GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXXIII N.° 125-128 JANEIRO-DEZ. 1972

SUMÁRIO

DEPOSITARIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração – Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º – Tel. 369449 – Lisboa-2

REDACÇÃO

Redactores: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA—SETOR DE PUBLICAÇÕES

LISTA DE PUBLICAÇÕES À VENDA: 1973

«NOTAS E COMUNICAÇÕES DE MATEMÁTICA»

COLEÇÃO FUNDADA E DIRIGIDA POR RUY LUIS GOMES E JOSÉ MORGADO

AUTOR	TÍTULO	N.º	PREÇO	
			US $	CR $
MORGADO, J.	Extensão de alguns resultados de Ore sôbre homomorfismo de reticulados completos	1	0.50	3,25
GOMES, R. L.	Mesures vectorielles positives	2	0.75	4,87
MORGADO, J.	Um teorema sôbre congruências alfa completas de reticulados alfa completos	3	0.50	3,25
GOMES, R. L.	Un théorème sur les distributions vectorielles.	4	0.50	3,25
MORGADO, J.	Note on the system of closure operators of the ordinal product of partially ordered sets.	5	0.50	3,25
GOMES, R. L.	Un théorème sur les fontions intégrables par rapport à une mesure vectorielle positive	6	0.50	3,25
ENDLER, O.	Sôbre teoremas de existência na teoria das valorizações	7	0.75	4,87
MORGADO, J.	In the complete homomorphic images of the lattice of closure operators of a complete lattice of closure operators of a com-complete lattice	8	0.75	4,87
BAUER, K. W.	Sôbre una clase de funciones analíticas generalizadas	9	1.00	6,50
MARTINEAU, A.	Indicatrices fonctionnelles analytiques et transformée de LAPLACE	10	1.25	8,12
LAFON, J. P.	Théorème de préparation de Weirstrass et séries formelles algébriques	11	1.00	6,50
MORGADO, J.	On the lattices of residuated closure operators of complete lattices	12	0.50	3,25
MICALI, A.	Um theorema sôbre formas lineares	13	0.50	3,25
GOMES, R. L.	Démonstration d'une propriété fondamentale de la mesure de radon sur un espace complétement régulier sans l'introduction du compactifié de cech	14	0.75	4,87
MORGADO, J.	A theorem on extensions of commuting isotone mappings	15	0 50	3,25
DIEGO, A.	On certain classe of HEYTING algebras	16	1.00	6,50
MORGADO, J.	On the structure of generalized j-rings	17	0.75	4,87
PICCININI, R. A.	Stable cohomology operations	18	0.75	4,87

ANO XXXIII – N.os 125-128 GAZETA DE MATEMÁTICA JANEIRO/DEZ. – 1972

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.° - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA

NOTA DE AULA

Inteiros regulares módulo n

por José Morgado

Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

Introdução

Recordemos que um elemento a de um anel A se diz *regular* (segundo VON NEUMANN), se existe em A algum elemento x tal que $axa=a$.

Parece então natural dizer que um inteiro a é *regular módulo* n, se existe algum inteiro x para o qual é válida a congruência

$$(1) \qquad a^2 x \equiv a \pmod{n}.$$

Resulta imediatamente da definição que os múltiplos de n e os inteiros primos com n são regulares módulo n, qualquer que seja o inteiro n. Geralmente, porém, há outros inteiros regulares módulo n. Assim, por exemplo, para $n=12$, os inteiros regulares módulo n são aqueles que são congruentes com algum dos inteiros $0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11$.

O objectivo desta nota é precisamente estudar o conjunto dos inteiros regulares módulo n.

Em toda esta nota, n designará um inteiro maior que 0.

1. Condições de regularidade.

Se a e b são inteiros, representaremos por (a,b) o máximo divisor comum positivo de a e b.

TEOREMA 1. *É condição necessária e suficiente para que o inteiro* a *seja regular módulo* n, *que se tenha*

$$(\mathrm{a},\mathrm{n})=(\mathrm{a}^2,\mathrm{n}).$$

DEM. Com efeito, suponhamos que a é regular módulo n. Então, da solubilidade da congruência (1), resulta que $(a^2,n)\mid a$. Logo, tem-se $(a^2,n)\mid(a,n)$ e, como, por outro lado, $(a,n)\mid(a^2,n)$, resulta que $(a,n)=(a^2,n)$.

Inversamente, se $(a,n)=(a^2,n)$, então existem inteiros u e v tais que

$$(a,n)=a^2u+nv.$$

Designando por q o quociente de a por (a,n), tem-se

$$a=(a,n)q=a^2uq+nvq,$$

o que mostra que a congruência (1) tem, pelo menos, a solução $x \equiv u\,q \pmod{n}$.

Corolário. *Se* a *é regular módulo* n, *então tem-se* $(a^m, n) = (a, n)$, *qualquer que seja o inteiro* $m > 1$.

Diz-se que o inteiro positivo d é um *divisor unitário* de n (em símbolos, $d\,|^*\,n$), se d é um divisor de n que é primo com o divisor complementar, i. e., $d\,|\,n$ e

$$\left(d, \frac{n}{d}\right) = 1.$$

É claro que, se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, onde os p_i são primos distintos, então o número de divisores unitários de n é igual a 2^k, número de partes do conjunto $\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots \cdots, p_k^{\alpha_k}\}$.

É também imediato que, se n_1 e n_2 são inteiros primos entre si, $d_1\,|^*\,n_1$ e $d_2\,|^*\,n_2$, então $d_1 d_2\,|^*\,n_1 n_2$; inversamente, se $d\,|^*\,n_1 n_2$, com $(n_1, n_2) = 1$, então existem d_1 e d_2 tais que

$$d = d_1 d_2, \quad d_1\,|^*\,n_1 \quad \text{e} \quad d_2\,|^*\,n_2;$$

basta tomar $d_1 = (d, n_1)$ e $d_2 = (d, n_2)$.

O conceito de divisor unitário intervem na formulação do seguinte

Teorema 2. *É condição necessária e suficiente para que o inteiro* a *seja regular módulo* n, *que se tenha*

$$(a, n)\,|^*\,n.$$

Dem. Na verdade, suponhamos que a é regular módulo n. Pretendemos mostrar que

$$\left((a, n), \frac{n}{(a, n)}\right) = 1.$$

Imaginemos que se tinha

$$\left((a, n), \frac{n}{(a, n)}\right) = d > 1$$

e seja $p^k\,|^*\,d$. Então, de $p^k\,|\,(a, n)$ e $p^k \,\Big|\, \dfrac{n}{(a, n)}$, resultaria $p^{2k}\,|\,n$.

Por outro lado, de $p^k\,|\,a$, resultaria $p^{2k}\,|\,a^2$. Ter-se-ia, portanto,

$$p^{2k}\,|\,(a^2, n).$$

Mas, pelo teorema anterior, $(a^2, n) = (a, n)$ e, por consequência, $p^{2k}\,|\,n$ e $p^{2k}\,|\,a$ e, como $p^k \,\Big|\, \dfrac{n}{(a, n)}$, resultaria que $p^{3k}\,|\,n$.

De $p^{2k}\,|\,a$, resultaria $p^{4k}\,|\,a^2$, donde $p^{3k}\,|\,(a^2, n)$, i. e., $p^{3k}\,|\,(a, n)$ e, como $p^k \,\Big|\, \dfrac{n}{(a, n)}$, concluir-se-ia que $p^{4k}\,|\,n$.

Ter-se-ia então $p^{2k} \,\Big|\, \dfrac{n}{(a, n)}$ e $p^{2k}\,|\,(a, n)$, i. e., $p^{2k}\,|\,d$, o que contradiz a hipótese de ser p^k um divisor unitário de d.

Esta contradição mostra que $d = 1$, como se pretendia.

Inversamente, suponhamos que $(a, n)\,|^*\,n$. Se fosse $(a^2, n) \neq (a, n)$, como $(a, n)\,|\,|\,(a^2, n)$, ter-se-ia $(a^2, n) = (a, n)\,r$, onde $r > 1$. Designando por p um divisor primo de r, de $p\,|\,(a^2, n)$, resultaria $p\,|\,a^2$ e $p\,|\,n$, donde $p\,|\,a$ e $p\,|\,n$, donde $p^2\,|\,(a^2, n)$ e, como $(a^2, n)\,|\,n$, ter-se-ia também $p \,\Big|\, \dfrac{n}{(a, n)}$, visto que $r \,\Big|\, \dfrac{n}{(a, n)}$, contrariamente à hipótese de ser (a, n) um divisor unitário de n.

Logo, $(a^2, n) = (a, n)$ e, por consequência, a é regular módulo n.

Corolário 1. *É condição necessária e suficiente para que todo inteiro seja regular módulo* n, *que* n *seja livre de quadrados.*

DEM. Com efeito, se n é livre de quadrados, i. e., se $n=1$ ou $n=p_1 p_2 \cdots p_k$, onde os p_i são primos distintos, então todo divisor de n é evidentemente um divisor unitário de n, tendo-se, por consequência, $(a, n) \mid^* n$ para todo a, i. e., todo inteiro a é regular módulo n.

Inversamente, se $(a, n) \mid^* n$ para todo inteiro a, então necessariamente n é livre de quadrados, visto que, se para algum primo p se tivesse $p^2 \mid n$, então (p, n) não seria divisor unitário de n e, portanto, p não seria regular módulo n.

COROLÁRIO 2. *Se* $n > 1$, *é condição necessária e suficiente para que somente os inteiros primos com* n *e os múltiplos de* n *sejam regulares módulo* n, *que* n *tenha um único divisor primo.*

DEM. De facto, se n tivesse mais que um divisor primo, então n teria pelo menos um divisor unitário d diferente de 1 e diferente de n e d seria regular módulo n.

Se, pelo contrário, n tem um só divisor primo, os únicos divisores unitários de n são 1 e n e, portanto, os inteiros regulares módulo n são os primos com n e os múltiplos de n.

2. O semigrupo dos inteiros regulares módulo n.

Pode ter-se $a^2 x \equiv a \pmod{n}$, sem que x seja regular módulo n; assim, por exemplo, tem-se $8^2 \cdot 2 \equiv 8 \pmod{12}$ e, no entanto, 2 não é regular módulo 12, mas tem-se também $8^2 \cdot 8 \equiv 8 \pmod{12}$ e 8 é regular módulo 12.

TEOREMA 3. *Se o inteiro* a *é regular módulo* n, *então existe pelo menos uma solução* x *da congruência* $a^2 x \equiv a \pmod{n}$ *que também é regular módulo* n.

DEM. Seja y um inteiro tal que $a^2 y \equiv a \pmod{n}$. Então, como

$$a^2 \cdot a y^2 = a \cdot a^2 y \cdot y \equiv a^2 y \equiv a \pmod{n},$$

vê-se que $a y^2$ é uma solução daquela congruência. Além disso, tem-se

$$(a y^2)^2 \cdot a = a^2 y \cdot y^3 a \equiv a^2 y^3 =$$

$$= a^2 y \cdot y^2 \equiv a y^2 \pmod{n},$$

o que mostra que $a y^2$ é regular módulo n, como se pretendia.

Designemos por $R(n)$ o conjunto dos inteiros regulares módulo n, compreendidos no intervalo fechado $[0, n-1]$. É imediato que tal conjunto constitui um semigrupo com respeito ao produto módulo n. A este semigrupo chamaremos *semigrupo dos inteiros regulares módulo* n.

É claro que todo inteiro regular módulo n é congruente com um e um só elemento de $R(n)$.

Assim, pelo Teorema 3, a equação $a^2 x = a$ onde $a \in R(n)$, tem pelo menos uma solução no semigrupo $R(n)$. Na realidade, o número de soluções em $R(n)$ é precisamente igual a $(a^2, n) = (a, n)$, visto que, se x é uma solução da congruência $a^2 x \equiv a \pmod{n}$, então o conjunto das soluções módulo n é

$$\left\{ x, x + \frac{n}{(a,d)}, x + \frac{2n}{(a,d)}, \cdots, \right.$$

$$\left. x + \frac{((a,d)-1)n}{(a,d)} \right\}$$

e dois quaisquer destes inteiros são incongruentes módulo n.

TEOREMA 4. *Para todo* $a \in R(n)$, *o subsemigrupo gerado por* a *é um grupo.*

DEM. Com efeito, como o subsemigrupo gerado por a é finito, existem inteiros positivos u e $v \neq u$ tais que $a^u = a^v$.

Vamos provar que existe um inteiro $r>1$ tal que $a^r = a$.

Seja s o menor inteiro positivo para o qual existe algum inteiro $r > s$ tal que $a^r = a^s$. Seja $d = (a, n)$, i. e., $a = a_1 d$ e $n = n_1 d$, com $(a_1, n_1) = 1$.

Então, no anel Z dos inteiros, tem-se

$$(2) \qquad a_1^r d^s - a_1^s d^r = k n$$

para algum inteiro k.

Trata-se de provar que $s = 1$.

Na verdade, se fosse $s > 1$, de (2) resultaria

$$a_1^r d^{r-1} - a_1^s d^{s-1} = k n_1,$$

donde se concluiria que $a_1 d \mid k n_1$. Mas, como $d \mid^* n$, ter-se-ia $(a_1 d, n) = 1$ e, por consequência, $k = k_1 a_1 d$ para algum inteiro k_1.

Daqui resultaria

$$a_1^{r-1} d^{r-1} - a_1^{s-1} d^{s-1} = k_1 a_1 d n_1 = k_1 a_1 n$$

no anel Z, donde

$$a^{r-1} = a^{s-1} \text{ em } R(n),$$

contràriamente à hipótese feita sobre s. Logo $s = 1$.

Designando por r precisamente o menor inteiro maior que 1 para o qual se tem $a^r = a$, então é imediato que, para todo inteiro m, a^m é igual, em $R(n)$, a um dos elementos

$$a, a^2, a^3, \cdots, a^{r-1}$$

e que estes elementos são todos distintos. É também imediato que o conjunto destes elementos constitui um grupo (isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros módulo $r-1$), sendo a^{r-1} o elemento neutro e sendo o inverso de a^i, $1 \leq i < r-1$, o elemento a^{r-1-i}, no caso de ser $r > 2$; para $r = 2$, o grupo contém sòmente o elemento a.

3. Uma função aritmética multiplicativa

Seja $\rho(n)$ o número de elementos do semigrupo $R(n)$.

Para cada divisor unitário d de n, seja E_d o subconjunto de $R(n)$ constituído pelos elementos a tais que $(a, n) = d$. Tem-se evidentemente

$$R(n) = \bigcup_{d \mid^* n} E_d \quad \text{e} \quad E_d \cap E_{d'} = \phi, \text{ se } d \neq d'.$$

Ora $(a, n) = d$, se e só se a é da forma kd, onde $1 \leq k \leq \frac{n}{d}$ e $\left(k, \frac{n}{d}\right) = 1$.

Isto significa que o número de elementos em E_d é igual a $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$, onde φ designa o indicador de Euler.

Tem-se, portanto,

$$(3) \qquad \rho(n) = \sum_{d \mid^* n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \mid^* n} \varphi(d).$$

Vejamos agora que ρ é uma função multiplicativa, i. e., se $(m,n)=1$, então $\rho(mn) = \rho(m)\rho(n)$.

De (3) resulta que

$$\rho(m)\rho(n) = \Big(\sum_{d \mid^* m} \varphi(d)\Big)\Big(\sum_{d' \mid^* n} \varphi(d')\Big) = \sum_{\substack{d \mid^* m \\ d' \mid^* n}} \varphi(d)\,\varphi(d').$$

Mas φ é uma função multiplicativa e, como $(d, d') = 1$, tem-se

$$\rho(m)\rho(n) = \sum_{\substack{d \mid^* m \\ d' \mid^* n}} \varphi(d d').$$

Por outro lado, todo divisor unitário de mn se escreve univocamente como produto de um divisor unitário de m por um divisor unitário de n e, por consequência, tem-se

$$\rho(mn) = \sum_{D|^* mn} \varphi(D) = \sum_{dd'|^* mn} \varphi(dd') = \sum_{\substack{d|^* m \\ d'|^* n}} \varphi(dd'),$$

como pretendíamos.

Ficou assim provado o seguinte

TEOREMA 5. *Se* $\rho(\mathrm{n})$ *designa o número de inteiros não negativos menores que* n *e regulares módulo* n, *então* ρ *é uma função multiplicativa e tem-se*

$$\rho(\mathrm{n}) = \sum_{\mathrm{d}|^* \mathrm{n}} \varphi(\mathrm{d}).$$

COROLÁRIO. *Se* $\mathrm{n} = \mathrm{p}_1^{\alpha_1} \mathrm{p}_2^{\alpha_2} \cdots \mathrm{p}_k^{\alpha_k}$, *onde os* p_i *são primos distintos, então*

$$\rho(\mathrm{n}) = (1 + \mathrm{p}_1^{\alpha_1} - \mathrm{p}_1^{\alpha_1 - 1})(1 + \mathrm{p}_2^{\alpha_2} - \mathrm{p}_2^{\alpha_2 - 1}) \cdots \cdots (1 + \mathrm{p}_k^{\alpha_k} - \mathrm{p}_k^{\alpha_k - 1}).$$

Com efeito, como ρ é multiplicativa, tem-se $\rho(n) = \rho(p_1^{\alpha_1}) \cdots \rho(p_k^{\alpha_k})$ e, além disso,

$$\rho(p_i^{\alpha_i}) = \sum_{d|^* p_i^{\alpha_i}} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(p_i^{\alpha_i}) = 1 + p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}.$$

Recordemos que, se f e F são duas funções aritméticas tais que

$$F(n) = \sum_{d|^* n} f(d),$$

então tem-se (ver [4])

$$f(n) = \sum_{d|^* n} \mu^*(d) F\left(\frac{n}{d}\right),$$

onde a função μ^* (análogo unitário da função μ de MÖBIUS), é definida por $\mu^*(n) = (-1)^{\omega(n)}$, sendo $\omega(n)$ o número de primos distintos que dividem n.

Assim, do teorema anterior, resulta

$$\varphi(n) = \sum_{d|^* n} \mu^*(d) \rho\left(\frac{n}{d}\right).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The Algebraic Theory of Semigroups*, vol. I, Mathematical Surveys, number 7, Providence, 1961.

[2] N. H. MCCOY, *The Theory of Numbers*, The Macmillan Company, New York, 1965.

[3] R. H. BRUCK, *A Survey of Binary Systems*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin, 1958.

[4] E. COHEN, *Arithmetical functions associated with unitary divisors of an integer*, Math. Zeitschr., **74** (1960), pp. 66-80.

Coerência subjectivista e teoria ortodoxa das probabilidades

Notas sobre matéria exposta no Seminário de Estatística do Centro de Matemática Aplicada da Faculdade de Ciências de Lisboa, em 71/72 e 72/73

por A. R. Simões Neto

Introdução

Em uma série de lições proferidas em 1935, no Instituto Henri Poincaré, em Paris, formulou BRUNO DE FINETTI, luminar da escola subjectivista de probabilidades, e independentemente de RAMSEY, outro subjectivista de qualidade, uma condição, a que chamou de «coerência», para a probabilização de espaços de acontecimentos. Trata-se de uma condição muito simples, que, no fundo, permite matematizar o «grau de crença racional que se deposita em uma proposição» a que KEYNES reduzia a probabilidade, e da qual se podem deduzir as proposições básicas da teoria ortodoxa das probabilidades.

O texto dessas lições encontra se no vol. VII (1937) dos Annales de l'Institut Henri Poincaré, e existe dele versão inglesa, integrada, com o título «Foresight: its logical laws, its subjective sources», na valiosa antologia «Studies in Subjective Probability», de KYBURG e STOKER (J. Wiley, Londres, 1964); é peça de valor no «corpus» da literatura probabilística, e o seu conhecimento parece-me quase indispensável a quem pretenda alguma familiaridade com a filosofia subjectivista.

Seguiremos, no essencial, o trabalho de DE FINETTY, dando de algumas proposições demonstrações que apenas estão, nele, sugeridas e, de outras, demonstrações mais simples; mas postularemos, antes, a existência de um «demónio», da estirpe do de MAXWELL, que baptisámos, em honra de mestre BRUNO, de «demónio de DE FINETTI». Se se aceita que é esse demónio quem preside à atribuição de probabilidades, esbatem-se alguns dos problemas suscitados pela intromissão do conceito de «dinheiro» nessa atribuição.

Embora se parta de um conceito subjectivista, e se acompanhe a marcha de um subjectivista, não se toma, na construção seguinte, partido filosófico; trata-se, apenas, de um exercício lógico e metodológico, e fica entendido que nos referiremos sempre a espaços *finitos* de acontecimentos.

Construção

Logo na segunda página do primeiro capítulo, diz DE FINETTI:

«On peut, cependant, donner aussi une définition quantitative, numérique, directe du degré de probabilité attribué par un individu donné à un élénement déterminé, de telle façon que toute la théorie des probabilités puisse se déduire immédiatement d'un condition très naturelle, ayant une signification évidente.

Il s'agit simplement de préciser mathématiquement l'idée banale et évidente que le degré de probabilité attribué par un individu à un évenement est révélé par les conditions dans lesquelles il serait disposé de parier sur cet évenement. Le procédé axiomatique dont nous venons d'indiquer plus haut les lignes générales (1) présente l'avantage de permettre une analyse plus poussée et plus détaillée des concepts fondamentaux, de partir uniquement de notions qualitatives, d'éliminer la notion de *monnaie,* étrangère à la question mais qui est nécéssaire pour parler de paris; cependant, une fois démontré que l'on peut écarter la défiance que fait naître le caractère, un peu trop concret et peut-être artificiel de la définition fondée sur les paris, le second procédé s'avère préférable, surtout pour sa clarté».

Um dos objectivos da criação do nosso demónio (que em breve descreveremos) é justamente ajudar a vencer esta, natural em humanos de certa cultura ética, *desconfiança:* as atribuições de probabilidades vão ser sempre feitas por esse demónio segundo um esquema de apostas, mas ele tem pelo dinheiro uma demoníaca, ou divina, indiferença.

Tomemos uma variante da definição de probabilidade proposta por DE FINETTI (aquela a que ele se refere no início da longa citação precedente): a probabilidade que um certo indivíduo X atribui a um certo acontecimento A, a representar por $P_X(A)$, é o quociente E/S, da máxima quantia E (positiva ou negativa, positiva se for entrada paga, negativa se for entrada recebida) que esse indivíduo está disposto a arriscar para se habilitar a receber a quantia-prémio S (também positiva ou negativa, consoante seja prémio a receber ou a pagar) no caso de ocorrer o acontecimento A. As quantias E e S têm, òbviamente, para cada jogador o mesmo sinal. Dado que as probabilidades vão ser sempre atribuidas pelo demónio de DE FINETTI, dispensa-se a menção de quem as faz, pelo que se escreverá $P(A)$ em vez de $P_X(A)$; como as atribuições são feitas segundo este mecanismo de apostas, e como o imaginário dinheiro que o demónio, no seu imaginário inferno, manipula é *real,* no sentido da matemática, pode já deduzir-se, da definição de probabilidade como quociente de duas quantias do mesmo sinal, que uma probabilidade é um número real não negativo (o que recupera o 1.º axioma de KOLMOGOROV).

A introdução do factor «dinheiro» em questões de probabilidade tem vários inconvenientes, além do apontado por DE FINETTI no fragmento citado — interferência de considerações de «esperança moral» sobre considerações de esperança matemática, insuficiente motivação para uma correcta, se de tal coisa se pode falar, avaliação de probabilidades, no caso de as somas envolvidas serem irrisórias (como bem mostra SAVAGE, em «The Foundations of Statistics», J. Wiley, Londres, 1954), etc. De alguns desses inconvenientes já o grande BERNOULLI se dera conta, e como também aqui talvez o nosso demónio possa dar uma ajuda, é altura de esboçar o seu retrato.

É o verdadeiro demónio do jogo; joga sobre tudo, tudo lhe serve de pretexto para apostar; é razoàvelmente esquizofrénico, com uma personalidade de jogador (no sentido de *ponto*), e outra de banqueiro; não joga senão a dinheiro, embora o dinheiro nada lhe interesse, já porque dele para nada precisa, já porque, como contra si próprio joga, o saldo financeiro é sempre nulo — deste modo, é imune às considerações de «esperança moral» e a tudo o que ande ligado ao vulto das quantias em jogo. Mas a sua esquizofrenia não é total, as suas duas personalidades não se ignoram completamente, pelo que as avaliações que faz como jogador coincidem com as que faz como ponto. Além disso, e esta peculiaridade é essencial, gosta de ganhar, mas detesta perder, e não é masoquista. Dissemos que esta característica é fundamental porque dela resulta (e isso interessa-nos especialmente) que todas as atribuições de probabi-

(1) Trata-se de uma axiomática puramente qualitativa, baseada na simples comparação de probabilidade, com que DE FINETTI abre o seu estudo.

lidade feitas pelo nosso demónio satisfazem a condição de coerência de DE FINETTI, condição que passamos a formular.

Diz-se que um sistema de apostas feitas sobre um determinado sistema de acontecimentos é *coerente*, e portanto que é coerente a correspondente atribuição de probabilidades a esses acontecimentos, se *não for certo* que o jogador que faz essas apostas tenha prejuizo. Note-se que um sistema de apostas que *garanta* lucro (positivo) ao apostador, também não é coerente, porque se para ele é certo o lucro então para o banqueiro é certo o prejuizo. Será, portanto, coerente, uma atribuição de probabilidades aos acontecimentos de um determinado sistema, logo que, num jogo baseado nessas probabilidades e nesses acontecimentos, exista pelo menos um desfecho que não implique prejuizo, e pelo menos um desfecho que não implique lucro, para o apostador.

Resumindo e fixando notação

Dados n acontecimentos A_i, $i=1,2,\cdots,n$, e estando associado à ocorrência do acontecimento A_i o prémio S_i, um jogador que avalie em p_i a probabilidade de A_i habilita-se a S_i com a entrada $p_i \cdot S_i$. A quantia que globalmente investe é, evidentemente, $T=\sum_{i=1}^{n} p_i S_i$. Como os acontecimentos não são necessàriamente incompatíveis 2 a 2, seja S_i' o valor dos prémios acumulados no caso de ocorrência de A_i.

O sistema dos p_i será *coerente*, no sentido de DE FINETTI, se e só se

$$\exists_j,\ \exists_k:\ S_j'-T\geqq 0,\qquad S_k'-T\leqq 0.$$

Repare-se que, no caso de acontecimentos incompatíveis 2 a 2, é $\forall_i$, $S_i'=S_i$, e a condição de coerência equivale à conhecida propriedade do valor médio

$$\text{mín}\, S_j-\Sigma p_i S_i\leqq 0\leqq \text{máx}\, S_j-\Sigma p_j S_i .$$

Da obediência à seguinte *postura:* «A partir desta data só são autorizadas avaliações de probabilidade quando realizadas pelo demónio de DE FINETTI», ou seja, da aceitação como axioma da seguinte proposição: «A probabilização de um espaço de acontecimentos é feita segundo um esquema de apostas, e válida se, e só se, for coerente, sendo esse esquema e essa coerência os atrás descritos», decorrem os axiomas de KOLMOGOROV e o teorema das probabilidades compostas — toda a teoria ortodoxa, portanto.

Desenvolvamos, então, um pouco, esta «axiomática de um axioma só».

Construção

TEOREMA 1. *Uma probabilidade é um núreal não negativo.*

Ficou demonstrado atrás.

TEOREMA 2. *Se* Ω *é um acontecimento certo, então* $P(\Omega)=1$.

DEM. Se tem como certo o acontecimento A, tem de se investir nele a soma S para receber a soma S, se se quiser ser coerente; se se aposta mais que S é certo o prejuizo, se se aposta menos que S é certo o lucro, e em qualquer dos casos a aposta não é coerente.

TEOREMA 3. *Se* ϕ *é impossível, então* $P(\phi)=0$.

Demónio coerente não investe senão quantias nulas em acontecimentos que considera impossíveis, e o domínio de DE FINETTI é sempre coerente.

TEOREMA 4: $P(A^c) = 1 - P(A)$, *em que* A^c *designa o acontecimento complementar de* A.

DEM. Suponhamos (e com isso não se perde generalidade), que os prémios são de 1 unidade, tanto se ocorrer, como se não ocorrer, o acontecimento A, e que se faz a atribuição de probabilidades $P(A) = p$ e $P(A^c) = q$. Esta atribuição só é coerente se for $p + q = 1$. Com efeito, seja o que for que aconteça, A ou A^c, o demónio recebe a quantia 1, tendo pago, para a receber, a quantia $p + q$; em qualquer dos casos o saldo é $L = 1 - (p + q)$. Como o saldo é único, tem de ser nulo para a atribuição ser coerente.

Se o prémio por A for S e o prémio por A^c for S'. então as quantias a investir são, respectivamente $p \cdot S$ e $q \cdot S'$.

No caso de ocorrer A, o saldo é

$$L = S - (p S + q S');$$

no caso de não ocorrer A, o saldo é

$$L' = S' (p S + q S').$$

O sistema de equações, em S e S',

$$\left| \begin{array}{l} S - (p S + q S') = L \\ S' - (p S + q S') = L' \end{array} \right.$$

terá de ser impossível para a atribuição da probabilidade ser coerente, porque se assim não fosse podíamos arbitrar L e L' ambos positivos, ou ambos negativos (o que representaria atribuição não-coerente) e resolver para S e S'.

O determinante do sistema,

$$\Delta = \begin{bmatrix} (1-p) & -q \\ -p & (1-q) \end{bmatrix},$$

terá de ser nulo

$$\Delta = 1 - (p + q) = 0 \Rightarrow p + q = 1,$$

ou seja

$$P(A) = 1 - P(A^c), \text{ c. q. d.}$$

É claro que este resultado é corolário imediato do próximo Teorema 5; fez-se a demonstração agora como exercício de aplicação directa da condição de coerência.

TEOREMA 5. *Dado um sistema completo de acontecimentos* A_i, *de probabilidades* p_i, $\Sigma p_i = 1$ *é condição necessária e suficiente de coerência.*

DEM. Diz-se completo um sistema de acontecimentos incompatíveis dois a dois, e dos quais um (e portanto só um) se realiza com certeza. Continuemos a supor, por comodidade, que o prémio pela realização de qualquer dos acontecimentos é igual a 1, isto é $\forall i, S_i = 1$. A quantia globalmente investida é igual a Σp_i, e, dado que o sistema é completo, é certo que o apostador recebe a quantia 1, pelo que o saldo final é necessàriamente igual a $1 - \Sigma p_i$. Como só há um saldo possível, a condição de coerência impõe que ele seja nulo, e portanto que $\Sigma p_i = 1$, como queríamos provar.

Que a condição é suficiente, é imediato, se se supuser $S_i = 1, \forall i$. Com efeito, $\Sigma p_i = 1 \Rightarrow 1 - \Sigma p_i = 0$, e como $1 - \Sigma p_i$ é o único saldo possível, a aposta é coerente.

Não se pense que a hipótese da igualdade de todos os prémios tira generalidade ao resultado; no caso de prémios S_i quaisquer, que a condição é suficiente pode demonstrar-se por exemplo como segue: em cada A_i, o jogador inverte a quantia $p_i S_i$, desembolsando um total $T = \Sigma p_i S_i$. Se ocorrer A_j, o saldo será

$$L_j = S_j - \sum_i p_i S_i = S_j - T.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade $L_j = S_j - T$ por p_j, e somando em j, vem

$$\sum_{j=1}^{n} p_j L_j = \sum_{j=1}^{n} p_j S_j - \sum_{j=1}^{n} p_j T;$$

mas $\sum_j p_j S_j = T$ e $\sum_j p_j = 1$; logo

$$\sum_{j=1}^{n} p_j L_j - T = 0;$$

e como $p_j \geq 0$, os L_j não podem ter todos o mesmo sinal, e a aposta é coerente.

TEOREMA 6. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) : P(A) + P(B)$ *isto é, se dois acontecimentos são incompatíveis, a probabilidade de que se realize um deles é igual à soma das respectivas probabilidades.*

Esta proposição é consequência imediata dos teoremas 4 e 5. Basta notar que o terno de acontecimentos A, B e $(A U B)^c$ constitue um sistema completo.

Ficam com este teorema recuperados os três axiomas das probabilidades de KOLMOGOROV (claro que temos vindo a mencionar a axiomática de KOLMOGOROV como paradigma); mostremos agora como pode surgir, no quadro do jogo, o conceito e a formulação matemática de probabilidade condicional, e, portanto o teorema das probabilidades compostas, ou regra da multiplicação. Para isso, o nosso demónio vai cumprir, com quase total escrúpulo, um jogo proposto por DE FINETTI.

Considerem-se dois acontecimentos, A e B, de determinado espaço, e vejamos como avaliar a probabilidade de A se soubermos que prèviamente aconteceu B, ou seja como definir $P(A/B)$. Regulamentemos, sobre os acontecimentos A e B, a primeira parte do jogo, como segue:

— joga-se primeiro para B; se ocorrer B, joga-se para A, ficando assim definido um acontecimento, a designar por (A/B). Desse acontecimento (A/B) dependerá a recepção de um prémio S_1 mediante o investimento da entrada $p_1 \cdot S_1$, o que significa que se atribui ao acontecimento (A/B) a probabilidade p_1;

— se acontecer B mas depois não acontecer A, a entrada $p_1 \cdot S_1$ perde-se;

— se não acontecer B, o jogo anula-se e a entrada retorna ao apostador.

Compliquemos o jogo, completando-o, com mais as seguintes apostas:

— aposta-se no acontecimento $(A \cap B)$ a quantia $p_2 \cdot S_2$, o que significa que nos habilitamos ao prémio S_2 no caso de ocorrência de $(A \cap B)$ e que atribuimos a este acontecimento a probabilidade p_2;

— aposta-se no acontecimento B a quantia $p_3 \cdot S_3$, o que significa que lhe atribuimos a prob. p_3 e que o prémio em causa é S_3.

O esquema final das apostas do demónio é, portanto, o seguinte:

Acontecimentos	B	$A \cap B$	A/B
Prob. atribuídas	p_3	p_2	p_1
Prémios	S_3	S_2	S_1
Entradas	$p_3 \cdot S_3$	$p_2 \cdot S_2$	$p_1 \cdot S_1$
Investimento global	$p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3$		

«Les jeux étant faits», verifica-se necessàriamente uma das três coisas seguintes:

I) não acontece B;

II) acontece B, mas não acontece, depois, A;

III) acontece B e acontece, depois, A.

No caso I), o balanço é

$$L_I = -p_2 S_2 - p_3 S_3;$$

o jogador perde o que apostou em B e em $(A \cap B)$, mas é-lhe devolvido, nos termos da primeira parte do contrato, o que apostou em (A/B);

No caso II), $B \cap A^c$, o balanço será

$$L_{II} = S_3 - (p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3).$$

No caso III), ganham-se as três apostas, pelo que o balanço será

$$L_{III} = S_1 + S_2 + S_3 - (p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3).$$

Consideremos o seguinte sistema de equações lineares em S_1, S_2 e S_3

$$\left| \begin{array}{l} - p_2 S_2 - p_3 S_3 = L_I \\ S_3 - (p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3) = L_{II} \\ S_1 + S_2 + S_3 - (p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3) = L_{III} . \end{array} \right.$$

A condição de coerência impõe que este sistema seja impossível, porque se fosse possível, podíamos escolher arbitràriamente L_I, L_{II} e L_{III} e encontrar os S_i correspondentes. Logo que os L arbitrados fossem todos positivos, ou todos negativos, estaria violada a condição de coerência. O sistema só é impossível se for nulo o seu determinante, o qual tem, como é fácil verificar, o valor

$$\Delta = p_1 p_3 - p_2 .$$

Como a condição de coerência impõe $\Delta = 0$, vem

$$p_2 = p_1 p_3$$

ou seja

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B).$$

Esta é, à parte pormenores a demonstração de DE FINETTI.

Conclusão

Com o último resultado demonstrado, conclue-se que os princípios básicos do cálculo com probabilidades estão contidos na condição de coerência, sempre respeitada pelo demónio que atribue essas probabilidades (ou, se quisermos ver as coisas do outro lado, que esse demónio só pode ser coerente se respeitar os princípios básicos), e chega-se à fronteira dos problemas de independência e teorema de BAYES. Mas essa é fronteira vigiada por outras alfândegas(1)...

---

(1) Ver o ensaio com que SAVAGE abre o voluminho «The Foundations of Statistical Inference — A Discussion», que comporta na lombada apenas a menção «Statistical Inference — L. J. SAVAGE», publicado por Methuen & Cia, Londres, em 1962.

Some results involving G-function of two variables

by S. D. Bajpai
Department of Mathematics, Regional Engineering Cóllege, Kurukshetra, (Haryana), India

1. Introduction. In this paper we have evaluated six integrals involving G-function of two variables and LAGUERRE and HERMITE polynomials respectively. Further we have employed these integrals to establish six expansion formulae for the G-function of two variables involving LAGUERRE and HERMITE polynomials respectively. Some expansions for KAMPÉ DE FÉRIET function of two variables and MEIJER's G-function have been obtained as particular cases.

The G-function of two variables recently given by AGARWAL [1] and SHARMA [8] is a generalization of KAMPÈ DE FÉRIET's generalized hypergeometric function of two variables [2]. MEIJER's G-function, MAC-ROBERT's E-function, product of two G-functions and most of the known functions of two variables such as APPELL's functions F_1, F_2, F_3, F_4, the WHITTAKER functions of two variables and many higher transcendental functions [6, p. 215-222] may be obtained as particular cases of the G-function of two variables. Therefore, the results established in this paper are of very general character.

