
GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANOS XXXIV-V

N.º 129-132

JAN.-DEZ. 1973-74

SUMÁRIO

Necessidades brasileiras da Matemática
por *Leopoldo Nachbin*

Homenagem a Leopoldo Nachbin
por *Ruy Luis Gomes*

On symmetrical Fourier kernel
by *R. U. Verma*

Relações entre os coeficientes dos polinómios $T_n(x)$
e $P_n(x)$ e os coeficientes dos polinómios $He_n(x)$.
Aplicação ao cálculo automático
por *Rui João Baptista Soares*

Um processo de gerar números pseudo-aleatórios
e seus testes — fundamentos e resultados
por *M. Antónia Amaral, Helena M. Barroso,*
M. Lucília Carvalho, M. Ivette Gomes, Daniel
A. Muller e M. F. Veiga de Oliveira

Informática Superior
por *J. Marques Henriques*

Ciência e Sociedade
Galileo Galilei
valor científico e valor moral da sua obra
por *Bento de Jesus Caraça*

Antologã
A cultura integral do indivíduo
— problema central no nosso tempo
por *Bento de Jesus Caraça*

Movimento Matemático
Congresso Internacional de Matemáticos

Matemáticas Superiores
Pontos de exame de frequência e finais

G A Z E T A D E M A T E M Á T I C A

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.*

ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2

REDACÇÃO

Redactores: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

OUTROS COMPONENTES

EM PORTUGAL:

Coimbra: L. Albuquerque; **Lisboa:** Almeida e Costa, A. Sá da Costa, J. J. Dionísio, J. Ribeiro Albuquerque, M. Teodora Alves, Fernando de Jesus, A. César de Freitas e Fernando Dias Agudo; **Porto:** Andrade Guimarães, Arala Chaves, Coimbra de Matos, Laureano Barros, L. Neves Real.

NO ESTRANGEIRO:

Argentina — *Buenos Aires:* António Monteiro, L. A. Santaló e Eduarde del Busto; *Mendoza:* F. Toranzos; *San Luis:* Manuel Balanzat; **Brasil** — *Belo Horizonte:* Cristovam dos Santos; *Recife:* Newton Maia, Ruy Luís Gomes e José Morgado; *Rio de Janeiro:* Achille Bassi, Leopoldo Nachbin, Maria Laura Mousinho e Maurício Peixoto; *São Paulo:* Ómar Cataná; **Espanha** — *Barcelona:* Francisco Sanvisens; *Madrid:* Sixto Rios García; **Itália** — *Roma:* Emma Castelnuovo; **França** — *Paris:* Paul Belgolère; A. Pereiro Gomes; **Suissa** — *Zürich:* H. Werrnus; **Uruguay** — *Montevideo:* Rafael La Guardia; **U. S. A.** — *Pennsylvania:* Maria Pilar Ribeiro; **Venezuela** — J. Gallego Díaz.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo prévio entre o Autor e a Redacção.

Publicações do CENTI (Centro de Tratamento da Informação)

Relatório Revisto sobre a Linguagem Algorítmica — ALGOL 60

Tradução de J. G. TEIXEIRA

Problemas de Matemática na Teoria dos Reactores Nucleares

J. G. TEIXEIRA

Natureza da Investigação Operacional

FERNANDO DE JESUS

Os sócios da S. P. M., assinantes da «Gazeta de Mat.» e da «Portugaliae Math.», beneficiam para estas obras do desconto de 20%.

OS ANÚNCIOS DESTE NÚMERO NÃO SÃO PAGOS

Necessidades brasileiras da Matemática ⁽¹⁾

por *Leopoldo Nachbin*

1. *Palavras introdutórias*

Há sete anos, em meados de 1966, tive a grande alegria de receber um telegrama do Professor Jônio Santos Pereira de Lemos, então Vice-Reitor da Universidade Federal de Pernambuco e hoje Diretor de seu Instituto de Matemática, comunicando-me que o Conselho Universitário resolvera me distinguir com a concessão do título de Doutor Honoris Causa. Na ocasião, fiquei também sabendo, através de amigos, que o relator da respectiva proposta fora o Professor Marcionilo de Barros Lins, tendo a idéia da mesma e sua iniciativa partido do Professor Ruy Luís Gomes.

Marcada a data da solenidade do Conselho Universitário para que a concessão fosse efetivada, verificou-se um adiamento por motivo de força maior, resultante de grave enfermidade de nosso saudoso colega e amigo, o Professor Manuel Zaluar Nunes. Desde então, devido a contratempos diversos, entre os quais alguns resultantes de meus próprios compromissos pessoais, não surgiu novo ensejo pro-

pício à solenidade, até que o nosso Magnífico Reitor Marcionilo de Barros Lins veio a fixar a data de hoje para a sua realização.

Apresento-me a este Conselho Pleno com um múltiplo orgulho de vir efetivamente a possuir o título de Doutor Honoris Causa pela Universidade Federal de Pernambuco, orgulho esse que acumulei com entusiasmo crescente durante os sete anos que transcorreram de 1966 até hoje. Somente esta Universidade da minha cidade natal, à qual me mantive intimamente ligado, lograria tocar as minhas emoções tão intensamente como ora ocorre.

Nesta oportunidade, desejo render a minha sincera homenagem aos nomes dos matemáticos da Universidade Federal de Pernambuco que, a meu ver, mais significativamente contribuíram para tornar Recife o maior e o melhor centro matemático do Nordeste brasileiro e um dos mais pujantes da América Latina. Refiro-me a meus colegas e amigos, os Professores Alfredo Pereira Gomes, Fernando António Figueiredo Cardoso da Silva, José Cardoso Morgado Junior, Manuel Zaluar Nunes, Roberto Figueiredo Ramalho de Azevedo e Ruy Luís Gomes. Foi a dedicação incansável destes cientistas e, acima de tudo, sua visão correta do problema da implantação

(1) Discurso de agradecimento ao receber o título de Doutor Honoris Causa pela Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, a 29 de Junho de 1973.

de uma verdadeira escola matemática em todos os seus níveis, que os conduziram não somente ao sucesso alcançado, mas também à compreensão do rumo a imprimir num futuro previsível. Nos centros de elevado potencial universitário, como Recife, a fórmula a adotar é simples: sem descuidar da graduação, promover um amplo desenvolvimento da pós-graduação e da pesquisa, com vistas à consequente melhoria da própria graduação.

Que me seja permitida, neste momento, uma divagação sobre as necessidades brasileiras da Matemática, como eu as vejo de um ponto de vista global, pondo de lado os detalhes regionais e realçando os aspectos mais imperiosos.

2. Observações históricas sobre a graduação matemática

Até cerca de 1930, um estudante no Brasil que tivesse uma forte inclinação matemática procuraria fazer a graduação numa Escola de Engenharia, ou numa Escola Militar. Teria, então, o ensejo de seguir cursos de Cálculo Infinitesimal e de Geometria Analítica e sua formação matemática em nível universitário terminaria aí. Possuindo real talento, procuraria aprender mais conhecimentos matemáticos por conta própria, ou então com o auxílio de um amigo mais experimentado.

Prevalecendo um tal sistema, ou melhor dito uma tal falta de sistema, o Brasil não produziu pesquisadores matemáticos que obtivessem um reconhecimento internacional, pelo menos em suas épocas, ou mais tarde, exceto talvez no caso de Gomes de Souza, no século dezenove, que se tornou conhecido em certos círculos da Europa através de suas viagens para lá.

A Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo começou

a funcionar em 1934. Foi a primeira escola universitária de Matemática em nível de graduação propriamente dita do Brasil. Contou com a presença entre aproximadamente 1934 e 1940, de matemáticos italianos, entre eles Luigi Fantappiè e Giacomo Albanese.

Em 1939, a Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil (hoje Universidade Federal do Rio de Janeiro) iniciou suas atividades. Foi a segunda escola universitária de Matemática em nível de graduação propriamente dita do Brasil. Beneficiou-se da presença entre 1939 e aproximadamente 1942 de matemáticos italianos, entre eles Gabriele Mammana e Achile Bassi.

Essa influência italiana na Matemática brasileira, ocorrida em São Paulo e no Rio de Janeiro, terminou com a segunda Guerra Mundial, quando o Brasil e a Itália foram oponentes.

A partir de aproximadamente 1950, o Instituto de Matemática e Física da Universidade do Recife (hoje Universidade Federal de Pernambuco) passou a desfrutar de uma boa reputação como centro matemático universitário em nível de graduação, graças à presença dos matemáticos portugueses Alfredo Pereira Gomes e Manuel Zaluar Nunes por período prolongado de vários anos.

Desde então, o número de escolas universitárias de Matemática em nível de graduação aumentou em quase todo o Brasil. A grande quantidade de tais escolas que assim surgiram foi a decorrência natural da necessidade de se oferecer mais oportunidades de formação matemática em nível de graduação. Por outro lado, tais escolas foram criadas não obstante a enorme carência de professores adequadamente preparados. Essas escolas possuíam dois objetivos, concedendo os graus de Bacharel (formação matemática universitária em nível de graduação) e de Licenciado (formação universitária como professor do ensino secundário).

3. Observações históricas sobre a pós-graduação matemática

Quando as principais escolas universitárias do Brasil começaram a oferecer cursos de Matemática em nível de graduação, em torno de 1930, não havia nenhum programa regular de pós-graduação matemática nas mesmas. Ainda assim, alguns cursos isolados de pós-graduação eram realizados. Havia a possibilidade de se obter o grau de Doutor em Matemática, pelo menos nas universidades principais de São Paulo e do Rio de Janeiro.

O matemático francês André Weil esteve como professor na Universidade de São Paulo durante três anos, de 1945 a 1947; hoje é reconhecido como um dos maiores gênios matemáticos. O matemático norte-americano Oscar Zariski foi professor na USP durante um ano, em 1945. O matemático francês Jean Dieudonné também esteve como professor da USP, durante dois anos, de 1946 a 1947. Permanecendo mais tempo em São Paulo e movidos pelo espírito do grupo Bourbaki, cuja criação era de data relativamente recente, Weil e Dieudonné foram muito influentes numa mudança de tendência do ensino matemático ocorrido a partir daí nas principais universidades brasileiras, indicando outrossim direções promissoras para pesquisas no futuro. Disto resultou uma forte influência de Bourbaki observada nas escolas universitárias brasileiras de Matemática durante muito tempo. O matemático francês Alexandre Grothendieck foi igualmente professor na USP durante três anos, de 1953 a 1955.

Durante quatro anos, de 1945 a 1949, o matemático português António Monteiro lecionou na Universidade do Brasil (hoje Universidade Federal do Rio de Janeiro). O matemático norte-americano Adrian Albert também ministrou cursos na mesma durante um ano, em 1947.

Além dos ilustres nomes citados, que per-

maneceram pelo menos um ano acadêmico no Brasil, um número respeitável de bons matemáticos estrangeiros ensinaram no país por períodos mais ou menos curtos, numa média de três meses, principalmente em São Paulo, no Rio de Janeiro e em Recife. Até cerca de 1960, São Paulo foi o principal centro matemático do Brasil, seguindo-se o Rio de Janeiro e depois Recife.

4. Observações históricas sobre a pesquisa matemática

Em 1952, o Conselho Nacional de Pesquisas fundou no Rio de Janeiro o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que foi o primeiro instituto de pesquisa matemática do Brasil, permanecendo o único até o presente. Este instituto cresceu paulatinamente para se tornar o principal centro matemático do país. Aos poucos, o Rio de Janeiro tornou-se o melhor centro de pesquisa matemática do Brasil. São Paulo passou ao segundo plano por ordem de excelência. As nuances psicológicas e os aspectos de organização que conduziram a uma tal mudança constituem um tema atraente de estudo.

Durante a década de 1960 a 1970, a pesquisa matemática se desenvolveu mais rapidamente no país e em bom nível internacional, em grande parte devido ao IMPA. Daí resultou uma imagem internacional favorável do Brasil como um centro de pesquisa matemática em desenvolvimento, sobretudo através das especialidades da Análise Funcional e dos Sistemas Dinâmicos.

À medida que outros centros matemáticos brasileiros se desenvolvem na pós-graduação e se afirmam em áreas importantes da pesquisa, surge a conveniência de uma reformulação das directrizes do Conselho Nacional de Pesquisas no setor matemático, levando a um equilíbrio desejável dos vários pontos de vista válidos a serem amparados.

