linguagem em que os textos matemáticos estão escritos! Como falar, porém, da «crise» do nosso Ensino Superior, abstraindo do quadro mais amplo de estruturas, condicionamentos, interesses, ···, a atmosfera sediça acalentadora de todo um heterotrofismo arcaico e intelectualmente apoucado, na qual o *grex* que temos consentido ser vem vegetando?

tria Diferencial, Geometria Algébrica, ..., as quais, por sua vez, contribuem para o seu enriquecimento.

Històricamente, as noções de categoria, funtor, transformação natural, etc., determinaram uma viragem na evolução das teorias matemáticas comparável à que originou a introdução dos conceitos fundamentais da Álgebra, grupo, anel, corpo, etc.

A nossa exposição constará dos quatro capítulos: I – **CATEGORIAS E FUNTORES; GENERALIDADES**, II – **CATEGORIAS ABELIANAS. ÁLGEBRA HOMOLÓGICA**, III – **ESTRUTURAS E CATEGORIAS**, IV – **COHOMOLOGIA**

A amplitude dos temas a desenvolver e as dimensões de G. M. impõe-nos naturalmente uma certa sobriedade que o leitor compreenderá e compensará com uma série de iniciativas pessoais a que deixamos porta aberta *presque partout* no texto. Considerando a maturidade que o leitor, a quem este trabalho pode interessar, certamente possui, é possível que o tipo de exposição adoptado se revele particularmente eficiente.

O cap. I e as duas primeiras secções do segundo, de carácter propedeutico, contêm aquela acumulação primitiva de noções e resultados (alguns dos quais deveremos generalizar posteriormente) que toda a teoria deste género necessàriamente comporta. O conteúdo destas partes do texto será constantemente usado no seguimento, em geral, sem menção especial e, atendendo ao carácter elementar dos resultados, a justificação de uma grande parte destes é deixada ao cuidado do leitor, destinando-se as poucas demonstrações incluidas a evitar dificuldades de ordem psicológica. A leitura das restantes secções do cap. II não é estritamente necessária à compreensão do cap. III, pressupondo, contudo, o cap. IV o conhecimento da generalidade dos resultados anteriores. Os exercícios que propomos, quando não se destinem meramente a sensibilizar o leitor em relação à matéria exposta, contêm complementos importantes, por vezes indispensáveis a uma correcta compreensão do texto e são, nesta hipótese, de resolução simples.

As obras [3, 8, 10] da bibliografia abaixo indicada são introduções à Teoria das Categorias que recomendamos vivamente ao leitor. Ehresmann [7], cuja pág. V se encontra reproduzida na secção Antologia do N.º 109-112 da «Gazeta de Matemática», desenvolve a Teoria das Categorias com vista mormente a aplicações nos domínios da Análise e da Geometria.

Nestas obras o leitor encontrará mencionada a bibliografia mais relevante.

Optámos por uma posição heterodoxa em relação à bibliografia e mesmo, por vezes, ao nosso ponto de vista pessoal com o intuito de fornecer ao leitor um texto «imparcial» de maneira a facilitar-lhe a compreensão de trabalhos concebidos de pontos de vista e para finalidades diferentes. Procurámos todavia evitar uma exposição invertebrada certos de que bem pior do que adoptar uma atitude dogmática (e, portanto, intelectualmente fechada) seria apresentar um texto amorfo (e, portanto, irracional).

Procuraremos elucidar o leitor sobre os problemas fundacionais da teoria das categorias num Apêndice; no corpo do trabalho limitamo-nos a usar os circunlóquios habituais que, esperê-mo-lo, despertem no leitor uma ideia intuitiva do assunto.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Andreotti, *Généralités sur les catégories abéliennes*. Séminaire A. Grothendieck, 1957.

[2] Buchsbaum, *Exact categories and duality*. Tans-Amer. Math. Soc. **80** (1955), 1-34.

[3] I. Bucur e A. Deleanu, *Introduction to the theory of Categories and Functors*. John Wiley & Sons. London, 1968.

[4] H. Cartan e S. Eilenberg, *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956.

[5] S. Eilenberg e S. MacLane, *Natural isomorphisms in group theory*. Proc. Nat. Ac. Sc. **28** (1942), 537-543.

[6] ———, *General theory of natural equivalences*. Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 231-294.

[7] Ch. Ehresmann, *Catégories et Structures*. Dunod éd. Paris, 1965.

[8] P. Freyd, *Abelian Categories*. Harper and Row, London, 1966.

[9] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'Algèbre Homologique*. Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119-221.

[10] B. Mitchell, *Theory of Categories*. Academic Press, 1965.

La Jolla Conference [J], 1965 e *Midwest Category Seminar* [M], Springer Verlag, editor.

I — CATEGORIAS E FUNTORES; GENERALIDADES

1. Classes simplesmente algebrizadas. Seja $\mathcal{C}$ uma classe (não necessàriamente um conjunto) (2). Uma *lei de composição (interna) definida em* $\mathcal{C}$ é uma aplicação $\top$ de uma subclasse de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$. Se o domínio de $\top$ é $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$, diz-se que $\top$ é uma *lei de composição definida sobre* $\mathcal{C}$ ou uma *operação (binária) entre elementos de* $\mathcal{C}$. Uma *classe simplesmente algebrizada* é um par $(\mathcal{C},\top)$, que designaremos abreviadamente por $\mathcal{C}^{\top}$, cuja primeira coordenada é uma classe $\mathcal{C}$ e cuja segunda coordenada é uma lei de composição definida em $\mathcal{C}$. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada. A subclasse $\overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ diz-se *classe dos pares componíveis* de (ou em) $\mathcal{C}^{\top}$; se $(x,y)\in\overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$, i. e. se x é *componível* com y, $\top(x,y)$, que representaremos usualmente por $x\top y$, chama-se *composto de x e y* ou *composto de x com y*. $\mathcal{C}$ diz-se classe *subjacente* a $\mathcal{C}^{\top}$ e empregaremos frequentemente o abuso de linguagem que consiste em escrever $x\in\mathcal{C}^{\top}$, $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}^{\top}$ em vez de «$\mathcal{C}^{\top}$ é uma classe simplesmente algebrizada e $x\in\mathcal{C}$, $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}$». Se $\mathcal{A},\mathcal{B}\subset\mathcal{C}^{\top}$, $\mathcal{A}\top\mathcal{B}$ designará a subclasse de $\mathcal{C}$, $\top(\mathcal{A}\times\mathcal{B})\equiv\top(\mathcal{A}\times\mathcal{B}\cap\overset{-1}{\top}(\mathcal{C}))$; $\mathcal{A}\top\mathcal{B}$ é constituída pelos $x\top y$ tais que $x\in\mathcal{A}$, $y\in\mathcal{B}$ e x é componível com y. Para evitar um excessivo purismo de notação, escreveremos $a\top\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{A}\top b$) se $\mathcal{A}=\{a\}$ (resp. $\mathcal{B}=\{b\}$) sempre que não exista risco de confusão (3).

Suponhamos $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}^{\top}$. Se

$$\mathcal{A}\top\mathcal{A}\subset\mathcal{A}\ (\text{resp. } \mathcal{C}\top\mathcal{A}\subset\mathcal{A},\ \mathcal{A}\top\mathcal{C}\subset\mathcal{A}),$$

$\mathcal{A}$ diz-se uma *parte* ou *subclasse estável* (resp. *ideal esquerdo*, *ideal direito*) de $\mathcal{C}^{\top}$; se $\mathcal{A}$ é simultâneamente um ideal esquerdo e um ideal direito, $\mathcal{A}$ diz-se um *ideal* de $\mathcal{C}^{\top}$. A intersecção de uma família de partes estáveis (resp. ideais esquerdos, ideais direitos, ideais) de $\mathcal{C}^{\top}$ é uma parte estável (resp. ideal esquerdo, ideal direito, ideal) de $\mathcal{C}^{\top}$. Em particular, a intersecção das partes estáveis (resp. ideais esquerdos, ideais direitos, ideais) de $\mathcal{C}^{\top}$ que contêm uma subclasse $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$ diz-se *subclasse estável* (resp. *ideal esquerdo, ideal direito, ideal*) *gerada por* $\mathcal{A}$ *em* $\mathcal{C}^{\top}$ e designa-se por $\overleftrightarrow{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}^{\top}}$ (resp. $[\mathcal{A}_{\mathcal{C}^{\top}},\mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}},[\mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}}$) ou mais simplesmente, se não houver risco de confusão, por $\overleftrightarrow{\mathcal{A}}$ (resp. $[\mathcal{A},\mathcal{A}],[\mathcal{A}]$).

Exercícios: 1. Considere exemplos concretos de classes simplesmente algebrizadas $\mathcal{C}^{\top}$ e de classes $\mathcal{A},\mathcal{B}\subset\mathcal{C}^{\top}$; calcule $\mathcal{A}\top\mathcal{B}$. Mostre que pode ter-se $(\mathcal{A}\top\mathcal{A})\top\mathcal{A}\neq\mathcal{A}\top(\mathcal{A}\top\mathcal{A})$.

2. Considere exemplos concretos de classes simplesmente algebrizadas $\mathcal{C}^{\top}$ e classes

(2) Ver Apêndice no fim do trabalho

(3) Naturalmente, a própria notação $\mathcal{A}\top\mathcal{B}$ pode dar lugar a confusões. O leitor fàcilmente se aperceberá deste facto se considerar a lei de composição $\cup$ no conjunto das partes de $\mathcal{P}(E)$ onde $\mathcal{P}(E)$ designa o conjunto das partes de um conjunto E; a notação $A\cup B$, $A,B\subset\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ é ambígua.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^{\top}$; determine $\overleftarrow{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}^{\top}}, [\mathcal{A}_{\mathcal{C}^{\top}}, \mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}}, [\mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}}$. Dada uma classe simplesmente algebrizada $\mathcal{C}^{\top}$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^{\top}$ com um único elemento, determine $\overleftarrow{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}^{\top}}, [\mathcal{A}_{\mathcal{C}^{\top}}, \mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}}$ e $[\mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}}$; generalize.

Damos seguidamente cinco definições de enorme importância que o leitor (familiarizado com as estruturas algébricas clássicas de grupo, anel, espaço vectorial, etc. cf. J. S. Guerreiro, *Curso de Matemáticas Gerais*, Lisboa 1968; R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Paris 1963; ou, a nível mais avançado, Bourbaki, *Algèbre*, ch. I, II) certamente achará naturais e exemplificará adequadamente.

1.1. Definição. *Dada uma classe simplesmente algebrizada $\mathcal{C}^{\top}$ e uma parte $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$, chama-se* subclasse simplesmente algebrizada de $\mathcal{C}^{\top}$ definida por $\mathcal{A}$, *a classe simplesmente algebrizada $(\mathcal{A}, \top_{\mathcal{A}})$ onde $\top_{\mathcal{A}}$ designa a lei de composição definida em $\mathcal{A}$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in \mathcal{A}$, (i) x é componível com y sse*(1) *$(x, y) \in \overset{-1}{\top}(\mathcal{A})$ e (ii) $x \top_{\mathcal{A}} y = x \top y$. $\top_{\mathcal{A}}$ diz-se lei de composição induzida por $\mathcal{C}^{\top}$ em $\mathcal{A}$. Utilizaremos frequentemente o abuso de notação que consiste em designar $(\mathcal{A}, \top_{\mathcal{A}})$ por $\mathcal{A}^{\top}$. Tem-se $\overset{-1}{\top}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \overset{-1}{\top}(\mathcal{A}) \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{A})$. Se $\mathcal{A}$ é estável em $\mathcal{C}^{\top}$, a condição (i) pode substituir-se por «x é componível com y sse $(x, y) \in \overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$» e $\mathcal{A}^{\top}$ diz-se então uma* subclasse simplesmente algebrizada estável *de $\mathcal{C}^{\top}$; se $\mathcal{A}$ é um ideal* (resp. *ideal esquerdo, ideal direito*) *de $\mathcal{C}^{\top}$, $\mathcal{A}^{\top}$ diz-se um* subideal *ou* subclasse simplesmente algebrizada sobressaturada (*resp.* subideal esquerdo, subideal direito) *de $\mathcal{C}^{\top}$.*

1.2. Definição. *Dada uma classe simplesmente algebrizada $\mathcal{C}^{\top}$, chama-se* classe simplesmente algebrizada oposta *a $\mathcal{C}^{\top}$ e designa-se por $\mathcal{C}^{\top op}$ ou $\mathcal{C}^{\top}_{op}$ a classe simplesmente algebrizada $(\mathcal{C}, \top_{op})$ onde $\top_{op}$ designa a lei de composição definida em $\mathcal{C}$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in \mathcal{C}$, (i) x é componível com y sse $(y, x) \in \overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ e (ii) $x \top_{op} y = y \top x$. $\top_{op}$ diz-se* lei de composição oposta *a $\top$.*

Naturalmente, $\mathcal{C}^{\top op\, op} = \mathcal{C}^{\top}$. É também claro que se $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, $\overset{-1}{\top}_{op}(\mathcal{A})$ é a imagem de $\overset{-1}{\top}(\mathcal{A})$ pela simetria canónica de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (que associa a cada par (x, y) o par (y, x)).

Nestas condições, é fácil de verificar que $(\mathcal{A}, \top_{\mathcal{A}^{op}}) = (\mathcal{A}, \top_{op_{\mathcal{A}}})$ e o símbolo $\mathcal{A}^{\top op}$ tem um sentido claro. Vê-se também fàcilmente que $\mathcal{A}$ é estável em $\mathcal{C}^{\top}$ sse $\mathcal{A}$ é estável em $\mathcal{C}^{\top op}$, $\mathcal{A}$ é um ideal esquerdo de $\mathcal{C}^{\top}$ sse $\mathcal{A}$ é um ideal direito de $\mathcal{C}^{\top op}$, $\mathcal{A}$ é um ideal de $\mathcal{C}^{\top}$ sse $\mathcal{A}$ é um ideal de $\mathcal{C}^{\top op}$.

A relação que associa a cada classe simplesmente algebrizada a sua oposta é uma *dualidade* na teoria das classes simplesmente algebrizadas (cf. Apêndice no fim do artigo): toda a noção ou enunciado a respeito de uma classe simplesmente algebrizada se dualiza numa *co-noção* ou *co-enunciado;* se um enunciado é válido para todas as classes simplesmente algebrizadas, o enunciado dual ou co-enunciado é válido para todas as classes simplesmente algebrizadas.

De acordo com o que precede, a noção ideal direito é a noção dual ou co-noção de ideal esquerdo e as noções parte estável e ideal são *autoduais*.

O uso de princípios de dualidade permitir-nos-à frequentemente abreviar a exposição.

1.3. Definição. *Sejam $\mathcal{C}^{\top}$ e $\mathcal{D}^{\perp}$ classes simplesmente algebrizadas e f uma aplicação*

(1) Abreviatura de «se e só se».

de $\mathcal{C}$ *em* $\mathcal{D}$. f *diz-se* compatível com o par de leis de composição $\top, \perp$ (*definidas em* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$, *respectivamente*) *sse, quaisquer que sejam* $x, y \in \mathcal{C}$, *a relação* x *é componível com* y *em* $\mathcal{C}^{\top}$ *implica* f(x) *é componível com* f(y) *em* $\mathcal{D}^{\perp}$ *e* $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$. *Se* f *é compatível com* $\top, \perp$, *o triplo* $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ *chama-se* homomorfismo de $\mathcal{C}^{\top}$ em $\mathcal{D}^{\perp}$ definido por f. *Se* f *é uma injecção* (*resp. sobrejecção*), F *diz-se um* monohomomorfismo (*resp.* epihomomorfismo); F *diz-se um* dihomomorfismo *se for simultâneamente um* monohomomorfismo *e um* epihomomorfismo. *Se* f *é uma bijecção e* $\overset{-1}{f}$ *é também compatível com* $\perp, \top$, F *diz-se um* isomorfismo *de* $\mathcal{C}^{\top}$ *sobre* $\mathcal{D}^{\perp}$, $(\mathcal{D}^{\perp}, \overset{-1}{f}, \mathcal{C}^{\top})$ *chama-se* isomorfismo inverso *de* F *e representa-se por* $\overset{-1}{F}$.

F *diz-se um* antihomomorfismo *de* $\mathcal{C}^{\top}$ *em* $\mathcal{D}^{\perp}$ *sse* $(\mathcal{C}^{\top op}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ — *ou* $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp op})$ — *é um homomorfismo; em particular*, $(\mathrm{Id}_{op})_{\mathcal{C}^{\top}} \equiv (\mathcal{C}^{\top}, \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\top op})$ *é um anti-isomorfismo, dito canónico.*

Se $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ e $G = (\mathcal{D}^{\perp}, g, \mathcal{E}^{\odot})$ são homomorfismos, $(\mathcal{C}^{\top}, g \circ f, \mathcal{E}^{\odot})$ é um homomorfismo que se designa por *homomorfismo composto* de G e F e se representa por $G \circ F$; a composição de homomorfismos é associativa num sentido que o leitor explicitará fàcilmente. Se $\mathcal{C}^{\top}$ é uma classe simplesmente algebrizada, $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}^{\top}} \equiv (\mathcal{C}^{\top}, \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\top})$, onde $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ designa a aplicação idêntica de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$, é um isomorfismo chamado isomorfismo idêntico de $\mathcal{C}^{\top}$; tem-se $F \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^{\top}} = F$ e $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}^{\top}} \circ G = G$ quaisquer que sejam os homomorfismos $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ e $G = (\mathcal{D}^{\perp}, g, \mathcal{C}^{\top})$. A composição de antihomomorfismos, de homomorfismos e antihomomorfismos, e de antihomomorfismos com homomorfismos define-se de maneira análoga sendo imediato que o composto de dois antihomomorfismos é um homomorfismo e o composto de um homorfismo com um antihomomorfismo ou de um antihomomorfismo com um homomorfismo é um antihomomorfismo. Todo o antihomomorfismo se pode exprimir unicamente como composto de um anti-isomorfismo canónico com um homomorfismo (resp. de um homomorfismo com um anti-isomorfismo canónico). Para todo o homomorfismo (resp. antihomomorfismo) de $\mathcal{C}^{\top}$ para $\mathcal{D}^{\perp}$, $F \equiv ((\mathrm{Id\,op})_{\mathcal{C}^{\top}_{op}}) \circ F \circ ((\mathrm{Id\,op})_{\mathcal{D}^{\top}})$ é um homomorfismo (resp. antihomomorfismo) de $\mathcal{C}^{\top}_{op}$ para $\mathcal{D}^{\perp}_{op}$. Se $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo ou antihomomorfismo e $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^{\top}$ (resp. $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^{\perp}$), a subclasse de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{C}$), $f(\mathcal{A})$ (resp. $\overset{-1}{f}(\mathcal{A})$) designa-se por $F(\mathcal{A})$ (resp. $\overset{-1}{F}(\mathcal{A})$); se $\mathcal{A} = \{a\}$ escreve-se $F(a)$ (resp. $\overset{-1}{F}(a)$) em vez de $F(\mathcal{A})$ (resp. $\overset{-1}{F}(\mathcal{A})$) sempre que não exista risco de confusão com o elemento $F(a) \equiv f(a) \in \mathcal{D}$ (resp. $\overset{-1}{F}(a) \equiv \overset{-1}{f}(a) \in \mathcal{C}$, no caso de f ser bijectiva).

Definições: Com as notações de **1.3**, em vez de dizer que f é compatível com $\top, \perp$, é frequente dizer-se que f *define um homomorfismo de* $\mathcal{C}^{\top}$ *em* $\mathcal{D}^{\perp}$. A expressão f *define um antihomomorfismo de* $\mathcal{C}^{\top}$ *em* $\mathcal{D}^{\perp}$ tem também um sentido claro.

Exercícios: 1. Mostre que, se $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo, a imagem recíproca $\overset{-1}{F}(\mathcal{A})$ de uma parte estável (resp. ideal esquerdo, ideal direito, ideal) $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}^{\top}$ é uma parte estável (resp. ideal esquerdo, ideal direito, ideal) de $\mathcal{C}^{\top}$. Mostre com um exemplo que a imagem (directa) $F(\mathcal{A})$ de uma parte estável de $\mathcal{C}^{\top}$ não é necessàriamente uma parte estável de $\mathcal{D}^{\perp}$; indique condições suficientes para que: *a*) a imagem por F de uma parte estável de $\mathcal{C}^{\top}$ seja uma parte estável de $\mathcal{D}^{\perp}$; *b*) a imagem por F de um ideal de $\mathcal{C}^{\top}$ seja um ideal de $\mathcal{D}^{\perp}$.

2. Para toda a subclasse $\mathcal{A}$ de uma classe simplesmente algebrizada $\mathcal{C}^{\top}$, $\mathrm{Incl}_{\mathcal{A},\mathcal{C}^{\top}} \equiv (\mathcal{A}^{\top}, \mathrm{incl}_{\mathcal{A},\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\top})$, onde $\mathrm{incl}_{\mathcal{A},\mathcal{C}}$ designa a inclusão canónica de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$ um monohomorfismo, dito *inclusão* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}^{\top}$.

1.4. Definição. *Seja* $\mathcal{C}^{\top}$ *uma classe simplesmente algebrizada e* R *uma relação de equivalência em* $\mathcal{C}$. *Diz-se que* R *é* compatível *com* $\top$ *sse, quaisquer que sejam* $\mathrm{x}, \mathrm{x}', \mathrm{y}, \mathrm{y}' \in \mathcal{C}$, *se tem* $\mathrm{x} \top \mathrm{y} \equiv \mathrm{x}' \top \mathrm{y}'$ (mod. R) *sempre que* $\mathrm{x} \equiv \mathrm{x}'$ (mod. R), $\mathrm{y} \equiv \mathrm{y}'$ (mod. R), x *é componível com* y *e* x' *é componível com* y'. *Se* R *é compatível com* $\top$, *a correspondência que, a cada par constituído pelas classes de equivalência de elementos* x *e* y *de* $\mathcal{C}$ *tais que* x *é componível com* y, *associa a classe de equivalência de* $\mathrm{x} \top \mathrm{y}$, *é uma lei de composição definida na classe quociente* $\mathcal{C}/\mathrm{R}$ *que se chama* quociente de $\top$ por R *e se designa por* $\top/\mathrm{R}$; *a classe simplesmente algebrizada* $(\mathcal{C}/\mathrm{R}, \top/\mathrm{R})$ *diz-se então* (classe simplesmente algebrizada) quociente *de* $\mathcal{C}^{\top}$ *por* R *e representa-se usualmente por* $\mathcal{C}^{\top}/\mathrm{R}$.

Exercícios: 1. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada e R uma relação de equivalência em $\mathcal{C}$. R diz-se *compatível à direita* (resp. *à esquerda*) com $\top$ sse, quaisquer que sejam $x, x', y \in \mathcal{C}$ tais que x, x' são componíveis com y (resp. y é componível com x, x'), a relação $x \equiv x'$ (mod. R) implica $x \top y \equiv x' \top y$ (mod. R) (resp. $y \top x \equiv y \top x'$ (mod. R)). Mostre que se $\top$ está definida *sobre* $\mathcal{C}$, R é compatível com $\top$ sse R é compatível com $\top$ à direita e à esquerda.

2. Com as notações de 1.4, mostre que $\overset{-1}{\top/\mathrm{R}}(\mathcal{C}/\mathrm{R})$ é a imagem de $\overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ pela aplicação $(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mapsto (\varphi(x), \varphi(y)) \in \mathcal{C}/\mathrm{R} \times \mathcal{C}/\mathrm{R}$, onde φ designa a aplicação canónica de $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{C}/\mathrm{R}$.

3. Com as notações de 1.4, mostre que R é compatível com $\top$ sse R é compatível com $\top_{\mathrm{op}}$ e se tem $\top_{\mathrm{op}}/\mathrm{R} = (\top/\mathrm{R})_{\mathrm{op}}$.

1.5. Exercícios: 1. Dada uma classe simplesmente algebrizada $\mathcal{C}^{\top}$ e uma relação de equivalência em $\mathcal{C}$ compatível com $\top$, mostre que $\Phi = (\mathcal{C}^{\top}, \varphi, \mathcal{C}^{\top}/R)$, onde φ designa a aplicação canónica de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}/R$, é um epihomomorfismo dito *epihomomorfismo canónico* de $\mathcal{C}^{\top}$ sobre $\mathcal{C}^{\top}/R$. Verifique ainda que a passagem ao quociente goza da seguinte propriedade de factorização universal: *Se* $\mathrm{F} = (\mathcal{C}^{\top}, \mathrm{f}, \mathcal{D}^{\perp})$ *é um homomorfismo e* $\mathrm{x} \equiv \mathrm{y}$ (mod. R) *implica* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{y})$, *então existe um e um só homomorfismo* $\overline{\mathrm{F}} = (\mathcal{C}^{\top}/\mathrm{R}, \overline{\mathrm{f}}, \mathcal{D}^{\perp})$ *tal que* $\mathrm{F} = \overline{\mathrm{F}} \circ \Phi$. A relação «$x \equiv y$ (mod. R) implica $f(x) = f(y)$» costuma abreviar-se escrevendo «f (ou F) *é compatível com* R».

2. Mostre que, se $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo, a relação de equivalência R_f associada a f (que diremos também associada a F e designaremos igualmente por R_F)(5) é compatível com $\top$. Existe então um e um só homomorfismo $\overline{F} = (\mathcal{C}^{\top}/R_F, \overline{f}, \mathcal{D}^{\perp})$ tal que $F = \overline{F} \circ \Phi$, onde Φ designa o epihomomorfismo canónico de $\mathcal{C}^{\top}$ sobre $\mathcal{C}^{\top}/R_F$; $\overline{F}$ é um monohomomorfismo.

3. Mostre que se $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo, para toda a classe $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ e $\mathcal{A} \supset F(\mathcal{C})$), $F_{|\mathcal{A}} \equiv (\mathcal{A}^{\top}, f_{|\mathcal{A}}, \mathcal{D}^{\perp})$ (resp. ${}_{\mathcal{A}|}F \equiv (\mathcal{C}^{\top}, {}_{\mathcal{A}|}f, \mathcal{A}^{\perp})$) é um homomorfismo que se chama *restrição* (resp. *correstrição*) de F a $\mathcal{A}$. (Obs.: $f_{|\mathcal{A}}$ designa a aplicação $\mathcal{A} \to \mathcal{D}$ tal que $f_{|\mathcal{A}}(x) = f(x)$ para

(5) Dada uma aplicação f de uma classe X numa classe Y, chama-se *relação de equivalência associada a* f e designa-se por R_f a relação de equivalência em X tal que, quaisquer que sejam $x, y \in X$, $x \equiv y$ (mod. R_f) sse $f(x) = f(y)$.

todo o $x \in \mathcal{A}$, ${}_{\mathcal{A}|}f$ designa a aplicação $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ tal que ${}_{\mathcal{A}|}f(x) = f(x)$ para todo o $x \in \mathcal{C}$).

4. Seja $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ um homomorfismo. Com as notações de 2 e 3, se $\mathrm{incl}_{f(\mathcal{C}), \mathcal{D}}$ designa a inclusão canónica de $f(\mathcal{C})$, em $\mathcal{D}$, tem-se

$$(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp}) = (f(\mathcal{C})^{\perp}, \mathrm{incl}_{f(\mathcal{C}), \mathcal{D}}, \mathcal{D}^{\perp}) \circ$$
$$\circ (\mathcal{C}^{\top}/R_f, {}_{f(\mathcal{C})|}\bar{f}, f(\mathcal{C})^{\perp}) \circ \Phi(\mathcal{C}^{\top}, \varphi, \mathcal{C}^{\top}/R_f);$$

os factores do segundo membro, que se diz *decomposição canónica* de $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$, são, respectivamente, um monohomomorfismo, um dihomomorfismo e um epihomomorfismo. Em geral o dihomomorfismo intermédio da decomposição canónica não é um isomorfismo.

1.6. Definições: 1. Se $\mathcal{C}^{\top}$ é uma classe simplesmente algebrizada e f é uma injecção de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$, a correspondência que, a cada par $(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ tal que se tenha $x = f(x')$, $y = f(y')$ para algum par (x', y') de elementos componíveis em $\mathcal{C}^{\top}$, associa o elemento de $\mathcal{D}$, $f(x' \top y')$, é uma lei de composição em $\mathcal{D}$ que se chama *imagem (directa) de* $\top$ *por* f e se designa por $f(\top)$; $\mathcal{D}^{f(\top)}$ diz-se então *(classe simplesmente algebrizada) imagem (directa) de* $\mathcal{C}^{\top}$ *por* f. O triplo $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{f(\top)})$ é um monohomomorfismo e, se f é bijectiva, F é um isomorfismo. A lei de composição $f(\top)$ pode caracterizar-se do seguinte modo: *Se* $\perp$ *é uma lei de composição em* $\mathcal{D}$, $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ *é um homomorfismo sse* $(\mathcal{D}^{f(\top)}, \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^{\perp})$ *é um homomorfismo*. Mais geralmente, se f é uma aplicação de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$, existe quando muito uma lei de composição $\odot$ em $\mathcal{D}$ tal que, para qualquer lei de composição $\perp$ em $\mathcal{D}$, $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo sse $(\mathcal{D}^{\odot}, \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo. Se existe $\odot$ satisfazendo esta condição, $\top$ diz-se *(directamente) transportável por* f, $\odot$ designa-se por $f(\top)$ e recebe ainda o nome de *imagem (directa) de* $\top$ *por* f; $\mathcal{D}^{f(\top)}$ chama-se também *(classe simplesmente algebrizada) imagem (directa) de* $\mathcal{C}^{\top}$ *por* f.

1'. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada, $\mathcal{D}$ uma classe e f uma injecção de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$. A correpondência que, a cada par $(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ satisfazendo a condição $f(x)$ é componível com $f(y)$ em $\mathcal{C}^{\top}$ e $f(x) \top f(y) \in f(\mathcal{D})$, associa o elemento z de $\mathcal{D}$ tal que $f(z) = f(x) \top f(y)$, é uma lei de composição em $\mathcal{D}$ que se chama *imagem recíproca* ou *inversa de* $\top$ *por* f e se designa por $\overset{-1}{f}(\top)$; $\mathcal{D}^{\overset{-1}{f}(\top)}$ diz-se *(classe simplesmente algebrizada) imagem recíproca* ou *inversa de* $\mathcal{C}^{\top}$ *por* f. O triplo $F = (\mathcal{D}^{\overset{-1}{f}(\top)}, f, \mathcal{C}^{\top})$ é um monohomomorfismo e, se f é bijectiva, F é um isomorfismo. A lei de composição $\overset{-1}{f}(\top)$ pode caracterizar-se do seguinte modo: *se* $\perp$ *é uma lei de composição em* $\mathcal{D}$, $(\mathcal{D}^{\perp}, f, \mathcal{C}^{\top})$ *é um homomorfismo sse* $(\mathcal{D}^{\perp}, \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^{\overset{-1}{f}(\top)})$ *é um homomorfismo*. Mais geralmente, se f é uma aplicação de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$, existe quando muito uma lei de composição $\odot$ em $\mathcal{D}$ tal que, para qualquer lei de composição $\perp$ em $\mathcal{D}$, $(\mathcal{D}^{\perp}, f, \mathcal{C}^{\top})$ é um homomorfismo sse $(\mathcal{D}^{\perp}, \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^{\odot})$ é um homomorfismo. Se existe $\odot$ satisfazendo esta condição, $\top$ diz-se *recìprocamente* ou *inversamente transportável por* f, $\odot$ designa-se por $\overset{-1}{f}(\top)$ e recebe ainda o nome de imagem recíproca ou inversa de $\top$ por f; $\mathcal{D}^{\overset{-1}{f}(\top)}$ chama-se também *(classe simplesmente algebrizada) imagem recíproca* ou *inversa de* $\mathcal{C}^{\top}$ *por* f.

1.7. Exercícios: 1. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada. Se R é uma relação de equivalência em $\mathcal{C}$, mostre que $\top$ é transportável pela aplicação canónica $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathrm{R}$ sse R é compatível com $\top$ e que, nesta hipótese, se tem $\varphi(\top) = \top/\mathrm{R}$. Se f é uma aplicação de $\mathcal{C}$ numa classe $\mathcal{D}$, $\top$ é directamente transportável por f sse

R_f é compatível com $\top$; nesta hipótese, se φ designa a aplicação canónica de $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{C}/R_f$ e $\bar{f}$ é a aplicação $\mathcal{C}/R_f \to \mathcal{D}$ tal que $f=\bar{f}\circ\varphi$, tem-se $f(\top)=\bar{f}(\top/R_f)$ e pode afirmar-se que $(\mathcal{C}^{\top}/R_f, \bar{f}, f(\mathcal{C})^{f(\top)})$ é um isomorfismo.

1'. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada. Se $\mathcal{A}$ é uma parte de $\mathcal{C}$, $\top$ é inversamente transportável pela inclusão canónica de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$, $\mathrm{incl}_{\mathcal{A},\mathcal{C}}$, tendo-se $\overset{-1}{\mathrm{incl}}_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(\top) = \top$. Se f é uma aplicação de uma classe $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$, e $\top$ é inversamente transportável por f, tem-se $\overset{-1}{f}(\top) = {}_{f(\mathcal{D})|}\overset{-1}{f}(\top_{f(\mathcal{D})})$ e, para cada $\mathcal{E}\subset\mathcal{D}$ tal que $f(\mathcal{E})=f(\mathcal{D})$ e $f_{|\mathcal{E}}$ seja injectiva, f define um isomorfismo de $\mathcal{E}^{\overset{-1}{f}(\top)}$ sobre $f(\mathcal{D})^{\top}$. Indique uma condição necessária e suficiente para que $\top$ seja inversamente transportável por f.

2. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada e f uma aplicação de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$) tal que $\top$ é directamente (resp. inversamente) transportável por f. Mostre que, se $f\times f$ designa a extensão de f a $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$), i. e. a aplicação $\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}\times\mathcal{D}\to\mathcal{C}\times\mathcal{C}$) que associa a (x,y), $(f(x),f(y))$, então

$$\overset{-1}{f(\top)}(\mathcal{D}) = f\times f(\overset{-1}{\top}(\mathcal{C}))\quad (\text{resp. } \overset{-1}{\overset{-1}{f}(\top)}(\mathcal{D}) = \overset{-1}{f}\times\overset{-1}{f}(\overset{-1}{\top}(f(\mathcal{D})))).$$

$\top_{op}$ é directamente (resp. inversamente) transportável por f e $f(\top_{op})=f(\top)_{op}$ (resp. $\overset{-1}{f}(\top_{op})=\overset{-1}{f}(\top)_{op}$).

3. Com as hipóteses e notações de 2, se g é uma aplicação de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}$ em $\mathcal{D}$) e $f(\top)$ (resp. $\overset{-1}{f}(\top)$) é directamente transportável por g (resp. $\overset{-1}{f}(\top)$ inversamente transportável por g), $\top$ é directamente transportável por $g\circ f$ (resp. inversamente transportável por $f\circ g$) e $(g\circ f)(\top) = g(f(\top))$ (resp. $(\overset{-1}{f\circ g})(\top) = \overset{-1}{g}(\overset{-1}{f}(\top))$). Como aplicação demonstre o *princípio da transitividade* das subclasses e classes quocientes (simplesmente algebrizadas)[6].

Observação: Se $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo, $\top$ é directamente transportável por f mas $\perp$ não é, em geral, inversamente transportável por f; não existe uma dualidade perfeita entre as propriedades das noções directamente transportável e inversamente transportável.

1.8. Definição. *Seja* $(\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i\in I}$ *uma família de classes simplesmente algebrizadas e* $\mathcal{C}$ *o produto* $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$. *A correspondência que, a cada par* $((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I})$ *de elementos de* $\mathcal{C}$ *tal que, para todo o* $i\in I$, x_i *é componível com* y_i *em* $\mathcal{C}_i^{\top_i}$, *associa o elemento de* $\mathcal{C}$, $(x_i\top_i y_i)_{i\in I}$, *é uma lei de composição* $\top$ *definida em* $\mathcal{C}$ *que se chama* produto *da família* $(\top_i)_{i\in I}$ *e se designa por* $\prod_{i\in I}\top_i$; $\mathcal{C}^{\top}$ *diz-se então* (classe simplesmente algebrizada) produto *da família* $(\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i\in I}$ *e representa-se por* $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i^{\top_i}$.

Exercícios 1. Com as notações de 1.4, mostrar que $\overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ é a imagem de $\prod_{i\in I}\overset{-1}{\top_i}(\mathcal{C}_i)$ pela bijecção canónica

$$((x_i, y_i))_{i\in I}\mapsto((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I})$$

de $\prod_{i\in I}(\mathcal{C}_i\times\mathcal{C}_i)$ sobre $(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i)\times(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i)$.

---

(6) Se $\mathcal{A}^{\top}$ é subclasse (resp. quociente) de $\mathcal{B}^{\perp}$ e $\mathcal{B}^{\perp}$ é subclasse (resp. quociente) de $\mathcal{C}^{\odot}$, $\mathcal{A}^{\top}$ é subclasse (resp. quociente de $\mathcal{C}^{\odot}$).

2\. Com as notações de 1. 4, tem-se $\mathcal{C}^{\top\mathrm{op}} = \prod\limits_{i \in I} (\mathcal{C}_i^{\top_i \mathrm{op}})$.

1\. 9. Exercício: Seja $(\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i \in I}$ uma família de classes simplesmente algebrizadas e $\mathcal{C}^{\top}$ o seu produto. Designando, para cada $J \subset I$, pr_J a J-projecção canónica de $\mathcal{C} = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{C}_i$ (7), demonstre as afirmações que seguem:

1\. Para cada $J \subset I$, $\mathrm{Pr}_J \equiv (\mathcal{C}^{\top}, \mathrm{pr}_J, \prod\limits_{j \in J} \mathcal{C}_j^{\top_j})$ é um homomorfismo que se diz *J-projecção canónica* de $\mathcal{C}^{\top}$; se $J = \{j\}$ escrevemos Pr_j em vez de Pr_J e j-projecção canónica em vez de J-projecção canónica, identificando $\prod\limits_{j \in J} \mathcal{C}_j^{\top_j}$ com $\mathcal{C}_j^{\top_j}$ como é usual (sempre que não haja risco de confusão). $\mathcal{C}^{\top}$ goza da seguinte propriedade de factorização universal: *Se $\mathcal{D}^{\perp}$ é uma classe simplesmente algebrizada e, para cada $i \in I$, $F_i = (\mathcal{D}^{\perp}, f_i, \mathcal{C}_i^{\top_i})$ é um homomorfismo, então existe um e um só homomorfismo $F = (\mathcal{D}^{\perp}, f, \mathcal{C}^{\top})$ tal que, para cada $i \in I$, $F_i = \mathrm{Pr}_i \circ F$;* F designa-se por $\mathop{\times}\limits_{i \in I} F_i$, podendo verificar-se que f é a aplicação $\mathop{\times}\limits_{i \in I} f_i$ tal que $x \longmapsto (f_i(x))_{i \in I}$. Se $\mathcal{D}^{\perp} = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{D}_i^{\perp_i}$ e, para cada $i \in I$, $F_i = (\mathcal{D}^{\perp_i}, f_i, \mathcal{C}^{\top_i})$ é um homomorfismo, existe um e um só homomorfismo $F = (\mathcal{D}^{\perp}, f, \mathcal{C}^{\top})$ tal que, para todo $i \in I$, $\mathrm{Pr}_i \circ F = F_i \circ \mathrm{Pr}'_i$ (Pr'_i é a i-projecção de $\mathcal{D}^{\perp}$); F designa-se então por $\prod\limits_{i \in I} F_i$, podendo verificar-se que f é a aplicação $\prod\limits_{i \in I} f_i$ tal que $(x_i)_{i \in I} \longmapsto (f_i(x_i))_{i \in I}$. Sob hipóteses óbvias, podem demonstrar-se relações do tipo: $(\mathop{\times}\limits_{i \in I} F_i) \circ G = \mathop{\times}\limits_{i \in I} F_i \circ G$, $(\prod\limits_{i \in I} F_i) \circ \circ (\prod\limits_{i \in I} G_i) = \prod\limits_{i \in I} F_i \circ G_i$.