The modified G-function of two variables will be represented and defined as follows:

$$(1.1)\qquad G^{(m_1,m_2);\,(n_1,n_2),\,n_3}_{(p_1,p_2),\,p_3;\,(q_1,q_2),\,q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & (a_{p_1};\ c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ y & (b_{q_1};\ d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+s)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-t)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-s)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+t)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-t)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+s+t)\,x^s\,y^t}{\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-s-t)\prod_{j=1}^{q_3}(1-f_j+s+t)}\,ds\,dt\,.$$

The contour L_1 is in the s-plane and runs from $-i\infty$ to $+i\infty$ with loops, if necessary to ensure that the poles of $\Gamma(b_j-s)$ $(j=1,2,\cdots,m_1)$ lie on the right and the poles of $\Gamma(1-a_j+s)$ $(j=1,2,\cdots,n_1)$ and $\Gamma(1-e_j+s+t)$ $(j=1,2,\cdots,n_3)$ to the left of the contour. Similarly the contour L_2 is in the t-plane and runs from $-i\infty$ to $+i\infty$ with loops, if necessary to ensure that the poles of $\Gamma(d_j-t)$ $(j=1,2,\cdots,m_2)$ lie to the right and the poles of $\Gamma(1-c_j+t)$ $(j=1,2,\cdots,n_2)$ and $\Gamma(1-e_j+s+t)$ $(j=1,2,\cdots,n_3)$ to the left of the contour.

Provided that $0 \leq m_1 \leq q_1$, $0 \leq m_2 \leq q_2$, $0 \leq n_1 \leq p_1$, $0 \leq n_2 \leq p_2$, $0 \leq n_3 \leq p_3$; the integral converges if

$$(p_3 + q_1 + q_3 + p_1) < 2(n_1 + m_1 + n_3),$$

$$(p_3 + q_2 + q_3 + p_2) < 2(m_2 + n_2 + n_3),$$

$$|\arg x| < \left[m_1 + n_1 + n_3 - \frac{1}{2}(p_3 + q_1 + q_3 + p_1)\right]\pi,$$

$$|\arg y| < \left[m_2 + n_2 + n_3 - \frac{1}{2}(p_3 + q_2 + q_3 + p_2)\right]\pi.$$

Now we discuss some important properties and particular cases of the G-function of two variables, which are apparent from the definition of the G-function of two variables.

The G-function of two variables is symmetric in parameters $a_1, \cdots, a_{n_1}$ likewise in $a_{n_1+1}, \cdots, a_{p_1}$; in $c_1, \cdots, c_{n_2}$ and $c_{n_2+1}, \cdots, c_{p_2}$; in $b_1, \cdots, b_{m_1}$ and $b_{m_1+1}, \cdots, b_{q_1}$; in $d_1, \cdots, d_{m_2}$ and $d_{m_2+1}, \cdots, d_{q_2}$ and in $e_1, \cdots, e_{m_3}$ and $e_{n_3+1}, \cdots, e_{p_3}$.

If one of the $a_j \, (j = 1, \cdots, n_1)$ is equal to one of the $b_j \, (j = m_1 + 1, \cdots, q_1)$ or one of the $b_j \, (j = 1, \cdots, m_1)$ equals one of the $a_j \, (j = n_1 + 1, \cdots, p_1)$ then each of p_1, q_1 and n_1 (and m_1) decreases by unity. This is similarly true in case of parameters $d_j s$ and $c_j s$.

Obvious changes in the variables in the integral (1. 1) give

$$(1.\,2) \qquad x^{\rho} y^{\sigma} G^{(m_1, m_2);\, (n_1, n_2);\, n_3}_{(p_1, p_2), p_3;\, (q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|c} x & (a_{p_1}; c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ y & (b_{q_1}; d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array}\right] = G^{(m_1, m_2);\, (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3;\, (q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|c} x & (a_{p_1} + \rho; c_{p_2} + \sigma) \\ & e_{p_3} + \rho + \sigma \\ y & (b_{q_1} + \rho; d_{q_2} + \sigma) \\ & f_{q_3} + \rho + \sigma \end{array}\right].$$

$$(1.\,2) \qquad G^{(m_1, m_2);\, (n_1, n_2), 0}_{(p_1, p_2), p_3;\, (q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|c} x^{-1} & (a_{p_1}; c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ y^{-1} & (b_{q_1}; d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array}\right] = G^{(n_1, n_2), 0;\, (m_1, m_2)}_{(q_1, q_2), q_3;\, (p_1, p_2), p_3} \left[\begin{array}{c|c} x & (1 - b_{q_1}; 1 - d_{q_2}) \\ & 1 - f_{q_3} \\ y & (1 - a_{p_1}; 1 - c_{p_2}) \\ & 1 - e_{p_3} \end{array}\right].$$

Adjusting the parameters of (1. 1) as given below, we obtain the following relation between the G-function of two variables and KAMPÉ de FÉRIET function of two variables:

$$(1.\,3) \qquad G^{(1,1);\, (m, m), l}_{(m, m);\, (p+1, p+1), n} \left[\begin{array}{c|c} -x & (1 - b_m; 1 - c_m) \\ & 1 - a_l \\ -y & (0, 1 - e_p; 0, 1 - f_p) \\ & 1 - d_n \end{array}\right]$$

$$= \frac{\prod\limits_{j=1}^{l} \Gamma(a_j) \prod\limits_{j=1}^{m} [\Gamma(b_j)\Gamma(c_j)]}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(d_j) \prod\limits_{j=1}^{p} [\Gamma(e_j)\Gamma(f_j)]} F \left[\begin{array}{c|c|c} l & a_1, \cdots, a_l & \\ m & b_1, c_1, \cdots, b_m, c_m & x \\ n & d_1, \cdots, d_n & y \\ p & e_1, f_1, \cdots, e_p, f_p & \end{array}\right].$$

For sake of brevity KAMPÉ de FÉRIET function may be denoted by

$$F^{l,m}_{n,p}\left[\begin{matrix}(a)_l\,;\,(b\,,c)_m\,;\,x\,,y\\(d)_n\,;\,(e\,,f)_p\end{matrix}\right].$$

Using the definition of MEIJER'S G-function [6, p. 207, (1)], we find that the G-function of two variables can be represented by a single contour integral, viz.

$$(1.\,4)\qquad G^{(m_1,m_2);\,(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;\,(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{matrix}x\\ \\ y\\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_{p_1};c_{p_2})\\ e_{p_3}\\ (b_{q_1};d_{q_2})\\ f_{q_3}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-s)\prod\limits_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod\limits_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+s)\prod\limits_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-s)}\,.$$

$$G^{m_2,\,n_2+n_3}_{p_2+p_3,\,q_2+q_3}\left[y\left|\begin{matrix}c_1\,,\cdots,c_{n_2}\,,e_1-s\,,\cdots,e_{p_3}-s\,,c_{n_2+1}\,,\cdots,c_{p_2}\\ d_1\,,\cdots,d\,q_2\,,f_1-s\,,\cdots,f_{q_3}-s\end{matrix}\right.\right]x^s\,ds\,.$$

In (1. 4), putting $m_2=q_2=1\,,\ d_1=0\,,\ n_2=n_3=p_2=p_3=0\,,$ and $q_3=0$ and using the formula $G^{1,0}_{0,1}(z\,|\,0)=e^{-z}$, we have

$$(1.\,5)\qquad G^{(m_1,1);\,(n_1,0),0}_{(p_1,0),0;\,(q_1,1),0}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_{p_1}\,,-)\\(b_{q_1}\,,0)\end{matrix}\right.\right]=e^{-y}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-s)\prod\limits_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+s)\,x^s}{\prod\limits_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+s)\prod\limits_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-s)}\,ds$$

$$=e^{-y}\,G^{m_1,n_1}_{p_1,q_1}\left[x\left|\begin{matrix}a_{p_1}\\b_{q_1}\end{matrix}\right.\right].$$

In (1. 5), taking $y=0$, it reduces to MEIJER'S G-function [6, p. 207, (1)] which is a generalization of many higher trascendental functions [6, pp. 215-222].

The following formulae are required in the proof

$$(1.\,6)\qquad \int_0^\infty x^{\beta-1}\,e^{-x}\,L_n^\alpha(x)\,dx=\frac{(-1)^n\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{n\,!\,\Gamma(\beta-\alpha-n)}\qquad \operatorname{Re}\beta>0\,,$$

which follows from [5, p. 292, (1)]

$$(1.\,7)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}x^{2p}\,e^{-x^2}H_\nu(x)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\;2^{\nu-2p}\,\Gamma(2p+1)}{\Gamma(p-\nu/2+1)}\,,\qquad p=0\,,1\,,2\,,\cdots,$$

which follows from [3, p. 1, (1. 2)].

In what follows δ is a positive integer and the symbol $\Delta(\delta\,,\alpha)$ represents the set of parameters $\alpha/\delta\,,\ (\alpha+1)/\delta\,,\cdots,\ (\alpha+\delta-1)/\delta\,.$

2. The integrals. The integrals to be evaluated are

$$(2.1)\qquad \int^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} L_n^{\alpha}(x)\, G^{(m_1,m_2);\,(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;\,(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|c} y\,x^{\delta} & (a_{p_1};\,c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z\,x^{\delta} & (b_{q_1};\,d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array}\right] dx$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}(-1)^n}{n!\,\delta^{\frac{1}{2}-\beta-n}}\, G^{(m_1,m_2);\,(n_1,n_2),n_3+2\delta}_{(p_1,p_2),p_3+2\delta;\,(q_1,q_2),q_3+\delta}\left[\begin{array}{c|c} y\,\delta^{\delta} & (a_{p_1};\,c_{p_1}) \\ & \Delta(\delta,1-\beta),\ \Delta(\delta,1+\alpha-\beta),\ e_{p_3} \\ z\,\delta^{\delta} & (b_{q_1};\,d_{q_2}) \\ & f_{q_3},\ \Delta(\delta,1+\alpha+n-\beta) \end{array}\right],$$

$\mathrm{Re}\,(\beta+\delta\, b_j+\delta\, d_k)>0)\ (j=1,\cdots,m_1;\ k=1,\cdots,m_2)$,

$$(2.2)\qquad \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} L_n^{\alpha}(x)\, G^{(m_1,m_2);\,(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;\,(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|c} y\,x^{\delta} & (a_{p_1};\,c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z & (d_{q_1};\,d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array}\right] dx$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta}(-1)^n}{n!\,\delta^{1/2-\beta-n}}\, G^{(m_1,m_2);\,(2\delta+n_1,n_2),n_3}_{(2\delta+p_1,p_2),p_3;\,(\delta+q_1,q_2),q_3}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} y\,\delta^{\delta} & [\Delta(\delta,1-\beta),\ \Delta(\delta,1+\alpha-\beta),a_{p_1};c_{p_2}] \\ & e_{p_3} \\ z & [b_{q_1},\ \Delta(\delta,1+\alpha+n-\beta);\ d_{q_2}] \\ & f_{q_3} \end{array}\right],$$

$\mathrm{Re}\,(\beta+\delta\, b_j)>0\quad (j=1,\cdots,m_1)$;

$$(2.3)\qquad \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} L_n^{\alpha}(x)\, G^{(m_1,m_2);\,(n_1,n_2),n_3}_{(p_1,p_2),p_3;\,(q_1,q_2),q_3}\left[\begin{array}{c|c} y & (a_{p_1};\,c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z\,x^{\delta} & (b_{q_1};\,d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array}\right] dx$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta}(-1)^n}{n!\,\delta^{1/2-\beta-n}}\, G^{(m_1,m_2);\,(n_1,2\delta+n_2),n_3}_{(p_1,2\delta+p_2),p_3;\,(q_1,\delta+q_2),q_3}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} y & [a_{p_1},\ \Delta(\delta,1-\beta),\ \Delta(\delta,1+\alpha-\beta),\ c_{p_2}] \\ & e_{p_3} \\ z\,\delta^{\delta} & [b_{q_1};d_{q_2},\ \Delta(\delta,1+\alpha+n-\beta)] \\ & f_{q_3} \end{array}\right],$$

$\mathrm{Re}\,(\beta+\delta\, d_k)>0\quad (k=1,\cdots,m_2)$;

$$(2.4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2\rho}\, e^{-x^2} H_\nu(x)\, G^{(m_1,m_2);\,(n_1,n_2),\,n_3}_{(p_1,p_2)\,p_3;\,(q_1,q_2),\,q_3}\left[\begin{array}{c|c} y\,x^{2\delta} & (a_{p_1};\,c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z\,x^{2\delta} & (b_{q_1};\,d_{q_2}) \\ & f_{q_3}\end{array}\right] dx$$

$$= \frac{(2\pi)^{1/2-\delta/2}\, 2^\nu}{\delta^{-\nu/2-\rho}}\, G^{(m_1,m_2);\,(n_1,n_2),\,n_3+2\delta}_{(p_1,p_2),\,p_3+2\delta;\,(q_1,q_2),\,q_3+\delta}\left[\begin{array}{c|c} y\,\delta^{\delta} & (a_{p_1};\,c_{p_2}) \\ & \Delta(2\delta,\,-2\rho),\,e_{p_3} \\ z\,\delta^{\delta} & (b_{q_1},\,d_{q_2}) \\ & f_{q_3},\,\Delta(\delta,\,\nu/2-\rho)\end{array}\right],$$

$\rho = 0, 1, 2, \cdots;$

$$(2.5)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2\rho}\, e^{-x^2} H_\nu(x)\, G^{(m_1,m_2);\,(n_1,n_2),\,n_3}_{(p_1,p_2),\,p_3;\,(q_1,q_2),\,q_3}\left[\begin{array}{c|c} y\,x^{2\delta} & (a_{p_1};\,c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z & (b_{q_1};\,d_{q_2}) \\ & f_{q_3}\end{array}\right] dx$$

$$= \frac{(2\pi)^{1/2-\delta/2}\, 2^\nu}{\delta^{-\nu/2-\rho}}\, G^{(m_1,m_2);\,(n_1+2\delta,\,n_2),\,n_3}_{(p_1+2\delta,\,p_2),\,p_3;\,(q_1+\delta,\,q_2),\,q_3}\left[\begin{array}{c|c} y\,\delta^{\delta} & [\Delta(2\delta,-2\rho),a_{p_1};\,c_{p_2}] \\ & e_{p_3} \\ z & [b_{q_1},\,\Delta(\delta,\,\nu/2-\rho);\,d_{q_2}] \\ & f_{q_3}\end{array}\right],$$

$\rho = 0, 1, 2, \ldots;$

$$(2.6)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2\rho}\, e^{-x^2} H_\nu(x)\, G^{(m_1,m_2);\,(n_1,n_2),\,n_3}_{(p_1,p_2),\,p_3;\,(q_1,q_2),\,q_3}\left[\begin{array}{c|c} y & (a_{p_1};\,c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z\,x^{\delta} & (b_{q_1};\,d_{q_2}) \\ & f_{q_3}\end{array}\right] dx$$

$$= \frac{(2\pi)^{1/2-\delta/2}\, 2^\nu}{\delta^{-\nu/2-\rho}}\, G^{(m_1,m_2);\,(n_1,n_2+2\delta),\,n_3}_{(p_1,p_2+2\delta),\,p_3;\,(q_1,q_2+\delta),\,q_3}\left[\begin{array}{c|c} y & [a_{p_1};\,\Delta(2\delta,\,-2\rho),\,c_{p_2}] \\ & e_{p_3} \\ z\,\delta^{\delta} & [b_{q_1};\,d_{q_2}\,\Delta(\delta,\,\nu/2-\rho)] \\ & f_{q_3}\end{array}\right]$$

$\rho = 0, 1, \cdots;$

where

$$(p_3+q_1+q_3+p_1) < 2\,(n_1+m_1+n_3)\,,$$

$$(p_3+q_2+q_3+p_2) < 2\,(m_2+n_2+n_3)\,,$$

$$|\arg y| < \left[m_1+n_1+n_3-\frac{1}{2}(p_3+q_1+q_3+p_1)\right]\pi\,,$$

$$|\arg z| < \left[m_2+n_2+n_3-\frac{1}{2}(p_3+q_2+q_3+p_2)\right]\pi\,.$$

Proof. To evaluate the integral (2. 1), expressing the G-function in the integrand as (1. 1), interchanging the order of integration, which is justified due to the absolute convergence of the integrals involved in the process, we have

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+s)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-t)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-s)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+t)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-t)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+s+t)\,y^s z^t}{\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-s-t)\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+s+t)}\int_0^\infty x^{\beta+\delta s+\delta t-1}e^{-x}L_n^\alpha(x)\,dx\cdot ds\,dt.$$

Now evaluating the inner integral with the help of (1. 6) and using multiplication formula for Gamma function [6, p. 4, (11)], we get

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+s)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-t)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-s)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+t)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-t)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+s+t)\,y^s z^t}{\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-s-t)\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+s+t)}$$

$$\times\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta}(-1)^n\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{\beta+i}{\delta}+s+t\right)\times\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{\beta-\alpha+i}{\delta}+s+t\right)ds\,dt}{n!\,\delta^{\frac{1}{2}-\beta-n}\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{\beta-\alpha-n+i}{\delta}+s+t\right)}.$$

On applying (1. 1) the integral is established.

Formulae (2. 2) and (2. 3) can be similarly established on applying the same procedure as above with the help of (1. 6) and formulae (2. 4), (2. 5) and (2. 6) can be similarly obtained with the help of (1. 7).

3. The Expansion Formulae.

The subject matter of expansion formulae for hypergeometric functions occupies a prominent place in the literature of special functions. The expansion formulae for hypergeometric functions of one variable were given from time to time by various mathematicians.

However, the expansions of hypergeometric functions of two variables are not much attempted so far.

The expansion formulae to be established are

(3.1)
$$x^{w}\, G^{(m_1,m_2);\ (n_1,n_2),\ n_3}_{(p_1,p_2),\,p_3;\ (q_1,q_2),\,q_3}\left[\begin{array}{c|c} y\,x^{\delta} & (a_{p_1};\ c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ & (b_{q_1};\ d_{q_2}) \\ z\,x^{\delta} & f_{q_3} \end{array}\right]$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta}}{\delta^{-1/2-\alpha-w}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\delta)^{r}}{\Gamma(\alpha+r+1)}\, G^{(m_1,m_2);\ (n_1,n_2),\ n_3+2\delta}_{(p_1,p_2),\,p_3+2\delta;\ (q_1,q_2),\,q_3+\delta}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} y\,\delta^{\delta} & (a_{p_1};\ c_{p_2}) \\ & \Delta(\delta,-w-\alpha),\ \Delta(\delta,-w),\ e_{p_3} \\ & (b_{q_1};\ d_{q_2}) \\ z\,\delta^{\delta} & f_{q_3},\ \Delta(\delta,r-w) \end{array}\right] L_r^{\alpha}(x),$$

$\operatorname{Re}[w+\alpha+\delta b_j+\delta d_k] > -1 \qquad (j=1,\cdots,m_1;\ k=1,\cdots,m_2);$

(3.2)
$$x^{w}\, G^{(m_1,m_2);\ (n_1,n_2),\ n_3}_{(p_1,p_2),\,p_3;\ (q_1,q_2),\,q_3}\left[\begin{array}{c|c} y\,x^{\delta} & (a_{p_1};\ c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ & (b_{q_1};\ d_{q_2}) \\ z & f_{q_3} \end{array}\right]$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta}}{\delta^{-1/2-\alpha-w}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\delta)^{r}}{\Gamma(\alpha+r+1)}\, G^{(m_1,m_2);\ (2\delta+n_1,n_2),\ n_3}_{(2\delta+p_1,p_2),\,p_3;\ (\delta+q_1,q_2),\,q_3}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} y\,\delta^{\delta} & [\Delta(\delta,-w-\alpha),\ \Delta(\delta,-w),\ a_{p_1};\ c_{p_2}] \\ & e_{p_3} \\ & [b_{q_1},\ \Delta(\delta,r-w);\ d_{q_2}] \\ z & f_{q_3} \end{array}\right] L_r^{\alpha}(x),$$

$\operatorname{Re}[w+\alpha+\delta b_j] > -1 \qquad (j=1,\cdots,m_1);$

(3.3)
$$x^{w}\, G^{(m_1,m_2);\ (n_1,n_2),\,n_3}_{(p_1,p_2),\,p_3;\ (q_1,q_2),\,q_3}\left[\begin{array}{c|c} y & (a_{p_1};c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z\,x^{\delta} & (b_{q_1};d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array}\right]$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta}}{\delta^{-1/2-\alpha-w}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\delta)^{r}}{\Gamma(\alpha+r+1)}\, G^{(m_1,m_2);\ (n_1,n_2+2\delta),\,n_3}_{(p_1,p_2+\delta),\,p_3;\ (q_1,\delta+q_2),\,q_3}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} y & [a_{p_1}; \Delta(\delta, -w-\alpha), \Delta(\delta, -w), c_{p_2}] \\ & e_{p_3} \\ z\,\delta^{\delta} & [b_{q_2}; d_{q_2}, \Delta(\delta, r-w)] \\ & f_{q_3} \end{array}\right] L_r^{\alpha}(x),$$

$\operatorname{Re}[w+\alpha+\delta d_k] > -1 \; (j=1, \cdots, m_2)$

$$(3.4) \qquad x^{2w}\, G^{(m_1, m_2);\,(n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3;\,(q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|c} y\,x^{2\delta} & (a_{p_1}; c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z\,x^{2\delta} & (b_{q_1}; d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array}\right]$$

$$\frac{\sqrt{2}\,\delta^{w}}{(2\pi)^{\delta/2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\delta^{r/2}}{r!}\, G^{(m_1, m_2);\,(n_1, n_2), n_3+2\delta}_{(p_1, p_2) p_3+2\delta;\,(q_1, q_2), q_3+\delta} \left[\begin{array}{c|c} y\,\delta^{\delta} & (a_{p_1}; c_{p_3}) \\ & \Delta(2\delta, -2w), e_{p_3} \\ & (b_{q_1}; d_{q_2}) \\ z\,\delta^{\delta} & f_{q_3}, \Delta\left(\delta, \dfrac{r}{2}-w\right) \end{array}\right] H_r(\alpha),$$

$$(3.5) \qquad x^{2w}\, G^{(m_1, m_2)(n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3;\,(q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|c} y\,x^{2\delta} & (a_{p_1}; c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z & (b_{q_1}; d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\delta^{w}}{(2\pi)^{\delta/2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\delta^{r/2}}{r!}\, G^{(m_1, m_2);\,(n_1+2\delta, n_2), n_3}_{(p_1+2\delta, p_2), p_3;\,(q_1+\delta, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|c} y\,\delta^{\delta} & [\Delta(2\delta, -2w), a_{p_1}; a_{p_2}] \\ & e_{p_3} \\ & [b_{q_1}, \Delta\left(\delta, \dfrac{r}{2}-w\right); b_{q_2}] \\ z & f_{q_3} \end{array}\right] H_r(x);$$

$$(3.6) \qquad x^{2w}\, G^{(m_1, m_2);\,(n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3;\,(q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{c|c} y & (a_{p_1}; c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z\,x^{2\delta} & (b_{q_1}; d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\delta^{w}}{(2\pi)^{\delta/2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\delta^{r/2}}{r!}\, G^{(m_1, m_2)(n_1, n_2+2\delta), n_3}_{(p_1, p_2+2\delta), p_3;\,(q_1, q_2+\delta), q_3} \left[\begin{array}{c|c} y & [a_{p_1}; \Delta(2\delta, -2w), c_{p_2}] \\ & e_{p_3} \\ z\,\delta^{\delta} & [b_{q_1}; d_{q_2}, \Delta(\delta, r/2-w)] \\ & f_{q_3} \end{array}\right] H_r(x)$$

where

$$(p_3+q_1+q_3+p_1) < 2(n_1+m_1+n_3),$$

$$(p_3+q_2+q_3+p_2) < 2(m_2+n_2+n_3),$$

$$|\arg y| < \left[m_2 + n_2 + n_5 - \frac{1}{2}(p_5 + q_1 + q_5 + p_1) \right] \pi ,$$

$$|\arg z| < \left[m_1 + n_1 + n_5 - \frac{1}{2}(p_5 + q_2 + q_5 + p_2) \right] \pi .$$

PROOF. To prove (3. 1), let

$$f(x) = x^w \, G^{(m_1, m_2);\ (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3;\ (q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{l|c} y\, x^{\delta} & (a_{p_1}; c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z\, x^{\delta} & (b_{q_1}; d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array} \right] = \sum_{r=0}^{\infty} C_r \, L_r^{\alpha}(x) . \tag{3. 7}$$

Equation (3. 7) is valid, since $f(x)$ is continuous and of bounded variation in the open interval $(0, \infty)$, when $w \geqq 0$.

Multiplying both sides of (3. 7) by $x^{\alpha} e^{-x} L_u^{\alpha}(x)$ and integrating with respect to x from 0 to ∞, we have

$$\int_0^{\infty} x^{w+\alpha} e^{-x} L_u^{\alpha}(x) \, G^{(m_1, m_2);\ (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3;\ (q_1, q_2), q_3} \left[\begin{array}{l|c} y\, x^{\delta} & (a_{p_1}; c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z\, x^{\delta} & (b_{q_1}; d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array} \right] dx$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} C_r \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_u^{\alpha}(x) \, L_r^{\alpha}(x) \, dx .$$

Now using (2. 1) and the orthogonality property of LAGUERRE polynomials [5, p. 292-293, (2) and (3)], we obtain

$$C_u = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta} (-1)^u}{\Gamma(\alpha + u + 1) \, \delta^{-1/2 - \alpha - u - \omega}} \, G^{(m_1, m_2);\ (n_1, n_2), n_3 + 2\delta}_{(p_1, p_2), p_3 + 2\delta;\ (q_1, q_2), q_3 + \delta} \tag{3. 8}$$

$$\left[\begin{array}{l|l} y\, \delta^{\delta} & (a_{p_1}; c_{p_2}) \\ & \Delta(\delta, -w-\alpha) \, \Delta(\delta, -w), e_{p_3} \\ z\, \delta^{\delta} & (b_{q_1}; d_{q_2}) \\ & f_{q_3}, \Delta(\delta, u - w) \end{array} \right] .$$

From (3. 7) and (3. 8) formula (3. 1) is obtained.

The formulae (3. 2) and (3. 3) can be established on applying the same procedure as above with the help of (2. 2) and (2. 3) respectively.

To prove (3. 4), let

$$f(x) = x^{2w}\, G^{(m_1, m_2);\ (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3;\ (q_1, q_2), q_3}\left[\begin{array}{c|c} y\, x^{2\delta} & (a_{p_1};\, c_{p_2}) \\ & e_{p_3} \\ z\, x^{2\delta} & (b_{q_1};\, d_{q_2}) \\ & f_{q_3} \end{array}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} C_r\, H_r(x). \tag{3. 9}$$

Equation (3. 9) is valid, since $f(x)$ is continuous and of bounded variation in the open interval $(-\infty, \infty)$, when $w \geqq 0$.

Multiplying both sides of (3. 9) by $e^{-x^2} H_u(x)$, integrating with respect to x from $-\infty$ to ∞, and using the orthogonality property of HERMITE polynomials [7, pp. 192-193, (5) and (6)], we get

$$C_u = \frac{\sqrt{2}\, \delta^{u/2+w}}{u!\,(2\pi)^{\delta/2}}\, G^{(m_1, m_2);\ (n_1, n_2), n_3+2\delta}_{(p_1, p_2), p_3+2\delta;\ (q_1, q_2), q_3+2\delta}\left[\begin{array}{c|c} y\, \delta^{\delta} & (a_{p_1};\, c_{p_2}) \\ & \Delta(2\delta, -2w), e_{p_3} \\ z\, \delta^{\delta} & (b_{q_1};\, d_{q_2}) \\ & f_{q_3}, \Delta(\delta, u/2 - w) \end{array}\right]. \tag{3. 10}$$

Now with the help of (3. 9) and (3. 10) the expansion (3. 4) is obtained.

The expansions (3. 5) and (3. 6) can similarly be established using the integrals (2. 5) and (2. 6) respectively.

4. Particular Cases.

On specialising the parameters, the G-function of two variables may be reduced to many functions of one and two variables. However, only a few interesting particular cases are given below.

(i) In (3. 1) and (3. 4) reducing the G-functions of two variables into KAMPÉ DE FÉRIET function of two variables in view of (3. 1), we obtain

$$x^{w} F^{l, m}_{n, p}\left[\begin{array}{c} (a)_l;\, (b, c)_m;\, y\, x^{\delta}, z\, x^{\delta} \\ (d)_n;\, (e, f)_p \end{array}\right] \tag{4. 1}$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta}}{\delta^{-1/2-\alpha-w}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{\delta-1} \Gamma\left(\frac{w+1+i}{\delta}\right) \prod_{i=0}^{\delta-1} \Gamma\left(\frac{1+\alpha+w+i}{\delta}\right) (-\delta)^r}{\Gamma(\alpha+r+1) \prod_{i=0}^{\delta-1} \Gamma\left(\frac{1+w-r+i}{\delta}\right)}$$

$$F^{l+2\delta, m}_{n+\delta, p}\left[\begin{array}{c} (a)_l,\ \Delta(\delta, 1+w+\alpha),\ \Delta(\delta, 1+w);\, (b, c)_m;\, y\, \delta^{\delta}, z\, \delta^{\delta} \\ (d)_n,\ \Delta(\delta, 1+w-r);\, (e, f)_p \end{array}\right] L^{\alpha}_r(x),$$

$\operatorname{Re}(w+\alpha) > -1$;

(4. 2)
$$x^{2w} F^{l,m}_{n,p}\left[\begin{matrix}(a)_l;(b,c)_m;y\,x^{2\delta},z\,x^{2\delta}\\(d)_n;(e,f)_p\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\delta^{w}}{(2\pi)^{\delta/2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\delta^{r/2}\prod_{i=1}^{2\delta-1}\Gamma\left(\frac{1+2w+i}{2\delta}\right)}{r!\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{1+w-r/2+i}{\delta}\right)}$$

$$F^{l+2\delta,m}_{n+\delta,p}\left[\begin{matrix}(a)_l,\ \Delta(2\delta,1+2w);(b,c)_m;y\,\delta^{\delta},z\,\delta^{\delta}\\(d)_n,\ \Delta(\delta,1+w-r/2);\ (e,f)_p\end{matrix}\right]H_r(x),$$

where

$$p+n<l+m+1,\ |\arg y|\ \text{and}\ |\arg z|<\frac{1}{2}(l+m+1-p-n)\pi.$$

Similarly other results involving KAMPÉ DE FÉRIET function of two variables corresponding to the formulae (2. 1) to (2. 6), (3. 2), (3. 3), (3. 5) and (3. 6) may be obtained easily.

(*ii*) In (3. 2) and (3. 5) setting the parameters in view of (1. 5), we get

(4. 1)
$$x^{w} G^{m_1,n_1}_{p_1,q_1}\left[y\,x^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}a_{p_1}\\b_{q_1}\end{matrix}\right]=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta}}{\delta^{-1/2-\alpha-w}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\delta)^r}{\Gamma(\alpha+1+r)}$$

$$G^{m_1,n_1+2\delta}_{p+2\delta,q_1+\delta}\left[y\,\delta^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}\Delta(\delta,-w-\alpha),\ \Delta(\delta,-w),\ a_{p_1}\\b_{q_1},\ \Delta(\delta,r-w)\end{matrix}\right]L_r^{\alpha}(x),$$

where

$$p_1+q_1<2(m_1+n_1),\ |\arg y|<\left(m_1+n_1-\frac{1}{2}p_1-\frac{1}{2}q_1\right)\pi,$$

$$\operatorname{Re}(w+\alpha+\delta b_j)>-1\qquad(j=1,\cdots,m_1).$$

Which is an expansion similar to the formula [4, p. 5, (2. 8)] recently given by the author.

(4. 2)
$$x^{2w} G^{m_1,n_1}_{p_1,q_1}\left[y\,x^{2\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}a_{p_1}\\b_{q_1}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\delta^{\omega}}{(2\pi)^{\delta/2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\delta^{r/2}}{r!}G^{m_1,n_1+2\delta}_{p_1+2\delta,q_1+\delta}\left[y\,\delta^{\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}\Delta(2\delta,-2w),\ a_{p_1}\\b_{q_1},\ \Delta\left(\delta,\frac{r}{2}-w\right)\end{matrix}\right]H_r(x),$$

where

$$p_1 + q_1 < 2(m_1 + n_1), \quad |\arg y| < \left(m_1 + n_1 - \frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}q_1\right)\pi .$$

I am thankful to Dr. P. D. S. VERMA for the inspiration he gave me.

REFERENCES

[1] AGARWAL, R. P., *An extension to Meijer's G-function*, Proc. Nat. Inst. Sci. India, **31** (A)-6 (1965), 536-546.

[2] APPELL, P., et KAMPÉ DE FÉRIET, J., *Fonctions hypergéometriques et hypersphériques, polynomes d'Hermite*, (Gauthier-Villars, Paris, 1926).

[3] BAJPAI, S. D., *An integral involving Fox's H-function and heat conduction*, Math. Education, 3-1 (1969), 1-4.

[4] ———, *Some expansion formulae for Meijer G-function*, Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, **11** (1968), 1-14.

[5] ERDÉLYI, A., *Tables of integral transforms*, Vol. 2 (New York, McGraw-Hill, 1954).

[6] ———, *Higher transcendental functions*, Vol. 1 (New York McGraw-Hill, 1953).

[7] RAINVILLE, E. D., *Special functions*, (New York, MacMillan Co. 1960).

[8] SHARMA, B. L., *On the generalised function of two variables*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Ser. I. 79-1 (1965), 26-40.

Uma introdução à Teoria das Distribuições

por Fernando Sequeira

Lisboa

(Continuação do número anterior)

7. Uma topologia em $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$

Descrevemos $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$ como sendo uma ampliação de $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ que conserva a sua estrutura vectorial e que torna a derivação sempre possível; os seus elementos são as derivadas generalizadas de funções contínuas.

Para definirmos uma topologia em $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, vamos agora recorrer ao facto de ele ser a soma vectorial de uma família numerável $(\mathcal{C}_q(\mathsf{R}))_{q\in\mathsf{N}}$ de espaços vectoriais complexos $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$, em que para cada natural q, $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ designa o sub-espaço de $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$ constituído pelas distribuições que se podem representar como derivadas de ordem q de funções contínuas. Em cada um destes espaços $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ introduziremos uma topologia $\mathcal{T}_q$ que verifica certas propriedades (I e II deste parágrafo) sendo a topologia do $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$ definida como soma das topologias $\mathcal{T}_q$.

No entanto, é o conceito de convergência relativo às topologias $\mathcal{T}_q$ que nos interessa em especial, ou mais precisamente, a convergência num pelo menos dos $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ (suposto munido de $\mathcal{T}_q$).

O leitor que queira evitar considerações de natureza topológica pode pois utilizar-se da definição de $\mathcal{T}_q$ e do consequente critério de convergência dado para sucessões, e prosseguir a leitura dos restantes parágrafos do trabalho.

Visando uma análise um pouco mais detalhada do problema, vamos descrever um processo de chegar à referida topologia de $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, citando também algumas das suas principais propriedades. Com o mesmo objectivo sugerimos a resolução dos problemas que seguem no fim do parágrafo. Para facilitar a leitura, este parágrafo vem acompanhado de dois apêndices e de notas, com resultados, definições e propriadades a utilizar.

Comecemos então por considerar uma certa topologia $\mathcal{T}_0$ que se utiliza geralmente em $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ e se impõe pelas suas propriedades, e determinemos uma topologia $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$ tal que:

A. *A topologia induzida sobre* $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ *por* $\mathcal{T}$ *é menos fina que* $\mathcal{T}_0$ (o que assegura que toda a sucessão convergente em $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ segundo $\mathcal{T}_0$, é também convergente segundo $\mathcal{T}$);

B. *O operador derivação* D *é contínuo para a topologia* $\mathcal{T}$

C. $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$ *munido de* $\mathcal{T}$ *é um espaço vectorial topológico separado.*

Isto é uma topologia em $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, que torna o operador derivação contínuo, e tal que $\mathcal{C}(\mathsf{R})$, munido de $\mathcal{T}_0$ fica topològicamente incluído em $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$.

A topologia $\mathcal{T}_0$, òbviamente compatível [nota 1] com a estructura vectorial de $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ *pode ser introduzida através de um sistema fundamental de vizinhanças da origem* [nota 1] *constituído pelas partes* $V(I,\varepsilon)$ *de* $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ *seguintes; para cada intervalo compacto* $I\subset\mathsf{R}$, *e cada real* $\varepsilon>0$, $V(I,\varepsilon)$ *é constituído pelas* *funções* $f \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$ *que verificam a desigualdade*

$$\max_{x \in I} |f(x)| < \varepsilon .$$

Sempre que não exista perigo de confusões usaremos também a notação $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ para designar o espaço vectorial topológico assim obtido.

A topologia $\mathcal{T}_0$ verifica algumas propriedades que nos interessa salientar:

1. *Uma sucessão* (f_n) *de funções* $f_n \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$ *converge para* $f \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$, *se e só se ela converge uniformemente para* f *sobre todo o intervalo compacto* $I \subset \mathsf{R}$.

O operador primitivação definido sobre $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ é pois contínuo, verificando-se a igualdade

$$\lim (\mathcal{S} f_n) = \mathcal{S} \lim (f_n)$$

para toda a sucessão (f_n) convergente em $\mathcal{C}(\mathsf{R})$.

2. $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ *munido de* $\mathcal{T}_0$ *é limite projectivo* [nota 2] *de um sistema projectivo de espaços de Banach* [vidé apêndice I].