5. Fundação de uma escola de pós-graduação matemática

Foi apenas na década de 1960 que os programas de pós-graduação matemática nos níveis de Mestrado e de Doutorado se estabeleceram verdadeiramente no Brasil.

O primeiro programa no nível de Mestrado em Matemática foi iniciado pela Universidade de Brasília, criada em 1962. Logo a seguir, surgiu um programa de Mestrado e Doutorado, no IMPA, Rio de Janeiro. Depois, um programa análogo foi começado pela Universidade de São Paulo. Desde então, o número desses programas aumentou no país, particularmente em nível de Mestrado.

Na realidade, há um número relativamente pequeno de tais centros de pós-graduação matemática, se levarmos em conta as amplas necessidades do país. Lastimavelmente, há uma notável carência de professores bem formados em nível de pós-graduação. Um jovem que tenha obtido o grau de Doutor por um centro de boa reputação não se defronta com dificuldade em alcançar, atualmente, uma razoável posição acadêmica nas universidades brasileiras.

O estabelecimento de uma escola de pós-graduação no Brasil, não só em Matemática como em outros setores, foi promovido e tornado possível graças sobretudo a uma intensa e prolongada atuação, em termos de diretriz superior e financiamento crescente, dos seguintes órgãos do Governo Brasileiro: Banco Nacional do Desenvolvimento Econômico (BNDE), Conselho Federal de Educação, Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq), Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Ministério da Educação e Cultura e Ministério do Planejamento.

Agora, existem bons programas de Mestrado ou Doutorado nos principais centros matemáticos do Rio de Janeiro, incluindo a Universidade Federal do Rio de Janeiro

(UFRJ) e a Pontifícia Universidade Católica (PUC), além do IMPA; em São Paulo, a Universidade Estadual de Campinas e a Escola de São Carlos, além da Universidade de São Paulo; em Recife, a Universidade Federal de Pernambuco; em Brasília, a Universidade de Brasília; em Fortaleza, a Universidade Federal do Ceará; etc.

Nota-se uma tendência a uma salutar mudança de ênfase do Governo Brasileiro, conduzindo a um amparo mais maciço a projetos de pesquisa específicos no âmbito universitário, que beneficiarão a pós-graduação e, através desta, a própria graduação. A tônica recente estava sendo a do financiamento exclusivo da pós-graduação como um objetivo imediato a ser atingido; a pesquisa universitária aparecia como uma meta mais elevada a ser fomentada em etapa posterior. Face aos órgãos financiadores, a qualidade da pesquisa universitária passou a desempenhar um papel mais relevante.

6. O programa do Doutorado

Há possibilidades de bons estudantes trabalharem para o Doutorado nos principais centros matemáticos do Brasil. Algumas das teses de Doutorado aprovadas entre nós e escritas sob a orientação de matemáticos brasileiros são de padrões elevados e poderiam ter sido apresentadas em destacadas universidades estrangeiras. Não obstante, a produção pelas escolas brasileira de estudantes que terminam o Doutorado em Matemática tem sido muito inferior às reais necessidades do país, ainda que apenas para o ensino nas nossas universidades.

Embora a pesquisa matemática esteja florescendo de modo claro no Brasil, os nossos principais centros não podem competir com os melhores centros matemáticos do mundo. A CAPES e o Conselho Nacional de Pesquisa têm mantido há muitos anos excelentes

programas de bolsas de estudo para o Doutorado no estrangeiro. Infelizmente o número de tais bolsas é muito limitado em relação à nossa necessidade atual de matemáticos competentes, com o grau de Doutor. O fluxo de estudantes qualificados com grau de Mestre obtido em universidades brasileiras, desejosos por estudar no estrangeiro para obter o grau de Doutor em Matemática, tornou-se maior que as oportunidades de bolsa que a CAPES e o CNPq podem oferecer.

7. Formação pós-doutoral e visitas de curto prazo

O Conselho Nacional de Pesquisas aprovou, recentemente, um programa de bolsas de estudo para aperfeiçoamento pós-doutoral no estrangeiro. É de se observar, porém, que esse programa ainda não se tornou efetivo. Não há no Brasil nenhuma fonte sistemática de auxílio aos jovens pesquisadores brasileiros de talento, propiciando-lhes estágios no estrangeiro por períodos prolongados, digamos de um ano, ou mesmo de dois anos, com a finalidade de desenvolverem uma formação pós-doutoral; ou de auxílio para que

os nossos pesquisadores já experimentados e amadurecidos visitem centros estrangeiros a curto prazo, por exemplo de três meses, a fim de realizarem pesquisa e manterem contato com os progressos recentes em suas especialidades.

8. Palavras finais

Cabe-nos, agora, intensificar e fortalecer no país a pós-graduação matemática nos seus níveis mais elevados, levando em conta mais enfaticamente os aspectos de qualidade e de excelência, através do Doutorado e do aperfeiçoamento pós-doutoral, para que a pesquisa universitária reverta em benefício do nosso progresso tecnológico, econômico e cultural.

A Universidade Federal de Pernambuco, que há anos mantém um recomendável programa de Mestrado e que já produziu pesquisadores matemáticos que galgaram uma justa reputação, deve agora dar o passo da implantação de um programa de Doutorado em Matemática.

Agradeço à Universidade Federal de Pernambuco pela honra que ora me concede, desejando pleno sucesso para a sua escola matemática, em todos os seus níveis!

Homenagem a Leopoldo Nachbin⁽¹⁾

por Ruy Luis Gomes

A cerimónia realizou-se no AUDITÓRIO JOÃO ALFREDO, onde têm lugar normalmente as reuniões do Conselho Universitário e do Conselho Coordenador do Ensino e Pesquisa. Foi presidida pelo Magnífico Reitor Professor Marcionilo Lins e contou com a presença de autoridades militares, directores das diversas unidades universitárias, membros do Conselho Universitário e membros do Conselho Coordenador de Ensino e Pesquisa, Professores de várias Unidades, especialmente do Instituto de Matemática e outros convidados.

O Professor Ruy foi o paraninfo e, ao mesmo tempo, o encarregado de saudar o Prof. Nachbin, em nome do Corpo Docente da Universidade.

No final da cerimónia foi oferecido um coquetel pela Reitoria.

Magnífico Reitor
Minhas Senhoras e Meus Senhores
Caros Colegas

Em primeiro lugar, desejo agradecer ao Magnífico Reitor e Exmo. Director do Instituto de Matemática o terem indicado o meu nome para saudar Leopoldo Nachbin. É uma grande honra para mim saudar um Matemático da categoria de Leopoldo Nachbin.

É também muito agradável ver associados à iniciativa desta homenagem dois professores — Jonio Lemos e Marcionilo Lins — cuja atuação, no plano universitário, está estreitamente ligada à vida do Instituto de Matemática, nomeadamente na fase da arrancada dos cursos de pós-graduação e apoio aos nossos primeiros bolsistas.

Tenho ainda um prazer muito especial em comunicar a esta douta assembleia que estão também presentes, os matemáticos portugue-

ses, através de mensagens dos meus queridos amigos, Alfredo Pereira Gomes, da Universidade de Lisboa e Luis Neves Real, da Universidade do Porto.

*

A homenagem que hoje prestamos ao Prof. Leopoldo Nachbin tem a sua origem em uma iniciativa da Divisão de Matemática do antigo Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

Estávamos nessa época — Julho de 1966 — no início das comemorações do 20.^o aniversário da fundação desta Universidade; e os professores que integravam a Divisão de Matemática entenderam que seria do maior significado para o ensino e pesquisa em Matemática, a inclusão, nas próprias comemorações, do doutoramento *honoris causa* de Leopoldo Nachbin.

A sugestão que então fizemos ao Magnífico Reitor, Professor Murilo Guimarães, subscrita também pelo então Vice-Reitor Professor Jonio Lemos, foi submetida ao Conselho Universitário, que a aprovou por unanimidade,

(1) (Discurso proferido por ocasião do Doutoramento Honoris Causa de Leopoldo Nachbin, pela Universidade de Pernambuco, em 29/6/73).

em face do Parecer favorável do Relator, Marcionilo Lins.

É em consequência dessa resolução do Conselho Universitário que a Universidade Federal de Pernambuco está hoje prestando ao Prof. Leopoldo Nachbin a maior homenagem que uma Universidade pode prestar a um cientista — a concessão do grau de doutor *honoris causa*,

Já um ano antes, em 1965, a Divisão de Matemática do antigo Instituto, tinha dirigido ao Prof. Nachbin um convite para vir trabalhar no Recife, em condições muito especiais: ele é que fixaria os seus vencimentos e indicaria os colaboradores ou discípulos que deveriam acompanhá-lo na sua vinda para o Recife.

Poucas serão as Universidades que alguma vez terão feito um convite como este a algum Professor; mas é necessário também recordar que nenhum matemático tem acompanhado, tão de perto e com tanto interesse, a acção do Instituto de Matemática, desde a sua fundação — há precisamente 20 anos.

Com efeito, o nome de Leopoldo Nachbin está associado à fundação do próprio Instituto, na medida em que apoiou junto do Prof. Newton Maia a escolha dos Professores Portugueses, Alfredo Pereira Gomes e Manuel Zaluar Nunes, para integrarem o grupo pioneiro dos estudos de graduação e pós-graduação em Matemática em 1953.

Depois, foi fundamentalmente por seu intermédio, que jovens bolsistas do nosso Instituto foram aperfeiçoar sua preparação matemática no IMPA, a grande escola brasileira de formação matemática de que também Nachbin foi co-fundador e, até há pouco tempo, o trabalhador científico mais destacado.

Dos seis doutores em Matemática, todos do Nordeste, que começaram os seus estudos no Instituto de Recife e terminaram suas teses no Exterior — Manfredo Perdigão do Carmo, Wolmer Vasconcelos, Fernando Cardoso, Roberto Ramalho, Aron Simis e David

Goldstein — nenhum deixou de contar com o apoio e o estímulo permanentes de Leopoldo Nachbin.

E, actualmente, dos doze diplomados pelo nosso Instituto que estão no Exterior ou que para lá se dirigem a fim de obterem seu doutoramento, cinco são directamente orientados por Leopoldo Nachbin.

Mas o interesse de Nachbin pela valorização científica do nosso Instituto, através da formação de um expressivo grupo de pesquisadores, não tem estado apenas em facilitar o acesso dos nossos jovens bolsistas aos bons centros de Matemática. Leopoldo Nachbin tem tido também a preocupação de que todos nós — estudantes e professores — mantenhámos contacto com grandes matemáticos. E, assim, é que, por sua sugestão, têm realizado conferências no Instituto, alguns dos mais famosos matemáticos da actualidade, tais como André Weil, Laurent Schwartz, Jacques Neveu, André Martineau e François Trèves.

Na mais antiga das três colecções de publicações de Matemática, do nosso Instituto, «Textos de Matemática», (fundada em 1957 por Alfredo Pereira Gomes, que conta actualmente 19 volumes e onde têm colaborado grandes nomes da Matemática), há dois trabalhos primorosos de Nachbin: *Integral de Haar*, posteriormente traduzido para inglês e publicado pela Van Nostrand, e *Lectures on Theory of Distributions*, curso ministrado inicialmente na Universidade de Rochester.

A colaboração de Nachbin está também presente através de artigos seus e dos seus discípulos numa outra das nossas colecções «Notas e Comunicações de Matemática», iniciada em 1965 pelo meu colega José Morgado e por mim, e de que já estão publicados 54 trabalhos de pesquisa.

Para além de tudo quanto Nachbin tem feito pelo Instituto de Matemática e que só por si justificaria amplamente o seu doutoramento *honoris causa*, estão os seus trabalhos de pesquisador, de categoria internacional e

a sua obra de professor, ou melhor, de matemático militante.