2\. Se $J \subset I$, $\top$ é transportável por pr_J, tendo-se, em geral, $\prod\limits_{j \in J} \top_j \neq \mathrm{pr}_J(\top)$.

Se, para todo o $i \in I$, $\mathcal{C}_i^{\top_i} = \mathcal{A}^{\perp}$ e $\Delta_{\mathcal{A}}^{I}$ designa a aplicação diagonal de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$ (8), $\perp$ é transportável por $\Delta_{\mathcal{A}}^{I}$ e tem-se $\Delta(\perp) = \top_{\Delta(\mathcal{A})}$; o monohomomorfismo $\mathrm{Incl}_{\mathcal{A}}^{I} = (\mathcal{A}^{\top}, \Delta_{\mathcal{A}}^{I}, \mathcal{C}^{\top})$ chama-se *inclusão canónica* de $\mathcal{A}^{\perp}$ em $\mathcal{C}^{\top} = (\mathcal{A}^{\perp})^I$.

3\. O produto de classes simplesmente algebrizadas goza da seguinte propriedade de transitividade dita *propriedade associativa*: se $\mathcal{S} = (J_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma partição de I (9) e σ designa a bijecção canónica, induzida por $\mathcal{S}$, de

$$\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i \quad \text{sobre} \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} \Big(\prod_{i \in J_\lambda} \mathcal{C}_i\Big) \ (10),$$

$$\Big(\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i^{\top_i}, \sigma, \prod_{\lambda \in \Lambda} \Big(\prod_{i \in J_\lambda} \mathcal{C}_i^{\top_i}\Big)\Big)$$

é um isomorfismo que se diz *isomorfismo canónico (induzido por $\mathcal{S}$)*.

Tem também lugar a seguinte *propriedade comutativa*: se $\varkappa$ é uma bijecção $J \to I$ e χ designa a bijecção canónica induzida por $\varkappa$ de $\prod\limits_{i \in I} \mathcal{C}_i$ sobre $\prod\limits_{j \in J} \mathcal{C}_{\varkappa(j)}$ (11),

$$\Big(\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i^{\top_i}, \chi, \prod_{j \in J} \mathcal{C}_{\varkappa(j)}^{\top_{\varkappa(j)}}\Big)$$

é um isomorfismo que se diz *isomorfismo canónico induzido por $\varkappa$*.

---

(7) Aplicação que associa a cada $(x_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{C}$' $(x_i)_{i \in J}$ em $\prod\limits_{i \in J} \mathcal{C}_j$.

(8) Aplicação que associa a cada x de $\mathcal{A}$ a família de $\mathcal{C}$, $(x)_I \equiv (x_i)_{i \in I}$ tal que $x_i = x$ para todo o $i \in I$.

(9) i. e. $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda = I$ e, quaisquer que sejam $\lambda, \mu \in \Lambda$, $J_\lambda \cap J_\mu \neq \emptyset$ sse $\lambda = \mu$.

(10) Tal que $\sigma((x_i)_{i \in I}) = ((x_i)_{i \in J_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$.

(11) Tal que $\chi((x_i)_{i \in I}) = (x_{\varkappa(j)})_{j \in J}$.

4. Se, para cada $i \in I$, R_i é uma relação de equivalência compatível com $\top_i$, designando por R a relação de equivalência $\prod_{i \in I} R_i$ (i. e. a relação de equivalência em $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ tal que $(x_i)_{i \in I} \equiv (y_i)_{i \in I}$ (mod. R) sse $x_i \equiv y_i$ (mod. R_i) para todo o $i \in I$), R é compatível com $\top = \prod_{i \in I} \top_i$ e $(\Pi(\mathcal{C}_i^{\top_i}/R_i), \tau, \mathcal{C}^{\top}/R)$, onde τ representa a bijecção canónica de $\prod_{i \in I}(\mathcal{C}_i/R_i)$ sobre $\mathcal{C}/R$ (12), é um isomorfismo que se diz canónico.

Observação. O leitor familiarizado com a teoria das estruturas de Bourbaki (cf. Bourbaki, Théorie des ensembles, ch. 4) notou, por exemplo, que os produtos e subclasses simplesmente algebrizados são do tipo *estrutura inicial* enquanto o quociente é do tipo *estrutura final*. Numa secção posterior daremos uma noção de estrutura e espécie de estrutura. Do ponto de vista em que nos colocamos, a teoria das estruturas é *posterior* à teoria das classes simplesmente algebrizadas, dependendo lògicamente desta.

A noção de *coproduto (directo)* pode introduzir-se do seguinte modo: se $((\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i \in I}$ é uma família de classes simplesmente algebrizadas e $\mathcal{C}$ designa a reunião disjunta da família $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$, $\coprod_{i \in I} \mathcal{C}_i = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i \times \{i\}$, a correspondência $\top$ que, a cada $((x, i), (y, j)) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tal que $i = j$ e x é componível com y em $\mathcal{C}_i^{\top_i}$, associa $((x \top_i y), i) \in \mathcal{C}$, é uma lei de composição em $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}^{\top}$ é o coproduto da família $((\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i \in I}$ e $\top$ representa-se por $\coprod_{i \in I} \top_i$. Tem-se $\overset{-1}{\top}(\mathcal{C}) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{incl}_i \times \mathrm{incl}_i (\overset{-1}{\top_i})(\mathcal{C}_i)$ onde, para cada $i \in I$, incl_i designa a injecção canónica $\mathcal{C}_i \to \coprod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ (tal que $x \longmapsto (x, i)$).

Deixamos ao cuidado do leitor enunciar e estabelecer as propriedades desta noção que correspondem (por certa dualidade) às propriedades do produto.

2. Neocategorias e Neofuntores. Grafos e Diagramas.

Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada. Um elemento u de $\mathcal{C}$ diz-se *idempotente* (em $\mathcal{C}^{\top}$) sse u é componível com u e $u \top u = u$. $u \in \mathcal{C}$ diz-se uma *identidade* (em $\mathcal{C}^{\top}$ ou de $\mathcal{C}^{\top}$) sse é idempotente e, para todo o $x \in \mathcal{C}$, a relação x é componível com u (resp. u é componível com x) em $\mathcal{C}^{\top}$ implica $x \top u = x$ (resp. $u \top x = x$). Se u e u' são identidades em $\mathcal{C}^{\top}$ e u é componível com u', tem-se naturalmente $u = u \top u' = u'$. Em particular, se $\top$ está definida sobre $\mathcal{C}$, duas identidades quaisquer em $\mathcal{C}^{\top}$ são iguais; uma identidade em $\mathcal{C}^{\top}$ diz-se então um *elemento neutro* em $\mathcal{C}^{\top}$. A subclasse de $\mathcal{C}$ constituida pelas identidades de $\mathcal{C}^{\top}$ designa-se por $\mathcal{C}_0^{\top}$ e considerar-se-á ou não munida da operação induzida por $\mathcal{C}^{\top}$ consoante o contexto (o risco de confusão é naturalmente insignificante para o leitor atento!). Se não houver prejuízo da clareza da exposição, $\mathcal{C}_0^{\top}$ abreviar-se-á para $\mathcal{C}_0$. Tem lugar a seguinte propriedade de associatividade:

2.1. Proposição. *Se* $u, u' \in \mathcal{C}_0^{\top}$ *e* $x \in \mathcal{C}^{\top}$, *os seguintes enunciados são equivalentes: (i)* $(u \top x) \top u'$ *tem sentido, (ii)* $u \top (x \top u')$ *tem sentido, (iii)* $u \top x$ *tem sentido e* $x \top u'$ *tem sentido; em qualquer destas situações tem-se* $(u \top x) \top u' = x = u \top (x \top u')$. *Tem-se ainda* $(u \top \mathcal{C}) \top u' = u \top (\mathcal{C} \top u') \equiv u \top \mathcal{C} \top u'$.

---

(12) Se $(\mathcal{A}_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (\mathcal{C}_i/R_i)$, $\tau((\mathcal{A}_i)_{i \in I})$ é a classe de equivalência mod. R de qualquer $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ tal que $x_i \in \mathcal{A}_i$ para todo o $i \in I$.

DEM. $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponhamos que $(u \top x) \top u'$ tem sentido; isto significa, naturalmente, que u é componível com x e $u \top x = x$ é componível com u'. Como $x \top u' = x$ e u é componível com x, $u \top (x \top u')$ tem sentido como pretendíamos.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (i)$ ficam ao cuidado do leitor. A relação $(u \top x) \top u' = x = u \top (x \top u')$ é evidente. Resta-nos pois verificar $(u \top \mathcal{C}) \top u' = u \top (\mathcal{C} \top u')$ o que não é difícil se observarmos que a relação «u é componível com y e y é componível com u'» é equivalente a $y \in (u \top \mathcal{C}) \top u'$ e a $y \in u \top (\mathcal{C} \top u')$. ∎

OBSERVAÇÃO. As noções elemento idempotente e identidade numa classe simplesmente algebrizada são autoduais.

$x \in \mathcal{C}$ diz-se *regular à esquerda* (em $\mathcal{C}^{\top}$) sse, quaisquer que sejam $y, z \in \mathcal{C}$, a relação x é componível com y, x é componível com z e $x \top y = x \top z$ implica $y = z$. Dualmente, x dir-se-á *regular à direita* (em $\mathcal{C}^{\top}$) sse, quaisquer que sejam $y, z \in \mathcal{C}$, a relação y é componível com x, z é componível com x e $y \top x = z \top x$ implica $y = z$. Se x é simultâneamente regular à esquerda e regular à direita, x diz-se *regular* (em $\mathcal{C}^{\top}$).

Usaremos também a convenção que consiste em escrever *x é um recíproco de y à esquerda em $\mathcal{C}^{\top}$* ou *y é um recíproco de x à direita em $\mathcal{C}^{\top}$* em vez de $(x, y) \in \overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ e $x \top y \in \mathcal{C}^{\top}_{\circ}$; dado $x \in \mathcal{C}$, se existe $y \in \mathcal{C}$ tal que y é um recíproco de x à esquerda (resp. direita) em $\mathcal{C}^{\top}$, x diz-se uma *unidade esquerda* (resp. *direita*) em $\mathcal{C}^{\top}$. Escreveremos ainda $\{x, y\}$ *é uma reciprocidade em* $\mathcal{C}^{\top}$ em vez de (x, y), $(y, x) \in \overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ e $x \top y$, $y \top x \in \mathcal{C}^{\top}_{\circ}$; dado $x \in \mathcal{C}$, se existe $y \in \mathcal{C}$ tal que $\{x, y\}$ é uma reciprocidade em $\mathcal{C}^{\top}$, x diz-se uma *unidade* em $\mathcal{C}^{\top}$ e y um *recíproco* de x em $\mathcal{C}^{\top}$. A subclasse das unidades em $\mathcal{C}^{\top}$ designa-se por $\mathcal{C}^{\top}_{u}$ e considerar-se-á munida ou não da lei de composição induzida por $\mathcal{C}^{\top}$ consoante o contexto, eventualmente abreviar-se-á para $\mathcal{C}_{u}$. Uma subclasse $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$ diz-se *saturada* sse $\mathcal{A} \top \mathcal{C}^{\top}_{u} \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{C}^{\top}_{u} \top \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.

Naturalmente, as noções unidade direita e recíproco à esquerda são duais de unidade esquerda e recíproco à direita, respectivamente; unidade e recíproco são noções autoduais. Uma identidade em $\mathcal{C}^{\top}$ é simultâneamente unidade e regular.

Nas classes simplesmente algebrizadas em que a lei de composição satisfaz certas propriedades de associatividade, existem relações estreitas entre alguns dos conceitos que acabamos de introduzir. Estas relações, que o leitor certamente suspeita e serão consideradas na secção **3. Categorias e Funtores**, não são válidas em geral.

EXERCÍCIO. Dada uma classe $\mathcal{C}$ com quatro elementos, mostre que existe uma e uma só classe simplesmente algebrizada $\mathcal{C}^{\top}$, a menos de um isomorfismo, satisfazendo as seguintes condições: (i) $\top$ está definida sobre $\mathcal{C}$, (ii) $\mathcal{C}^{\top} \neq \mathcal{C}^{\top}_{u} \neq \mathcal{C}^{\top}_{\circ}$ (iii) toda a unidade de $\mathcal{C}^{\top}$ possui mais do que um recíproco, (iv) se $x \in \mathcal{C}$, $x \notin \mathcal{C}^{\top}_{\circ}$, x é regular sse x não é uma unidade. Mostre ainda que existem classes simplesmente algebrizadas $\mathcal{C}^{\top}$ satisfazendo as condições (i) a (iv) e a seguinte condição suplementar: (v) $\mathcal{C}^{\top}$ é comutativa.

Na secção 1 descrevemos vários processos pelos quais se pode deduzir duma classe simplesmente algebrizada ou de uma família de classes simplesmente algebrizadas, outras classes simplesmente algebrizadas; damos seguidamente alguns resultados que indicam como as noções que acabámos de definir se comportam relativamente a esses processos. Omitimos as demonstrações por serem imediatas e não conterem aspectos que valha a pena salientar. O contraste existente entre as várias afirmações contidas em **2**. 2 e **2**. 3 merece porém uma certa reflexão da parte do leitor (e contra-exemplos adequados!).

2. 2. PROPOSIÇÃO. *Se* F *é um homomorfismo de* $\mathcal{C}^{\top}$ *em* $\mathcal{D}^{\perp}$ *e* $x \in \mathcal{C}$ *é idempotente em* $\mathcal{C}^{\top}$, F(x) *é idempotente em* $\mathcal{D}^{\perp}$. *Se* F respeita as identidades (i. e. *se a imagem de uma identidade de* $\mathcal{C}^{\top}$ *é uma identidade em* $\mathcal{D}^{\perp}$) *e* x *é uma unidade esquerda* (resp. *direita, unidade*) *em* $\mathcal{C}^{\top}$, F(x) *é uma unidade esquerda* (resp. *direita, unidade*) *em* $\mathcal{D}^{\top}$.

EXERCÍCIOS. 1. A condição «*F* respeita as identidades» é suficiente mas, em geral, não é necessária para que a imagem de uma unidade esquerda seja uma unidade esquerda.

2. Demonstre o enunciado que resulta de substituir em **2**. 2 os termos «homomorfismo» por «anti-homomorfismo», «direita» por «esquerda» e «esquerda» por «direita».

2. 3. PROPOSIÇÃO. *Sejam* $\mathcal{C}^{\top}$ *uma classe simplesmente algebrizada,* $\mathcal{D}$ *uma classe,* f *uma aplicação de* $\mathcal{C}$ *em* $\mathcal{D}$, g *uma aplicação de* $\mathcal{D}$ *em* $\mathcal{C}$ *e, finalmente,* $(\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i\in I}$ *uma família de classes simplesmente algebrizadas. Têm lugar as seguintes afirmações:* (i) *se* $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ *e* $x \in \mathcal{D}$ *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular*) *em* $\mathcal{C}^{\top}$, x *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular*) *em* $\mathcal{D}^{\top}$; (ii) *se* f *é injectiva e* $x \in \mathcal{C}$, x *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *em* $\mathcal{C}^{\top}$ *sse* f(x) *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *em* $\mathcal{D}^{f(\top)}$; (iii) *se* g *é injectiva,* $x \in \mathcal{D}$ *e* g(x) *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular*) *em* $\mathcal{C}^{\top}$, x *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular*) *em* $\mathcal{D}^{\overset{-1}{g}(\top)}$; (iv) $(x_i)_{i\in I}$ *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *em* $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i^{\top_i}$ *sse, para todo o* $i \in I$, x_i *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *em* $\mathcal{C}_i^{\top_i}$; (v) $x \in \prod_{i\in I} \mathcal{C}_i^{\top_i}$ é *idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *sse existe* $i \in I$ *e* $y \in \mathcal{C}_i$ *tal que* x *é imagem de* y *pela inclusão canónica* $\mathcal{C}_i \to \prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ *e* y *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *em* $\mathcal{C}_i^{\top_i}$.

A razão pela qual não fizemos referência em **2**. 3 à lei quociente de $\top$ por uma relação de equivalência R compatível com $\top$ e $f(\top), g^{-1}(\top)$, no caso de f, g não serem injectivas, é naturalmente a seguinte: para além do facto de a classe de equivalência de um idempotente de $\mathcal{C}^{\top}$ ser um idempotente de $\mathcal{C}^{\top}/R$, da imagem por f de um idempotente ser um idempotente e de x ser idempotente (resp. identidade) todas as vezes que $g(x)$ é idempotente (resp. identidade), nada mais se pode afirmar em geral.

Este facto motiva a seguinte

2. 4. DEFINIÇÃO. *Seja* $\mathcal{C}^{\top}$ *uma classe simplesmente algebrizada e* R *uma relação de equivalência em* $\mathcal{C}$. R *diz-se* bicompatível *com* $\top$ *sse* (*i*) R *é compatível com* $\top$ *e* (*ii*) *o epihomomorfismo canónico de* $\mathcal{C}^{\top}$ *sobre* $\mathcal{C}^{\top}/R$ *respeita as identidades.* R *diz-se* especial *para* $\top$ *sse, quaisquer que sejam* $x, x', y, y' \in \mathcal{C}$, *a relação* $x \equiv x' (\mathrm{mod.}\ R), y \equiv y' (\mathrm{mod.}\ R)$ *e* x *é componível com* y *implica* x' *é componível com* y' *e* $x \top y \equiv x' \top y'$ (mod. R). R *é bicompatível* (resp. *especial*) *para* $\top$ *sse é bicompatível* (resp. *especial*) *para* $\top_{op}$.

2.5. Proposição. *Com as notações de* **2.4**, *se* R *é bicompatível com* $\top$, *a classe de equivalência de um idempotente (resp. unidade esquerda, unidade direita, unidade) em* $\mathcal{C}^\top$ *é um idempotente (resp. unidade esquerda, unidade direita, unidade) em* $\mathcal{C}^\top/R$. *Se* R *é especial para* $\top$, R *é bicompatível com* $\top$ *e, além disso, se duas identidades de* $\mathcal{C}^\top$, u, v *são equivalentes* mod. R, *tem-se* u = v.

Dem. A primeira parte da proposição é consequência imediata de **2.2**. Suponhamos, pois, que R é especial para $\top$ e Φ é o epihomomorfismo canónico de $\mathcal{C}^\top$ sobre $\mathcal{C}^\top/R$. Se $u \in \mathcal{C}^\top_0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^\top/R$ e $\Phi(u)$ é componível com $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}^\top/R$, existem $x, y \in \mathcal{C}$ tais que $x \equiv u$ (mod. R), $\Phi(y) = \mathcal{A}$ e x é componível com y em $\mathcal{C}^\top$. Nestas condições, u é componível com y, tendo-se $\Phi(u) \top/R\, \Phi(y) = \Phi(y) = \Phi(u) \top/R\, \mathcal{A} = \mathcal{A}$ como pretendíamos. Um raciocínio análogo (ou então por dualidade) permitiria estabelecer $\mathcal{A} \top/R\, \Phi(u) = \mathcal{A}$, se $\mathcal{A}$ e $\Phi(u)$ são componíveis. Portanto, $\Phi(u)$ é uma identidade em $\mathcal{C}^\top/R$. Em consequência podemos afirmar que Φ respeita as identidades e R é bicompatível com $\top$.

Suponhamos agora que $u, v \in \mathcal{C}^\top_0$ e $u \equiv v$ (mod. R); da relação $u \equiv u$ (mod. R) e u componível com u em $\mathcal{C}^\top$, resulta logo u componível com v em $\mathcal{C}^\top$ e, portanto, $u = v$ como se pretendia. ∎

Observações: 1. Deixamos ao cuidado do leitor estabelecer propriedades da operação imagem de $\top$ por uma aplicação f não necessàriamente injectiva, tendo em atenção **2.5** e **1.7**.

2. Evidentemente, se F é um isomorfismo de $\mathcal{C}^\top$ sobre $\mathcal{D}^\perp$, a imagem por F de um idempotente, identidade, regular à esquerda, etc. ... de $\mathcal{C}^\top$ é um idempotente, identidade, regular à esquerda, etc... de $\mathcal{D}^\perp$.

O restante desta secção é inteiramente dedicado a alguns tipos de classes simplesmente algebrizadas de enorme importância.

2.6.1. Definição. *Uma classe simplesmente algebrizada* $\mathcal{C}^\top$ *diz-se uma* neocategoria *sse satisfaz os dois axiomas autoduais:*

(N C 1) $\quad \mathcal{C} = \bigcup\limits_{u, v \in \mathcal{C}^\top_0} u \top \mathcal{C} \top v$,

(N C 2) Se um dos elementos de $\mathcal{C}$, x, y, z é uma identidade em $\mathcal{C}^\top$, $(x \top y) \top z$ tem sentido sse $x \top (y \top z)$ tem sentido.

2.6.2. Definição. *Se uma classe simplesmente algebrizada* $\mathcal{C}^\top$ *satisfaz* (N C 1) *e*

(E D) Se $x, y \in \mathcal{C}^\top$ e x é componível com y, então x ou y é uma identidade em $\mathcal{C}^\top$,

$\mathcal{C}^\top$ *é uma neocategoria (por satisfazer trivialmente* (N C 2)*) e recebe o nome especial de* esquema de diagramas.

Seja $\mathcal{C}^\top$ *uma neocategoria e* $\top_{esq}$ *a lei de composição definida em* $\mathcal{C}$ *tal que* x *é componível com* y *em* $\mathcal{C}^{\top_{esq}}$ *sse* (x, y) *satisfaz as condições:*

(i) x é componível com y em $\mathcal{C}^\top$,

(ii) $x \in \mathcal{C}^\top_0$ ou $y \in \mathcal{C}^\top_0$,

(iii) $x \top_{esq} y = x \top y$.

$\mathcal{C}^{\top_{esq}}$ *é um esquema de diagramas dito* esquema de diagramas subjacente a $\mathcal{C}^\top$ *e designa-se por* $\mathcal{C}^\top_{esq}$, *tendo-se* $(\mathcal{C}^\top_{esq})_0 = \mathcal{C}^\top_0$.

2. 6. 3. DEFINIÇÃO. *Um homomorfismo de uma neocategoria* $\mathcal{C}_{\top}$ *para uma neocategoria* $\mathcal{D}^{\top}$ *diz-se um* neofuntor *sse respeita as identidades. Se um monohomomorfismo (resp. epihomomorfismo, dihomomorfismo)* F *é um neofuntor,* F *diz-se um* mononeofuntor (*resp.* epineofuntor, dineofuntor). *A classe simplesmente algebrizada dual de uma neocategoria é uma neocategoria e um antihomomorfismo* F *de uma neocategoria* $\mathcal{C}^{\top}$ *para uma neocategoria* $\mathcal{D}^{\perp}$ *diz-se um* antineofuntor *ou* neofuntor contravariante *sse* F *respeita as identidades. Um neofuntor de um esquema de diagramas para uma neocategoria diz-se um* diagrama.

OBSERVAÇÕES. **1.** A expressão *neofuntor covariante* que por vezes se encontra na literatura é sinónima de neofuntor.

2. A terminologia antimononeofuntor, anti-epineofuntor, antidineofuntor, cujo significado é óbvio, é pouco usada sendo preferível dizer mononeofuntor contravariante, epineofuntor contravariante e dineofuntor contravariante, respectivamente.

3. Todo o isomorfismo (resp. anti-isomorfismo) F de classes simplesmente algebrizadas respeita as identidades. Se estas classes são neocategorias, F e F^{-1} são automàticamente neofuntores (resp. antineofuntores), não sendo costume usar as designações isoneofuntor (resp. anti-isoneofuntor).

2. 7. EXERCÍCIOS: 1. Se $\mathcal{C}^{\top}$ é uma neocategoria, $I_{\text{esq}} = (\mathcal{C}^{\top}_{\text{esq}}, \text{id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\top})$ é um dineofuntor que se chama *inclusão canónica* de $\mathcal{C}^{\top}_{\text{esq}}$ em $\mathcal{C}^{\top}$.

2. Se $\mathcal{C}^{\top}$ é uma neocategoria, $\text{Incl}_{\mathcal{C}^{\top}_{\circ}, \mathcal{C}^{\top}}$ e $\text{Incl}_{\mathcal{C}^{\top}_{\circ}, \mathcal{C}^{\top}_{\text{esq}}}$ são mononeofuntores.

Se $\mathcal{C}^{\top}$ é uma neocategoria, tem lugar a seguinte propriedade de associatividade cuja demonstração, banalíssima, fica ao cuidado do leitor:

2. 8. PROPOSIÇÃO: *Se* x *ou* z *é identidade numa neocategoria* $\mathcal{C}^{\top}$ *e* $y \in \mathcal{C}$, *os três enunciados são equivalentes:* (i) $(x \top y) \top z$ *tem sentido,* (ii) $x \top (y \top z)$ *tem sentido,* (iii) x *é componível com* y *e* y *é componível com* z. *Se* y, *é uma identidade,* (i), (ii) *são equivalentes, implicam* (iii).

2. 9. EXERCÍCIO: Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma neocategoria; mostre que as condições (C) e (A) que passamos a enunciar são equivalentes. Condição (C). *Se um dos elementos* x, y, z *de* $\mathcal{C}$ *é uma identidade, os três enunciados seguintes são equivalentes: (i)* $(x \top y) \top z$ *tem sentido, (ii)* $x \top (y \top z)$ *tem sentido, (iii)* x *é componível com* y *e* y *é componível com* z [em qualquer das situações *(i)*, *(ii)* ou *(iii)* tem-se necessàriamente $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$]. Condição (A), *se* $x, y, z \in G$, *os três enunciados seguintes são equivalentes: (i)* $(x \top y) \top z$ *tem sentido, (ii)* $x \top (y \top z)$ *tem sentido, (iii)* x *é componível com* y *e* y *é componível com* z. (Nota: uma neocategoria tal que satisfaz (A) ou (C) e, em qualquer das situações (i), (ii) ou (iii), de (A), se tem $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$, é uma categoria, cf. secção **3**).

O teorema **2.** 10. 1. é um resultado fundamental e mostra que uma neocategoria é uma classe simplesmente algebrizada com um sistema completo e coerente de identidades (ver Fig. 1 que segue o Teorema).

2. 10. 1. TEOREMA: *Seja* $\mathcal{C}^{\top}$ *uma neocategoria. Se* u, v, u', v' *são identidades e* $(u, v) \neq (u', v')$, $u \top \mathcal{C} \top v \cap u' \top \mathcal{C} \top v' = \emptyset$. *Para cada* $x \in \mathcal{C}$, *existe então um e um só par* (u, v) *de identidades tal que* $x \in u \top \mathcal{C} \top v$; u *designa-se por* $\alpha_{\mathcal{C}^{\top}}(x)$ *e chama-se* origem *de* x, v *designa-se por* $\omega_{\mathcal{C}^{\top}}(x)$ *e chama-se* alvo *de* x. *As aplicações* $x \mapsto \alpha_{\mathcal{C}^{\top}}(x)$, $x \mapsto \omega_{\mathcal{C}^{\top}}(x)$ *de* $\mathcal{C}$ *em* $\mathcal{C}^{\top}_{\circ}$, *que designamos por*

$\alpha_{\mathcal{C}^\top}$, $\omega_{\mathcal{C}^\top}$ *respectivamente, são duas retracções de* $\mathcal{C}$ *sobre* $\mathcal{C}_0^\top$ *chamadas* retracções [12] canónicas *associadas a* $\mathcal{C}^\top$, *verificam naturalmente a relação:*

$$\alpha_{\mathcal{C}^\top} \circ \omega_{\mathcal{C}^\top} = \omega_{\mathcal{C}^\top}, \quad \omega_{\mathcal{C}^\top} \circ \alpha_{\mathcal{C}^\top} = \alpha_{\mathcal{C}^\top}$$

e gozam da propriedade.

(RC 1) *Se* x *é componível com* y *em* $\mathcal{C}^\top$, *então* $\omega_{\mathcal{C}^\top}(x) = \alpha_{\mathcal{C}^\top}(y)$ *e*

$$\alpha_{\mathcal{C}^\top}(x \top y) = \alpha_{\mathcal{C}^\top}(x),$$
$$\omega_{\mathcal{C}^\top}(x \top y) = \omega_{\mathcal{C}^\top}(y).$$

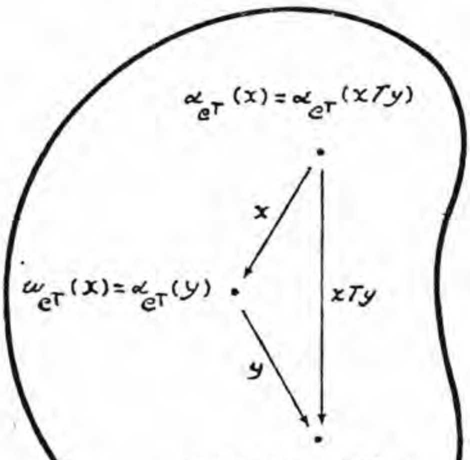


Fig. 1

Se $(\mathcal{C}^\top, f, \mathcal{D}^\perp)$ *é um neofuntor, tem-se*

(RC 2) $\alpha_{\mathcal{D}^\perp} \circ f = f \circ \alpha_{\mathcal{C}^\top}$ *e* $\omega_{\mathcal{D}^\perp} \circ f = f \circ \omega_{\mathcal{C}^\top}$.

DEM. Sejam u, v, u', v' como no enunciado. Se $u \top \mathcal{C} \top v \cap u' \top \mathcal{C} \top v' \neq \emptyset$, existe $x \in \mathcal{C}$ tal que u, u' são componíveis com x e x é componível com v, v'. Nestas condições, como $u \top (u' \top x)$ e $(x \top v) \top v'$ têm sentido, $u \top u'$ e $v \top v'$ têm sentido, tendo-se $u = u'$ e $v = v'$. Isto demonstra a primeira parte do teorema. Deixamos (RC 1) ao cuidado do leitor e vamos estabelecer (RC 2). Com as notações do enunciado, suponhamos $x \in \mathcal{C}$. $\alpha_{\mathcal{C}^\top}(x) \in \mathcal{C}_0^\top$ e, portanto, como f respeita as identidades, $f(\alpha_{\mathcal{C}^\top}(x)) \in \mathcal{D}_0^\perp$, tendo-se também $f(x) = f(\alpha_{\mathcal{C}^\top}(x) \top x) = f(\alpha_{\mathcal{C}^\top}(x)) \top f(x)$. Segue-se que $\alpha_{\mathcal{D}^\perp}(f(x)) \top (f(\alpha_{\mathcal{C}^\top}(x)) \top f(x))$ tem sentido; logo $\alpha_{\mathcal{D}^\perp}(f(x)) = f(\alpha_{\mathcal{C}^\top}(x))$ e $\alpha_{\mathcal{D}^\perp} \circ f = f \circ \alpha_{\mathcal{C}^\top}$. A relação $\omega_{\mathcal{D}^\perp} \circ f = f \circ \omega_{\mathcal{C}^\top}$ resulta imediatamente, por dualidade, da que acabámos de demonstrar. ∎

(Continua)

[12] Uma retracção duma classe $\mathcal{X}$ sobre uma subclasse $\mathcal{Y}$ é uma aplicação f de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ tal que $f|_{\mathcal{Y}} = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$.

Uma fórmula de recorrência para o cálculo dos coeficientes dos polinómios $He_n(x)$

por Rui João Baptista Soares

Um sistema de polinómios $P_n(x)$ de grau n diz-se *ortogonal* no intervalo $[a, b]$ relativamente à função peso $w(x)$ se

$$1) \quad \int_a^b w(x) \cdot P_m(x) \cdot P_n(x)\, dx = 0$$

$$m \neq n ; m, n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Estes polinómios cujo desenvolvimento explícito é

$$2) \qquad P_n(x) = a_n \sum_{m=0}^{N} b_m f_m(x)$$

verificam as seguintes relações importantes:

$$3) \quad f_2(x) \cdot P''_n(x) + f_1(x) \cdot P'_n(x) + c_n P_n(x) = 0$$

$$4) \quad f_2(x) \cdot P'_n(x) = f_1(x) \cdot P_n(x) + f_0(x) \cdot P_{n-1}(x)$$

$$5) \quad P_n(x) = \frac{1}{a_n \cdot w(x)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \{w(x) \cdot [f(x)]^n\}$$

(Fórmula de RODRIGUES)

$$6) \quad a_1 P_{n+1}(x) = (a_2 + a_3 x) \cdot P_n(x) - - a_4 \cdot P_{n-1}(x)$$

em que $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são independentes de n; c_n é uma constante que depende ùnicamente de n.

Se na expressão 2) fizermos

$$a_n = n!$$

$$N = \left[\frac{n}{2}\right] \quad \text{(maior inteiro contido em } n\text{)}$$

$$b_m = \frac{(-1)^m}{m!\, 2^m (n - 2m)!}$$

$$f_m(x) = x^{n-2m}$$

obtemos um sistema de polinómios designado por polinómios de HERMITE, cuja expressão será

$$7) \quad He_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m}{m!\, 2^m \cdot (n-2m)!} \cdot x^{n-2m} .$$

Os primeiros dez polinómios de HERMITE são os seguintes

$$He_0(x) = 1$$

$$He_1(x) = x$$

$$He_2(x) = x^2 - 1$$

$$He_3(x) = x^3 - 3x$$

$$He_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

$$8) \quad He_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$$

$$He_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$$

$$He_7(x) = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x$$

$$He_8(x) = x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105$$

$$He_9(x) = x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + \\ + 945x$$

$$He_{10}(x) = x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - \\ - 3150x^4 + 4725x^2 - 945\,.$$

Os polinómios $He_n(x)$ verificam a equação diferencial 3) com $f_2(x) = 1$, $f_1(x) = -x$, $c_n = n$; pondo $y = He_n(x)$ vem

9) $$y'' - xy' + ny = 0\,.$$

Fazendo em 4) $f_2(x) = 1$, $f_1(x) = 0$, $f_0(x) = n$ resulta

10) $$H'e_n(x) = n\,He_{n-1}(x)\,.$$

Uma fórmula de recorrência para o cálculo do valor do polinómio $He_{n+1}(x)$ pode obter-se de 6) com $a_1 = a_3 = 1$, $a_2 = 0$ e $a_4 = n$ donde

11) $$He_{n+1}(x) = x \cdot He_n(x) - n\,He_{n-1}(x)\,.$$

Os polinómios $He_n(x)$ são ortogonais em $]-\infty\,;+\infty[$ relativamente à função peso $w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Introduzindo em 5) a função $w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ e pondo $a_n = (-1)^n$, $f(x) = 1$ obtem-se

12) $$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-\frac{x^2}{2}}]$$

expressão algumas vezes utilizada para definição dos polinómios $He_n(x)$.

Seja

13) $$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

a distribuição de Gauss normalizada. Designando por $G^{(n)}(x)$ a derivada de ordem n da função $G(x)$ tem-se

14) $$He_n(x) = (-1)^n \frac{G^{(n)}(x)}{G(x)}$$

relação que pode ser aproveitada para tabelar $G^{(n)}(x)$ uma vez conhecidos os valores de $G(x)$ e $He_n(x)$.

Para valores de n suficientemente grandes torna-se impraticável o cálculo dos coeficientes que figuram em 7), pelo que se sugere a fórmula de recorrência

15) $$\begin{cases} c_{n,0} = 1 & n = 0,1,2,\cdots \\ c_{n+1,k+1} = c_{n,k+1} - (n-2k)\cdot c_{n,k} & \\ & k = 0,1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right] \\ c_{n,k} = 0 & k > \left[\frac{n}{2}\right]. \end{cases}$$

Com efeito, sendo $c_{n+1,k+1}$ o coeficiente de ordem $(k+1)$ do polinómio de grau $(n+1)$, temos sucessivamente

$$c_{n+1,k+1} =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,2^{k+1}\cdot[n+1-2(k+1)]!} =$$

$$= (-1)^{k+1}[(n-2k-1) + 2(k+1)]\cdot$$

$$\cdot \frac{n!}{(k+1)!\,2^{k+1}\cdot(n-2k-1)!} =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{n!}{(k+1)!\,2^{k+1}[n-2(k+1)]!} -$$

$$-(-1)^k \frac{(n-2k)\,n!}{k!\,2^k\cdot(n-2k)!} =$$

$$= c_{n,k+1} - (n-2k)\cdot c_{n,k}\,.$$

OBS. 1. O valor $(n-2k)$ é o expoente do monómio cujo coeficiente é $c_{n,k}$.

OBS. 2. As fórmulas de recorrência indicadas em (15) são de fácil adaptação ao cálculo automático tendo sido feita a determinação dos coeficientes dos primeiros vinte polinómios com o auxílio do programa apresentado.

OBS. 3. Verificada a rapidez de crescimento dos coeficientes é aconselhável, para a obtenção dos valores exactos, que se trabalhe em dupla precisão quando o seu cálculo se fizer com o auxílio de um computador.

OBS. 4. A sub-rotina HERMRS apresentada tem a possibilidade de determinar os coeficientes por linhas $(LH=1)$ ou por colunas $(LH=2)$ sendo este método mais rápido.

BIBLIOGRAFIA

[1] AGNEW, RALPH PALMER. *Differential equations* — 1960 — 2.ª edição — McGraw-Hill Book Company, Inc. New York.