Por sua vez, para cada q natural, o sistema fundamental de vizinhanças $\{[D^q V(I,\varepsilon)]: I \in \mathcal{V}, \varepsilon \text{ real positivo}\}$, onde $\mathcal{V}$ é o conjunto dos intervalos impactos $I \subset \mathsf{R}$, define uma topologia $\mathcal{T}_q$ sobre $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ tal que:

I) $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ *munido de* $\mathcal{T}_q$ *é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de Banach* [ver apêndice 2];

II) *São contínuas as seguintes aplicações lineares:*

1. *A injecção canónica* $\mathcal{C}(\mathsf{R}) \to \mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ (o que assegura a convergência em $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ de toda a sucessão convergente em $\mathcal{C}(\mathsf{R})$);
2. *A injecção canónica* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R}) \to \mathcal{C}_{q+m}(\mathsf{R})$ (m: natural) (o que assegura que toda a sucessão convergente em $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ é também convergente em $\mathcal{C}_{q+m}(\mathsf{R})$);
3. *A restricsão de* D^q *a* $\mathcal{C}(\mathsf{R})$, *considerada como aplicação de* $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ *em* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$;
4. *A restricção* D^m (m: natural) a $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$, *considerada como aplicação de* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ *em* $\mathcal{C}_{q+m}(\mathsf{R})$.

De acordo com $\mathcal{T}_q$, *uma sucessão* (φ_n) *de elementos de* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ *converge para* $\varphi \in \mathcal{C}_q(\mathsf{R})$, *se e só se existirem uma sucessão* (f_n) *de elementos* $f_n \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$ *e uma função* $f \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$ *tais que:* a) $\varphi = [D^q f]$ *e para todo o natural* n, $\varphi_n = [D^q f_n]$; b) $(f_n) \to f$ *em* $\mathcal{C}(\mathsf{R})$.

Obtém-se assim uma família numerável $(\mathcal{C}_q(\mathsf{R}))_{q \in \mathsf{N}}$ de espaços vectoriais topológicos que verifica as seguintes propriedades:

i) *Todo o* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ *verifica* I;

ii) *Quaisquer que sejam os naturais* q *e* m, *tem-se* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R}) \subset \mathcal{C}_{q+m}(\mathsf{R})$, *sendo a injecção canónica* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R}) \to \mathcal{C}_{q+m}(\mathsf{R})$ *uma aplicação linear contínua;*

iii) $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$ *é a soma vectorial dos espaços* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$.

Nestas condições é natural munir-se $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$ da mais fina das topologias que tornam contínuas as injecções canónicas $\mathcal{C}_q(\mathsf{R}) \to \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, denominada soma das topologias $\mathcal{T}_q$; isto é, da mais fina das topologias que induzem em cada um dos $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ uma topologia menos fina por $\mathcal{T}_q$. Então, em virtude de II 1, *ela induzirá em* $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ *uma topologia que é também menos fina que* $\mathcal{T}_0$, como se pretendia. E de acordo com essa topologia, que designaremos por $\mathcal{T}$, *o operador derivação é contínuo*, como se pode provar facilmente. Para o efeito basta ter em consideração II. 4 e que um conjunto $A \subset \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$ é aberto segundo $\mathcal{T}$, se e só se cada uma das intersecções $A \cap \mathcal{C}_q(\mathsf{R})$, $q \in \mathsf{N}$, é um aberto de $\mathcal{T}_q$.

Mas para o que se segue, tem particular importância a convergência num pelo menos dos $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$. Relativamente a esse tipo de convergência é ainda verdadeiro que se uma dada sucessão (φ_n) de distribuições converge para φ nesse sentido, a sucessão $(D\varphi_n)$ das suas derivadas converge também para $D\varphi$ num pelo menos dos $\mathcal{C}_q(\mathrm{R})$, e nesse sentido pode escrever-se

$$D\lim(\varphi_n) = \lim(D\varphi_n).$$

Nota 1

Dado um espaço topológico X, denomina-se vizinhança de uma parte $A \subset X$, todo o conjunto que contém um aberto contendo A. As vizinhanças de uma parte $\{u\}$ com $u \in X$ denominam-se também vizinhanças de u.

Posto isto, demonstra-se que o conjunto $\mathcal{V}(u)$ das vizinhanças de um ponto $u \in X$ verifica as seguintes propriedades:

1. Toda a parte de X que contém um conjunto de $\mathcal{V}(u)$, pertence a $\mathcal{V}(u)$;

2. Toda a intersecção finita dos conjuntos de $\mathcal{V}(u)$ pertence a $\mathcal{V}(u)$;

3. u pertence a todo o $V \in \mathcal{V}(u)$;

4. Se $V \in \mathcal{V}(u)$, existe um $W \in \mathcal{V}(u)$ tal que V é uma vizinhança de todo o ponto de W.

Recìprocamente, se para cada $u \in X$ existe um conjunto $\mathcal{V}(u)$ de pontos de X que verifica 1, 2, 3 e 4, então existe uma e uma só topologia sobre X tal que para cada $u \in X$, $\mathcal{V}(u)$ é o conjunto das vizinhanças de u.

Isto significa que uma topologia sobre um conjunto X pode ser definida pelos conjuntos $\mathcal{V}(u)$ das vizinhanças de cada um dos seus pontos $u \in X$. Mais precisamente, para a definir é suficiente dar para cada $u \in X$, um sistema fundamental de vizinhanças, isto é, um conjunto $\mathcal{S}(u) \subset \mathcal{V}(u)$ tal que para todo o $V \in \mathcal{V}(u)$ existe um $W \in \mathcal{S}(u)$ tal que $W \subset V$. $\mathcal{V}(u)$ será então constituído pelas partes de X que contêm um conjunto de $\mathcal{S}(u)$.

A topologia $\mathcal{T}$ diz-se separada e X um espaço separado, se além das propriedades 1, 2, 3 e 4, X verifica ainda a seguinte:

5. Quaisquer que sejam $u, v \in X$, com $u \neq v$, existem $U \in \mathcal{V}(u)$ e $V \in \mathcal{V}(v)$ tais que $U \cap V = \Phi$.

Se X é também um espaço vectorial complexo, diz-se que $\mathcal{T}$ é compatível com a sua estructura vectorial, sempre que se verificam as seguintes propriedades:

6. Se $w = u + v$, com $u, v, w \in X$, então qualquer que seja $W \in \mathcal{V}(w)$, existem $U \in \mathcal{V}(u)$ e $V \in \mathcal{V}(v)$ tais que $U + V \subset W$;

7. Se $w = \lambda \cdot u$, com $\lambda \in \mathrm{C}$ e $u, w \in X$, então qualquer que seja a vizinhança $W \in \mathcal{V}(w)$, existem $U \in \mathcal{V}(u)$ e um real $\varepsilon > 0$, tais que $(\lambda + \lambda') \cdot U \subset W$ para todo o complexo λ' verificando $|\lambda'| < \varepsilon$.

Como consequência destas propriedades resulta então que sendo $u \in X$ e $\mathcal{S}(0)$ um sistema fundamental de vizinhanças da origem, o conjunto das translatadas $u + V$, com $V \in \mathcal{S}(0)$, é também um sistema fundamental das vizinhanças de u. Este resultado permite pois, definir uma topologia sobre X, compatível com a sua estructura vectorial, por meio de um sistema fundamental de vizinhanças da origem.

De uma forma geral, seja $\mathcal{S}(0)$ um conjunto de partes de X (que supomos um espaço vectorial complexo) que verifica as seguintes propriedades:

i. O zero pertence a todo o conjunto de $\mathcal{S}(0)$;

ii. Quaisquer que sejam $U, V \in \mathcal{S}(0)$, *existe um* $W \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $W \subset U \cap V$;

iii. Qualquer que seja $u \neq 0$, *existe* $W \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $u \notin W$;

iv. Se $U \in \mathcal{S}(0)$, *existe* $W \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $W \pm W \subset U$;

v. Se $u \in U \in \mathcal{S}(0)$, *existe* $V \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $u + V \subset U$;

vi. Quaisquer que sejam $U \in \mathcal{S}(0)$ *e o complexo* $\alpha \neq 0$, *existe* $V \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $\alpha V \subset U$;

vii. *Quaisquer que sejam* $U \in \mathcal{S}(0)$ *e* $v \in X$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\lambda v \in U$ *quando* $|\lambda| < \varepsilon$;

viii. *Qualquer que seja* $U \in \mathcal{S}(0)$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\lambda U \subset U$ *quando* $|\lambda| < \varepsilon$.

Nestas condições demonstra-se que existe uma e uma só topologia sobre X, separada, compatível com a sua estructura vectorial, para a qual $\mathcal{S}(0)$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem.

Nota 2

Sendo $\mathcal{V}$ um conjunto parcialmente ordenado, filtrante à direita, diz-se sistema projectivo de espaços vectoriais topológicos com índice em $\mathcal{V}$, todo o par $((X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{V}}, (f_\alpha^\beta)_{\alpha, \beta \in \mathcal{V}})$ onde $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{V}}$ é uma família de espaços vectoriais topológicos e $(f_\alpha^\beta)^{\mathcal{V}}$ é uma família de aplicações lineares contínuas $f_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ cujo conjunto de índices é constituído pelos pares $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$, com $\alpha \leqq \beta$, e os f_α^β verificam as seguintes propriedades: *a)* f_α^α, $\alpha \in \mathcal{V}$, é a identidade de X_α; *b)* Quaisquer que sejam $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$, tem-se $f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma = f_\alpha^\gamma$.

Posto isto, diz-se limite projectivo deste sistema o par $(X, (f_\alpha)_{\mathcal{V}})$ onde X é um espaço vectorial topológico e $(f_\alpha)^{\mathcal{V}}$ é uma família de aplicações lineares contínuas $f_\alpha : X \to X_\alpha$ tais que: *a)* $f_\alpha^\beta \circ f_\beta = f_\alpha$ quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$, com $\alpha \leqq \beta$; *b)* Dado um espaço vectorial topológico Y e uma família $(g_\alpha)_{\mathcal{V}}$ de aplicações lineares contínuas $g_\alpha : Y \to X_\alpha$, verificando as relações $f_\alpha^\beta \circ g_\beta = g_\alpha$, $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$ e $\alpha \leqq \beta$, existe uma e uma só aplicação linear contínua $h : X \to Y$ tal que $f_\alpha \circ h = g_\alpha$, para todo o $\alpha \in \mathcal{V}$.

Nota 3

Chama-se espaço localmente convexo todo o espaço vectorial complexo E onde se definiu uma topologia por meio de um sistema fundamental de vizinhanças da origem constituído por conjuntos absolutamente convexos e absorventes, isto é, por conjuntos V que verificam as seguintes propriedades:

1. $\alpha u + \beta v$ pertence a V quaisquer que sejam $u, v \in V$ e os complexos α, β, com $|\alpha| + |\beta| \leqq 1$;

2. Para todo o $u \in E$ existe um real $\rho > 0$ tal que $u \in \rho V$.

E diz-se completo para as sucessões, se toda a sucessão de Cauchy, é convergente em E.

Apêndice I

$\mathcal{C}(\mathsf{R})$ munido de $\mathcal{T}_0$ é limite projectivo do sistema $((F(I))_{I \in \mathcal{V}}, (\rho_J^I)_{I, J \in \mathcal{V}})$ definido como se segue:

a) $\mathcal{V}$ é o conjunto dos intervalos compactos de R, munido da relação de ordem $\subset$;

b) Para cada $I \in \mathcal{V}$, $F(I)$ é o espaço de Banach formado pelo conjunto das funsões complexas definidas e contínuas sobre I, munido da estructura vectorial usual e da norma definida para cada $f \in F(I)$ por

$$\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)|$$

c) Quaisquer que sejam $I, J \in \mathcal{V}$, com $J \subset I$, ρ_J^I é a aplicação linear contínua $F(I) \to F(J)$ que a cada $f \in F(I)$ faz corresponder a sua restricção a J.

Para todo o $I \in \mathcal{V}$, a aplicação canónica $\rho_I : \mathcal{C}(\mathsf{R}) \to F(I)$, a cada $f \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$ faz corresponder a sua restricção a I. $\mathcal{T}_0$ é pois a menos fina das topologias que tornam contínuas as aplicações ρ_I.

Apêndice II

Pode demonstrar-se que $\mathcal{E}_q(\mathsf{R})$ é isomorfo a um sub-espaço vectorial de $\mathcal{E}(\mathsf{R})$. Com efeito, seleccionando um conjunto $\{x_1, x_2, \cdots x_q\}$ de q pontos distintos de R, segue-se que o sub-espaço vectorial $F_q(\mathsf{R})$ de $\mathcal{E}(\mathsf{R})$, instituido pelas funções $f \in \mathcal{E}(\mathsf{R})$ que se anulam naqueles pontos, é isomorfo a $\mathcal{E}_q(\mathsf{R})$: a aplicação $\Psi_q : F_q(\mathsf{R}) \to \mathcal{E}_q(\mathsf{R})$ que a cada $f \in F_q(\mathsf{R})$ faz corresponder a distribuição $\Psi_q(f) = [D^q f]$ é um isomorfismo vectorial.

Pode pois munir-se $\mathcal{E}_q(\mathsf{R})$ da imagem dada por Ψ_q da topologia induzida em $F_q(\mathsf{R})$ por $\mathcal{T}_0$, e essa imagem é precisamente $\mathcal{T}_q$. Ela é de resto independente dos q pontos escolhidos inicialmente.

Recorrendo ao isomorfismo Ψ_q demonstra-se então fàcilmente que $\mathcal{E}_q(\mathsf{R})$ munido de $\mathcal{T}_q$ é limite projectivo do sistema $(F_q(I))_{I \in \mathcal{V}_q}$, $(\rho_J^I)_{I,J \in \mathcal{V}_q})$ definido como se segue:

a) $\mathcal{V}_q$ é o conjunto dos intervalos compactos de R que contêm os q pontos, escolhidos, munido da relação de ordem $\subset$;

b) Para cada $I \in \mathcal{V}_q$, $F_q(I)$ é o espaço de Banach formado pelo conjunto das funções complexas, definidas e contínuas sobre I, que se anulam nos q pontos considerados, conjunto este munido da estructura vectorial usual e de norma dada para cada $f \in F_q(J)$ por

$$\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

c) ρ_J^I, para cada I, $J \in \mathcal{V}_q$, com $J \subset I$, é a aplicação de $F_q(I)$ em $F_q(J)$ que a cada $f \in F_q(I)$ faz corresponder a sua restrição a J.

As aplicações canónicas $\mathcal{E}_q(\mathsf{R}) \to F_q(I)$, $I \in \mathcal{V}_q$, são as aplicações $\rho_I \circ \Psi_q^{-1}$ onde ρ_I designa a restrição a I; a topologia $\mathcal{T}_q$ é pois a menos fina das topologias que tornam contínuas estas aplicações.

Problemas

1. Demonstre que:

a) O conjunto das partes $V(I, \varepsilon)$ de $\mathcal{E}(\mathsf{R})$, definidas neste parágrafo satisfaz as propriedades $i)$ a $viii)$ da nota 1, determinando por isso, unìvocamente, uma topologia $\mathcal{T}_0$ sobre $\mathcal{E}(\mathsf{R})$, compatível com a estructura vectorial deste espaço, separada, e para a qual o referido conjunto constitui um sistema fundamental de vizinhanças da origem;

b) Cada uma das partes $V(I, \varepsilon)$ é absolutamente convexa e absorvente [ver nota 3].

c) $\mathcal{E}(\mathsf{R})$ munido de $\mathcal{T}_0$ é completo para as sucessões.

2. Atendendo a que $\mathcal{E}(\mathsf{R})$ munido de $\mathcal{T}_0$ é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de Banach [ver apêndice I e nota 2] e supondo que $\hat{f}$ é uma função definida sobre R e com valores em $\mathcal{E}(\mathsf{R})$, demonstre que:

a) Se para todo o $x \in \mathsf{R}$ existe em $\mathcal{E}(\mathsf{R})$ e é nulo o limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h}$, então $\hat{f}$ é uma constante sobre R; de uma forma geral, as soluções da equação $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n \hat{f} = 0$ (n número natural) são polinómios inteiros em x de grau inferior a n, com coeficientes em $\mathcal{E}(\mathsf{R})$;

b) Se $\hat{f}$ é contínua para a topologia $\mathcal{T}_0$, tem-se $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \hat{f}(t)\,dt = \hat{f}(x)$ e portanto é válida a fórmula de Barrow

$$\int_\alpha^\beta \hat{f}(t)\,dt = \hat{g}(\beta) - \hat{g}(\alpha)$$

em que $\hat{g}$ é uma primitiva de $\hat{f}$;

c) Se $\hat{f}$ é contìnuamente derivável sobre R e se φ é uma função escalar também continuamente derivável sobre R, tem-se

$$\frac{d}{dx}(\varphi\cdot\hat{f})=\varphi'\cdot\hat{f}+\varphi\cdot\hat{f}'$$

onde $\hat{f}'$ e φ' designam as respectivas derivadas;

d) Se $\hat{f}$ é contínuamente derivável sobre R, verificam-se as igualdades

$$\int_0^x t\hat{f}''(t)\,dt=x\hat{f}'(x)-\int_0^x \hat{f}'(t)\,dt$$

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \hat{f}'(t)\,dt=\hat{f}'(0);$$

e) Se $\hat{f}$ admite derivada contínua até à ordem n, tem-se

$$\hat{f}(x)=\hat{f}(0)+\hat{f}'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}\hat{f}''(0)\,x^2+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\hat{f}^{(n-1)}(0)\,x^{n-1}+$$
$$+\int_0^x \hat{f}^{(n)}(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

para todo o $x\in$ R, e

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\int_0^x \hat{f}^{(n)}(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt=\frac{1}{n!}\hat{f}^{(n)}(0).$$

f) Se existe o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n!\,\hat{f}(x)}{x^n}=\alpha\neq\infty$, para todo o natural m tem-se

$$\lim_{x\to 0}\frac{(n+m)!\,\mathcal{J}^m\hat{f}(x)}{x^{n+m}}=\alpha$$

onde $\mathcal{J}^m$ é a potência m do operador primitivação $\mathcal{J}\hat{f}=\int_0^x \hat{f}(t)\,dt$.

NOTA: *Estas propriedades (a a f) são ainda válidas se o espaço onde $\hat{f}$ toma valores é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de* BANACH.

3) Demonstre que o conjunto

$$\{[D^q\,V(I,\varepsilon)]:\ I\in\mathfrak{V},\ \varepsilon \text{ real positivo}\}$$

de partes de $\mathcal{C}_q$(R) verifica as propriedades *i* a *viii* da nota 1.

4) Demonstre a propriedade II.

8. Distribuições vectoriais

Recorrendo a uma restricção do tipo de funções contínuas que se consideram, podem também definir-se certas distribuições vectoriais, como derivadas generalizadas de ordem finita de funções contínuas.

Com esse objectivo consideremos, à imagem do que sucede com $\mathcal{C}_\omega$(R), um espaço vectorial complexo E, e uma família numerável $(E_q)_{q\in\mathbf{N}}$ de espaços vectoriais topológicos E_q tais que:

I. *Cada um dos E_q é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de* BANACH;

II. *$E_q\subset E_{q+m}$ quaisquer que sejam os naturais q e m, sendo a injecção canónica $E_q\to E_{q+m}$ uma aplicação linear contínua;*

III. *E é a soma vectorial dos espaços E_q.*

E designemos por:

a) $\mathcal{C}$(R, E) o espaço vectorial complexo formado pelo conjunto das funções $\hat{f}$, definidas sobre R, com valores num dos E_q (dependente de $\hat{f}$) e contínuas relativamente à topologia desse espaço, conjunto este munido da estructura vectorial usual;

b) $\mathcal{C}^1$(R, E) o subespaço de $\mathcal{C}$(R, E) constituído pelas funções $\hat{f}$ que verificam a seguinte propriedade: para cada $\hat{f}$ existe um E_q tal que $\hat{f}$ é uma aplicação de R em E_q, contìnuamente derivável relativamente à topologia de E_q.

Verifica-se então que se $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, E)$ e se $\hat{f}'$ é a sua derivada calculada num certo E_q, $\hat{f}'$ é também a derivada de $\hat{f}$ em todo o E_{q+m}, o que justifica denominá-la derivada de $\hat{f}$.

O operador $\hat{f} \to \hat{f}'$ é pois uma aplicação linear de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, E)$ em $\mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$.

Nestas condições, pode pôr-se o problema de determinar um sobre-espaço mínimo $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ de $\mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$, onde a derivação é sempre possível, um operador linear e um prolongamento da derivada definida em $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, E)$. Por outras palavras; *determinar um sobre-espaço vectorial complexo* $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ *de* $\mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$ *e duas aplicações lineares* $\Phi : \mathcal{C}(\mathbf{R}, E) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ *e* $D : \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ *tais que:*

i. Φ é injectiva;

ii. Se $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, E)$, então $\Phi(\hat{f}') = D\Phi(\hat{f})$;

iii. Todo o $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ pode exprimir-se com a forma $\hat{\varphi} = D^n \Phi(\hat{f})$ onde n é um inteiro não negativo e $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$;

iv. Se $D\hat{\varphi} = 0$, com $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$, então $\hat{\varphi} = \Phi$ (constante).

Percorrendo caminhos paralelos aos utilizados para o caso escalar, pode demonstrar-se a existência e a unicidade (a menos de um isomorfismo vectorial) de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$. Um modelo pode ainda ser obtido recorrendo ao conjunto $\mathcal{C}^*(\mathbf{R}, E)$ constituído pelos elementos de forma $D^n \hat{f}$, com n inteiro não negativo e $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$, e à relação de equivalência definida sobre $\mathcal{C}^*(\mathbf{R}, E)$ do seguinte modo: dados dois elementos $D^n \hat{f}$ e $D^m \hat{g}$ pertencentes a $\mathcal{C}^*(\mathbf{R}, E)$, eles dizem-se equivalentes e escreve-se $[D^n \hat{f}] = [D^m \hat{g}]$, se e só se $J^m \hat{f} - J^n \hat{g}$ é um polinómio de grau inferior a $n + m$, cujos coeficientes são elementos de E.

O conjunto das classes de equivalência assim obtidas munido de adição definida por

$$[D^n \hat{f}] + [D^m \hat{g}] = [D^{n+m}(J^m \hat{f} + J^n \hat{g})]$$

e do produto por escalares dado por

$$\lambda \cdot [D^n \hat{f}] = [D^n(\lambda \hat{f})], \quad \lambda \in \mathbf{C}$$

constitui um espaço vectorial complexo. Associado às aplicações Φ e D definidas por

$$\Phi(f) = [D^0 \hat{f}], \quad \hat{f} \in \mathbf{C}(\mathbf{R}, E)$$

e

$$D[D^n f] = [D^{n+1} \hat{f}]$$

verifica as propriedades *i* a *iv*, constituindo portanto uma solução do problema. Designá-la-emos por $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$; os seus elementos são certas distribuições vectoriais que se podem representar como derivadas de ordem finita de funções contínuas, uma vez que identifiquemos os elementos da forma $\Phi(\hat{f})$, $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$, com os próprios $\hat{f}$. As distribuições assim obtidas são suficientes para o nosso objectivo.

*

* *

Dados uma família numerável $(E_q)_{q \in \mathbf{N}}$ de espaços vectoriais topológicos que verifica as propriedades I e II, e para cada $q \in \mathbf{N}$, o subespaço $\mathcal{C}_q(\mathbf{R}, E_q) \subset \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$, constituído pelas distribuições que se podem representar como derivadas de ordem q de funções, definidas sobre $\mathbf{R}$, com valores em E_q e contínuas para a topologia de E_q, pode demonstrar-se que a família $(\mathcal{C}_q(\mathbf{R}, E_q))_{q \in \mathbf{N}}$ também verifica as propriedades I e II, e que $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$ é precisamente a sua soma vectorial.

Este resultado permite então definir as distribuições de ordem finita em R^2, como distribuições de ordem finita em R, com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, e por indução as distribuições de ordem finita em R^n. Assim, uma distribuição $\hat{\varphi}$ de ordem finita em R^n pode apresentar-se como a derivada generalizada $D_1^{p_1} D_2^{p_2}, \cdots, D_n^{p_n}$ de ordem p_1 em relação a x_1, p_2 em relação a $x_2, \cdots$, de uma função complexa $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ definida e contínua sobre R^n.

No que se segue, utilizaremos a seguinte convenção: dado um conjunto

$$p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

de n números inteiros não negativos, representamos por D^p o operador $D_1^{p_1} D_1^{p_1}, \cdots, D_n^{p_n}$, e por J^p o operador $J_1^{p_1} J_2^{p_2}, \cdots, J_n^{p_n}$ onde J_i, $i \leq n$, é definido por

$$J_i f = \int_0^{x_i} f(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \cdots, x_n)\, d\xi$$

para toda a função f contínua sobre R^n.

Posto isto, dados dois elementos $[D^p f]$ e $[D^q g]$ onde $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ e $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$, eles representam a mesma distribuição, se e só se $J^q f - J^p g$ é da forma $\sum_{i=1}^{n} \Pi_i$, onde para cada $i \leq n$, Π_i é um polinómio de grau inferior a $p_i + q_i$ na variável x_i e cujos coeficientes são distribuições de ordem finita nas restantes variáveis.

A soma de duas distribuições $[D^p f] + [D^q g]$ vem dada por

$$[D^p f] + [D^q g] = [D^{p+q}(J^q f + J^p g)]$$

e o produto de um complexo λ por uma distribuição $[D^p f]$, é por sua vez

$$\lambda \cdot [D^p f] = [D^p(\lambda f)].$$

*

* *

Apliquemos agora estes resultados a alguns exemplos. Seja h a função de HEAVISIDE, e consideremos a função de x, que em cada ponto $x \in \mathsf{R}$ toma o valor $h(y-x)$. Ela é uma função vectorial, com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, contínua e indefinidamente diferenciável em ordem a x e pode ser representada por $D_y g(y-x)$ onde $g(y-x)$ é a função definida por

$$g(y-x) = \begin{cases} y-x & \text{se } y \geq x \\ 0 & \text{se } y < x \end{cases}.$$

A seu respeito, é então verdadeiro que $D_y g(y-x) = -D_x g(y-x)$, porquanto $J_x g(y-x) + J_y g(y-x) = \frac{1}{2} y^2$.

De uma forma geral, dada uma distribuição qualquer $\varphi \in D^n f$, com $f \in \mathcal{C}\mathsf{R}), n \in \mathsf{N}$, a função que em cada ponto $x \in \mathsf{R}$, toma o valor

$$\mathcal{T}_x \varphi(g) = \varphi(y-x) = D^n f(y-x)$$

é contínua e indefinidamente diferenciável em ordem a x, e a sua derivada toma o valor $-D_y^{n+1} f(y-x)$ para todo o $x \in \mathsf{R}$. Podemos então escrever

$$D_x \varphi(y-x) = -D_y \varphi(y-x)$$

e para todo o natural p,

$$D_x^p \varphi(y-x) = (-1)^p D_y^p \varphi(y-x).$$

No caso da distribuição $\delta(x) \in \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, teremos:

$$\delta(y-x) = D_y^2 g(y-x) = D_x^2 g(y-x)$$

onde

$$g(y-x)=\begin{cases} y-x & \text{se } y \geq x \\ 0 & \text{se } y < x \end{cases}$$

e portanto

$$\delta(y-x)=D_x^2(g(y-x)-(y-x))=D_x^2\, g(x-y)$$

isto é

$$\delta(y-x)=\delta(x-y).$$

*

* *

Um outro conceito que nos interessa é o de valor num ponto de uma distribuição vectorial. Adoptaremos a seguinte definição: *diz-se que uma distribuição $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ tem valor num ponto $\alpha \in \mathbf{R}$, se e só se ela admite uma representante $D^n \hat{f}$, com $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$, tal que num dos E_q existe o limite*

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{n!\, \hat{f}(x)}{(x-\alpha)^n}.$$

Este limite, que representaremos por $\hat{\varphi}(\alpha)$, denomina-se valor de $\hat{\varphi}$ no ponto α.

Por forma análoga à utilizada no parágrafo 4, podemos ainda definir os valores $\hat{\varphi}(\alpha^+)$, $\hat{\varphi}(\alpha^-)$, $\hat{\varphi}(-\infty)$, $\hat{\varphi}(+\infty)$, que são prolongamentos de conceitos análogos relativos a funções, e que verificam as propriedades usuais, descritas no parágrafo 4 para o caso das distribuições escalares.

Recorrendo a estes conceitos podem então definir-se os integrais

$$\int_{\alpha^\pm}^{\beta^\pm} \hat{\mu}(x)\, dx = \hat{\varphi}(\beta^\pm) - \hat{\varphi}(\alpha^\pm)$$

$$\int_\alpha^\beta \hat{\mu}(x)\, dx = \hat{\varphi}(\beta) - \hat{\varphi}(\alpha)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mu}(x)\, dx = \hat{\varphi}(+\infty) - \hat{\varphi}(-\infty)$$

onde $\hat{\mu} \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$, $\hat{\varphi}$ é uma primitiva de $\hat{\mu}$ e se supõe existirem aqueles valores ou limites laterais.

A título de exemplo consideremos as distribuições vectoriais $h(y-x)$ e $\delta(y-x)$ onde h designa a função de Heaviside. De acordo com as definições dadas, tem-se

$$[h(y-x)]_{x=\alpha} = h(y-\alpha),$$

$$[\delta(y-x)]_{x=\alpha} = \delta(y-\alpha),$$

$$[h(y-x)]_{x=+\infty} = 0$$

e

$$[h(y-x)]_{x=-\infty} = 1$$

o que nos permite escrever por sua vez

$$\int_\alpha^\beta \delta(y-x)\, dx = h(y-\beta) - h(y-\alpha)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x)\, dx = 1.$$

Problemas

1) Sendo $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}_\omega(\mathbf{R})$ uma distribuição vectorial com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, demonstre que:

a) $$\int_\alpha^\beta \hat{\varphi}(x)\, dx = \theta(y) \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}),\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta D_y \hat{\varphi}(x)\, dx = D_y\, \theta(y)$$

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(x)\, dx = \theta(y) \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} D_y \hat{\varphi}(x)\, dx = D_y\, \theta(y).$$

2) Demonstre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iyx}}{\alpha + ix}\, dx =$$

$$= \begin{cases} 2\pi h(y)\, e^{-\alpha y} & \text{se } \alpha > 0 \\ -2\pi(1-h(y))\, e^{-\alpha y} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.$$

3) Considere e^{iyx} como uma distribuição em x com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, e a identidade

$$e^{iyx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_y^{n-k} \left[\frac{\alpha^k e^{iyx}}{(\alpha + i x)^n} \right]$$

válida para todo o natural n e todo o real $\alpha \neq 0$.

Posto isto, determine:

a) Os limites $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{iyx}$;

b) Tendo em atenção os problemas 1 e 2, o integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx}\, dx$;

c) O integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx}\, dx$.

9. Alguns casos de multiplicação com distribuições. Fórmula de Dirac

Seja $\mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ o subespaço de $\mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$ constituído pelas funções indefinidamente diferenciáveis, sendo esta diferenciabilidade entendida no sentido referido no parágrafo 8. Entre os seus elementos e as distribuições de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ pode então definir-se uma multiplicação do seguinte modo: dadas $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, diz-se produto de $\hat{f}$ por φ e representa-se por $\hat{f} \cdot \varphi$ uma distribuição de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ tal que:

I. Se φ é uma função contínua, $\hat{f} \cdot \varphi$ é o produto usual;

II. É válida a regra de derivação

$$(1) \qquad D(\hat{f} \cdot \varphi) = \hat{f} \cdot D\varphi + \hat{f}' \cdot \varphi$$

onde $\hat{f}'$ designa a derivada de $\hat{f}$ no sentido referido atrás, e D representa indestintamente a derivação em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ e em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$.

De forma análoga à utilizada no § 6, demonstra-se que esta operação fica univocamente determinada pelas propriedades I e II, e que sendo $\varphi = D^n g$ com $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, e $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$, tem-se

$$(2) \qquad \hat{f} \cdot \varphi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k} [\hat{f}^{(k)} \cdot g]$$

onde $\hat{f}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ designa a derivada de ordem k de $\hat{f}$. E demonstra-se ainda que esta multiplicação satisfaz as seguintes propriedades:

1. $(\hat{f} + \hat{g}) \cdot \varphi = \hat{f} \cdot \varphi + \hat{g} \cdot \varphi$

2. $\hat{f}(\varphi + \psi) = \hat{f} \cdot \varphi + \hat{f} \cdot \psi$

quaisquer que sejam $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$, e $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, e ainda

3. Se $\hat{\theta} = \hat{f} \cdot \varphi$, com $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, e se num ponto $\alpha \in \mathbf{R}$ existe o valor $\varphi(\alpha)$, então existe $\theta(\hat{\alpha})$ e tem-se $\hat{\theta}(\alpha) = \hat{f}(\alpha) \cdot \varphi(\alpha)$.

Por indução demonstra-se ainda que

$$(3) \qquad \hat{f} \cdot D^n \varphi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k} (\hat{f}^{(k)} \cdot \varphi).$$

Consideremos agora o produto $\hat{f} \cdot \delta$ onde $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ e δ é a distribuição de Dirac: Como

$$\int_0^x \hat{f}'(\xi)\, h(\xi)\, d\xi = (\hat{f}(x) - \hat{f}(0))\, h(x)$$

onde h designa a função de HEAVISIDE, derivando ambos os membros desta igualdade vem

$$(4) \qquad \hat{f}(x) \cdot \delta(x) = \hat{f}(0) \cdot \delta(x)$$

Substituindo na igualdade 3, tem-se por sua vez

$$(5)\quad \hat{f}\cdot\delta^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}D^{n-k}(\hat{f}^{(k)}\cdot\delta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\cdot\delta^{(n-k)}$$

Consideremos então o produto $\theta(y-x)\cdot$ $\cdot\,\delta^{(n)}(x)$ onde $\theta\in\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ e $\delta^{(n)}$ designa a derivada de ordem n (inteiro não negativo) de δ. Vem de acordo com 5

$$\theta(y-x)\cdot\delta(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\theta^{(k)}(y)\delta^{(n-k)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_y^k\theta(y)\delta^{(n-k)}(x).$$

Para $n=0$, vem

$$\theta(y-x)\cdot\delta(x) = \theta(y)\cdot\delta(x)$$

o que associado à igualdade $\theta(y)\cdot\delta(x) =$ $= D_x[\theta(y)h(x)]$ onde h designa a função de Heaviside, vai permitir-nos escrever a conhecida fórmula de Dirac:

$$(6)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(y-x)\,\delta(x)\,dx = \theta(y)$$

válida para toda a distribuição $\theta\in\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$.

Do mesmo modo, se $\varphi = D^n g$, com $g\in\mathcal{C}(\mathbf{R})$, e usando a igualdade 2, obtem-se

$$\delta(y-x)\cdot\varphi(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k D_x^k[\delta_x^{(n-k)}(y-x)\cdot g(x)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_x^k D_y^{n-k}[\delta(y-x)g(x)]$$

e atendendo a que $\delta(y-x)g(x) = \delta(y-x)g(y)$, vem

$$\delta(y-x)\cdot\varphi(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_x^k D_y^{n-k}[\delta(y-x)g(y)]$$

isto é

$$(7)\qquad \delta(y-x)\varphi(x) = \delta(y-x)\cdot\varphi(y).$$

Este resultado, que é muito importante, pode ser aplicado ao cálculo do integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(g-x)\varphi(x)\,dx$. Então, atendendo a que $\delta(y-x)\cdot\varphi(y) = -D_x[h(g-x)\cdot\varphi(y)]$ onde h é a função de Heaviside, e a que

$$\lim_{x\to+\infty} h(y-x)\varphi(y) = 0$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} h(y-x)\varphi(y) = \varphi(y),$$

vem

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y-x)\varphi(x)\,dx = \varphi(y)$$

igualdade esta que é também conhecida por fórmula de Dirac.

Se φ admite uma primitiva com valores nos pontos α e β de $\mathbf{R}$, existe também o integral $\int_\alpha^\beta\delta(y-x)\varphi(x)\,dx$, e vem

$$\int_\alpha^\beta\delta(y-x)\varphi(x)\,dx = h(y-\alpha)\varphi(y) -$$

$$-h(y-\beta)\varphi(y).$$

*

* *

Uma multiplicação com interesse é ainda a que se pode efectuar entre elementos de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ e de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R},E)$. Também agora, dados $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ e $\hat{\varphi}\in\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R},E)$, diz-se produto de f por $\hat{\varphi}$ uma distribuição que se representa por $f\cdot\hat{\varphi}$ tal que:

I') Se $\hat{\varphi}$ é uma função contínua, $f\cdot\hat{\varphi}$ é o produto usual;

II′) É válida a regra de derivação

$$D(f\cdot\hat{\varphi})=f\cdot D\hat{\varphi}+f'\cdot\hat{\varphi}.$$

Esta operação fica unìvocamente determinada pelas propriedades I′ e II′, e sendo $\hat{\varphi}=D^n\hat{g}$, com $\hat{g}\in\mathcal{C}(\mathsf{R},E)$, tem-se ainda

$$f\cdot\hat{\varphi}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}D^{n-k}[f^{(k)}\cdot\hat{g}].$$

A respeito desta multiplicação, como se pode demonstrar fàcilmente, as igualdades

1. $(f+g)\cdot\hat{\varphi}=f\cdot\hat{\varphi}+g\cdot\hat{\varphi}$;
2. $f(\hat{\varphi}+\hat{\psi})=f\cdot\hat{\varphi}+f\cdot\hat{\psi}$;
3. $f\cdot(g\cdot\hat{\varphi})=(f\cdot g)\cdot\hat{\varphi}$;
4. $1\cdot\hat{\varphi}=\hat{\varphi}$;

são válidas quaisquer que sejam $f\cdot g\in\mathcal{C}^{\omega}(\mathsf{R})$ e $\hat{\varphi},\hat{\psi}\in\mathcal{C}_{\omega}(\mathsf{R},E)$.

$\mathcal{C}_{\omega}(\mathsf{R},E)$ constitui pois um módulo sobre o anel $\mathcal{C}^{\omega}(\mathsf{R})$.