Para vos dar uma ideia da obra científica de Leopoldo Nachbin, concretizada num curriculum vitae de que constam cerca de oitenta trabalhos de Matemática, prêmio Licínio Cardoso em 1942 (destinado a alunos), e o prêmio Moinho Santista em 1962 (destinado a pesquisadores), participação ativa em 16 reuniões científicas nacionais e internacionais, conferências nas mais famosas universidades dos Estados Unidos, França, Grã-Bretanha, Alemanha, Itália, Polônia, Suécia, Bélgica, Israel, Suíça, Canadá, Argentina, Uruguai, Holanda, Portugal, Espanha e, evidentemente, Brasil, orientação de 13 teses de doutoramento de matemáticos brasileiros e estrangeiros, para vos dar uma tal ideia, nada mais objetivo e nada mais conclusivo, do que dar-vos a conhecer alguns depoimentos de grandes matemáticos do nosso tempo, sobre Leopoldo Nachbin.

Depoimento de André Weil:

O Professor Leopoldo Nachbin é, de longe, o mais conhecido e o mais altamente apreciado, de entre os matemáticos brasileiros, e é aquele que mais fez para firmar a reputação da matemática brasileira. Ele é também altamente apreciado pelas suas qualidades de professor e pela sua habilidade em despertar vocações, como é suficientemente demonstrado pelos inúmeros convites que tem recebido das melhores Universidades da Europa e dos Estados Unidos.

Além de um grande número de trabalhos de pesquisa, de alto mérito, escreveu vários livros excelentes, caracterizados pela clareza e originalidade de apresentação, versando vários tópicos importantes.

Depoimento de Halmos:

Ser um estudante de Nachbin é uma alta recomendação e é assim universalmente reconhecido.

Não há dúvida nenhuma em meu espírito de que Nachbin é o melhor matemático da América do Sul, em todo o sentido da palavra.

Depoimento de Henri Cartan:

Leopoldo Nachbin é um matemático de primeira ordem, um dos melhores de toda a América Latina.

É muito conhecido nos meios científicos internacionais. A Universidade de Paris pediu-lhe, há alguns anos, que viesse ensinar por todo um ano escolar; os meus colegas matemáticos e eu ficamos felizes com o êxito do seu ensino e a ajuda eficaz que deu a alguns dos nossos estudantes avançados, orientando-os nas suas primeiras pesquisas.

Atualmente, Leopoldo Nachbin está em plena produção científica. Ocupa-se mais particularmente de problemas que me interessam pessoalmente (o estudo de certos espaços de funções holomorfas de um tipo particular, no caso de dimensão infinita), e também suscitou interessantes publicações de alguns dos seus discípulos.

Leopoldo Nachbin é não só um pesquisador matemático de grande qualidade, mas é também um conferencista notável; as suas conferências, como as suas lições, são sempre agradáveis pela sua clareza.

Acrescento finalmente que Leopoldo Nachbin é um homem com quem as relações são sempre agradáveis.

Depoimento de Schwartz:

O Professor Nachbin é internacionalmente conhecido e eu encontrei-o em todos os Congressos e Colóquios em que participei.

Foi durante durante dois anos professor visitante da Faculdade de Ciências de Paris para dar um curso superior de Equações de Derivadas Parciais e é todos os anos professor visitante da Universidade de Rochester dos Estados Unidos.

Dirigiu inúmeros jovens pesquisadores no

Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Janeiro. A este Instituto, muitos matemáticos estrangeiros têm vindo dar conferências para o seu grupo de trabalho.

Publicou também cursos que tiveram muito sucesso.

Finalmente, o Professor Nachbin é um homem universalmente estimado, do ponto de vista moral e humano.

Depoimento de Martineau:

Distinguirei dois artigos que bastam para assegurar uma reputação: O primeiro intitulado «Um teorema do tipo Hahn-Banach para transformações lineares», *Trans. Am. Math. Soc.* 68 (1950) pp. 28-46.

Trata do problema da extensão de uma aplicação linear dada, de um subespaço de um Banach num outro Banach. Mostra, em linguagem de hoje, que os espaços $\mathcal{C}(K)$ onde K é um compacto Stoneano são os «injetivos» da categoria dos Banach. Esta propriedade chama-se agora «propriedade Nachbin».

Como para todas as belas descobertas, fica-se estupefacto pela simplicidade aparente dos métodos e dos resultados.

O segundo trabalho «Topological Vector Spaces of Continuous Functions» — *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 40 (1954), pp. 471-472, resolve uma questão delicada sobre os espaços bornológicos, aí também com meios perfeitamente naturais.

Estes trabalhos encontraram seu prolongamento em artigos ulteriores do Autor e nos de inúmeros matemáticos (Grotendick, Kelley e Amemiya, entre outros).

Depoimento de Garnir:

Considero Nachbin como um matemático eminente que faz autoridade em Análise Funcional, à escala internacional. Nachbin é um pesquisador excepcional e fecundo. A importância e o número das suas publicações, o seu

valor intrínseco, a sua repercussão sobre os trabalhos de outros matemáticos são disso um testemunho.

Por outro lado, é um excelente orientador de pesquisadores, se considerarmos o grande número de trabalhos que foram efetuados sob a sua direcção com o maior sucesso.

Depoimento de Horvath:

Entre 1961 e 1964, o Prof. Nachbin desenvolveu uma profunda e importante teoria generalizando várias facetas da teoria clássica da aproximação, em particular, a teoria da aproximação polinomial ponderada que teve a sua origem com o grande matemático russo Sérgio Bernstein.

Um dos principais artigos de Nachbin sobre este assunto, «Aproximação ponderada para Algebras e Módulos de Funções Contínuas: caso real e complexo autoadjunto», (*Ann. of Math.*, 81 (1965), pp. 289-302) foi revisto por mim em *Mathematical Reviews*. Professor Nachbin fez uma exposição muito acessível no livro «Elementos da Teoria da Aproximação» editado por Van Nostrand, Princeton.

Muitos investigadores continuaram a desenvolver as ideias de Nachbin, por exemplo, Klaus-Dietar Bierstedt, J. P. Ferrier, W. H. Summer, João Prolla e Silvío Machado.

Desde 1965, o Prof. Nachbin tem vindo a construir uma teoria muito importante, completamente original, Teoria das Funções Holomorfas em Espaços de Banach, com aplicação às equações de convolução e às equações de derivadas parciais nesses espaços. O impacto desta nova teoria foi tremendo e inúmeros jovens eminentes matemáticos como Noverraz e Coeuré, de Nancy, Hirschowitz, de Nice, como também os próprios discípulos de Nachbin, Gupta, Soo Bong Chae, Jorge Barroso, Mário Matos, R. M. Aron, estão presentemente continuando o trabalho de Nachbin.

Dois dos meus próprios estudantes de doutoramento, Dineen, agora em Dublin, e Duyer, agora em Illinois, escreveram suas teses e continuam suas pesquisas quase completamente sob a influência do trabalho do Prof. Nachbin.

Depoimento de Koethe:

Gostaria de enfatizar uma das suas extraordinárias contribuições à Análise Funcional que abriu uma nova linha de pesquisa. Refiro-me ao seu trabalho sobre Extensão de Transformações Lineares. A sua comunicação ao Simpósio de Jerusalém sobre esses problemas estimulou-me a tentar resolver algumas das questões por êle levantadas.

Por isso, eu devo-lhe muito, por me ter conduzido a este novo campo de pesquisas. Também o trabalho de Lindendstrauss e de outros matemáticos está baseado nos seus resultados.

Depois de vos dar a conhecer as opiniões de matemáticos como André Weil, Henri Cartan, Halmos, Schwartz, Martineau, Garnir, Horvath e Koethe, sobre Leopoldo Nachbin, salientando seu valor científico, sua rara habilidade para formar pesquisadores, sua posição de liderança do movimento matemático brasileiro, sua capacidade de relacionamento e convivência com os jovens e

com os colegas, que posso eu ainda acrescentar?

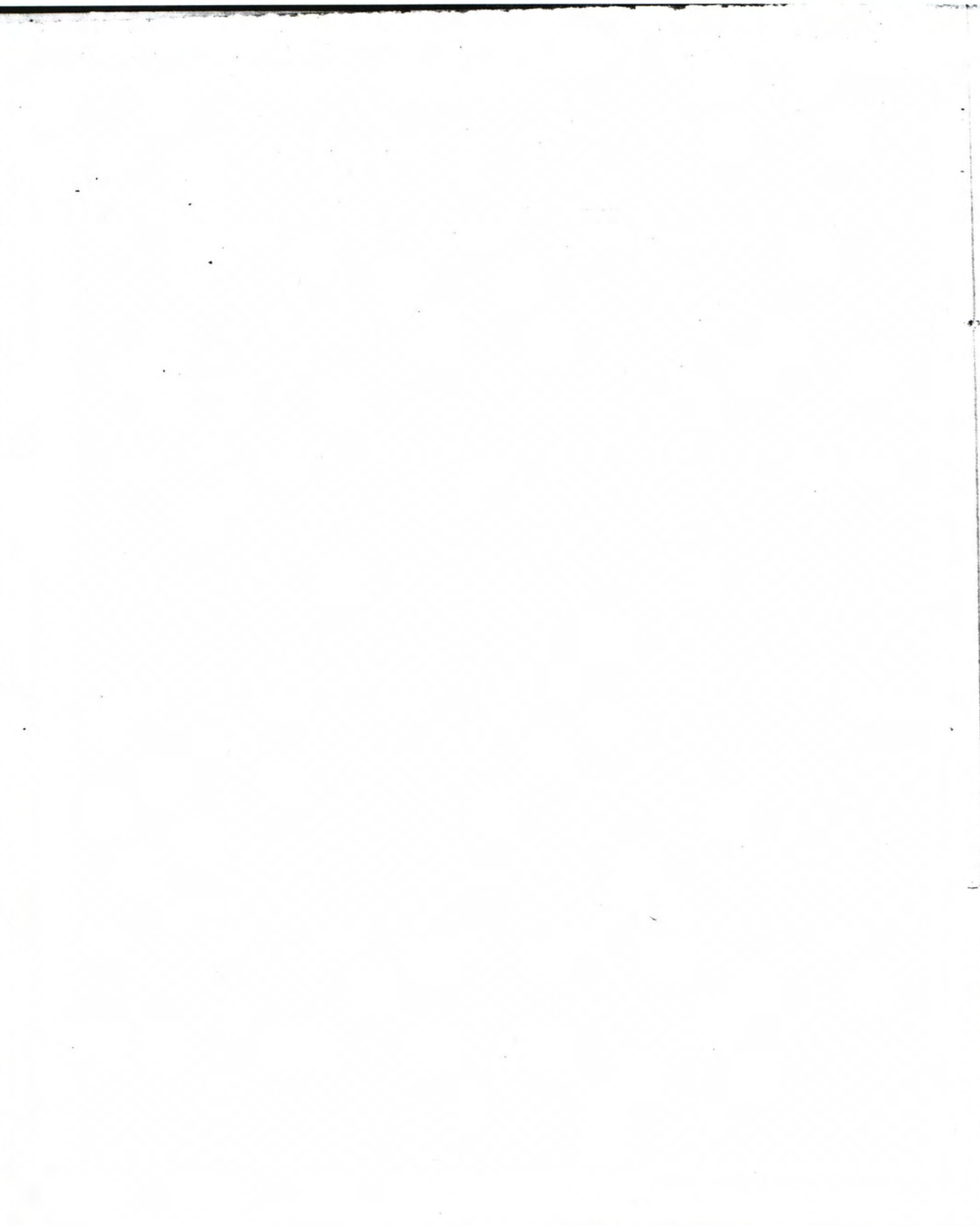
Posso acrescentar apenas, que a honra maior desta homenagem é para a própria Universidade Federal de Pernambuco.

Numa carta, a mim dirigida, em 18 de Maio findo, escrevia André Weil:

«É um grande prazer para mim felicitar-vos e felicitar a Universidade de Recife, por vossa feliz iniciativa de oferecer um doutoramento honoris causa ao nosso amigo Leopoldo Nachbin. Nenhum matemático brasileiro poderia ser mais digno dessa homenagem».

Qualquer Universidade brasileira poderia ter já tomado a iniciativa de conceder ao Prof. Leopoldo Nachbin o doutoramento honoris causa.

É uma grande alegria para nós, os que fazemos o Instituto de Matemática — e muito especialmente para aqueles professores portugueses que puderam nesta Universidade retomar a sua atividade profissional — entusiasmados pela obra já realizada e pelas amplas perspectivas de se firmar o nosso Instituto como um dos melhores centros matemáticos brasileiros, que tenha sido precisamente de uma Universidade do Nordeste, a Universidade Federal de Pernambuco, que Leopoldo Nachbin receba o seu primeiro título de doutor honoris causa.