[2] ANGOT, ANDRÉ. *Compléments de Mathématiques* — 1972 — 6.ª edição — Collection Thechnique et Scientifique du C. N. E. T. Paris.

```
      J2 = 1
      DO5I = 2 , J1
      J2 = J2 + 2
      DO5J = J2 , N
      I1 = J - J2 + 1
      IRS (J , I) = - I1 * IRS (J - 1 , I - 1) + IRS (J - 1 , I)
    5 CONTINUE
      RETURN
      END
```

1.									
1.									
1.	−1.								
1.	−3.								
1.	−6.	3.							
1.	−10.	15.							
1.	−15.	45.	−15.						
1.	−21.	105.	−105.						
1.	−28.	210.	−420.	105.					
1.	−36.	378.	−1260.	945.					
1.	−45.	630.	−3150.	4725.	−945.				
1.	−55.	990.	−6930.	17325.	−10395.				
1.	−66.	1485.	−13860.	51975.	−62370.	10395.			
1.	−78.	2145.	−25740.	135135.	−270270.	135135.			
1.	−91.	3003.	−45045.	315315.	−945945.	945945.	−135135.		
1.	−105.	4095.	−75075.	675675.	−2837835.	4729725.	−2027025.		
1.	−120.	5460.	−120120.	1351350.	−7567560.	18918900.	−16216200.	2027025.	
1.	−136.	7140.	−185640.	2552550.	−18378360.	64324260.	−91891800.	34459425.	
1.	−153.	9180.	−278460.	4594590.	−41351310.	192972780.	−413513100.	310134825.	−34459425.
1.	−171.	11628.	−406980.	7936110.	−87297210.	523783260.	−1571349780.	1964187225.	−654729075.
1.	−190.	14535.	−581400.	13226850.	−174594420.	1309458150.	−5237832600.	9820936125.	−6547290750.

```
C     CALCULO DOS COEFICIENTES DOS POLINOMIOS DE HERMITE
      DOUBLE PRECISION IRS (21, 11)
      DIMENSION CPH(21, 11)
      COMMON/CO1/IRS
      READ(1, 100) N, LH
  100 FORMAT(I3, I2)
      CALL HERMRS(N, LH)
      DO2I = 1, N
      J1 = (I - 1)/2 + 1
      DO1J = 1, J1
      CPH(I, J) = IRS(I, J)
    1 CONTINUE
      WRITE(3, 200)(CPH(I, J), J = 1, J1)
    2 CONTINUE
  200 FORMAT(1H ,F3.0,F8.0,F9.0,F11.0,F12.0,F14.0,2(F14.0,F15.0),F13.0)
      STOP
      END

      SUBROUTINE HERMRS(N, LH)
      DOUBLE PRECISION I1, IRS(21, 21)
      COMMON/CO1/IRS
      J1 = (N - 1)/2 + 1
      DO1I = 1, N
      DO1J = 1, J1
      IRS(I, J) = 0.
    1 CONTINUE
      IF(LH.EQ.2) GOTO3
      IRS(1, 1) = 1.
      DO2I = 2, N
      IRS(I, 1) = IRS(I - 1, 1)
      J1 = (I + 1)/2
      I1 = I
      DO2J = 2, J1
      I1 = I1 - 2.
      IRS(I, J) = - I1 * IRS(I - 1, J - 1) + IRS(I - 1, J)
    2 CONTINUE
      RETURN
    3 CONTINUE
      DO4I = 1, N
      IRS(I, 1) = 1.
    4 CONTINUE
      J2 = 1
      DO5I = 2, J1
      J2 = J2 + 2
      DO5J = J2, N
      I1 = J - J2 + 1
      IRS(J, I) = - I1 * IRS(J - 1, I - 1) + IRS(J - 1, I)
    5 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Fourier series for G-function of two variables

by **H. C. Gulati**

Department of Mathematics, Govt. College, Mandsaur, India

1. Introduction. The object of this paper is to establish four integrals involving G-function of two variables and use them to evaluate four FOURIER series for G-function of two variables. Some results given by KESARWANI [5] and BAJPAI [2] are shown as particular cases.

The symbol $\Delta(\delta, \alpha)$ represents the set of parameters $\alpha/\delta, (\alpha+1)/\delta, \cdots, (\alpha+\delta-1)/\delta$ where δ is a positive integer and (a_p) stands for $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p$ throughout this paper.

AGARWAL [1] and SHARMA [8] defined the G-function of two variables in the form of MELLIN-BARNES type integral which has been symbolically denoted by BAJPAI [3, (1. 1)] as

$$(1.1) \qquad G^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2), q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1}); (c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1}); (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1 - a_j + s) \prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - t) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - c_j + t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_j + s + t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1} \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j - s) \prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + t) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j - t)} \times$$

$$\times \frac{x^s y^t}{\prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - s - t) \prod_{j=1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + s + t)} \, d s \, d t .$$

The contour L_1 is in the s-plane and runs from $-i\infty$ to $+i\infty$ with loops if necessary, to ensure that the poles of $\Gamma(b_j - s), j = 1, 2, \cdots, m_1$ lie on the right and the poles of $\Gamma(1 - a_j + s), j = 1, 2, \cdots, n_1$ and $\Gamma(1 - e_j + s + t), j = 1, \cdots, n_3$ to the left of the contour. Similarly the contour L_2 is in the t-plane and runs from $-i\infty$ to $+i\infty$ with loops if necessary, to ensure that the poles of $\Gamma(d_j - t), j = 1, 2, \cdots, m_2$ lie on the right and the poles of $\Gamma(1 - c_j + t), j = 1, 2, \cdots, n_2$ and $\Gamma(1 - e_j + s + t), j = 1, 2, \cdots, n_3$ lie on the left of the contour.

Provided that $0 \leq m_1 \leq q_1, 0 \leq m_2 \leq q_2, 0 \leq n_1 \leq p_1, 0 \leq n_2 \leq p_2, 0 \leq n_3 \leq p_3$; the integral converges if

$$(1.2)\qquad \begin{cases} (p_3+q_3+p_1+q_1) < 2(m_1+n_1+n_3)\,;\,(p_3+q_3+p_2+q_2) < 2(m_2+n_2+n_3)\,; \\ |\arg x| < \left[m_1+n_1+n_3-\dfrac{1}{2}(p_1+q_1+p_3+q_3)\right]\pi\,, \\ |\arg y| < \left[m_2+n_2+n_3-\dfrac{1}{2}(p_2+q_2+p_3+q_3)\right]\pi\,. \end{cases}$$

The following formulae are required in the proofs.

$$(1.3)\qquad \int_0^\pi \sin(2n+1)\theta\,(\sin\theta)^{1-2\zeta}\,d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/2-\zeta)\,\Gamma(n+\zeta)}{\Gamma\zeta\,\Gamma(2-\zeta+n)}\ \mathrm{Re}(3-\zeta)>0\,,\ n=0\,,1\,,\cdots$$

which follows from [(7), p. 80]

$$(1.4)\qquad \int_0^\pi \cos n\theta\,(\sin\theta/2)^{-2\zeta}\,d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\zeta+n)\,\Gamma(1/2-\zeta)}{\Gamma\zeta\,\Gamma(1-\zeta+n)}\ \mathrm{Re}(1-2\zeta)>0,\ n=0,1,2,\cdots$$

which follows from [6, p. 143]

2. The integrals to be evaluated are

$$(2.1)\qquad \int_0^\pi \sin(2u+1)\theta\,(\sin\theta)^{1-2\zeta}\,G^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{matrix} x\,(\sin\theta)^{-2\delta} \\ \\ y \\ \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} (a_{p_1});(c_{p_2}) \\ (e_{p_3}) \\ (b_{q_1});(d_{q_2}) \\ (f_{q_3}) \end{matrix}\right] d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\delta}}\ G^{(m_1+\delta,m_2);(n_1+\delta,n_2),n_3}_{(p_1+2\delta,p_2),p_3;(q_1+2\delta,q_2),q_3}\left[\begin{matrix} x \\ \\ y \\ \\ \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} \Delta(\delta,1-\zeta-u),(a_{p_1}),\Delta(\delta,2-\zeta+u);(c_{p_2}) \\ (e_{p_3}) \\ \Delta\left(\delta,\dfrac{3}{2}-\zeta\right),(b_{q_1}),\Delta(\delta,1-\zeta);(d_{q_2}) \\ (f_{q_3}) \end{matrix}\right]$$

where

$$\mathrm{Re}\,[3-2\zeta+2\delta(1-a_j)]>0\,,\ j=1\,,2\,,\cdots n_1\,;\ u=0\,,1\,,2\,,\cdots.$$

Other conditions of validity being the same as (1.2)

$$(2.2)\qquad \int_0^\pi \sin(2u+1)\theta\,(\sin\theta)^{1-2\zeta}\,G^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{matrix} x \\ \\ y\,(\sin\theta)^{-2\delta} \\ \\ \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} (a_{p_1});(c_{p_2}) \\ (e_{p_3}) \\ (b_{q_1});(d_{q_2}) \\ (f_{q_3}) \end{matrix}\right] d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\delta}}\, G^{(m_1, m_2+\delta);(n_1, n_2+\delta), n_3}_{(p_1, p_2+2\delta), p_3; (q_1, q_2+2\delta), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1}); \Delta(\delta, 1-\zeta-u), (c_{p_2}), \Delta(\delta, 2-\zeta+u) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1}); \Delta(\delta, 3/2-\zeta), (d_{q_2}), \Delta(\delta, 1-\zeta) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right]$$

where

$$\operatorname{Re}[3-2\zeta+2\delta(1-c_j)] > 0, j = 1, 2, \cdots, n_2; u = 0, 1, \cdots.$$

Other conditions of validity are same as (1. 2)

$$(2.\ 3) \qquad \int_0^{\pi} \cos u\,\theta\,(\sin\theta/2)^{-2\zeta}\, G^{(m_1, m_2);(n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x(\sin\theta/2)^{-2\delta} & (a_{p_1}); (c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1}); (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right] d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\delta}}\, G^{(m_1+\delta, m_2);(n_1+\delta, n_2), n_3}_{(p_1+2\delta, p_2), p_3; (q_1+2\delta, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x & \Delta(\delta, 1-\zeta-u), (a_{p_1}), \Delta(\delta, 1-\zeta+u); (c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & \Delta(\delta, 1/2-\zeta), (b_{q_1}), \Delta(\delta, 1-\zeta); (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right]$$

where

$$\operatorname{Re}[1-2\zeta+2\delta(1-a_j)] > 0, j = 1, 2, \cdots, n_1; u = 0, 1, 2, \cdots.$$

Other conditions of validity are same as (1. 2)

$$(2.\ 4) \qquad \int_0^{\pi} \cos u\,\theta\,(\sin\theta/2)^{-2\zeta}\, G^{(m_1, m_2);(n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1}); (c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y(\sin\theta/2)^{-2\delta} & (b_{q_1}); (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right] d\theta =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\delta}}\, G^{(m_1, m_2+\delta);(n_1, n_2+\delta), n_3}_{(p_1, p_2+2\delta), p_3; (q_1, q_2+\delta), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1}); \Delta(\delta, 1-\zeta-u), (c_{p_2}), \Delta(\delta, 1-\zeta+u) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1}); \Delta(\delta, 1/2-\zeta), (d_{q_2}), \Delta(\delta, 1-\zeta) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right]$$

where $\operatorname{Re}[1-2\zeta+2\delta(1-c_j)] > 0,\ j = 1, 2, \cdots, n_2;\ \ u = 0, 1, 2, \cdots.$
Other conditions of validity are same as (1. 2).

Proof. To prove (2. 1), expressing the G-function as Mellin-Barnes type integral (1. 1), interchanging the order of integration which is justified due to the absolnte convergence of the integrals involved in the process and evaluating the inner integral with the help of (1. 3), we get

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L\int_{L_1}\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+s)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j+t)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+t)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+s+t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-s)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+t)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-t)}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/2-\zeta-\delta s)\,\Gamma(\zeta+u+\delta s)}{\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-s-t)\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+s+t)\,\Gamma(\zeta+\delta s)\,\Gamma(2-\zeta+u-\delta s}\,x^s\,y^t\,ds\,dt\,.$$

On applying multiplication formula for Gamma functions [4, p. 4 (11)] we get

$$\sqrt{\frac{\pi}{\delta}}\,\frac{1}{(2\pi i)^2}\,\cdot$$

$$\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+s)\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(d_j-t)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+t)\prod_{j=1}^{n_3}(1-e_j+s+t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-s)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+t)\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-s-t)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-t)}\times$$

$$\times\frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{3/2-\zeta+i}{\delta}-s\right)\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{\zeta+u+i}{\delta}+s\right)}{\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+s+t)\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{\zeta+i}{\delta}+s\right)\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{2-\zeta+u+i)}{\delta}-s\right)}\,x^s\,y^t\,ds\,dt\,.$$

Now on using (1. 1), the integral (2. 1) is proved.

The integral (2. 2) is proved by the same method as above. The integrals (2. 3) and (2. 4) are proved on adopting the same proceedure and using (1. 4)

3. *Particular cases:* (i) If ζ is an integer, (2. 3) and (2. 4) can be written, respectively, as

$$(3.\ 1)\qquad \int_0^{\pi}(\sin\Phi)^{-2\zeta}\cos 2u\Phi\, G^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x(\sin\Phi)^{-2\delta} & (a_{p_1});(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1});(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3})\end{array}\right]d\Phi$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\delta}}\;G^{(m_1+\delta,m_2);(n_1+\delta,n_2),n_3}_{(p_1+2\delta,p_2),p_3;(q_1+2\delta,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & \Delta(\delta,1-\zeta-u),(a_{p_1}),\Delta(\delta,1-\zeta+u);(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & \Delta(\delta,1/2-\zeta),(b_{q_1}),\Delta(\delta,1-\zeta);(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3})\end{array}\right]$$

the conditions of validity are same as for (2. 3)

$$(3.\ 2)\qquad \int_0^{\pi} (\sin\Phi)^{-2\zeta} \cos 2u\Phi\, G^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1});(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y(\sin\Phi)^{-2\delta} & (b_{q_1});(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right] d\Phi$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\delta}}\; G^{(m_1,m_2+\delta);(n_1,n_2+\delta)n_3}_{(p_1,p_2+2\delta),p_3;(q_1,q_2+2\delta),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1});\Delta(\delta,1-\zeta-u),(c_{p_2}),\Delta(\delta,1-\zeta+u) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1});\Delta(\delta,1/2-\zeta),(d_{q_2}),\Delta(\delta,1-\zeta) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right]$$

The conditions of validity are same as for (2. 4)

(*ii*) Putting $\sin(2u+1)\theta\ \sin\theta = \frac{1}{2}[\cos 2u\theta - \cos 2(u+1)\theta]$ in (2. 1) and using (3. 1), we get

$$(3.\ 3)\qquad 2\,G^{(m_1+\delta,m_2);(n_1+\delta,n_2);n_3}_{(p_1+2\delta,p_2),p_3;(q_1+2\delta,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & \Delta(\delta,1-\zeta-u),(a_{p_1}),\Delta(\delta,2-\zeta+u);(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & \Delta(\delta,3/2-\zeta),(b_{q_1}),\Delta(\delta,1-\zeta);(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right]$$

$$= G^{(m_1+\delta,m_2);(n_1+\delta,n_2),n_3}_{(p_1+2\delta,p_2),p_3;(q_1+2\delta,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & \Delta(\delta,1-\zeta-u),(a_{p_1}),\Delta(\delta,1-\zeta+u);(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & \Delta(\delta,1/2-\zeta),(b_{q_1}),\Delta(\delta,1-\zeta);;(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right] -$$

$$- G^{(m_1+\delta,m_2);(n_1+\delta,n_2),n_3}_{(p_1+2\delta,p_2),p_3;(q_1+2\delta,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & \Delta(\delta,-\zeta-u),(a_{p_1}),\Delta(\delta,2-\zeta+u);(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & \Delta(\delta,1/2-\zeta),(b_{q_1}),\Delta(\delta,1-\zeta);(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right].$$

Similarly using (2. 2) and (2. 3), we obtain,

$$(3.\ 4)\qquad 2\,G^{(m_1,m_2+\delta);(n_1,n_2+\delta),n_3}_{(p_1,p_2+2\delta),p_3;(q_1,q_2+2\delta),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1});\Delta(\delta,1-\zeta-u),(c_{p_2}),\Delta(\delta,2-\zeta+u) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1});\Delta(\delta,3/2-\zeta),(d_{q_2}),\Delta(\delta,1-\zeta) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right]$$

$$= G^{(m_1, m_2+\delta);(n_1, n_2+\delta), n_3}_{(p_1, p_2+2\delta), p_3;(q_1, q_2+2\delta), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1}); \Delta(\delta, 1-\zeta-u), (c_{p_2}), \Delta(\delta, 1-\zeta+u) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1}); \Delta(\delta, 1/2-\zeta), (d_{q_2}), \Delta(\delta, 1-\zeta) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right] -$$

$$- G^{(m_1, m_2+\delta);(n_1, n_2+\delta), n_3}_{(p_1, p_2+2\delta), p_3;(q_1, q_2+2\delta), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1}), \Delta(\delta, -\zeta-u), (c_{p_2}), \Delta(\delta, 2-\zeta+u) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1}); \Delta(\delta, 1/2-\zeta), (d_{q_2}), \Delta(\delta, 1-\zeta) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right].$$

(*iii*) **When $u = 0$, we get from (2. 3) and (2. 4) respectively,**

(3. 5)
$$\int_0^{\pi} (\sin \theta/2)^{-2\zeta} G^{(m_1, m_2);(n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3;(q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x \sin \theta/2)^{-2\delta} & (a_{p_1}) ; (c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1}) ; (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right] d\theta =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\delta}} G^{(m_1+\delta, m_2);(n_1, n_2), n_3}_{(p_1+\delta, p_2), p_3;(q_1+\delta, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1}), \Delta(\delta, 1-\zeta); (c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & \Delta(\delta, 1/2-\zeta), (b_{q_1}); (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right].$$

The conditions of validity are same as for (2. 3)

(3. 6)
$$\int_0^{\pi} (\sin \theta/2)^{-2\zeta} G^{(m_1, m_2);(n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3;(q_1, q_2) q_3,} \left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1}); (c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y (\sin \theta/2)^{-2\delta} & (b_{q_1}); (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right] d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\delta}} G^{(m_1, m_2+\delta);(n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2+\delta), p_3;(q_1, q_2+\delta), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1}); (c_{p_2}), \Delta(\delta, 1-\zeta) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1}); \Delta(\delta, 1/2-\zeta), (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right].$$

The conditions of validity are same as for (2. 4).

(*iv*) Putting $m_2 = q_2 = 1$, $n_2 = n_3 = p_2 = p_3 = q_3 = 0$ and making use of the formula [3, 1. 5], viz

(3. 7)
$$G^{(m, 1);(n, 0), 0}_{(p, 0), 0;(q, 1), 0} \left[\begin{array}{c|l} x & (a_p); - \\ & - \\ z & (b_q);\ 0 \\ & - \end{array} \right] = e^{-y} G^{m, n}_{p, q} \left[x \left| \begin{array}{l} (a_p) \\ (b_q) \end{array} \right. \right]$$

we get from (2. 1),

$$\int_0^{\pi} \sin(2u+1)\theta\,(\sin\theta)^{1-2\zeta}\, G^{m_1,n_1}_{p_1,q_1}\left[x(\sin\theta)^{-2\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_{p_1})\\(b_{q_1})\end{matrix}\right]d\theta \tag{3. 8}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\delta}}\, G^{m_1+\delta,\,n_1+\delta}_{p_1+2\delta,\,q_1+2\delta}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}\Delta(\delta,1-\zeta-u),(a_{p_1}),\ \Delta(\delta,2-\zeta+u)\\ \Delta(\delta,3/2-\zeta),(b_{q_1}),\ \Delta(\delta,1-\zeta)\end{matrix}\right]$$

where

$$2(m_1+n_1)>p_1+q_1,\qquad \mathrm{Re}[3-2\zeta+2\delta(1-a_j)]>0;\qquad j=1,2,\dots,n_1$$

$$|\arg x|<\left[m_1+n_1-\frac{1}{2}(p_1+q_1)\right];\ u=0,1,2,\dots$$

(3. 8) is same as [2, p. 705, (2. 5)]. Further putting $\delta=1$ and $\zeta=0$, (3. 8) reduces to a known result [5, p. 151].

Similarly specialising the parameters, we get from (2. 3) another known result [5, p. 151].

4. Fourier Series. The Fourier series to be established are

$$(\sin\theta)^{1-2\zeta}\, G^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2)p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{matrix}x(\sin\theta)^{-2\delta}\\ \\ y\\ \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_{p_1});(c_{p_2})\\(e_{p_3})\\(b_{q_1});(d_{q_2})\\(f_{q_3})\end{matrix}\right] \tag{4. 1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi\delta}}\sum_{r=0}^{\infty} G^{(m_1+\delta,m_2);(n_1+\delta,n_2),n_3}_{(p_1+2\delta,p_2),p_3;(q_1+2\delta,q_2),q_3}\left[\begin{matrix}x\\ \\ y\\ \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\Delta(\delta,1-\zeta-r),(a_{p_1}),\Delta(\delta,2-\zeta+r);(c_{p_2})\\(e_{p_3})\\ \Delta(\delta,3/2-\zeta),(b_{q_1}),\Delta(\delta,1-\zeta);(d_{q_2})\\(f_{q_3})\end{matrix}\right]\sin(2r+1)\theta\,.$$

The conditions of validity are same as for (2. 1)

$$(\sin\theta)^{1-2\zeta}\, G^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{matrix}x\\ \\ y(\sin\theta)^{-2\delta}\\ \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_{p_1});(c_{p_2})\\(e_{p_3})\\(b_{q_1});(d_{q_2})\\(f_{q_3})\end{matrix}\right] \tag{4. 2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi\delta}}\sum_{r=0}^{\infty} G^{(m_1,m_2+\delta);(n_1,n_2+\delta),n_3}_{(p_1,p_2+2\delta),p_3;(q_1,q_2+2\delta),q_3}\left[\begin{matrix}x\\ \\ y\\ \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_{p_1});\Delta(\delta,1-\zeta-r),(c_{p_2}),\Delta(\delta,2-\zeta+r)\\(e_{p_3})\\(b_{q_1});\Delta(\delta,3/2-\zeta),(d_{q_2}),\Delta(\delta,1-\zeta)\\(f_{q_3})\end{matrix}\right]\sin(2r+1)\theta.$$

The conditions of validity are same as for (2. 2)

$$(4.\ 3)\qquad (\sin\theta/2)^{-2\zeta}\, G^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x(\sin\theta/2)^{-2\delta} & (a_{p_1});(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1});(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\,\delta}}\, G^{(m_1+\delta,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1+\delta,p_2),p_3;(q_1+\delta,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1}),\Delta(\delta,1-\zeta);(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & \Delta(\delta,1/2-\zeta),(b_{q_1});(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right] +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi\,\delta}}\, G^{(m_1+\delta,m_2);(n_1+\delta,n_2),n_3}_{(p_1+2\delta,p_2),p_3;(q_1+2\delta,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & \Delta(\delta,1-\zeta-r),(a_{p_1}),\Delta(\delta,1-\zeta+r);(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & \Delta(\delta,1/2-\zeta),(b_{q_1}),\Delta(\delta,1-\zeta);(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right]\cos r\theta\,.$$

The conditions of validity are same as for (2. 3)

$$(\sin\theta/2)^{-2\zeta}\, G^{(m_1,m_2);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1});(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y(\sin\theta/2)^{-2\delta} & (b_{q_1});(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right]$$

(4. 4)

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\,\delta}}\, G^{(m_1,m_2+\delta);(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2+\delta),p_3;(q_1,q_2+\delta),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1});(c_{p_2}),\Delta(\delta,1-\zeta) \\ & (f_{q_3}) \\ y & (b_{q_1});\Delta(\delta,1/2-\zeta),(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right] +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi\,\delta}}\, G^{(m_1,m_2+\delta);(n_1,n_2+\delta),n_3}_{(p_1,p_2+2\delta),p_3;(q_1,q_2+2\delta),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1});\Delta(\delta,1-\zeta-r),(c_{p_2}),\Delta(\delta,1-\zeta+r) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1});\Delta(\delta,1/2-\zeta),(d_{q_2}),\Delta(\delta,1-\zeta) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right]\cos(r\theta).$$

The conditions of validity are same as for (2. 4).

PROOF. To prove (4. 1), let

$$(4.\ 5)\qquad f(\theta) = (\sin\theta)^{1-2\zeta}\, G^{(m_1,m_2);(n_1,n_2)n_3}_{(p_1,p_2);p_3;(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|l} x(\sin\theta)^{-2\delta} & (a_{p_1});(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1});(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} C_r \sin(2r+1)\theta\,.$$

Equation (4. 5) is valid since $f(\theta)$ is continuous and of bounded variation in the interval $(0, \pi)$ when $\operatorname{Re}(1-2\zeta) \geqq 0$.

Multiplying both the sides of (4. 5) by $\sin(2u+1)\theta$ and integrating with respect to θ from 0 to π, we get

$$\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{1-2\zeta} \sin(2u+1)\theta \, G^{(m_1, m_2);(n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x(\sin\theta)^{-2\delta} & (a_{p_1});(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1});(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right] d\theta$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} C_r \int_0^{\pi} \sin(2u+1)\theta \sin(2r+1)\theta \, d\theta .$$

Now using (2. 1) and the orthogonality property of the sine functions, we get

$$(4.6) \quad C_r = \frac{2}{\sqrt{\pi\delta}} G^{(m_1+\delta, m_2);(n_1+\delta, n_2), n_3}_{(p_1+2\delta, p_2), p_3; (q_1+2\delta, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x & \Delta(\delta, 1-\zeta-r), (a_{p_1}), \Delta(\delta, 2-\zeta+r); (c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & \Delta(\delta, 3/2-\zeta), (b_{q_1}), \Delta(\delta, 1-\zeta); (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right].$$

From (4. 5) and (4. 6), the formula (4. 1) is proved.

(4. 2) is also proved by the same method as above and using (2. 2).

To prove (4. 3), let

$$(4.7) \quad f(\theta) = (\sin\theta/2)^{-2\zeta} G^{(m_1, m_2);(n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x(\sin\theta/2)^{-2\delta} & (a_{p_1});(c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & (b_{q_1});(d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right] = C_0 + \sum_{r=1}^{\infty} C_r \cos(r\theta).$$

Integrating (4. 7) with respect to θ from 0 to π and using (3. 5), we get

$$(4.8) \quad C_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi\delta}} G^{(m_1, \delta, m_2);(n_1, n_2), n_3}_{(p_1+\delta, p_2), p_3; (q_1+\delta, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1}), \Delta(\delta, 1-\zeta); (c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & \Delta(\delta, 1/2-\zeta), (b_{q_1}); (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right].$$

$$(4.9) \quad C_r = \frac{2}{\sqrt{\pi\delta}} G^{(m_1+\delta, m_2);(n_1+\delta, n_2), n_3}_{(p_1+2\delta, p_2), p_3; (q_1+2\delta, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|l} x & \Delta(\delta, 1-\zeta-r), (a_{p_1}), \Delta(\delta, 1-\zeta+r); (c_{p_2}) \\ & (e_{p_3}) \\ y & \Delta(\delta, 1/2-\zeta), (b_{q_1}), \Delta(\delta, 1-\zeta); (d_{q_2}) \\ & (f_{q_3}) \end{array} \right]$$

From (4. 7), (4. 8) and (4. 9), the formula (4. 3) is proved. Formula (4. 4) is also proved by the same process and using (2. 4).

Particular cases. Specialising the parameters and making use of (3. 7), we get the known results [2, p. 707, (3. 7)] and [5, p. 149 (1. 1)] as particular cases of (4. 1). Similarly the result [5, p. 149 (1. 2)] can be obtained as particular case of (4. 3).

ACKNOWLEDGEMENT

I am thankful to Dr. S. D. BAJPAI of Regional Engineering College, Kurukshetra, for his guidance in the preparation of this paper. My thanks are also due to Dr. D. S. JOSI, Principal, Govt. College, Neemuch for the facilities he provided to me.

REFERENCES

[1] AGARWAL, R. P. «*An extension to Meijer's G-function*». Proc. Nat. Inst. Sci. India, 31-A, **6** (1965).
[2] BAJPAI, S. D. «*Fourier series for generalised hypergeometic functions*». Proc. Camb. Phil. Soc, (1965), **65**, 703. PCPS 65-75.
[3] ———, «*Some results involving G-function of two variables*». (Communicated for publication).
[4] ERDELYI, A. Higher Transcendental Functions. Vol. I, (1953) McGraw-Hill.
[5] KESARWANI, R. N. «*Fourier series for Meijer's G-function*». Composito Maths. **17** (2), (1966), 149-151.
[6] MACROBERT, T. M. «*Infinite series for E-function*». Maths. Z. **71** (1959), 143-145.
[7] ———, «*Fourier series for E-function*». Maths. Z. **75** (1961), 79-82.
[8] SARMA, B. L. «*On the generalised functions of two variables*». Ann. Soc. Sci. Bruxelles T, 79-1 (1965), 26-40.

Uma introdução à Teoria das Distribuições

por Fernando Sequeira
Lisboa

1. Introdução

O progresso dos diferentes ramos da ciência tem exigido a criação constante de novas entidades matemáticas que, por sua vez, vão originar ulteriores desenvolvimentos da ciência. As distribuições são um exemplo desta dialéctica: a física e a electrotecnia definiram certas propriedades que as distribuições deviam verificar, que serviram depois, de base à respectiva axiomática. Uma vez criada, ela origina novas investigações, novas análises naqueles e outros ramos da Ciência.

As entidades matemáticas satisfazem pois a certas propriedades definidas à priori pelos fenómenos a estudar, e o seu valor mede-se pela capacidade que confere para analisar ou representar mais exactamente a realidade.

À criação destas entidades, corresponde em geral uma abstracção crescente, o que não significa de modo algum uma descripção menos objectiva dos fenómenos. Em geral sucede até que a descripção é muito mais realista, e as distribuições são um exemplo flagrante desse realismo.

Com elas torna-se possível representar alguns conceitos de física e de electricidade, como por exemplo, o de partícula material, carga pontual, distribuição de carga em superfície e em dupla-camada, o impulso unitário dos electrotécnicos, etc. E foi possível ainda justificar e definir as condições em que são válidas muitas das operações e cálculos efectuados até agora de uma forma heurística. O cálculo simbólico usado pelos electrotécnicos fica justificado e adquire uma simplicidade que não tinha com as funções.

A noção de distribuição é na realidade uma generalização do conceito de função, e foi a insuficiência deste para descrever alguns fenómenos que originou o aparecimento das distribuições. Os conceitos de matemática são muitas vezes generalizações de conceitos anteriores, generalizações essas que visam objectivos definidos. Assim sucedeu com a passagem dos números inteiros aos racionais, e destes aos reais: resolveu-se o problema da medida. E asim sucede agora com as distribuições.

As entidades que se generalizam, são em geral elementos de um conjunto, munido de certas estructuras, de certas propriedades: e é exactamente este conjunto com a sua estructura que se amplia; cria-se um sobreconjunto do primeiro, conservando as suas principais propriedades, mas por forma a obter-se o objectivo desejado.

Partindo-se pois do conjunto das funções complexas, definidas e contínuas sobre um conjunto aberto do $\mathbf{R}^n$, passa-se ao das distribuições definidas sobre o mesmo conjunto, conservando-se a estructura de um espaço vectorial complexo. E esta ampliação é feita de modo a tornar sempre possível a derivação.

É desta ampliação que trataremos no parágrafo seguinte. No entanto, limitar-nos-emos a tratar o caso das distribuições de ordem finita definidas sobre a recta. Mais concretamente, no presente artigo tentaremos dar uma pequena contribuição à divulgação a nível elementar de teoria das distribuições. Faremos uso da axiomática introduzida por J. Sebastião e Silva, que julgamos ser a mais intuitiva e talvez a de mais fácil aplicação.

2. Distribuições de ordem finita

Seja $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ o espaço vectorial complexo formado pelo conjunto das funções complexas, definidas e contínuas sobre $\mathbf{R}$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalares, e $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ o seu sub-espaço constituído pelas funções contínuamente deriváveis.

Partindo de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ e conservando a sua estructura vectorial, é possível criar um seu sobre-espaço mínimo, onde a derivação é sempre possível, um operador linear e um prolongamento da derivada definida em $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Por outras palavras, *as distribuições são elementos de um espaço vectorial complexo E que verifica a seguinte propriedade:*

I. *Existem duas aplicações lineares*

$$\Phi : \mathcal{C}(\mathbf{R}) \to E \quad e \quad D : E \to E$$

tais que:

i) Φ *é injectiva* (assegura que E é um sobre-espaço de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$);

ii) *Se* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, *então* $\Phi(f') = D\,\Phi(f)$ (garante que a derivada D em E é um prolongamento da derivada em $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$);

iii) *Todo o* $\varphi \in E$ *pode exprimir-se na forma* $\varphi = D^n\,\Phi(f)$ *onde* n *é um inteiro não negativo e* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ (E será então o menor sobre-espaço de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ onde a derivação é sempre possível);

iv) *Se* $D\,\varphi = 0$, *então* $\varphi = \Phi$ (constante) (esta condição é decisiva para a construção da teoria).

Antes de procedermos à demonstração da existência e da unicidade (a menos de um isomorfismo) de um espaço E verificando I, vamos demonstrar algumas propriedades relativas à derivação em E, supondo que E existe.

Seja $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ e $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ uma sua primitiva. Em virtude de $g'(x) = f(x)$ para todo o real x, e de *ii)* vem

$$D\,\Phi(g) = \Phi(f)$$

e portanto, designando por J o operador primitivação considerado,

$$D^p\,\Phi(J^p f) = \Phi(f)$$

quaisquer que sejam o natural p e a função contínua f, o que assegura o seguinte resultado:

II. *Dado* $\varphi = D^n\,\Phi(f)$, *com* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ *e* n *inteiro não negativo, tem-se*

$$D^{n+m}\,\Phi(J^m f) = D^n\,\Phi(f)$$

qualquer que seja o inteiro natural m.

Dadas duas distribuições $D^n\,\Phi(f)$ e $D^m\,\Phi(g)$ é pois sempre possível reduzi-las a derivadas da mesma ordem de imagens dadas por Φ de funções contínuas: $D^n\,\Phi(f) = D^{n+m}\,\Phi(J^m f)$ e $D^m\,\Phi(g) = D^{n+m}\,\Phi(J^n g)$.

Tomando em consideração a propriedade *iv)* e a linearidade de D e de Φ, por indução pode demonstrar-se ainda que:

III. *A derivada de ordem* n (inteiro natural) *de uma distribuição é nula se e só se ela é a imagem dada por* Φ *de um polinómio de grau inferior a* n.

Por sua vez, tendo presente a propriedade II, dadas duas distribuições $\varphi = D^n\,\Phi(f)$ e $\psi = D^m\,\psi(g)$ com $f, g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, vem que

$$(1) \qquad \varphi + \psi = D^{n+m}\,\Phi(J^m f + J^n g)$$

e

$$(2) \qquad \lambda \cdot \varphi = D^n\,\Phi(\lambda f)$$

qualquer que seja $\lambda \in \mathbf{C}$.

Finalmente, da relação 1) e de III infere-se que:

IV. $D^n \Phi(f) = D^m \Phi(g)$ *se e só se* $J^m f - J^n g$ *é um polinómio de grau inferior a* $n + m$.

As propriedades II, III e IV, bem como as relações 1) e 2), são pois consequências de I. Tendo presentes estes resultados demonstra-se então que:

Se E_1 *e* E_2 *são dois espaços vectoriais complexos que, associados às aplicações lineares respectivamente* D_1, Φ_1, *e* D_2, Φ_2, *verificam* I, *então a aplicação* $\theta : E_1 \to E_2$, *que a cada elemento* $D_1^n \Phi_1(f)$ *de* E_1 *faz corresponder o elemento* $D_2^n \Phi_2(f)$ *de* E_2, *é um isomorfismo que verifica a igualdade* $\theta(D_1 \varphi) = D_2(\theta \varphi)$ *qualquer que seja* $\varphi \in E_1$.

Isto é, se existe um espaço E que verifica I, a menos de um isomorfismo ele é único. Para demonstrar a sua existência, consideremos agora o conjunto $\mathcal{C}^*(\mathbf{R})$ dos elementos da forma $D^n f$ com n inteiro não negativo e $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$. Sobre este conjunto consideremos ainda a relação de equivalência definida do seguinte modo: *dados dois elementos* $D^n f$ *e* $D^m g$, *eles dizem-se equivalentes se e só se* $J^m f - J^n g$ *é um polinómio de grau inferior a* $n + m$.

Sobre o conjunto das classes de equivalência assim obtidas, o qual passaremos a designar por $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, é possível definir uma estructura de espaço vectorial complexo introduzindo as operações de adição e de multiplicação por escalares seguintes:

a) Dados dois elementos $[D^n f]$ e $[D^m g]$ de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, denomina-se soma $[D^n f] + [D^m g]$ o elemento dado por

$$(3) \quad [D^n f] + [D^m g] = [D^{n+m}(J^m f + J^n g)]$$

b) Denomina-se produto $\lambda \cdot [D^n f]$ do complexo λ por $[D^n f]$ o elemento dado por

$$(4) \qquad \lambda \cdot [D^n f] = [D^n (\lambda f)]$$

Nestas expressões usou-se a notação $[\cdot]$ para designar a classe dos elementos equivalentes ao de $\mathcal{C}^*(\mathbf{R})$ que figura dentro do parêntesis. Esta notação será utilizada no decurso do trabalho, bem como a de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ para designar o espaço vectorial destas classes.

Em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ consideremos então as aplicações $D : \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ e $\Phi : \mathcal{C}(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ definidas pelas relações

$$(5) \qquad D[D^n f] = [D^{n+1} f]$$

e

$$(6) \qquad \Phi(f) = [D^0 f].$$

Elas são lineares, e Φ é injectiva; além disso, se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ tem-se

$$\Phi(f') = [D^0 f'] = [Df] = D\,\Phi(f)$$

ou ainda

$$\Phi(f^{(n)}) = D^n \Phi(f)$$

se f admite derivada $f^{(n)} \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ de ordem n.

Por sua vez, quaisquer que sejam o inteiro natural n e a função contínua f, tem-se que

$$[D^n f] = D^n \Phi(f)$$

(que se demonstra por indução), e se

$$D[D^n f] = [0] \quad \text{vem} \quad [D^{n+1} f] = [0],$$

sendo portanto f um polinómio de grau inferior a $n + 1$, o que significa

$$[D^n f] = D^n \Phi(f) = \Phi(f^{(n)}) = \Phi \quad (\text{constante})$$

Fica assim provado que $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ associado às aplicações lineares definidas em 5) e 6) verifica a propriedade I, e portanto a existência de um espaço que verifica I.

Se identificarmos $\Phi(f)$ com f para todo o $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, o que é legítimo devido à injectividade de Φ, adquire pois sentido dizer-se que uma distribuição é realmente uma derivada de ordem finita de uma função contínua.

A título de exemplo, consideremos a função $g(x)$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Ela admite derivada (no sentido usual) em todos os pontos $x \neq 0$; a sua derivada é a função de HEAVISIDE $h(x)$, nula à esquerda da origem e igual a 1 à direita. Esta derivada é uma verdadeira função, não estando no entanto definida na origem.

Reconhece-se também que $h(x)$ admite derivada em todos os pontos $x \neq 0$. A sua função derivada seria portanto nula e definida no complementar da origem. No entanto é costume dizer-se que a derivada de $h(x)$ é a função $\delta(x)$ nula no complementar de origem e infinita para $x = 0$, de tal sorte que $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$ qualquer que seja o real $\varepsilon > 0$.

Embora se prove que esta função $\delta(x)$, que alguns chamam «função impulso unitária» e outros «função δ de Dirac», não pode existir, a admissão da sua existência tem sido de grande utilidade. A derivada de $h(x)$ era suposta existir num sentido que não estava definido.

Com a teoria das distribuições estas derivadas de $g(x)$ adquirem um sentido claro, podendo-se escrever

$$h(x) = D\,g(x)$$

e

$$\delta(x) = D^2\,g(x)$$

A função de HEAVISIDE e a de DIRAC são pois distribuições definidas sobre a recta, e como veremos mais adiante, $\delta(x)$ verifica efectivamente a igualdade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

Anàlogamente se pode definir a função $g(x-\alpha)$

$$g(x-\alpha) = \begin{cases} x-\alpha & \text{se } x \geq \alpha \\ 0 & \text{se } x < \alpha \end{cases}$$

com α real, e as suas derivadas

$$h(x-\alpha) = D\,g(x-\alpha)$$

e

$$\delta(x-\alpha) = D^2\,g(x-\alpha)$$

que se dizem translatadas de respectivamente $g(x)$, $h(x)$ e $\delta(x)$.

Exercícios propostos

1. Demonstre por indução a propriedade III.

2. Sendo θ e φ dois elementos de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, verifique que $D\theta = D\varphi$ implica $\theta = \varphi +$ + constante.

3. Determine as soluções $\theta \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ da equação

$$D^n\,\theta = 0 \qquad (n:\ \text{natural}).$$

4. Determine uma primitiva de

$$\left[D^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right].$$

5. Designando por τ_α, $\alpha \in \mathbf{R}$, o operador translacção que a todo o $f(\hat{x}) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ faz corresponder a sua translatada $f(\hat{x}-\alpha)$, verifique que $\tilde{\tau}_\alpha$ definido por

$$\tilde{\tau}_\alpha[D^n f] = [D^n(\tau_\alpha f)] \quad \forall f \in G(\mathbf{R}) \text{ e } n \in \mathbf{N}$$

é um automorfismo de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$.

Prove ainda que

$$\tilde{\tau}(D\varphi) = D(\tilde{\tau}\varphi)$$

qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$.

6. Construa uma teoria axiomática do espaço vectorial complexo $\mathcal{C}_\omega(I)$, das distribuições escalares de ordem finita, definidas sobre um intervalo aberto $I \subset \mathbf{R}$. Prove que estas distribuições se podem apresentar como derivadas generalizadas de funções contínuas sobre I.

7. Designando por $\mathcal{C}_\omega(I)$ o espaço das distribuições de ordem finita definidas sobre um intervalo aberto $I \subset \mathbf{R}_\omega$, (vidé problema 6) considere as aplicações ρ_I que a cada $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ faz corresponder a sua restricção a I, e $\tilde{\rho}_I : \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_\omega(I)$ definida pela relação $\tilde{\rho}_I[D^n f] = [D^n(\rho_I f)]$, para todo o $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ e todo o $n \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$: conjunto dos números naturais).

Posto isto, prove que:

a) $\tilde{\rho}_I$ é um prolongamento a $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ de ρ_I; (ρ_I por esse motivo tem também a designação de *restrição a* I).

b) A restrição a I da distribuição $[D^2 x \log|x|]$ é a função $\dfrac{1}{x}$ se I não não contiver a origem;

c) O mesmo em relação à distribuição $D^2[x \log|x| + \alpha\, g(x)]$ onde

$$\alpha \in \mathbf{R} \ \text{ e } \ g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

d) Se I não contiver a origem

$$\tilde{\rho}_I \delta = 0\,.$$

8) Uma distribuição $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ diz-se nula num intervalo aberto $I \subset \mathbf{R}$, sempre que $\tilde{\rho}_I \varphi = 0$ (vidé problema anterior). O complementar de reunião de todos os intervalos abertos $I \subset \mathbf{R}$ tais que $\tilde{\rho}_I \varphi = 0$, diz-se o suporte da distribuição φ.

Posto isto, prove que:

a) O suporte de $\delta(x)$ é a origem;

b) O suporte de função de Heaviside é o semi-eixo real não negativo.

3. As funções localmente somáveis e as medidas interpretadas como distribuições

No parágrafo anterior definimos distribuições como derivadas de funções contínuas. Interessa-nos agora relacionar as distribuições assim obtidas com algumas classes de funções úteis pelas suas aplicações.

Consideremos pois o conjunto das funções complexas, localmente somáveis sobre a recta, identificando duas destas funções sempre que elas diferem quando muito sobre um conjunto de medida à Lebesgne nula. O conjunto destas classes de funções, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por complexos, constitui um espaço vectorial complexo, que passaremos a designar por $\mathcal{L}^1_c(\mathbf{R})$.

Ora prova-se que toda a primitiva

$$f(x) = \int_\alpha^x g(t)\, d c \qquad (1)$$

de uma função localmente somável $g(x)$, é absolutamene contínua, e que existe a derivada $f'(x) = g(x)$ quási por toda a parte. Recìprocamente, toda a função absolutamente contínua é primitiva de uma função de $\mathcal{L}^1_c(\mathbf{R})$. A aplicação linear de $\mathcal{L}^1_c(\mathbf{R})$ em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ que a cada elemento $g \in \mathcal{L}^1_c(\mathbf{R})$ faz corresponder a distribuição $[Df]$ com $f(x) = \int_0^x g(t)\, dt$, é injectiva, o que permite pois identificar $\mathcal{L}^1_c(\mathbf{R})$ com um sub-espaço de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, e portanto interpretar toda a função localmente somável como uma distribuição.

Com esta identificação, torna-se então possível definir derivada de qualquer ordem de uma função localmente somável.

Anàlogamente, dada uma medida $\mu(x)$ sobre a recta, o integral

$$g(x) = \int_\alpha^x \mu(t)\, dt$$

define uma função, que é usual designar por primitiva da medida, e que é de variação limitada sobre cada intervalo compacto da recta. Recìprocamente, dada uma função $g(x)$ de variação limitada sobre cada intervalo compacto, pondo para todo o intervalo $[\alpha, \beta]$,

$$\mu([\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha^-)$$

onde $g(\alpha^-) = \lim_{x \to \alpha^-} g(x)$, fica determinada uma medida $\mu(x)$ sobre a recta que se designa por derivada de $g : \mu = Dg$.

Além disso, prova-se que toda a função de variação limitada sobre cada intervalo compacto é localmente somável, e que duas primitivas de uma mesma medida diferem entre si em uma constante. A aplicação linear que a cada medida $\mu(x)$ faz corresponder a distribuição Dg, sendo g uma primitiva de μ, é pois injectiva, o que permite identificar toda a medida com uma distribuição, e portanto, definir também derivada de qualquer ordem de uma medida.

Em resumo, *as funções localmente somáveis, e as medidas são distribuições;* no entanto esta interpretação, no que se refere às primeiras, implica a identificação de duas quaisquer funções localmente somáveis, sempre que elas tomam os mesmos valores quási por toda a parte.

A distribuição de Dirac constitui um exemplo de uma medida, que a cada intervalo faz corresponder a medida 1 ou 0, consoante esse intervalo contém ou não a origem. A função de Hiaviside é por sua vez uma primitiva de $\delta(x)$ e uma função localmente somável; está definida no complementar da origem, e nesta pode-se-lhe atribuir qualquer valor.

Exercícios propostos

1. Determine as distribuições que se identificam com as seguintes funções

$$a) \quad u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ irracional} \end{cases}$$

$$b) \quad v(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \text{ racional} \\ 1 & \text{se } x > 0 \text{ e } x \text{ irracional} \end{cases}$$

$$c) \quad r(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \text{ irracional} \\ 1 & \text{se } x > 0 \text{ e } x \text{ racional.} \end{cases}$$

4. Valor de uma distribuição num ponto

Sabemos como ao conceito de função está ligado o de valor num ponto; e como este é importante para que as funções possam representar dependências entre grandezas. No entanto, quando em $\mathcal{L}^1_c(\mathbf{R})$ se identificam duas funções que tomam o mesmo valor quási por toda a parte, este conceito parece perder significado Ora com a teoria das distribuições pode voltar a falar-se de valor, neste caso de uma distribuição, num ponto; e este valor é definido por forma que quando a distribuição é uma função contínua numa vizinhança desse ponto, o valor da distribuição coincide com o valor desta função.

Este objectivo consegue-se com a seguinte definição:

I. *Diz-se que uma distribuição* $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ *tem valor num ponto* $\alpha \in \mathbf{R}$, *se e só se ela admite uma representante* $D^n f, f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, *tal que existe o limite*

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{n!\, f(x)}{(x-\alpha)^n}$$

e esse limite que se representa por $\varphi(\alpha)$ *denomina-se valor de* φ *no ponto* α.

Esta definição tem sentido uma vez que:

i) Dadas duas representantes $D^n f$ e $D^m g$ da mesma distribuição φ, se existem os limites

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{n!\, f(x)}{(x-\alpha)^n} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \alpha} \frac{m!\, g(x)}{(x-\alpha)^m}$$

eles são iguais;

ii) Se existe e é contínua a derivada $f^{(n)}$

de ordem n de f em todo o ponto x de uma vizinhança de α, então $f^{(n)}(\alpha)=\varphi(\alpha)$ (resulta de simples aplicação da regra de L'HOSPITAL);

iii) Se φ e ψ são duas distribuições com valor no ponto $\alpha, \theta=\varphi+\psi$ e $\omega=\lambda\cdot\varphi$, com $\lambda\in\mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$: plano complexo), então

$$\theta(\alpha)=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha)$$

e

$$\omega(\alpha)=\lambda\cdot\varphi(\alpha).$$

A aplicação de I às distribuições de HEAVISIDE $h(x)$ e de DIRAC $\delta(x)$ conduz aos seguintes resultados: $h(\alpha)=1$ e $\delta(\alpha)=0$ se $\alpha>0$; $h(\alpha)=\delta(\alpha)=0$ se $\alpha<0$. Nenhuma destas distribuições tem valor na origem.

Um outro conceito importante é o de limite lateral:

II. *Dada uma distribuição φ diz-se que ela tem limite lateral à direita [à esquerda] do ponto $\alpha\in\mathbf{R}$, se e só se ela admite uma representante $D^n f, f\in\mathcal{C}(\mathbf{R})$, tal que existe o limite*

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{n!f(x)}{(x-\alpha)^n} \qquad \left[\text{resp. } \lim_{x\to\alpha^-}\frac{n!f(x)}{(x-\alpha)^n}\right].$$

Este limite denomina-se limite lateral de φ à direita [resp. à esquerda] do ponto α, e representa-se por $\varphi(\alpha^+)$ [resp. $\varphi(\alpha^-)$].

Demonstra-se também que estes valores, quando existem para uma dada distribuição, são independentes do representante escolhido para os determinar, e verificam propriedades semelhantes às enunciadas em *iii*.

No caso da função de HEAVISIDE $h(x)$ e de $\delta(x)$, tem-se: $h(0^+)=1$; $h(0^-)=0$; $\delta(0^+)=\delta(0^-)=0$. Efectivamente, de

$$h(x)=D\,g(x)$$
$$\delta(x)=D^2 g(x)=D^2(g(x)-x)$$

onde

$$g(x)=\begin{cases}x & \text{se } x\geq 0\\ 0 & \text{se } x<0\end{cases}$$

vem

$$h(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x}=1$$
$$h(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{x}=0$$
$$\delta(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2!(g(x)-x)}{x^2}=0$$
$$\delta(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2!\,g(x)}{x^2}=0.$$

Interessa também relacionar estes limites laterais, com conceitos análogos ligados à teoria das funções. E tem particular interesse o caso das primitivas de medidas, que são funções localmente somáveis. Dada uma destas primitivas $f(x)$, prova-se que existem os limites laterais, $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ e $\lim_{x\to\alpha^-} f(x)$ no sentido das funções, em todo o ponto $\alpha\in\mathbf{R}$, e que eles coinçidem com os mesmos limites calculados no sentido das distribuições.

É o que se passa, por exemplo com a função de HEAVISIDE $h(x)$ na origem: em ambos os casos tem-se $\lim_{x\to 0^+} h(x)=1$ e $\lim_{x\to 0^-} h(x)=0$.

O conceito de limite de uma função $f(x)$ quando x tende para $+\infty\,[-\infty]$, também pode ser generalizado e aplicado às distribuições:

III. *Diz-se que o limite qnando $x\to+\infty$ $[x\to-\infty]$ de uma distribuição φ é β, e escreve-se $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\beta$ ou $\varphi(+\infty)=\beta$ [resp. $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\beta$ ou $\varphi(-\infty)=\beta$] quando existe uma representante $D^n f$ de φ tal que*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n!f(x)}{x^n}=\beta$$

$$\left[\text{resp. } \lim_{x\to-\infty}\frac{n!f(x)}{x^n}=\beta\right].$$

Este limite é independente do representante de φ escolhido para o determinar, e se a derivada $f^{(n)}(x)$ existe numa vizinhança de $+\infty$ $[-\infty]$, bem como o $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{(n)}(x)$ [resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f^{(n)}(x)$], então tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} f^{(n)}(x) = \varphi(+\infty)$$

$$[\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} f^{(n)}(x) = \varphi(-\infty)].$$

Além disso, demonstram-se ainda propriedades respeitantes à sua linearidade, isto é, propriedades análogas às enunciadas em *iii*) para os valores das distribuições.

Como exemplo, consideremos uma vez mais as distribuições $h(x)$ e $\delta(x)$. Sendo $h(x) = D\,g(x)$ e $\delta(x) = D^2 g(x)$ onde

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geqq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

vem

$$h(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

$$h(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

$$\delta(+\infty) = \lim_{x \to \infty} \frac{2!\,g(x)}{x^2} = 0$$

$$\delta(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2!\,g(x)}{x^2} = 0.$$

Um outro caso com interesse é o das junções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, que no sentido das distribuições têm limite quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$. Uma vez que $\operatorname{sen} x = -D \cos x$ e que $\cos x = D \operatorname{sen} x$, vem òbviamente

$$\operatorname{sen}(\pm\infty) = \cos(\pm\infty) = 0$$

resultados que de resto já foram utilizados de uma forma heurística.

Exercícios propostos

1. Determine o valor de distribuição $D^2(x-1)^2$ no ponto $x = 1$.
2. Calcule os limites

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{i\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} D^2(x-1)^2$.

3. Sendo $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, prove que se $\tilde{\rho}_I \varphi = 0$ (vidé problema 7, § 2) então $\varphi(\alpha) = 0$ para todo o $\alpha \in I$.

5. Integral definido de uma distribuição

Sendo α e β dois pontos de recta, sabe-se que o integral $\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx$ no sentido de Lebesgue existe para toda a função localmente somável $\mu(x)$; e sabe-se também que, sendo $f(x)$ uma primitiva de $\mu(x)$, $f(x)$ é absolutamente contínua, e tem-se

$$(1) \qquad \int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha).$$

Por sua vez, sendo $\mu(x)$ uma medida sobre $\mathbf{R}$, o integral de Stieltjes $\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx$ existe também e verifica a igualdade

$$(2) \qquad \int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha^-)$$

onde $f(x)$ é uma primitiva de $\mu(x)$ e $f(\alpha^-) = \lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x)$.

Tendo pois em atenção estes resultados, para as distribuições definem-se os seguintes integrais:

I. *Dado uma distribuição* $\mu(x)$, *se existe uma sua primitiva* $\varphi(x)$ *com valores nos pontos* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\mu(x)$ *diz-se integrável sobre o* *intervalo definido por aqueles pontos, e o valor de*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mu(x)\, dx = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

diz-se integral entre α *e* β *de* $\mu(x)$.

II. *Dada uma distribuição* $\mu(x)$, *se existem uma sua primitiva* $\varphi(x)$ *e os valores* $\varphi(\alpha^-)$ *e* $\varphi(\beta^+)$, $\mu(x)$ *diz-se integrável entre* α^- *e* β^+, *e o valor de*

$$\int_{\alpha^-}^{\beta^+} \mu(x)\, dx = \varphi(\beta^+) - \varphi(\alpha^-)$$

denomina-se integral entre α^- *e* β^+ *de* $\mu(x)$.

E de forma análoga definem-se ainda

$$\int_{\alpha^-}^{\beta^-} \mu(x)\, dx = \varphi(\beta^-) - \varphi(\alpha^-),$$

$$\int_{\alpha^+}^{\beta^-} \mu(x)\, dx = \varphi(\beta^-) - \varphi(\alpha^+),$$

$$\int_{\alpha^+}^{\beta^+} \mu(x)\, dx = \varphi(\beta^+) - \varphi(\alpha^+).$$

Os integrais I e II são òbviamente prolongamentos dos definidos respectivamente para as funções localmente somáveis, e para as medidas, e a existência do primeiro é suficiente para garantir a existência dos restantes que tomam o mesmo valor que aquele.

Eles verificam além disso as propriedades usuais

i) $$\int_{\alpha}^{\beta} \mu(x)\, dx = -\int_{\beta}^{\alpha} \mu(x)\, dx;$$

ii) $$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda \cdot \mu(x)\, dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} \mu(x)\, dx, \ \forall \lambda \in \mathbf{C};$$

iii) $$\int_{\alpha}^{\beta} \mu(x)\, dx = \int^{\gamma} \mu(x)\, dx + \int_{\gamma}^{\beta} \mu(x)\, dx;$$

iv) $$\int_{\alpha}^{\beta} [\mu(x) + \xi(x)]\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(x)\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} \xi(x)\, dx$$

e igualdades análogas que se podem obter destas substituindo os extremos de integração α, β ou γ por respectivamente $\pm\alpha$, $\pm\beta$ e $\pm\gamma$. Estas propriedades demonstram-se por simples aplicação das definições dadas.

Tem particular interesse a aplicação destes resultados à distribuição de DIRAC. Sendo a função de HEAVISIDE $h(x)$ uma primitiva de $\partial(x)$, e verificando-se que $h(\alpha) = 1$ para todo o $\alpha > 0$, $h(\alpha) = 0$ para todo o $\alpha < 0$, $h(0^-) = 0$ e $h(0^+) = 1$, vem que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \partial(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se o intervalo de integração não contém a origem} \\ 1 & \text{se contém a origem e } \beta > \alpha \\ -1 & \text{se contém a origem e } \beta < \alpha \end{cases}$$

e ainda

$$\int_{0^-}^{0^+} \partial(x)\, dx = 1$$

igualdades estas que constituem propriedades da distribuição de DIRAC muito utilizadas.

O recurso ao conceito de limite de uma distribuição em $-\infty$ e $+\infty$ permite também definir o integral entre $-\infty$ e $+\infty$:

III. *Dada uma distribuição* $\mu(x)$, *se existe uma sua primitiva* $\varphi(x)$ *com valores em* $-\infty$ *e* $+\infty$, $\mu(x)$ *diz-se integrável sobre* $\mathbf{R}$, *e o valor de*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x)\, dx = \varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)$$

denomina-se integral de $\mu(x)$ *entre* $-\infty$ *e* $+\infty$.

Este integral é òbviamente uma generalização do integral impróprio de 2.ª espécie relativa a funções.

A sua aplicação à distribuição de Dirac conduz ao conhecido resultado

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,d\,x = h(+\infty) - h(-\infty) = 1 .$$

Por sua vez, sendo $\operatorname{sen} x = - D \cos x$, $\cos x = D \operatorname{sen} x$, e $\operatorname{sen}(\pm\infty) = \cos(\pm\infty) = 0$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x = d\,x = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,d\,x = 0$$

isto é $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, que não eram integráveis entre $-\infty$ e $+\infty$ como funções, já o são como distribuições.

Exercícios propostos

1. Determine os integrais,

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\,d\,x \qquad (\alpha \neq 0)$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\,d\,x$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,d\,x$

(compare o resultado com o

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,d\,x) .$$

6. Multiplicação de uma função indefinidamente diferenciável por uma distribuição. Uma generalização possível.

Esta operação é definida por forma a manterem-se válidas algumas propriedades relativas à multiplicação entre funções; e uma dessas propriedades, que diz respeito à derivada do produto, é suficiente para que esta operação fique univocamente determinada.

O conjunto das funções complexas indefinidamente diferenciáveis sobre $\mathbf{R}$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação, constitui um anel, que designaremos por $\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$; e entre elementos de $\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e de $\mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$ define-se a referida multiplicação do seguinte modo:

I. *Dados dois elementos* $f \in \mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ *e* $\varphi \in \mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$, *denomina-se produto de* f *por* φ, *e representa-se por* $f \cdot \varphi$, *uma distribuição tal que:*

i) *Se* φ *é uma função contínua,* $f \cdot \varphi$ *é o produto usual;*

ii) *É válida a regra de derivação*

$$D(f \cdot \varphi) = f \cdot D\varphi + f' \cdot \varphi$$

onde f' *designa a derivada de* f.

De *ii)* deduz-se fàcilmente, fazendo indução sobre n, que

$$(1) \quad f \cdot D^{n} \varphi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} D^{n-k} (f^{(k)} \cdot \varphi)$$

para todo o $f \in \mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e todo o $\varphi \in \mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$, o que permite escrever no caso de $\varphi = [g]$, com $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$

$$f \cdot [D^{n} g] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} D^{n-k} (f^{(k)} \cdot [g])$$

e atendendo a *i)*,

$$(2) \quad f \cdot [D^{n} g] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} D^{n-k} [f^{(k)} \cdot g] .$$

Esta fórmula é pois uma consequência de *i)* e *ii)*, e poderá eventualmente definir o produto $f \cdot \varphi$ se o resultado dado por ela for independente do representante de φ utilizado. Vamos provar que assim sucede.

Para o fazer, é conveniente recorrer à noção de ordem de uma distribuição: *diz-se que uma distribuição* φ *é de ordem* n, *quando é derivada de ordem* n *de uma função contínua, e não é derivada de ordem inferior de qualquer outra função de* $\mathcal{C}(\mathbf{R})$.

Uma função contínua é pois uma distribuição de ordem 0.

Fazendo indução sobre a ordem das distribuições, demonstra-se então que o produto dado por 2) é independente do representante utilizado.

Para as distribuições de ordem $=0$, aplicando a fórmula 2) demonstra-se fàcilmente que

$$f\cdot[D^m g]=[f\cdot g^{(m)}]$$

quaisquer que sejam o representante escolhido $D^m g$ de uma distribuição de ordem 0, e $f\in\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$; e como consequência, que é válida a propriedade distributiva

$$(3)\qquad f\cdot(\theta+\varphi)=f\cdot\theta+f\cdot\varphi$$

quaisquer que sejam as distribuições θ e φ de ordem ≤ 0.

Por sua vez, da hipótese de que o resultado dado por (2) da multiplicação de f por uma distribuição de ordem $\leq n$, é independente do seu representante utilizado, e que a propriedade distributiva (3) é válida quaisquer que sejam as distribuições θ e φ de ordem $\leq n$, infere-se que o mesmo se verifica para as distribuições de ordem $\leq n+1$.

Com efeito, sendo φ uma distribuição de ordem $\leq n+1$, e $D^m g$ uma sua representante, de acordo com (2) vem

$$f\cdot[D^m g]=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}D^{m-k}[f^{(k)}\cdot g]=$$

$$=D\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}D^{m-1-k}[f^{(k)}\cdot g]-$$

$$-\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m-1}{k}D^{m-1-k}[f^{(k+1)}\cdot g]=$$

$$=D(f\cdot[D^{m-1}g])-f'[D^{m-1}g]$$

e sendo os produtos $f\cdot[D^{m-1}g]$ e $f'\cdot[D^{m-1}g]$ dados por 2) independentes do representante da distribuição $\theta=[D^{m-1}g]$, que é de orden $\leq n$, podemos pois, escrever

$$f\cdot[D^m g]=D[f\cdot\theta]-f'\cdot\theta\,.$$

Se tivéssemos utilizado outro representante $D^p h$ de φ, teríamos obtido

$$f\cdot[D^p h]=D(f\cdot\omega)-f'\cdot\omega$$

onde ω seria também uma primitiva de φ.

Mas sendo $\omega=\theta+\text{constante}$, substituindo na expressão anterior, vem

$$\begin{aligned}f\cdot[D^p h]&=D(f\cdot(\omega+\text{const.}))-\\&\quad-f'\cdot(\omega+\text{const.})=D(f\cdot\omega)+\\&\quad+D(f\cdot\text{const.})-(f'\cdot\omega)-f'\cdot\text{const.}=\\&=D(f\cdot\omega)-(f'\cdot\omega)=f\cdot[D^m g]\end{aligned}$$

isto é, o produto $f\cdot\varphi$ dado por 2) é independente do representante de φ, como se pretendia.

Para demonstrar a distributividade no caso de θ e φ serem distribuições de ordem $\leq n+1$, podem-se utilizar derivadas da mesma ordem de funções contínuas para as representar, com o que a demonstração se torna imediata.

A fórmula 2), que é uma consequência de *i*) e *ii*) define pois uma multiplicação entre elementos de $\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e de $\mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$, a qual, como se pode provar fàcilmente, satisfaz por sua vez as propriedades *i*) e *ii*). Isto é, esta multiplicação é a única que verifica *i*) e *ii*).

Além disso, ela verifica ainda as seguintes propriedades:

1) $(f+g)\cdot\varphi=f\cdot\varphi+g\cdot\varphi$
2) $f(\varphi+\psi)=f\cdot\varphi+f\cdot\psi$ (já demonstrada)
3) $f\cdot(g\cdot\varphi)=(f\cdot g)\cdot\varphi$
4) $1\cdot\varphi=\varphi$

quaisquer que sejam $f,g\in\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e $\varphi,\psi\in\mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$ isto é, $\mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$ constitui um módulo sobre o anel $\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$.

Se $\varphi\in\mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$ toma valor num ponto $\alpha\in\mathbf{R}$, para todo o $f\in\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$, o seu produto $f\cdot\varphi=\theta$ também tem valor naquele ponto, e tem-se

$$f(\alpha)\cdot\varphi(\alpha)=\theta(\alpha)\,.$$

Relativamente aos limites laterais, também se podem enunciar resultados análogos.

A fórmula 1) permite ainda uma generalização desta multiplicação, que se baseia no facto do produto de uma função contínua por uma medida ser uma medida. Sendo g uma função contínua e μ uma medida, diz-se produto de g por μ, a derivada da função $\varphi(x)$ definida por

$$\varphi(x)=\int_{\alpha}^{x} g(t)\,d\,t$$

onde $\alpha \in \mathbf{R}$ e o integral é entendido no sentido de RIEMANN-STIELTJES.

Posto isto, dadas uma função f que admite derivadas contínuas até à ordem n, e uma medida μ, é legítimo definir o produto $f \cdot D^n \mu$ através da relação

$$(5) \qquad f\cdot D^n \mu=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} (f^{(k)}\cdot \mu)$$

A multiplicação que resulta desta fórmula, entre funções que admitem derivadas até uma determinada ordem n, e derivadas dessa mesma ordem de medidas, verifica aliás as propriedades referidas atrás, relativas à multiplicação entre funções de $\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e distribuições.

Vejamos alguns exemplos. Sendo $\delta(x)$ uma medida, para toda a função contínua $f(x)$, e quaisquer que sejam os reais α e β diferentes de zéro, existe o integral de RIEMANN-STILTJES

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,d\,\delta=f(0)\,(h(\beta)-h(\alpha))\,.$$

A função $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,d\,\delta=f(0)\,(h(x)-h(\alpha))$ é de variação limitada sobre todo o intervalo compacto, e a sua derivada é por definição o produto de f por $\delta(x)$. Vem pois, derivando o integral anterior

$$f\cdot\delta=f(0)\cdot\delta$$

igualdade esta que constitui uma das propriedades mais importantes da distribuição de DIRAC.

Por sua vez, se f admite derivadas contínuas até à ordem n, o seu produto pela derivada de ordem n de $\delta(x)$, vem de acordo com 5 e 6

$$f\cdot\delta^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}D^{n-k}(f^{(k)}(0)\,\delta)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\,\delta^{(n-k)}$$

Exercícios propostos

1. Efectue os seguintes produtos

a) $x\,\delta(x)$

b) $e^{\alpha x}\,\delta(x)$

c) $x\,\delta(x-\beta)$ (β real)

d) $e^{\alpha x}\,\delta(x-\beta)$ (β real)

e) $e^{\alpha x}\,h(x)$ ($h(x)$: função de HEAVISIDE)

f) $e^{\alpha x}\,\delta'(x-\beta)$

g) $e^{\alpha x}\,\delta^{(n)}(x-\beta)$.

2. Determine

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x}\,\delta(x)\,d\,x\,;$

b) $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\gamma x}\,\delta(x)\,d\,x$ com $\beta>\alpha>0\,;$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x}\,\delta^{(n)}(x)\,d\,x\,.$

3. Prove que $\widetilde{\rho}_I(f\cdot\varphi)=0$ para todo o $f\in\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e todo o $\varphi\in\mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$ tal que $\widetilde{\rho}_I\,\varphi=0$. ($\widetilde{\rho}_I$: restricção a I, intervalo aberto de $\mathbf{R}$, vidé problema 7, § 2).

4. Prove que $\widetilde{\tau}_{\alpha}(f\cdot\varphi)=(\tau_{\alpha} f)\cdot(\widetilde{\tau}\,\varphi)$ quaisquer que sejam $f\in\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e $\varphi\in\mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$, isto é, que a translatada $\widetilde{\tau}_{\alpha}$ do produto $f\cdot\varphi$ é igual ao produto das translatadas de f e φ (vidé problema 5, § 2).

(Continua)

Análise e Estudo da Estrutura Vertical da Atmosfera Verificação Hidrostática

por V. M. Chiote Tavares e Maria Fernanda da Cruz
Lisboa

1. Considerações teóricas sobre a estática da atmosfera

A atmosfera é um sistema termodinâmico trivariante.

Como o seu movimento é predominantemente horizontal admite-se que há equilíbrio entre a força do gradiente de pressão e a força gravítica

$$-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}(g z).$$

A variação espacial de g tem como consequência a não coincidência das superfícies equigeopotenciais e das superfícies de igual altitute geométrica. Isto significa que duas partículas materiais com a mesma altitude, não têm, em geral, o mesmo geopotencial — conceitos de altitude geodinâmica e de altitude geométrica. Por esta razão é preferível caracterizar um ponto não pelo valor da sua altitude geométrica, mas pelo valor da energia potencial específica.

Da equação expressa, a determinação do geopotencial $\Phi = g z$ de uma dada superfície isobárica, depende, ùnicamente, do conhecimento da distribuição vertical dos parâmetros de estado caracterizantes do sistema.

Estes, expressos em valor numérico como dados observacionais, ligados a um ponto fixo do espaço ou medidos substancialmente no mesmo instante em pontos de coordenadas desconhecidas, constituem uma série, de distribuição vertical, posto que as variações horizontais são desprezáveis.

A integração daquela equação impõe que o parâmetro ρ seja uma função unívoca e bem determinada de p. É de notar, no entanto, que a forma geral da função ρ

$$\rho = \rho(p, T, T_d)$$

não é conhecida.

A fim de vencer esta dificuldade admitimos que o fluido atmosfera se comporta como um gás ideal sendo portanto a equação de Clapeyron

$$\rho = \frac{p}{R_a\, T_v}$$

a sua equação de estado.

Da conjugação da equação de estado com a equação tradutora do equilíbrio hidrostático resulta

$$d\Phi = -R_a\, T_v \frac{dp}{p} = -R_a\, T_v\, d(\log p).$$

Aplicando o teorema da média

$$\int_D \varphi\,\psi\, dD = \bar{\varphi}\int_D \psi\, dD.$$

Vem, para uma camada definida pelos níveis isobáricos p_i e p_j

$$\Phi_j - \Phi_i = \int_{p_j}^{p_i} R_a T_v d(\log p) =$$

$$= R_a T_{mv} \log \frac{p_i}{p_j}$$

equação que contém em si os geopotenciais relativo e absoluto. A temperatura virtual barométrica média, T_{mv}, não é igual, mas sim um pouco inferior à média aritmética, T'_{mv}, das temperaturas virtuais dos níveis que definem a camada, mesmo no caso de uma variação linear da temperatura com a altitude. De facto, nas condições enunciadas $(T_v = T_{v0} - \gamma z)$

$$T'_{mv} = \frac{T_v + T_{v0}}{2} = T_{v0} - \frac{\gamma z}{2}.$$

Mas

$$T_{mv} = \frac{\Phi}{\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{T_v}} = \frac{g z}{\int_0^{z} \frac{g\,dz}{T_v}} =$$

$$\frac{z}{\int_0^{z} \frac{dz}{T_{v0} - \gamma z}} = \frac{-\gamma z}{\operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{T_{v0}}\right)}$$

como resulta imediatamente da equação hidrostática escrita na forma

$$p = p_0\, e^{-\frac{g}{R_a}\int_0^{z}\frac{dz}{T_v}} = p_0\, e^{-\frac{g z}{R_a T_{mv}}}.$$

Exprimindo T'_{mv} e T_{mv} em séries de potências

$$T_{mv} = \frac{T_{v0}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\gamma z}{T_0} + \frac{1}{3}\left(\frac{\gamma z}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma z}{T_0}\right)^3 + \cdots}$$

$$T'_{mv} = \frac{T_{v0}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\gamma z}{T_0} + \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma z}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\gamma z}{T_0}\right)^3 + \cdots}$$

conclui-se imediatamente que

$$T_{mv} < T'_{mv}.$$

Vê-se, pois, que a temperatura barométrica média e a média aritmética das temperaturas só se podem considerar iguais quando for possível ignorar termos de ordem superior ou igual à segunda, o que acontece para variações lineares da temperatura com a altitude, quando o produto γz for pequeno.

A substituição da temperatura barométrica média pela média aritmética das temperaturas pode conduzir a erros apreciáveis, mesmo para camadas de pequena espessura, se a temperatura variar não linearmente com a altitude.

A partir desta metodologia pretendemos agora resolver o seguinte problema prático: verificação hidrostática dos elementos meteorológicos fornecidos por uma sondagem.

A verificação hidrostática dos elementos meteorológicos fornecidos por uma sondagem faz uma análise vertical dos elementos meteorológicos, pressão, altitude e temperatura, que serão depois utilizados nas diferentes fases da previsão do tempo por método numérico.

Esta análise consiste em:

A) Averiguar, para cada nível isobárico, se foram transmitidos valores da altitude e da temperatura. No caso de algum destes elementos, ou ambos, faltarem, é feita uma tentativa para a sua determinação completando-se, deste modo, a sondagem.

B) Verificar se os valores da altitude e da temperatura dos diferentes níveis isobáricos, são ou não consistentes com hipóteses de base formuladas desde o início:

1 — Ocorrência de pelo menos dois níveis consecutivos completos e correctos.

2 — O fluido atmosfera comporta-se como um gás ideal em equilíbrio hidrostático.

3 — Não ocorrência de gradientes verticais de temperatura, superadiabáticos.

4 — Não ocorrência de inversões de temperatura superior a 10° C.

Em caso negativo é feita uma tentativa de correcção dos referidos valores.

2. Breve análise das hipóteses e da sua utilização

1) Se a hipótese **1.** não se cumpre não é possível fazer a verificação hidrostática.

2) A forma integrada que traduz 2., quando tomada a espessura em metros geopotenciais e a temperatura em graus KELVIN é

$$\Delta\Phi = 67{,}442\, T_{mv} \log \frac{p_1}{p_2}.$$

Para fins de tratamento automático e, para obviar a dificuldades de ordem numérica a expressão anterior escreve-se

$$\Delta\Phi = \frac{T_{mv}}{T_0}[\Delta\Phi_{s2} - \Delta\Phi_{s1}] =$$

$$= \frac{t_{mv} + T_0}{T_0}[\Delta\Phi_{s2} - \Delta\Phi_{s1}] = [\Delta\Phi_{s2} - \Delta\Phi_{s1}] +$$

$$+ \frac{t_{mv}}{T_0}[\Delta\Phi_{s2} - \Delta\Phi_{s1}]$$

traduzindo $\Delta\Phi_{s1}$ e $\Delta\Phi_{s2}$ as espessuras, para uma temperatura média virtual igual a 273,15° K, respectivamente das camadas (p_s, p_1) e (p_s, p_2); p_s é um valor de recorrência que tomamos igual a 1100 *mb*, valor este nunca excedido na atmosfera.

A expressão anterior permite o cálculo imediato de $\Delta\Phi$, desde que se conheça a temperatura média virtual. Esta determina-se recorrendo a

$$T_{mv} = T_m(1 + 0{,}61\, q_m) = T_m + \Delta T_m$$

onde T_m e q_m representam valores médios, para a camada, das grandezas T e q.

Por outro lado

$$q_m = 0{,}622 \frac{e_m}{p_m - e_m} \simeq 0{,}622 \frac{e_m}{p_m}$$

sendo e_m obtido à custa da temperatura média do ponto de orvalho, T_{md}, por intermédio da fórmula

$$e_m = 10 \exp(11{,}5899 - 0{,}004\, T_{md} -$$
$$- 2651{,}38/T_{md}).$$

Resta determinar o nível p_m para o qual se vai calcular o incremento ΔT_m

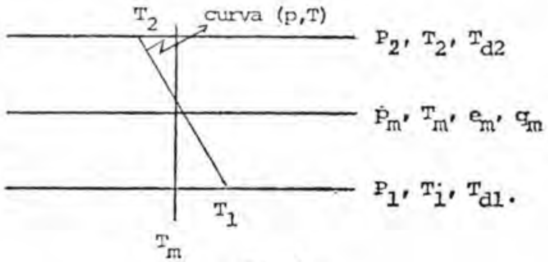


Fig. 1

O valor p_m obedece à equação

$$\frac{T_m - T_2}{T_1 - T_2} = \frac{p_2 - p_m}{p_2 - p_1}$$

donde, atendendo à definição de T_m, vem

$$p_m = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

Daqui resulta que a temperatura média virtual é dada por

$$T_{mv} = T_m + 0{,}378 \frac{T_m\, e_m}{p_m} \qquad \text{(em °K)}$$

$$t_{mv} = T_{mv} - T_0 \qquad \text{(em °C)}.$$

A comparação entre o valor calculado da espessura de uma camada definida por dois níveis consecutivos L e $L+1$ e o valor determinado a partir da radiossondagem é parte integrante da verificação hidrostática. Se o módulo da diferença entre estes dois valores exceder determinada tolerância conclui-se que o valor transmitido da altitude ou temperatura relativa ao nível L é incorrecto. Tomamos para tolerância

$$\mathrm{TOL} = \frac{3}{8}\,|D_a - D_b| =$$

$$= \frac{3}{8}\,\frac{R_a}{g\,k}\left|\left[1-\left(\frac{p_{L+1}}{p_L}\right)^k\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(\frac{p_L}{p_{L+1}}\right)^k T_{L+1} - T_L\right]\right|$$

representando D_a e D_b valores extremos da espessura da camada L, $L+1$ quando consideradas as adiabáticas secas que contêm as temperaturas dos níveis

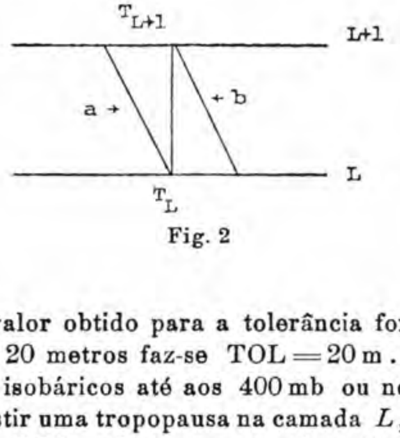


Fig. 2

Se o valor obtido para a tolerância for inferior a 20 metros faz-se $\mathrm{TOL} = 20\,\mathrm{m}$. Para níveis isobáricos até aos 400 mb ou no caso de existir uma tropopausa na camada $L, L+1$ faz-se $\mathrm{TOL} = 50\,\mathrm{m}$, se o valor obtido for superior a 50 m; para níveis isobáricos acima dos 400 mb a tolerância é limitada a 80 metros.

Se existe uma tropopausa na camada L, $L+1$ esse facto é tido em conta no cálculo da espessura da camada.

A distribuição observada da temperatura $T_L\, T_{\mathrm{TROP}}\, T_{L+1}$ é substituída por uma distribuição fictícia $T_L\, T^*_{L+1}$

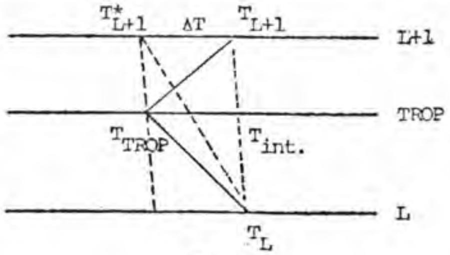


Fig. 3

A temperatura fictícia T^*_{L+1} é determinada pela condição $T^*_{L+1}\, T_{\mathrm{TROP}} \,\|\, T_{L+1}\, T_L$ que assegura a igualdade das espessuras calculadas com a distribuição observada e a distribuição fictícia.

Tem-se

$$T^*_{L+1} = T_{L+1} + \Delta T .$$

Mas

$$\Delta T = T_{\mathrm{TROP}} - T_{\mathrm{int.}} .$$

O valor interpolado $T_{\mathrm{int.}}$ é obtido admitindo uma variação linear da temperatura com a pressão entre T_L e T_{L+1}

$$T_{\mathrm{int.}} = T_L + \frac{(T_{L+1} - T_L)(p_L - p_{\mathrm{TROP}})}{p_L - p_{L+1}} .$$

Vem finalmente

$$T^*_{L+1} = T_{L+1} + T_{\mathrm{TROP}} - T_{\mathrm{int.}} .$$

Se $\Delta T = T_{\mathrm{TROP}} - T_{\mathrm{int.}}$ for positivo existe um erro e a tropopausa não é tomada em consideração no cálculo da espessura da camada L, $L+1$.

3) Para verificar da existência de gradientes verticais de temperatura superadiabáticos (hipótese 3) compara-se o gradiente vertical real da temperatura de uma camada ou com o gradiente adiabático seco ou com o gradiente adiabático saturado.

O gradiente adiabático seco é expresso por $\dfrac{g}{c_{pa}}$.

O gradiente adiabático saturado é calculado por intermédio da fórmula

$$\frac{dT}{d\varphi} = -\frac{y}{x} \quad {}^{\circ}\mathrm{C}/100\, gpm$$

onde

$$y = 9{,}8 \times 10^{6} \frac{(1 + r_w)(RT + r_w L_v)}{RT}$$

$$x = c_p + r_w \left[c_w + \frac{dL_v}{dT} - \frac{L_v}{T} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k} \frac{d \log e_w}{dT} (RT + r_w L_v + k L_v) \right].$$

3. Cálculo de valores omissos da temperatura e/ou altitude

1) O valor da temperatura do nível L, T_L, não foi transmitido. Se se conhecem os elementos T_{L+1}, Z_{L+1} e Z_L procede-se ao cálculo de uma temperatura para o nível L, T_L^s, recorrendo à fórmula hidrostática.

Caso sejam também conhecidos os elementos T_{L-1}, Z_{L-1} $(e\, Z_L)$ a fórmula hidrostática permite obter um valor T_L^I para a temperatura do nível L.

a) Não foi possível calcular, por falta de elementos, nem T_L^s nem T_L^I. Neste caso o valor T_L não pode ser calculado.

b) Apenas foi possível calcular um dos valores T_L^s ou T_L^I; faz-se $T_L = T_L^s$ ou $T_L = T_L^I$ se não ocorrem inversões de temperatura superiores a 10° C nem gradientes verticais de temperatura superadiabáticos na camada escolhida $L, L+1$ ou $L, L-1$.

c) Foi possível calcular os valores T_L^s e T_L^I; aceita-se para valor de T_L a média aritmética dos valores T_L^s e T_L^I se:

c_1 — nas camadas $L, L+1$ e $L, L-1$ não ocorrem inversões de temperatura superiores a 10° C nem gradientes verticais de temperatura superadiabáticos.

c_2 — o módulo da diferença entre T_L^s e T_L^I é inferior a 5° C.

Se não se pode aceitar para T_L a média aritmética de T_L^s e T_L^I toma-se para valor de T_L um dos valores, T_L^s ou T_L^I, desde que se cumpram as condições indicadas em *b*); se estas condições não são satisfeitas nem por T_L^s nem por T_L^I não é possível calcular T_L.

2) O valor da altitude do nível L, Z_L, não foi transmitido.

Se se conhecem os elementos T_{L+1}, Z_{L+1} e T_L calcula-se um valor Z_L^S para a altitude do nível L, recorrendo à fórmula hidrostática. Caso sejam também conhecidos os elementos T_{L-1}, Z_{L-1} (e T_L) a fórmula hidrostática fornece um valor Z_L^I para a altitude do nível L.

a) Se, por falta de elementos, não foi possível calcular nem Z_L^S nem Z_L^I, não se pode determinar Z_L.

b) Apenas foi possível calcular um dos valores Z_L^S ou Z_L^I. Neste caso, toma-se para Z_L aquele dos valores Z_L^S ou Z_L^I que tiver sido calculado desde que não ocorra um gradiente de temperatura superadiabático na camada definida pelo nível L e pelo nível utilizado na determinação de Z_L ($L+1$ ou $L-1$).

c) Foi possível calcular os elementos Z_L^S e Z_L^I. Se o módulo de diferença entre Z_L^S e Z_L^I for inferior a 30 m toma-se para Z_L a média aritmética de Z_L^S e Z_L^I; se o valor absoluto da referida diferença for superior a 30 m mas se as espessuras das camadas $L+1$, $L+2$ e $L-1$, $L-2$ estiverem correctas aceita-se da mesma maneira para valor de Z_L (embora com reserva) a média aritmética de Z_L^S e Z_L^I.

3) Não foram transmitidos os valores da altitude e da temperatura do nível L, respectivamente Z_L e T_L.

Neste caso calcula-se, em primeiro lugar, T_L, recorrendo à espessura da camada $L-1$, $L+1$ e aos elementos T_L-1, p_L-1, Z_{L-1}, T_{L+1}, p_{L+1} e Z_{L+1}.

Se a determinação de T_L foi possível e, se o valor obtido não conduz a gradientes de temperatura superadiabáticos procede-se ao cálculo de Z_L como indicado em 2.

Os procedimentos indicados em 1., 2. e 3. são feitos primeiro no sentido ascendente e, em seguida, no sentido descendente.

4. Correcção de valores errados da temperatura e/ou altitude.

Após a tentativa descrita em 3., para completar a sondagem, verifica-se se os valores da altitude e da temperatura dos diferentes níveis isobáricos são consistentes com as hipóteses de base 2., 3. e 4.; em caso negativo procede-se, se possível, à correcção dos mesmos, a qual é feita primeiro no sentido ascendente e, em seguida, no sentido descendente.

Para isso calcula-se, para cada nível L, a quantidade F_L diferença entre o valor observado da espessura da camada L, $L+1$ e o valor calculado (como descrito em 2.) da espessura da mesma camada

$$F_L = \Delta\,\Phi_{\text{calculado}} - \Delta\,\Phi_{\text{observado}}$$

Se F_L é inferior ou igual à tolerância admite-se, em princípio, que os valores T_L e Z_L estão correctos; se for superior existe um erro nos valores da temperatura e/ou altitude referentes ao nível L.

Para decidir da natureza do erro calcula-se a quantidade

$$E = \frac{F_{L-1}}{F_L}.$$

1) $|E| < 0,5$.

Neste caso a natureza do erro é incerta.

Admite-se, primeiramente, a existência de erro no valor de T_L e procede-se ao cálculo de um novo valor de T_L recorrendo aos elementos Z_L, T_{L-1}, e Z_{L-1}, utilizando a fórmula hidrostática.

Se este valor não conduz a um gradiente vertical de temperatura superadiabático na camada $L-1$, L e, se o gradiente vertical de temperatura calculado com o novo valor de T_L, se aproxima mais do gradiente adiabático seco, na troposfera, ou da distribuição isotérmica, na estratosfera, do que o primitivo gradiente vertical de temperatura; então o valor inicial de T_L é substituído pelo novo valor.

Se estas condições não se verificam, calcula-se um novo valor para Z_L com os elementos T_L, Z_{L-1} e T_{L-1}, desde que o gradiente vertical de temperatura observado, não seja superadiabático. Em seguida faz-se de novo a verificação hidrostática para os níveis $L-1$ e L.

2) $0,5 \leqq E \leqq 2,0$.

Neste caso há um erro no valor T_L.

A fórmula hidrostática permite obter uma nova temperatura T_L, com os elementos Z_L, Z_{L+1}, T_{L+1} e/ou Z_L, Z_{L-1}, T_{L-1}.

3) $-0,5 \geqq E > -2,0$.

O valor Z_L está errado; calcula-se um novo valor para Z_L com auxílio da fórmula hidrostática e dos elementos referentes aos níveis $L-1$ e/ou $L+1$.

4) $E \geqq 2,0$.

Neste caso ou há um erro no valor Z_L que se propaga a todos os níveis acima de L ou há um erro no nível $L-1$ não tendo já sido detectado esse erro em virtude de F_{L-1}

não exceder a tolerância. É determinada a quantidade $E' = \frac{F_{L-2}}{F_{L-1}}$ que vai permitir decidir da natureza do erro.

a) $|E'| < 0{,}5$

Se a espessura da camada $L-1, L$ está correcta, toma-se como certos os elementos referentes ao nível $L-1$ estando então os valores das altitudes do nível L e de todos os níveis que se lhe seguem afectados de um erro constante; todas estas altitudes são corrigidas pelo valor F_{L-2}.

Se a espessura $L-1, L$ está errada, tenta-se, em primeiro lugar, corrigir o erro referente ao nível $L-1$ e, em seguida, o erro na espessura da camada $L-1, L$; se a primeira tentativa falha, por falta de elementos, não é possível nenhuma correcção.

b) $0{,}5 < E' < 2{,}0$

O valor T_{L-2} está errado e é corrigido como indicado em 2).

c) $-0{,}5 \geqq E' > -2{,}0$

O valor Z_{L-1} está errado e é corrigido da maneira indicada em 3).

d) $|E'| \geqq 2{,}0$

Não é possível decidir acerca da natureza do erro, nem, portanto, proceder a nenhuma correcção.

G

Re

cia

re
do

de
qu
Ur
cíp
Di
Na
Id
dir

me
en
liz
int
sár
tur
mi

fes
do
do

cer
cor

Recomendação relativa à situação dos professores aprovada pela Conferência Intergovernamental Especial sobre a situação dos professores

UNESCO

Paris, 5 de Outubro de 1966

Recomendação

A Conferência Intergovernamental Especial sobre a situação dos Professores,

Chamando a atenção para o facto do direito à educação ser um direito fundamental do homem,

Consciente da responsabilidade dos Estados de assegurarem a todos uma educação adequada, conforme o Art.º 26 da Declaração Universal dos Direitos do Homem e os Princípios n.os 5, 7 e 10 da Declaração dos Direitos da Criança e da Declaração das Nações Unidas acerca da Promoção dos Ideais de Paz, de Respeito Mútuo e Entendimento entre os Povos,

Conhecedora da necessidade de um aumento e alargamento do ensino geral e do ensino técnico e profissional com vista à utilização plena de todas as aptidões e recursos intelectuais existentes, como condição necessária à promoção dos valores morais e culturais e à continuidade do progresso económico e social,

Reconhecendo o papel essencial dos professores no nível educacional e a importância do seu contributo para o desenvolvimento do homem e da sociedade moderna,

Interessada em assegurar ao pessoal docente uma condição que esteja de acordo com esse papel,

Tendo em conta a grande diversidade de legislações e de usos que, nos diferentes países, determinam as estruturas e a organização do ensino,

Tendo igualmente em conta a diversidade de estatutos que, em diversos países, se aplicam aos professores, especialmente se estão ou não submetidos aos regulamentos relativos aos funcionários públicos,

Convencida de que, apesar destas diferenças, em todos os países surgem problemas comuns relativos à situação dos professores e que estes problemas impõem a aplicação de uma série de normas e medidas comuns, que são a finalidade desta série de recomendações,

Tomando nota dos termos existentes nas convenções internacionais que são aplicáveis aos professores e, em especial, dos instrumentos relativos aos direitos fundamentais do homem, tais como a Convenção sobre a Liberdade de Associação e a Protecção do Direito de Sindicalização, 1948, a Convenção sobre Igualdade de Remuneração, 1951, a Convenção relativa à Discriminação do (emprego e ocupação), 1958, adoptadas pela Conferência Geral da Organização Internacional do Trabalho, e bem assim a Convenção contra a Descriminação na Educação, 1960, aprovada pela Conferência Geral da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura;

Considerando igualmente as recomendações relativas a vários aspectos da formação e da situação dos professores das escolas primárias e secundárias, adoptadas pela Conferência Internacional de Educação Pública celebrada sob os auspícios da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura e do «Bureau» Internacional de Educação, e ainda a Recomendação sobre o Ensino Técnico e Profissional, 1962, aprovada pela Conferência Geral da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura,

Desejando completar as normas existentes por meio de disposições relativas aos problemas que interessam essencialmente ao pessoal docente e, em particular, dar solução à escassez deste pessoal,

Aprova a seguinte Recomendação:

I. Definições

1. Para os efeitos desta Recomendação:

a) O termo «pessoal docente» ou «professores» serve para designar todas as pessoas que, nos diversos estabelecimentos de ensino, estão encarregadas da educação.

b) O termo «situação» empregado em relação ao pessoal docente, designa, por sua vez, a posição social que se reconhece, segundo o grau de consideração atribuído à importância da sua função, à sua competência e condições de trabalho, à sua remuneração e demais benefícios materiais que se lhe concedem em comparação com outras profissões.

II. Campo de aplicação

2. Esta Recomendação aplica-se tanto ao ao pessoal docente dos estabelecimentos de ensino oficiais como particulares, quer do ensino secundário, intermédio, geral, técnico, profissional ou artístico; dos estabelecimentos do ensino primário, dos jardins infantis; e dos infantários.

III. Princípios gerais

3. Desde os primeiros anos escolares da criança, a educação deve visar o pleno desenvolvimento da sua personalidade humana e o progresso espiritual, moral, social, cultural e económico da comunidade, bem como incutir-lhe um profundo respeito pelos direitos humanos e pelas liberdades fundamentais. Dentro deste contexto, deve conceder-se a maior importância à contribuição da educação para a paz e para a compreensão, tolerância e amizade não só entre todas as nações mas também entre os diferentes grupos raciais ou religiosos.

4. Deve reconhecer-se que o progresso da educação depende em grande parte das qualidades e competência dos professores em geral, bem como das qualidades humanas, pedagógicas e profissionais de cada um em particular.

5. A situação do pessoal docente deve corresponder às exigências da educação, definidas de acordo com os fins e objectivos docentes; a realização perfeita destas finalidades e objectivos exige que os educadores disfrutem de uma situação justa e que a profissão docente goze do respeito público que merece.

6. O ensino deve ser considerado como uma profissão cujos membros prestam um serviço público; esta profissão exige dos educadores não apenas conhecimentos profundos e competência especial, adquiridos e mantidos através de estudos rigorosos e contínuos, mas também um sentido das responsabilidades pessoais e colectivas que eles assumem para a educação e bem estar dos alunos a seu cargo.

7. A formação e o emprego do pessoal docente não devem estar sujeitos a qualquer forma de discriminação por motivos de raça, cor, sexo, religião, opiniões políticas, origem nacional ou social, ou situação económica.

8. Ao pessoal docente devem fixar-se condições de trabalho que lhe permitam, tanto quanto possível, um ensino eficaz e uma entrega plena às suas funções profissionais.

9. As organizações do pessoal docente devem ser reconhecidas como uma força que pode contribuir consideràvelmente para o progresso da educação, consequentemente devem participar na elaboração da política educacional.

IV. Objectivos da educação e política educacional

10. Sempre que necessários, em cada país devem tomar-se as medidas adequadas para formular uma política educacional global que se ajuste aos princípios gerais atrás mencionados e em conformidade com a qual possam aproveitar-se todos os recursos e todas as capacidades disponíveis. Ao fazê-lo, as autoridades competentes devem ter na devida conta as consequências, para o pessoal docente, dos princípios e objectivos seguintes:

a) Cada criança tem o direito fundamental de beneficiar de todas as vantagens da educação; deve ser prestada a devida atenção as crianças que exijam um tratamento educativo especial.

b) Devem conceder-se, a todos, iguais facilidades para a efectivação do seu direito à educação, sem discriminação de sexo, raça, cor, religião, opiniões políticas, origem nacional ou social, ou situação económica;

c) Dado a educação é um serviço de fundamental importância para o interesse do público em geral deve reconhecer-se que a responsabilidade do mesmo cabe ao Estado, a quem compete o provimento de um número suficiente de estabelecimentos escolares, educação gratuita nos mesmos e ajuda material aos alunos que dela necessitem. Não quer isto dizer que o Estado limite a liberdade dos pais ou encarregados de educação quanto a escolha, para seus filhos ou educandos, de escolas que não pertençam ao Estado ou a liberdade de pessoas individuais ou colectivas criarem e dirigirem estabelecimentos de ensino, de acordo com as normas educativas que possam ser estabelecidas e aprovadas pelo mesmo Estado;

d) Como a educação é um factor essencial para o progresso económico, o planeamento geral económico e social que for adoptado com o objectivo de melhorar as condições de vida;

e) Sendo a educação um processo contínuo, deve existir uma estreita coordenação entre as diferentes categorias de pessoal docente com vista a melhorar, não só a qualidade do ensino a todos os alunos, mas também a situação dos professores;

f) Os alunos devem ter livre acesso a uma rede suficientemente flexível de estabelecimentos escolares, adequadamente relacionados entre si, a fim de se conseguir que nada limite as possibilidades de cada aluno alcançar qualquer nível ou tipo educacional;

g) Em matéria de educação, nenhum Estado deve ter como objectivo único a quantidade, mas também a qualidade;

h) Em matéria de educação, o planeamento e a programação devem fazer-se tanto a longo como a curto prazo; a integração proveitosa dos actuais alunos na comunidade dependerá mais das necessidades futuras do que das exigências actuais;

i) Devem incluir-se, desde o princípio, em cada etapa do planeamento educacional, disposições relativas à formação e aperfeiçoamento profissional de um número suficiente de professores nacionais plenamente capazes e qualificados que conheçam a vida do seu povo e possam ensinar na sua língua;

j) No que respeita à formação e aperfeiçoamento profissional dos professores, são necessárias uma investigação e uma acção coordenadas, sistemáticas e contínuas. A nível internacional, deve incluir-se a cooperação entre investigadores, assim como o intercâmbio dos resultados das investigações;

k) Deve existir uma estreita cooperação entre as entidades competentes e as organizações dos professores, das entidades patronais, dos operários e dos pais dos alunos, organizações culturais e instituições de ensino ou de alta cultura e de investigação, com vista a uma definição da política docente e seus objectivos próprios;

l) Como o êxito dos fins e objectivos da educação depende em grande parte dos recursos económicos com que esta pode contar, deve dar-se especial prioridade, nos orçamentos de cada país, à atribuição de uma parte suficiente do rendimento nacional para o desenvolvimento da educação.

V. Preparação para a profissão docente

Selecção

11. Ao estabelecer-se a política de ingresso nos cursos de formação dos futuros professores, deve ter-se em conta a necessidade de prover a sociedade de um número suficiente de professores que reunam as necessárias qualidades morais, intelectuais e físicas, bem como os conhecimentos e competência requeridos.

12. Para satisfazer esta necessidade, as autoridades compotentes devem providenciar para que esta formação seja suficientemente atractiva e assegurar um número suficiente de lugares nas instituições adequadas.

13. Para ingressar na profissão docente deve exigir-se a aprovação numa adequada instituição de formação de professores.

14. Para ser admitido nas instituições de formação de professores, o candidato deve ter completado os estudos secundários e evidenciar as qualidades pessoais necessárias para o exercício eficaz da profissão.

15. Sem modificar as condições gerais de ingresso nas instituições de formação de professores, devem ser admitidas nessa formação as pessoas que, sem reunir todas as condições académicas requeridas, possuam uma experiência útil, especialmente de carácter técnico ou ocasional.

16. Ao futuro pessoal docente devem ser proporcionadas bolsas e assistência económica que lhe permitam frequentar os cursos de formação e viver com decoro; na medida do possível, as autoridades competentes devem procurar estabelecer um sistema de formação gratuita.

17. Os estudantes e demais pessoas interessadas em preparar-se para a carreira do ensino devem ser completamente informados das possibilidades de formação e da assistência económica existente.

18. 1) A uma pessoa que tenha adquirido a sua formação profissional no estrangeiro, antes de se lhe reconhecer o direito de total ou parcialmente exercer o ensino, conviria investigar cuidadosamente a qualidade dessa formação.

2) Convém tomar medidas com vista a estabelecer o reconhecimento, a nível internacional, dos títulos que conferem a capaci-

dade para a docência, de acordo com as normas estabelecidas nos diferentes países.

Programas de formação de pessoal docente

19. O objectivo da formação do pessoal docente deve visar o desenvolvimento da sua formação geral e cultura pessoal; da aptidão para ensinar e educar; da compreensão dos princípios fundamentais para o estabelecimento de boas relações humanas no interior do país e para além fronteiras; da consciência do seu dever de contribuir, pelo ensino e pelo exemplo, para o progresso social, cultural e económico.

20. Todo o programa de formação de pessoal docente deve incluir essencialmente:

a) Estudos gerais;

b) Estudos dos elementos fundamentais de filosofia, de psicologia e de sociologia aplicados à educação; teoria e história da educação; educação comparada; pedagogia experimental; administração escolar; métodos de ensino das diferentes disciplinas;

c) Estudos relativos à disciplina em que o futuro professor projecta exercer o magistério;

d) Prática do ensino e dos actividades para-escolares, sob a direcção de professores qualificados.

21. 1) O pessoal docente deve adquirir a sua formação geral, especializada e pedagógica, numa universidade ou numa instituição de nível equivalente, ou numa escola especializada na formação de pessoal docente.

2) Os programas de formação podem variar, em certa medida, segundo os cargos que venham a ser entregues aos professores nos diferenues tipos de estabelecimentos escolares, tais como escolas para as crianças deficientes ou escolas técnicas e profissionais. Neste último caso, poderiam incluir-se nesses programas uma experiência prática na indústria, no comércio ou na agricultura.

22. Nos programas de formação de pessoal docente, a formação pedagógica tanto pode ser feita ao mesmo tempo que os cursos de cultura geral ou de especialização, como ulteriormente a eles.

23. Por norma, a formação de pessoal docente deve ser feita em tempo pleno; mas devem reservar-se disposições especiais que permitam aos candidatos de idade mais avançada, ou a pessoas noutras condições excepcionais, completarem ou tirarem parte de cursos em tempo parcial, na condição de o conteúdo dos programas e o nível alcançado serem os mesmos dos cursos em tempo pleno.