Problemas

Seja f uma função complexa, definida e contínua sobre R, que verifica a seguinte propriedade: existe um natural n tal que $\dfrac{f(x)}{(x+i\alpha)^n}$, com α real $\neq 0$, é limitado sobre R. Nessas condições, demonstre que:

a) Sendo $\hat{\theta}(x)=e^{iyx}\cdot f(x)$ uma distribuição vectorial em x, com valores em $\mathcal{C}_{\omega}(\mathsf{R})$, tem-se

$$\hat{\theta}(-\infty)=\hat{\theta}(+\infty)=0;$$

b) Se $\varphi=D^m f$ com m natural, e $\hat{\Psi}(x)=e^{iyx}\cdot\varphi(x)$, vem

$$\hat{\Psi}(-\infty)=\hat{\Psi}(+\infty)=0.$$

c) Existem os integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iyx}f(x)\,dx$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iyx}\varphi(x)\,dx.$$

d) Se $\varphi=D^m f$, com m natural, tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iyx}D\varphi(x)\,dx=(-iy)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iyx}\varphi(x)dx.$$

Introdução à manipulação de fórmulas

por *F. Teixeira de Queiroz*
(Instituto Gulbenkian de Ciência)

Introdução. Aparecidos com o objectivo de tratar problemas numéricos, os ordenadores, têm pouco a pouco evoluído no sentido de efectuarem o tratamento de informação não numérica. Tal aspecto não pode ser ignorado pelo matemático, tanto mais que algumas das aplicações que daí resultam são de primordial importância para ele. Apontarei apenas, entre elas, os métodos automáticos de demonstração, o tratamento de problemas ligados à teoria dos grupos, à teoria dos gráficos e, finalmente, a manipulação de fórmulas. Procurarei nesta nota referir-me a esta última aplicação.

Por manipulação de fórmulas entender-se-á o tratamento analítico de expressões matemáticas, envolvendo números ou variáveis, sem que seja tomado em consideração qualquer conjunto de valores particulares que estas últimas possam tomar. Assim, faz parte do objecto da manipulação de fórmulas, as operações sobre polinómios, sobre expressões trigonométricas, a derivação de funções, a integração formal, o desenvolvimento em série de funções, a obtenção de equações diferenciais, etc.

Um matemático habituado a tratar problemas numéricos por meio de ordenador, encontrará ao abordar este assunto, uma panorâmica completamente diferente. Enquanto no tratamento de problemas numéricos, existe o domínio quase exclusivo de três linguagens: ALGOL, FORTRAN, BASIC, existe uma grande diversidade de linguagens destinadas à manipulação de fórmulas: ALTRAN, FORMULA ALGOL, FORMAC, MATHLAB, SIMBAL, REDUCE, etc. Nenhuma delas se impõe verdadeiramente às demais.

Há várias razões para uma tão grande multiplicidade de linguagens. Primeiramente, a estrutura dos elementos sobre que opera um programa destinado a manipular fórmulas é muito mais complexa do que qualquer das estruturas que aparecem em problemas numéricos. Em segundo lugar, como os programas manipuladores são normalmente redigidos em linguagens evoluídas (ALGOL, FORTRAN, LISP, etc.), eles serão fortemente marcados pelas possibilidades latentes destas. Finalmente, importa salientar que a construção de programas destinados à manipulação de fórmulas está longe de estar estabilizada. Os objectivos dos primeiros programas são muito menos ambiciosos que os de programação mais recente. Além disso, como alguns desses programas tiveram origem na necessidade de tratar uma família de problemas concretos, resulta daí que a natureza desses problemas marcou grandemente a forma e as possibilidades dessas linguagens. Assim, enquanto programas tais como PM e Alpak se limitavam quase exclusivamente a operar com polinómios com qualquer número de variáveis, as linguagens de construção mais recente admitem a possibilidade de trabalhar com funções racionais e, mesmo, com algumas transcendentes.

Haverá ainda a salientar um outro elemento que contribui para a diversidade das linguagens: uma característica comum a todos os programas manipuladores de fórmulas é o grande dispêndio de memória provocado pelos cálculos intermédios. É esse um dos elementos a ter sempre presente na elaboração dum programa. Como consequência disso resulta que as possibilidades a introduzir numa linguagem dependem muito da capacidade de memória do ordenador a que se destinam. Ordenadores mais rápidos e com maior capacidade de memória terão certamente linguagens com maior versatilidade.

Elementos dum manipulador de fórmulas. De entre as possibilidades que é usual encontrar-se num moderno manipulador de fórmulas destacamos a existência duma aritmética exacta, duma aritmética complexa, e dum conjunto de rotinas destinadas a operar sobre uma grande variedade de funções algébricas e transcendentes, entre as quais se inclue uma destinada a calcular derivadas. Quanto à integração, que nós saibamos, só o sistema MATH LAB dispõe duma rotina que a permite efectuar com suficiente generalidade.

Examinemos algumas das características que referimos acima mais em pormenor:

A existência de aritmética exacta vem prolongar as possibilidades numéricas usualmente disponíveis em ordenadores. O leitor, habituado a utilizar ordenadores na resolução de problemas numéricos, lida usualmente com dois tipos de constantes: inteiras e reais. Estas últimas são representadas com notação de vírgula fluctuante. Isto é: os números são representados com a forma $m \times b^e$ em que m, a mantissa, é formada pelos algarismos mais significativos e onde e representa um expoente inteiro. Quanto às constantes inteiras, elas não podem exceder um determinado valor que depende do ordenador utilizado. Tais tipos de notação não se tornam convenientes para a manipulação de fórmulas, pois, não só aparecem com frequência números inteiros que excedem o valor limite, como também, em certos processos, torna-se necessário conhecer com exactidão os valores racionais. Em tais casos não será suficiente representar, por exemplo, $1/3$ com a forma 0.33333333333. A fim de evitar isso, os programas manipuladores têm dispositivos que permitem tratar os números fraccionários como se estes fossem fórmulas (quocientes de inteiros) e os números inteiros libertos de qualquer limite. Evidentemente, para que um tal programa seja eficiente torna-se necessário dotá-lo dum dispositivo que torne qualquer fracção irreductível.

A possibilidade de operar quer com polinómios quer com funções racionais constitue um dos elementos centrais dum programa destinado a manipular fórmulas. É relativamente a um tal elemento que os programas diferem mais uns dos outros. Se o programa actuar duma forma demasiado rígida, representará um polinómio com uma forma padrão o que acarretará, por vezes, sérios inconvenientes. Assim, se um programa representar um polinómio ordenando-o segundo as potências crescentes duma das suas variáveis, tomando como coeficientes polinómios das restantes variáveis (ordenados da mesma maneira), tratará duma forma altamente inconveniente o polinómio $(x+y+z+t)^{100}$. Da mesma forma, funções trigonométricas poderão ser substituídas por outras, equivalentes, mas menos simples. Assim, possìvelmente a função $(\cos x)^4$ será substituída por $1/8 \times \cos 4x + 1/2 \times \cos 2x + 3/8$.

Na realidade o conceito de fórmula simplificada difìcilmente é reductível a um conceito único. A fim de evitar os inconvenientes referidos, os modernos programas introduzem mecanismos que facultam quer operar sobre fórmulas segundo as conveniências do utilizador, quer criar estados diferentes no programa manipulador que o obriguem a actuar segundo essas conveniências. O utilizador poderá usar fórmulas expandidas ou não conforme a natureza das mesmas.

É certamente como consequência da não existência dum conceito único de fórmula simplificada que se deve não só o aparecimento. (por volta de 1968), dum certo número de linguagens conversacionais, como também a modificação de algumas das já existentes, por forma a dotá-las das mesmas possibilidades. O utilizador poderá, por meio duma consola e dum visor de raios catódicos, comandar o desenvolvimento das suas fórmulas, particularizar as soluções das suas equações, etc. De entre as linguagens deste tipo apontamos apenas a nova versão de MATH LAB 68, REDUCE, MAGIC PAPER e Simbolic Mathematical Laboratory.

Consideremos agora a utilização de funções algébricas e transcendentes. O matemático usa um certo número de funções que representa por meio de siglas ou cadeias alfanuméricas (sin, cos, sqrt, ...). A necessidade de utilizar tais siglas em fórmulas, implica a necessidade de dotar os programas manipuladores de rotinas que actuem sobre os seus argumentos e os simplifiquem.

Duma maneira geral, podemos considerar uma fórmula, como sendo constituída por uma função racional, podendo ter, em vez de algumas das suas variáveis, siglas representativas de funções, as quais, por sua vez, terão por argumento funções racionais (com ou sem novas siglas).

O conjunto de siglas seleccionadas, juntamente com a família de funções racionais, delimita o campo de actuação dum manipulador de fórmulas. A possibilidade de aí utilizar um operador de derivação não oferece dificuldade de maior. Foi certamente esse o primeiro elemento dum manipulador pois já em 1953 existiam algorítmos para efectuar a derivação.

Já a existência de siglas cria problemas delicados na simplificação de fórmulas. Para vermos isso mais detidamente, consideremos as duas instruções

PI : = 3 14159265359 ;
F : = SIN (PI/2 − X) — COS (X) ;

que tanto podem pertencer a um programa destinado à manipulação de fórmulas, como a um programa destinado ao tratamento dum problema numérico. É evidente que, pertencendo a um programa destinado ao tratamento dum problema numérico, para todo o valor real que for atribuído a X, o valor de F será 0. Isso implica que a última instrução seja procedida, pelo menos, duma instrução que atribua um valor a X. Só assim ela poderá ser executável. No programa compilado haverá o cálculo dos dois argumentos e a chamada a duas subrotinas que calcularão o seno e o cosseno. Obter-se-ão assim dois valores sensìvelmente iguais que, por diferença, conduzirão a um resultado nulo.

O tratamento das duas instruções por um manipulador de fórmulas terá de ser completamente diferente, pois, o resultado zero deverá ser obtido independentemente de qualquer valor, real ou complexo, atribuído a X. Em particular, poderá mesmo não lhe ter sido atribuído nenhum valor. Isso cria o problema da representação interna da função que corresponde a uma determinada sigla por forma a permitir não só o cálculo da função para qualquer valor, real ou complexo do argumento, como também a simplificação de expressões contendo a sigla, como ainda a sua transformação no caso da função admitir alguma expressão algébrica de adição (como é o caso do exemplo acima).

Para concluir este parágrafo, vamos abordar o problema da integração formal. Ao contrário do que acontece com a derivação, a integração formal de fórmulas por meio dum manipulador cria problemas muito delicados. Isso não será de surpreender por quanto o cálculo duma primitiva depende muito da experiência pessoal do matemático. Realmente, o matemático recorre a métodos heurísticos, os quais são de difícil mecanização. Além disso, no seio duma família de fórmulas definidas com suficiente generalidade (Funções racionais + siglas), existem sempre elementos que não admitem primitiva nessa família. É o caso da função racional $1/x$ cuja primitiva não é racional, é o caso de EXP$(-x \uparrow 2)$, cuja primitiva não é uma exponencial, etc. Finalmente, relacionado com este problema, existe ainda o problema da factorização de polinómios e o da decomposição das funções racionais em elementos simples. Porém, apesar das dificuldades assinaladas, a primitivação mecânica encontra-se numa fase muito avançada de resolução, permitindo o cálculo da primitiva duma fórmula, caso ela exista na família admissível, ou o isolamento das partes não primitiváveis sempre que estas sejam detectadas [4].

Definição de fórmula. Demos, no parágrafo anterior, uma caracterização não formal de fórmula. Vamos seguidamente procurar representar o mesmo conceito duma maneira formal. Porém, a fim de aligeirarmos essa representação, suprimimos algumas definições menos relevantes. Algumas, o leitor completá-las-á fàcilmente reportando-se, por exemplo, ao relatório revisto da linguagem ALGOL 60, outras, que variam de manipulador para manipulador, encontrá-las-á nas descrições de qualquer linguagem particular que tencione utilizar.

Tomaremos para sintaxe do conceito de fórmula :

```
<fórmula> : : = <termo> | + <termo> |
                − <termo> |
                <fórmula> + <termo> |
                <fórmula> − <termo>
  <termo> : : = <factor> |
                <termo> * <factor> |
                <termo> / <factor> |
                <termo> : <fórmula>
 <factor> : : = <primário> |
                <factor> ↑ <primário>
  primário : : = <número> | <variável> |
                (<fórmula>) |
                <identificador> |
                SIGLA (<fórmula>) |
                <substituição> |
                <derivada>
   SIGLA : : = EXP | LN | SIN | COS |
                ARCTAN | SQRT | SINH |
                COSH | CC | SIMPL
<substituição> : : = SUBST (<fórmula>,
                <lista de pares>)
<Derivada>  : : = DER (<fórmula>,
                <variável>)
<lista de pares> : : = <variável>,
                <fórmula> | <lista de
                pares>, <variável>,
                <fórmula>
```

Nesta descrição CC corresponde à passagem à conjugada, SIMPL à simplificação de fórmulas. Quanto à operação :, que introduzimos na descrição de termo, não aparece usualmente em nenhuma formalização de manipuladores que conhecemos. Introduzimo-la porque nos tem permitido manipular duma maneira muito cómoda fracções contínuas e calcular os seus aproximantes. O seu significado será equivalente a / (...) em que o parêntesis é estendido, quer até ao fim da fórmula, quer até ao primeiro sinal) que não tenha correspondente à direita do sinal :.

Quanto à sigla SUBST destina-se a atribuir valores às diferentes variáveis que figuram na lista. Cada variável será substituída pela fórmula que a segue. Esta pode ser um valor numérico.

A descrição dada acima permitir-nos-á fazer atribuições numa família de fórmulas muito vasta. No decurso desta nota, sempre que apareça qualquer sigla que não figure nessa descrição será definida na ocasião.

Todo o manipulador de fórmulas representa estas com uma representação padrão. Porém, essa representação varia de manipulador para manipulador. Uma tal diversidade é devida não tanto à natureza das fórmulas manipuladas ou às operações definidas sobre elas, como à maior ou menor facilidade com que a linguagem em que o próprio manipulador foi redigido opera sobre as estruturas de informação. Assim, não será de estranhar que um manipulador, redigido em Fortran, represente as fórmulas como simples cadeias, um outro, redigido em Algol, as represente como arborescências binárias, ou um terceiro, redigido em Lisp, utilize listas para essa representação.

Domínios de aplicação. Os domínios de aplicação dos manipuladores de fórmulas são variados podendo desde já prever-se, para breve, o aparecimento de vasta literatura sobre o assunto. Dum modo geral, um manipulador de fórmulas tem um papel a desempenhar onde seja necessário efectuar cálculos analíticos longos ou onde seja de desejar um acréscimo na fiabilidade dos resultados finais.

Damos seguidamente alguns exemplos de trabalhos realizados com auxílio de manipuladores:

Cálculo das Efemérides Lunares. Trata-se da revisão dos cálculos executados sob a orientação de DELAUNAY e aos quais este consagrou grande parte da sua existência. Levou-se agora a aproximação mais longe do que então. O cálculo pôde ser efectuado em seis sessões de três horas cada.

Cálculo dos símbolos de CHRISTOFELL. Tem sido um programa construído em várias das linguagens dada a sua importância em relatividade geral.

Transformações canónicas. Formulado um problema de mecânica quântica num conjunto de variáveis, efectuar uma mudança de variáveis canónicas.

Temos ainda encontrado literatura com diversas aplicações a problemas de acústica, filas de espera, mecânica quântica, mecânica celeste, etc.

Seguidamente, para que o leitor possa averiguar melhor os domínios de aplicação dos manipuladores, damos alguns exemplos de aplicação obtidos com um pequeno manipulador com que temos trabalhado. Destinado a ordenadores de dimensões médias, tal manipulador não permitirá, talvez, grandes voos. Tem, porém, um valor didático evidente. A sua concepção original é de VAN DE RIET. Usamos uma versão devida a STELLA ATKINS da Universidade de Warwick, na qual introduzimos algumas modificações.

O primeiro problema que apresentaremos (a que demos o nome de problema n.º 5) consistirá no estudo do polinómio

$$p(x)=x^{12}+2\cdot x^{11}-4\cdot x^9-7\cdot x^8-4\cdot x^7+ + 2\cdot x^5+5\cdot x^4+8\cdot x^3+12\cdot x^2+8\cdot x+4$$

sabendo-se que o mesmo tem raízes múltiplas.

Se o polinómio tem raízes múltiplas, essas raízes serão comuns a $p(x)$ e a $q(x)=p'(x)$. Então $h(x)$, máximo divisor comum dos dois polinómios e $g(x)=h(x)/h(0)$ terão como raízes as raízes múltiplas de $p(x)$, todas com o grau de multiplicidade diminuído duma unidade. Desta forma, $f(x)= =p(x)/g(x)$ terá as mesmas raízes que $p(x)$, sendo todas elas simples. As raízes múltiplas serão as raízes de $r(x)$ máximo divisor comum de $g(x)$ e de $f(x)$ e as raízes simples serão as raízes de $b(x)= =g(x)/r(x)$.

O programa que damos a seguir segue a par e passo este raciocínio. A sigla OUTR implica uma edição de fórmula, QUOT um quociente de fórmulas e COMMDIV o máximo divisor comum.

PROGRAMA

```
«PROBLEMA 5»
FIX;
P:=X↑12+2*X↑11—4*X↑9—
    7*X↑8—4*X↑7+2*X↑5+
    5*X↑4+8*X↑3+12*X↑2+
    8*X+4;
Q:=DER(P,X);
H:=COMMDIV(P,Q);
G:=H/SUBST(H,X,0);
OUTR(G:=G);
F:=QUOT(P,G,A);
OUTR(F:=F);
R:=COMMDIV(G,F);
OUTR(R:=R);
S:=R/SUBST(R,X,0);
OUTR(S:=S);
B:=QUOT(F,S,C);
OUTR(B:=B);
ERASE;
END;
```

RESULTADOS

```
PROBLEMA 5
G:=—1/2*X↑6—X↑5—1/2*X↑4+
    X↑3+5/2*X↑2+2*X+1;
F:=—2*X↑6+2*X↑4+2*X↑2+4;
R:=—2*X↑4—2*X↑3+2*X↑2+
    4*X+4;
S:=—1/2*X↑4—1/2*X↑3+1/2*X↑2
    +X+1;
B:=4*X↑2—4*X+4;
```

Poder-se-ia seguidamente tratar duma forma análoga $g(x)$.

O problema que seguidamente apresentamos (a que demos o nome de problema n.º 11) consiste na determinação do desenvolvimento, pela fórmula de MACLAURIN, de $1/\sqrt{1+2\cdot m\cdot X+n\cdot X^2}$.

No programa, a sigla TPS designa série truncada, NOTEXP cria um estado que impede a simplificação de fórmulas e EXPAND repõe essa simplificação. Fazemos a edição da função, do seu valor e do das suas derivadas calculadas para $x=0$. Editamos ainda a função expandida com 4 termos.

PROGRAMA

```
«PROBLEMA 11»
  FIX;
  NOTEXP;
  F:=1/SQRT(1+2*M*X+N*X↑2);
  EXPAND;
  OUTR(F:=F);
  C0:=SUBST(F,X,0);
  OUTR(C0:=C0);
  G:=SIMPL(DER(F,X));
  C1:=SUBST(G,X,0);
  OUTR(C1:=C1);
  H:=SIMPL(DER(G,X));
  C2:=SUBST(H,X,0);
  OUTR(C2:=C2);
  P:=SIMPL(DER(H,X));
  C3:=SUBST(P,X,0);
  OUTR(C3:=C3);
  Q:=SIMPL(ER(P,X));
  C4:=SUBST(Q,X,0);
  OUTR(C4:=C4);
  Y:=TPS(X,C0,C1,C2/2,C3/6,C4/24);
  OUTR(Y:=Y);
  ERASE;
  END;
```

RESULTADOS

```
PROBLEMA 11
F:=1/SQRT(X↑2*N+2*M*X+1);
C0:=1;
C1:=—M;
C2:=3*M↑2—N;
C3:=—15*M↑3+9*M*N;
C4:=105*M↑4—90*M↑2*N+9*N↑2;
```

```
Y:=1+(-M)*X+(3/2*M↑2-1/2*N)*X↑2+(-5/2*M↑3+3/2*M*N)*X↑3+
    (35/8*M↑4-15/4*M↑2*N+3/8*N↑2)*X↑4;
```

Finalmente, o terceiro problema (a que demos o nome de cálculo das variações n.º 1) consiste na determinação das equações de Euler, e integral primeiro correspondente ao funcional

$$I=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\,dx.$$

No programa, SPECDER é uma instrução qne permite dar nome às derivadas de funções. No exemplo chamamos DY à derivada de Y em ordem a X, e DDY à derivada de DY em ordem a X.

PROGRAMA

```
«CÁLCULO DAS VARIAÇÕES 1»
    FIX;
    L:=SQRT(1+DY↑2)/X;
    OUTR(FUNÇÃO:=L);
    SPECDER (X,Y,DY,DY,DDY);
    E:=DER(DER(L,DY),X)-
        DER(L,Y);
    OUTR(EQ. DE EULER 0:=E);
    C:=L-DY*DER(L,DY);
    OUTR(INTEGRAL PRIM. C:=C);
ERASE;
END;
```

RESULTADOS

```
CÁLCULO DAS VARIAÇÕES
FUNÇÃO:=EXP(1/2*LN(DY↑2+1))/X;
EQ. DE EULER 0:=(-DY↑3*EXP(1/2*LN(DY↑2+1))+X*DDY*EXP(1/2*
    LN(DY↑2+1))-DY*EXP(1/2*LN(DY↑2+1))/(DY↑4*X↑2+2*DY↑2*
    X↑2+X↑2);
INTEGRAL PRIM. C:=EXP(1/2*LN(DY↑2+1))/(DY↑2*X+X).
```

Chamamos a atenção do leitor para a forma como o processador tratou neste problema SQRT(DY↑2+1). A forma adoptada tornou-se necessária para permitir a simplificação das fórmulas. No problema 11 essa notação foi travada.

BIBLIOGRAFIA

A bibliografia sobre este tema é muito extensa e dispersa. Recomendamos ao leitor que deseje aprofundar o assunto os artigos:

[1] Jean Sammet, *Formula manipulation by computer*, Anvances in computers n.º 8.

[2] ———, *Survey of Formula manipulation*, Comm of ACM n.º 8 Vol. 9.

[3] Joel Moses, *Algebric Simplification : A guide for the perplexed*, Comm. of the ACM n.º 8 Vol. 14.

[4] ———, *Simbolic integration: The stormy decade*, idem.

[5] ———, *Towrds a general theory of special functions*, Comm. of the ACM n.º 7 Vol· 15.

[6] M. E. Engeli, *Formula manipulation — The user's points of view*, Advances in information systems science Vol. 1.

[7] Van de Riet, *Formula manipulation in Algol 60.*

[8] Stela Atkins and H. S. Jones, *Formula manipulation using Algol 60.*

Uma aplicação de cálculo simbólico com interesse para o estudo da teoria dos circuitos eléctricos

por Fernando M. Sequeira
Lisboa

Introdução

O cálculo simbólico definido por J. SEBASTIÃO E SILVA no trabalho «Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables à spectre vide ou non borné» [2], permite resolver muitos problemas de física e de electricidade; convém no entanto realizar certos trabalhos de adaptação dos resultados nele expressos, no sentido de os tornar mais manejáveis.

Com esse objectivo deduzimos pois algumas fórmulas de aplicação imediata, cujo domínio de validade é todavia mais lato do que o definido pelas condições em que elas foram deduzidas. Já usadas em circunstâncias menos gerais, e por vezes de forma heurística, elas permitem uma aplicação fácil do cálculo simbólico à teoria dos circuitos, ao estudo dos sistemas dinâmicos lineares, à teoria do controle linear automático, à resolução de sistemas de equações diferenciais, etc. Na parte final apresentamos alguns exemplos dessas aplicações.

1. As redes lineares interpretadas como funções

Um quadrupolo eléctrico, na medida em que a cada «sinal de entrada» faz corresponder um «sinal de saida», define uma função. Tanto o sinal de entrada, como o de saída, são em geral constituídos por duas distribuições $u_1(t)$ e $u_2(t)$ na variável tempo: duas correntes, duas tensões ou uma corrente e uma tensão; no que se segue, designá-las-emos por *componentes do sinal*, ou simplesmente por *sinais*.

Um quadrupolo diz-se linear, quando à soma de dois sinais de entrada faz corresponder a soma das respectivas saídas, e à multiplicação de um sinal por uma constante, faz corresponder a multiplicação pela mesma constante da respectiva saída.

Se G designa a função definida pelo quadrupole, X a entrada e Y a saída, estas propriedades podem-se representar pelas expressões:

a) $Y = G(X)$;

b) $G(X_1 + X_2) = G(X_1) + G(X_2)$;

c) $G(\lambda X) = \lambda G(X)$

onde X_1 e X_2 designam dois sinais de entrada e λ é uma constante.

A adição de sinais e a multiplicação por constantes são as usuais, e correspondem à adição e à multiplicação por essas constantes das respectivas componentes:

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, \; u_2 + v_2)$$

$$\lambda(u_1, u_2) = (\lambda u_1, \; \lambda u_2)$$

onde (u_1, u_2) e (v_1, v_2), são dois sinais de duas componentes cada, e λ é uma constante.

Cada componente da saída é também uma função linear da entrada, podendo-se escrever

$$v_1 = G_1(u_1, u_2)$$

$$v_2 = G_2(u_1, u_2)$$

onde u_1, u_2 são as componentes da entrada e v_1, v_2 as da saída.

Definindo-se então as aplicações $G_{l,k}$, $l, k=1, 2$ pelas relações $G_{11}(u_1)=G_1(u_1, 0)$, $G_{12}(u_2)=G_1(0, u_2)$, $G_{21}(u_1)=G_2(u_1, 0)$ e $G_{22}(u_2)=G_2(0, u_2)$, pode escrever-se

$$v_l = \sum_{k=1}^{2} G_{lk}(u_k) \qquad l=1, 2$$

ficando pois cada quadrupole linear determinado por estas quatro aplicações G_{lk}.

Um esquema análogo pode também aplicar-se a uma rede linear. Sabe-se que então existe um conjunto de grandezas, correntes ou tensões, $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_p(t)$ linearmente independentes, tais que a corrente através de qualquer ramo l da rede, ou a tensão entre os seus terminais, v_l, se pode exprimir como função linear daquelas grandezas:

$$v_l = G_l(u_1, u_2, \cdots, u_p).$$

E em virtude de a rede ser linear, para cada l e cada k pode-se definir uma aplicação linear G_{lk} que a cada componente u_k da entrada faz corresponder a componente de saída $G_{lk}(u_k)$ dada pela relação

$$G_{lk}(u_k) = G_l(0, 0, \cdots, 0, u_k, 0, \cdots, 0)$$

tendo-se então

$$G_l(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \sum_{k=1}^{p} G_{lk}(u_k).$$

O estudo do funcionamento das redes pode pois fazer-se através das aplicações lineares G_{lk}, que a cada componente da entrada (distribuição na variável tempo) faz corresponder uma distribuição na mesma variável.

2. Os sinais como elementos de um espaço de distribuições

No que se segue vamos supor que os sinais são distribuições na variável tempo, de tipo exponencial [1], isto é, da forma

$$g = D^n [e^{n|t|} f(t)]$$

onde $n=0, 1, 2, \cdots$, f é uma função complexa, contínua, limitada, e D designa a derivação em ordem ao tempo. Designaremos por Λ o espaço vectorial constituído por estas distribuições, que suporemos munido de estructura topológica usual ([1]).

Esta situação é suficientemente geral para englobar os casos que se apresentam na prática, e além disso Λ verifica algumas propriedades que são importantes para o estudo dos circuitos.

Uma dessas propriedades resulta do seguinte. Tendo em atenção que toda a distribuição $g \in \Lambda$ é decomponível numa diferença [1] $g^+ - g^-$ de duas distribuições g^+ e g^- pertencentes a Λ, nulas respectivamente à esquerda e à direita da origem, determinadas a menos de uma combinação linear de $\delta(t)$ e de suas derivadas, pode definir-se a transformação bilateral de Fourier do seguinte modo [1]: dado $g = g^+ - g^- \in \Lambda$, diz-se transformada de Fourier $\mathcal{F}(g)$ de g, a função complexa $\varphi(z)$, holomorfa no complementar V_α de uma faixa $|\operatorname{Im} z| \leqq \alpha$ (α real não negativo dependente de g) do plano complexo, e determinada a menos de um polinómio inteiro em z pelas relações

$$\varphi(z) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} g^+(t) e^{izt} dt & \text{se } \operatorname{Im} z > 0 \\ \int_{\mathbb{R}} g^-(t) e^{izt} dt & \text{se } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Demonstra-se ainda que cada uma destas imagens $\mathcal{F}(g)$, $g \in \Lambda$, é uma função de crescimento lento ([2]) sobre o fecho de V_α. Estas classes de funções, determinadas a menos de um polinómio inteiro em z, chamam-se ultradistribuições temperadas [1], e o seu conjunto munido da adição e da multiplicação por complexos usuais, constitui um espaço vectorial complexo, que designaremos por U.

Recìprocamente, dada uma ultradistribuição temperada, a relação

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta\alpha} e^{-izt}\,\varphi(z)\,dz$$

onde φ é uma representante qualquer da ultradistribuição, determina unìvocamente uma distribuição $g(t)\in\Lambda$. Neste integral, Δ_α é a fronteira de uma banda $|I_m z|\leqq\alpha$ (α real positivo) do plano complexo, tal que $\varphi(z)$ é holomorfa no complementar V_α dessa banda, e de crescimento lento sobre o fecho de V_α; a fronteira é orientada por forma a deixar à direita os pontos da banda.

As aplicações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ são injectivas, sendo $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}$ e $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ as identidades de respectivamente U e Λ.

Se identificarmos pois cada sinal a uma distribuição de Λ, e as decomposições espectrais aos elementos de U, a transformação de Fourier e a sua inversa fazem corresponder a cada sinal uma decomposição espectral e recìprocamente.

Estas aplicações são lineares, e sobre U é possível definir uma topologia (3) por forma que elas são também isomorfismos contínuos [1].

Entre os elementos de U, têm particular interesse os que são representados por funções $\varphi(z)$, prolongáveis como funções holomorfas ao complementar do eixo real e de crescimento lento (para ∞ e para o eixo real) nos smi-planos $\operatorname{Im} z>0$ e $\operatorname{Im} z<0$; nessas condições existem os limites no sentido das distribuições temperadas (4),

$$\lim_{y\to 0^{\pm}}\varphi(\omega+iy)=g^{\pm}(\omega).$$

As distribuições $g^{+}(\omega)$ e $g^{-}(\omega)$ são temperadas, e sendo injectiva a aplicação linear $\varphi(z)\to g^{+}(\omega)-g^{-}(\omega)$, identificam-se por vezes estas funções holomorfas $\varphi(z)$ com as suas imagens $g(\omega)=g^{+}(\omega)-g^{-}(\omega)$ no espaço S' das distribuições temperadas.

Recorrendo a estas identificações, a transformação bilateral de Fourier, coincide com a transformação de Fourier usual, definindo um automorfismo de S', que é contínuo para a topologia usual de S' (4).

3. Uma álgebra de operadores

A continuidade de um operador relativamente a uma dada topologia permite muitas vezes tirar conclusões importantes a respeito das suas propriedades. E no caso das redes tem-se um exemplo.

Com efeito, se se identificam os sinais com elementos de Λ, e se a continuidade dos operadores é relativa à topologia deste espaço, resultam de forma quase imediata muitas das propriedades com interesse para estudo dos circuitos.

Uma dessas propriedades resulta de se supor ainda que as características dos circuitos não se alteram ao longo do tempo, o que significa que os operadores G definidos pelas redes são comutáveis com a translacção no tempo. Como consequência, vem que:

I. *A todo o operador G definido por uma rede, contínuo para a topologia de Λ, corresponde uma distribuição $g(t)$ de decrescimento sub-exponencial* (5), *tal que*

$$G(f)=g*f=\int_R g(t-\xi)f(\xi)\,d\xi$$

para todo o $f\in\Lambda$.

$g(t)$ é obviamente a imagem $G(\delta)$ de função de Dirac, ou a resposta do circuito a um impulso de Dirac.

Uma outra propriedade é a seguinte:

II. *A decomposição espectral do sinal de saída obtém-se multiplicando por* $\mathcal{F}(g)$ [1] *a decomposição espectral do sinal de entrada.*

Resultado importante advém ainda de se admitir um princípio de causalidade entre a entrada e a saída: o valor do sinal de saída num dado instante t (quando existir) não pode depender do valor do sinal de entrada em instantes posteriores a t, o que implica:

III. *As respostas* $g(t)$ *dos circuitos a impulsos de* DIRAC *são nulas à esquerda de origem.*

Supondo portanto que os sinais são de crescimento exponencial, impondo a continuidade dos operadores relativamente à topologia de Λ, bem como a comutabilidade com a translacção no tempo e o referido princípio de causalidade entre a entrada e a saída, selecciona-se um tipo de operadores para os quais se deduzem as propriedades I, II e III.

Sucede porém, que estes operadores não são suficientes para estudar muitos dos circircuitos com interesse; os circuitos ligados a este tipo de operadores respondem com um sinal de decrescimento sub-exponencial ao impulso $\delta(t)$.

Uma generalização destas propriedades a outros circuitos, e portanto a outros operadores, é então de considerar; e um exemplo é o constituído pelos operadores G da forma

$$G(f)=g*f=\int_{\mathbf{R}} g(t-\xi)f(\xi)\,d\xi$$

onde $g\in\Delta$ e é nula à esquerda da origem. São estes os operadores que nos interessam, isto é, operadores lineares G que ao impulso $\delta(t)$ fazem corresponder imagens $G(\delta)=$ $=g\in\Lambda$, nulas à esquerda da origem.

Cada um destes operadores $G \leftrightarrow g$ terá então o seu domínio constituído pelas distribuições $f\in\Lambda$ para as quais existe o produto de convolução $g*f$, satisfaz o referido princípio de causalidade e comuta com a translacção.

O conjunto destas distribuições $g\in\Lambda$ nulas à esquerda da origem, munido da estrutura vectorial induzida por Λ e do produto de convolução, constitui uma álgebra comutativa complexa, com elemento unidade. Se a munirmos da topologia induzida por Λ, relativamente à qual o produto de convolução é contínuo, ela passa a constituir também uma álgebra localmente convexa, completa e separada. No que se segue designá-la-emos por Λ^{+}.

A transformação de FOURIER $\mathcal{F}$ define um isomorfismo vectorial entre Λ^{+} e o subespaço U^{+} de U constituído pelas ultradistribuições que admitem uma representante $\varphi(z)$ nula no semi-plano $\operatorname{Im} z<0$. Se em U^{+} introduzimos o produto usual, U^{+} adquire a estructura de uma álgebra, e $\mathcal{F}$ passa a definir um isomorfismo algébrico entre Λ^{+} e U^{+}.

Se rodarmos de 90° os elementos de U^{+} pela transformação $z\to -iz$, obtemos por sua vez uma álgebra V^{+}, isomorfa de U^{+}, e que é constituído pelas imagens de LAPLACE [1] $\mathcal{L}(g)$ dos elementos $g\in\Lambda^{+}$. A transformação de LAPLACE define um isomorfismo entre Λ^{+} e V^{+}, e a seu respeito são válidas as relações

$$a)\ \mathcal{L}=R^{-1}\mathcal{F} \qquad c)\ \mathcal{L}^{-1}=\mathcal{F}^{-1}R$$

$$b)\ \mathcal{F}=R\mathcal{L} \qquad d)\ \mathcal{F}^{-1}=\mathcal{L}^{-1}R^{-1}$$

onde R representa a rotação de 90° definida em V^{+} pela transformação $z\to iz$.

A respeito das transformações de FOURIER e de LAPLACE são ainda válidas as seguintes propriedades:

I. $\mathcal{F}(D g) = - i z \mathcal{F}(g)$

II. $\mathcal{F}(g * h) = \mathcal{F}(g) \cdot \mathcal{F}(h)$

III. $\mathcal{F}^{-1}(\varphi \cdot \psi) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi) * \mathcal{F}^{-1}(\psi)$

IV. $\mathcal{F}(t \cdot g) = - i D_z \mathcal{F}(g)$

I'. $\mathcal{L}(D g) = z \cdot \mathcal{L}(g)$

II'. $\mathcal{L}(g * h) = \mathcal{L}(g) \cdot \mathcal{L}(h)$

III'. $\mathcal{L}^{-1}(\Phi \cdot \theta) = \mathcal{L}^{-1}(\Phi) * \mathcal{L}^{-1}(\theta)$

IV'. $\mathcal{L}(t \cdot g) = - D_z \mathcal{L}(g)$

quaisquer que sejam $g, h \in \Lambda^+$, $\varphi, \psi \in U^+$ e $\Phi, \theta \in V^+$.

Ás transformadas de FOURIER dos elementos de Λ^+ chamaremos respostas de frequência dos circuitos correspondentes, e às transformadas de LAPLACE, funções de transferência.

As respostas de frequência serão pois, as funções complexas $\varphi(z)$, holomorfas num semi-plano $\operatorname{Im} z > \alpha$ (α real, dependente de φ) e de crescimento lento sobre o seu fecho, e as funções de transferência serão as funções $\theta(z)$, holomorfas num semi-plano $Re\, z > \alpha$ (α real dependente de θ) e de crescimento lento sobre o seu fecho.

4. Funções de operadores

No parágrafo anterior definiu-se uma álgebra de operadores lineares, com elemento unidade, isomorfa de Λ^+, constituída pelos operadores G da forma

$$G(f) = \int_R g(t - \xi) f(\xi) d\xi$$

com $g \in \Lambda^+$. No que se segue, identificaremos pois cada um destes operadores com a distribuição correspondente, isto é, a álgebra dos operadores com Δ^+.

A estructura vectorial desta álgebra verifica-se a respeito das operações usuais de adição e de multiplicação por complexos, e do produto de convolução. Munido de estructura topológica induzida por Λ, ela é ainda completa.