On symmetrical Fourier kernel I⁽¹⁾

by R. U. Verma

(Department of Mathematics, University of Cape Coast — Ghana)

ABSTRACT. A generalised symmetrical FOURIER kernel has been introduced. It has been tried to give a more general form of reciprocal transform with this FOURIER kernel. Finally a formula for self-reciprocal functions associated with the H -function is being established.

1. INTRODUCTION. The functions $k(x)$ and $h(x)$ are said to form a pair of FOURIER kernels if the following pair of reciprocal equations:

$$(1.1) \quad g(x) = \int_0^{\infty} k(xy) f(y) dy,$$

$$(1.1)' \quad f(x) = \int_0^{\infty} h(xy) g(y) dy,$$

are simultaneously satisfied. As usual the kernels will be symmetrical if $k(x) = h(x)$ and if $k(x) \neq h(x)$ the kernels will be unsymmetrical. The functions studied by KESARWANI (1959), FOX (1961) and others as symmetrical FOURIER kernels are the G -functions.

I shall try to introduce a generalised symmetrical FOURIER kernel by taking the more general form of the H -function studied by FOX (1961). With this kernel, a new reciprocal transform has been defined. Then a formula for self-reciprocal functions associated with the H -function is given.

2. Employing the definition of the H -function, we consider the function:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & H_{2p+2q, 2m+2n}^{m+n, p+q}(x) = \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_T \prod_1^m \Gamma(c_j + \gamma_j(s-1/2)) \cdot \\ & \quad \cdot \prod_1^p \Gamma(a_j - \alpha_j(s-1/2)) \cdot \\ & \quad \cdot \prod_1^n \Gamma(d_j + \delta_j(s-1/2)) \cdot \\ & \quad \cdot \prod_1^q (b_j - \beta_j(s-1/2)) \cdot \\ & \quad \cdot \left\{ \prod_1^n \Gamma(d_j - \delta_j(s-1/2)) \cdot \right. \\ & \quad \cdot \left. \prod_1^q \Gamma(b_j + \beta_j(s-1/2)) \right\}^{-1} \cdot \\ & \quad \cdot \left\{ \prod_1^m \Gamma(c_j - \gamma_j(s-1/2)) \cdot \right. \\ & \quad \cdot \left. \prod_1^p \Gamma(a_j + \alpha_j(s-1/2)) \right\}^{-1} \cdot x^{-s} ds, \end{aligned}$$

where the following simplifying assumptions are made:

$$(i) \quad \begin{aligned} & \gamma_j > 0, j = 1, \dots, m; \\ & \alpha_j > 0, j = 1, \dots, p; \\ & \delta_j > 0, j = 1, \dots, n; \\ & \beta_j > 0, j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Presented at the 8th Biennial Conference, Ghana Science Association at University Of Science And Technology, KUMASI (1973).

(ii)

$$D = 2 \left(\sum_1^m \gamma_j - \sum_1^p \alpha_j + \sum_1^n \delta_j - \sum_1^q \beta_j \right) > 0.$$

(iii) All the poles of the integrand of (2.1) are simple.

(iv) The contour T is a straight line parallel to the imaginary axis in the s plane and the poles of $\Gamma(c_j + \gamma_j(s - 1/2))$ and $\Gamma(d_j + \delta_j(s - 1/2))$ and lie to the left of T while those of $\Gamma(b_j - \beta_j(s - 1/2))$ and $\Gamma(a_j - \alpha_j(s - 1/2))$ lie on the right of T .

For the sake of brevity, I shall write (2.1) in the form

$$(2.2) \quad H_1(x) = (2\pi i)^{-1} \int_T M_1(s) x^{-s} ds.$$

It can be easily shown that $M_1(s)$ is the MELLIN transform of $H_1(x)$ and it satisfies the necessary and sufficient condition [9] that $H_1(x)$ may be a symmetrical FOURIER kernel is that

$$(2.3) \quad M_1(s) M_1(1-s) = 1.$$

A number of FOURIER kernels follow as particular cases by specializing the parameters in (2.1).

With the above FOURIER kernel, the new reciprocal transform may be introduced as:

$$(2.4) \quad g(x) = \int_0^\infty H_1(xy) f(y) dy.$$

A systematic study of the above reciprocal transform can be made as in the case of HANKEL transforms.

The HANKEL transform introduced by VERMA [7]:

$$(2.5) \quad g(x) =$$

$$= \int_0^\infty G_{2,4}^{2,1} \left(xy \begin{array}{l} k - m - 1/2 - \nu/2, \\ -k + m + 1/2 + \nu/2 \\ \nu/2 - \lambda - m, \nu/2 - \lambda + m, \\ -\nu/2 + \lambda + m, \\ -\nu/2 + \lambda - m \end{array} \right) \cdot f(y) dy,$$

is a special case of (2.4) for $n=0$, $v=0$, $m=2$, $p=1$, $x_j=1$, $j=1, \dots, p$; $\gamma_j=1$, $j=1, \dots, m$; $a_1=k-m-1/2-\nu/2$, $a_2=-k+m+1+\nu/2$, $c_1=\nu/2-\lambda-m$, $c_2=\nu/2-\lambda+m$, $c_3=-\nu/2+\lambda+m$, $c_4=-\nu/2+\lambda-m$ in (2.1).

The integral transform (2.5) reduces to a generalised HANKEL transform due to BHISE [2] for $\lambda = -m$, which itself reduces to HANKEL transform

$$(2.6) \quad g(x) = \int_0^\infty (xy)^{1/2} J_\nu(xy) f(y) dy.$$

3. Now we estimate the asymptotic behaviour of $M_1(s)$, $s = \sigma + it$, and t real, when $|t|$ is large. For large s the asymptotic expansion of the GAMMA function is [8]:

$$(3.1) \quad \log \Gamma(s+a) = (s+a-1/2) \log s - s + 1/2 \log(2\pi) + O(s^{-1}),$$

where $|\arg s| < \pi$. To find the behaviour of $M_1(s)$ for large $|t|$, we replace GAMMA functions involving $-s$ into those containing $+s$ with the help of the relation

$$(3.2) \quad \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z.$$

Then using (3.1) and the simplifying assumptions made in (2.1), (i) ... (iv), we get

$$(3.3) \quad M_1(s) x^{-s} = |t|^{D(\sigma-1/2)} \exp \{ it(D \log |t| - \log x - B) \} \times \times \{ Q + O(|t|^{-1}) \},$$

for large $|t|$, where B is a constant and Q is also a constant but Q may have one value for large positive t and another value for large negative t .

From (3.3) it follows that if $\sigma < 1/2$, the integral (2.2) is uniformly convergent with respect to x . We may, therefore integrate through the integral sign of (2.2).

Let us take

$$(3.4) \quad H_1^{(1)}(x) = \int_0^x H_1(x) dx,$$

then

$$(3.5) \quad H_1^{(1)}(x) = (2\pi i)^{-1} \cdot \int_T M_1(s)(1-s)^{-1} x^{1-s} ds.$$

This has been proved to be valid only when $\sigma < 1/2$, but for $\sigma = 1/2$, the proof can be extended. On the line $\sigma = 1/2$, $M_1(s)x^{-s}$ is bounded from (3.3) and therefore $M_1(s)/(1-s) \in L_2(1/2 - i\infty, 1/2 + i\infty)$.

4. If $f(x) = \int_0^\infty k(xy)f(y)dy$, then $f(x)$ is said to be a self-reciprocal function for kernel $k(x)$. All the symmetrical FOURIER kernels can be associated with self-reciprocal functions and conversely.

Now we shall establish a formula for the self-reciprocal functions of $H_1(x)$. The following results will be required in theorem relating self-reciprocal functions. We shall write:

$$(4.1) \quad M_1(s) = N_1(s) / P_1(s),$$

where

$$(4.2) \quad N_1(s) = \prod_1^m \Gamma(c_j + \gamma_j(s - 1/2)) \cdot \prod_1^p \Gamma(a_j - \alpha_j(s - 1/2)) \times$$

$$\times \prod_1^n \Gamma(d_j + \delta_j(s - 1/2)) \cdot \prod_1^v \Gamma(b_j - \beta_j(s - 1/2)).$$

Here $M_1(s)$ is the coefficient of x^{-s} in the integral (2.1) and so

$$(4.3) \quad P_1(s) = N_1(1-s).$$

THEOREM. If

(i) $\gamma_j > 0, j = 1, \dots, m; \alpha_j > 0, j = 1, \dots, p; \delta_j > 0, j = 1, \dots, n; \beta_j > 0, j = 1, \dots, v$,

(ii) $D = 2 \left(\sum_1^m \gamma_j - \sum_1^p \alpha_j + \sum_1^n \delta_j - \sum_1^v \beta_j \right) > 0$,

(iii) $R(a_j) > 0, j = 1, \dots, p; R(b_j) > 0, j = 1, \dots, v; R(c_j) > 0, j = 1, \dots, m; R(d_j) > 0, j = 1, \dots, n$;

(iv) $E_1(1/2 - s)$ is an even function of s ,

(v) $N_1(s)E_1(s) \in L_2(1/2 - i\infty, 1/2 + i\infty)$,

(vi)

$$f(x) = (2\pi i)^{-1} \int_{1/2 - i\infty}^{1/2 + i\infty} N_1(s) E_1(s) x^{-s} ds,$$

then

$$(4.4) \quad \int_0^x f(x) dx = \int_0^\infty f(t) H_1^{(1)}(xt) t^{-1} dt.$$

It includes the Theorem 4 and Theorem 6 of FOX [3] as corollaries.

PROOF. This theorem is proved by performing two applications of PARSEVAL theorem, Theorem 72 [6, p. 95].

From (3.5), it follows that $M_1(s)/(1-s) \in L_2(1/2 - i\infty, 1/2 + i\infty)$ and that $H_1^{(1)}(x)/x$

is its MELLIN transform. Thus, using t as the MELLIN transform variable, it follows that $H_1^{(1)}(x)/t$, and $M_1(s)x^{1-s}/(1-s)$ are MELLIN transform of each other. Then, on using (v) and Theorem 72 [6] one can apply the PARSEVAL theorem and obtain

$$(4.5) \quad \int_0^\infty f(t) H_1^{(1)}(xt) t^{-1} dt = \\ = (2\pi i)^{-1} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} M_1(s) x^{1-s} (1-s)^{-1} \times \\ \times N_1(1-s) E_1(1-s) ds$$

$$(4.6) \\ = (2\pi i)^{-1} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} N_1(s) E_1(s) x^{1-s} (1-s)^{-1} ds,$$

using (4.1), (4.3) and condition (iv).

Again using Theorem 72 [6] and defining the function $F(t)$, we have

$$(4.7) \quad \int_0^x f(t) dt = \int_0^\infty f(t) F(t) dt$$

$$(4.8) \\ = (2\pi i)^{-1} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} N_1(s) E_1(s) x^{1-s} (1-s)^{-1} ds.$$

By comparing (4.5) and (4.8), we get the required result.

The generalised H -function kernel can be utilised in the study of dual integral equations. Employing the technique [4] introduced by FOX, we can solve dual integral equations with the following H -function kernels:

$$\int_0^\infty H_{2p+2v+k, 2m+2n+k}^{m+n, p+v+k}(xu) f(u) du = \varphi(x), \\ (0 < x < 1),$$

$$\int_0^\infty H_{2p+2v+k', 2m+2n+k'}^{m+n+h', p+v}(xu) f(u) du = \psi(x), \\ (x > 1),$$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are given and $f(x)$ is the unknown function to be found. By using fractional integration these equations can be reduced to two others with common kernel $H_{2p+2q, 2m+2n}^{m+n, p+v}(x)$, which is the symmetrical FOURIER kernel (2.1).

Then $f(x)$ can be found by the known FOURIER inversion formula.