24. Convem investigar se a formação de professores de diferentes categorias, destinados ao ensino primário, secundário, técnico, profissional, ou a um ensino especial, deve ser feita em instituições orgânicamente ligadas entre si ou em instituições próximas umas das outras.

Instituições de formação de pessoal docente

25. Os professores de instituições de formação de pessoal docente devem estar qualificados para ministrar o ensino das respectivas disciplinas a um nível equivalente ao do ensino superior.

Aqueles que ministram a formação pedagógica devem ter experiência de ensino escolar e, sempre que possível, renovar essa experiência periòdicamente mediante a prática de ensino em estabelecimentos escolares.

26. Convem favorecer a investigação e experimentação relativas à aprendizagem e ao ensino das diferentes disciplinas, proporcionando às instituições de formação os meios e instalações necessárias, e facilitando as investigações realizadas pelo seu pessoal e pelos seus alunos. O pessoal encarregado da formação dos professores deve manter-se informado dos resultados das investigações

no âmbito do seu interesse e empregá-los em benefício dos alunos.

27. Tanto os estudantes como o corpo docente de uma instituição de formação de professores devem ter a possibilidade de exprimir a sua opinião sobre as disposições concernentes à vida, actividade e disciplina da mesma instituição.

28. As instituições de formação de pessoal docente devem constituir um foco de desenvolvimento no campo do ensino, ora informando os professores dos estabelecimentos de ensino sobre os resultados das investigações e os progressos metodológicos, ora aproveitando, nas suas próprias actividades, a experiência dos estabelecimentos escolares e dos seus professores.

29. Deve ser da competência das instituições de formação de professores, separadamente ou em conjunto, ou ainda em colaboração com outras instituições de ensino superior ou com as competentes autoridades em matéria de educação, passar aos seus alunos os certificados de aproveitamento nos cursos.

30. As autoridades escolares, em colaboração com as instituições de formação de professores devem tomar as medidas apropriadas para que ao professor que concluiu a sua formação seja proporcionado um emprego compatível com a respectiva formação, de acordo com os seus desejos e com a sua situação pessoal.

VI. Aperfeiçoamento dos professores

31. As autoridades e os professores devem reconhecer a importância do aperfeiçoamento durante a sua actividade, para assegurar um sistemático melhoramento da qualidade e do conteúdo do ensino, e das técnicas pedagógicas.

32. As autoridades, depois de prévia consulta às organizações de professores, devem promover o estabelecimento de um sistema de instituições e serviços de aperfeiçoamento que, a título gratuito, fiquem à livre disposição de todos os professores. Este sistema deve oferecer uma ampla variedade de opções e associar as instituições de formação de pessoal docente, as instituições científicas e culturais, e as organizações de professores. Devem organizar-se cursos especiais de aperfeiçoamento para os professores que voltem à actividade do magistério depois de uma interrupção.

33. 1) Devem organizar-se cursos e adoptar-se outras medidas que permitam aos professores melhorar a sua classificação, modificar ou ampliar o campo de actividades, aspirar a uma promoção e manter-se ao corrente dos progressos feitos na sua disciplina e no âmbito do seu ensino quanto à matéria e aos métodos.

2) Devem tomar-se medidas para pôr à disposição dos professores livros e outro material para melhoramento da sua cultura geral e qualifiicação profissional.

34. Convem estimular os professores a participarem em cursos ou iniciativas congéneres a fim de obterem um melhoramento profissional, proporcionando-lhes todas as facilidades nesse sentido.

35. As autoridades escolares devem adoptar todas as medidas necessárias para conseguirem que as escolas possam aplicar os resultados das investigações feitas, tanto na matéria que ensinam como nos métodos pedagógicos.

36. As autoridades devem encorajar e, na medida do possível, subsidiar os professores na realizacão de viagens colectivas ou individuais, tanto dentro do país como ao estrangeiro, com vista ao seu aperfeiçoamento.

37. Será desejável que as medidas de cada país relativas à formação e aperfeiçoamento dos professores possam desenvolver-se e completar-se através da cooperação técnica e financeira, tanto de âmbito internacional como regional.

VII. Contrato e carreira profissional

Ingresso na profissão docente

38. A política do contrato do pessoal docente deve definir-se claramente a nível apropriado, em colaboração com as organizações de professores, estabelecendo-se normas quanto às obrigações e aos direitos do pessoal docente.

39. A obrigação de um período de prova no começo do exercício das funções de professor deve ser considerada, tanto pelo pessoal docente como pelos estabelecimentos de ensino, como uma oportunidade, de estímulo, oferecida ao principiante, para actuar satisfatòriamente, obter e manter níveis de eficiência profissional adequados, e favorecer o desenvolvimento dos seus conhecimentos pedagógicos. A duração normal do período de prova deve conhecer-se de antemão e as habilitações exigidas devem ser de ordem puramente profissional. Se o novo professor não satisfizer durante a prova, deve comunicar-lhe as razões das queixas contra ele formuladas e reconhecer-lhe o direito de se defender.

Subida e promoção

40. Ao pessoal docente deve ser facultado o acesso a categorias superiores ou a mudança do ensino de um nível para o de outro, desde que apresente as qualificações requeridas.

41. A organização e a estrutura do ensino assim como as instituições escolares, devem permitir e reconhecer ao pessoal docente a possibilidade de exercer atribuições complementares, contanto que estas não prejudiquem a qualidade e regularidade do seu trabalho docente.

42. É de levar em conta as vantagens que o professorado e os alunos podem obter dos edifícios suficientemente grandes, em benefícios e oportunidades, em que as diferentes funções possam ser repartidas adequadamente segundo as qualificações dos professores.

43. Na medida do possivel, convirá nomear o pessoal docente experimentado para postos de responsabilidade no ensino, como inspector, administrador escolar, director do ensino ou outro posto que tenha atribuições especiais.

44. As promoções devem basear-se numa avaliação objectiva das qualidades do interessado para o novo posto, segundo critérios profissionais estabelecidos depois de consultadas as organizações de professores.

Segurança do emprego

45. A estabilidade profissional e a segurança do emprego são indispensáveis tanto no interesse do ensino como no do pessoal docente e devem ser garantidas mesmo quando haja mudanças na organização tanto do conjunto como de uma parte sistema escolar.

46. O pessoal docente deve estar protegido eficazmente contra os actos arbitrários que atinjam a sua situação profissional ou a sua carreira.

Procedimentos disciplinares por faltas profissionais

47. Devem definir-se claramente as medidas disciplinares aplicadas ao pessoal docente por faltas profissionais. As acusações e certas medidas eventuais não devem tornar-se públicas, salvo a pedido do professor em causa, excepto quando envolvam proibição de ensinar ou quando a protecção e o bem estar dos alunos o exijam.

48. Devem ser claramente designadas as autoridades e organismos qualificados para propor ou aplicar sanções ao pessoal docente.

49. As organizações de professores de-

vem ser consultadas quando se estabelecessem normas para efeitos disciplinares.

50. Em cada etapa do processo disciplinar, todo o professor deve usufruir de garantias equitativas que, em especial, devem compreender:

a) O direito de ser informado, por escrito, das acusações que lhe foram feitas e suas causas;

b) O direito de conhecer, sem restrições, o conteúdo do processo;

c) O direito de se defender e de ser defendido por um representante à sua escolha e de dispor do tempo suficiente para a preparação da sua defesa;

d) O direito de ser informado por escrito das decisões tomadas a seu respeito, e das razões das mesmas;

e) O direito de apelar para as autoridades ou organismos competentes.

51. As autoridades devem reconhecer que a consecução da salvaguarda disciplinar e mesmo a própria disciplina se atinge muito mais fàcilmente se o pessoal docente for julgado com a participação de pessoas da mesma categoria.

52. As disposições dos parágrafos 47 a 51 não afectam de modo algum os procedimentos aplicáveis aos crimes previstos na legislação nacional.

Exames médicos

53. Os professores devem ser submetidos, periòdicamente, a exame médico gratuito.

Professoras com encargos de família

54. O casamento não deve impedir à mulher o seu ingresso ou continuidade no ensino tão pouco deve afectar o respectivo vencimento nem as suas condições de trabalho.

55. Deve ser proibido rescindir o contrato de uma professora por razões de gravidez ou licença de maternidade.

56. Quando necessário deve pôr-se à disposição das professoras com crianças, infantários ou creches.

57. Devem tomar-se medidas de modo a permitir que as professoras com responsabilidades familiares obtenham colocação na localidade onde residem, e que os casais de professores tenham a possibilidade de ensinar na mesma área ou até no mesmo estabelecimento escolar.

58. Quando as circunstâncias o aconselhem, as professoras com responsabilidades familiares que tenham abandonado o ensino antes da idade de reforma devem ser encorajadas a regressar ao serviço.

Serviço em regime de tempo parcial

59. As autoridades e os estabelecimentos de ensino devem reconhecer o valor dos serviços prestados em regime de tempo parcial, em caso de necessidade, para professores qualificados que, por qualquer razão, não possam prestar serviço em tempo pleno.

60. Os professores que prestam um serviço regular em tempo parcial devem:

a) Receber, em proporção, a mesma remuneração e usufruir das mesmas condições básicas de trabalho, dos professores empregados em tempo pleno.

b) Ter garantidos os mesmos direitos correspondentes aos professores empregados em tempo pleno, nomeadamente no que se refere a pagamento de férias e de licenças por doença ou maternidade.

c) Beneficiar de uma protecção adequada no que respeita a segurança social, incluindo o mesmo esquema de pagamento de pensões.

VIII. Direitos e responsabilidades dos professores

Liberdade profissinoal

61. No exercício das suas funções, os professores devem gozar de liberdade académica. Atendendo a que são especialmente qualificados para julgar os meios e métodos de ensino mais adequados aos seus alunos, deve dar-se-lhes um papel preponderante na escolha e adaptação do material escolar na selecção dos livros de texto e na aplicação dos métodos pedagógicos, dentro dos programas aprovados e com a colaboração das autoridades escolares.

62. Os professores e suas organizações devem participar na elaboração dos novos programas dos livros de texto e dos meios auxiliares de ensino.

63. Todo o sistema de inspecção ou supervisão deve ser concebido em ordem a estimular e ajudar os professores a melhor desempenharem as suas tarefas profissionais, e ainda a evitar que lhes seja restringida a liberdade, a iniciativa e a responsabilidade.

64. 1) Quando a actividade de um professor seja objecto de uma apreciação directa, esta deve ser objectiva e posta ao conhecimenlo do interessado.

2) O pessoal docente deve ter direito a recorrer contra as apreciações que julgue injustificadas.

65. Os professores devem ter plena liberdade de aplicar todas as técnicas de avaliação que julgarem convenientes para conhecer o progresso de seus alunos, preocupando-se com que não se cometa nenhuma injustiça a respeito de nenhum deles.

66. As autoridades devem prestar consideração adequada às recomendações dos professores relativas ao tipo de ensino que melhor convenha a cada aluno, assim como à orientação futura de seus estudos.

67. No interesse dos alunos devem realizar-se todos os esforços com vista a favorecer a cooperação entre os encarregados de educação e os professoses, mas estes devem estar protegidos contra toda a injerência injustificada dos encarregados de educação em assuntos que são essencialmente da sua competência profissional.

68. 1) Os encarregados de educação que desejarem apresentar queixas contra uma instituição escolar ou contra um professor, devem ter a faculdade de discuti-las primeiramente com o director da instituição e com o professor interessado. Toda a queixa que ulteriormente se apresente às autoridades superiores deve ser formulada por escrito e o seu texto ser comunicado ao professor interessado.

2) O estudo das queixas deve fazer-se de forma que os professores interessados tenham plena possibilidade de se defenderem sem que se dê publicidade alguma ao assunto.

69, Dado que os professores devem ter o máximo cuidado em evitar acidentes aos seus alunos, as entidades patronais dos professores devem protegê-los contra o risco de pagamento de prejuízos e danos sofridos pelos alunos em acidentes na própria escola ou em actividades escolares fora dela.

Obrigações do pessoal docente

70. Reconhecendo que a situação do pessoal docente depende em grande parte do seu próprio comportamento, todos os professores devem esforçar-se por alcançar os mais altos níveis possíveis em todas as suas actividades profissionais.

71. Os níveis de eficiência exigíveis ao pessoal docente devem definir-se e fazer-se respeitar com o concurso das organizações do dito pessoal.

72. Os professores e suas organizações devem procurar cooperar plenamente com as

autoridades no interesse dos alunos, do ensino e da sociedade.

73. As organizações de professores devem elaborar códigos de ética e de conduta, já que os ditos códigos contribuem grandemente para assegurar o prestígio da profissão e o cumprimento dos deveres profissionais segundo princípios aceites.

74. Os professores devem estar dispostos a participar em actividades extra-escolares em benefício dos alunos e dos adultos.

Relações entre os professores e as direcções de serviços do ensino

75. Para que o pessoal docente possa cumprir plenamente as suas obrigações, as autoridades devem estabelecer e usar regularmente processos reconhecidos de consulta às organizações de professores sobre assuntos tais como política educacional, organização escolar e todas as transformações que possam ocorrer no ensino.

76. As autoridades e o pessoal docente devém reconhecer a importância da participação dos professores, por meio das suas organizações ou por outras vias na elaboração das disposições com vista ao melhoramento da qualidade do ensino, na investigação pedagógica, e no desenvolvimento e divulgação de novos e melhores metodos de ensino.

77. As autoridades devem facilitar a criação de grupos de trabalho encarregados de fomentar, dentro duma escola ou duma estrutura mais vasta, a cooperação entre os professores duma mesma disciplina, e considerar com a devida atenção as opiniões e sugestões de tais grupos.

78. O pessoal administrativo e restante pessoal encarregado dos diversos serviços no ensino devem procurar estabelecer as melhores relações possíveis com o pesssal docente e este deveria observar, reciprocamente, a mesma atitude.

Direitos dos professores

79. Convem encorajar a participação dos professores na vida social e pública com vista ao desenvolvimento pessoal dos professores, dos serviços educacionais e da sociedade em geral.

80. Os professores devem ter liberdade de exercer os direitos cívicos de que goza o conjunto dos cidadãos e ser elegíveis para cargos públicos.

81. Quando um cargo público obriga um professor a abandonar o seu lugar, deve conservar os seus direitos de antiguidade e de reforma e, ao expirar o novo mandato, poder reocupar o lugar anterior ou outro equivalente.

82. Os vencimentos e as condições de trabalho dos professores devem ser estabelecidas através de negociações entre as organizações do corpo docente e as entidades patronais.

83. Por via de regulamentação ou por acordo livre entre as partes, deve garantir-se aos professores o direito de negociarem, por meio das suas organizrções, com as entidades patronais públicas ou privadas.

84. Deve instituir-se um sistema paritário encarregado de resolver os conflitos entre o corpo docente e as entidades patronais resultantes das condições de emprego. No caso de se esgotarem os recursos e procedimentos estabelecidos ou no caso de se romperem as negociações entre as partes, as organizações dos professores devem ter direito a tomar as medidas de que normalmente dispõem outras organizações para a defesa dos seus legítimos interesses.

IX. Condições necessárias para um ensino eficaz

85. Dado que o professor é um especialista muito valioso, o seu trabalho deve ser organizado e facilitado de maneira a evitar-lhe perda de tempo e energias.

Número de alunos por turma

86. O número de alunos por turma deve ser suficientemente reduzido, a ponto do professor poder prestar atenção pessoal às dificuldades de cada aluno. De vez em quando deve poder reunir os alunos em pequenos grupos e, inclusivamente, tomá-los um por um, nomeadamente para lhes ministrar exercícios correctivos; nas devidas ocasiões, também deve poder reuní-los em grande número para sessões de ensino audiovisual.

Pessoal auxiliar

87. A fim de permitir aos professores concentrarem-se no exercício das suas funções, as escolas devem dispor de pessoal destinado a tarefas alheias ao ensino pròpriamente dito.

Material auxiliar de ensino

88. 1) As autoridades devem pôr à disposição dos professores e alunos material pedagógico moderno. Este material não deve considerar-se como substituto do professor mas como meio de melhorar a qualidade do ensino e de alargar a um maior número de alunos os benefícios da educação.

2) As autoridades devem fomentar as investigações relativas ao emprego deste material e encorajar os professores a participarem activamente em tais investigações.

Horas de trabalho

89. As horas de ensino que os professores requeiram para o seu horário diário e semanal devem estabelecer-se depois de prévia consulta às organizações do pessoal docente.

90. Ao fixar-se o número de horas de trabalho de cada professor, deve ter-se em conta todos os factores que determinam a soma do seu trabalho, tais como:

a) O número de alunos de que se ocupará por dia e por semana;

b) O tempo que se considera necessário para a boa preparação das aulas e correcção dos exercícios;

c) O número de cursos diferentes a dar por dia;

d) O tempo exigido ao professor para participar em investigações, em actividades circum-escolares, para vigiar e aconselhar os alunos;

e) O tempo que convem conceder-lhe para se entender com os pais dos alunos sobre o progresso destes.

91. Durante o serviço, o professor deve dispor de tempo que lhe permitisse participar em actividades de aperfeiçoamento profissional.

92. As actividades circum-escolares dos professores não devem constituir um trabalho excessivo nem prejudicar as suas actividades principais. Devem reduzir-se as horas de ensino normal aos professores nomeados, por acumulação, para funções pedagógicas especiais.

Férias anuais pagas

94. Todos os professores devem ter direito a férias anuais de duração suficiente, integralmente pagas.

Licenças de estudo

95. 1) Deveriam garantir-se aos professores, periòdicamente, licenças de estudo total ou parcialmente pagas.

2) O período das licenças de estudo deve contar para fins de diuturnidades e reforma.

3) Estas licenças devem ser facultadas com maior frequência aos professores colocados em zonas afastadas dos centros urbanos e reconhecidas como tal pelas autoridades públicas.

Licenças especiais

96. As licenças especiais outorgadas no âmbito de acordos de intercâmbio cultural, bilaterais ou multilaterais, devem ser consideradas serviço efectivo.

97. Aos professores ligados a planos de assistência técnica deve ser garantida uma licença de ausência e assegurados os seus direitos à diuturnidade, promoção e reforma, nos seus países de origem. Igualmente devem tomar-se disposição especiais para suprir as suas despesas extraordinárias.

98. Os professores estrangeiros convidados devem, de igual modo, ter uma licença concedida pelos seus países e ter assegurados os seus direitos de acesso às diuturnidades e reforma.

99. 1) Os professores devem ter direito a licenças pagas a fim de participarem nas actividades das suas organizações.

2) Os professores devem ter direito de exercer cargos na direcção das suas organizações e gozar, nestes casos, dos direitos conferidos aos professores nomeados para cargos públicos.

100. Os professores devem ter direito a licenças pagas por razões pessoais fundamentadas, segundo disposições ajustadas na altura do contrato.

Licenças por doença e maternidade

101. 1) Os professores devem ter direito a licenças pagas em caso de doença.

2) Ao determinar-se o período de pagamento total ou parcial do vencimento, devem ter-se em conta os casos em que é necessário ao professor permanecer isolado dos alunos durante longos períodos.

102. Devem cumprir-se as normas da Organização Internacional do Trabalho no campo da protecção à maternidade, particularmente a Convenção sobre a Protecção à Maternidade, 1919, e a Convenção sobre a Protecção à Maternidade (revista) 1952, assim como as normas mencionadas no art.º 126.º desta «Recomendação».

103. As professoras com filhos devem ser incitadas a permanecer ao serviço, permitindo-se-lhes, a seu pedido, obter uma licença de maternidade suplementar, não remunerada, por um ano ou mais, após o nascimento de um filho, conservando o direito ao lugar e todos os direitos a ele inerentes, com plenas garantias.

Intercâmbio de professores

104. As autoridades devem reconhecer que o intercâmbio profissional e cultural entre países e as viagens de professores ao estrangeiro, valorizam quer o ensino quer os próprios professores; as autoridades devem incrementar estas oportunidades e ter em conta a experiência pessoal adquirida no estrangeiro pelos professores.

105. A selecção para tais intercâmbios não deve estar sujeita a qualquer descriminação e as pessoas designadas não devem ser consideradas como representantes de qualquer opinião política.

106. Ao professor que viaja a fim de estudar e trabalhar no estrangeiro, devem ser garantidas não só facilidades adequadas para a realização dos seus objectivos, mas também uma legítima protecção do seu lugar e situação.

107. Os professores devem ser encorajados a partilhar com outros colegas a experiência que adquiriram no estrangeiro.

Edifícios escolares

108. Os edifícios escolares devem reunir todas as condições de segurança, ser atractivos na sua concepção de conjunto e também funcionais; devem prestar-se a um ensino eficaz, a actividades extra-escolares e, especialmente nas zonas rurais, a funcionar como

centro da comunidade; devem ser construídos de acordo com as normas sanitárias e com vista a uma longa duração, capacidade de adaptação a usos pedagógicos variados e ter uma manutenção fácil e económica.

109. As autoridades devem assegurar que os edifícios escolares sejam devidamente conservados, de modo a não constituirem uma ameaça à saúde e segurança dos alunos e professores.

110. Quando se planeia a construção de novas escolas, deve consultar-se a opinião das organizações representativas do pessoal docente. Ao construirem-se instalações novas ou complementares numa escola já existente, deve ser consultada a direcção da escola em questão.

Disposições especiais para os professores colocados em áreas rurais ou afastadas dos centros urbanos

111. 1) Nas zonas afastadas dos centros urbanos e reconhecidas como tais pelas autoridades públicas, devem ser fornecidas instalações adequadas aos professores e suas famílias, de preferência sem aluguer ou de aluguer moderado.

2) Nos países onde, em acumulação com os deveres normais de ensino, se requere dos professores que promovam e fomentem actividades comunitárias, deve incluir-se nos planos e programas de desenvolvimento a concessão de alojamentos adequados para os ditos professores.

112. 1) Aquando da nomeação ou transferência para escolas em zonas afastadas, devem ser pagas aos professores e suas famílias as despesas relativas à mudança e deslocação.

2) Aos professores em serviço em tais zonas, devem ser concedidos, sempre que necessário, facilidades especiais da viagem, a fim de poderem manter um adequado nível profissional.

3) Como incentivo, os professores transferidos para zonas afastadas devem ser reembolsados das despesas com a viagem, nas férias anuais, do local de trabalho até à cidade natal.

113. Sempre que os professores estão submetidos a condições de vida especialmente difíceis, devem ser compensados com o pagamento de pensões especiais que devem estar previstas nos orçamentos para a reforma.

X. Remuneração dos professores

114. Entre os vários factores que afectam a condição do professor, deve dar-se uma atenção muito particular ao vencimento, uma vez que, nas condições do mundo actual, outros factores, como a posição e consideração que a sociedade lhes reconhece e o grau de apreço pela importância das suas funções, estão estreitamente dependentes, tal como em outras profissões análogas, da sua situação económica.

115. O vencimento do professor deve:

a) Reflectir a importância que tem para a sociedade, quer a função docente e consequentemente o indivíduo que a exerce, quer as responsabilidades de toda a espécie que sobre ele recaiem a partir do momento em que começa a exercer as suas funções;

b) Poder ser favoràvelmente comparado com os vencimentos pagos em profissões que exijam qualificações equivalentes ou análogas;

c) Assegurar aos professores a manutenção dum razoável nível de vida para si e seus familiares e os recursos necessários ao prosseguimento da sua formação ou exercício de actividades culturais com vista ao seu aperfeiçoamento profissional;

d) Ter em conta que determinadas funções requerem uma qualificação mais alta, uma maior experiência, e implicam uma maior responsabilidade.

116. A retribuição do pessoal docente deve fazer-se com base em escalas de vencimentos estabelecidas com o acordo das organizações representativas da classe. Em caso algum a remuneração dos professores qualificados, durante períodos de prestação de provas ou contratos temporários, deve ser inferior à estabelecida pelo professor em contrato normal.

117. O esquema dos vencimentos deve ser planeado de forma a não dar azo a injustiças ou anomalias que possam provocar atritos entre as diferentes categorias de professores.

118. Quando estiver estabelecido, por regulamento, um número máximo de horas de aulas, deve o professor que exceda esse máximo receber uma remuneração complementar, de acordo com uma escala aprovada.

119. As diferenças de vencimentos devem basear-se em critérios objectivos, como qualificação, antiguidade, grau de responsabilidade, mas a diferença entre os vencimentos mínimo e máximo deve ser racional e moderada.

120. Para o estabelecimento dos vencimentos de professores do ensino profissional ou técnico que não possuam grau universitário, deve ter-se em conta o valor da sua formação prática e da sua experiência.

121. Os vencimentos do pessoal docente devem ser calculados numa base anual.

122. 1) É de considerar que o vencimento do professor, dentro duma mesma categoria, deve ser aumentado por períodos regulares, de preferência todos os anos.

2) A progressão do vencimento mínimo ao máximo não deve exceder um período de 10 a 15 anos.

3) O aumento periódico do vencimento deve fazer-se já quando o professor estivesse em período de provas ou contratado temporàriamente.

123. 1) A escala de remuneração dos professores deve ser revista periòdicamente tendo em conta factores tais como o aumento do custo de vida, um aumento geral dos padrões de consumo sequente a um período de produtividade mais intensa, ou um geral aumento de vencimentos nas outras profissões.

2) Quando se fizer um ajustamento de vencimentos, decorrente de um maior índice do custo de vida, esse índice deve ser determinado com a participação das organizações dos professores. E todo o aumento concedido deve ser integrado no cômputo para a pensão de reforma.

124. Não deve ser instaurado ou aplicado sistema algum de remuneração de méritos, sem prévia consulta e aceitação por parte das Organizações do pessoal docente.

XI. Segurança social

Disposições gerais

125. Todo o pessoal docente deve usufruir da mesma ou análoga segurança social, independentemente da categoria do estabelecimento de ensino em que serve. Essa segurança deve ser extensível aos períodos de preparação e treino para indivíduos ainda estudantes que já exerçam, regularmente, funções docentes.

126. 1) O pessoal docente deve estar protegido por medidas de segurança social que cubram todos os riscos que constem da Convenção sobre a Segurança Social (norma mínima) de 1952, da Organização Internacional do Trabalho. Dessas medidas constam assistência médica, subsídio por doença, desemprego, velhice, acidentes de trabalho, pensões familiares e por maternidade, pensão de invalidez e de sobrevivência.

2) O padrão da segurança social determinado para professores deve ser, pelo menos,

tão favorável como definido nos instrumentos correspondentes da Organização Internacional do Trabalho, especialmente na Convenção sobre a Segurança Social (norma mínima) 1952.

3) A segurança social deve ser concedida ao pessoal docente como de direito próprio.

127. Na protecção concedida ao pessoal docente, através dum regimen de segurança social, devem ter-se em conta as condições particulares de emprego, como vai indicado nos artigos 128 a 140 seguintes.

Assistência médica

128. Nas regiões onde faltam serviços médicos, devem pagar-se as despesas de viagem feitas pelo professor para receber assistência médica adequada.

Pensões por doença

129. 1) Os subsídios por doença devem conceder-se durante todo o período de incapacidade de trabalho que implique a suspensão de vencimentos.

2) Estes subsídios devem pagar-se desde o primeiro dia em que houve a suspensão de vencimentos.

3) Quando os subsídios por enfermidade se concedem por um período limitado, devem tomar-se disposições para prolongar este período nos casos em que seja necessário isolar o interessado dos alunos.

Pensões por acidentes de trabalho

130. O pessoal docente deve estar protegido contra as consequências de acidentes ocorridos não só durante as horas dedicadas ao ensino na escola, mas também no decorrer de actividades escolares fora do estabelecimento de ensino.

131. Determinadas enfermidades infecto-contagiosas das crianças devem ser consideradas doenças profissionais quando contraídas pelo pessoal docente, que se expôs a elas no seu contacto com os alunos.

Pensões por velhice

132. Quando o pessoal docente for transferido para uma actividade diferente que dependa de autoridade distinta, dentro do mesmo país, deve conservar, no que respeita a pensões, o benefício dos direitos anteriores.

133. Tendo em conta os regulamentos nacionais e em caso de escassez de pessoal docente devidamente comprovada, os anos de serviço prestados por um professor já depois de reformado devem, também, contar: ou para a revalidação da pensão de reforma, ou para uma pensão complementar que lhe seria concedida através dum organismo apropriado.

134. Os subsídios por velhice devem calcular-se em função dos últimos vencimentos recebidos, para que o interessado possa conservar um nível de vida adequado.

Subsídios por invalidez

135. Os subsídios por invalidez devem conceder-se ao pessoal docente que se vê obrigado a interromper as suas actividades devido a incapacidade física ou mental. Devem tomar-se medidas para abonar estas pensões no caso da invalidez não estar protegida por subsídio de enfermidade ou de outra índole.

136. Deve pagar-se um subsídio parcial por invalidez em caso de incapacidade parcial, ou seja, quando o professor possa desempenhar parcialmente as suas funções.

137. 1) Os subsídios por invalidez devem calcular-se em função dos últimos vencimentos recebidos, para que o interessado possa conservar um nível de vida adequado.

2) O pessoal docente afectado de incapa-

cidade deve disfrutar de assistência médica e benefícios conexos com o objectivo de poder restabelecer-se ou, pelo menos, melhorar; deve também poder disfrutar de serviços de readaptação para o auxiliar a retomar, quanto possível, a sua anterior actividade.

Pensões de sobrevivência

138. Os requisitos para a concessão de subsídios de sobrevivência e o quantitativo destes subsídios devem permitir aos seus beneficiários usufruírem de um nível de vida adequado e assegurarem o bem-estar e a educação dos filhos a seu cargo.

Vias para a concessão e aumento da segurança social dos professores

139. 1) Os seguros sociais previstos para a protecção do pessoal docente devem conceder-se segundo um regimen geral, aplicável, segundo os casos, aos trabalhadores do sector público ou do sector privado.

2) Quando não exista um regimen geral, para as contingências a proteger devem adoptar-se regimens especiais previstos na legislação ou outros meios.

3) Quando os benefícios concedidos segundo um regímen especial sejam inferiores aos que se tenham fixado na presente *Recomendação*, estes benefícios, devem ser aumentados até ao nível esquematizado, mediante um regimen complementar..

140. Deve considerar-se a possibilidade de participação dos representantes das organizações de professores na administração dos regimes especiais e complementares, assim como na gestão dos seus fundos.

XII. Escassez de pessoal docente

141. 1) Deve tomar-se como princípio que quaisquer medidas adoptadas para obviar a uma grave crise de falta de professores devem ser reconhecidas como excepcionais, que não detractem ou de qualquer modo ponham em perigo as normas profissionais já estabelecidas ou a estabelecer e que reduzam ao mínimo o risco de prejudicarem os alunos.

2) Ao reconhecer que certos procedimentos adoptados com a finalidade de resolver a escassez de pessoal docente (tais como turmas com exagerado número de alunos ou excessivo horário de trabalho dos professores), são incompatíveis com os fins e objectivos da educação e prejudiciais aos alunos, as autoridades competentes devem tomar medidas urgentes para que tais procedimentos se tornem desnecessários e deixem, consequentemente, de ser utilizados.

142. Nos países em via de desenvolvimento onde a escassez de pessoal docente possa exigir programas de preparação intensiva e de curta duração, devem existir, paralelamente, programas extensivos no sentido da formação de professores profissionalmente preparados, competentes para a orientação e direcção do ensino.

143. 1) Os candidatos admitidos nos cursos intensivos de curta duração devem ser seleccionados em conformidade com as condições de ingresso prescritas para um curso de preparação profissional normal, ou mesmo por um critério mais severo, a fim de se ter plena segurança de que esses candidatos possam vir a completar, ulteriormente, a sua formação.

2) Devem criar-se disposições e conceder-se facilidades especiais, incluindo licenças suplementares para estudo, pagas por inteiro, que possibilitassem a estes professores completarem ulteriormente a sua formação no exercício das funções docentes.

144. 1) Sempre que possível, o pessoal não qualificado deve ser requisitado para trabalhar sob constante direcção e supervisão de professores profissionalmente classificados.

2) Como condição de continuidade de prestação de serviços, os candidatos devem

ser obrigados a completar as suas qualificações.

145. As autoridades devem reconhecer que o melhoramento da situação económica e social dos professores, das suas condições de vida e de trabalho, do seu contrato de trabalho, e das suas perspectivas dentro da carreira, são o melhor meio, tanto de obviar a toda e qualquer escassez de professores competentes e experientes, como de atrair e reter no Ensino um número substâncial de pessoas plenamente qualificadas.

XIII. Cláusula final

146. Nos casos em que os professores usufruam de um estatuto que, em alguns aspectos, lhes seja mais favorável do que o proposto nesta Recomendação, estes termos não devem ser invocados para diminuir ou retirar regalias já concedidas.

O exposto é o texto autêntico da Recomendação devidamente adoptada pela Conferência Intergovernamental Especial sobre a situação dos Professores, realizada em Paris e encerrada no dia 5 de Outubro de 1966.

À Fé do que exarámos as nossas assinaturas, neste quinto dia de Outubro de 1996.

O Presidente da Conferência Intergovernamental Especial sobre a Situação dos Professores.

JEAN THOMAS

O Director-Geral da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura.

RENÉ MAHEU

G

«
O
nc
A
P
pc
gr
nc

E
pr
co
pr

no
do
da
in
tu

sa
çã
pa
ga
di

al

ANTOLOGIA

A educação do povo

por A. A. Ferreira de Macedo

A Gazeta de Matemática *com a publicação da «Conferência que deveria ser lida na Voz do Operário em 5 de Novembro de 1945» e que não o foi por razões estranhas à vontade do Autor, presta a devida homenagem ao Saudoso Professor, exemplar defensor dos interesses populares do Ensino em Portugal e da integração da Dignidade Humana nos costumes e nos usos do Povo Português.*

Sr. Presidente:
meus senhores:

Não é a primeira vez que falo nesta casa. Em 1934 tive a honra de fazer, perante os professores primários desta Associação, uma conferência sôbre «As tarefas actuais dos professores-educadores.»

É com o maior prazer que me encontro novamente aqui, por motivo de reabertura do Museu do Trabalho. Esta bela iniciativa da *Voz do Operário* constitue um dos mais interessantes e úteis instrumentos da boa cultura popular.

Cumprimentando V. Ex.ª Sr. Presidente, saúdo, na sua pessoa, a veneranda Associação que tantos serviços tem prestado, no passado, à causa da educação do povo, e que galhardamente continua as suas nobres tradições nesse sector da vida social.

Meus senhores: Neste momento, não posso alhear o meu espírito do admirável movimento nacional que se iniciou, acêrca de um mês, com a já célebre reunião do Centro Almirante Reis. Êsse movimento é obra das gerações novas, às quais não tenho a felicidade de pertencer. São essas gerações que estão destinadas a realizar a necessária transformação política e social do país. A elas dedico em especial, esta minha palestra.

Não sou político, nunca o fui, nem desejo sê-lo no futuro. ¿ Porquê então colaborar, de certo modo, no referido movimento? Não foi da minha iniciativa o vir aqui falar-vos, e se me chamaram suponho que o fizeram por duas razões.

Primeiro, porque sabem que durante tôda a minha vida me teem profundamente interessado os problemas da educação — que reputo os mais importantes de todos os problemas humanos. Segundo, porque sabem que a minha voz é livre, que sempre o foi e será, livre de temores e de preconceitos, livre de vaidades e de ambições. Está no meu feitio dizèr sempre aquilo que me parece justo e verdadeiro, agrade ou desagrade aos meus amigos e aos meus inimigos. É nestas condições que acorro à chamada, que me tendes aqui para vos expor as minhas opiniões sôbre educação, e recordar aos homens novos que me escutam, e que amanhã (ou depois de amanhã) hão-de fatalmente vir a governar a nação, algumas verdades essenciais que não devem nunca perder de vista. A minha posição é clara e insofismável. Sou um observador isolado. Não pertenço a nenhum grupo político; não sigo nenhuma ideologia sistemática fechada. As minhas idéias, ou boas ou más, teem sobretudo uma virtude que reivindico: são sinceras e desinteressadas. Eu vo-las entrego cândidamente. Fazei delas o que quiserdes. A minha fé nelas tem por fundamento muito estudo e reflexão. *Sei* que são as idéias do futuro, ainda que a muitos possam parecer ou fantasistas ou ingénuas.

Vou falar-vos de educação e de ensino; mas não me demorarei em examinar e criticar o que o Estado Novo tem feito nesse sector. Tampouco me referirei ao que a República fêz ou não fêz, antes do advento da actual situação política.

Êsse trabalho de crítica e de história, aliás absolutamente necessário, será feito mais tarde.

Também não tratarei do ensino infantil, nem do primário, nem do secundário, nem do superior, nem do ensino técnico. Todos êsses sectores do ensino público precisam de ser revistos, totalmente reorganizados à luz de novos ideais, e dotados de um novo espírito.

O que, neste momento, mais me preocupa, a mim pessoalmente como cidadão, e que por isso tratarei em especial nesta conferência é o problema da educação do povo.

Antes de mais nada, para que nos entendamos bem, sem confusões nem equívocos, preciso explicar-vos o que entendo por *povo* e o que entendo por *educação*.

Vivemos numa época de confusões e sofismas, em que se explora, conciente ou inconcientemente, o prestígio de certas idéias, usando as palavras que as representam para disfarçar idéias totalmente diferentes ou opostas. Assim vemos dizerem-se *democratas*, pessoas que provam com os seus actos que o não são. Vemos invocar a *justiça* quem, na sua vida, e no íntimo da sua conciência, está longe de ser justo. Vemos apregoar o *espírito cristão* quem atraiçoa a cada passo a verdadeira doutrina de Cristo.

A formidável transformação social que se está operando em todo o mundo obriga os homens a defenderem essas e outras idéias, mas muitos o fazem só por imitação ou interêsse, sem que na sua conciência exista uma *adesão* clara e sincera ao que essas idéias verdadeiramente significam.

A educação do povo é uma dessas idéias que constantemente são sofismadas e atraiçoadas. Já veremos como e porquê.

Quando se diz educação do povo, um grande número de pessoas pensa logo nos operários, nos humildes trabalhadores manuais. Pensa-se que são êsses que mais precisam de educação, e muitas pessoas sentir-se-iam diminuídas e humilhadas se as incluíssem na categoria do povo, confundindo-as com os míseros operários.

Os que se consideram fora e acima do povo, formam duas vastas categorias de pessoas. Uma é a de certos doutores e outros intelectuais, indivíduos que teem um curso superior, ou qualquer talento especial como escritores ou artistas. Julgam-se perfeitamente educados, com privilégios especiais, fundados na sua inteligência, no seu saber, ou na sua arte. Outra categoria de pessoas que não concebem sequer que as confundam com a gente do povo, é a dos que se encontram bem instalados na vida; que gozam dos bens materiais que adquiriram pelo seu esforço, ou pela exploração hábil do trabalho alheio, ou herdaram dos seus maiores; que teem ou aparentam um verniz especial a que chamam a educação da boa-sociedade. É claro que, dentro dêstes dois grandes grupos, que acabo de indicar a traços largos, há ainda um número enorme de castas que se hierarquizam a si próprios, pelas suas ridículas vaidades e pretensões.

Ora, a meu ver, e por razões que adiante se verão, nem uns nem outros dos indivíduos dessas classes devem ser considerados educados, nem fora da categoria do povo. Êles são, a maior parte das vezes, tão ignorantes como os próprios analfabetos, e, moralmente, são quási sempre inferiores a muitos dos mais humildes trabalhadores manuais; são (pelo menos) mutilados morais — por se considerarem com direitos e privilégios superiores ao comum dos mortais.

Para mim, em tudo o que vou dizer sôbre educação popular, eu considero *povo* a massa total dos adultos que formam a nação, quer sejam doutores quer sejam analfabetos, quer sejam ricos quer sejam pobres, quer sejam fidalgos quer sejam plebeus. Com raras excepções, todos carecem de verdadeira educação humana.

Mas que é verdadeira educação humana?

É claro que não vou agora, aqui, dissertar acadèmicamente, sôbre os vários modos por que se pode conceber a educação. Quere-me parecer, todavia, que podemos todos aceitar que *educação humana* é a preparação, a formação (tanto quanto possível integral) de verdadeiros homens.

E que são verdadeiros homens? Aqui a questão complica-se, pois os tipos ideais humanos são diversos e numerosos.

Se educar os homens é actuar sôbre êles no sentido de um determinado ideal, onde ir buscar êsse ideal? Como escolhê-lo? Que critério seguir na sua escolha? Em que apoiá-lo? Como justificá-lo? E somos nós livres de escolher um determinado ideal humano? E temos nós a certeza de possibilidade de realizar êsse ideal?

Nesta altura das nossas reflexões, uma observação se impõe irresistìvelmente ao nosso espírito. É que não podemos formular arbitràriamente os nossos ideais, ao sabor apenas da nossa fantasia e dos nossos desejos. Temos de auscultar a vida e o mundo à volta de nós, e dentro de nós mesmos. Uma escolha arbitrária do ideal humano seria vã e estéril. A natureza inteira, na sua transformação incessante, segue um caminho. A sociedade humana evolue num certo sentido. Há que descobrir êsse sentido, ter dêle consciência plena, e respeitá-lo. Não se domina a Natureza senão obdecendo-lhe. Só colocando-nos no verdadeiro caminho, seguido pelo desenvolvimento do mundo, poderemos acompanhá-lo.

Ora, precisamente no actual momento, passa-se no mundo qualquer coisa que talvez se possa considerar a maior crise de tôda a história de civilização humana. Depois de uma imensa tragédia, de horrores e sofrimentos (que infelizmente para muitos milhões ainda não terminaram), os homens voltaram a sentir, no seu coração, tão maravilhosas esperanças, como jamais talvez tivessem sentido. Uma luz clara de aurora enche o nosso espírito, e nos assegura que a ascenção incessante da espécie humana para uma nobreza e dignidade morais, cada vez maiores, não se interrompeu definitivamente, e vai continuar.

Quais são, meus srs., as características da nossa libertação actual?

Eu creio que podemos dizer que a mais essencial de tôdas é o triunfo da justiça.

Entre as nações, procura-se ansiosamente um equilíbrio e uma armonia que sejam justas. Dentro de cada nação, igualmente, é a justiça que tem norteado ou vai nortear, necessàriamente, os novos arranjos e harmonias sociais.

Não é aqui o lugar, nem agora o momento, de analisar devidamente o conceito actual, essencialmente humano e social, de justiça. Êsse conceito tem evolucionado no decurso da longa história da razão e da conciência humanas; mas atingiu hoje um enriquecimento, um conteúdo através do qual se enraíza e prende com o que há de mais puro e nobre na nossa alma.

Dizer justiça, hoje, é dizer moralidade, é dizer respeito absoluto e sagrado pela personalidade humana, é dizer sincero amor, é dizer fraternidade humana.

Os vastos sentimentos e instintos que movem os homens, deram-se batalha (que de resto continua), mas a vitória dos mais nobres e puros sentimentos está assegurada.

O ideal humano do novo mundo que se aproxima é, pois, aquêle em que predominam êsses sentimentos morais vitoriosos.

Demoremo-nos um pouco neste ponto. Vejamos, mais atentamente, como se chocam e actuam, na sociedade actual, os sentimentos e os instintos humanos.

Se procurarmos descobrir os móveis íntimos da conduta dos homens que melhor conhecemos à volta de nós, ou que mais se destacam pùblicamente nos vários sectores da sociedade, pela sua interferência na literatura na política, no comércio, na indústria, na banca, etc., que vemos nós? Que ideais lhes descobrimos? Que concepção, da vida e da humanidade harmonizam a sua vida individual e social? — Êste exercício de análise crítica, à moralidade dos homens que nos cercam, é do mais alto valor para o esclarecimento do nosso espírito e orientação da nossa própria moralidade. — O que fàcilmente constataremos, se fizermos esta análise crítica, é que, na sua grande maioria, êsses homens são sobretudo dominados e guiados pelo *interêsse material*, pela *ambição* e pela *vaidade*. Lutam pelo dinheiro, que lhes dá o poder, influência, e a capacidade de gozarem, muitas vezes com desprêzo absoluto pelos interêsses e pela felicidade dos outros. Dizem-se espiritualistas: são quási sempre bons cristãos, respeitam e até auxiliam a Igreja. Mas, hipòcritamente, por manha, por interêsse ou por snobismo. Coisa estranha! muitos dêsses homens são, na sua vida particular, bons pais e bons chefes de família; mas socialmente cometem verdadeiros crimes, de que não teem conciência, ou que não lhes pesa na conciência. A maior parte dêsses homens, mesmo quando especializados em certos sectores da cultura, são de uma ignorância completa no que respeita à evolução geral da vida e do mundo. Não sentem, não compreendem o movimento universal que os arrasta. São cépticos, e a sua surprêsa é profunda quando certos factos os abrangem e os superam.

É nas lutas políticas, mais talvez do que nas lutas económicas, que esta falta dos sentimentos de justiça e de verdadeira fraternidade humana, se manifesta com mais evidência e frequência. A mentira, a deslealdade, a intolerância, o espírito de violência e de opressão são constantes.

Não se vejam, nestas palavras, exortações subversivas. Mais, muito mais do que isto, tem sido dito e repetido por altas figuras da Igreja, e por destacadas personalidades mundiais da política burguesa.

Isto não passa duma rápida indicação de verdades que tôda a gente conhece. Sou, por temperamento e por princípio moral, contrário a tôda a espécie de violência mas entendo que não é possível exterminar o mal, emendar o que está errado, sem tratar de saber perfeitamente qual é o êrro, onde é que êle está, e proclamá-lo.

É claro que o defeito dos homens são gerais; o barro humano é um só. Por isso, os pobres, os humildes, os trabalhadores manuais, sofrem também, muitas vezes, das mesmas taras morais que os soberbos e os poderosos. Mas há uma diferença fundamental a notar. É que uma grande parte dos defeitos morais dos oprimidos proveem da própria opressão. Como não compreender que um infeliz, que não ganha para sustentar-se e à sua família, possa ter sentimentos de ódio e de revolta? Que direito temos de exigir aos humildes que sejam bons, se lhes não ensinamos a bondade, e os conservamos na escravidão material e moral?

Eu sei que para sermos inteiramente lógicos, o mesmo poderemos dizer dos defeitos morais dos opressores. Não é sua a culpa; são assim feitos, não podem fugir ao seu destino. Também ninguém lhes ensinou a bondade antes pelo contrário, o sistema em que estão metidos os arrasta necessàriamente a serem como são.

Em face de tais erros morais, bem como em face das injustas desigualdades económicas, certas inteligências fáceis alcançam uma sossegada e cómoda satisfação pensando que tudo são *fatalidades* inelutáveis da natureza das coisas, que não podemos deixar de aceitar com resignação. Ora é, precisamente, esta atitude que nós não aceitamos. Consideramos falso, redondamente falso, que o destino humano seja o mal moral e a miséria económica. Anima-nos a fé profunda no progresso moral da espécie. Consideramos o ódio (que tem acompanhado permanentemente as relações humanas) como uma tara, uma doença, que há-de desaparecer como hão-de desaparecer a tuberculose, a sífilis e outros cancros sociais.

Disse, há pouco, que a solução da crise actual da civilização vai dar-nos o triunfo da justiça e êsse é precisamente, quere-me parecer, o princípio fundamental que tem de informar o *ideal humano* da nova era em que vamos entrar.

No decurso da história, vários teem sido os ideais dominantes. Não é aqui o lugar de recordar e descrever, por exemplo, os belos ideais da civilização helénica clássica, o ideal da Idade Média, o ideal do Renascimento. Convém, todavia, reconhecer que o ideal da civilização da nova era, que podemos, suponho, chamar *humanismo integral,* contém em si tudo o que de mais nobre e elevado se encontra nos ideais das épocas passadas. E convém, acima de tudo, destacar, fortemente, o papel especial que neste ideal desempenha a *Ciência contemporânea*. A ciência está destinada a constituir o apoio mais sólido, o auxiliar mais valioso da nova vida humana.

O valor da Ciência pode ser encarado sob diversos pontos de vista, todos de grande importância. Mas, na verdade, só um dêsses aspectos, tem impressionado ou interessado as multidões e os homens de cultura limitada. E' o aspecto da *aplicação técnica.*

As mais variadas realizações da ciência aplicada, das quais a mais recente e sensacional é a bomba atómica, são geralmente conhecidas e convenceram ràpidamente toda a gente de que a ciência é apenas um extraordinário instrumento de poder e de domínio da natureza, que tanto pode ser utilizado para o bem como para o mal.

Mas, é falso, é redondamente falso, que a Ciência seja isto apenas!

Poderia falar-vos do valor estético da Ciência, pois, sob êsse ponto de vista, a Ciência pode ser comparada, pelas profundas emoções de beleza que é capaz de provocar, às mais perfeitas realizações da Poesia e da Música e de tôdas as Artes Plásticas.

Mas quero, sobretudo, invocar, neste momento, o valor moral e filosófico da Ciência, pois é, principalmente, nessa qualidade que eu digo ser a Ciência o mais sólido apoio do novo ideal humano.

E' certo que a Ciência não resolveu determinados problemas que a Razão humana tem pôsto a si própria, no decurso da sua longa história. A Ciência não resolveu, por exemplo, os problemas da origem e criação da vida, da natureza íntima da matéria e do espírito. Sim, a Ciência não resolveu êsses e outros grandes problemas que teem perturbado e continuam a perturbar muitas consciências ansiosas. A Ciência também não resolveu, ainda, uma infinidade de outros problemas, que aparentemente são de menor categoria; por exemplo, porque é que o açúcar é doce, porque é vermelho o cobre e amarelo o ouro, porque é que certos verãos são sêcos e outros húmidos, qual é a causa do cancro, etc., etc., etc.

Sim! As limitações actuais da Ciência são imensas. Mas que formidável, que profundo êrro concluir daí a falência da Ciência!

Em primeiro lugar, a verdade é que é preciso não exigir da Ciência aquilo que ela não pode dar. E' insensato acusar a Ciência de que nos enganou ou iludiu; ela só nos engana ou ilude se a interrogamos mal.

Certos problemas, a Ciência não os resolveu por que é impossível a sua resolução humana, porque é *absurdo mesmo* conceber a sua completa resolução. Outros problemas, verificou-se que teem sido mal postos, são pseudo-problemas. E, finalmente, a grande maioria dos problemas não resolvidos, estão simplesmente à espera da sua vez, sendo mesmo certa a sua solução futura.

Preguntai, por exemplo, ao primeiro médico que encontrardes, se êle crê ou não na descoberta futura da cura do cancro. Não haverá, creio, um só, que não vos diga que tem a certeza disso, num futuro mais ou menos próximo, pelo menos tanta certeza como a de que o sol nascerá amanhã.

Sabem todos certamente que, para quem conhecia alguma coisa da maravilhosa evolução da Física moderna, não foi surprêsa alguma a descoberta dos meios práticos de libertar a imensa energia concentrada nos núcleos dos átomos, energia que o génio de Einstein permitira calcular abstractamente já há muitos anos.

Seriam precisas muitas horas para expor, resumidamente, os benefícios imensos da Ciência, mesmo que considerassem apenas as suas aplicações práticas ou técnicas.

Mas, como disse há pouco, desejo sobretudo precisar, neste momento, o valor moral e filosófico da ciência.

É preciso ser extraordinàriamente ignorante, ou sectário de má fé, para não reconhecer a influência profunda e decisiva da Ciência nas nossas concepções gerais do mundo e da vida.

Foi a Ciência que deu aos homens a noção de *lei natural*, talvez a mais bela e a mais importante de tôdas as conquistas de Razão humana.

Foi a Ciência que, alargando a nosso conhecimento da natureza, num âmbito imenso, desde o infinitamente grande até ao infinitamente pequeno, e enriquecendo êsse conhecimento não só em extensão como em profundidade, permitiu a nossa libertação de falsas idéias, de vãos terrores, e dos preconceitos de morais barbaras, que durante séculos e séculos sujeitaram a pobre humanidade a abismos de sofrimentos e desolação.

Além disso, *que nobre e magnífica escola de virtudes morais é a Ciência*!

Não são só as aquisições definitivas da Ciência que importam. Há a considerar, sobretudo, *o método, o espírito próprio* da Ciência! É aí, na aplicação justa dêsse método, dêsse espírito, que se encontra a melhor escola de *modestia* e de *humildade*, de *calma* e de *paciência*, de *ordem*, de *amor sincero da verdade*, de escrupuloso respeito da *prova*, de sincera *solidariedade* e *cooperação* humanas dentro de cada nação e entre as várias nações, de *coragem* e de *perseverança*, de *orgulho saudável* pelo poder da Razão, de alegre, entusiástica e desinteressada *dedicação* por uma causa, etc. etc.

Falta-me o tempo para desenvolver, como eu gostaria de o fazer, êste apaixonante tema que é, aliás, da maior actualidade e necessidade, se atendermos aos sofismas que para aí têm publicado certos intelectuais ôcos e falsos.

Apesar do perigo de más interpretações eu vos digo, que nada como a Ciência, bem entendida e bem sentida (claro está!) — e ela infelizmente é bastante mal entendida por certos dos seus medíocres ou falsos cultores — eu vos digo que nada como a Ciência nos pode levar a uma atitude verdadeiramente religiosa, mas de uma religiosidade de carácter especial, mais pura e sã que a das religiões vulgares.

Os homens de Ciência teem-se até aqui conservado alheios, na sua maioria, aos interêsses morais e sociais imediatos dos seus semelhantes. É compreensível êste refúgio nas suas tôrres de marfim, dada a necessidade de calma e sossêgo que requere o seu sacerdócio especial.

Mas chegou o momento em que a continuação desta reserva é extremamente perigosa para a civilização, e não é uma das menos importantes características do momento actual *a resolução*, que já se nota em todo o mundo civilizado, de os homens de ciência e os educadores fazerem ouvir a sua voz, quando se trata dos destinos da humanidade.

Todos os espíritos atentos (e livres de preconceitos) reconhecem, agora, que as organizações políticas e sociais (salvo talvez uma excepção) teem até aqui atraiçoado os altos valores da Ciência, que os imensos resultados desta, e os seus benefícios de tôda a ordem (técnicos, estéticos, filosóficos e morais) não teem sido postos ao serviço do bem comum, com aquêle espírito de justiça e sentimentos de fraternidade humana que são apanágios do momento histórico actual.

Chegou o momento de enveredar por novos caminhos. Sabemos que a Terra, cientìficamente explorada, tem recursos suficientes para realizar a emancipação económica de todos os homens, para exterminar a miséria, e acabar definitivamente com essa vergonha da civilização, que é haver ainda quem morra de fome.

Sabemos que a Ciência é o mais sólido apoio do ideal; que podemos, utilizando-a, não só prómover o aperfeiçoamento biológico do ser humano, mas realizar a ascenção espiritual e a dignificação moral de todos os homens.

Nestas condições a tarefa está indicada: dar à Ciência tôdas as possibilidades, tôdas, de provar o seu valor, e exercer a sua acção.

Reparai bem, meus senhores, que eu não digo que tôda a Moral humana deve ter ou pode ter por único fundamento a *Ciência*. Essa foi no passado a ilusão de muitos bons espíritos, mas é evidentemente um absurdo. Quando vos digo que a Ciência é uma maravilhosa escola de virtudes morais, tenho no meu espírito uma noção de Moral que é anterior, ou melhor exterior a tôdas as Religiões.

Sem entrar em desenvolvimentos, impossíveis nesta curta palestra, peço-vos que noteis que há uma tábua de valores morais que se impõe de tal modo a todos os homens sãos, que ninguém, seja qual fôr a sua concepção do mundo, digamos a sua filosofia, e sejam quais forem as suas crenças ou descrenças religiosas, pode deixar de as aceitar e considerar como o que há de mais nobre, e puro, e elevado na sua alma. Com efeito, quem há que não respeite e reconheça o valor moral da Justiça, da Verdade, da Lealdade, da Tolerância, do Espírito de Sacrifício, da Coragem, da Temperança, da Sinceridade, da Resignação em face do que é inevitável, da Solidariedade, etc., etc.

Tôdas essas virtudes não são monopólio de nenhum credo religioso confessional, antes são proclamados por todos êles.

Acima de todos, em importância, há que colocar um postulado de Fé — um postulado, meus senhores, sabemo-lo da lógica, é um princípio que não se demonstra, sendo absurda a própria idéia da sua demonstração. A nossa adesão a um postulado tem razões mais fundas do que o raciocínio. Um postulado moral nasce do mais íntimo da nossa consciência, e nenhum mais necessário nem mais oportuno do que o postulado da Fé. Que Fé! A fé na vida, a fé no progresso moral da espécie, a fé no nosso esfôrço sincero. Até aqui, mau grado os inegáveis serviços que as Religiões confessionais teem prestado à Civilização, eles teem muitas vezes contribuído para separar os homens, para provocar o ódio e a guerra entre êles. É forçoso reconhecer que as Religiões podem prestar ainda confôrto moral a muitas consciências, mas chegou o tempo de prègar e defender alguma cousa que só possa provocar o Amor e a verdadeira Fraternidade entre todos os homens, quaisquer que sejam os seus sentimentos religiosos particulares.

Êsse alguma cousa é uma nova Moral humana, com apoio na Ciência, e naqueles postulados que todos os homens podem aceitar porque, se são seres normais, os encontram no mais íntimo da sua Alma.

Meus Senhores.

Depois de tudo o que acabo de dizer, em que procurei, ràpidamente, expor-vos a minha concepção da educação popular, enquadrando-a nas preocupações sociais do momento presente, já comprendem, certamente, porque penso ser o problema da educação do povo um dos mais importantes, senão o mais importante, de todos os problemas sociais. Tudo se pode resumir no seguinte: Temos que forjar uma nova humanidade, e o novo homem, o homem de amanhã, não será apenas o animal humano, belo e são, a quem uma nova orgânica social assegurará uma vida material segura e desafogada, livre finalmente de tôda a opressão económica e política; será também — será sobretudo — um ser moral e social que tem a consciência do que é, e do que significa na vida universal (tanto quanto o permita o estado da Ciência e da Filosofia) um ser com entusiasmo e fé no progresso da comunidade, e a vontade e a capacidade de lutar por êsse progresso. Eis aqui, sintèticamente expresso, o meu ideal de educação do povo.

Resta agora estudar o modo como realizar esta educação. Há aqui numerosos e difíceis problemas a resolver; mas nenhum, a meu ver é de resolução impossível.

O primeiro problema que nos aparece é o seguinte: Tratando-se de adultos, operários ou não, como se vai fazer a sua educação, atendendo que a maior parte do seu tempo será consagrada ao exercício da sua profissão? Será possível comunicar, de um modo eficiente a homens já feitos, e cansados por um dia de trabalho, as aquisições por vezes difíceis e complexas da Ciência, da Moral e da Filosofia?

Seja-me permitido invocar aqui a minha experiência de 40 anos de professorado, e a que adquiri na Universidade Popular, que fundei há 26 anos, e onde fiz numerosas palestras de vulgarização.

Tenho ensinado nos liceus, nas escolas técnicas elementares e numa escola superior. Pois afirmo, sem a menor hesitação, que nunca encontrei tanta atenção, tão grande e sincero desejo de saber, tão puro anseio de se elevarem pela cultura, como nos ouvintes das minhas lições populares de vulgarização científica.

Afora raras excepções, os estudantes do ensino oficial teem, sobretudo, a preocupação dos exames; o seu ideal é o diploma que lhes há-de dar um lugar rendoso na sociedade. Para ser inteiramente justo, devo dizer que muitos dêsses alunos (os melhores moralmente) procedem assim, porque a organização oficial do ensino os leva para essa atitude.

Não me seria difícil, provar-lhes, baseado na minha longa experiência, que todo o ensino oficial no nosso país está viciado, de alto abaixo. Falta-lhe um ideal, falta-lhe um ambiente, falta-lhe uma organização científica e harmónica com as necessidades actuais. Mas não é dêsse ensino que tenho de tratar aqui. O que desejo frisar é que o ensino do povo, como eu o concebo, será inteiramente e profundamente diferente do actual ensino oficial, e que se fôr feito com o verdadeiro expírito que deve ter, poderá contar-se com o mais completo e sincero interêsse, e aproveitamento da parte dêsse mesmo povo.

Espíritos inclinados, fàcilmente, ao cepticismo, pensarão que é impossível, mesmo contando com o interêsse do povo, comunicar-lhe alguma coisa do complexo e vasto conteúdo do conhecimento humano.

Ora é preciso notar que, tratando-se de um ensino inteiramente novo, mas sistemático, e com uma determinada orgânica, teem que ser procuradas e estabelecidas novas didácticas, convenientemente adequadas aos seus objectivos pedagógicos próprios.

Os melhores instrumentos pedagógicos teem que ser utilisados, os melhores métodos, os mais perfeitos programas?

As aquisições da Ciência teem que ser convenientemente sintetisadas, e ordenadas, de modo que a assimilação das suas linhas gerais, e sobretudo do seu espírito e do seu método, seja perfeita. Deve conduzir-se todo o homem a elaborar uma concepção racional da vida, tão completa quanto possível.

É uma tarefa difícil, sem dúvida. Mas absolutamente necessária, e que tem que ser enfrentada com decisão e coragem. Um dia virá em que as horas de trabalho diário serão suficientemente reduzidas para todos os trabalhadores, de modo que possam dedicar o muito tempo que lhes restar a um saudável descanso, à sua cultura intelectual e física, e ao treino e exercício dos seus direitos e deveres cívicos.

Tenho a minha opinião formada sôbre a organização futura que deve ser dada à educação popular. Estudei todos os promenores dessa organização, e tenciono expo-la, um dia, em livro ou em conferências públicas. Neste momento, é-me evidentemente impossível entrar em minúcias, e abordar outros problemas práticos importantes que há que resolver. De resto, não chegou ainda o momento de apresentar planos, ou discutir programas de realização para o futuro político que se aproxima. Hoje, estou aqui apenas para vos expor uma opinião inteiramente pessoal, a respeito de problemas muito gerais e forçosamente vagos e incompletos.

Quero ainda chamar a vossa atenção para o seguinte ponto. A minha concepção da futura educação do povo é coisa essencialmente distinta do que certos políticos e publicistas advogam com o nome de *educação cívica*.

É distinta porque é mais geral e completa. Sem dúvida, a educação cívica é um elemento indispensável de uma sã *Democracia*. Não se compreende, com efeito, que um homem exerça os seus direitos de cidadania, sem que tenha perfeita conciência do seu lugar e função no complexo social, que conheça os deveres e os direitos inerentes a essa função, e que saiba exercê-los e cumpri-los com escrupulosa diligência e eficiência.

O problema das relações entre a educação cívica e a Democracia é um velho problema, que tem sido minuciosamente estudado por políticos e publicistas, e sôbre o qual (parece-me) pouco há de novo a acrescentar. Simplesmente, quem não verá que uma educação cívica perfeita, implica, no momento actual, uma educação de carácter geral, tão completa quanto possível, e segundo os moldes e a orientação que vos esbocei?

Com efeito, o perfeito cidadão não é apenas um indivíduo que, no momento próprio, vai lançar, numa urna, um papel (com os nomes dos seus delegados a uma junta de freguesia ou a um parlamento), delegados escolhidos por motivos quási só sentimentais e efémeros ou superficiais.

O perfeito cidadão é, primeiro do que tudo, um verdadeiro homem. Sabe qual é o seu lugar na sociedade, e sabe qual é o lugar dessa sociedade entre tôdas as sociedades do mundo. Tem uma concepção racional da vida, um ideal que compartilha com todos os seus irmãos-homens. Tem uma cultura intelectual, e uma bagagem de conhecimentos que lhe permite acompanhar a discussão e a resolução de todos os problemas que os seus delegados nos parlamentos vão considerar. Tudo isso significa que o perfeito cidadão é um homem educado, e é por ser um homem educado, que é um perfeito cidadão.

Nestas condições, o cidadão que idealizamos não será mais o homem do povo, humilde e considerado inferior, que delega os seus direitos em homens de outra casta, homens de élite, que olhem para êle com caridade e paternal superioridade.

Não, nada disso; o verdadeiro cidadão do futuro tem que ser um homem como todos os outros, tão verdadeiro e completo quanto possível.

Meus senhores:

Vou terminar. Mas antes quero dirigir dois apêlos. O primeiro, aos homens novos e futuros governantes do meu país, que proventura aqui se encontrem presentes. Quero dizer-lhes que não caiam no tremendo êrro de apoucar a importância da educação do povo. A educação do povo foi sempre um tema rendoso para os políticos, para efeitos de propaganda entre os humildes e os oprimidos. E até aqui, sempre os políticos, todos os políticos, teem falhado quando se encontram em condições de promoveram a sua realização. Porquê? Porque não a encaram com a necessária largueza de vistas, porque a consideram um problema de somenos importância. A futura educação do povo tem de exigir do Estado um esfôrço tão vasto, e encargos tão grandes como os que, sem hesitações, se consagram a outros sectores da vida social, que não são mais importantes nem mais urgentes, como são a preparação militar, as obras públicas, etc., etc.

Todo o político que não conseguiu ver a necessidade de gastar, todos os anos, com a educação do povo muitas dezenas de milhares de contos, é um político de vistas estreitas, que não compreendeu nem sentiu verdadeiramente o mais fundamental de todos os problemas sociais. Se a obra de educação do povo, tal como eu a delineei (e não sofismada claro está!) não for empreendida em larga escala, com ousadia e ferverosa decisão, tôdas as transformações e reformas políticas e sociais serão vãs, e o seu fracasso, no futuro, será fatal, tão fatal como o foi (nos dias que acabámos há pouco de viver) o fracasso das doutrinas retrógradas e anti-naturais do facismo e do nazismo!

Eu sei, meus senhores, sei muito bem que a vossa tendência, a tendência de todos os políticos é verem nos ideais dos educadores, dos filósofos e dos moralistas, simples fantasias utópicas, fora das verdadeiras realidades. Assim, teem sido acusados de puros idealistas, de construir nas nuvens, de imaginar repúblicas impossíveis, tão grandes espíritos como Platão, Tomaz Moro, Campanela, Fenelon, Weels, Sanderson, etc., etc. Mas reparai bem como são vãs e ridículas tais injúrias. A utopia (disse-o um grande pensador e artista, um grande e sincero amigo do povo, em frases luminosas e lapidares): «A Utopia é o princípio de todo o progresso; sem os utopistas de outrora, os homens viveriam ainda miseráveis e nus nas cavernas. Foram os utopistas que traçaram as linhas da primeira cidade. Dos sonhos generosos saem as realidades bemfazejas».

Encontram-se entre vós, ó homens das gerações novas, tantos e tão grandes valores intelectuais e morais como talvez há muitas décadas não aparecem no nosso país. Há um numeroso grupo de jovens matemáticos de grande mérito, há físicos e químicos, há médicos, biologistas, agrónomos, naturalistas, etc., que deram já as suas provas de competência no uso dos métodos científicos modernos. Tendes também juristas e economistas, tendes artistas, tendes escritores do mais nobre quilate, e da mais pura inspiração social. Tendes convosco o escol da nação; tendes portanto os melhores elementos para realizardes uma grande obra de ressurgimento do nosso país. Tôdas as esperanças em vós são fundadas. Mas reparai bem! que o amor sincero do povo não deixe nunca o vosso coração. Reparai bem, que todos os êrros dos políticos contra a humanidade se pagam, mais tarde ou mais cedo. É o que mostra a História, ainda que certos espíritos cépticos julgam o contrário. Reparai que 10, 20, 30 anos são apenas um momento, na lenta evolução do homem, e que os políticos, como os educadores, não trabalham apenas para o presente, mas principalmente para o futuro.

O segundo apêlo com que vou terminar, dirijo-o aos operários que me escutam. Lutai pela vossa emancipação económica e política, lutai nobremente, com calma, com dignidade, sem ódios, sem violência, e dentro da legalidade.

Mas lembrai-vos que não é tudo, para o verdadeiro homem, ter que comer, que vestir, que calçar e uma casa para abrigo. Um homem não passa de um simples animal, se não tem um ideal moral, que o guie permanentemente. A verdadeira liberdade só se atinge quando se adquire uma suficiente cultura geral (intelectual e moral) e se usa nobremente dela em serviço do ideal.

Tornai-vos *fortes,* em todo o sentido da palavra, para serdes *bons,* e reparai que a vossa educação tem que ser também obra de vós mesmos.

Quanto aos políticos e aos educadores, tendes uma pedra de toque para ajuizardes do seu valor: os maus falam da vossa educação, mas como se fôsse uma migalha de pão que vos atirassem por caridade; os bons pensam que é do seu dever servir-vos como a iguais, e fazem-no com sinceros sentimentos de justiça e fraternidade!

I. S. C
— P

578
subcon
simult

$C \neq \emptyset$

R:
e, com
é supe
implic
e quar

2)
junto
(b, d)
ordena
que e
(c) rel

R.:

a)
b)
c)

3)
ache o
tal qu

R.:
e a eq

Com

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F — MATEMÁTICAS I – Ano lectivo 1970-71 – Ponto n.º 1 – 30-6-1971.

5785 — 1) Investigue se é possível encontrar três subconjuntos A, B e C de U tais que satisfaçam simultâneamente às relações seguintes:

$$C \neq \emptyset,\ A \cap B \neq \emptyset,\ A \cap C = \emptyset,\ (A \cap B) - C = \emptyset .$$

R: *A relação* $(A \cap B) - C = \emptyset$ *implica que* $A \cap B \subseteq C$ *e, como* $A \cap B \neq \emptyset$, *é claro que a primeira condição é supérflua. É evidente que a condição* $A \cap B \subseteq C$ *implica* $A \cap C \neq \emptyset$ *e portanto a validade da segunda e quarta condições contradiz a terceira.*

2) Considere a relação binária definida no conjunto $E = \{a, b, c, d\}$ por $R = \{(a, b), (a, c), (b, d), (d, d)\}$. Indique o número mínimo de pares ordenados que é necessário acrescentar a R para que esta relação seja (*a*) reflexiva, (*b*) simétrica, (*c*) relação de equivalência.

R.:

a) (a, a), (b, b), (c, c).

b) (b, a), (c, a), (d, b).

c) *Haverá que acrescentar os pares indicados nas alíneas* a) *e* b) *mais os seguintes:* (a, d), (d, a), (b, c), (c, b).

3) Sendo $A(1, 1)$ a imagem do complexo z_1, ache o lugar geométrico da imagem B do cmplexo z tal que a imagem de $z_1 z$ está sobre $\overline{AB}$.

R.: *Sendo* $z = (x, y)$, *vem* $z_1 z = (x - y, x + y)$ *e a equação da recta* $\overline{AB}$ *é*

$$\frac{X - x}{1 - x} = \frac{Y - y}{1 - y} .$$

Como a imagem de $z_1 z$ *está sobre* AB, *terá de ser*

$$\frac{-y}{1 - x} = \frac{x}{1 - y}$$

ou $x^2 + y^2 - x - y = 0$, *que é a circunferência de centro em* $(1/2, 1/2)$ *e raio* $\sqrt{2/2}$.

4) Supondo que $(G, \times)$ é grupo comutativo, considere a lei de composição interna $*$ tal que $\forall\, a, b \in G \quad a * b = a \times b \times k$ (k constante pertencente a G). Demonstre que $(G, *)$ também é grupo comutativo.

R.: *Associatividade:*

$$(a * b) * c = (a \times b \times k) * c = (a \times b \times k) \times c \times k$$

$$a * (b * c) = a \times (b * c) \times k = a \times (b \times c \times k) \times k .$$

Como a lei $\times$ *é associativa e comutativa, então*

$$(a * b) * c = a * (b * c) .$$

Comutatividade:

$$a * b = a \times b \times k$$

$$b * a = b \times a \times k .$$

A comutatividade da lei $\times$ *implica* $a * b = b * a$.

Existência de elemento neutro: se existe elemento neutro e, *terá de ser*

$$a * e = a \quad ou \quad a \times e \times k = a$$

e daqui resulta

$$a^{-1} (a \times e \times k) = a^{-1} a$$

donde vem $e = k^{-1}$.

Existência de elemento oposto: o elemento oposto a' *de* a *terá de satisfazer à condição* $a * a' = k^{-1}$ *ou* $a \times a' \times k = k^{-1}$. *Daqui vem* $a^{-1} (a \times a' \times k) = a^{-1} k^{-1}$ *e portanto* $a' = a^{-1} (k^{-1})^2$.

5) Seja $B\,(m \times n)$ $(m < n)$ uma matriz de característica $r \leq m$ e A matriz quadrada regular de ordem m. Mostre que $c\,(A B) = r$.

Ache a condição a que devem satisfazer y_1, y_2, y_3 e y_4 para que as equações

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - x_3 + 3\,x_4 + \ \ x_5 &= y_1 \\ 2\,x_1 + \ \ x_2 \qquad\quad - 2\,x_4 - \ \ x_5 &= y_2 \\ x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 \qquad\quad + 4\,x_5 &= y_3 \\ x_2 + \ \ x_3 + 5\,x_4 + 6\,x_5 &= y_4 \end{aligned}$$

sejam compatíveis.

R.: *Como* $c(A) = m$ *e* $c(B) = r \leq m$, *vem* $c(A\,B) \leq r$. *Se fosse* $c(A\,B) < r$ *então, como* $c(A^{-1}) = m$, *viria* $c[A^{-1}(A\,B)] = c(I\,B) = c(B) < r$, *o que é absurdo.*

Para que as equações sejam compatíveis é necessário e suficiente que

$$y_4 - y_3 + y_2 - y_1 = 0.$$

6) Sem calcular os determinantes, prove que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & d_1 \\ c_4 & b_4 & a_4 & d_4 \\ c_3 & b_3 & a_3 & d_3 \\ c_2 & b_2 & a_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

R.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & a_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & d_1 \\ c_4 & b_4 & a_4 & d_4 \\ c_3 & b_3 & a_3 & d_3 \\ c_2 & b_2 & a_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas I — Ano lectivo 1970-71 — Ponto n.º 2 — 30-6-1971.

5786 — 1) Prove que, se A, B e C são subconjuntos de U tais que $A \cap B \subseteq \widetilde{C}$ e $A \cap C \subseteq B$, então $A \cap C = \emptyset$

R.: *Teremos de provar a proposição*

$$A \cap B \subseteq \widetilde{C} \wedge A \cup C \subseteq B \Longrightarrow A \cap C = \emptyset.$$

Fazendo $x \in A = a$, $x \in B = b$, $x \in C = c$ *e* $x \in \emptyset = 0$, *bastará mostrar que* $[(a \wedge b \Longrightarrow \sim c) \wedge (a \vee c \Longrightarrow b)] \Longrightarrow$ $\Longrightarrow (a \wedge c \Longleftrightarrow 0)$. *Construindo uma tabela de verdade vem:*

a	b	c	$[(a \vee b \Longrightarrow \sim c) \wedge (a \vee c \Longrightarrow b)] \Longrightarrow (a \wedge c \Longleftrightarrow 0)$										
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
										*			

A coluna assinalada com um $*$ *justifica a veracidade da proposição.*

2) Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$. Mostre que

a) $g \circ f$ injectiva $\Longrightarrow f$ injectiva

b) $g \circ f$ sobrejectiva $\Longrightarrow g$ sobrejectiva.

R.: a) $x' \neq x'' \Longrightarrow (g \circ f)(x') \neq (g \circ f)(x'')$

ou

$$x' \neq x'' \Longrightarrow g(f(x')) \neq g(f(x'')) \Longrightarrow f(x') \neq f(x'').$$

b) *Por hipótese,* $(g \circ f)(A) = C$ *e portanto* $g(f(A)) = C$ *o que mostra que* g *é sobrejectiva.*

3) Sendo $z = x + i\,y$, qual é a condição que devem cumprir x e y para que o complexo $\dfrac{z-1}{z+1}$ seja imaginário puro? Que curva descreve a imagem de z?

R.:

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(x-1)+i\,y}{(x+1)+i\,y} =$$

$$\frac{[(x-1)+i\,y]\,[(x+1)-i\,y]}{(x+1)^2+y^2} = \frac{(x^2-1+y^2)+i\,(\cdots)}{(x+1)^2+y^2}$$

e portanto terá de ser $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *que é a circunferência de centro na origem e raio* 1.

4) Prove que, em relação a qualquer lei de composição interna associativa, todo o elemento que admite oposto é regular à direita e à esquerda.

No conjunto R dos números reais considere a lei $*$ definida por $a * b = a + b + a\,b$. Mostre que existe elemento neutro e que qualquer real distinto de -1 tem oposto.

R: *Sendo* $a * a' = a' * a = e$, *de* $a * b = a * c$ *vem* $a' * (a * b) = a' * (a * c)$ *ou* $(a' * a) * b = (a' * a) * c$

o que permite concluir que $e * b = e * c$, *isto é,* $b = c$. *Anàlogamente, de* $b * a = c * a$ resulta $b = c$.

Quanto à lei $a * b = a + b + ab$ *definida em* R, *como* $a * b = b * a$, *basta procurar o elemento* e *para o qual* $a * e = a$. *Vem então*

$$\begin{aligned} a * e &= a + e + eb = a \\ a + e(1+b) &= a \\ e &= 0 . \end{aligned}$$

A condição para a existência de oposto $a + a' + aa' = 0$ *dá* $a' = -\dfrac{a}{1+a}\ (a \neq -1)$.

5) Duas matrizes A e B do mesmo tipo $m \times n$ dizem-se *equivalentes* se existem duas matrizes regulares P e Q, respectivamente de ordens m e n, tais que $B = PAQ$. Mostre que esta relação binária é uma relação de equivalência entre as matrizes.

Estude o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2 - 5)\, x_3 = a . \end{cases}$$

R: *reflexividade:* $A = I_m A I_n$

simetria: $B = PAQ \Rightarrow P^{-1} B Q^{-1} = A$

transitividade: $B = PAQ \wedge C = P_1 B Q_1 \Rightarrow C = (P_1 P)\, A\, (Q Q_1)$.

O sistema é possível determinado com $a \neq -2, 2$; *é possível indeterminado de grau 1 com* $a = 2$; *é impossível com* $a = -2$.

6) Resolva a seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0 .$$

R: *As raízes são* $x = 0, x = 1, \cdots, x = n-2$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS I — Ano lectivo 1970-71 — Ponto n.º 3 – 10-7-1971.

5787 – 1) Demonstre que

$$(A \cap B \cap C) \cup (\tilde{A} \cap B \cap C) \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} = U .$$

R:
$$\begin{aligned} &(A \cap B \cap C) \cup (\tilde{A} \cap B \cap C) \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} = \\ &= [(B \cap C) \cap (A \cup \tilde{A})] \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} \\ &= [(B \cap C) \cap U] \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} \\ &= (B \cap C) \cup \sim (B \cap C) \\ &= U . \end{aligned}$$

2) Na construção de um prédio estabelece-se um planeamento das operações a efectuar. Designando o conjunto das operações por $\{a, b, \cdots, i, j, \cdots, u\}$, considere a relação binária definida pela função proposicional «a operação i antecede a operação j». Trata-se de uma relação de ordem parcial? É uma ordem total? Justifique as respostas.

R.: *É ordem parcial mas não é ordem total.*

3) Prove que

$$\left(\cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right)(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{84} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{84}\right).$$

R.:

$$\begin{aligned} &\left(\cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) = \\ &= \left(\cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \times \\ &\quad \times \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{84} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{84}\right). \end{aligned}$$

4) Seja $(A, +, \times)$ um anel não comutativo e considere em A a lei de composição interna $*$ definida por $x * y = xy - yx$. Prove que

a) $x * y = -(y * x)$

b) A lei $*$ é distributiva à esquerda e à direita em relação à adição.

R.: *a)*
$$\begin{aligned} x * y &= xy - yx \\ y * x &= yx - xy = -(x * y) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x * (y + z) &= x(y+z) - (y+z)x = \\ &= xy + xz - yx - zx = \\ &= (xy - yx) + (xz - zx) = \\ &= (x * y) + (x * z). \\ (y + z) * x &= (y+z)x - x(y+z) = \\ &= yx + zx - xy - xz = \\ &= (yx - xy) + (zx - xz) = \\ &= (y * x) + (z * x). \end{aligned}$$

5) Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times m$. Supondo que $n < m$, prove que AB não é invertível.

Ache a matriz inversa de $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Utilizando C^{-1}, ache a solução do sistema $Cx = d$ com a matriz coluna $d = \|3 \quad -1 \quad 2\|$.

R.: *Como* $c(AB) \leq min\|c(A), c(B)\|$, $c(A) < m$ *e* $c(B) < m$, *é claro que* $c(AB) < m$. *Logo,* AB, *matriz de ordem* m *com característica inferior a* m, *não é invertível.*

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/10 & -1/10 \\ -1/2 & 1/10 & 3/10 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema é $x = C^{-1}d = \|1 \quad -2 \quad 0\|$.

6) Calcule $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \cdots x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 \cdots x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x \cdots x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 \cdots x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 \cdots x_{n-1} & x \end{vmatrix}$

R.: $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \cdots x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 \cdots x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x \cdots x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 \cdots x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 \cdots x_{n-1} & x \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & x - x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x - x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x - x_n \end{vmatrix} =$$

$$= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS I — Ano lectivo 1970-71 — Ponto n.º 4 — 20-7-1971.

5788 — 1) Prove que, se A, B, C e D são conjuntos, então $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

R.: $(a, b) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in A \cap B \wedge b \in C \cap D \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in A \wedge a \in B \wedge b \in C \wedge b \in D$

$\Rightarrow (a, b) \in A \times C \wedge (a, b) \in B \times D \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) \in (A \times C) \cap (B \times D)$

$(a, b) \in (A \times C) \cap (B \times D) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) \in A \times C \wedge (a, b) \in B \times D \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in A \wedge b \in C \wedge a \in B \wedge b \in D \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in A \cap B \wedge b \in C \cap D \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$.

2) Se f, g, e h são aplicações de A em A, mostre que $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ sse f é injectiva e $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ sse f é sobrejectiva.

R.: *Mostremos em primeiro lugar que a condição* $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ *implica que* f *é injectiva. De facto, se* f *é uma aplicação tal que* $\forall g, h \; f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$, *tomemos duas aplicações particulares* g_a *e* h_b *de* A *em* A *que sejam definidas do modo seguinte:*

$$\forall x \in A \xrightarrow{g_a} g_a(x) = a \in A$$

$$\forall x \in A \xrightarrow{h_b} h_b(x) = b \in A.$$

A hipótese, aplicada a estas duas funções, dá então

$$f \circ g_a = f \circ h_b \Rightarrow g_a = h_b,$$

isto é,

$$f \circ g_a = f \circ h_b \Rightarrow a = b.$$

Como

$$\forall x \in A \begin{cases} (f \circ g_a)(x) = f(a) \\ (f \circ h_b)(x) = f(b), \end{cases}$$

vem então $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, *o que traduz a injectividade de* f.

Supondo agora que f *é injectiva, é claro que*

$$\forall x \in A \;\; f(g(x)) = f(h(x)) \Rightarrow g(x) = h(x).$$

Admitindo que

$$\forall g, h \qquad g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

então f *é sobrejectiva. Com efeito, se* f *não fosse sobrejectiva, designando por* y_0 *um elemento de* A *não pertencente a* $f(A)$ *e tomando duas aplicações* g *e* h *tais que*

$$\forall y \in f(A) \quad g(y) = h(y) \quad e \quad g(y_0) \neq h(y_0),$$

ter-se-ia $g \circ f = h \circ f$ *sem ser* $g = h$, *o que é contrário à hipótese.*

Recìprocamente, supondo f *sobrejectiva* (f (A) = A) *a condição*

$$\forall x \in A \quad g(f(x)) = h(f(x))$$

arrasta

$$\forall y = f(x) \in A \quad g(y) = h(y)$$

em consequência de f *ser sobrejectiva.*

3) Se $|z+4i| = |z+2i|$ e $\arg(z+2i) = -\pi/4$, ache z.

R.: *Fazendo* $z = x + iy$, *vem* $|x+(4+y)i| = |x+(2+y)i|$ *donde resulta* $\sqrt{x^2+(4+y)^2} = \sqrt{x^2+(2+y)^2}$, *equação que é satisfeita com qualquer* x *e* $y = -3$. *Como* $\dfrac{2+y}{x} = tg(-\pi/4) = -1$, *vem* $x = 1$ *e portanto* $z = 1 - 3i$.

4) Seja $(A, +, \times)$ um anel em que $\forall x \in A$ $x^2 = x$. Demonstre que

a) $\forall x \in A$ $x = -x$, partindo de $(x+x)^2 = x+x$.

b) A é comutativo, calculando $(x+y)^2$.

c) $\forall x, y \in A$ $xy(x+y) = 0$.

R.: a) *De* $(x+x)^2 = x + x$ *vem*

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + x^2 + x^2 &= x + x \\ x + x + x + x &= x + x \\ x + x &= 0 \\ x &= -x . \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + xy + yx + y^2 \\ x^2 + xy + yx + y^2 &= x + y \\ x + xy + yx + y &= x + y \\ xy + yx &= 0 \\ xy &= -yx \end{aligned}$$

e, atendendo à alínea a),

$$xy = yx .$$

c)
$$\begin{aligned} xy(x+y) &= xyx + xy^2 \\ &= yx^2 + xy^2 \\ &= yx + xy \\ &= 0 . \end{aligned}$$

5) Se S e T são matrizes quadradas da mesma ordem e S é invertível, mostre que

$$(S+T)S^{-1}(S-T) = (S-T)S^{-1}(S+T) .$$

Prove que a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

é 2 e exprima a terceira e quarta colunas como composição linear das duas primeiras.

R.: $(S+T)S^{-1}(S-T) = (I + TS^{-1})(S-T) = S - TS^{-1}T$

$$(S-T)S^{-1}(S+T) = (I - TS^{-1})(S+T) = S - TS^{-1}T$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 2 & -3 & 10 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a característica da matriz é 2. *Pondo*

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

vem

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ -x_1 = -2 , \end{cases}$$

sistema cuja solução é $x_1 = 2$, $x_2 = -3/2$. *Anàlogamente, de*

$$y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

resulta o sistema

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 3y_1 + 4y_2 = -1 \\ -y_1 = 7 \end{cases}$$

cuja solução é $y_1 = -7$, $y_2 = 5$.

6) Calcule o determinante da matriz de ordem n

$$\begin{bmatrix} x & a & a \dots a \\ a & x & a \dots a \\ a & a & x \dots a \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a & a & a \dots x \end{bmatrix}.$$

Sugestão: comece por adicionar à primeira coluna a soma das restantes.

R.:

$$\begin{vmatrix} x & a & a \dots a \\ a & x & a \dots a \\ a & a & x \dots a \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a & a & a \dots x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+(n-1)\,a & a & a \dots a \\ x+(n-1)\,a & x & a \dots a \\ x+(n-1)\,a & a & x \dots a \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x+(n-1)\,a & a & a \dots x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x+(n-1)\,a & a & a & \dots & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} =$$

$$= [x+(n-1)\,a] \begin{vmatrix} x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} =$$

$$= [x+(n-1)\,a]\,(x-a)^{n-1}.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas I — Ano lectivo 1970-71 — Ponto n.º 5 — 1-10-1971.

5789 — 1) Estude a validade da seguinte proposição:

$$A \subseteq \sim (B \cup C) \wedge B \subseteq \sim (A \cup C) \Longrightarrow B = \phi .$$

R.: *Adoptando a convenção* $x \in A = a$, $x \in B = b$, $x \in C = c$ *e* $x \in \phi = 0$, *o problema consiste em estudar a validade da proposição:*

$$\{[a \Longrightarrow \sim (b \vee c)] \wedge [b \Longrightarrow \sim (a \vee c)]\} \Longrightarrow (b \Longleftrightarrow 0) .$$

A tabela de verdade

a	b	c	$\{[a \Longrightarrow \sim (b\vee c)] \wedge [b \Longrightarrow \sim (a\vee c)]\} \Longrightarrow b \Longleftrightarrow 0)$
1	1	1	1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0
1	1	0	1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0
1	0	1	1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0
1	0	0	1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0
0	1	1	0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0
0	1	0	0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0
0	0	1	0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0
0	0	1	0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0

mostra que a proposição é falsa.

2) Considere no plano os pontos $M(x, y)$ e tome a relação binária R definida do modo seguinte:

$$M\,R\,M' \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leqq x' \\ y \leqq y' \end{cases}.$$

a) R é uma relação de ordem parcial lata?

b) R é uma relação de ordem lata?

Justifique as respostas.

R.: a) R *é reflexiva, antisimétrica lata e transitiva e, portanto, é relação de ordem parcial lata.*

b) R *não é ordem lata porque não goza da propriedade dicotómica.*

3) Ache os inteiros n para os quais $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-i)^n}$ é imaginário puro.

R.:

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-i)^n} = \frac{2^3 \operatorname{cis} \pi}{2^n \operatorname{cis}\left(-\dfrac{n\pi}{6}\right)} = 2^{3-n} \operatorname{cis} \frac{(n+6)\,\pi}{6}.$$

Para que este complexo seja imaginário puro é preciso que $\cos \dfrac{(n+6)\,\pi}{6} = 0$ *ou* $\dfrac{(n+6)\,\pi}{6} = 2\,k\,\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$, *donde resulta* $n + 6 = 12\,k \pm 3$, *isto é*, $n = 12\,k - 3$ *e* $n = 12\,k - 9$.

4) Seja $A = \{0, 1\}$ e considere o sistema algébrico $(A, +, \times)$ com as leis definidas pelas seguintes tabelas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	1
1	0	1

Investigue se $(A, +, \times)$ possui estrutura de corpo.

R.: *O sistema* $(A, +\times)$ *não é um corpo porque não é anel comutativo unitário.*

5) Determine k por forma que a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & k & 3 \end{bmatrix}$$

seja igual a 3.

Se A é matriz $m \times n$ de característica n prove que o sistema $A\,x = b$ tem quando muito uma solução.

R.:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & k & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ k-8 & -6 & 8 & 0 \\ -3 & -3 & k+9 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ k-2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k+6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & k-2 \\ 0 & 0 & k+6 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $k=-6$, *a última linha é nula e a característica de matriz é* 3. *Se* $k \neq -6$, *prosseguindo a condensação, vem:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{k+6}{2}\right)(k-2) \end{bmatrix}$$

Para que a característica seja 3 é necessário que $\left(-\frac{k+6}{2}\right)(k-2)=0$ *ou* $k=2$.

Portanto os valores de k *que satisfazem ao problema são* $k=-6$ *e* $k=2$.

Como A *é matriz* $m \times n$ *de característica* n, *é* $m \geqq n$. *Se* $m=n$, *o sistema é possível determinado; se* $m>n$, *o sistema pode ser possível ou impossível mas, no primeiro caso, será sempre determinado.*

6) Mostre que

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a+bx & c & d+x \end{vmatrix}.$$

R.:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & d & c & d+x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ b & c & d+x \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a & c & d+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ bx & c & d+x \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a & c & d+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a+bx & c & d+x \end{vmatrix}.$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS I — Ano lectivo 1970-71 — Ponto n.º 6 — 11-10-1971.

5790 — 1) Demonstre que

$$(A \cap B \cap C \cap \tilde{D}) \cup (\tilde{A} \cap C) \cup (\tilde{B} \cap C) \cup (C \cap D) = C.$$

R.: $(A \cap B \cap C \cap \tilde{D}) \cup (\tilde{A} \cap C) \cup (\tilde{B} \cap C) \cup (C \cap D) =$
$= C \cap [(A \cap B \cap \tilde{D}) \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup D] = C \cap [(A \cap B \cap \tilde{D}) \cup$
$\cup \sim (A \cap B \cap D)] = C \cap U = C$.

2) Considere as seguintes relações entre os conjuntos A e B:

a) $A=\{a, l, m\}$, $B=\{i, r, s\}$ e $R=\{(x, y) \in A \times B$: «$x\,y$» é uma palavra da língua portuguesa$\}$.
b) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4, 5\}$ e $R=\{(x, y) \in A \times B: 5x+2y$ é número primo$\}$.

Indique os gráficos das relações e investigue se alguma delas é uma função.

R.: a) $R=\{(a, i), (a, r), (a, s), (l, i), (m, i)\}$.
b) $R=\{(1, 3), (1, 4)\}$.

Nenhuma das relações é uma função.

3) Prove que $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta+i\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta-i\cos\theta}=\operatorname{sen}\theta+i\cos\theta$. Utilizando a fórmula anterior, mostre que $(1+\operatorname{sen}\pi/5+i\cos\pi/5)^5+i\,(1+\operatorname{sen}\pi/5-i\cos\pi/5)^5=0$.

R.: *A fórmula justifica-se fàcilmente, verificando que* $(1+\operatorname{sen}\theta-i\cos\theta)\times(\operatorname{sen}\theta+i\cos\theta)$ *dá o complexo* $1+\operatorname{sen}\theta+i\cos\theta$.

$$\left(\frac{1+\operatorname{sen}\pi/5+i\cos\pi/5}{1+\operatorname{sen}\pi/5-i\cos\pi/5}\right)^5=(\operatorname{sen}\pi/5+i\cos\pi/5)^5=$$
$$=(\cos 3\pi/10+i\operatorname{sen}3\pi/10)^5=\cos 3\pi/2+i\operatorname{sen}3\pi/2=$$
$$=-i.$$

4) No conjunto N dos números naturais considere a lei de composição interna *menor múltiplo comum* (*m. m. c.*), isto é, $a * b = m.\,m.\,c.\,(a, b)$.

Em relação a esta lei, estude a associatividade, a comutatividade, a existência de elemento neutro e a existência de oposto. Constitui $(N, *)$ um grupo? Porquê?

R.: *A lei é associativa, comutativa e possui elemento neutro (1). Não possui elemento oposto e, por esta razão,* (N, ∗) *não é grupo.*

5) Sendo $I+A$ matriz regular, prove que $(I+A)^{-1}$ é permutável com $I-A$.

Estude o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = k. \end{cases}$$

R.: *Como* $(I+A)(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}(I+A) = I$,

vem

$$(I+A)^{-1} + A(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1} + (I+A)^{-1}A$$

donde resulta

$$A(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}A.$$

Então

$$\begin{aligned}(I+A)^{-1}(I-A) &= (I+A)^{-1} - (I+A)^{-1}A \\ &= (I+A)^{-1} - A(I+A)^{-1} \\ &= (I-A)(I+A)^{-1}.\end{aligned}$$

O sistema é possível indeterminado de grau 2 com $k=5$; *é impossível com* $k \neq 5$.

6) Sendo $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$, exprima D_n como soma de dois determinantes, por forma a estabelecer a fórmula de recorrência

$$D_n = a_n D_{n-1} + a_1 a_2 \dots a_{n-1}.$$

R.: $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} +$

$$+ \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + a_n D_{n-1} = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_n D_{n-1}.$$

Enunciados e soluções dos n.os 5785 a 5790 de Fernando de Jesus

INTRODUÇÃO AOS COMPUTADORES E PROGRAMAÇÃO

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 1.ª Chamada — 8 de Julho de 1971.

I

5791 — 1) Determine as constantes FORTRAN cujas representações binárias internas no computador 360/44 são as seguintes:

a) inteira: 00000000 00000000 00000000 00010100

b) real: 01000010 00100000 00000000 00000000

2) Qual o número de dígitos decimais significativos das constantes FORTRAN de dupla precisão no computador acima referido? Justifique a resposta, sabendo que $\log_{10} 2 = 0{,}30103$.

II

Considere o programa (completo):