A transformação de FOURIER define por sua vez um isomorfismo entre Λ^+ e U^+, que ao produto de convolução em Λ^+ faz corresponder o produto usual em U^+. A transformação de LAPLACE define por sua vez um isomorfismo entre Λ^+ e V^+, que ao produto de convolução em Λ^+ faz corresponder o produto usual em V^+.

Posto isto, seja $\mathcal{G}$ um filtro de sub-conjuntos do plano complexo, que admite uma base regular $\{G_k\}$ (6), e $A(\mathcal{G})$ a álgebra das funções holomorfas de crescimento lento sobre $\mathcal{G}$ [2]: Nestas condições, prova-se que [2]: *existe uma correspondência biunívoca $g \leftrightarrow \mathcal{B}$ entre os elementos de Λ^+ cujo filtro espectral é mais fino do que $\mathcal{G}$, e os homomorfismos contínuos $\mathcal{B}$ de $A(\mathcal{G})$ em Λ^+, tais que $\mathcal{B}(1) = \delta(t)$. Esta correspondência é definida pelas fórmulas*

$$(1) \quad \begin{cases} \mathcal{B}(\hat{z}) = g \\ \mathcal{B}(\Phi) = \dfrac{1}{2\pi i}(g - \alpha)^n * \\ * \displaystyle\int_{\Gamma_n} \frac{\Phi(\lambda)(g - \lambda\delta)^{-1}}{(\lambda - \alpha)^n} d\lambda \qquad \forall\, \Phi \in A(\mathcal{G}) \end{cases}$$

onde α é qualquer ponto do plano complexo pertencente a $\mathbf{C} - G_1$, $\dfrac{\Phi(\lambda)}{(\lambda - \alpha)^{n-1}}$ é suposta limitada sobre G_n e holomorfa no seu interior, e Γ_n é a fronteira de G_n orientada por forma a deixar à direita os pontos de G_n.

Isto é, quando todo o elemento de $\mathcal{G}$ é um conjunto espectral de um dado $g \in \Lambda^+$, é possível definir as funções $\Phi(g)$, com $\Phi \in A(\mathcal{G})$, e o homomorfismo $\Phi \to \Phi(g)$ é contínuo.

Para determinar os conjuntos espectrais de um dado $g \in \Lambda^+$ pode então fazer-se uso do seguinte resultado, que se demonstra recorrendo à transformação de FOURIER: *um conjunto $S \subset \mathbf{C}$ é um conjunto espectral de $g \in \Lambda^+$, se e só se existe um $n \in \mathbf{N}$, um real $\beta > 0$ e um $I_k = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \geq k\}$, $k \in \mathbf{N}$, tais que para todo o $z \in I_k$ e todo o $\lambda \in \mathbf{C} - S$ se tem $|z^n(\lambda - \varphi(z))| > \beta$, em que $\varphi(z) = \mathcal{F}(g)$.*

Este resultado implica por sua vez que o *filtro espectral de g é mais fino do que $\mathcal{G}$, se e só se para todo o G_l de uma base regular $\{G_l\}$ existe um I_k, $k \in \mathbf{N}$, tal que $\Phi(I_k) \subset G_l$.*

Nestas condições, aplicando a transformação de FOURIER à fórmula (1), e fazendo $\mathcal{F}(g) = \varphi$, vem

$$\mathcal{F}(\Phi(g)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(\varphi(z) - \alpha)^n \int_{\Gamma_n} \frac{\Phi(\lambda)}{(\lambda - \alpha)^n (\varphi(z) - \lambda)} d\lambda =$$

$$= \Phi(\varphi(z))$$

isto é

$$\Phi(g) = \mathcal{F}^{-1}\Phi(\varphi(z)). \tag{2}$$

Quando o filtro espectral de g é mais fino do que $\mathcal{G}$, a função composta $\Phi(\varphi(z))$ definida sobre um I_k é um elemento de U^+, tendo pois sentido a fórmula (2).

Uma generalização possível destes resultados pode ser obtida com a álgebra $A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$ das funções com valores em Λ^+, holomorfas e de crescimento lento sobre $\mathcal{G}$. A este respeito, identificando cada elemento $\Phi \in A(\mathcal{G})$ com $\Phi \times \delta(t) \in A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$ prova-se que [2]: *para todo o elemento $g \in \Lambda^+$ cujo filtro espectral é mais fino do que $\mathcal{G}$, o homomorfismo $\mathcal{H}$ de $A(\mathcal{G})$ em Λ^+, que a cada $\Phi \in A(\mathcal{G})$ faz corresponder $\Phi(g)$, admite um e um só prolongamento contínuo $\mathcal{H}^*$ a $A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$ tal que*

$$\mathcal{H}^*(\Phi \cdot h) = \mathcal{H}(\Phi) * h$$

quaisquer que sejam $\Phi \in A(\mathcal{G})$ e $h \in \Lambda^+$.

Este prolongamento é obtido através da fórmula

$$\mathcal{H}^*(\Phi) = \frac{1}{2\pi i}(g - \alpha)^n * \tag{3}$$

$$* \int_{\Gamma_n} \frac{(g - \lambda\delta)^{-1}}{(\lambda - \alpha)^n} * \hat{\Phi}(\lambda)\, d\lambda \quad \forall\, \hat{\Phi} \in A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$$

onde α é qualquer ponto do plano complexo pertencente a $\mathbf{C} - G_1$, $\frac{\hat{\Phi}(\lambda)}{(\lambda - \alpha)^{n-1}}$ é suposta limitada sobre G_n ($n \in \mathbf{N}$) e holomorfa no seu interior, e Γ_n é a fronteira de G_n orientada por forma a deixar à direita os pontos de G_n.

Aplicando a transformação de FOURIER à igualdade (3) obtêm-se por sua vez

$$\mathcal{F}(\hat{\Phi}(g)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(\varphi(z) - \alpha)^n \int_{\Gamma_n} \frac{\mathcal{F}(\hat{\Phi}(\lambda))}{(\lambda - \alpha)^n (\varphi(z) - \lambda)} d\lambda =$$

$$= [\mathcal{F}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda = \varphi(z)}$$

onde $\varphi(z) = \mathcal{F}(g)$. Isto é,

$$\hat{\Phi}(g) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda = \varphi(z)} \tag{4}$$

que é óbviamente um prolongamento da fórmula 2.

Por um processo análogo, e usando a transformação de LAPLACE, poder-se-ia também demonstrar que nas condições descritas na proposição anterior, se tem

$$\hat{\Phi}(g) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda = \theta(z)} \tag{5}$$

onde $\theta(z) = \mathcal{L}(g)$.

As fórmulas (4) e (5) sugerem então definir $\hat{\Phi}(g)$ sempre que $[\mathcal{F}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda = \varphi(z)} \in U^+$, ou o que é equivalente, sempre que

$$[\mathcal{L}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda = \theta(z)} \in V^+.$$

Esta extensão permite, dado $A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$, fazer corresponder a cada elemento $g \in \Lambda^+$

um homomorfismo algébrico (não necessàriamente contínuo) entre uma sub-álgebra de $A(\mathcal{G}, \Lambda^{+})$. dependente de g e que diremos relativa a g, e Λ^{+}. Este homomorfismo, sempre que o filtro espectral de g é mais fino do que $\mathcal{G}$, coincide com o homomorfismo $\mathcal{B}^*$ definido na igualdade (3), e é contínuo. Em qualquer das hipóteses, se $\hat{\Phi}$ e $\hat{\Psi}$ são funções pertencentes à sub-álgebra relativa a g, tem-se:

$$(\hat{\Phi} + \hat{\Psi})(g) = \hat{\Phi}(g) + \hat{\Psi}(g)$$

$$(\lambda \cdot \hat{\Phi})(g) = \lambda \cdot \hat{\Phi}(g) \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C}.$$

$$(\hat{\Phi} \cdot \hat{\Psi})(g) = \hat{\Phi}(g) * \hat{\Psi}(g)$$

Um caso com interesse é aquele em que $\mathcal{G}$ é o filtro gerado pelos semi-planos $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > \alpha,\ \alpha \text{ real}\}$ e o elemento de Λ^{+} é δ' (que corresponde ao operador derivação). Então, para todo o $\hat{\Phi} \in A(\mathcal{G}, \Lambda^{+})$ temos

$$\hat{\Phi}(\delta') = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda=z}$$

sendo a aplicação $\hat{\Phi} \to \Phi(\delta')$ de $A(\mathcal{G}, \Lambda^{+})$ em Λ^{+}, um homomorfismo contínuo. Se $\hat{\Phi} \in A(\mathcal{G})$, tem-se

$$\Phi(\delta') = \mathcal{L}^{-1}\Phi(z)$$

5. Algumas aplicações

1. Comecemos por considerar alguns dipolos eléctricos simples, e para cada um desses dipolos determinemos a distribuição $g(t) \in \Lambda^{+}$ associada, que permite através da igualdade

$$e(t) = g(t) * i(t)$$

relacionar a corrente que atravessa o dipolo com a tensão nos seus terminais (supomos que o dipolo é linear).

Nos casos em que o dipolo é constituído por uma resistência R, uma capacidade C ou uma inductância L, resulta imediatamente que a distribuição $g(t)$ associada é respectivamente

Resistência $\quad R\,\delta(t)$

Capacidade $\quad \dfrac{1}{C} h(t) \quad$ (h função de HEAVISIDE).

Inductância $\quad L\,\delta'(t)$

Da associação em série ou em paralelo de dois dipolos, a que correspondem por exemplo as distribuições g_1 e g_2, resultam por sua vez dipolos cuja distribuição g está relacionada com as anteriores pelas equações

$$g = g_1 + g_2 \quad \text{(associação em série)}$$

$$g = g_1 * g_2 * (g_1 + g_2)^{-1} \quad \text{(associação em paralelo).}$$

Este segundo resultado só tem sentido se $g_1 + g_2$ tem inverso, isto é, se

$$\frac{1}{\mathcal{L}(g_1) + \mathcal{L}(g_2)} \in V^{+}.$$

Associando em série e em paralelo os dipolos assinalados atrás, obtêm-se então as seguintes distribuições:

$$R\,\delta + L\,\delta' \qquad (R \text{ e } L \text{ em série})$$

$$R\,\delta + \frac{1}{C} h \qquad (R \text{ e } C \text{ em série})$$

$$L\,\delta' + \frac{1}{C} h \qquad (L \text{ e } C \text{ em série})$$

$$\frac{i}{L\sqrt{LC}} e^{\frac{i}{\sqrt{LC}} t} h(t) * e^{-\frac{i}{\sqrt{LC}} t} h(t) +$$

$$+ \frac{1}{C} e^{-\frac{i}{\sqrt{LC}} t} h(t) \qquad (L \text{ e } C \text{ em paralelo})$$

$$R\delta(t)-\frac{R^2}{L}e^{-\frac{R}{L}t}h(t)$$

(R e L em paralelo)

$$\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}h(t). \quad (R \text{ e } C \text{ em paralelo})$$

2. De acordo com os resultados do parágrafo 4, tem sentido escrever e^g para todo o $g \in \Lambda^+$, tal que $e^{\mathcal{L}(g)} \in V^+$. Por sua vez, se $e^{\mathcal{L}(f)}$ e $e^{\mathcal{L}(g)}$, com $f, g \in \Lambda^+$, são elementos de V^+, tem-se

$$(1) \qquad e^{f+g}=e^f * e^g .$$

Consideremos então a igualdade

$$(2) \qquad e^g=\delta .$$

As distribuições $g \in \Lambda^+$ que a verificam satisfazem a relação $e^{\mathcal{L}(g)}=1$, e portanto $\mathcal{L}(g)=2n\pi i$, com n inteiro, ou

$$g=2n\pi i\delta \qquad (n \text{ inteiro}).$$

De (1) infere-se então que

$$e^{f+2n\pi i\delta}=e^f$$

para todo o $f \in \Lambda^+$ tal que $e^{\mathcal{L}(f)} \in V^+$.

Seja agora a equação

$$(3) \qquad e^f=g$$

onde $g \in \Lambda^+$ é um dado e se pretende determinar f.

Se $\frac{1}{\mathcal{L}(g)} \in V^+$, a função $\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}$, onde $\theta(z)=\mathcal{L}(g)$, é um elemento de V^+, e admite primitivas em V^+ que diferem entre si em uma constante. Sendo pois $\gamma(z)$ uma dessas primitivas, tem-se

$$\frac{d}{dz}(\theta(z)e^{-\gamma(z)-\alpha})=0$$

qualquer que seja a constante α, e portanto

$$\theta(z)=\text{const.}\, e^{\gamma(z)+\alpha}$$

podendo-se determinar α por forma que a constante seja igual a 1. Para esse valor de α, tem-se pois

$$\theta(z)=e^{\gamma(z)+\alpha}$$

e portanto

$$e^{\mathcal{L}^{-1}(\gamma(z)+\alpha)}=g$$

isto é, $f_0=\mathcal{L}^{-1}(\gamma(z)+\alpha)$ é uma solução de equação 3.

Por sua vez, sendo g invertível, se existir uma outra solução f_1 de equação 3, tem-se

$$e^{f_1} * e^{-f_0}=g * g^{-1}=\delta$$

isto é, $f_1-f_0=2n\pi i\delta$, onde n é um inteiro.

Por analogia com o que se passa com as funções, pode então dizer-se que toda a solução de equação 3 é um logaritmo de g e escrever

$$f=\ln g .$$

A título de exemplo, consideremss a distribuição δ'. Como $e^{-\alpha z} \in V^+$ para todo o α real positivo, e como $\mathcal{L}(\delta')=z$, pode escrever-se $e^{-\alpha\delta'}$, e vem

$$e^{-\alpha\delta'}=\mathcal{L}^{-1}(e^{-\alpha z})=\delta(t-\alpha).$$

Por sua vez, o facto de

$$\delta(t-\alpha)*f(t)=f(t-\alpha)$$

para todo o $f \in \Lambda$, permite dizer que o operador associado à distribuição $e^{-\alpha\delta'}$ é uma translacção.

Na prática este operador pode representar uma linha de atraso que não deforma os sinais.

3. As equações diferenciais de um sistema linear dinâmico com m graus de liberdade têm a forma [3]

$$(4)\quad \begin{cases} G_{11}(u_1)+G_{12}(u_2)+\cdots+G_{1m}(u_m)=v_1(t) \\ G_{21}(u_1)+G_{22}(u_2)+\cdots+G_{2m}(u_m)=v_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_{m1}(u_1)+G_{m2}(u_2)+\cdots+G_{mm}(u_m)=v_m(t) \end{cases}$$

onde os G_{lk} são operadores lineares do tipo considerado, e os $v_i(t) \in \Lambda^+$ são dados. Os $u_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ são também elementos de Λ^+ e definem o estado do sistema.

Sendo então $g_{lk}(t)$ a distribuição de Λ^+ associada ao operador linear G_{lk}, $l,k = 1,2,\cdots,m$, o sistema 4 pode escrever-se com a forma

$$(5)\quad \sum_{k=1}^{m} g_{lk} * u_k = v_l \qquad l=1,2,\cdots,m$$

e utilizando as transformadas de Laplace

$$(6)\quad \sum_{k=1}^{m} \theta_{lk}(z)\,\varphi_k(z) = \psi_l(z) \qquad l=1,2,\cdots,m$$

onde $\theta_{lk}(z)=\mathcal{L}(g_{lk})$, $\varphi_k(z)=\mathcal{L}(u_k)$ e $\psi_l(z)=\mathcal{L}(v_l)$, $l,k=1,2,\cdots,m$.

Se o determinante

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \theta_{11}(z) & \theta_{12}(z) & \cdots & \theta_{1m}(z) \\ \theta_{21}(z) & \theta_{22}(z) & \cdots & \theta_{2m}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{m1}(z) & \theta_{m2}(z) & \cdots & \theta_{mm}(z) \end{vmatrix}$$

é tal que $\dfrac{1}{\Delta(z)} \in V^+$, existem em V^+ e são únicas as funções $\varphi_k(z)$, $k=1,2,\cdots,m$ que verificam o sistema 6. Elas são as dadas pelas relações

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{\Delta(z)} \cdot \sum_{l=1}^{m} \Delta_{kl}(z)\,\psi_l(z) \qquad k=1,2,\cdots,m$$

onde cada um dos $\Delta_{kl}(z)$ é o menor complementar do elemento $\theta_{lk}(z)$ afectado do sinal $(-1)^{l+k}$.

Passando então ás imagens inversas de Laplace, vem

$$u_k(t) = \Delta(t)^{-1} * \sum_{l=1}^{m} \Delta_{kl}(t) * v_l(t) \qquad k=1,2,\cdots,m$$

onde

$$\Delta^{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\Delta(z)}\right]$$

e

$$\Delta_{kl}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Delta_{kl}(z)], \quad l,k=1,2,\cdots,m.$$

O estado do sistema fica pois univocamente determinado sempre que $\dfrac{1}{\Delta(z)} \in V^+$.

Se no sistema 5 substituirmos agora um dos $g_{lk}(t)$ por uma variável complexa λ, o determinante $\Delta(z,\lambda)$ fica a depender do λ, e pode-se então discutir para que valores de λ é $\dfrac{1}{\Delta(z,\lambda)}$ um elemento de V^+. Para esses valores obtêm-se soluções da forma

$$u_k(\lambda,t) = \Delta^{-1}(\lambda,t) * \sum_{l=1}^{m} \Delta_{kl}(\lambda,t) * v_l(t)$$

onde os $\Delta^{-1}(\lambda,t), \Delta_{kl}(\lambda,t)$, $k,l=1,2,\cdots,m$, são funções vectoriais de λ, com valores em Λ^+.

A possibilidade de substituir λ por um certo $g(t) \in \Lambda^+$ está então sujeita às condições descriptas no parágrafo 4.

4. Consideremos um servomecanismo que consiste em dois aparelhos, um de entrada e outro de saída, devendo o segundo reproduzir os movimentos do primeiro com a maior precisão possível; ele contém também um amplificador que gera uma corrente $i(t)=g_1(t)*e(t)$

onde $e(t)$ é a tensão aplicada na sua entrada, e um motor accionado por $i(t)$, por forma que a posição $v(t)$ do aparelho de saída é uma função linear de $i(t): v(t) = g_2(t) * i(t)$.

Posto isto, pretende construir-se um aparelho X que mediante as posições do aparelho de entrada $u(t)$ e do aparelho de saída $v(t)$ forneça uma tensão a aplicar à entrada do amplificador por forma que:

a) $e(t)$ seja uma função linear da diferença $u(t) - v(t)$;

b) O aparelho de saída reproduza os movimentos do aparelho de entrada.

Substituindo por λ (variável complexa) a distribuição correspondente a X, podemos escrever as equações:

1. $e(t) = \lambda(u - v)$

2. $i(t) = g_1 * (\lambda(u - v))$

3. $v(t) = g_2 * g_1 * (\lambda(u - v))$

e portanto

$$(\delta + \lambda g_2 * g_1) * v = \lambda g_2 * g_1 * u$$

Põe-se então o problema de saber para que valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ é invertível a distribuição $\delta + \lambda g_2 * g_1$, isto é, em que valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ está definida a função vectorial

$$\hat{\Phi}(\lambda) = \lambda g_2 * g_1 * (\delta + \lambda g_2 * g_1)^{-1}.$$

Ora de acordo com os resultados do parágrafo 4, esta função está definida para todo o λ tal que

$$\frac{\lambda \theta_1(z) \theta_2(z)}{1 + \lambda \theta_1(z) \theta_2(z)} \in V^+$$

onde $\theta_1(z) = \mathcal{L}(g_1)$ e $\theta_2(z) = \mathcal{L}(g_2)$.

De acordo também com (5) do parágrafo 4, a saída será uma função linear da entrada, se ao aparelho X corresponder uma distribuição g tal que

$$\frac{\theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)}{1 + \theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)} \in V^+$$

onde $\theta(z) = \mathcal{L}(g)$.

Nessas condições, vem

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)}{1 + \theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)}\right] * u(t).$$

Suponhamos agora que existe um filtro regularizável $\mathcal{G}$ de conjuntos do plano complexo, tal que $\hat{\Phi} \in A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$, e que o filtro espectral de g é mais fino do que $\mathcal{G}$. Nessa conformidade, e na medida em que

$$\frac{\theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)}{1 + \theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)} \simeq 1,$$

será também

$$v(t) \simeq \delta(t) * u(t).$$

5. Dada uma função qualquer $\theta(z) \in V^+$, holomorfa num semi-plano direito

$$V_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : Re\, z > \alpha\}, \ \alpha \text{ real},$$

e do crescimento lento sobre o fecho de V_α, existe sempre uma sucessão de funções racionais $(\rho_n(z))$ com polos no complementar do fecho de V_α, que converge em V^+ para $\theta(z)$. Este resultado demonstra-se tendo em atenção que existe um natural n e um complexo γ tais que

$$\theta(z) = \frac{(z - \gamma)^n}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\theta(\lambda)}{(\lambda - \gamma)^n (\lambda - z)} d\lambda.$$

Posto isto, sendo $g = \mathcal{L}^{-1}(\theta(z))$, a sucessão (g_n) constituída pelos elementos $g_n = \mathcal{L}^{-1}(\rho_n(z))$, converge em Λ^+ para g. Por outras palavras, o conjunto dos elementos de Λ^+ que são produtos de convolução finitos entre elementos de forma $\delta' + \beta \delta$,

$e^{\omega t} h(t)$ e $\omega\delta$ com β e $\omega \in \mathbf{C}$, é denso em Λ^+.

Este resultado, aplicado aos circuitos, poderá eventualmente justificar o traçado de circuitos equivalentes.

6. Uma extensão possível do conceito de «estabilidade de uma rede ou de um circuito», à situação presente, é a que resulta da seguinte definição: dada uma rede linear, diz-se que ela é estável quando as distribuições $g_{lk}(t) \in \Lambda^+$ associadas a essa rede, isto é, as respostas a impulsos de DIRAC, são distribuições de decrescimento rápido.

As imagens de FOURIER destas distribuições são funções $\varphi(z)$, holomorfas no semi-plano $\operatorname{Im} z > 0$, e tais que o limite

$$(7) \qquad \lim_{y \to 0^+} \varphi(\omega + iy) = g(\omega)$$

é uma função $g(\omega)$ indefinidamente diferenciável e de crescimento lento sobre $\mathbf{R}$. O limite entende-se no sentido da topologia que se utiliza geralmente sobre o espaço vectorial S destas funções [4], e de acordo com a qual $\varphi(\omega + iy)$ e as suas derivadas $\varphi^{(k)}(\omega + iy)$, $k = 1, 2, \cdots$, convergem uniformemente sobre os intervalos compactos de $\mathbf{R}$ para $g(\omega)$ e $g^{(k)}(\omega)$, $k = 1, 2, \cdots$, respectivamente.

Usando pois a identificação $\varphi(z) \equiv g(\omega)$ assinalado no fim do parágrafo 2, podemos dizer que as respostas de frequência destes circuitos são funções de S.

Relativamente às funções de transferência, pode-se por sua vez dizer que elas são funções $\theta(z)$, holomorfas no semi-plano direito $Re\, z > 0$, e tais que existe o limite $\lim_{x \to 0^+} \theta(x + iy)$ em S.

Do resto sabe-se que toda a aplicação linear contínua G do espaço vectorial S' das distribuições temperadas em si mesmo, comutável com a translacção é da forma

$$G(f) = \int_{\mathbf{R}} g(t - \xi) f(\xi)\, d\xi$$

onde g é uma distribuição de decrescimento rápido [1]; e recìprocamente.

Aplicando então a transformação de FOURIER a esta igualdade, obtém-se

$$\mathcal{F} G(f) = \mathcal{F}(g) \times \mathcal{F}(f)$$

onde $\mathcal{F}(g) \in S$, $\mathcal{F}(f) \in S'$, e a multiplicação assinalada no 2.º membro desta igualdade é a que se costuma definir entre elementos de S e de S'. Nesta igualdade, foi também utilizada a identificação, referida no parágrafo 2, entre funções holomorfas e distribuições.

7. Num meio material a polarização eléctrica $\vec{P}$ em cada ponto é uma função linear $\vec{P} = G(\vec{E})$ do respectivo campo eléctrico $\vec{E}$ nesse ponto; se as características do meio não se alteram com o tempo, G é comutável com a translação no tempo.

Por forma semelhante à usada no parágrafo 1, podemos então definir nove aplicações lineares G_{lk} $(l, k = 1, 2, 3)$ que permitem relacionar as componentes P_l da polarização eléctrica com as componentes E_k do campo:

$$P_l = \sum_{k=1}^{3} G_{lk}(E_k) \qquad l = 1, 2, 3.$$

Para cada par l, k, $G_{lk}(E_k)$ dá a componente l da polarização criada por um campo eléctrico E_k com a direcção k.

Uma interpretação suficientemente geral será então supor que estas componentes (variáveis com o tempo) são elementos de Λ, e que os operadores G_{lk} são do tipo considerado no parágrafo 3.

Nessas condições pode escrever-se

$$P_l(t) = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_0 \chi_{lk} * E_k(t) \qquad l = 1, 2, 3$$

onde para cada par l, k, $\varepsilon_0 \chi_{lk}(t)$ designa o elemento de Λ^+ correspondente ao operador G_{lk}, isto é, a polarização criada na direcção l por um campo eléctrico $\delta(t)$ de direcção k, e ε_0 a constante dieléctrica do vácuo; as transformadas de FOURIER destes elementos $\chi_{lk}(t)$ constituem o tensor da susceptibilidade eléctrica do meio.

De forma semelhante, podem também relacionar-se a indução e o campo magnético, e determinar os elementos $\mu_{kl}(t) \in \Lambda^+$ correspondentes ao tensor da permeabilidade magnética.

Sendo o meio isotrópico, estas distribuições são de forma $\chi_{lk}(t) = \delta_{lk}\,\chi(t)$ e $\mu_{lk}(t) = \delta_{lk}\,\mu(t)$, onde $\chi(t)$ e $\mu(t)$ são elementos de Λ^+, e δ_{lk} designa o símbolo de KRONECKER. Se existir uma distribuição $n(t)$ tal que

$$n(t) * n(t) = (1 + \chi(t)) * \mu(t)$$

ela corresponderá naturalmente ao índice de refracção, e será da forma $\alpha\delta(t)$ (α = constante) quando o meio não for dispersivo. A transformada de FOURIER de $n(t)$ permite determinar a velocidade de propagação das ondas no meio, em função das respectivas frequências.

NOTAS

(1) Considerando o espaço vectorial das funções complexas, limitadas $f(t)$, munido da norma $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$, a topologia Λ é a do limite inductivo dos espaços imagens daquele pelas aplicações $f \rightarrow D^n(e^{n|t|} f(t))$.

(2) Uma função $\varphi(z)$ diz-se de crescimento lento sobre um conjuto Ω do plano complexo, quando existe um inteiro p positivo e um $\gamma \in \mathbb{C}$ tais que $\dfrac{\varphi(z)}{(z-\gamma)^p}$ é limitada sobre Ω.

(3) U é o quociente, pelo subespaço dos polinómios inteiros em z, do espaço das funções holomorfas do crescimento lento sobre o filtro gerado pelo conjunto dos complementares das bandas $|\operatorname{Im} z| < \alpha$ $(\alpha > 0)$. A topologia de U é a do espaço quociente.

(4) Considerando o espaço vectorial das funções complexas limitadas $f(t)$, munido da norma $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$, a topologia do espaço S' das distribuições temperadas é a do limite inductivo dos espaços imagens daquele pelas aplicações $f \rightarrow D^n (1+x^2)^n f(x)$.

(5) Uma distribuição $g(t)$ diz-se de decrescimento sub-exponencial, quando para todo o $k \in \mathbb{N}$, $e^{k|t|}(g)t$ é limitada: As imagens de FOURIER destas distribuições são funções holomorfas $\varphi(z)$ que verificam a seguinte propriedade: $\varphi(z)$ definida em semi-planos $\operatorname{Im} z > \alpha$ e $\operatorname{Im} z < \beta$ (α, β: reais) admite prolongamentos analíticos a todo o plano complexo $\varphi^+(z)$ e $\varphi^-(z)$, que são de crescimento lento sobre todo o semi-plano $\operatorname{Im} z \geqslant \gamma$ e $\operatorname{Im} z \leqslant \gamma$ (γ: real) respecticamente.

(6) Diz-se que uma base $\{G_k : k \in \mathbb{N}\}$ de um filtro é regular, se ela é normal e distanciada, e se qualquer seja $k \in \mathbb{N}$, a fronteira de G_k é rectificável após inversão.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans de calcul opératio-nel*, Math. Annalen, Bd 136, S 58-96 (1958).

[2] ———, *Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables, à spectre vide ou non bonné*, Annali di Matematica pura ed applicata (IV) Vol. LVIII, pp. 219-276 (1962).

[3] V. V. SOLODOVNIKOV, *Statistical Dynamics of Linear Automatic Control Systems* (Ed. D. Von Nostrand Company, Ltd. London (1965).

[4] E. M. DE JAGER, *Theory of distributions*, Mathematics Applied to Physics (Ed. United Nations Educational, 1970).

Operações financeiras certas e incertas. Funções de comutação

por *Rui João Baptista Soares*
Lisboa

Introdução

Nas operações financeiras certas, uma entidade juridicamente bem constituída, compromete-se a entregar a outra entidade de uma só vez ou em períodos igualmente espaçados, uma determinada quantidade de unidades de moeda, aconteça o que acontecer.

Nas operações financeiras incertas as mesmas entidades vêem-se envolvidas em operações sujeitas a um regime de probabilidades.

Fundamentalmente o tipo de situações que se descreve para uma das entidades é o mesmo em relação à outra, atendendo a que uma tem saldo positivo resultante dos «favores» prestados à outra; de notar que num instante a soma das duas quantidades é constante.

I. Operações financeiras certas

Suponhamos que a entidade A empresta o capital 1 à entidade B por um período de tempo; em retribuição A costuma pedir uma *taxa de juro* i que representa a quantia, expressa em unidades de capital, que a entidade B tem de pagar em cada período pela unidade de capital em retribuição do valor do empréstimo.

Mas a entidade B pode, ao fim de um período, não se encontrar em situação que permita liquidar o empréstimo; então pede a A que a prolongue por n períodos, ao fim dos quais B deverá retribuir a A a quantia $(1+i)^n$ dizendo-se então que A capitalizou em *regime de juros compostos*.

Todavia A podia raciocinar de modo diferente e querer determinar a quantidade que devia emprestar, em regime de juros compostos, para ao fim de n períodos obter o capital 1. Surge então a grandeza v — *factor de desconto*, que se define pela igualdade

1) $$v(1+i)=1$$

e que representa o valor do capital que vale 1 unidade ao fim de um período. Associado a v define-se d — *taxa de desconto efectiva* por uma das igualdades

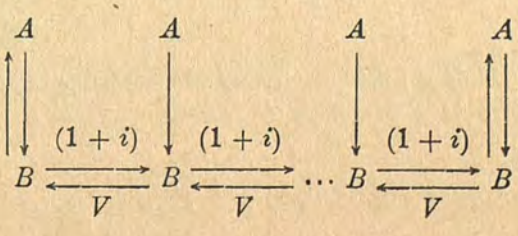
2) $$d=1-v$$

2') $$d=iv\,.$$

Dir-se-ia, no caso presente, que A estava a determinar o valor actual 1 ao fim de um período; ao fim de n períodos teríamos o valor actual v^n do capital 1.

Estas duas situações que acabamos de descrever traduzem dois tipos de operações inversas uma da outra e que são respectivamente a *capitalização* e *actualização*.

Esquematicamente



Acontece com frequência que os encargos sofridos por uma das entidades determina um acordo entre elas por forma que a operação em causa (capitalização ou actualização) seja feita não no período vulgar de um ano, mas sim em fracções desse mesmo período, estabelecendo uma *taxa de juro fraccionado* i_m, que representa a quantia, expressa em unidades de capital, que a entidade a quem se emprestou tem de pagar pela unidade de capital e por cada fracção $\frac{1}{m}$ do período, em retribuição do valor do empréstimo.

Definimos agora as quantidades $i^{(m)}$ — *taxa de capitalização nominal* — convertível m vezes em cada um dos períodos a que se refere a taxa i, pela igualdade

$$3)\qquad i^{(m)} = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]$$

e $d^{(m)}$ — *taxa de desconto nominal* — convertível m vezes em cada um dos períodos a que se referem as taxas i e d, por uma das igualdades

$$4)\qquad d^{(m)} = m[1 - v^{\frac{1}{m}}]$$

$$4')\qquad d^{(m)} = m \cdot i^{(m)} \cdot v^{\frac{1}{m}}.$$

Nesta última

$$5)\qquad v^{\frac{1}{m}} = (1+i)^{-\frac{1}{m}}.$$

Duas taxas dizem-se *equivalentes* quando

$$6)\qquad i_m = \frac{i^{(m)}}{m}.$$

Dá-se o nome de *taxa instantânea de capitalização* à grandeza δ definida por

$$7)\qquad \delta = \log_e (1+i) = \lim_{m\to\infty} i^{(m)}$$

e *taxa instantânea de desconto* à grandeza δ' definida por

$$7')\qquad \delta' = \lim_{n\to\infty} d^{(m)}.$$

Até ao momento o contrato determinava que uma das entidades entregasse, de uma vez por todas, passado um certo prazo, uma certa quantia. Nada impede que no momento do acordo uma das entidades resolva seguir uma das modalidades seguintes:

M_1 — emprestar a unidade de capital ao longo de n períodos, fazendo n entregas iguais;

M_2 — emprestar k unidades de capital no período número k $(1 \leq k \leq n)$;

M_3 — emprestar $p + (k-1)q$ unidades de capital no período número $k (1 \leq k \leq n)$;

N — emprestar (de acordo com M_1, M_2 ou M_3) após terem decorrido k períodos a contar do momento em que se celebra o contrato. Diz-se que houve k *períodos de diferimento;*

O_1 — as entregas (em M_1, M_2, M_3 ou N) são feitas no começo de cada período a contar do momento em que se fez o contrato; diz-se que os termos são *antecipados;*

O_2 — as entregas (em M_1, M_2, M_3 ou N) são feitas no fim de cada período e então diz-se que os termos são *postecipados;*

P — as entregas indicadas em O_1 e O_2 podem fazer-se em fracções do período e os termos serão *fraccionados.*

Antes de passarmos à dedução da fórmula geral que sintetiza as situações indicadas e que definem *contratos de renda* vamos introduzir a simbologia adequada. Deste modo:

a — valor actual, referido ao início do primeiro período, de uma renda;

s — valor acumulado, referido ao fim do último período, produzido por uma renda;

$\overline{n|}$ — uma letra afectada deste índice direito indica o número de períodos durante os quais se faz a entrega;

$k|$ — uma letra afectada deste índice esquerdo indica o número de períodos de diferimentos;

(m) — uma letra afectada deste expoente indica que houve fraccionamento do período e portanto durante n períodos, haverá mn entregas de $\frac{1}{m}$ unidades de capital.

$(I_{p,q}\cdot)$ — indica que os termos da renda se dispõem em progressos aritmética do 1.º termo p e razão q [1];

$(\ddot{\ })$ — uma letra encimada com este símbolo indica que a renda tem termos antecipados.

Devemos ainda ter presente que para passar, numa determinada operação O, dos valores deduzidos com termos partecipados ou normais aos valores deduzidos com termos antecipados, isso equivale à capitalização para o fim do período

$$8)\qquad \ddot{O}=O(1+i)$$

Reciprocamente

$$8')\qquad O=\ddot{O}\cdot v$$

No caso de fraccionamento teremos

$$9)\qquad \ddot{O}=O(1+i)^{\frac{1}{m}}$$

$$9')\qquad O=\ddot{O}\,v^{\frac{1}{m}}.$$

Usando um determinado tipo de termos e pretendendo passar para os valores deduzidos no outro tipo de termos, bastará atender a

$$10)\qquad a=s\cdot v^n$$

$$10')\qquad s=a(1+i)^n.$$

Após estas considerações passemos ao cálculo ${}_{k'|}(I_{p,q}\,a)^{(m)}_{\overline{n|}}$ que representa o valor actual, referido ao início do primeiro dos períodos de deferimento, de uma renda fraccionada diferida de $k'=mr$ períodos com $m\cdot n$ termos normais crescentes em progressão aritmética de 1.º termo p e razão q, cujo período é igual a $\frac{1}{m}$ do período de taxa i.

$${}_{k'|}(I_{p,q}\,a)^{(m)}_{\overline{n|}}=\frac{1}{m}\left\{\sum_{t=1}^{mr+mn}[p+(t-1)q]v^{\frac{t}{m}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{t=1}^{mr}[p+(t-1)q]v^{\frac{t}{m}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{m}\left[(p-q)\sum_{t=mr+1}^{mr+mn}v^{\frac{t}{m}}+q\sum_{t=mr+1}^{mr+mn}t\,v^{\frac{t}{m}}\right]=$$

$$=\frac{1}{m}\left[(p-q)\sum_{t=1}^{mn}v^{\frac{t}{m}}+q\sum_{t=1}^{mn}(mr+t)\,v^{\frac{t}{m}}\right]v^r.$$

Pondo

$$11)\qquad a^{(m)}_{\overline{n|}}=\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{mn}v^{\frac{t}{m}}$$

$$12)\qquad (I_{mr+1,1}\,a)^{(m)}_{\overline{n|}}\;\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{mn}(mr+t)\,v^{\frac{t}{m}}$$

resulta

$$13)\qquad \boxed{\begin{gathered}{}_{k'|}(I_{p,q}\,a)^{(m)}_{\overline{n|}}=\\=\left[(p-q)\,a^{(m)}_{\overline{n|}}+q\,(I_{k'+1,1}\,a)^{(m)}_{\overline{n|}}\right]v^r\end{gathered}}$$

Apesar de 13) sintetizar todas as situações M_1, M_2, M_3, N, O_1, O_2 e P por combinação

[1] Quando $p=1=q$ utiliza-se $(I\cdot)$ em vez de $(I_{p,q}\cdot)$ o mesmo acontecendo quando $m=1$ ou $k=0$.

conveniente dos símbolos utilizados, recorre-se na prática a relações existentes entre as diferentes modalidades e de acordo com valores que se encontram tabelados para as diferentes taxas de juro(1). Tais fórmulas têm ainda a vantagem de permitir a resolução de problemas mesmo para valores não tabelados recorrendo a interpolação.