REFERENCES

- [1] ERDÉLYI, A., *Higher Transcendental Functions*, Vol. I, Bateman Manuscript Project, New York, 1953.
- [2] BHISE, V. M., *Operators of fractional integration and a generalized Hankel transform*, Collect. Math., **16** (1964), p. 201.
- [3] FOX, C., *G and N-functions as symmetrical Fourier kernels*, Trans. Amer. Math. Soc., **98** (1961), p. 395-429.
- [4] SAXENA, R. K., *A formal solution of certain dual integral equations involving H-functions*, Proc. Camb. Philos. Soc., **63** (1967), p. 171-178.
- [5] KESARWANI, R. N., *A Fourier kernel*, Math. Z., **70** (1959), p. 297-299.
- [6] TITCHMARSH, E. C., *Introduction to the Theory of Fourier of Fourier integrals*, Oxford, University Press, 1937.
- [7] VERMA, R. U., *On an integral transform and self-reciprocal functions involving two variables*, Mat. Vesnik. (Belgrade), **6** (21), (1969), p. 269-275.
- [8] WHITHAKER, E. T., and WATSON, G. N., *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, University Press, 1915.
- [9] WATSON, G. N., *General Transform*, Proc. Lond. Math. Soc. Ser. II, **35** (1933), p. 156-199.

Relações entre os coeficientes dos polinómios $T_n(x)$ e $P_n(x)$ e os coeficientes dos polinómios $He_n(x)$. Aplicação ao cálculo automático⁽¹⁾

por Rui João Baptista Soares
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

1. Introdução

No presente trabalho indicam-se fórmulas de recorrência para o cálculo exacto dos coeficientes dos polinómios de HERMITE, CHEBYSHEV e LEGENDRE assim como os programas correspondentes.

2. Relações básicas

Designemos por $c_{n,m}$, $\bar{c}_{n,m}$, e $\overline{c}_{n,m}$ os coeficientes dos polinómios de HERMITE, CHEBYSHEV e LEGENDRE nas expressões

$$1) \quad He_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{n!}{2^m \cdot m! (n-2m)!} x^{n-2m}$$

$$2) \quad T_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \cdot \frac{n(n-m-1)!}{2^{2m-n+1} \cdot m! (n-2m)!} x^{n-2m}$$

$$3) \quad P_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \cdot \frac{[2(n-m)]!}{2^n (n-m)! m! (n-2m)!} x^{n-2m}$$

Identificando coeficientes homólogos em 1) e 2) resulta

$$4) \quad \bar{c}_{n,m} = (-1)^m \frac{n(n-m-1)!}{2^{2m-n+1} \cdot m! (n-2m)!} = \frac{(n-m-1)!}{2^{m-n+1} \cdot (n-1)!} \cdot c_{n,m} = \frac{2^{n-m-1}}{1 \cdot (n-1)(n-2) \dots (n-m)} \cdot c_{n,m}$$

Analogamente, de 1) e 3) vem

$$5) \quad \overline{c}_{n,m} = (-1)^m \frac{[2(n-m)]!}{2^n (n-m)! m! (n-2m)!} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{[2(n-m)]!}{2^{n-m} (n-m)!} c_{n,m} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots [2(n-m)-1]}{n!} \cdot c_{n,m} = \frac{N1}{N2} c_{n,m}$$

Para valores de n suficientemente grandes sugere-se (ver [6]) a seguinte fórmula de recorrência para o cálculo dos coeficientes

$$6) \quad \begin{cases} c_{n,0} & = 1 & n = 0, 1, 2, \dots \\ c_{n+1,m+1} & = c_{n,m+1} - (n-2m) \cdot c_{n,m} \\ & & m = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] \\ c_{n,m} & = 0 & m > \left[\frac{n}{2} \right]. \end{cases}$$

(1) Comunicação apresentada nas II Jornadas Hispano-Lusitanas celebradas em Madrid em Abril de 1973.

As fórmulas indicadas em 4), 5) e 6) são de fácil adaptação ao cálculo automático, sendo de aconselhar que se opere em dupla precisão para a obtenção dos valores exactos.

Em 4) e 6) evita-se o cálculo dos factoriais, tarefa sempre ingrata para grandes valores de m e n . Na fórmula 5), e com a mesma finalidade de evitar o cálculo de $n!$ determinou-se, em cada fase, $M = \text{m.d.c.}(N1, N2)$ pondo-se em evidência o factor $N2/M$.

3. Programas

As subrotinas HERMRS, CHEBRS e LEGERS, escritas na linguagem FORTRAN IV, permitem construir tabelas com os valores de $c_{n,m}$, $\bar{c}_{n,m}$ e $\underline{c}_{n,m}$, respectivamente.

O parâmetro N indica o polinómio de grau $N - 1$.

A capacidade pode ser alterada por modificação das respectivas instruções de especificação.

4. Tabelas

A primeira coluna indica o factor pelo qual se devem dividir os coeficientes que se encontram nessa linha. Exemplos:

$$He_{10}(x) = x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - 3150x^4 + 4725x^2 - 945$$

$$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280^8x + 1120x^6 - 400x + 50x^2 - 1$$

$$P_{10}(x) = \frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465^2 - 63).$$

5. Observações finais

I) À parte o factor indicado na primeira coluna todos os coeficientes são inteiros, pelo que, de acordo com as possibilidades do computador e grau do polinómio desejado, se poderá fazer o cálculo em aritmética de inteiros.

II) Pretendendo-se apenas os coeficientes de um polinómio de grau n deve-se efectuar o cálculo por linhas apesar de ser mais lento do que por colunas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AGNEW, R. P., *Diferential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1960.
- [2] ANGOT, A., *Compléments de Mathématiques*, Collection Technique et Scientifique du C. N. E. T., Paris, 1972.
- [3] CHATTERJEA, S. K., *On Turan's Expression for Hermite Polynomials*, Rev. Mat. Hisp. Amer., España, 1960, 20-2 e 3, 64-7.
- [4] G. RODEJA, F. E., *Sobre una Formula de Chatterjea*, Rev. Mat. Hisp. Amer., España, 1960, 20-2 e 3, 74-8.
- [5] COURANT, R.; HILBERT, D., *Methods of Mathematical Physics*, I vol., Interscience Publishers (John Willey), New York, 1953.
- [6] RUI SOARES, *Uma fórmula de recorrência para o cálculo dos coeficientes dos polinómios $He_n(x)$* . Gaz. Matemática N.º 121-124, 1971 (Lisboa).

C

```

SUBROUTINE LEGRS(N)
DOUBLE PRECISION I1, I2, M, N1, N2, IRS (18, 10)
COMMON/CO1/IRS
CALL HERMRS(N)
N1 = 1.
N2 = 1.
DO 3I = 2, N
  I1 = 2 * I - 3
  I2 = I - 1
  N1 = N1 * I1
  N2 = N2 * I2
M1 = N1
M2 = N2
1 M3 = M1/M2
M0 = M1 - M2 * M3
IF (M0.EQ.0) GOTO 2
M1 = M2
M2 = M0
GOTO 1
2 M = M2
N1 = N1/M
N2 = N2/M
IRS(1, 1) = N1
IRS(1, 10) = N2
I2 = I1
J2 = (I - 1)/2 + 1
DO 3J = 2, J2
  IRS(1, J) = IRS(I, J) * N1/I2
  I1 = I1 - 2.
  I2 = I2 * I1
3 CONTINUE
RETURN
END

```

C

```

SUBROUTINE HERMRS(N)
DOUBLE PRECISION I1, IRS (18, 10)
COMMON/CO1/IRS
J1 = (N - 1)/2 + 1
DO 1I = 1, N
  DO 1J = 1, J1
    IRS(1, J) = 0.
1 CONTINUE
DO 2I = 1, N
  IRS(1, 1) = 1.
  IRS(1, 10) = 1.
2 CONTINUE
J2 = 1
DO 3I = 2, J1
  J2 = J2 + 2
DO 3J = J2, N
  I1 = J - J2 + 1
  IRS(J, 1) = -I1 * IRS(J - 1, 1 - 1) + IRS(J - 1, 1)
3 CONTINUE
RETURN
END

```

C

```

SUBROUTINE CHEBRs(N)
DOUBLE PRECISION I1, T1, T2, T3, IRS (18, 10)
COMMON/CO1/IRS
CALL HERMRS(N)
DO 1I = 3, N
  J1 = (I - 1)/2 + 1
  T1 = 2 ** (I - 2)
  T3 = 1.
  IRS(1, 1) = IRS(1, 1) * T1
  IRS(1, 10) = 1.
  DO 1J = 2, J1
    T1 = T1/2.
    T2 = 1 - J
    T3 = T3 * T2
  IRS(1, J) = IRS(1, J) * T1/T3
1 CONTINUE
RETURN
END

```

Coefficientes dos polinômios de Hermite

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|------|-------|---------|----------|------------|------------|-------------|------------|-------------|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -6 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -10 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -15 | 45 | -15 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -21 | 105 | -105 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -28 | 210 | -420 | 105 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -36 | 378 | -1260 | 945 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -45 | 630 | -3150 | 4725 | -945 | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -55 | 990 | -6930 | 17325 | -10395 | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -66 | 1485 | -13860 | 51975 | -62370 | 10395 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -78 | 2145 | -25740 | 135135 | -270270 | 135135 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -91 | 3003 | -45045 | 315315 | -945945 | 945945 | -135135 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -105 | 4095 | -75075 | 675675 | -2837835 | 4729725 | -2027025 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -120 | 5460 | -120120 | 1351350 | -7567560 | 18918900 | -16216200 | 2027025 | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -136 | 7140 | -185640 | 2252250 | -18378360 | 64324260 | -91891800 | 34459425 | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -153 | 9180 | -278460 | 4594590 | -41351310 | 192972780 | -413513100 | 310134825 | -34459425 | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -171 | 11628 | -406980 | 7936110 | -87297210 | 523783260 | -1571349780 | 1964187225 | -654729075 | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -190 | 14535 | -581400 | 13226850 | -174594420 | 1309458150 | -5237832600 | 9820936125 | -6547290750 | 654729075 | | | | | | | | | |

Coefficientes dos polinômios de Chebyshev

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--------|----------|---------|----------|---------|----------|--------|--------|------|------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 4 | -3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 8 | -8 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 16 | -20 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 32 | -48 | 18 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 64 | -112 | 56 | -7 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 128 | -256 | 160 | -32 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 256 | -576 | 432 | -120 | 9 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 512 | -1280 | 1120 | -400 | 50 | -1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1024 | -2816 | 2816 | -1232 | 220 | -11 | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2048 | -6144 | 6912 | -3584 | 840 | -72 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 4096 | -13312 | 16640 | -9984 | 2912 | -364 | 13 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 8192 | -28672 | 39424 | -26880 | 9408 | -1586 | 98 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 16384 | -61440 | 92160 | -70400 | 28800 | -6048 | 560 | -15 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 32768 | -131072 | 212992 | -180224 | 84480 | -21504 | 2688 | -128 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 1 | 65536 | -278528 | 487424 | -452608 | 239360 | -71808 | 11424 | -816 | 17 | | | | | | | | | | | |
| 1 | 131072 | -589824 | 1105920 | -1118208 | 658944 | -228096 | 44352 | -4320 | 162 | -1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 262144 | -1245184 | 2490368 | -2723840 | 1770496 | -695552 | 160512 | -20064 | 1140 | -19 | | | | | | | | | | |
| 1 | 524288 | -2621440 | 5570560 | -6553600 | 4659200 | -2050048 | 549120 | -84480 | 6600 | -200 | | | | | | | | | | |

Coefficientes dos polinômios de Legendre

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|-------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 3 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 5 | -3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 35 | -30 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 63 | -70 | 105 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 231 | -315 | 105 | -5 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 429 | -693 | 315 | -35 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 128 | 6435 | -12012 | 6930 | -1260 | 35 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 128 | 12155 | -25740 | 18018 | -4620 | 315 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 256 | 46189 | -109395 | 90090 | -30030 | 3465 | -63 | | | | | | | | | | | | | | |
| 256 | 88179 | -230945 | 218790 | -90090 | 15015 | -693 | | | | | | | | | | | | | | |
| 1024 | 676039 | -1939938 | 2078505 | -1021020 | 225225 | -18018 | | | | | | | | | | | | | | |
| 1024 | 1300075 | -4056234 | 4849845 | -2771340 | 765765 | -90090 | | | | | | | | | | | | | | |
| 2048 | 5014575 | -16900975 | 22309287 | -14549535 | 4849845 | -765765 | | | | | | | | | | | | | | |
| 2048 | 9694845 | -35102025 | 50702925 | -37182145 | 14549535 | -2909907 | | | | | | | | | | | | | | |
| 32768 | 300540195 | -1163381400 | 1825305300 | -1487285800 | 669278610 | -162954792 | | | | | | | | | | | | | | |
| 32768 | 583401555 | -2404321560 | 4071834900 | -3650610600 | 1859107250 | -535422888 | | | | | | | | | | | | | | |
| 65536 | 2268783825 | -9917826435 | 18032411700 | -17644617900 | 10039179150 | -3346393050 | | | | | | | | | | | | | | |
| 65536 | 4418157975 | -20419054425 | 39671305740 | -42075627300 | 26466926850 | -10039179150 | | | | | | | | | | | | | | |
| 262144 | 34461632205 | -167890003050 | 347123925225 | -396713057400 | 273491577450 | -116454478140 | | | | | | | | | | | | | | |

O. In
Um
obtenç
tribuiç
taçã
preten
cessos
com p
fossen
distrib
A
- qu
- con
tórios
A
aleató
estud
a dis
extra
esse
de 10
dum
finais
ficou

(4)
do In
J. Tr.