```
C     PROGRAMA DE ESTUDO
      DIMENSION L (10), A (3,4)
      READ (5,10) (L (J), J = 1,10)
   10 FORMAT (5I8)
      DO 1 J = 1,3
      GO TO (2,3,4), J
    2 DO 5 K = 1,4
    5 A (J, K) = L (K)
      GO TO 1
    3 DO 6 K = 1, 4,1
    6 A (J, K) = L (K + 4)
      GO TO 1
    4 DO 7 K = 1,4
    7 A (J,K) = A (J - 1, K) + A (J - 2, K)
    1 CONTINUE
      M = 1
    9 WRITE (6,15) A (M,1), A (M,2), A (M,3), A (M,4)
   15 FORMAT (1H , F8. 2,6X, E13. 7,6X, 2F6. 4)
      M = M + 1
      I F (M - 3) 9,9,20
   20 STOP
      END
```

Sendo os valores das componentes do vector L, respectivamente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, a introduzir como dados,

1. *a*) Quantas instruções constituem o programa apresentado?

b) Qual destas proposições é verdadeira?

A. A coluna 1 de um cartão de programa FORTRAN contém uma letra ou um (espaço em) branco.

B. A coluna 1 de um cartão de programa FORTRAN contém a letra C ou um (espaço em) branco.

C. A coluna 1 de um cartão de programa FORTRAN contém ou um C, ou um espaço em branco ou um dígito.

2. *a*) Quantas instruções executáveis constituem o programa anterior? Exemplifique, com uma instrução deste programa, cada um dos vários tipos de instruções executáveis nele apresentados.

b) Existem instruções de especificação no nosso programa. Quais são e que funções desempenham.

c) Existem instruções de controle no programa apresentado. Diga quais são, agrupando-as por categorias, e descreva a acção de *uma* delas.

d) Qual a acção da variável M no programa dado?

3. *a*) Quantos cartões de dados precisam de ser lidos para definir o vector L? Dê a configuração do primeiro cartão.

b) Apresente num quadro os valores dos vários elementos da matriz calculados durante a execução do programa.

c) Apresente os resultados sob a forma de linhas, simulando a impressora.

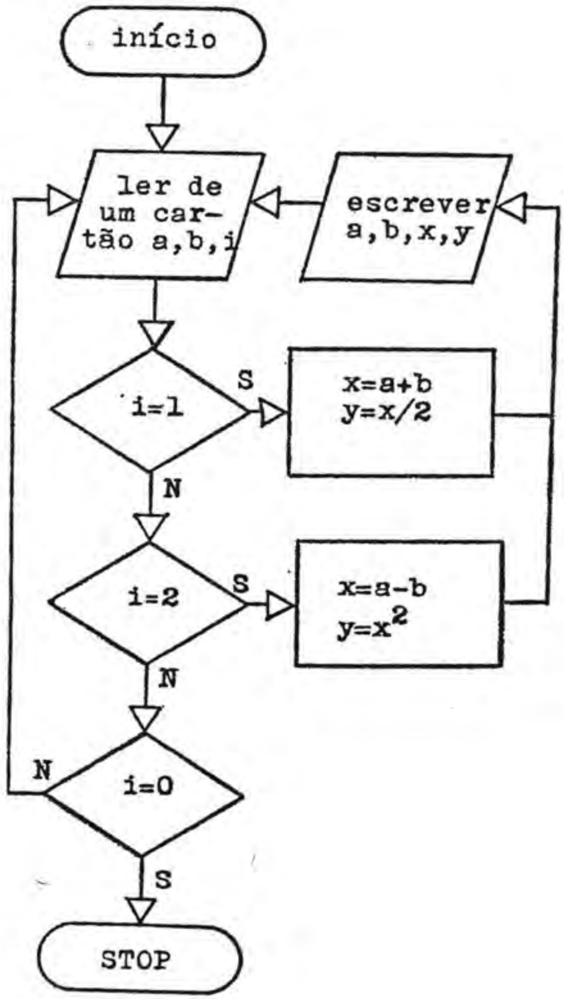
III

Esta parte tem duas opções, A e B; escolha *uma só* de entre elas.

Opção A

1. Elabore o diagrama do programa descrito.

2. Escreva um programa FORTRAN (completo) que resolva o problema esquematizado no diagrama seguinte



Opção B

Elabore um programa capaz de gerar e imprimir uma tabela da multiplicação de dupla entrada, dos dígitos de 1 a 9.

Prèviamente elabore o organigrama deste programa.

ASPECTO DA TABELA:

	1	2	3.	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 2.ª Chamada — 13 de Julho de 1971

I

5792 — 1) Considere as constantes FORTRAN -25 (inteira) e 240.125 (real).

Faça os esquemas dos seus registos na memória do computador instalado no Centro de Cálculo da Universidade Técnica de Lisboa.

2) Tendo em atenção a representação interna em vírgula flutuante (precisão simples) no computador 360/44, determine as duas constantes FORTRAN cujos expoentes são zero e cujas mantissas são, respectivamente, a máxima e a mínima admissíveis.

II

1) Considere o seguinte conjunto de instruções:

```
   DIMENSION X (20,20)
   READ (5,1) M,N
   DO 5 I = 1, M
   DO 5 J = 1, N
 5 X (I, J) = I + J + I A B S (I — J)
   WRITE  (6,10) ((X(I, J), I = 1, M), J = 1, N)
   STOP
   END
```

a) É necessário acrescentar-lhe pelo menos duas instruções para que constitua um programa.

Diga quais são, escrevendo cada uma delas de forma completa.

b) Tendo em atenção a sua resposta à alínea *a*) faça um desenho do cartão (ou cartões) de dados para M = N = 3.

c) Para M = N = 3 indique os valores que durante a execução do programa anterior vão ser atribuídos aos elementos X (I, J).

d) De acordo ainda com a sua resposta à alínea *a*) indique o aspecto dos resultados na folha de papel da impressora.

III

Esta parte tem duas opções, A e B; escolha *uma só* de entre elas.

Opção A:

Cada uma das instruções do troço de programa seguinte contém algum erro de sintaxe. Indique quais são esses erros e integre as instruções corrigidas num programa de modo a constituir um todo lógico, eventualmente alterando a ordem de duas instruções. A partir do programa completo faça o respectivo diagrama de blocos e indique qual a natureza dos cálculos que se efectuariam com esse programa.