II. Operações financeiras incertas

Uma entidade A prevê a realização de um acontecimento que lhe acarreta um prejuízo que pretende remediar. Pode, em certas circunstâncias, contratar uma outra entidade B que tome a responsabilidade de indemnizar A caso o acontecimento ocorra. Em retribuição B exige de A o pagamento de uma certa quantia — *prémio* — durante um intervalo de tempo a combinar. Diz-se que as duas entidades combinaram entre si um *contrato de seguro*.

Parece à primeira vista que a entidade A está em vantagem, enquanto B deverá indemnizar todas as entidades A_i que estejam nas mesmas condições de A. Todavia B procede de modo análogo em relação a outras entidades mas agora na situação inversa. Além disso a probabilidade de realização de certos acontecimentos futuros pode ser deduzida da frequência com que se realizaram no passado, o que permite a B estabelecer os prémios por forma a não perderem.

O seguro pode então considerar-se como um jogo entre as entidades A — a que chamaremos *segurado* — e B ou *companhia seguradora* e tem por fim distribuir igualmente por um grande número de segurados o prejuízo causado a um outro.

Esta ideia de mutualidade implica, desde logo, que nenhum segurado se encontre em situação vantajosa relativamente aos outros, pelo que as contribuições individuais devem ser proporcionais

a) à indemnização prevista

b) ao risco coberto.

Uma vez postas em comum as contribuições dos segurados, elas perdem a sua individualidade e constituem um fundo comum destinado a cobrir os riscos.

II. 1. *Jogo equitativo*

Suponhamos que dois jogadores A_1 e A_2 combinam entre si o seguinte:

$$\begin{pmatrix} A_1 & \text{paga} & C_i & \text{a} & A_2 \\ A_2 & \text{paga} & E_i & \text{a} & A_1 \end{pmatrix}$$

pela saída de um acontecimento a_i no esquema

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_n \\ p_1, \cdots, p_n \end{pmatrix}$$

onde os a_i se excluem mutuamente e $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

O jogo dir-se-á *equitativo* quando

$$\text{14)} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i (C_i - E_i) = 0 .$$

Designando por

$$\text{15)} \qquad \begin{aligned} D_{A_1} &= \sum_{i=1}^{n} p_i (C_i - E_i)^+ \\ D_{A_2} &= \sum_{i=1}^{n} p_i (E_i - C_i)^- \end{aligned}$$

define-se a quantidade D — *risco médio linear do jogo* — pela igualdade

(1) Vide por exemplo *Tabelas Financeiras e Actuariais*.

16) $$D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i \,|\, C_i - E_i \,|\,.$$

A grandeza M — *risco médio quadrático* — define-se por

17) $$M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (C_i - E_i)^2}$$

e chama-se *risco máximo* à quantidade

18) $$\mathcal{M} = \max_i \,(C_i - E_i)\,.$$

O jogador A_2 pode combinar o mesmo sistema com outro jogador A_3 para cobrir os prejuízos que o primeiro jogo lhe possa trazer. O risco matemático do jogador A_2 na hipótese de jogo equitativo será

$$D'_{A_1} = \sum_{i=1}^{n} p_i (C_i - E_i - D_{A_1})^+$$

De modo análogo o risco matemático do jogador A_3 em relação a A_4 seria

$$D''_{A_1} = \sum_{i=1}^{n} p_i (C_i - E_i - D_{A_1} - D_{A'_1})^+ \,.$$

Para todos os riscos D_{A_1}, D'_{A_1}, $D''_{A_1}, \cdots$ prova-se o seguinte teorema de BOHLMANN

TEOREMA 1. *Seja* $\mathrm{d_i = C_i - E_i}$; *então, se pelo menos um* $\mathrm{d_i}$ *fôr positivo, a série*

$$\mathrm{D_{A_1} + D'_{A_1} + D''_{A_1} + \cdots}$$

converge e tem por soma $\mathcal{M}$.

Este teorema apresenta grande interesse quando os acontecimentos a_i seguem a lei de GAUSS.

*

* *

Seja q a probabilidade de chegada de um acontecimento, e C o valor actual da soma que a companhia deverá pagar; então a esperança matemática do segurado é

19) $$E = q\,C$$

e, tratando-se de um jogo equitativo, o *prémio puro* P

$$P = E$$

seria insuficiente para:

a) pagar as despesas de gestão da empresa;

b) prevenir-se contra os desníveis que possam ocorrer.

Somos assim conduzidos ao pagamento de um prémio P' a determinar por uma igualdade da forma

20) $$P'(1 - \theta) = q\,C(1 + \lambda)$$

onde θ e λ são constantes.

A condição indicada em *b*) permite estabelecer a grandeza d — *encargo do risco* que é a diferença entre o prémio P'' que realmente se paga e o prémio indicado em 20). É usual fazer o seu cálculo proporcionalmente ao risco médio linear e vai constituir uma *reserva de garantia* que intervirá quando o número de sinistros ultrapassar o seu valor mais provável.

II. 2. *Jogo não equitativo*

Viu-se que o prémio P'' não corresponde à esperança matemática do segurado o que torna o jogo não equitativo.

Consideremos as quantidades

G — bolo
p — probabilidade de ganhar
μ — número de partidas

$$\varepsilon = \frac{\eta}{G}\,.$$

Seja

21) $$pG - \eta = (p - \varepsilon)G$$

a entrada do jogador.

Se, ao fim de μ partidas, tiver havido um desvio $\pm h$ entre o número provável μp de vezes que esse jogador devia ter ganho e o número de vezes que ganhou, pode dizer-se que entrou nos jogos com a quantia $\mu G(p - \varepsilon)$ tendo recebido $G(\mu p \pm h)$ pelo que lucrou

22) $$G(\mu\varepsilon \pm h) = G\mu\left(\varepsilon \pm \frac{h}{\mu}\right) = G\mu\rho .$$

Como ε é constante e $\lim_{\mu \to \infty} \frac{h}{\mu} = 0$ segue-se que o sinal de ρ acaba por ser positivo, donde

PROPOSIÇÃO 1. *Se a entrada de um jogador é inferior à sua esperança matemática de uma quantidade η a probabilidade de que este jogador tenha lucro tende para a unidade quando o número de partidas cresce indefinidamente.*

À grandeza η que garante o lucro dá-se o nome de *carga*.

O estudo que acaba de fazer-se permite compreender como as companhias garantem o lucro.

Seja

23) $$h_\mu = \sqrt{2\mu pq} \cdot \lambda_0$$

o máximo valor do desvio do número de sinistrados. Verificando-se um desvio desfavorável, a companhia terá um prejuízo

24) $$Q = h_\mu G = \sqrt{2pq\mu} \cdot \lambda_0 G .$$

Se a companhia tiver $n\mu$ segurados pagando a quantidade $\frac{G}{n}$ para segurar um risco de probabilidade p e valor $\frac{G}{n}$, teremos

25) $$Q' = h_{n\mu} G = \sqrt{2\mu npq} \cdot \lambda_0 \frac{G}{n} .$$

De 24) e 25) resulta $Q' < Q$ pelo que

PROPOSIÇÃO 2. *Para o mesmo total de prémios recebidos anualmente, a companhia tem vantagem em que eles se refiram a um grande número de segurados pagando menores prémios e, consequentemente, segurando quantias menores.*

Dá-se o nome de *pleno* ao valor máximo que a companhia pode segurar por unidade de risco conservando a probabilidade de não sofrer prejuízo superior a uma quantia C_0 previamente fixada. O seu valor será

26) $$C = \frac{C_0}{h_\mu}$$

e podêmos dizer

PROPOSIÇÃO 3. *O pleno varia na razão inversa da raiz quadrada do número de segurados; no caso de $n\mu$ segurados o pleno cresce proporcionalmente à raiz quadrada do número de seguros.*

A fim de compreender um pouco melhor como uma empresa deve ser estável analisemos rapidamente o problema clássico da ruína de uma estrutura markoviana com barreiras absorventes em 0 e a. Sejam p_z (probabilidade de sucesso) e q_z (probabilidade de ruína). Após a primeira partida obtemos

27) $$q_z = p\,q_{z+1} + q\,q_{z-1} \quad 1 < z < a - 1$$

com as condições de fronteira

28) $$q_0 = 1 \qquad q_a = 0$$

Na determinação de uma expressão explícita para q_z consideremos os casos

a) $p \neq q$.

Neste caso 27) admite as soluções particulares

$$q_z = 1 \qquad \text{e} \qquad q_z = \left(\frac{q}{p}\right)^z = u^z.$$

A solução geral será da forma

$$29) \qquad q_z = C_1 + C_2 u^z$$

e, atendendo às condições 28), vê-se que

$$C_1 = \frac{u^a}{u^a - 1} \qquad C_2 = \frac{1}{1 - u^a}$$

valores que substituídos em 29) dão

$$30) \qquad q_z = \frac{u^a - u^z}{u^a - 1}$$

b) $p = q = \frac{1}{2}$.

As soluções particulares $q_z = 1$ e $q_z = z$, e de novo as condições de fronteira, permitem escrever

$$31) \qquad q_z = 1 - \frac{z}{a}.$$

Sendo p_z a probabilidade de sucesso de um jogador igual à probabilidade de ruína do seu adversário, obtem-se a expressão para p_z substituindo nas fórmulas anteriores

$$p \longleftrightarrow q$$
$$q \longleftrightarrow p$$
$$z \longleftrightarrow a - z$$

e, finalmente

$$32) \qquad p_z + q_z = 1.$$

Estas considerações permitem afirmar:

PROPOSIÇÃO 4. *Considerando um jogador* A *com capital inicial* z *jogando contra um adversário infinitamente rico;* A *tem o previlégio de parar quando quiser e adopta a seguinte estratégia: joga até perder o seu capital ou prossegue até ganhar* a − z. *Nestas condições* p_z *é a probabilidade de sucesso e* q_z *a probabilidade de falência.*

A última possibilidade de ganhar ou perder para o jogador A é uma variável aleatória G que toma os valores $a - z$ e $-z$ com as probabilidades p_z e q_z respectivamente. Tem-se

$$33) \qquad \begin{array}{ll} E[G] = a(1 - q_z) - z & p \neq q \\ E[G] = 0 & p = q \end{array}$$

o que se traduz dizendo «um jogo favorável continua favorável e nenhum jogo desfavorável pode ser modificado em favorável».

Para finalizarmos estas considerações, damos sem demonstração a seguinte

PROPOSIÇÃO 5. *O valor médio* D_z *da duração do jogo no problema clássico da ruína é dado por*

$$34) \qquad D_z = \begin{cases} \dfrac{1}{q-p}\left[z - a\,\dfrac{1-u^z}{1-u^a}\right] & p \neq q \\ (a - z)\,z & p = q \end{cases}$$

III. Seguros de vida

Conforme vimos anteriormente as operações financeiras certas distinguem-se das operações financeiras incertas porquanto as primeiras se baseiam apenas na «teoria do interesse» enquanto as últimas assentam no conhecimento de taxas de sobrevivência dos indivíduos. Estas são baseadas essencialmente em dados estatísticos agrupados em «tabelas de mortalidade».

III. 1. *Definições*

Para certos acontecimentos aleatórios é impossível calcular uma probabilidade por um raciocínio à priori, além de que não se apresentam em número arbitrário. O «espiolhamento» estatístico relativo a um grande número de acontecimentos mostra que se pode considerar um certo número de casos favoráveis para os quais se define uma probabilidade através da frequência com que ocorreram no total de casos observados.

Admitindo a existência de tais probabilidades eliminam-se todas as causas que possam acarretar situações desfavoráveis (doenças, profissões perigosas, ...) e faz-se a hipótese adicional: *a probabilidade de sobrevivência conjunta do grupo é igual ao produto das probabilidades de sobrevivência dos elementos que o constituem.*

Numa colectividade constituída por indivíduos correndo *riscos análogos* adoptaremos as seguintes convenções:

(x) — indivíduo da colectividade e de idade x;
l_0 — número de nados-vivos;
l_x — número de indivíduos, dos l_0 iniciais, que atingiram a idade x;
${}_np_x$ — probabilidade de (x) atingir a idade $x+n$;
${}_nq_x$ — probabilidade de (x) não chegar à idade $x+n$;
${}_{n|t}q_x$ — probabilidade de (x) morrer entre as idades $n+n$ e $x+n+t$.

De um modo geral teremos as seguintes regras:

R$_1$) a letra $p(q)$ afectada de índices designa sempre uma probabilidade de vida (morte);

R$_2$) o índice que está à direita da letra p (ou q) representa sempre a idade do indivíduo a que essa probabilidade se refere;

R$_3$) quando o índice que está à esquerda do p (ou q) é seguido de um traço vertical, tal exprime o tempo que somado ao índice da direita define a idade a partir da qual se exprime a probabilidade;

R$_4$) os índices iguais à unidade suprimem-se por vezes na escrita;

R$_5$) se $n=0 \Rightarrow {}_0p_x = 1 \quad {}_0q_x = 0$.

É evidente que, para um mesmo indivíduo, se verifica a relação fundamental

35) $${}_np_x + {}_nq_x = 1$$

e por aplicação do teorema das probabilidades compostas segue-se

36) $${}_np_x = \prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t}\,.$$

Pondo $n = n_1 + n_2$ vem

37) $${}_{n_1+n_2}p_x = {}_{n_1}p_x \cdot {}_{n_2}p_{x+n_1}$$

donde se deduz a trivialidade

38) $${}_{n_1+n_2}p_x < {}_{n_2}p_{x+n_1}\,.$$

Temos ainda

39) $${}_{n|t}q_x = {}_np_x \cdot {}_tq_{x+n} = {}_np_x - {}_{n+t}p_x$$

o que permite calcular ${}_nq_x$ (1) atendendo ao teorema das probabilidades totais

40) $${}_nq_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|1}q_x\,.$$

Se designarmos por l_{x+n} o número provável de sobreviventes com idade $x+n$ de

(1) Recordar que é um acontecimento composto por várias formas incompatíveis umas com as outras.

um grupo cujo número é l_x fixado previamente, verifica-se

41) $$ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} $$

que traduz a definição clássica de probabilidade.

Fazendo $n = 1$ em 35) e 41) vem

42) $$ q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} $$

que permite definir a grandeza d_x — *taxa de mortalidade anual* (para a idade x). O conhecimento de q_x permite a elaboração de tabelas de mortalidade anuais que por sua vez permitem a construção de tábuas de sobrevivência a partir do número inicial l_0 de observados, mediante o seguinte sistema de relações

43) $$ \begin{cases} l_1 = l_0 (1 - q_0) \\ l_{n+1} = l_n (1 - q_n) = l_0 \prod_{t=0}^{n} (1 - q_t) \end{cases} $$

onde os q_t se obtêm por recenseamento.

Todavia procura-se arranjar uma função $f(x)$ que, dependendo de um número de parâmetros comparativamente reduzido, traduza o melhor possível a igualdade

44) $$ l_{x+n} = f(x + n) \qquad \forall\, n \in Q . $$

De $x_1 < x_2$ resulta $l_{x_1} > l_{x_2} \Rightarrow l'_x < 0$; além disso sabemos que l_x se encontra definida para $x > 0$ e que existe ω — a que chamaremos *idade limite* — tal que $l_x = 0$ sempre que $x > \omega$. Nestas condições podemos definir a grandeza μ_x — *taxa instantânea de mortalidade* — pela relação

45) $$ \mu_x = - \frac{l'_x}{l_x} $$

e *intensidade de vida* — ρ_x por

46) $$ \rho_x = \frac{1}{\mu_x} . $$

A taxa instantânea de mortalidade μ_x não é dada directamente por observação, mas a partir das tabelas podemos determiná-la numericamente utilizando uma das fórmulas

47) $$ \mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2\, l_x} \qquad \text{(Nystron)} $$

47)′ $$ \mu_x = \frac{8 (l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12\, l_x} $$

$$ (x \geqq 2) \qquad \text{(Stirling)} $$

De 45) obtém-se

$$ l_x = l_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu_t \cdot dt} $$

e portanto

48) $$ {}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_\tau \cdot d\tau} . $$

Como $0 < t < \infty \Rightarrow 1 > {}_t p_x > 0$, o teorema de Cauchy permite afirmar que existe um valor θ — *vida provável de um indivíduo de idade* x tal que

49) $$ {}_\theta p_x = \frac{1}{2} $$

o que significa que um indivíduo de idade x tem tanta possibilidade de viver daqui a θ anos como de estar morto nessa altura. Deverá entender-se por *vida média do grupo* G ao valor e_x dado pela expressão

50) $$ e_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} . $$

A *vida média do indivíduo* de idade x será

51) $$ \overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{2} + e_x . $$

Ao pretendermos calcular a probabilidade de sobrevivência do grupo constituído pelos indivíduos $x_1, \cdots, x_k$ (considerado como um todo) somos conduzidos ao estudo de

52) $$l_{x_1,\dots,x_k} \approx f(x_1, \cdots, x_k) = \\ = \prod_{i=0}^{k} f(x_i) \approx \prod_{i=0}^{k} l_{x_i}.$$

Aos símbolos já utilizados temos necessidade de acrescentar:

$x_1, \cdots, x_k$ — a letra p (ou q) afectada deste índice direito indica uma probabilidade de vida ou de morte relativa ao grupo constituído por k indivíduos e extinguível à primeira morte;

$\overline{x_1, \cdots, x_k}^{\,j}$ — indica que na probabilidade se consideram «*pelo menos j*» dos indivíduos do grupo;

$\overline{x_1, \cdots, x_k}^{\,[j]}$ — indica que se devem considerar «*exactamente j*» dos indivíduos do grupo.

Examinando o caso em que $k=2$ temos

53) $${}_n p_{x,y} + {}_n q_{\overline{x,y}} = 1$$

ou

53)' $${}_n p_{\overline{x,y}} + {}_n q_{x,y} = 1.$$

Dado que os acontecimentos intervenientes no cálculo de ${}_n p_{\overline{x,y}}$ não são incompatíveis, obtém-se

54) $${}_n p_{\overline{x,y}} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{x,y}.$$

Para o cálculo de ${}_n p_{\overline{x,y}}^{[1]}$ devemos atender a que os acontecimentos componentes são:

a) x sobrevive e y morre

b) y sobrevive e x morre

donde

55) $${}_n p_{\overline{x,y}}^{[1]} = {}_n p_x + {}_n p_y - 2\,{}_n p_{x,y}.$$

Analogamente se estabeleceria uma fórmula para ${}_n q_{\overline{x,y}}^{[1]}$ atendendo a que a independência se transmite aos contraditórios.

Podemos agora calcular a probabilidade ${}_{n|t} q_{\overline{x,y}}$ de que a primeira morte ocorra no intervalo $[n, n+t]$ obtendo-se

56) $${}_{n|t} q_{\overline{x,y}} = {}_n p_{x,y} \cdot {}_t q_{\overline{x+n,y+n}}.$$

Consideremos o caso muito frequente de seguros onde se pretende calcular a probabilidade de que (x) morra entre n e $n+t$ e (y) sobreviva ao fim de $n+t$ anos; designando tal probabilinade por ${}_{n|t} q_{\overline{x,y}}^{1}$ teremos

57) $${}_{n|t} q_{x,y}^{\overline{1}} = {}_{n|t} q_x \cdot {}_{n+t} p_y = \\ = \left({}_n p_x - {}_{n+t} p_x\right) \cdot {}_{n+t} p_y.$$

O símbolo ${}_{n|t} q_{x,y}^{1}$ designa a probabilidade de que (x) morra entre os anos n e $n+t$ e simultâneamente morra antes de (y).

Trata-se de um acontecimento composto das seguintes formas:

a) (y) não morre até aos $n+t+y$ anos;

b) (y) morre depois de (x);

o que permite escrever

58) $${}_{n|t} q_{x,y}^{1} = \frac{1}{2}\left({}_n p_x - {}_{n+t} p_x\right)\left({}_n p_y - {}_{n+t} p_y\right).$$

Finalmente calcule-se $Q_{x,y}^{1}$ que representa a probabilidade de que (x) morra antes de (y). Por decomposição do acontecimento em formas incompatíveis duas a duas resulta:

59) $$\underset{x,y}{Q_1} = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|1}\underset{x,y}{q_1} .$$

III. 2. *Equações de sobrevivência*

Retomemos por instantes as noções de taxa de mortalidade anual e a de coeficiente instantâneo de mortalidade para chamar a atenção a:

60) $$d_{x_1,\ldots,x_k} \neq \prod_{i=1}^{k} d_{x_i}$$

61) $$\mu_{x_1,\ldots,x_k} = \sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i} .$$

Na prática considera-se uma *idade actuarial* ξ tal que

$$\mu_\xi = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i}$$

isto é, *a força de mortalidade correspondente à idade actuarial é a média aritmética das forças de mortalidade dos diversos indivíduos do grupo.*

Na construção de tábuas que permitam a determinação do prémio há inúmeros factores a considerar. Citaremos a idade, sexo, profissão, região geográfica entre outros para justificar o aparecimento através dos tempos de algumas fórmulas para o cálculo de l_x, tais como:

62) $l_x = 86 - x$ (MOIVRE)

63) $l_x = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n \quad 2 \lesseqgtr k \lesseqgtr 5$ (LAMBERT-YOUNG)

64) $l_x = \sum_{k=1}^{\infty} A_i e^{a_i x}$ (LAURENT)

65) $l_x = a_0 + a_1 a_2^x$ (SANG)

66) $l_x = e^{A+Bx+Ce^{r_1 x}+De^{r_2 x}}$ (LAZARUS)

67) $l_x = k\, g^{c^x}$ (GOMPERTZ)

68) $l_x = k\, s^x \cdot g^{c^x}$ (MAKEHAM)

Fazendo em 68) $x = 0$ resulta

69) $$k = \frac{l_0}{g} .$$

Para o cálculo de c temos, sucessivamente

70) $$\log l_x = \log k + x \cdot \log s + c^x \cdot \log g$$

71) $$\Delta \log p_x = c^x (c-1)^2 \cdot \log g$$

72) $$\Delta^{n+1} \log l_x = \Delta^n \log p_x$$

73) $$c = \frac{\Delta \log p_{x+1}}{\Delta \log p_x}$$

e conhecendo os valores correspondentes às idades x, $x+1$ e $x+2$ pode substituir-se o valor de c dado por 73) em 71) para determinar g. Finalmente s obtem-se de:

74) $$\log p_x = \log s + c^x (c-1) \cdot \log g .$$

Calculam-se por este processo tantos grupos de constantes (c, g, s) quantos os grupos de três observações procedendo-se depois a um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.

No entanto HARDY e KING determinam c a partir de

75) $$c^t = \frac{\sum_{k=3t}^{4t-1} \log l_{x+k} - 2 \sum_{k=2t}^{3t-1} \log l_{x+k} + \sum_{k=t}^{2t-1} \log l_{x+k}}{\sum_{k=2t}^{3t-1} \log l_{x+k} - 2 \sum_{k=t}^{2t-1} \log l_{x+k} + \sum_{k=0}^{2t-1} \log l_{x+k}}$$

IV. Funções de comutação e tipos de seguro

Comutações são funções que dependem da taxa de juro e das idades dos diferentes componentes do grupo a que as operações vitalícias dizem respeito. É usual classificá-las em

1. Funções de comutação em *caso de vida*

76) $$D_x = v^x \cdot l_x$$

77) $$N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$$

78) $$S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}.$$

2. Funções de comutação em *caso de morte.*

Se admitirmos que a morte se dá a meio do ano temos

79) $$\overline{C}_x = v^{x+\frac{1}{2}} \cdot d_x$$

80) $$\overline{M}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{C}_{x+t}$$

81) $$\overline{R}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{M}_{x+t}.$$

No caso em que se consideram as mortes no fim do ano definem-se as funções de comutação

82) $$C_x = v^{x+1} \cdot d_x$$

83) $$M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$$

84) $$R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t}.$$

Com o auxílio das funções de comutação facilmente se calculam:

a) *capital diferido* – operação que comporta o pagamento de um capital a uma pessoa indicada, se esta for viva no fim de um prazo prefixado. O seu valor é dado por

85) $${}_nE_x = {}_np_x \cdot v^x = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

b) *renda vitalícia imediata* — a entrada em jogo é imediata, os pagamentos fazem-se no fim dos períodos e dura enquanto o rendeiro for vivo. Tem-se

86) $$a_x = \sum_{n=1}^{\infty} {}_np_x \cdot v^n = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

c) *renda vitalícia temporária* — a entrada é imediata, a renda é paga durante a vida do beneficiário e quando muito durante um certo número n_1 de anos previamente fixado. Calcula-se por

87) $${}_{|n_1}a_x = \sum_{n=1}^{n_1} {}_np_x \cdot v^n = \frac{N_{x+1} - N_{x+1+n_1}}{D_x}.$$

d) *renda vitalícia diferida* — a entrada é diferida de n_2 anos, a partir da qual a renda é paga e até morte do rendeiro. O seu valor é de:

88) $${}_{n_2|}a_x = \sum_{n=1}^{\infty} {}_{n_2+n}p_x \cdot v^{n_2+n} = \frac{N_{x+1+n_2}}{D_x}.$$

e) *renda vitalícia diferida temporária* — a entrada é feita como em *d*) e o pagamento de acordo com c), donde resulta:

89) $${}_{n_2|n_1}a_x = \sum_{n=1}^{n_1} {}_{n_2+n}p_x v^{n_2+n} =$$

$$= \frac{N_{x+1+n_2} - N_{x+1+n_2+n_1}}{D_x}.$$

A título de exercício calculemos o valor $a_x^{(m)}$ de uma *renda fraccionada imediata*, com termos constantes normais cuja soma dos m termos pagos em cada ano corresponde a uma unidade de capital, pagável a (x) enquanto for vivo, Teremos então:

$$90) \qquad a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} {}_{\frac{t}{m}}E_x =$$

$$= \frac{1}{m}\left\{\left[\left(1-\frac{1}{m}\right){}_0E_x + \frac{1}{m}\,{}_1E_x\right] + \right.$$

$$+\left[\left(1-\frac{1}{m}\right){}_1E_x + \frac{1}{m}\,{}_2E_x\right] +$$

$$+\left[\left(1-\frac{2}{m}\right){}_0E_x + \frac{2}{m}\,{}_1E_x\right] +$$

$$\left. +\left[\left(1-\frac{2}{m}\right){}_1E_x + \frac{2}{m}\,{}_2E_x\right] + \cdots\right\} =$$

$$= \left[\left(m - \frac{m+1}{2}\right){}_0E_x + \frac{m+1}{2}\,{}_1E_x + \cdots\right] +$$

$$+\left[\left(m - \frac{m+1}{2}\right){}_1E_x + \frac{m+1}{2}\,{}_2E_x + \cdots\right] =$$

$$= \frac{m-1}{2}\,{}_0E_x + m\left({}_1E_x + {}_2E_x + \cdots\right) =$$

$$= a_x + \frac{m-1}{2m}.$$

A fórmula que acabamos de estabelecer é de grande utilidade pelo uso que dela se faz no cálculo de outras expressões e também por permitir a redução a valores tabelados.

BIBLIOGRAFIA

GALBRUN, HENRI, *Assurances sur la vie*. Calcul des réserves, in Tome III, fas. 2.º du Traité de Calcul des Probabilités et ses applications, publié par E. Borel. Paris, Gauthier-Villars, 1927.

———, *Théorie mathématique des assurances*. Paris, Armand Colin, 1931, 197 pág.

LEMOS, VICTOR HUGO DUARTE, *Cálculo das Probabilidades*, 2.ª ed., Lisboa, Faculdade de Ciências, 1937-1938, 217+14 págs. policopiadas.

RICHARD, P. J., *Théorie et pratique des opérations d'assurance. Généralités. Assurances sur la vie*. Vol. I, Paris, G. Doin & Cie., 1944, 436 págs.

———, *Théorie et pratique des opérations d'assurance. Assurances diverses*. Vol. II, Paris, G. Doin & Cie., 1946, 640 págs.

FELLER, WILLIAM, *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. I. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1950, 419 págs.

TABELAS FINANCEIRAS E ACTUAIS. Lisboa, Centro de Estudos de Estatística Económica, 1960, 81 págs.

NOTA DE AULA

Uma outra condição necessária e suficiente para que um inteiro seja regular módulo n

por José Morgado

Instituto de Matemática; Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. Num artigo anterior, introduzimos a definição de *inteiro regular módulo* n: um inteiro a diz-se regular módulo n, se existe algum inteiro x tal que

$$a^2 x \equiv a \pmod{n}.$$

Mostrámos ([1], teorema 2) que a é regular módulo n, se e só se o máximo divisor comum (a, n), de a e n, é divisor unitário de n, quer dizer, (a, n) é primo com o quociente $\frac{n}{(a,n)}$. Em símbolos,

$$(1) \qquad (a, n) \,|^{*}\, n.$$

Num outro artigo ([2], teorema 2), mostrámos que a é regular módulo n, se e só se

$$(2) \qquad a^{1+\varphi(n)} \equiv a \pmod{n}$$

onde $\varphi(n)$ designa, como de costume, o número de inteiros positivos primos com n e que não excedem n.

Nesta nota vamos dar uma outra condição para que um inteiro seja regular módulo n, em termos de um certo semigrupo gerado por esse inteiro.

2. Designemos por S o semigrupo formado pelo conjunto $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ munido da operação de produto módulo n. Seja b um inteiro qualquer e seja a o elemento de S tal que $b \equiv a \pmod{n}$. Então é imediato que b é regular módulo n, se e só se a é regular módulo n. Além disso, se y é um inteiro tal que

$$a^2 y \equiv a \pmod{n},$$

então existe evidentemente um elemento x em S tal que, no semigrupo S, se tem $a^2 x = a$. Um tal elemento x é justamente o resto da divisão de y por n.

Por isso, nesta nota, limitamo-nos a considerar os inteiros pertencentes ao semigrupo S.

Vamos estabelecer o seguinte

TEOREMA: *Seja* $a \in S$; *então* a *é regular módulo* n, *se e só se o subsemigrupo de* S *gerado por* a *é um grupo.*

DEM.: Com efeito, suponhamos que a é regular módulo n e seja A o subsemigrupo gerado por a. Então de (2) resulta que a igualdade

$$a^{1+\varphi(n)} = a$$

é válida no semigrupo S e, portanto, $a^{\varphi(n)}$ é elemento neutro de A (tendo-se, evidentemente, $a^{\varphi(n)} = 1$, se e só se a é primo com n).

Todo elemento de A é da forma a^t com $1 \leq t \leq \varphi(n)$; na verdade, se t' é um inteiro maior que $\varphi(n)$ e não divisível por $\varphi(n)$, então tem-se $a^{t'} = a^t$, onde t é o resto da divisão de t' por $\varphi(n)$ e, se t' é divisível por $\varphi(n)$, então tem-se $a^{t'} = a^{\varphi(n)}$.

É imediato que, para $1 \leq t < \varphi(n)$, o elemento a^t é inversível e o seu inverso é $a^{\varphi(n)-t}$ por outro lado, o inverso de $a^{\varphi(n)}$ é evidentemente $a^{\varphi(n)}$.

Daqui resulta que A é um grupo.

Inversamente, suponhamos que o subsemigrupo A de S é um grupo.

Então existe um inteiro positivo mínimo s tal que

$$a^u \cdot a^s = a^u \text{ para todo } a^u \text{ de } A.$$

Em particular, tem-se $a^{1+s} = a$ em A, isto é, no anel dos inteiros, tem se

$$(3) \qquad a^{1+s} - a = kn$$

para algum inteiro k.

Ora, seja d o máximo divisor comum de a e n, isto é,

$$(4) \qquad a = dq\,,\ n = dq' \text{ e } (q, q') = 1\,,$$

para inteiros convenientes q e q'.

Para concluirmos que a é regular módulo n, basta, em virtude de (1), mostrar que $d \,|^*\, n$, ou seja, que $(d, q') = 1$.

De (3) resulta, atendendo a (4), que se tem

$$q(a^s - 1) = kq'$$

e, como $(q, q') = 1$, tem-se $k = hq$ para algum inteiro h, donde

$$a^s - 1 = hq',$$

o que mostra que a é primo com q'. Daqui resulta que $(d, q') = 1$, o que completa a demonstração.

BIBLIOGRAFIA

[1] José Morgado, *Inteiros regulares módulo n*, «Gazeta de Matemática», N.º 125-128, 1972.

[2] ———, *A property of the Euler φ-function concerning the integers which are regular modulo n*, em publicação nos Anais da Academia Brasileira de Ciências.

Généralisation d'un théorème de Morgado

par Stephane Foldes
Paris

Dans son étude «On the closure operators of the cardinal sum of partially ordered sets» (Proc. Ams. Ser. A, 64/1961), MORGADO a démontré le théorème suivant: si M_1 et M_2 sont des ensembles partiellement ordonnés, chacun ayant un minimum et un maximum, $M_1 \oplus M_2$ leur somme ordinale et si pour un ensemble partiellement ordonné P on désigne par $\Phi(P)$ l'ensemble partiellement ordonné des opérateurs de fermeture sur P, alors on a:

$$\Phi(M_1 \oplus M_2) \simeq 2 \times \Phi(M_1) \times \Phi(M_2),$$

où $\times$ désigne le produit cardinal.

Puis il généralise ce résultat par récurrence à une somme ordinale à n composants.

Terminologie, notations:

Soient P un ensemble partiellement ordonné et Q_p un ens. p. ord. pour chaque $p \in P$. Considérons l'ensemble des couples (x, p) avec $p \in P$, $x \in Q_p$ et ordonnons—le comme suit:

$$(x_1, p_1) \leqq (x_2, p_2) \Longleftrightarrow (p_1 = p_2 \text{ et } x_1 \leqq x_2 \text{ dans } Q_{p_1} = Q_{p_2}) \text{ ou } p_1 < p_2 .$$

L'ens. p. ord. ainsi obtenu est appellé somme $(P, \leqq)$-ordonnée de la famille $(Q_p)_{p \in P}$ et il est désigné par $\sum\limits_{p \in (P, \leq)} Q_p$. La somme ordinale, la somme cardinale et le produit ordinal sont des cas particuliers de cette définition.

Un ens. p. ord. P est une demi-racine (resp. demi-racine relativement bien ordonnée) si la section finale de chaque élément de P est une chaîne (resp. une chaîne bien ordonnée). Si de plus chaque élément de P est majoré par un élément maximal, on dira que P est relativement majoré.

Soient P une demi-racine relativement bien ordonnée et Q_p un ens. p. ord. avec éléments minimum O_p et maximum u_p, pour $\forall p \in P$.

Définissons une application:

$$F : \Phi(P) \times \prod_{p \in P} \Phi(Q_p) \to \Phi\Big(\sum_{p \in (P, \leq)} Q_p\Big);$$

pour $a \in \Phi(P) \times \prod\limits_{p \in P} \Phi(Q_p)$ (produit cardinal),

$$a = (\varphi, \cdots, \varphi_p, \cdots),$$

l'opérateur $F(a) \in \Phi\Big(\sum\limits_{p \in (P, \leq)} Q_p\Big)$ est défini comme suit: soit $(x, p) \in \sum\limits_{p \in (P, \leq)} Q_p$; alors,

si $\varphi(p) = p$, $F(a)(x, p) = (\varphi_p(x), p)$;
si $\varphi(p) > p$ et $\varphi_p(x) < u_p$,
$F(a)(x, p) = (\varphi_p(x), p)$;
si $\varphi(p) > p$ et $\varphi_p(x) = u_p$,
$F(a)(x, p) = (\varphi_{p'}(O_{p'}), p')$,

où p' est le premier élément de $(p, \to)$ vérifiant $\varphi(p') = p'$ ou $\varphi_{p'}(O_{p'}) < u_p$.

On a:

$$a \leqq b \Longleftrightarrow F(a) \leqq F(b).$$

Nous avons obtenu le

TH. 1. *Si* $(Q_p)_{p \in P}$ *est une famille d'ensembles partiellement ordonnés chaque* Q_p *ayant un élément minimum et un élément maximum et si* P *est un demi-racine relativement bien ordonnée, alors* $\Phi(P) \times \prod_{p \in P} \Phi(Q_p)$ *est isomorphe à une partie de* $\Phi\left(\sum_{p \in (P, \leq)} Q_p\right)$.

Ajoutons aux hypothèses du th. 1. la suivante : P est relativement majoré. Montrons que F est surjective :

Soit $\theta \in \Phi\left(\sum_{p \in (P, \leq)} Q_p\right)$.

Définissons $\varphi \in \Phi(P)$ en déterminant l'ensemble $\mathcal{F}_\varphi$ de ses invariants :

$$\mathcal{F}_\varphi = \{p \in P \mid \theta(u_p, p) = (u_p, p)\}.$$

Pour chaque $p \in P$ définissons $\varphi_p \in \Phi(Q_p)$- -par l'ensemble $\mathcal{F}_{\varphi_p}$ des invariants :

$$\mathcal{F}_{\varphi_p} = \{x \in Q \mid (x, p) \text{ est } \theta\text{-fermé}\} \cup \{u_v\}.$$

Posons :

$$a = (\varphi, \cdots, \varphi_p, \cdots) \in \Phi(P) \times \prod_{p \in P} \Phi(Q_p).$$

On peut vérifier facilement que $F(a) = \theta$. Nous pouvons énoncer le

TH. 2. *Soit* P *une demi-racine relativement bien ordonnée et relativement majorée et soit* Q_p *un ens. p. ord. avec minimum et maximum* $\forall\, p \in P$. *On a l'isomorphisme suivant :*

$$\Phi\left(\sum_{p \in (P, \leq)} Q_p\right) \simeq \Phi(P) \times \prod_{p \in P} \Phi(Q_p)$$

ou encore, M *désignant l'ens. des éléments maximaux de* P,

$$\Phi\left(\sum_{p \in (P, \leq)} Q_p\right) \simeq \varphi(P \setminus M) \times \prod_{p \in P} \Phi(Q_p) \simeq$$

$$\simeq 2^{\overline{\overline{P \setminus M}}} \times \prod_{p \in P} \Phi(Q_p).$$

(Pour $\Phi(P) \simeq \varphi(P \setminus M)$ voir MORGADO : Some results on closure operators of partially ordered sets, Port. Math. 19/1960).