Um processo de gerar números pseudo-aleatórios e seus testes — fundamentos e resultados⁽¹⁾

por M. Antónia Amaral, Helena M. Barroso, M. Lucília Carvelho,
M. Ivette Gomes, Daniel A. Muller e M. F. Veiga de Oliveira

(bolsistas do I. A. C.)

«There is no such a thing as a random numbers»

— J. VON NEUMANN

0. Introdução

Um problema básico de simulação é o da obtenção de amostras com determinadas distribuições, supostas adequadas à representação de fenómenos do mundo real que se pretendem explicar. Existem diversos processos de obtenção de sucessões de números com propriedades análogas às que teriam se fossem extraídas de uma população com a distribuição pretendida.

A solução para este tipo de problemas — qualquer que seja a distribuição em causa — consiste na utilização de números aleatórios.

A ideia do uso das tabelas de números aleatórios foi introduzida por TIPPETT quando estudava, sob a direcção de KARL PEARSON, a distribuição das amplitudes de amostras extraídas de uma população normal. Para esse trabalho, TIPPETT construiu uma tabela de 10 400 dígitos aleatórios a partir de tabelas dum recenseamento, tomando os algarismos finais dos números aí apresentados. Verificou-se posteriormente que a tabela dos

10 400 números aleatórios de TIPPETT não era suficiente. Assim, KENDALL e BABINGTON-SMITH construíram uma tabela de 100 000 dígitos gerados por um processo mecânico. Ao mesmo tempo FISHER e YATES, construíram uma tabela mais pequena de 15 000 dígitos obtidos dum modo conveniente a a partir da tabela Logaritmica Britannica de Thompson. Depois da II Guerra Mundial e devido ao desenvolvimento tecnológico dos computadores, muitas outras tabelas foram construídas, tornando mais simples a resolução de diversos problemas de simulação.

1. Números aleatórios: sua geração

1.1. Generalidades

Um conjunto de números aleatórios pode ser gerado por vários processos resultantes de fenómenos físicos dos quais o mais simples é o da rotação de um disco dividido em dez sectores de igual área, cada qual correspondendo ao seu dígito. Obtêm-se assim dígitos aleatórios x_i que podem tomar com probabilidades $1/10$ os valores de 0 a 9.

Os termos de uma sucessão infinita $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ podem ser encarados como os dígitos de um número ξ dado por

(1) Este trabalho foi realizado sob o patrocínio do Instituto de Alta Cultura e orientação do Professor J. TIAGO DE OLIVEIRA.

$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 10^{-i}$. O número ξ é aleatório no intervalo $[0, 1[$. A probabilidade de que ξ fique no intervalo $[0, 1/2[$ é igual a $1/2$ e que fique no intervalo $[0, 1/4[$ é $1/4$, etc; vê-se assim, de forma intuitiva que ξ uniformemente distribuído em $[0, 1[$.

Na prática é necessário truncar a sucessão x_i numa ordem n , obtendo assim um número ξ_n cuja distribuição $F_n(x)$ é discreta aproximando tanto melhor a distribuição uniforme quanto maior for n .

Outro processo de natureza física é a contagem, por um contador de GEIGER, do número de partículas emitidas por uma substância radioactiva num determinado intervalo de tempo.

Tem havido certa controvérsia sobre se estes fenómenos naturais podem ser considerados aleatórios. No entanto devemos considerá-los aleatórios e independentes pois:

- O conhecimento do comportamento passado não melhora de forma nenhuma a predição sobre o comportamento futuro.
- O seu mecanismo exacto é-nos desconhecido.
- O seu comportamento não é previsível por nenhuma lei determinista óbvia.

Os processos de tipo físico exigem por vezes uma aparelhagem complicada e são muito morosos. Pode obter-se mais rapidamente uma sucessão de «números aleatórios» programando num computador uma certa relação de recorrência em que um número ξ_{i+1}^* é gerado a partir de ξ_i^* , ou de um grupo de números anteriores, empregando algum algoritmo. É claro que esta sucessão não é aleatória, pois do próprio processo de geração deriva a possibilidade de predição, o que entra em contradição com as três exigências anteriormente feitas. No entanto, sem ser aleatória, pode satisfazer vários critérios

estatísticos de aleatoriedade. Tais números dizem-se *pseudo-aleatórios*.

Deve ter-se também em conta que qualquer sucessão gerada por um algoritmo e com um número finito de dígitos é periódica e portanto, de um ponto de vista prático há uma limitação do tamanho dessa sucessão para que possa ser considerada pseudo-aleatória.

Desde que se reconhece a periodicidade de toda a sucessão de números pseudo-aleatórios deve-se procurar obter o maior período possível.

Vamos considerar neste trabalho um método devido a LEHMER, definido a partir de um processo congruencial multiplicativo:

$$R_n \equiv \alpha R_{n-1} + \beta \pmod{m}$$

com $n \in \mathbb{N}$ e α , β e R_0 convenientemente escolhidos.

Apenas trataremos o caso $\beta = 0$ — processo multiplicativo puro.

Terá agora interesse investigar, de acordo com o que se disse acima, a periodicidade da sucessão construída a partir de

$$(1.1) \quad R_n \equiv \alpha R_{n-1} \pmod{m}.$$

Para isso vamos introduzir o conceito de gaussiano e estudar algumas das suas propriedades.

Vejam primeiro um resultado preliminar sobre congruências [13]:

TEOREMA 1. *Se m. d. c. $(l, m) = p$, então*
 $la \equiv la' \pmod{m}$ *se e só se* $a \equiv a' \pmod{\frac{m}{p}}$.

DEMONSTRAÇÃO. Visto que m. d. c. $(l, m) = p$, tem-se

$$l = l_1 p, \quad m = m_1 p \quad \text{com m. d. c. } (l_1, m_1) = 1.$$

Por hipótese $la - la' = \alpha m$ com $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$l(a - a') = l_1 p(a - a') = \alpha m_1 p$$

logo

Como si, concl ou seja, directa.

Demo

TEOR mos entr x tal q

DEMO inteiros

Como para to tais que j < k. Entã

e o int

DEFI zendo na bas

Van nos p ros q

I. si e c

g s s (

II. com

úmeros logo

$$l_1(a - a') = \alpha m_1.$$

Como l_1 e m_1 são inteiros primos entre si, conclui-se que $a - a'$ é múltiplo de m_1 , ou seja, de m/p , o que prova a implicação directa. A recíproca é imediata.

Demonstra-se que

TEOREMA 2. *Se ε e m são inteiros primos entre si, então existe um número positivo x tal que*

$$\varepsilon^x \equiv 1 \pmod{m}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Dados ε e m , existem inteiros d_i , $0 \leq d_i < m$, tais que

$$\varepsilon^i \equiv d_i \pmod{m} \quad i \in \mathbf{N}.$$

Como ε e m são primos entre si, $d_i \neq 0$ para todo o i e existem índices $j, k \leq m$ tais que $d_j = d_k$ com $j \neq k$. Admitamos que $j < k$.

Então, atendendo ao teorema 1,

$$\varepsilon^{k-j} \equiv 1 \pmod{m}$$

e o inteiro pretendido é $x = k - j$.

DEFINIÇÃO. O menor inteiro x satisfazendo o teorema 2 diz-se *gaussiano* de m na base ε e representa-se por

$$x = gss(m, \varepsilon).$$

Vamos agora enunciar três regras [7] que nos permitem calcular o gaussiano de inteiros que satisfaçam determinadas condições.

I. Se os inteiros m e n são primos entre si e com ε , então

$$gss(mn, \varepsilon) = \text{m. m. c.} [gss(m, \varepsilon), gss(n, \varepsilon)].$$

II. Se π é um ímpar primo, ε é primo com π e r é tal que π^r é a maior potência

de π que divide $\varepsilon^{gss(\pi, \varepsilon)} - 1$, então

$$gss(\pi^p, \varepsilon) = \begin{cases} gss(\pi, \varepsilon) & \text{se } p \leq r \\ \pi^{p-r} gss(\pi, \varepsilon) & \text{se } p > r. \end{cases}$$

III. Se existe um inteiro $t \geq 0$ tal que $\varepsilon = 4t + 3$ e r é tal que 2^r é a maior potência de 2 que divide $\varepsilon + 1$, então

$$gss(2^p, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = 1 \\ 2 & \text{se } 1 < p \leq r \\ 2^{p-r} & \text{se } p > r. \end{cases}$$

A aplicação do conceito de Gaussiano à determinação do período é dada pelo seguinte teorema:

TEOREMA 3. *A sucessão dos R_n definida em (1.1.) em que α e m são primos entre si e com R_0 , é periódica com período igual a $gss(m, \alpha)$.*

DEMONSTRAÇÃO. De $R_n \equiv \alpha R_{n-1} \pmod{m}$ conclui-se facilmente que $R_n \equiv \alpha^n R_0 \pmod{m}$.

Seja $x = gss(m, \alpha)$. Então x é o menor inteiro positivo tal que

$$\alpha^x \equiv 1 \pmod{m}$$

e então

$$\begin{aligned} \alpha^x R_0 &\equiv R_0 \pmod{m} \\ \alpha^{x+1} R_0 &\equiv \alpha R_0 \pmod{m} \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha^{x+k} R_0 &\equiv \alpha^k R_0 \pmod{m} \end{aligned}$$

o que demonstra que a sucessão é periódica. O período não pode ser menor que x , porque se

$$\alpha^i R_0 \equiv \alpha^j R_0 \pmod{m} \quad \text{com } i, j < x$$

então, atendendo ao teorema 1, se $i < j$

$$\alpha^{j-i} \equiv 1 \pmod{m}$$

o que vai contra a hipótese de x ser gaussiano de m na base α .

1.2. Aplicação prática

Com base nestes resultados fomos construir uma tabela de 1002 números pseudo-aleatórios uniformes. Utilizámos um computador «Time-Sharing General Electric Mark I (GE 265)».

Para construir a tabela que apresentamos usámos em (1.1)

$$\begin{aligned}\alpha &= 10^4 + 3 \\ m &= 10^6 \\ R_0 &= 10^6 - 3\end{aligned}$$

o que dá uma sucessão de período igual a $gss(10^6, 10^4 + 3)$ (ver teorema 3).

Este valor calcula-se facilmente aplicando as regras indicadas:

Por aplicação da regra I tem-se

$$gss(10^6, 10^4 + 3) = \text{m. m. c.}$$

$$[gss(2^6, 10^4 + 3), gss(5^6, 10^4 + 3)].$$

Ora $gss(2^6, 10^4 + 3)$ pode calcular-se pela regra III. Com efeito, com $t = 2500$, tem-se $10^4 + 3 = 4t + 3$. A maior potência de 2 que divide $10^4 + 3 + 1$ é 2^2 , e como $6 > 2$, tem-se $gss(2^6, 10^4 + 3) = 2^{6-2} = 16$.

Quanto ao cálculo de $gss(5^6, 10^4 + 3)$, podemos aplicar a regra II, visto que $10^4 + 3$ é primo com 5. É fácil ver que

$$gss(5, 10^4 + 3) = 4,$$

e que a maior potência de 5 que divide $(10^4 + 3)^4 - 1$ é 5^1 . Como $6 > 1$, tem-se

$$gss(5^6, 10^4 + 3) = 5^{6-1} gss(5, 10^4 + 3) = 4 \cdot 5^5.$$

Logo

$$\begin{aligned}gss(10^6, 10^4 + 3) &= \text{m. m. c.} \\ (16, 4 \cdot 5^5) &= 50.000.\end{aligned}$$

Para a dimensão da tabela que construímos (1002), consideramos que este período dá uma margem de segurança suficiente o que será comprovado na secção seguinte.