```
   N. = 20
   DIMENSION X (N)
   PRODUTO = 1
   DO 5 I 1, N
   X = I
 5 PRODUT = PRODUT. X (I)
   WRITE (6,1), PRODUT
 1 FORMAT (1H , F5.2)
   STOP ABC
```

Opção B:

Chama-se sucessão de Fibonnaci a uma sequência de números inteiros, tal que cada termo é obtido adicionando os dois que o precedem, i. e., se fôr 0 o primeiro termo e 1 o 2.º termo vem

0 1 1 2 3 5 8...

Escreva um programa (completo) em FORTRAN para gerar números de uma sucessão de Fibonnaci, imprimindo-os em 5 colunas.

Preveja a hipótese de parar o computador *antes* de se ultrapassar a capacidade máxima dos valores numéricos inteiros que é possível codificar num computador de palavras de 32 bits.

Enunciados dos n.os 5791 a 5792 de: J. M. Barbeito, Maria Odete Cadete e J. Marques Henriques

CÁLCULO AUTOMÁTICO

I. S. T. — Cálculo Automático — Exame Final — Época de Julho — 1.ª Chamada — 9 de Julho de 1971

I

5793 — *a*) Defina valor e vector próprio de uma matriz de ordem n e enuncie algumas propriedades dos valores e vectores próprios de matrizes reais e simétricas.

b) Exponha sucintamente as ideias básicas do método de Jacobi para a determinação dos valores e vectores próprios de matrizes reais e simétricas. Este método é directo ou iterativo e neste último caso é sempre convergente? Justifique.

II

Escreva um programa em FORTRAN que lhe permita calcular os coeficientes do polinómio quociente da divisão de um polinómio em x de grau n por $x-a$ sendo a uma constante real qualquer.

Qual o tipo de subprograma que escreveu? Como faria a sua chamada no programa principal?

III

Cada uma das instruções do programa seguinte contém um e só um erro propositado de sintaxe:

```
      N/2
      DIMENSION I (N)
      I (1) = 10000,0
      I = 2345
      JSOMA = I (1) + I (2) +
      WRITE (6,1) JSOMA,
      FORMAT (I8)
      GO TO STOP
STOP  END
```

a) Corrija (do ponto de vista da sintaxe) o programa acima.

b) Indique qual o resultado da execução deste programa, depois de corrigido.

IV

Analise o segmento de programa seguinte e diga, justificando, qual das instruções 1,2 ou 3 é executada a seguir à instrução IF (pressuponha que as instruções 1, 2 e 3 são instruções executáveis):

```
I = 2
Z = 2/I**2 - I/4.
IF (Z) 1,2,3
```

I. S. T. — Cálculo Automático — Exame Final — Época de Julho — 2.ª Chamada — 23 de Julho de 1971

I

5794 — *a*) Escreva um subprograma em FORTRAN para multiplicar duas matrizes quaisquer, a primeira de M linhas e N colunas e a segunda de N linhas e K colunas. Considere no seu subprograma que as matrizes são dadas por linhas e colunas.

b) O subprograma mencionado na alínea *a*) de que tipo é? Poderá ser de outro tipo? Justifique.

c) Quais as limitações de generalidade impostas pelo facto de se considerarem as matrizes por linhas e colunas em vez de as tomar como um vector de, respectivamente, $M*N$ e $N*K$ componentes?

II

Qual o método que utilizaria para resolver no computador o sistema de equações

$$\begin{aligned} 50x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 &= 35 \\ x_1 + 20x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 20 \\ 2x_1 - x_2 + 40x_3 - x_4 + x_5 &= 41 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 28x_4 - 6x_5 &= 22 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 35x_5 &= 35 \end{aligned}$$

O método que indicou é directo ou iterativo e neste último caso é sempre convergente?

III

Indique um possível formato dos cartões de entrada que utilizaria se o sistema acima tivesse de ser lido, entrando cada uma das linhas (com o respectivo termo independente) num só cartão.

IV

Escreva um programa para resolver o sistema dado, pelo método que enunciou em II e de acordo com o que expôs em III.

I. S. T. — Cálculo Automático — Exame Final — 2.ª Epoca — 16 de Outubro de 1971

I

5795 — *a*) Escreva um subprograma em FORTRAN para, dependendo de um parâmetro que será um valor inteiro, adicionar ou subtrair duas matrizes quaisquer, ambas de M linhas e N colunas. Considere no subprograma que as matrizes são dadas por linhas e colunas.

b) O subprograma que escreveu na alínea *a*) de que tipo é? Poderá ser de outro tipo? Justifique.

c) Quais as limitações de generalidade impostas pelo facto de se considerarem as matrizes por linhas e colunas, em vez de as tomar como vectores de $M*N$ componentes?

d) Indique quais as alterações que seriam necessário introduzir no seu subprograma para considerar as matrizes no caso da alínea *c*).

II

Uma estrutura vectorial possui, no máximo, 100 componentes. Cada uma das primeiras K componentes, excepto a primeira e a K-ésima, devem ser substituídas por

$$A_i = (A_{i-1} + A_i + A_{i+1}) \div 3$$

e posteriormente pretende calcular-se a norma do vector das K componentes transformadas, de acordo com a definição

$$N = \sqrt{\sum_{i=1}^{K} A_i^2}$$

Escreva um programa em FORTRAN para, a partir dos valores originários das componentes de A em memória, imprimir o valor de N numa impressora de linhas.

III

a) Defina valores e vectores próprios de uma matriz quadrada.

b) Demonstre ou dê um contra exemplo para a afirmação seguinte: «para matriz real os valores próprios definem univocamente a matriz».

c) Demonstre qualquer facto que considere importante acerca dos valores ou vectores próprios de matrizes reais e simétricas.

Enunciados dos n.os 5795 a 5795 de J. Marques Henriques

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

OS COMPUTADORES E AS MATEMÁTICAS PURAS

188 — Leech, John (editor) — **Computational Problems in Abstract Algebra** — Proceedings of a Conference held at Oxford under the auspices of the Science Research Council — Pergamon Press, Oxford, 1970.

189 — Atkin, A. O. L. and Birch, B. J. (editors) — **Computers in Number Theory** — Proceedings of the Science Research Council Atlas Symposium No. 2 — Academic Press, London and New York, 1971.

Os dois livros aqui em crítica, embora versem tópicos bem distintos, o primeiro dedicado à Álgebra e o segundo à Teoria dos Números, têm contudo muito mais em comum para além de se tratarem de actas de dois Simpósios organizados pelo Atlas Computer Laboratory da Universidade de Oxford: ambos têm uma linha de rumo comum e visam tópicos de investigação fortemente condicionados ou impulsionados pelo uso de computadores. Por isso mesmo faremos a sua crítica conjuntamente e por se tratar de domínios quase desconhecidos entre nós alongar-nos-emos na exposição mais do que é normal numa simples crítica bibliográfica.

Já há longos anos que vários investigadores têm procurado utilizar computadores com maior ou menor sucesso no campo das Matemáticas Puras. Um dos mais lídimos precursores desta utilização foi, sem dúvida, J. von Neumann, mas devem aqui ser também mencionados, em especial M. KAC, G. B. DANZIG, H. KUHN, A. W. TUCKER, M. HALL, T. S. MOTZKIN, R. BELMAN, D. H. LEHMER e tantos outros.

Uma resenha relativamente moderna de alguns resultados obtidos até cerca de 1967 encontra-se no livro editado por R. F. Churchhouse e J. C. HERZ, *Computers in Mathematical Research*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968, prefaciado por J. DIEUDONNÉ, obra esta infelizmente muito pouco divulgada entre nós e da qual nem sequer se nos consta que tenha havido qualquer apreciação crítica escrita em português.

Na medida em que procuramos embora sem reparar a falta chamar pelo menos a atenção para ela, cumpre-nos mesmo sumàriamente indicar alguns resultados interessantíssimos obtidos no âmbito das ciências matemáticas com o auxílio dos computadores.

Não nos referimos, evidentemente, à contribuição essencial que os computadores têm fornecido no campo dos vários ramos da Análise Numérica, e das suas múltiplas aplicações no âmbito das ciências físicas e da engenharia, e de outros domínios da Matemática Aplicada, nomeadamente na Estatística, Investigação Operacional e Simulação. Aqui vamo-nos reportar exclusivamente a vários resultados do âmbito da Matemática Pura (sem pretender, como é óbvio, dividir a Matemática em duas...).

Ora muitas vezes as Matemáticas Puras têm feito uma figura de parentes pobres no âmbito das aplicações dos computadores. Por seu lado os computadores desempenham frequentemente o papel de intrusos para muitos matemáticos puros. Consoante o seu temperamento (e, vamos lá, também a sua formação) estes dividem-se entre os incrédulos, os hostis e os indiferentes. Por esta razão não teria sido possivel impedir que em vários centros matemáticos de universidades ou de outros organismos ligados a projectos científicos os computadores tenham desempenhado papel importante na investigação no domínio das Matemáticas Puras. Ao mesmo tempo estes resultados têm levado a novas aplicações; por seu lado as modernas teorias das linguagens e dos sistemas de exploração, ligados ao funcionamento e operacionalidade dos computadores, têm levantado complexos e profundos problemas de natureza matemática.

A actividade do matemático puro pode em geral dividir-se entre a investigacão de novos teoremas e a sua demonstração. Enquanto uma proposição não é demonstrada continua a ser uma conjectura. Pelo lado do matemático, quando este é levado a formular uma nova conjectura, esta formulação é de tal modo difícil de definir que mesmo para um enunciado não pode haver qualquer possibilidade de o matemático se fazer substituir por uma máquina. Em compensação o computador pode guiar a intuição do matemático, pelo menos em alguns ramos tais como, por exemplo, a Teoria dos Números e a Análise, trazendo-lhe ou analisando por ele um volume enorme de dados numéricos. Por vezes numa investigação paciente pode encontrar-se um contra-exemplo, destruindo uma conjectura.

Assim, EULER conjecturou em 1769 que a equação

$$x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = u^5$$

não deveria ter solução no conjunto dos números inteiros. Em 1966 um computador encontrou o quintuplo $x = 27$, $y = 84$, $z = 110$, $t = 133$, $u = 144$, que constitui uma solução da equação dada.

É claro que não há verdadeiras vantagens que se psssam esperar dum computador quando ele se encarrega de uma demonstração, e se bem que toda a Matemática seja redutível a um jogo de escritas formais não existem métodos mecânicos gerais que permitam a construção de uma demonstração de um enunciado a partir desse mesmo enunciado. Mesmo se esse método existisse numa parte restrita da teoria a sua aplicação prática seria limitada pela extensão dos cálculos.

Mas ainda aí a experiência e a intuição do matemático permitirão muitas vezes encontrar sem grandes dificuldades as malhas essenciais da cadeia lógica. O computador não pode intervir senão em pequenos detalhes, como o faria qualquer escravo fiel. Foi assim que, com a ajuda de uma técnica já antiga, mas impossível de aplicar até ao aparecimento dos computadores em vista do grande volume de operações a efectuar, se pôde fazer avançar os limites conhecidos da validade da conjectura de FERMAT, segundo a qual a equação

$$x^n + y^n = z^n$$

não possui solução no conjunto dos números naturais para $n > 2$. Esta propriedade foi demonstrada em 1964 para todos os valores de n inferiores a 25000. É claro que aqui não se trata de uma simples verificação, uma vez que os valores das incógnitas não são limitados. Sobre a veracidade ou falsidade da conjectura de FERMAT talvez que ainda a palavra final venha a ser dada por um computador...

Um domínio de eleição da aplicação dos computadores na Matemática Pura tem sido a Teoria dos Números. Assim, por exemplo, é bem conhecida a afirmação enunciada por MERSENNE em 1644 de que $M_p = 2^p - 1$ seria primo se e só se p fosse um dos primos 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257 e composto para os restantes 44 primos $p \leq 257$. Ainda hoje se desconhecem as razões que levaram MERSENNE a este enunciado; contudo, o primeiro erro na sucessão de Mersenne foi descoberto em 1886 por Pervusin e Seelhof. Outros erros foram descobertos posteriormente, mas em 1876 Lucas descobriu um teste de primalidade (mais tarde aperfeiçoado por Lehmer, tendo já em vista os modernos computadores), que aplicou a M_{127}, verificando que se tratava, efectivamente, de um número primo. Este terá sido, muito provàvelmente, o maior primo descoberto sem o auxílio de máquinas de cálcular ou de computadores.

Só em 1951 se vieram a descobrir números primos maiores: M_{521} foi ainda descoberto com o auxílio de máquinas de calcular; todos os outros conhecidos até este momento foram-no com o auxílio de computadores.

Em 1964 Gillies descobriu que M_{9689}, M_{9941} e M_{11213} são também primos (os maiores conhecidos até essa altura) e graças aos esforços de vários investigadores entre os quais é de salientar também Ferrier, Miller, Wheeler, Lehmer, Robinson, Riesel, Hurwitz e Selfridge, os 23 primos de Mersenne conhecidos até então eram os correspondentes a $p=2$, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941 e 11213. De acordo com o teorema de Euclides e de Euler, segundo o qual um número par n é perfeito se e só se $n=(2^p-1).$ $.2^{p-1}$ com p primo e tal que 2^p-1 seja ele também primo eram portanto conhecidos em 1964 23 números perfeitos. Note-se que o maior primo conhecido no tempo de Euler era $2^{31}-1$.

Em 4 de Março de 1971 B. Tuckerman aplicou com êxito o teste de Lucas-Lehmer para descobrir que o 24.º primo de Mersenne é M_{19937} e que, associado a ele, o número $(2^{19937}-1)\cdot 2^{19936}$ é o 24.º número perfeito conhecido. Cada um destes números possui, respectivamente 6002 e 12003 dígitos e é impensável que esses resultados tivessem podido ser obtidos por outra via, atendendo a que em computadores com a potência de vários milhões de instruções por segundo o tempo de cálculo oscila por uma hora!

Virá a ser, sem dúvida, interessante verificar por quanto tempo manterá M_{19937} o título do «maior primo conhecido». Efectivamente, M_{11213} resistiu durante 7 anos; a sua primalidade, que em 1964 demorou várias horas de cálculo a ser estabelecida, é verificada actualmente em escassos minutos usando os mesmos computadores e programas utilizados por Tuckerman. Esta evolução veio permitir, por outro lado, que fossem efectuados testes exaustivos para todos os primos $p<20000$. Estes cálculos foram confirmados durante o Verão de 1971 por M. Speciner e R. C. Schroeppel, usando outros métodos introduzidos no teste de Lucas-Lehmer por D. E. Knuth. Quer isto dizer portanto que só máquinas extremamente potentes, comparadas com os maiores super-computadores existentes actualmente, poderão vir a ser usadas de futuro.

Esta busca está longe de ter interesse estritamente académico. Por um lado tem permitido aperfeiçoamentos sucessivos de algoritmos de cálculo, por outro exige refinamentos adequados das linguagens e dos programas utilizados. É de mencionar ainda o interesse destes métodos associados, por exemplo, a problemas tão diversos como a geração de números pseudo-aleatórios em computador.

Não menos frutuosa tem sido a utilização dos computadores nos domínios da Teoria Combinatória e da Programação Matemática, Linear e Não-Linear.

Assim, há vários estudos que relacionam as propriedades dum grafo com o espectro da matriz adjacente do grafo. Estes estudos incluem entre outros: limites superiores e inferiores do número de cores e funções relacionadas, caracterização dos grafos em que o primeiro ou o segundo ou o mais pequeno dos valores próprios são limitados e caracterização de famílias de grafos fortemente regulares.

Também vários estudos têm relacionado a Teoria dos Grafos com todos ou alguns dos vértices de poliedros, tendo-se chegado, muitas vezes por vias enumerativas a extensões de trabalhos anteriores de Tutte e de Edmonds.

Algumas questões da Teoria Combinatória têm surgido na Teoria dos Grafos noutros contextos, por exemplo argumentos grafoteóricos que têm sido usados para provar que são necessárias pelo menos $2n-1$ operações binárias para calcular o produto interno de dois vectores no espaço n-dimensional, quaisquer que sejam as funções auxiliares contínuas que são calculadas em primeiro lugar. Esta teoria deu lugar a toda uma reformulação de certos algoritmos de cálculo, em particular no que diz respeito ao vulgar produto de matrizes, destacando-se nestes trabalhos em especial S. Winograd.

Uma vez que em computador o tempo necessário para efectuar uma soma (ou subtracção) é, em geral, mais reduzido do que o necessário para uma multiplicação, estas descobertas são de importância excepcional em processos envolvendo muitos milhões de operações aritméticas. Assim, verificou-se que em geral o menor número de multiplicações exigido para o cálculo do valor de um polinómio inteiro de grau n é o que se obtém pela aplicação da regra de Horner e que é precisamente n; o mesmo sucede quando se trata do produto interno de dois vectores de n componentes e ainda a regra do produto de uma matriz $m\times n$ por um vector exige, no mínimo $n\cdot m$ multiplicações (S. Winograd, On the number of multiplications required to compute certain functions, *Proc. of the Nat. Academy of Sciences* 58 pgs. 1840-2, November 1967). Porém, o vulgar produto de matrizes, a que acima nos referimos não é optimal, no sentido de que não minimiza o número de multiplicações; assim, como é bem conhecido, o produto ordinário de uma matriz $m \times p$ por outra $p \times q$ exige $m \cdot p \cdot q$ multiplicações. Se as duas matrizes forem quadradas, de ordem n $(i \cdot e \cdot \; m = p = q = n)$, o número de multiplicações é pois de n^3. Ora, os trabalhos de Winograd e outros, entre os quais devemos ainda mencionar V. Strassen, permitiram estabelecer que $n^3/2 + n^2$ multiplicações são suficientes se as matrizes forem quadradas. Para valores suficientemente grandes de n as reduções nos tempos de cálculo são substanciais, mesmo atendendo a que são necessárias mais somas e subtracções do que para o algoritmo vulgarmente usado.

Aquele número é apenas um limite superior geral: assim, para o produto de duas matrizes 2×2 basta o cálculo de 7 multiplicações, o que corresponde a $n^3/2 + n^2 - n/2$, expressão válida para matrizes de ordem $n = m \cdot 2^{k+1}$ com m e k naturais, aperfeiçoamento este devido a A. Waksman (On Winograd's algorithm for inner products, *IEEE Transactions on Computers* **C-19** pgs. 360-1, April 1970).

Também com base na utilização de computadores foram iniciados estudos bastante gerais de problemas da programação inteira, baseados numa análise exaustiva do ambiente convexo dos pontos inteiros contidos no cone determinado pelos hiperplanos que intersectam o vértice de um poliedro. Esta análise tem-se baseado num novo ponto de vista que relaciona a Teoria dos Poliedros com a Teoria dos Grupos Abelianos.

Uma vez que começámos a abordar este tipo de problemas, parece-nos interessante recordar aqui o seguinte problema, enunciado e resolvido por D. H. Lehmer: pretende-se calcular todos os menores (de ordem 12) de uma matriz dada, de 12 linhas e 20 colunas. Na Análise Combinatória clássica, no sentido de Leibniz, existem exactamente $\binom{20}{12} = 125970$ tais menores, número susceptível de ser convenientemente trabalhado em computador. Contudo pretende-se ainda distribuir este trabalho por dois computadores, um dos quais é cinco vezes mais rápido do que o outro, de tal modo que a ocupação em tempo seja igual nas duas máquinas. Assumindo ainda que a máquina mais lenta processa o trabalho começando pelo princípio (menor constituido pelas 12 primeiras colunas da matriz), com que menor deverá a máquina mais rápida iniciar o processamento?

A resposta é que deverá ser o menor determinado pelas colunas 1, 2, 3, 6, 7, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19. Este problema pode ser generalizado: se n é um inteiro e m é outro inteiro qualquer $(m \geq n)$, então

$$m = \binom{k_1}{1} + \binom{k_2}{2} + \cdots + \binom{k_n}{n}$$

onde $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-1} < k_n$, e esta representação é única, podendo servir para determinar a ordem das combinações de m objectos tomados n a n. Esta representação é de interesse noutros ramos da Matemática, em particular na Teoria das Probabilidades, onde foi redescoberta por L. Dubins e L. J. Savage.

Outros dois aspectos que têm sido fortemente impulsionados pelos computadores são os da Programação Permutacional e o Problema do Caixeiro Viajante.

A Programação Permutacional pode enunciar-se simplesmente como uma programação inteira em que a solução deve consistir numa permutação dos números $1, 2, \cdots, n$ (n = número de incógnitas). Este problema tem sido estudado por Jaeschke, sem contudo se conhecerem ainda soluções gerais satisfatórias.

Quanto ao Problema do Caixeiro Viajante, embora envolvendo grandes dificuldades computacionais, está hoje já razoàvelmente equacionado e resolvido, mesmo em casos de variantes mais complexas: o caixeiro viajante pretende passar por n pontos (designados por $1, 2, \cdots, n$ e vulgarmente conhecidos por «cidades» na terminologia do problema), e regressar à base (ponto 0), sem nunca passar duas vezes pelo mesmo ponto. O custo da deslocação do ponto i para o ponto j é c_{ij} (òbviamente $c_{ij} = c_{ji}$ e $c_{ij} > 0$ se $i \neq j$, sendo $c_{ii} = 0$). O problem consiste em obter uma permutação cíclica Φ dos números $1, 2, \cdots, n$ tal que para cada ponto i seja possível encontrar um sucessor $\Phi(i)$, de tal modo que $\sum_{i=1}^{n} c_{i,\Phi(i)}$ seja mínimo.

Como o número das permutações de n números é $n!$, com $n = 10$, virão neste caso $10! = 3628800$ hipóteses (repare-se que 10 é ainda um caso simplificado, pois todas as formulações com interesse prático conduzem a valores de n da ordem de 25 ou superiores). De acordo com D. E. Knuth (*The Art of Computer Programming* **1**, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1968) este valor constitui, para efeitos práticos, o limite ao número aceitável de interacções que é actualmente possível de efectuar em computador, o que de modo algum virá a ser uma limitação de futuro, dado que as velocidades máximas dos computadores têm duplicado em média de 2 em 2 anos.

Contudo, frizamos uma vez mais, tal limitação veio simplesmente implicar que os matemáticos descobrissem novos métodos de ataque a estes problemas. Foi aliás o caso com o Problema do Caixeiro Viajante, em que existem algoritmos bastante gerais devidos a R. E. Gomory.

Cremos ser suficiente o que acima se disse para avaliar do interesse dos livros que agora passamos a criticar. Qualquer deles possui excelentes artigos, cujo grau de acessibilidade ao Leitor varia do «razoàvelmente simples» ao «extremamente complexo», como aliás seria de esperar em publicações deste tipo; contudo tanto numa como na outra destas obras encontram-se imensos resultados de profundo interesse e novas formulações de outros já conhecidos.

No que toca à Algebra, o artigo de J. Neubüser (Investigations of groups on computers) resume em 20 páginas todo o desenvolvimento de um interessantíssimo campo de aplicação dos computadores em Matemática, envolvendo aspectos muito importantes da dualidade entre as aplicações numéricas e as não-numéricas; só é efectivamente pena que não tenha sido possível uma actualização bibliográfica neste volume: no artigo que acabamos de mencionar estaria bem uma referência a alguns outros resultados mais recentes, tal como foram sumarizados por J. J. Cannon (Computers in Group Theory; a survey, *Comm. of the ACM* **12** pgs. 3-12). Na nossa opinião estes dois artigos deveriam ser de leitura obrigatória para qualquer estudante de matemática das nossas universidades. Outro artigo de J. Neubüser e V. Felsch (On a programme for the determination of the automorphism group of a finite group) trata também de grupos finitos, e o mesmo sucede no trabalho extraordinário de M. Hall (A search for simple groups of order less than one million), este contudo de leitura muito menos acessível, até porque o Autor tem o cuidado de indicar as limitações do seu trabalho e as possíveis extensões.

Julgamos que seria interessante continuar a linha sugerida por Marshall Hall de construção de grupos simples de ordens bastante grandes. Tópicos para ulteriores trabalhos aparecem também frequentemente indicados no artigo de C. C. Sims (Computational methods in the study of permutation groups).

No total este volume contém 35 artigos, para todos os gostos e graus de dificuldade, quer do ponto de vista algébrico, quer computacional. Talvez fôsse de esperar uma certa ênfase, pela sua importância prática na Teoria das Equações, a que apenas são dedicados dois artigos, um de W. D. Maurer (The uses of computers in Galois theory), aliás bastante acessível e interessante, e o outro de H. Zassenhaus (A real root calculus).

O outro volume aqui em crítica, *Computers in Number Theory*, engloba 46 artigos, também para todos os paladares e graus de dificuldade, se bem que todos com o mesmo sentido de originalidade de resultados ou de métodos. Em geral todos eles são bastante interessantes, sendo porém de notar a ausência de artigos sobre a busca de números primos ou problemas relacionados.

Qualquer escolha no âmbito de uma crítica deste género terá forçosamente de reflectir as inclinações pessoais do crítico. Contudo notamos com agrado a inclusão de artigos como o de D. H. Lehmer (The economics of number theoretic computations) em que são incluidas discussões de vários tópicos do tipo das que mencionámos acima; o de H. M. Stark (An explanation of some exotic continued fractions); outro artigo de M. Hall (The Diophantine equation $x^3 - y^2 = k$), seguido de outro de F. B. Coghlan e N. M. Stephens, com o mesmo título mas com muito poucas relações com aquele (?).

Muito interessantes são, a nosso ver, os artigos que enunciam problemas de interesse geral e indicam também vários campos a explorar. Agrupamos aqui, além do de Lehmer, já mencionado, os artigos de P. Erdös (Some problems in number theory), que só poderemos classificar de excelente, o de R. K. Guy (Some unsolved problems) e finalmente outro artigo de P. Barrucand (Languages), que também classificaríamos como excelente se o encarássemos estritamente do ponto de vista do matemático, mas que a considerarmos também sob a óptica do informático, sinceramente não concordamos.

Efectivamente as críticas que Barrucand formula relativamente a certas linguagens de programação são válidas, mas o Autor aparentemente esqueceu o facto de haver muitas outras que poderão ser usadas com vantagem para a investigação de algoritmos e portanto para a pesquisa no campo da Teoria dos Números. Quanto aos problemas de certas imprecisões numéricas que dificultam o acesso ao computador relativamente a certos problemas, isso parece-nos ser uma barreira muito difícil ou mesmo impossível de ultrapassar...

Mas, em resumo: as aplicações dos computadores às Matemáticas Puras são uma feliz realidade e estes dois livros constituem um magnífico reportório de contribuições que nenhum matemático interessado em Álgebra, Teoria dos Números ou Ciência dos Computadores poderá ignorar.

J. Marques Henriques

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor — MASSON ET C.ie, Paris

J. Bass — *Cours de Mathématiques — Troisième Édition Revue et Corrigee.*
— *Exercices de Mathématiques.*
M. Bouix — *Les Fonctions Géneralisées ou Distributions.*
M. A. Tonnelet — *Les Vérifications Experimentales de la Relativite Générale.*
A. Hocquengem & P. Jaffard — *Mathématiques. Tome I. Éléments de calcul différential et intégral.*

Editor — LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD — Paris

Marcel Doligez — *Gravitation — Contribution à la théorie corpuscular de la gravitation.*
H. Laurent — *Théorie des Jeux de Hasard.*

Editor — DUNOD, Paris

Monographies Universitaires de Mathematiques

22. A. G. Kurosch — *Algèbre générale.*
23. I. M. Guelfand et N. Y. Vilenkin — *Les distributions.* Tome 4: *Applications de l'analyse harmonique.*
24. C. Fourgeaud et A. Fuchs — *Statistique.*
25. J. Garsoux — *Analyse mathématique.*
26. A. Guichardet — *Analyse harmonique commutative.*
27. G. Hochschild — *La structure des groupes de Lie.*
28. Mme Y. Choquet-Bruhat — *Geometrie différentielle et systèmes extérieures.*
29. Pham Mau Quan — *Introduction à la géometrie des variétés différentiables,*
30. R. Isaacs — *Jeux differentiels. Théorie des jeux appliqués aux domaines de la guerre, des poursuites, du contrôle et de l'optimisation.*
31. O. A. Ladyzenskaja et N. N. Oral'oeva — *Equations aux derivées partielles de type elliptique.*
32. J. Lévy-Bruhl — *Introduction aux structures algébriques.*

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 30 escudos

Assinatura relativa a 1972 (4 números) 100 escudos

Assinatura para o estrangeiro, 200 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 100, para o que basta indicar o nome, a morada e o local de cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

	Portugal	Estrangeiro
N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00	75$00
N.ºs 16 a 49, cada	12$50	25$00
N.ºs 50, 76-77	60$00	100$00
N.ºs 51 a 75, 78 a 99, 101 a 108 — número simples .	17$50	25$00
N.ºs 51 a 75, 78 a 99, 101 a 108 — » duplo . .	35$00	50$00
N.º 100	100$00	150$00
N.ºs 109-12, 113-16, 117-20 e 121-24	120$00	200$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 120$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Eq.º — LISBOA-2 — Telefone 369449

Composição e impressão — Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2