On voit comment obtenir différents corollaires. Examinons un cas particulier à titre d'example : Soit α un nombre ordinal de première espèce : $\alpha = \beta + 1$ et soit $S = M_0 \oplus \cdots \oplus M_\xi \oplus \cdots \oplus M_\beta$ une somme ordinale de type α. Supposons que chaque $M_\xi\,(\xi < \alpha)$ possède un minimum et un maximum. On a :

$$\Phi(S) \simeq 2^{\overline{\beta}} \times \prod_{\xi < \alpha} \Phi(M_\xi).$$

Si α est fini, c'est précisément le résultat de MORGADO.

Notas sobre la verdad y su evolución en la historia de la matemática

por Eduardo H. del Busto
La Plata — Argentina

ADVERTENCIA

Cuando mis alumnos leen el párrafo que, sobre la noción de verdad, traen los Éléments d'histoire des mathématiques *de N. Bourbaki, manifiestan muy serias dudas.*

A mi parecer, la no acostumbrada lectura de otros temas, impide a los jóvenes ubicarse dentro de una cuestión como ésta de la verdad, cuyos planteos y replanteos abarcan todo el desarrollo cultural de la humanidad. Por eso he querido dedicarles las notas que siguen, donde me propongo simplemente reseñar algunas de las más importantes concepciones sobre la materia, a fin de ofrecer a los estudiantes siquiera una idea de la complejidad de la cuestión, e incitar a los más curiosos a proseguir la indagación.

Una de las dificultades mayores con que he tropezado es la inexcusable referencia a la escuela polaca de Tarski. Tenía yo que ser breve y claro; pero el nivel de los trabajos respectivos no me permitía alcanzar ambas condiciones simultáneamente. Atendiendo a ello, he optado por señalar unos pocos puntos de la concepción semántica de verdad y, para lo demás — que es mucho — me he limitado a una referencia bibliográfica, donde el propio Tarski resume de manera no formal los principales resultados que ha obtenido con relación a la definición de verdad.

1. La verdad como realidad y la verdad de los enunciados. La concepción aristotélica.

Una de las primeras razones que nos conducen a hablar acerca de la verdad, es la verdad, es la distinción entre ilusorio y real. Los gauchos de Hudson se ponían serios si se relataban cosas que ellos consideraban reales (luces malas, fantasmas, aparecidos), y se molestaban cuando les contaban cosas que ellos consideraban irreales (como la existencia de palacios de cristal). El hecho fortuito de que tomaran por ciertas las fantasías y por falsas las realidades — como a nosotros nos ha de pasar, sin darnos cuenta — no significa que no tuviesen inconscientemente criterios para discriminar entre unas y otras, según tácitas definiciones y acuerdos.

Los primeros filósofos griegos se empeñaron por aclarar la diferencia, y, entendiendo sin titubeos que verdadero y real eran términos sinónimos, reconocieron que lo real es aquello que tiene la virtud de permanecer. De ahí que, para ellos, lo verdadero es lo que *es*; no lo que *está siendo*. Por tanto, de las cosas que existen o que son, decían que eran reales o verdaderas; de las que no existen o que no son, decían que eran ilusorias o falsas.

A poco que se ahonde, la distinción no se ve muy clara. No faltará quien afirme hoy que lo único real es el estar siendo, pues el ser aquí y ahora no se da nunca··· De cualquier modo, la antigua concepción que identifica verdad con realidad deviene un capítulo estrictamente filosófico, que ha sido encarado bajo los epígrafes de verdad transcendental, o verdad metafísica, o verdad ontológica y escapan a nuestra incumbencia.

A partir primordialmente de Aristóteles, los griegss empezaron a estudiar la verdad en un acepción diferente. La verdad no sólo puede enfocarse por el lado de la realidad, sino, y éste es el punto novedoso, la verdad aparece también como una propiedad, no ya de las cosas, sí de algunos *enunciados;* justamente, de los enunciados llamados verdaderos. Caracterizando debidamente aquella propiedad que torna verdaderos a algunos enunciados, esperamos obtener la nueva acepción de verdad, que soslaya el problema de la verdad transcendental y que quizás es útil para el matemático.

Tratar de la verdad como propiedad de algunos enunciados, impone, empero, un cúmulo de consideraciones especiales. O bien se admite que la verdad implica conocimiento y, en tal caso, se está ante un problema de *gnoseología;* o bien se considera que la verdad es una simple relación entre el juicio y la cosa juzgada, y, en este sentido, se estudia la verdad como relación *lógica;* o bien, en fin, se ve que la verdad es una relación entre signos o nombres, y, en estos respectos, se la llama *verdad nominal.*

La concepción aristotélica de verdad (*Metafísica,* E 4) es la que considera a la verdad como relación lógica.

ARISTÓTELES dice:

··· «lo verdadero es la afirmación de la com-«posición real del sujeto y del atributo, y la «negación de su separación real; lo falso es «la contradicción de esta afirmación y de esta «negación».

En otros términos, si yo afirmo de lo que es, que es, y de lo que no es, que no es, estoy diciendo verdad; si afirmo de lo que no es, que es, y de lo que lo es, que no es, estoy diciendo falsedad.

Los ejemplos más claros y conocidos los ha dado TOMÁS de AQUINO en los *Comentarios* sobre ARISTÓTELES. Dice:

«*El hombre es animal,* es verdadero;
«*el hombre no es animal,* es falso;
«*el hombre es asno,* es falso;
«*el hombre no es asno,* es verdadero».

De acuerdo con el esquema aristotélico, los juicios precedentes son verdaderos o falsos, no por los objetos en sí, sino por lo que la mente juzga acerca de la relación que en dichos juicios se establece. Así, para refirmar la acepción de verdad lógica como distinta de la verdad ontológica, ARISTÓTELES explica (*Metafísica,* E 4):

«Lo falso y lo verdadero, en efecto, no están «en los objetos (como si el bien fuese lo ver-«dadero y el mal en sí lo falso), sino en el «pensamiento»;

porque

«lo verdadero y lo falso no existen en el «pensamiento como esencias o naturalezas «simples».

(Constituyen, pues, diríamos hoy, relaciones lógicas).

Ahora bien ¿ cuándo decide el pensamiento afirmar o negar la relación establecida en el enunciado? En otras palabras, ¿ cuándo afirmo yo que la *nieve es blanca* es un enunciado verdadero?

He aquí una cuestión delicada.

Los filósofos medievales que se inspiraron en ARISTÓTELES de Estagira, especialmente TOMÁS de AQUINO (1224 ? a 1247), aseveraban que la verdad es el *acuerdo del pensamiento con su objeto;* la falsedad, por ende, es el desacuerdo entre el pensamiento y el objeto pensado. Esto significa algo a primera vista descorazonador: el enunciado la *nieve es blanca* es verdadero··· si y sólo si la nieve es blanca··· Acuerdo entre el pensamiento y el objeto pensado.

Aparte de lo que acabamos de explicar, si la verdad es un acuerdo y la falsedad un desacuerdo en esa correspondencia entre objeto pensado y sujeto pensante, ¿ cómo saber si el acuerdo o el desacuerdo existen cuando el enunciado pertenece al pasado o al futuro; es decir, cuando el objeto no se halla ante nosotros?

Acaso ¿ es siempre posible verificar el acuerdo o desacuerdo entre objeto y sujeto?

Además, si la misma realidad es conocida a través de nuestros pensamientos, ? cómo establecer en última instancia si hay esa correspondencia o si no la hay, puesto que la correspondencia, a su vez, debe ser pensada ? Y si a esto se agrega, como nos lo ensena la psicología, que es posible creer absolutamente en la verdad de nuestro pensamiento aun cuando éste sea falso, debemos aceptar que, aunque experimentemos a veces el *sentimiento* de certeza, ello no es garantía del acuerdo o del desacuerdo objeto pensado — sujeto pensante.

También a veces el hombre experimenta el *sentimiento* de la opinión — algo así como una certeza menor — que no descarta la posibilidad del error; y a veces experimenta el *sentimiento* de la duda, porque ignora si lo que piensa es verdadero o falso. Certeza, opinión, duda, por ser sentimientos, son estados subjetivos. ¿ Puede la verdad hallarse subordinada a lo subjetivo ?

Ha habido quienes aceptaron la pura subjetividad de la verdad, llegando a consecuencias imaginables acerca del mundo y del papel que en él desempeñamos.

Otros, en cambio, han tratado de descubrir algún cáractes objetivo, propio de la cosa pensada o de la manera en que es pensada, para determinar el fundamento objetivo de la certeza. Así nace el concepto objetivo de verdad, extremando el cual puede llegarse — aunque no necesariamente — a la idea de verdad absoluta, cara a varias concepciones e ideologías.

De cualquier modo, llamamos *evidencia* a aquello que provoca en nosotros el sentimiento de certeza.

Según los aristotélicos y escolásticos, pues, la evidencia surge, como hemos dicho, del *acuerdo* entre objeto pensado y sujeto pensante. El tratamiento clásico de la teoría del acuerdo (o de la correspondencia) no parece eficiente y contiene circularidades inadmisibles. La moderna escuela polaca por un lado, y la concepción marxista por otro, han reasumido el punto de vista del acuerdo y lo han expuesto de manera menos controvertible al parecer.

2. La verdad como praxis.

De la escuela polaca nos ocuparemos más extensamente en el párrafo 9, 4.º); de la marxista necesitamos señalar algunos puntos muy bien comentados por A. SCHAFF en *La teoría de la verdad en el materialismo y en el idealismo*, Lautaro, Bs. As., 1964.

En primer lugar, el análisis marxista sostiene la unidad entre pensamiento y lenguaje. No cabe distinguir sino artificialmente entre verdad de un juicio y verdad de un enunciado afirmativo; es decir, se rechaza la instancia «idealista» de la realidad ontológica de los juicios como entes ideales, y se rechaza asimismo la instancia «nominalista» de la separación entre el acto mental del juicio y el acto verbal de su proposición.

En segundo lugar, el análisis marxista vincula la verdad con la praxis. La praxis es una actividad *social* del hombre, históricamente condicionada, que se halla dirigida a la modificación de la realidad objetiva. El hombre, ser social, no se queda contemplando el mundo para interpretarlo; el hombre, ser social, movido por la praxis, modifica el mundo.

La praxis es una actividad social que tiene fin en sí misma. Son verdaderos los juicios cuando son compatibles con la praxis; cuando son útiles a la praxis. Pero, entiéndase bien, un juicio es útil porque es verdadero. El marxista tiene una concepción objetiva de la verdad; el pragmatista, en cambio, sostiene que un juicio *me* resulta verdadero porque es útil para *mí*; tiene una concepción subjetiva de la verdad. El marxista se apoya en la praxis, actividad social, objetiva.

De esto último no debe inferirse que el

marxismo proponga una teoría de la verdad absoluta. Todo lo contrario, ya que, como lo afirma Lenin:

«la verdad es proceso. Partiendo de la «idea subjetiva el hombre alcanza la verdad «objetiva a través de la praxis».

En otros términos, de acuerdo con los marxistas, la praxis nos otorga la evidencia.

3. Descartes y Spencer.

De muy diferente manera había pensado RENÉ DESCARTES (1596 a 1650), cuando sentó el siguiente criterio de verdad; criterio llamado cartesiano o de la evidencia:

es evidente lo claro y sencillo.

Pero, ¿acaso no sabemos que, por hábito, llegamos a creer claros y sencillos muchos conceptos que no son claros ni sencillos para la mayoría?; y ¿acaso no nos muestra la historia de la ciencia multitud de errores que, en su época, fueron considerados como verdades claras y sencillas?

El filósofo inglés HERBERT SPENCER (1820 a 1903), comprendiendo la debilidad del criterio cartesiano, definió lo evidente como

aquello cuyo contrario es imposible de concebir.

Peregrina afirmación que nada ayuda, pues ¿quién o qué nos asegura que no tengamos una capacidad deformadora del concebir, a punto tal que aquello que nos parezca evidente no sea precisamente lo absurdo? Incluso autores hay que tienen por cierto que todo lo que pensamos es pura absurdidad.

Por lo visto, parece muy difícil fundamentar el criterio de la verdad en una definición de lo evidente.

4. La autoridad competente. Crítica de Pascal.

Muchos filósofos medievales y otros de inspiración eclesiástica han defendido el *criterio de autoridad o competencia.* Según este criterio, de naturaleza objetiva,

es verdadero todo enunciado confirmado por autoridad competente.

Constituyen autoridades competentes: los textos antiguos, las afirmaciones de los especialistas, los preceptos tácitos o explícitos de una ideología [1], etc.

Las primeras y más conocidas objeciones al criterio de autoridad competente fueron brillantemente expuestas por BLAISE PASCAL (1623 a 1662), y son cuatro. Primera objeción: este criterio nos conduce a la ceguera mental, por cuanto nos insta a admitir aun aquello que no vemos por nosotros mismos. Segunda objeción: este criterio presupone que aquellos que han adquirido jerarquía de autoridad competente, han alcanzado la verdad por algunas vías que no son accesibles a nosotros, y, por tanto, nosotros somos inferiores a ellos. Tercera objeción: este criterio es peligroso ya que nada nos garantiza que aquellos a quienes se les concede el privilegio de la autoridad, no hayan incurrido, a su vez, en el error. Cuarta objeción: este criterio impide el progreso de los conocimientos humanos, o bien lo restringe a quienes son capaces, por don especial envidiable, de tornarse autoridades competentes.

En conocidos escritos, PASCAL se refiere al criterio de autoridad y lo critica en detalle; pero especialmente citable es el *Traité du Vide.* No obstante, las famosas cartas *Provinciales* son, en muchos aspectos, testimonio dramático de la lucha de PASCAL contra el principio de autoridad competente, ejercido por jesuitas con relación a la teoría de la gracia divina. Clama PASCAL:

---

[1] Entiéndese aquí por *ideología* el conjunto de ideas, concepción del mundo o doctrina, característicos de un grupo o clase social. La ideología es una suerte de filosofía menor, a la que nos adherimos casi atávicamente, sin reflexión sistemática y por imperio de las circunstancias; porque, como dijo MARX, la ideología está asociada a la condición social.

«Si lo que digo no sirve para daros luz, «servirá al pueblo. Si allá se callan, las pie- «dras hablarán. El silencio es la mayor per- «secución; jamás los santos se han callado... «Si mis cartas son condenadas en Roma, lo «que yo en ellas condeno está condenado en «el cielo... La Inquisición y la Sociedad (jesuítica): las dos plagas de la verdad...»

El 6 de setiembre de 1657 el Papa Alejandro VII condenó las cartas *Provinciales* de BLAISE PASCAL, el matemático eminente y la caña pensante de la humanidad.

5. Lionardo y el criterio experimental.

Mucho antes, LIONARDO DA VINCI (1452 a 1519) había alzado también su protesta contra el criterio de autoridad competente, y también había luchado contra él. En efecto, se opuso a hombres cuyo prestigio intelectual nadie osaba poner en duda, como el médico y alquimista alemán PARACELSUS (1493 a 1541); se mofó de opiniones sustentadas por personalidades influyentes, por ejemplo, se burló de la nigromancia y de la alquimia; acusó a «quienes mantienen el engaño de la tonta muchedumbre» y se rió de los que sostenían la posibilidad del móvil perpetuo.

Todo esto significaba una audaz rebelión contra la autoridad···

Es que LIONARDO da VINCI preconizaba un nuevo criterio de verdad, el *criterio experimental:*

es ciertamente verdadero aquello que la experiencia confirma.

Para LIONARDO, la experiencia es un diálogo entre el hombre y la naturaleza: el hombre interroga y la naturaleza responde. Los juicios formulados acerca de los fenómenos naturales no se sustentan con simples argumentaciones, sino con experimentos; no con solas razones, sino con hechos.

«Aunque la naturaleza comience con la «razón y termine con la experiencia, nosotros «— dice LIONARDO — debemos seguir el ca- «mino inverso: comenzar por la experiencia «y con ella investigar la razón».

Tan fundamental estima la experiencia para descubrir la razón, que no vacila en anteponerla a cualquier argumentación por más trivial que parezca. Así, por ejemplo.

«Si una libra de peso hunde en la tierra «una barra de una onza, dos libras de peso ¿ «qué efecto harán sobre la misma barra, en «la misma tierra y en el mismo tiempo?». «LIONARDO recomienda: Haz la prueba». Haz la prueba varias veces, decimos hoy.

Todavía antes, en el siglo XIII, el más luminoso de la Edad Media, el propio ROGER BACON (1214 a 1292) ya había llamado la atención sobre el criterio experimental. Si bien es cierto que no había reconocido la supremacía de lo empírico como lo proclamaría LIONARDO dos siglos después, ROGER BACON reclamó para la experiencia un papel predominante, a extremos de considerarla como una técnica o un método para el aprendizaje inductivo; sobre todo, respecto de algunas cuestiones controvertibles por vía puramente argumental.

La observación y la experimentación, como factores del método científico, fueron adquiriendo cada vez mayor predicamento por obra de aquellos sabios que revolucionaron la ciencia y, con ella, el mundo en que vivimos.

Usando observación y experimentación, el cúmulo de conocimientos aumentó en forma explosiva y quedaron seriamente socavados los cimientos de aquel criterio de la autoridad competente.

6. El drama de Galileo. Nueva crítica a la autoridad.

Pero otra cosa más vino a degradar también este criterio de la autoridad competente. En efecto, por fuerza de circunstancias humanas (demasiado humanas) el principio de autoridad competente había pasado a ser, simplemente, el principio de la autoridad: el poder por encima del saber; justificar en vez de juzgar. Había nacido la profesión de la conveniencia: qué cosas deben decirse, qué cosas no deben decirse, cuándo es oportuno, cuándo no lo es. Y entonces apareció una caterva de intelectuales genuflexos, sumidos en falacias deplorables, prefabricando preceptos afines a ciertas ideologías, que no son sino enmascaramientos de la realidad.

Con razón había de escribir Marx, que «las ideas dominantes en una época, son las «ideas de la clase dominante».

En el mundo contemporáneo, en nuestros días, hoy mismo, están vigentes muchos enmascaramientos, y acaso de algunos de ellos no nos damos cuenta todavía...

No vamos a intentar siquiera hacer la historia de las mentiras, porque nuestro tema es la verdad o el error; no la mentira. La mentira es la manifestación contraria de lo que se piensa. Pero no hemos de callar un elocuente episodio de la Historia de la Ciencia: el drama de Galileo Galilei (1564 a 1642), una triste lucha de creencias e quizás de enmascaramientos.

Galileo creyó que no había otro camino para descubrir la realidad natural, que la observación y la experimentación. La Iglesia de entonces creía que la verdad absoluta se halla en las Escrituras. Sostener una hipótesis que contradijese a las Escrituras y someterla a pruebas empíricas, era tolerable para el Santo Oficio; pero pretender — como osaba Galileo — que esa hipótesis contradictoria de las Escrituras fuese además reflejo directo de la verdad absoluta, era intolerable para la autoridad eclesiástica. Por eso el fundador de la ciencia moderna recibió pena de cárcel por un término que quedó a discreción del tribunal, fue obligado a retractarse y padeció el castigo de rezar semanalmente, durante tres años, los siete salmos penitenciales. Había tenido la temeraria ideia de sostener, como *verdad absoluta,* que el Sol y no la Tierra, ocupaba el centro del sistema planetario y, aún más, que la Tierra se movía...

Había sido la autoridad simple disfrazada de autoridad competente, apoyada en un libro considerado como tal.

Lutero, em 1539, había procedido en forma similar a la Inquisición, en otra cuestión de mecánica celeste. Al emitir un juicio sobre Copérnico, Lutero dijo:

«El loco quiere deshacer todo el arte de «la astronomía; mas, como dicen las Sagra- «das Escrituras, Josué ordenó al sol que se «detuviera, no a la Tierra».

Transcendemos un poco el nivel de lo anecdótico si estas historias nos permiten comprender el choque entre el criterio de autoridad y el criterio de la observación y consecuente experimentación. Ambos criterios fueron considerados, respectivamente por un bando y por otro, como los únicos valederos para descubrir la verdad absoluta. A nadie se le había ocurrido entonces distinguir entre *realidad* y *explicación de la realidad.* Planteado el litigio, venció de momento no quien poseía a su alcance la verdad, sino quien dominaba los métodos de la contundencia.

El criterio experimental, en virtud del cual es verdadero lo confirmado por la experiencia, posee la indudable ventaja de que se apoya en el sujeto. Pero, digámoslo sin mayor dilación, no constituye la ansiada panacea.

Es un criterio muchas veces vago y otras, equívoco. Hay experiencias mal realizadas, mal enfocadas, que inducen al error.
Por otra parte, aún cuando se lo limitase o definiese con absoluta precisión, el criterio experimental sería insuficiente. Serviría para verificar las verdades de hecho, no las verdades de razón. No serviría, pues, para establecer las verdades matemáticas; porque no son fácticas, como todos lo sabemos.

7. Consentimiento universal y sentido común.

Pasemos rápida revista a otros criterios de verdad.

Según el teólogo y filósofo francés FELICITÉ — ROBERT de LAMMENAIS (1782 a 1854), *es verdadero todo juicio confirmado universalmente por la humanidad.*

Es el *criterio del consentimiento universal.*

Ahora bien, de inmediato observamos que el consentimiento no se logra necesariamente en estado de certeza; las más de las veces se funda en la *opinión* mayoritaria. Y debe reconocerse, incluso, que el campo sobre el cual tiene opiniones la mayoría no es suficientemente extenso.

Además, ¿por qué lo que puede saberse por consentimiento universal no puede saberse tal vez individualmente, aun antes de que el consentimiento se produzca? La Historia está plagada de ejemplos.

THOMAS REID (1710 a 1796) y WILLIAM HAMILTON (1778 a 1856) formularon el *criterio del sentido común:*

es cierto todo juicio conforme al sentido común.

Ante todo, aclaramos que este WILLIAM HAMILTON es el filósofo escocés, enemigo de la matemática; y no debe confundirse con el talentoso inventor de los cuaterniones. Por otro lado, debemos admitir que no sabemos bien qué cosa es el sentido común; que hay multitud de casos en que el sentido común no es infalible; y que, en general, no es fácil distinguir entre hábito y sentido común. Los mercaderes de la publicidad hacen «maravillas» con esta confusión, mintiendo...

8. La razón suficiente de Leibniz. La no contradicción.

Respecto de las verdades de razón y sin tener en cuenta para nada lo fáctico, es famoso el *criterio* o *principio de razón* enunciado por GOTTFRIED WILHEM LEIBNIZ (1646 a 1716):

Es verdadero todo aquello que tiene razón de ser o que es la razón de ser de algo.

He aquí tres ejemplos del uso que hizo LEIBNIZ del principio de razón; ejemplos que permiten ahondar el alcance y significado que le otorgó el filósofo.

a) *La nada no existe.* ¿Por qué? Tiene que haber algo en vez de la nada, ya que el ser es *superior* al no ser.

b) *El vacío no existe.* En efecto, si el vacío existiese habría que hallar la razón que determine por qué hay en el universo partes ocupadas y partes vacías. Y dicha razón no puede estar en el vacío mismo, ya que es vacío.

c) *La materia no es extensión pura.* En efecto, si fuese solamente extensión, no vemos razón alguna de por qué la materia está en el lugar A más bien que en el lugar B.

Advertimos que el criterio de razón es un principio metafísico. No es un principio psicológico; pues nada nos impide formular juicios sin razón suficiente.

CHRISTIAN WOLLFF (1679 a 1754), discípulo de LEIBNIZ, es el inventor del criterio de verdad denominado *principio de contradicción.*

Es ciertamente verdadero todo juicio que no puede ser negado sin contradicción.

WOLLFF lo consideraba un principio *ontológico*; pero posteriormente ha sido tenido y enunciado como principio lógico:

No, a la vez, p *y no* p *(donde* p *es un enunciado).*

Desde el punto de vista ontológico, el principio de contradicción ha sido cuestionado, porque — y esto lo sostiene la dialéctica — la misma realidad es contradictoria: tesis, antítesis, síntesis, y, dentro de esta síntesis, el germen antitético, indefinidamente...

Desde el punto de vista de los lógicos, el principio de no contradicción ha sido interpretado antes como *axioma evidente por sí mismo*; después, como *postulado convencional* que sirve para *hablar* de la realidad.

9. Recapitulación. La coherencia y la compatibilidad. La escuela polaca de Tarski.

Se impone a esta altura de la discusión, un resumen de algunos conceptos que deben quedar en claro. La palabra *verdad* está sujeta a cuatro acepciones principales:

1°) Si nos referimos a lo verdadero como realidad, estamos tratando la *verdad transcendental*. Y esta materia pertenece directamente a la Filosofía, especialmente a la Metafísica.

2°) Si nos referimos a la verdad en cuanto se halla en el intelecto, diremos *verdad gnoseológica*. Ahora bien, la Gnoseología o teoría del conocimiento, también pertenece a la Filosofía; pero no pertenece necesariamente a la Metafísica.

Si bien es cierto que preguntar por el conocimiento equivale a preguntar por la realidad (y en esta pregunta entra la Metafísica), no es menos cierto que varios importantes capítulos de la teoría del conocimiento (posibilidad del conocimiento, fundamento del conocimiento, formas del conocimiento) pueden encararse y desarrollarse sin plantear previamente la cuestión transcendente. O sea, es posible describir la función cognoscitiva y determinar sus propiedades, sin preguntarse acerca de la esencia del conocimiento.

3°) Si nos referimos a la verdad como si se tratase exclusivamente de una conformidad entre signos, diremos *verdad nominal*.

Desde este punto de vista, por ejemplo, decir que el enunciado «la nieve es blanca» es verdadero, equivale tan sólo a afirmar que el signo «nieve» es conforme al signo «blanco» Portanto, aseverar que una sucesión de signos (un enunciado, una oración) es verdadera o es falsa, importa afirmar, respectivamente, que existe conformidad o que no la existe entre los signos que tornan significativa a dicha sucesión.

La presunta conformidad entre signos nos rememora, por analogía, la tesis de JOACHIM (*La Naturaleza de la Verdad*), donde se define la verdad como una *coherencia sistemática.*

La coherencia se refiere a los enunciados y no a los hechos, y establece una coparticipación entre cada enunciado y todo el discurso; pero hay que reconocer que la tal coparticipación puede existir sobre la base de convenciones que no reflejan lo fáctico. Por ejemplo, si se ha convenido en que todo lo que sube no pesa, el enunciado «el humo no pesa» es coherente con la convención. Coherente; pero, en otro nivel, no cierto.

La condición de *compatible* que se exige a los enunciados de la matemática, equivale a una coherencia entre los teoremas y los postulados; coherencia que debe ser demonstrada pero que, una vez demonstrada, no es garantía sino de sí misma: las afirmaciones matemáticas no reflejan la verdad transcendental, sino la coherencia sistemática con las convenciones admitidas.

Los pragmatistas de diverso cuño echan mano de la *verificación*, y creen que ningún enunciado puede ser tenido por verdadero si no ha sido verificado. Los neopositivistas, más sutiles, sostienen que no es posible verificar enunciados, sino tan sólo es posible verificar el significado de las palabras; es decir, podemos verificar que «x» es el nombre de la cosa x. La verdad nominal.

4°) Los miembros de la escuela polaca, a la cual nos hemos referido brevemente al principio de este trabajo, han reconocido la enorme dificultad de definir la verdad en general o de establecer criterios de verdad inobjetables.

ALFRED TARSKI se propuso hallar una *definición satisfactoria* de la verdad; entendiendo por «Satisfactoria» una definición adecuada y formalmente correcta. Para que la definición sea *adecuada,* desiste de tratar la verdad como realidad y se limita a describir los caracteres de las *oraciones verdaderas,* porque refiere la verdad no a las cosas, sino a los enunciados, como ARISTÓTELES.

Pero los enunciados, a sua vez, están directamente vinculados al *lenguaje* en que se expresan; y algunos enunciados ciertos en un lenguaje, son falsos o carecen de sentido en otro lenguage.

Por tanto, la verdad de los enunciados está relacionada con el lenguaje específico. Un *lenguaje específico* es aquél que cumple requisitos muy severos, como el de determinar sin ambigüedad el conjunto de palabras significativas, el de enumerar sin excepción los térmicos indefinidos, el de establecer las reglas de definición, el de explicitar las oraciones que han de aceptarse como axiomas, y el de poner de manifiesto las reglas de inferencia que serán usadas en el discurso correspondiente.

Estos requisitos reducen a unos pocos los lenguajes específicos; aunque, no obstante, esos pocos lenguajes específicos tienen, en general, importantes aplicaciones. Así el lenguaje de la matemática y el de la física teórica.

En disciplinas donde se logra establecer el lenguaje específico, encuentra ALFRED TARSKI que puede llegarse a una definición adecuada de la verdad de los enunciados permitidos por dicho lenguaje. Pero en las disciplinas cuyos lenguajes no son específicos, el mismo problema resulta vago e impreciso. Aún así, cabe en ellos la posibilidad de intentar la solución aproximada; es decir, se sustituye el lenguaje no específico por otro lenguaje específico que difiere de aquél «tan poco como sea posible», y luego se realizan ajustes sucesivos... Se nota en esto una actitud pragmática: si lo cierto no alcanzas, conténtate con lo idóneo...

Además de adecuada, la definición de verdad, según TARSKI, ha de ser correcta formalmente. La condición de correcta es indispensable para evitar, entre otras cosas, las paradojas o antinomias. Por ejemplo, cuando me pregunto si la expresión

yo miento

es verdadera, no debo quedar enredado en una maraña de contradicciones...

El análisis de TARSKI conduce a este resultado: la definición adecuada y correcta de verdad de enunciados tiene lugar sólo en el dominio de lenguajes específicos. Pero para hablar de verdad de enunciados hacen falta *dos* lenguajes: el lenguaje específico de lo que se habla (llamado *lenguaje objeto*) y el lenguaje específico con que hablamos del primer lenguage. Este segundo lenguaje se llama *metalenguaje.*

Todo esto, que implica una larga y prolija discusión, constituye la *concepción semántica de la verdad*; en la cual TARSKI y su escuela vienen trabajando arduamente desde tiempo atrás. Su fundamento histórico es la concepción aristotélica; mas los importantes logros — hay que saberlo — han exigido delimitar el problema originario, retacearlo, encuadrarlo y precisarlo prolijamente; en particular, trasladando la cuestión de fondo a una nueva problemática: la semántica.

Quien desee enterarse mayormente de la tesis de la brillante escuela polaca, haría bien en estudiar, por lo menos, el opúsculo de ALFRED TARSKI, *La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica,* Nueva Visión, Bs. As., 1972, donde, aparte de una autorizada introducción al tema, se mencionan y discuten las principales objeciones formuladas a la concepción semántica, y se indica la bibliografía más adecuada.

Una de las dudas que se vienen manifestando con mayor frecuencia acerca de la concepción semántica de la escuela de TARSKI es ésta: ¿La noción de enunciado verdadero es *importante* en las disciplinas matemáticas? ¿Desempeña algún papel de valor en la metodología de la matemática? ¿No es acaso mucho más útil y fecunda la noción de enunciado *comprobable*?

Las respuestas son todavía materia de polémica.

*

* *

10. La noción de verdad en la historia de la matemática.

¿Cuál es la noción de verdad que prevalece en la matemática?

Un enfoque histórico nos conduce a una respuesta atinada. Como obra de la cultura que es, la matemática refleja a grandes rasgos la evolución de la humanidad.

Los griegos, con quienes se inicia la matemática propiamente dicha, habían heredado — no cabe duda de ello — la cultura oriental. Mas la herencia fue reelaborada y asimilada según una tan peculiar manera de ser, que lo hecho por los griegos tiene visos de enorme originalidad.

Propensos a discutir y a razonar, a disputar y a controvertir, descubrieron falacias o paralogismos (recuérdese a ZENÓN de Elea) que los obligaron a tomar serias precauciones para guiar el recto discurrir. Así es que inventaron reglas lógicas para ordenar los razonamientos y, en lo que a matemática atañe, convinieron en aceptar ciertos *elementos* que después se llamaron *axiomas*.

Por lo común, los axiomas adoptados eran aquellos que resistirían a una serie de pruebas; pruebas experimentales o, mejor dicho, sensoriales, y pruebas netamente dicursivas o lógicas. Algunos pocos axiomas que por su enunciado no se toleraban con los datos de los sentidos, pero cuya eficiencia se verificaba no obstante, eran aceptados a regañadientes y por excepción. Esto ocurrió palmariamente con el llamado quinto postulado de EUCLIDES (el de las paralelas), por cuanto su admisión exigía una experimentación repetida un número infinito de veces, para convalidar una sensación visual opuesta a lo que el axioma obligaba a aceptar.

Salvo, pues, lo excepcional, los griegos emplearon contemporáneamente dos criterios de verdad:

a) el criterio experimental,

b) el criterio de no contradicción.

Apresurémonos a destacar dos circunstancias históricas interessantes. Primera, que los matemáticos griegos no expusieron explícitamente dichos dos criterios; pero que los usaron. Segunda, que el criterio de no contradicción fue considerado por ellos como definitivo para fundamentar las verdades de razón; en cambio el criterio experimental — cuando era empleado conscientemente — parecía una especie de criterio auxiliar y provisorio, una técnica para la búsqueda. Así pues, cada vez que ARQUÍMEDES (287 ? a 212) se vale del criterio experimental como de un método heurístico, declara que es necesario hallar la demostración del resultado por vía racional, pues de otro modo no accedería al plano matemático cabal.

En EUCLIDES, el criterio es decididamente demostrativo; aunque, sin dar-se cuenta, entremezcla verdades de razón y verdades fácticas sin justificativo racional; lo cual es buen indicio como para sospechar de que el criterio experimental subyacía en las mentalidades griegas más especulativas.

PLATÓN lo explicaba en la *República*. Quienes se ocupan de la matemática — nos dice — suponen algunas cosas conocidas (como lo par y lo impar, como las distintas espécies de ángulos) y, a partir de ellas proceden ordenadamente (o sea, proceden lógicamente) a hallar otras proposiciones. Esas «cosas conocidas» de que nos habla PLATÓN, tenían por lo general su fundamento en la intuición sensible.

El lúcido panorama que N. BOURBAKI ofrece en los *Eléments d'histoire des mathématiques*, nos muestra que la matemática griega dio a sus cultores una sensación de seguridad y de certeza. Los griegos terminaron otorgando *confianza* a los axiomas y a los teoremas de ellos deducidos. Tan grande confianza como la que tuvieron los físicos teóricos del siglo pasado, en los principios de la Física clásica. Los matemáticos griegos no concibieron la posibilidad de cuestionar las reglas de razonamiento ni los postulados que formularon; excepto, acaso, aquéllos cuyo enunciado implicara una operación al infinito. De modo que, alentados por la eficacia de sus métodos, no cuestionaron la legitimidad de los resultados que obtuvieron o sistematizaron racionalmente. De su eficacia les venía la *evidencia*.

Durante la Edad Media tampoco se cuestionó básicamente a la matemática griega. Pero esto ocurrió por otros motivos.

El criterio de verdad predominante en la Edad Media — salvo las excepciones que hemos mencionado antes y que constituyen algo así como puntos aislados — fue el criterio de autoridad competente; en particular, autoridad de los antiguos (es decir, de los maestros griegos). Por tanto, no se ponía en duda lo afirmado por los principios o por los postulados matemáticos heredados del mundo cultural helénico. A lo sumo se trabajaba en los enunciados, con el prudente propósito de aclararlos y completarlos, a fin de que la «verdad» implícita en ellos se manifestase mucho mejor.

La Edad Media aceptó la matemática griega como testimonio de autoridad; por lo menos hasta que adviene el Renacimiento.

En los tiempos de este gran movimiento cultural no se cuestiona, en realidad, la verdad de la matemática griega; pero se empieza además a advertir muy nítida y *explícitamente* un conjunto de ideas cuyas consecuencias son de trascendencia histórica. Indiquemos tres:

1) No hay diferencia esencial entre los *objetos* de la matemática y los *objetos* de las ciencias naturales. Por eso los renacentistas sostienen que la matemática comprende otras disciplinas, como la mecánica, la náutica, la filosofía natural (física), etc.

2) Los objetos de la matemática como los de las ciencias naturales, son conocidos por intuición sensible y por razonamiento;

3) No hay razón para poner en duda al razonamiento, siempre y cuando se lo use *correctamente*, es decir, de acuerdo con los cánones y normas aceptados desde la Antigüedad.

La verdad matemática y la verdad física van de la mano. Lo afirmaría con lucidez Galileo Galilei, al aseverar que *el mundo es un libro escrito con caracteres matemáticos.*

No quería sostener con esto que el mundo es pitagóricamente matemático; no. Sino que el lenguaje con que el mundo se expresa a los sabios que lo indagan, es el lenguaje de la matemática.

La concepción renacentista, optimista y promisoria, siguió vigente hasta fines del siglo XIX: como si dijéramos, hasta ayer. Blaise Pascal, René Descartes, Gottfried Wilhem Leibniz y todos los matemáticos y físicos que les sucedieron, creyeron en esa concepción. La mayoría de las personas de nuestros propios días también creen en ella; pero los matemáticos del siglo XX piensan de modo diferente.