O programa para a construção da tabela — ALEAS — encontra-se reproduzido e convenientemente detalhado no anexo I.

2. Critérios de aleatoriedade

Uma vez gerados os números pelo método congruencial multiplicativo de LEHMER, temos de verificar, de acordo com o que foi dito anteriormente, se satisfazem os seguintes critérios de aleatoriedade:

- a) a sua distribuição aproxima tanto quanto possível a distribuição uniforme
- b) os números têm correlação não significativamente diferente de zero.

Com esse objectivo fomos então aplicar aos números obtidos os seguintes testes de aleatoriedade e uniformidade: teste de frequência, teste de correlação serial e testes sobre a função de distribuição.

2.1. Teste de frequência

Numa sucessão de números aleatórios uniformes é de esperar que cada dígito ocorra aproximadamente com igual frequência, não só globalmente como também por colunas. Testámos portanto essas hipóteses, aplicando a cada uma delas o teste do χ^2 .

O teste foi feito com auxílio do computador, por meio do programa CONTAR (ver anexo II).

Os resultados obtidos (quadro I) levaram à não rejeição da hipótese a um nível de significância $\alpha = .10$ e portanto também aos níveis habituais de .05, .01 e .001.

QUADRO I

Frequência dos dígitos e valores de χ^2

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | χ^2 |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|----------|
| coluna 1 | 92 | 107 | 97 | 113 | 97 | 100 | 104 | 112 | 83 | 97 | 1002 | 7.5609 |
| coluna 2 | 97 | 117 | 93 | 104 | 109 | 95 | 99 | 113 | 85 | 90 | 1002 | 9.6168 |
| coluna 3 | 77 | 94 | 110 | 106 | 112 | 101 | 101 | 112 | 94 | 95 | 1002 | 10.4950 |
| coluna 4 | 101 | 100 | 100 | 103 | 79 | 108 | 91 | 99 | 102 | 119 | 1002 | 9.5968 |
| coluna 5 | 103 | 94 | 92 | 102 | 101 | 94 | 95 | 113 | 116 | 92 | 1002 | 6.6228 |
| coluna 6 | 90 | 97 | 104 | 124 | 99 | 106 | 95 | 96 | 88 | 103 | 1002 | 9.2974 |
| total | 560 | 609 | 596 | 652 | 597 | 604 | 585 | 645 | 568 | 596 | 6002 | 12.8104 |

2. 2. Teste de correlação serial

2. 2. 1. Descrição

Uma sucessão de números $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ diz-se aleatória se $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ são independentes e semelhantes. É pois óbvio que um modo de verificar a aleatoriedade consiste em testar a independência. Os testes frequentemente usados para esse fim são baseados na correlação serial.

O coeficiente de correlação serial circular de passo h é definido por

$$r_h = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_{i+h} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i x_{i+h} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}$$

em que $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ e x_{i+h} é substituído por x_{i+h-n} para valores de i tais que $i+h > n$.

Partindo da hipótese da independência e normalidade das observações, ANDERSON [1] mostrou que a distribuição exacta de r_1 é dada por

$$\text{Prob} \{r_1 > R\} = \sum_{i=1}^m \frac{(\nu_i - R)^2}{\alpha_i} \quad \nu_{m+1} \leq R \leq \nu_m$$

em que

$$\nu_i = \cos(2\pi i/n)$$

$$\alpha_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\nu_i - \nu_j) \quad \text{se } n = 3, 5, \dots$$

$$\alpha_i = \sqrt{\nu_i + 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-2} (\nu_i - \nu_j) \quad \text{se } n = 4, 6, \dots$$

$$m = \begin{cases} 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1, 2; \dots, \frac{n-2}{2} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Para r_k , com k primo com n , a distribuição é a mesma que a de r_1 .

A par desta distribuição exacta, apresenta uma distribuição assintótica extremamente simples, baseada no facto de $r_1 + \frac{1}{n}$ estar aproximadamente distribuído como um coeficiente de correlação de PEARSON para $n+3$ observações e portanto que

$$r_1^* = \left(r_1 + \frac{1}{n-1} \right) \frac{(n-1)\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{n^2-3n}}$$

é assintoticamente normal reduzida, simbolicamente $\mathfrak{N}(0, 1)$.

Vários autores se têm debruçado sobre a distribuição dos coeficientes de correlação serial, baseando-se na hipótese da normalidade dos valores observados, evidentemente restrictiva, pois frequentemente a distribuição $F(x)$ subjacente não é conhecida.

WALD e WOLFOWITZ [12] apresentam um teste de permutação que satisfaz as seguintes condições:

i) Se $F(x)$ é contínua o tamanho da região crítica não depende da função de distribuição $F(x)$, o que torna o teste de significância possível quando nada é conhecido sobre $F(x)$, excepto a sua continuidade.

ii) Se $F(x)$ não é contínua, mas todos os momentos são finitos e a variância não é nula, o tamanho da região crítica aproxima-se quando $n \rightarrow \infty$ do tamanho que teria se $F(x)$ fosse contínua, e neste caso ainda é possível fazer um teste assintótico.

O teste baseia-se não propriamente no coeficiente de correlação r_h , mas sim na estatística

$$R_h = \sum_{i=1}^n x_i x_{i+h}.$$

Uma vez que se está a trabalhar com a subpopulação de todas as permutações dos verdadeiros valores observados, $\sum_{i=1}^n x_i$ e

$\sum_{i=1}^n x_i^2$ são constantes, e portanto, a estatística R_h é uma função linear de r_h .

Demonstra-se que se h for primo com n a distribuição de R_h é a mesma de R_1 . O seu valor médio e a sua variância são dados por

$$E(R_1) = \frac{S_1^2 - S_2}{n-1}$$

$$\sigma^2(R_1) = \frac{S_2^2 - S_4}{n-1} +$$

$$+ \frac{S_1^4 - 4 S_1^2 S_2 + 4 S_1 S_3 + S_2^2 - 2 S_4}{(n-1)(n-2)} -$$

$$- \left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1} \right)^2$$

em que

$$S_r = \sum_{i=1}^n x_i^r.$$

A distribuição assintótica de

$$R_1^* = \frac{R_1 - E(R_1)}{\sigma(R_1)}$$

é normal reduzida.

Da relação

$$E[R_h R_k] = E \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i x_{i+h} \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i x_{i+k} \right) \right] =$$

$$= 4n E(x_1 x_2^2 x_3) + n(n-4) E(x_1 x_2 x_3 x_4) =$$

$$= 4n \frac{S_{121}}{n(n-1)(n-2)} + \\ + n(n-4) \frac{S_{1111}}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

em que

$$S_{121} = S_1^2 S_2 - S_2^3 - 2 S_1 S_3 + 2 S_4$$

$$S_{1111} = S_1^4 - 6 S_1^2 S_2^2 + 8 S_1 S_3 + 3 S_2^2 - 6 S_4$$

deduz-se que a covariância entre R_h^* e R_k^* tende para zero por valores negativos, quando $n \rightarrow +\infty$ (h e k primos com n).

Uma vez que o teste de ANDERSON exige a normalidade das observações, gerámos números normais a partir dos uniformes (ver secção 3) e aplicámos a esses números não só o teste de ANDERSON mas também o WALD-WOLFOWITZ. Os resultados obtidos levaram-nos a suspeitar da equivalência assintótica dos testes. Na realidade conseguimos provar a sua equivalência assintótica, na hipótese da normalidade, como vamos ver.

Recordemos que dois testes baseados em estatísticas assintoticamente normais se dizem assintoticamente equivalentes se os valores médios tiverem o mesmo limite e o cociente das variâncias tender para um.

O teste de ANDERSON baseia-se na estatística r_h que é assintoticamente normal de valor médio $-1/(n-1)$ e de desvio padrão $\sqrt{n^2 - 3n}/(n-1)\sqrt{n+1}$. O teste de WALD-WOLFOWITZ baseia-se na estatística R_h , que como vimos está relacionada com a primeira por

$$r_h = \frac{R_h - S_1^2/n}{S_2 - S_1^2/n}$$

e que é assintoticamente

$$\mathfrak{N} \left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1}, \left(\frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{S_1^4 - 4 S_1^2 S_2 + 4 S_1 S_3 + S_2^2 - 2 S_4}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Chamando $E(r_h)$, $V(r_h)$ ao valor médio e à variância de r_h dados por ANDERSON, e $E_1(R_h)$, $V_1(R_h)$ ao valor médio e variância de R_h obtidos a partir de $E_1(R_h)$ e $V_1(R_h)$, valor médio e variância de R_h dados por WALD-WOLFOWITZ, tem-se

$$E_1(r_h) = \frac{E_1(R_h) - S_1^2/n}{S_2 - S_1^2/n} = \\ = -\frac{1}{n-1} = E(r_h)$$

e, na hipótese da normalidade e independência dos valores observados

$$V_1(r_h) = \frac{V_1(R_h)}{(S_2 - S_1^2/n)^2} = \\ = \frac{1}{(S_2 - S_1^2/n)^2} \left\{ \frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \right. \\ \left. + \frac{S_1^4 - 4 S_1^2 S_2 + 4 S_1 S_3 + S_2^2 - 2 S_4}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1} \right)^2 \right\}.$$

Assim, tendo em conta que $n \cdot m_i = S_i$, facilmente se conclui que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_1(r_h)}{V(r_h)} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^5}{(n-1)^2(n-2)} m_1^4 \right) = 1$$

isto é,

$$E(r_h) = E_1(r_h)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_1(r_h)}{V(r_h)} = 1$$

e portanto, na hipótese da normalidade e independência da amostra, os testes são de facto assintoticamente equivalentes, pois as estatísticas de teste r_h têm assintoticamente a mesma distribuição.

2.2.2. Aplicação

Atendendo ao facto da distribuição de R_h (ou r_h) ser a mesma de R_1 (ou r_1) para todo o h primo com n , resolvemos fazer o teste não para $n=1002$, mas para $n=997$, maior número primo mais próximo. Assim poderíamos testar todos os R_i (ou r_i) ($i=1, 2, \dots, n$). É evidente que não há necessidade de os considerar todos. Adoptámos o critério sugerido por JENKINS, isto é, tomámos apenas os primeiros $m = n/4$ valores dos R_i (ou r_i) (anexo III).

Vejamos como formular o teste de WALD-WOLFOWITZ.

Assintoticamente, as variáveis aleatórias R_i^* ($i=1, \dots, n$) são normais de valor médio nulo, variância unitária e correlação nula, sendo portanto assintoticamente independentes duas a duas.

Consequentemente e para grandes valores de n , as variáveis aleatórias $|R_i^*|$ são também independentes duas a duas.

Da fórmula de BOOLE

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_j \cap A_i) + \dots + (-1)^m P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

e atendendo que

$$1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right)$$

vem

$$1 - \sum_{i=1}^m (1 - P(A_i)) \leq P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \leq$$

$$\leq 1 - \sum_{i=1}^m (1 - P(A_i)) + \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j).$$

Consideremos os acontecimentos A_i

$$A_i = [|R_i^*| < y].$$

Então, devido à simetria nos $|R_i^*|$ da distribuição conjunta dos $|R_i^*|$, tem-se

$$1 - m(1 - P(A_1)) \leq P\left[\bigcap_{i=1}^n [|R_i^*| < y]\right] \leq \leq 1 - m(1 - P(A_1)) + \binom{m}{2} (1 - P(A_1 \cup A_2)).$$

Fixando $c = m(1 - P(A_1)) = 2m(1 - \phi(y))$, em que ϕ é a função de distribuição de uma normal $\mathfrak{N}(0, 1)$, designemos por $y^{(1)} = \phi^{-1}(1 - c/2m)$ a solução desta equação.