Ya en tiempos de Gauss, de Lobatchevsky y de Bolyai, cuando surgen con vigor las geometrías no euclidianas, los matemáticos — mal que les pesara — comenzaron a cuestionar aquella idea de la casi identificación entre objetos matemáticos y objetos naturales. La cuestionaron y la abandonaron en muchos casos.

Como consecuencia de la severa revisión de los fundamentos de la matemática toda, a la que dio lugar la aparición de las nuevas geometrías, las cosas cambiaron sustancialmente. Los axiomas dejaron de ser enunciados de propriedades absolutas que a la mente no le cabe sino aceptar; pasaron a ser convenciones, afirmaciones un tanto arbitrarias, cuyo fin no es otro que el de marcar un inicio al razonamiento deductivo. Pese a la tenaz resistencia de grandes pensadores, la gran mayoría se siente incapaz de exigir acuerdo entre la realidad sensible y la matemática; y, entonces ésta deviene una especie de juego de abalorios, con reglas de juego muy claramente enunciadas; pero, no obstante, si se manifiesta un solo acuerdo entre el mundo físico y algunos resultados matemátcos, ese acuerdo no constituye sino un maravillozo hecho, un enigma, cuyo misterio no compete al matemático develar.

Las ideas renacentistas se habían venido abajo. La mayoría de los matemáticos las dejaron de lado lentamente; algunos lo hicieron con manifiesto pesar. Henri Poincaré — tan grande como Gauss — se perguntaba todavía cuál de las geometrías era la mejor; Riemann lanzó la idea de averiguar cuál geometría quedaba *confirmada* por la experiencia. Sin embargo, esa pléyade de jóvenes que reconocen en David Hilbert el numen inspirador, ya no se preguntan aquellas cosas; al contrario, las consideran cuestiones vanas...

Así irrumpe en la Historia el siglo XX. Siglo, paradójicamente, el de mayor aplicación de la matemática, y aquél donde los objetos de la matemática se han independizado de los objetos sensibles. Siglo, en fin, donde el problema de la verdad se ha convertido, en buena parte, en la concepción semántica de la verdad.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

DOUTOR J. TIAGO DE OLIVEIRA

O Prof. J. Tiago de Oliveira, como professor convidado, realizou no 2.º semestre lectivo de 1971/72 (Março a Julho de 1972) no Technion — Israel Institute of Technology (em Haifa) um curso sobre «Order Statistics» e um seminário sobre «Statistics of extremes and applications», bem como conferências sobre «Bivariates extremes» no Technion e Universidade de Tel Aviv. Em Junho, participou ainda no simpósio «Discriminant Analysis and applications» em Atenas onde fez uma conferência sobre «Quasi-linear discrimination».

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

INTRODUÇÃO AOS COMPUTADORES E PROGRAMAÇÃO

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 1.º Semestre — 1.ªChamada — 10 de Março de 1972.

I

5796 — Num programa em FORTRAN com as instruções.

```
REAL I
K = 16
I = K + 4./K
.....
```

Após a execução da última destas instruções, como ficam codificadas internamente as variáveis I e K, num computador com palavras de 32 bits?

II

a) Escreva um programa completo em FORTRAN tal que admita como «input» um valor inteiro N e seguidamente uma sucessão de N valores reais, num máximo de 1000. O programa deverá efectuar a troca dos elementos da sucessão da seguinte forma:

— O primeiro com o último;
— O segundo com o penúltimo;
— O terceiro com o antepenúltimo; etc.

O programa deverá conter uma única variável dimensionada e fazer a saída dos valores após as trocas, cinco por linha.

b) Diga quantas instruções executáveis contém o o programa que escreveu e quais são as não-executáveis.

c) Qual das seguintes proposições é verdadeira:

1) A coluna 6 de um cartão de programa FORTRAN contém uma letra, um dígito diferente de 0, um espaço em branco ou um asterisco;

2) A coluna 6 de um cartão de programa FORTRAN pode conter qualquer símbolo do alfabeto;

3) A coluna 6 de um cartão de programa FORTRAN pode conter um dígito diferente de 0 ou um C (se se tratar de um cartão de comentário).

III

Esta parte tem duas opções, A e B; escolha uma e *uma só* delas.

Opção A

Escreva um programa *APL* que calcule a soma da série (finita)

$$J = I - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

para $x = \pi/4$ (Nota: 1 ←→ ! 0).

Opção B

Dado o programa FORTRAN (incompleto):

```
      INTEGER F (10000)
      F (1) = 1
      F (2) = F (1)
      I = 2
      .....
    2 F (I + 1) = F (I) + F (I - 1)
      I = I + 1
      IF (F (I) - LIMITE) 2,3,3
    3 WRITE (6,4) (F (K), K = 1, I)
    4 FORMAT ('  ', 10 I 12)
      STOP
      END
```

a) Introduza a instrução qne define a variável LIMITE de tal modo que o programa preveja a possibilidade de saída do ciclo antes de ser ultrapassado o valor máximo, previsto num computador de palavras de 32 bits, para os valores inteiros.

b) Esboce o diagrama de blocos do programa completo.

c) Diga qual o efeito deste programa.

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 1.º Semestre — 2.ª Chamada — 15 de Março de 1972.

I

5797 — Num programa em FORTRAN com as instruções

```
INTEGER*2 A
B = 2.
A = - SQRT (B)
.....
```

Após a execução da última destas instruções como ficam codificados internamente os valores das variáveis A e B num computador com palavras de 32 bits?

II

Considere os seguintes programas (completos):

```
      DIMENSION L (10,10)
      DO 1 M = 1,10
      DO 1 N = 1,10
      CAL OTSER (N, M, K K)
    1 L (M, N) = K K
      WRITE (6,3) ((L (I, J), J = 1,10), I = 1,10)
    3 FORMAT ('  ', 10I4)
      STOP
      END
      SUBROUTINE OTSER (I, J, K)
      K = I - I/J * J
      RETURN
      END
```

a) Quantos programas estão codificados acima? Diga se existem subprogramas e de que tipos são; poderiam ser de outro tipo? Justifique.

b) De todas as instruções acima diga quais são as não-executáveis e indique de que tipo são.

c) Apresente os resultados do programa, linha a linha, simulando a impressora.

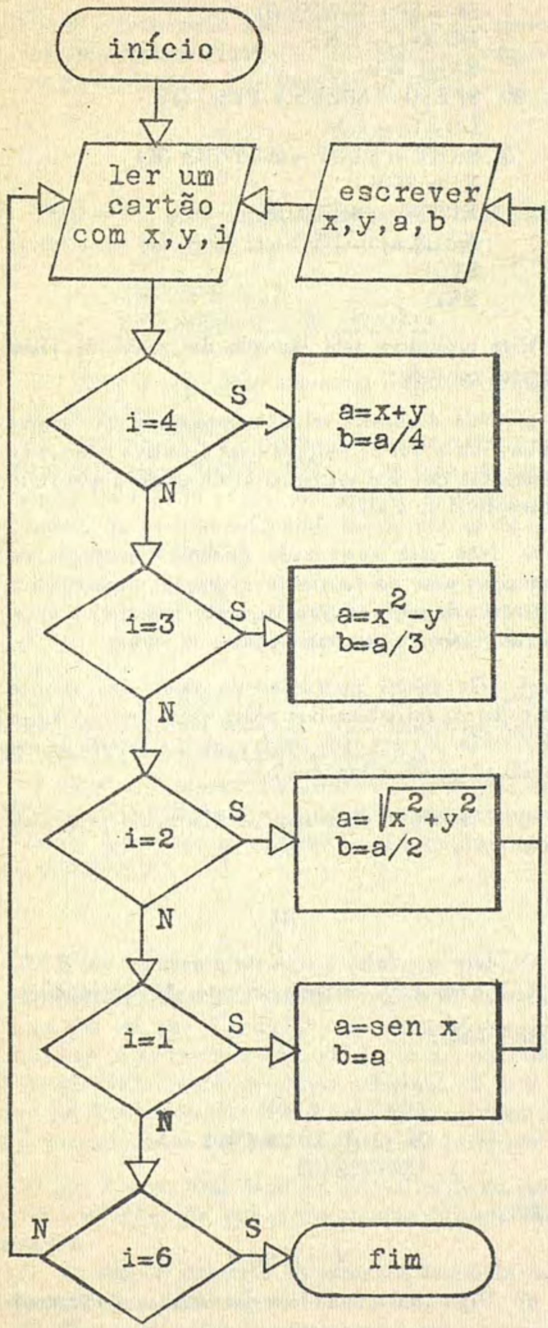
d) Escreva um programa em *APL* que forneça os mesmos resultados.

III

Esta parte tem duas opções, A e B. Escolha uma e *uma só* delas.

Opção A

Escreva um programa FORTRAN que resolva o problema esquematizado no diagrama de blocos seguinte:



Opção B

Escreva uma subrotina em FORTRAN com o nome SEPARA, tal que admita como dados os elementos de uma sucessão de dimensão definida no programa principal; esta deverá então fornecer ao programa principal duas sucessões, uma com os elementos positivos ou nulos e a outra com os elementos negativos, pela ordem porque já anteriormente se encontravam.

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 2.º Semestre — 1ª. Epoca — 22 de Julho de 1972.

I

5798 — *a*) Diga como são codificados internamente por um computador com palavras de 32 bits as constantes FORTRAN: +129 (inteira) e −149.25 (real). Diga quais o maior e menor valores reais que é possível codificar com palavras desta extensão; justifique.

b) Indique quais as linguagens de programação que conhece e diga como se classificam do ponto de vista das suas aplicações.

c) Qual a utilidade do compilador FORTRAN do sistema de exploração do computador instalado no CCUTL?

II

Escreva um programa completo em linguagem FORTRAN, incluindo todas as entradas e saídas, que execute o processamento seguinte:

a) Ler um valor inteiro, não superior a 10000 e seguidamente uma sucessão de tantos valores reais quanto o valor inteiro lido;

b) Determine o máximo desses valores reais e a ordem dentro da sucessão da ocorrência, pela primeira vez, desse máximo;

c) Imprima os valores calculados em *b*);

d) Não se esqueça de introduzir instruções que permitam ao computador finalizar a execução do programa.

III

O seguinte programa está completo, mas contém alguns erros de sintaxe, um e um só em cada instrução, com excepção de uma instrução que se encontra escrita de maneira incorrecta:

```
      INTEGER*1 A (80)
   24 READ (5,2,END = 1972) (A(I) I = 1,80)
      DO Z1 I = 1,40
      K IGUAL A (81 — I)
      A (81 — I) = A (I
    1 A = K
      WRAITE (6,3) A
```

```
   3 FORMATO (' ',80AI)
     FORMAT (80A1)
     GO TO = 24
     GO TO STOP
1972 END
```

a) Corrija este programa do ponto de vista da sintaxe;

b) Diga qual a sua finalidade;

c) Desenhe um diagrama de blocos que exprima a lógica do programa apresentado.

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 1.º Semestre — 2.ª Epoca — 2 de Setembro de 1972.

I

5799 — *a*) Indique em hexadecimal os valores de maior e menor módulo (com exclusão do valor 0) que é possível codificar em virgula flutuante em precisão simples e precisão dupla, em computadores com palavras de 32 bits.

b) Qual a razão porque sendo os valores de menor módulo iguais em ambas as precisões, eles são diferentes no caso do maior módulo? Justifique.

c) Indique sumàriamente qual a finalidade das componentes que conhece do sistema de exploração do computador instalado no Centro de Cálculo da Universidade Técnica de Lisboa.

II

Suponha que se pretendia calcular as médias das idades, dos pesos e das alturas de 15000 alunos da Universidade Técnica de Lisboa e que esses dados se encontravam perfurados em cartões, um para cada aluno, de acordo com as especificações I5, F8.1 e F5.2. Um possível programa para efectuar esses cálculos seria o seguinte:

```
   DIMENSION IDADE (15000), PESO (15000),
 1 ALTURA (15000)
   N = 15000
   READ (5,2) (IDADE (I), PESO (I), ALTURA
 1 (I), I = 1, N)
 2 FORMAT (2X, I3, 3X, F5. 1, F5. 2)
   SI = 0.
   DO 1 I = 1, N
   SPESO = 0.
 1 SI = SI + IDADE (I)
   DO 20 J = 1, N
   SALT = 0.
20 SPESO = SPESO + PESO (J)
   DO 3 K = 1, N
 3 SALT = SALT + ALTURA (K)
   XI = SI/N
   XPESO = SPESO/N
   XALT = SALT/N
   STOP
   END
```

Este programa está correcto do ponto de vista lógico; contudo:

a) Não é susceptível de ser passado em computador, sob o 44PS; indique qual o motivo e quais as alterações que lhe introduziria de modo a que fôsse susceptível de o ser;

b) Não está optimizado quanto à ocupação de memória nem ao tempo de execução; diga como o alteraria de modo a (tanto quanto possível) o optimizar de acordo com estes pontos de vista;

c) Não inclui instruções de saída dos valores calculados; introduza instruções que permitam a sua impressão, um em cada página, após a escrita de um título adequado à sua escolha;

d) Desenhe o diagrama de blocos do programa final.

III

Os dois seguintes troços de programa, em FORTRAN e em *APL*, respectivamente, são equivalentes:

FORTRAN:

```
  I = 1
  DO 1 J = 2, N
  IF (A (I). LT. A (J)) I = J
1 CONTINUE
```

APL:

$$I \leftarrow A \,\iota\, \lceil / A$$

a) Diga qual a finalidade dos cálculos efectuados?

b) Se tivesse de escrever um subprograma em FORTRAN para efectuar o cálculo de I repetidas vezes, que tipo de subprograma escolheria? Acrescente ao troço de programa acima as instruções necessárias para que esse subprograma fique completo.

c) Qual o significado das duas funções *APL* ι e $\lceil$? De que tipos são no exemplo apresentado?

I. S. T. — Introdução aos Computadorese e Programação — Exame Final - 2.º Semestre — 2.ª Época — 1.ª Chamada — 6 de Outubro de 1972.

I

5800 — Um programa em linguagem FORTRAN possui como primeiras instruções as seguintes:

```
COMMON A ,B
INTEGER*2 A (8) , B (10,10)
```

a) Diga de que tipos são estas instruções e qual a sua finalidade;

b) Sabendo que um supervisor de um sistema de exploração ocupa $16896 = 4200_{16}$ bytes (caso do computador do CCUTL), em que posição (palavra) da memória (em hexadecimal) virão localizadas as variáveis A (8) e B (5,7)?

c) Discuta as razões que levaram à escolha do excesso 64 para a representação do expoente da vírgula flutuante de computadores com palavras de 32 bits;

d) Para que serve o controlo da impressora? Quais os caracteres do FORTRAN admitidos como tal e como são codificados num programa?

e) Qual a diferença existente entre as instruções STOP e END. Enquadre a sua resposta nas várias fases da passagem no computador de um programa em FORTRAN.

II

Elabore um diagrama de blocos e escreva um subprograma tal que 1) admita como argumentos do programa principal uma sucessão de valores reais de dimensão definida no programa principal, 2) a dimensão dessa sucessão, 3) um valor real qualquer; e que forneça como resultado ao programa principal:

a) se o valor real dado em 3) fizer parte da sucessão, o índice do seu primeiro aparecimento na sucessão;

b) se não, a dimensão da sucessão, acrescida de uma unidade;

c) diga qual o tipo do subprograma que escreveu acima e indique porque não é de outro tipo.

III

Um texto qualquer está perfurado em vários cartões, num máximo de 10. Cada palavra deste texto é constituída por caracteres quaisquer que não são um ponto nem um branco. Cada frase do texto é terminada por um ponto imediatamente a seguir à última palavra dessa frase, tal como na escrita corrente. Cada palavra é separada da seguinte por um branco e o texto tem pelo menos uma frase.

Escreva um programa completo para ler o texto, e calcular e imprimir:

a) O número de frases do texto;

b) O número médio de palavra por frase;

c) O número médio de caracteres por palavra;

d) No que diz respeito à leitura, adopte qualquer convenção que achar conveniente para ser detectado o fim dos cartões logo após a leitura do último cartão do texto.

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 2.º Semestre — 2.ª Epoca — 2.ª Chamada — 30 de Outubro de 1972.

I

5801 — Um programa em linguagem FORTRAN possui como primeiras instruções as seguintes:

```
INTEGER*2 I (2)
EQUIVALENCE (X , I (1))
X = 1.03125
WRITE (6,1) I
```

a) Diga de que tipos são estas instruções e qual a sua finalidade;

b) Escreva uma instrução de FORMAT de rótulo 1 apropriada para permitir a saída dos valores do quadro I pela impressora do sistema e de acordo com ela indique como seriam impressos esses valores;

c) Supondo que um programa com as instruções iniciais acima indicadas é passado num computador com palavras de 32 bits, qual a codificação interna da variável X em hexadecimal e quais os valores numéricos decimais das variáveis I (1) e I (2) no momento da execução da instrução de saída? (Nota: $0{,}03125 = 2^{-5}$ e $2^{15} = 32768$);

d) Quais são as componentes da unidade central de um computador e como se processa o fluxo de informações entre elas e as unidades periféricas?

II

O subprograma seguinte está completo e correcto, servindo para, definidos no programa de chamada uma sucessão de valores reais X e um valor inteiro

N, seleccionar de entre as N primeiras componentes de X a maior (se $N \leqslant 1$, seleccionar X (1)), e a posição da primeira ocorrência desse valor na sucessão:

```
      SUBROUTINE MAXIMO (J ,MAIOR)
      COMMON N,X
      REAL MAIOR
      DIMENSION X (1)
      MAIOR = X (1)
      J = 1
      IF (N.LE.1) RETURN
      DO 6 I = 2,N
      IF (X (I) - MAIOR) 6,6,85
   85 J = I
    6 CONTINUE
      RETURN
      END
```

a) Diga qual o significado dos verbos RETURN e CONTINUE, incluídos neste subprograma;

b) Qual a razão porque o subprograma acima não é de outro tipo? Seria possível alterá-lo de modo a que o fosse, obtendo-se ainda os mesmos resultados? Justifique a resposta;

c) Escreva um programa principal completo que efectue o processamento seguinte:

1.º Leitura de, num máximo 10000 valores reais, tantos quanto o valor de uma variável inteira lida antes (eventualmente na mesma instrução);

2.º Ordenação desses valores reais por ordem *decrescente*, por chamada do subprograma indicado acima;

3.º Impressão da sucessão assim ordenada.

Não se esqueça de que se pretende um programa completo, envolvendo por isso todas as instruções executáveis e não-executáveis necessárias para as leituras, escritas, cálculos e chamadas ao subprograma.

III

Como é do conhecimento geral, o FORTRAN é uma linguagem em que as entradas e saídas se efectuam em formato fixo. É, no entanto, possível em certos casos efectuar, por programa, esses processamentos em formato livre.

Supondo que se encontram perfurados em cartões valores *inteiros* e *positivos* quaisquer, em campos arbitrários, separados um dos outros dentro de cada cartão por, pelo menos, um espaço em branco, desenhe um diagrama de blocos e escreva um subprograma que permita:

a) Efectuar essa leitura cartão a cartão, pesquisando se existem ou não perfurados no cartão quaisquer outros caracteres que não sejam numéricos;

b) Se for o caso imprimir uma mensagem de erro e abandonar a execução de todos os programas que constituem o «job»;

c) Se só existirem perfurados valores numéricos positivos de constantes inteiras, separados como se indicou por pelo menos um espaço em branco, atribuí-los a tantas variáveis inteiras indexadas quanto o número desses valores e transmiti-los assim ao programa de chamada.

Nota: atendendo a que os cartões são lidos individualmente e para cada um os possíveis valores de constantes inteiras aí perfurados estão separados por um ou mais espaços em branco, não poderá haver para cada cartão mais de 40 variáveis a serem lidas.

Enunciados dos n.os 5796 a 5801 de J. Marques Henriques

TEORIA DOS ANÉIS

Instituto de Matemática da UFPE — Mestrado — Teoria dos Anéis — Exame Final — 1.ª parte — 30-6-73.

Tempo para a prova: 4 horas

5802 — 1) Diga se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas:

a) Se A é um DIP, todo ideal primo de A é maximal.

b) Se A é um DFU, todo ideal primo de A é maximal.

c) Se A e $A[X]$ são DIP, então A é um corpo.

d) Se A é um domínio Noetheriano tal que, para todos $a, b \in A$, $<a> + <b>$ é um ideal principal, então A é um DIP.

e) Se A é um DFU e a, b, c são elementos de A tais que c é um máximo divisor comum de a e b, então existem $x, y \in A$ tais que $c = ax + by$.

2) Suponha que o diagrama de homomorfismos de de A-módulos

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & T \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & R' \arrow[r, "f'"'] & S' \arrow[r, "g'"'] & T' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

é comutativo e que as linhas são sequências exactas. Mostre que

a) Se v é um epimorfismo, então w é um epimorfismo.

b) Se v é um monomorfismo, então u é um monomorfismo.

3) Considere o anel $A = K[x, y, z]$ onde K é um corpo e $xy = z^2$.

a) Mostre que A é Noetheriano.

b) Mostre que $<x> \cap <x, y, z>^2$ é uma decomposição primária irredundante do ideal $<x, z>^2$.

4) Seja D um domínio Noetheriauo e seja $a \in D$, um elemento não nulo e não inversível.

Mostre que:

a) Se $b \in D - \{0\}$, então o conjunto dos ideais da forma $<b> : <a^n>$, para $n \in Z^+$, é finito.

b) Se $b \in D - \{0\}$, então o conjunto

$$\{n \in Z^+ : b \in <a^n>\}$$

é finito.

c) Se I é um ideal não nulo de D, então $aI < I$.

d) Se J é um ideal contido no ideal principal $<c>$, então $J = c(J : <c>)$.

e) Se todo ideal maximal de D é principal então D é um DIP.

Intituto de Matemática da UFPE — Mestrado — Teoria dos Anéis — Exame final — 2.ª parte — 2-7-73.

Tempo para a prova: 5 horas

5803 — Considere o conjunto E dos polinómios em X com coeficientes num corpo K, munido das operações $+$ e Θ, assim definidas: a operação $+$ é a operação de soma de polinómios e a operação Θ é definida pela condição:

Se

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \quad g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i,$$

então

$$f \Theta g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i X^i$$

com

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j \alpha^j (b_{i-j}),$$

onde α ó um endomorphismo não nulo do corpo K (sendo, por convenção, $\alpha^0(x) = x$ para todo $x \in K$).

Mostre que:

a) $<E, +, \Theta>$ é um anel (prove sòmente a associatividade da operação Θ) sem divisores próprios de zero e não comutativo (a não ser que α seja o automorfismo idêntico).

b) Para todo $f \in E$ e $g \in E - \{0\}$, existem polinómios $q, r \in E$ tais que

$$f = q \Theta g + r, \text{ onde } r = 0 \text{ ou } gr(r) < gr(g).$$

*

Isto mostra que há anéis não comutativos, muito semelhantes aos anéis euclideanos. Surge assim naturalmente o problema de estender a certos anéis não comutativos algumas propriedades dos anéis euclideanos.

Seja então A um anel sem divisores próprios de zero para o qual existe alguma aplicação

$$v : A - \{0\} \to Z^+$$

que satisfaça as condições seguintes:

(*i*) $v(y) \leqslant v(xy)$ para todos $x, y \in A - \{0\}$.

(*ii*) Para todos $x, y \in A - \{0\}$, existem $q, r \in A$ tais que

$$x = qy + r, \text{ onde } r = 0 \text{ ou } v(r) < v(y);$$

[q diz-se *quociente esquerdo* de x por y; se $r = 0$, diz-se que y é *divisor direito* de x ou que x é *múltiplo esquerdo* de v].

Mostre que:

1) Se a é um elemento de A tal que $v(a)$ é mí-

nimo, então a é múltiplo esquerdo de a e o quociente esquerdo correspondente é elemento um de A (representado por 1).

2) É condição necessária e suficiente para que o elemento $x \in A$ seja inversível que se tenha $v(x) = v(1)$.

Tem-se $v(y) = v(xy)$, se e só se x é inversível.

3) Se I é um ideal esquerdo de A, então I é principal e qualquer cadeia estritamente ascendente de ideais esquerdos de A é necessàriamente finita.

4) Se o elemento $a \in A - \{0\}$ é não inversível, existe um divisor direito d de a tal que

$d = uv$ implica u inversível ou v inversível.

5) A é um anel com máximo divisor comum direito e com mínimo múltiplo comum esquerdo.

6) Os elementos q e r que intervêm na condição (*ii*) são únicos, se e só se v satisfaz à condição

$$(iii) \qquad v(x+y) \leqslant \sup\{v(x), v(y)\}$$

para todos $x, y \in A - \{0\}$ tais que $x + y \neq 0$.

7) Se a aplicação v satisfaz às condições (*i*), (*ii*) e (*iii*), então $U \cup \{0\}$, onde U é o conjunto dos inversíveis de A, é um anel de divisão.

Enunciados dos n.os 5802 a 5803 de José Morgado

EXERCICES D'ANALYSE

Université Libre de Bruxelles – Faculté des Sciences Appliquées – Exercices d'Analyse.

1ère candidature.

I

5804 — 1. Soit R^n l'espace de n-uples

$$\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$$

a) Montrer que $R, R^n, +$ est un espace vectoriel.

b) Quelle est la dimension de R^n.

c) Donner deux bases distinctes de R^n.

d) Un sous-ensemble S d'l vectoriel réel est 1 sous-vectoriel si et seulement si $\forall\, a, b \in R$

$$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in S : a\vec{x} + b\vec{y} \in S.$$

Montrer que R^k est un sous vectoriel de R^n si $k < n$.

Donner une base de R^2 dans R^n. Quelle est sa dimension?

e) Montrer que R^2 est isomorphe au plan réel.

2. Soit dans R^3 le changement de base suivant (où $\vec{e}_1\, \vec{e}_2\, \vec{e}_3$ est la base canonique de R^3)

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 . \end{cases}$$

a) Déterminer les composantes dans la nouvelle base des vecteurs

$$\vec{x} = (1, 1, 0)$$
$$\vec{y} = (2, 0, 1)$$
$$\vec{z} = (0, 0, 1).$$

b) Montrer que les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ forment également une base.

II

5805 — 1. Utiliser les formules de Taylor et Mac Laurin pour calculer

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)^2}{\sin \frac{x}{2}}$ *b*) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$.

2. Trouver une fonction f six fois dérivable, admettant un maximum en 0 et dont toutes les dérivées en ce point sont nulles jusqu'à l'ordre 5.

3. Rechercher les extrémas des fonctions suivantes et déterminer s'il s'agit de minima ou de maxima

a) $y(x) = \dfrac{\operatorname{Log} x}{x} \quad 0 < x < \infty$

b) $y(x) = x^4 - 4x^3 + 16x + 1 \quad -\infty < x < +\infty$

c) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi .$

4. *a)* Considérons un canal rectiligne large de 1 km. Un étudiant se trouvant le long du canal veut atteindre un endroit situé sur la rive opposée à une distance de 2 km du point qui lui est opposé.

Sachant qu'il nage à une vitesse de 4 km/h et marche à une vitesse de 5 km/h et qu'il doit atteindre l'endroit en question en un minimum de temps, quel trajet va-t-il effectuer?.

b) Même problème lorsque le point à atteindre est á 1 km et lui est opposé.

c) Même problème lorsqu'il nage à une vitesse de 5 km/h et marche à une vitesse de 4 km/h.

III

5806 – 1. Soit f la fonction définie sur le carré $0 \leqslant x \leqslant 1 \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si} \quad x \geqslant y \\ x(1-y) & \text{si} \quad x < y . \end{cases}$$

Démontrer que

a) $\forall\, a, b \in [0,1] \quad f(a,b) = f(b,a)$

b) f est continue.

c) Quel que soit $a \in [0,1]$ la fonction $g(y) = f(a,y)$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point $b \in [0,1]$.

2. Trouver les points de discontinuité de la fonction suivante:

$$\cos \frac{1}{xy} .$$

3. Déterminer le domaine de définition de la fonction $\operatorname{Arc\,sin} \dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

4. Trouver les points de discontinuité de la fonction $\dfrac{xy+1}{x^2-y}$.

5. Calculer les différentielles première et seconde de la fonction composée suivante

$$f_3(x,y,z) = xyz, \quad x = t^2 + 1,$$

$$y = \log t, \quad z = \operatorname{tg} t .$$

6. x e y étant deux fonctions d'une variable indépendante, calculer

$$d^2 \left[(x^2 + y^2) \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{x} \right]$$

en utilisant la différentiation des fonctions d'une variable.

7. Calculer les dérivées partielles de la fonction suivante

$$f = \sqrt{x^2 - y^2} .$$

8. Trouver les dérivées partielles du $2d$ ordre de $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^4$.

9. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction

$$F(x,y) = \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2) .$$

IV

5807 – 1. Résoudre et discuter le système

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2. Calculer par le déterminant de Sylvester le résultat des deux équations:

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ x^3 + px + q = 0 \end{cases} .$$

Comparer la réponse à celle donnée dans le Cours p. 98.

3. Soit $[x]$ la fonction «partie entière de» x

a) Démontrer que $\varphi(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ est une fonction continue et non décroissante.

b) Calculer

$$\int_0^4 \varphi(x)\, dx .$$

4. Calculer

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

par *dvp* de Taylor

5. Ecrire la formule de TAYLOR appliquée au point $x=1$ à la fonction réelle $y(x)$ définie par la relation $y^3+x^3-xy+y=0$.

On se limitera aux trois premiers termes.

6. Calculer la matrice jacobienne de (u,v) par rapport à (x,y) lorsque u et v sont définis implicitement en fonction de x,y par les relations

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv u+v-x-y=0 \\ f_2 &\equiv xu+yv-1=0 \end{aligned}.$$

Calculer ensuite le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(uv)}{\partial(x,y)}.$$

7. Déterminer le minimum de la distance entre l'origine et les points de la courbe $y=1-x^2$.

V

Intégrales généralisées

5808 — 1. Etudier la convergence de

$$a)\ \int_1^\infty \frac{x\,dx}{3x^4+5x^2+1} \qquad b)\ \int_2^\infty \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\,dx$$

$$c)\ \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x}\,dx \qquad d)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}\,dx.$$

2. Etudier la convergence de

$$a)\ \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx \qquad b)\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$c)\ \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \qquad d)\ \int_0^\pi \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx.$$

3. Montrer que les intégrales

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x\,dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

convergent.

4. Calculer

$$a)\ I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$

$$b)\ I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}.$$

VI

5809 — 1. Soit U une fonction dérivable de la variable $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

En utilisant OSTROGRADSKY, montrer que si Ω est le domaine compris entre deux sphères concentriques (rayons a et b)

$$\iiint_\Omega \Delta U = 4\pi b^2 U'(b) - 4\pi a^2 U'(a).$$

2. Calculer le flux du vecteur $\overline{A}=(2x-z)\overline{1}_x+ + x^2y\overline{1}_y - xz^2\overline{1}_z$ au travers de la surface du cube délimitée par les plans $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$:

a) directement

b) en appliquant la formule d'OSTROGRADSKY.

3. Calculer en appliquant le théorème de GREEN dans le plan

$$I=\int_C (xy^2+e^x\cos y)\,dx-(x^2y+e^x\sin y)\,dy$$

où C est l'arc de lemniscate d'équation $r^2=\cos 2\alpha$ situé dans le premier quadrant (Autrement dit $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$) $\quad A=(1,0)$.

4. Montrer que le champ de force

$$\overline{F}=(2xy+z^3)\overline{1}_x+x^2\overline{1}_y+3xz^2\overline{1}_z$$

est irrotationnel.

— Trouver le potentiel scalaire duquel dérive ce champ.

— Calculer le travail effectué en déplaçant un objet du point $(1,-2,1)$ au point $(3,1,4)$ dans ce champ de force.

5. On donne le champ vectoriel $\overline{F}$

$$\overline{F}=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\overline{1}_x+\frac{e^y}{1+x^2}\overline{1}_y.$$

Montrez que ce champ dérive d'un potentiel scalaire et recherchez la circulation du champ le long d'une courbe joignant l'origine au point $(1,4)$.

Enunciados dos n.os 5804 a 5809 de F. e J. Teixeira

AUTOR	TÍTULO	N.º	PREÇO	
			US $	CR $
AMBROSIO, U. D'.	On parametrization of trajectories in systems with memory	19	0.50	3,25
KAYANDE, A. A. and RAO, M. R. M.	Comparison principle and converse theorems for finite time stability	20	1.00	6,50
CARDOSO, F.	On the existence and differentiability of weak solutions of a boundary value problem for certain class of pseudo-differential operators	21	1.00	6,50
TSOKOS, C. P. and LEELA, S.	Control systems and finite time stability	22	0.75	4,87
MORGADO, J.	Extension of some results of HERSTEIN on semi-homomorphisms of groups	23	0.75	4,87
SCHAPIRA, P.	Théorie des hyperfonctions	24	1.25	8,12
MORGADO, J.	Two axiom systems for commutative rings with identity	25	0.50	3,25
VASCONCELOS, W. V.	A note on projective modules over polynomial rings	26	0.50	3,25
CARDOSO, F.	On a sheet problem for pseudo-differential operators	27	0.50	3,25
CARDOSO, F.	The identity of weak and strong extensions of pseudo-differential operators	28	0.50	3,25
NACHBIN, MACHADO and PROLLA	Weighted approximation, vector fibration and algebras of operators	29	1.25	8,12
MORGADO, J.	Some remarks on a definition of a group in terms of the inverse operations	30	0.75	4,87
OLIVEIRA, G. N.	Binary square roots of matrices	31	1.25	8,12
PACHPATTE, B. G.	On the stability problems of perturbed difference equations	32	0.50	3,25
BEIRES, R. S.	Sôbre uma caracterisação matricial das transformações canónicas	33	1.00	6,50
VASCONCELOS, W. V.	Finiteness in projective ideals	34	1.00	6,50
SETTE, A. M.	On the propositional calculus P^1	35	1.00	6,50
DEO, S. G.	Mixed stability and functional differential systems	36	0.75	4,87
SIMIS, A.	Projective moludi and maximal spectra of certain quotient rings	37	1.00	6,50
GOMES, R. L.	Uma propriedade do fecho holomórfico	38	0.50	3,25
BADELUCCI, A.	Stability of non linear equations with time lag	39	0.50	3,25
RAMALHO, R.	Existence and uniqueness theorems for a nonlinear integral equation	40	2.50	16,25
COSTA, N. C. A.	On the theory of inconsistent formal systems	41	1.25	8,12
LINHARES, O. L.	Sôbre um método geral de inversão de matrizes	42	1.00	6,50
MORGADO, J. C.	Note on quasi-orders, partial orders and orders	43	0.75	4,87
CARDOSO, J. M. and MIYAOKA, F. K.	Estrutura de reticulado em 3-aneis unitários	44	0.50	3,25
SARTORELLI, A.	Uma caracterização das álgebras de BOOLE	45	0.50	3,25
KASCIC, M. J.	Functional analytic equivalences for P and strong P-convexity	46	0.75	4,87
BERENSTEIN, C. A. and DOSTAL, M. A.	Some remarks on convolution equations	47	1.25	8,12

GAZETA DE MATEMÁTICA

Preço deste número: 120 escudos

Assinatura relativa a 1973 (4 números) 100 escudos

Assinatura para o estrangeiro, 200 escudos

«NOTAS DE CURSO» E «TEXTOS DE MATEMÁTICA»

COLEÇÕES DIRIGIDAS POR RUY LUIS GOMES E JOSÉ MORGADO

AUTOR	TÍTULO	N.º	PREÇO	
			US $	CR $
Micali, A.	Introdução à Algebra Homológica	1	3.00	19,50
Cardoso, F.	Lições de Análise Funcional	2	3.00	19,50
Carmo, M. P.	Cálculo e Topologia no R^n	3	4.00	26,00
Oliveira, G. N.	Valores Próprios de Matrizes — problema inverso	4	2.00	13,00
Farias, A. O.	Introdução à Topologia Diferencial (vol. I)	5	5.00	32,50
Farias, A. O.	Introdução à Topologia Diferencial (vol. II)	6	5.00	32,50
Oliva, W. M.	Exposições sôbre mecânica conservativa	7	2.00	13,00
Pizanelli, D.	Operadores Analíticos Lineares	8	3.00	19,50
Pereira Gomes, A.	Elementos de álgebra linear e multilinear	1	out of print	esgotado
Godement, R.	Varietés differentiables	2	out of print	esgotado
Bruhat, F.	Algèbres de Lie, groupes de Lie et applications résumé des leçons	3	out of print	esgotado
Chern, S. S.	Differenciable manifolds	4	out of print	esgotado
Chern, S. S.	Complex manifolds	5	out of print	esgotado
Nachbin, L. e outros	Conferências	6	out of print	esgotado
Nachbin, L.	Integral de Haar	7	out of print	esgotado
Honig, C. S.	Aplicações da topologia à análise	8	out of print	esgotado
Domingo, C.	Cálculo automático-aplicação à integração das equações diferenciais ordinárias	9	3.00	19,50
Morgado, J. C.	Introdução à teoria dos reticulados	10	3.00	19,50
Morgado, J. C.	Introdução à teoria dos reticulados	11	3.00	19,50
Carmo, M. P.	Geometria diferencial local	12	out of print	esgotado
Morel, H.	Introduction à l'étude de problèmes aux limite et équations différentielles opérationnelles	13	3.00	19,50
Klingenberg, W.	The triangle theorem in the Riemannian geometry	14	1.25	8,12
Nachbin, L.	Lectures on the theory of distributions	15	out of print	esgotado
Ribenboim, P.	Linear representations of groups	16	7.50	48,75
Medeiros, L. A.	Tópicos de Análise funcional	17	3.00	19,50
Nowosad, P.	Introdução à Análise funcional	18	3.00	19,50
Neveu, J.	Chaînes de Markov	19	3.00	19,50

Composição e impressão — Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2