Como A_1 e A_2 são acontecimentos assintoticamente independentes podemos, para grandes valores de m , substituir

$$1 - P(A_1 \cup A_2) \text{ por } (1 - P(A_1))^2 = \frac{c^2}{m^2}$$

e portanto assintoticamente

$$1 - c \leq P\left[\bigcap_{i=1}^n [|R_i^*| < y^{(1)}]\right] \leq \leq 1 - c + \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{c^2}{m^2} \leq 1 - c + \frac{c^2}{2}.$$

Ao nível de significância α determinamos c de modo que $1 - \alpha$ seja o ponto médio do intervalo anterior,

$$\alpha = 1 - \frac{(1-c) + (1-c+c^2/2)}{2} = c - c^2/4$$

ou seja, $c = 2(1 - \sqrt{1 - \alpha})$; o erro no nível de significância é $< \frac{c^2}{4} = (1 - \sqrt{1 - \alpha})^2$ sendo

$$\text{o erro relativo } \frac{(1 - \sqrt{1 - \alpha})^2}{\alpha} = \frac{\alpha}{4}.$$

Somos então conduzidos à não rejeição da hipótese desde que todos os valores observados das variáveis aleatórias R_i^* caíam no intervalo $[-y^{(1)}, y^{(1)}]$.

Na aplicação do teste aos números uniformes e para $\alpha=0.10$, obtém-se $y^{(1)}=3.54$, o que conduziu à não rejeição da hipótese de independência.

Aos números normais aplicamos não só este teste como também o de ANDERSON.

A formulação assintótica do teste de ANDERSON é idêntica à do teste de WALD-WOLFOWITZ, porque as variáveis aleatórias r_h^* são também assintoticamente independentes duas a duas.

Ambos os testes conduziram à não rejeição da hipótese da independência dos valores observados ao nível de significância $\alpha=0.10$.

2.3. Testes de distribuição

No que se segue consideraremos as estatísticas ordinais (x'_1, \dots, x'_n) dos números pseudo-aleatórios obtidas a partir da amostra inicial (x_1, \dots, x_n) .

Vários métodos não paramétricos têm sido propostos para testar a hipótese de n observações terem sido extraídas de uma população com uma determinada função de distribuição $F(x)$. A maior parte destes métodos baseia-se na comparação da função de distribuição suposta $F(x)$ com a função de distribuição empírica $S_n(x)$.

Para testar a uniformidade dos números, utilizamos alguns destes testes que passamos a descrever.

2.3.1. Teste de Kolmogorov-Smirnov

TEOREMA 4 (KOLMOGOROV). *Seja $S_n(x)$ a função de distribuição empírica correspondente a uma amostra de dimensão n extraída de uma população com função de distribuição contínua $F(x)$.*

Considere-se a variável aleatória

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |S_n(x) - F(x)|$$

e

$$Q_n(\lambda) = \begin{cases} \text{Prob}(\sqrt{n} D_n < \lambda) & \text{se } \lambda > 0 \\ 0 & \text{se } \lambda \leq 0. \end{cases}$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\lambda) = Q(\lambda)$$

$$Q(\lambda) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2\lambda^2) & \text{se } \lambda > 0 \\ 0 & \text{se } \lambda \leq 0. \end{cases}$$

Com base neste teorema pode-se estabelecer um teste não paramétrico, para testar a hipótese H_0 que especifica a função de distribuição desconhecida $F(x)$.

Assim para uma amostra ordenada (x'_1, \dots, x'_n) , a função de distribuição empírica é dada por

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & x < x'_1 \\ k/n & x'_k \leq x < x'_{k+1} \quad k=1, \dots, n-1 \\ 1 & x \geq x'_n \end{cases}$$

Seja d_n o valor observado da variável aleatória D_n para a amostra considerada. Conclui-se facilmente que

$$d_n = \max_k \left\{ |F(x'_k) - S_n(x'_k)|, |F(x'_k) - S_n(x'_{k-1})| \right\}$$

em que $k=1, 2, \dots, n$ e $S_n(x'_0) = 0$.

Para testar a hipótese H_0 ao nível de significância α , determina-se λ_0 tal que $Q(\lambda_0) = 1 - \alpha$. Se $d_n \geq \lambda_0/\sqrt{n}$, rejeita-se a hipótese H_0 . Caso contrário o teste não conduz à rejeição de H_0 .

2.3.2. Teste W_n^2 de Cramer-von Mises

Este teste baseia-se na estatística

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} |S_n(x) - F(x)|^2 dF(x)$$

que se pode exprimir em função das estatísticas ordinais do seguinte modo

$$W_n^2 = \sum_{j=1}^n \left\{ F(X'_j) - \frac{2j-1}{2n} \right\}^2 + \frac{1}{12n}.$$

SMIRNOV e VON MISES chegaram por métodos diferentes à função característica $\phi(t)$ de $W^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n^2$

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{\sqrt{2it}}{\sin \sqrt{2it}}}$$

a partir da qual se obteve a função de distribuição

$$\text{prob}(W^2 \leq z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{prob}(W_n^2 \leq z) =$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{z}} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{-1/2}{j} \cdot \sqrt{4j+1} e^{-\frac{4j+1}{16z}} K_{1/4} \left(\frac{(4j+1)^2}{16z} \right)$$

em que $K_{1/4}(x)$ é a função de BESSEL modificada, de 2.º tipo e de ordem 1/4.

ANDERSON e DARLING [2] tabelaram os valores de z que satisfazem $\text{Prob}(W^2 \leq z) = \alpha$ com cinco casas decimais para $\alpha = 0.01$ (0.01) 0.99, 0.999.

2.3.3. Teste U_n^2 de Stephens

Outra medida da distância entre $S_n(x)$ e $F(x)$, sugerida por STEPHENS, é

$$U_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ S_n(x) - F(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} [S_n(y) - F(y)] dF(y) \right\}^2 dF(x)$$

que em termos das estatísticas ordinais vem

$$U_n^2 = \sum_{j=1}^n \left\{ F(X'_j) - \frac{2j-1}{2n} - \bar{F} + \frac{1}{2} \right\}^2 + \frac{1}{12n}$$

$$\text{com } \bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F(X'_j).$$

A distribuição limite de U_n^2 é dada por

$$\text{Prob}(U^2 \leq z) =$$

$$= 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \exp(-2\pi^2 k^2 z) = \\ = Q(\pi \sqrt{z})$$

em que $Q(x)$ é a função de distribuição limite da estatística de KOLMOGOROV.

2.3.4. Teste de Sherman

Outra estatística da mesma natureza das anteriores, apresentada por SHERMAN [8], é

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \left| F(X'_j) - F(X'_{j-1}) - \frac{1}{n+1} \right|$$

com $F(X'_0) = 0$ e $F(X'_{n+1}) = 1$.

Esta variável aleatória tem valor médio

$$E(S_n) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$$

e variância

$$\text{Var}(S_n) = \frac{2n^{n+2} + n(n-1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+2}} - \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n+2} = \frac{2e-5}{ne^2}$$

e a distribuição assintótica da variável aleatória

$$\left(\frac{ne^2}{2e-5} \right)^{1/2} \left(S_n - \frac{1}{e} \right)$$

é normal reduzida.

2.3.5. Testes de Tiago de Oliveira [10]

i) *Teste do quadrado de F*

Uma medida de discrepância entre a função de distribuição empírica e a função de distribuição suposta, sugerida por GUMBEL [4] é

$$T_n = \frac{6(n+1)}{n} \sum_{i=1}^n \left(F(X_i) - \frac{i}{n+1} \right)^2$$

Facilmente se vê que

$$E(T_n) = 1$$

$$\text{Var}(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4,5$$

e que a distribuição assintótica desta variável é a de $6W_n^2$.

Pode-se a partir desta estatística obter uma outra consideravelmente mais simples, substituindo $\sum_{i=1}^n F(X_i) \frac{i}{n+1}$ pelo seu valor médio $\frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$.

Deste modo é-se conduzido a estudar,

$$T_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F^2(X_i)$$

que pelo teorema limite central é assintoticamente normal, com valor médio $1/3$ e desvio padrão $2/3\sqrt{5n}$.

ii) *Teste do produto de F*

Suponhamos que a população tem uma função de distribuição $F(x)$ e consideremos a estatística

$$T_{2n} = \frac{1}{n} \log [F(X_1) \cdots F(X_n)] =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n \log(F(X_i))}{n}.$$

Atendendo que T_{2n} é uma média e que o valor médio e a variância da variável aleatória $\log F(X)$ existem e são finitos

$$E(\log F(X)) = -1$$

$$\text{Var}(\log F(X)) = 1$$

estamos em condições de aplicar o teorema limite central e concluir que

$$\sqrt{n}(T_{2n} + 1)$$

é uma variável aleatória assintoticamente normal reduzida.

2.3.6. Aplicações

Ao aplicar estes testes à sucessão de números aleatórios gerada, para testar a hipótese da uniformidade, obtiveram-se os seguintes resultados:

$$d_n = 0.0229$$

$$w_n^2 = 0.0771$$

$$u_n^2 = 0.0559$$

$$s_n = 0.7103$$

$$t_{1n} = 0.3263$$

$$t_{2n} = -0.1642$$

que conduzem à não rejeição da hipótese ao nível de significância $\alpha = 0.10$.

3. Geração de números aleatórios com diferentes distribuições

Nesta secção vamos ver como se podem obter, a partir de uma sucessão de números aleatórios com distribuição uniforme, sucessões de números aleatórios com qualquer outra distribuição.

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$. Se $F(x)$ for uma aplicação biunívoca de \mathbb{R} sobre $]0, 1[$, a

nova variável aleatória $Y = F(X)$ é uniforme em $[0, 1]$ pois para $0 \leq y \leq 1$

$$G(y) = \text{prob}(Y \leq y) = \text{prob}(F(X) \leq y) = \\ = \text{prob}(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

Podemos portanto obter a variável aleatória X a partir duma variável aleatória uniforme Y , fazendo

$$X = F^{-1}(Y)$$

ou seja

$$x_i = F^{-1}(y_i).$$

A título de exemplo apresentam-se as transformações que permitem obter algumas das distribuições mais correntes

| | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| Logística | $F^{-1}(x) = -\log \frac{1-x}{x}$ |
| Exponencial | $F^{-1}(x) = -\log(1-x)$ |
| Cauchy | $F^{-1}(x) = \text{tg}(\pi(x-1/2))$ |
| Beta (1, 2) | $F^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ |
| Fréchet ($k=1$) (máximos) | $F^{-1}(x) = -1/\log(x)$ |
| Fréchet ($k=2$) (máximos) | $F^{-1}(x) = 1/\sqrt{-\log(x)}$ |
| Weibull ($k=3$) (máximos) | $F^{-1}(x) = -\exp(\log(-\log(x)/3))$ |
| Gumbel (máx.) | $F^{-1}(x) = -\log(-\log(x))$ |
| Pareto | $F^{-1}(x) = \frac{1}{1-x}$ |
| Rayleigh | $F^{-1}(x) = \sqrt{-2 \log(1-x)}$ |

Dado que a distribuição normal não tem inversa explícita, vamos apresentar um processo de obter números aleatórios normais a partir dos uniformes, embora existam fórmulas aproximadas para o cálculo dessa inversa.

Considere-se a densidade conjunta do par aleatório independente (X_1, X_2) normal reduzido

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right).$$

A transformação

$$(3.1) \quad \begin{aligned} X_1 &= R \cos \Theta \\ X_2 &= R \sin \Theta \end{aligned}$$

dá um par aleatório (R, Θ) com densidade

$$g(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \cdot r$$

o que mostra que as variáveis $R^2/2$ e Θ são independentes, sendo $R^2/2$ exponencial e Θ uniforme em $[0, 2\pi]$.

Tem-se ainda que as variáveis

$$V_1 = \int_0^{R^2} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = 1 - e^{-\frac{R^2}{2}}$$

$$U_2 = \int_0^{\Theta} \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{\Theta}{2\pi}$$

são uniformes em $[0, 1]$.

Ora se V_1 é uniforme em $[0, 1]$, também $U_1 = 1 - V_1 = e^{-\frac{R^2}{2}}$ é uniforme em $[0, 1]$.

Invertendo as relações anteriores, obtém-se

$$R = \sqrt{-2 \log U_1}$$

$$\Theta = 2\pi U_2.$$

Substituindo em (3.1) vem finalmente

$$X_1 = \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2)$$

$$X_2 = \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2)$$

que permitem calcular os números pseudo-aleatórios normais a partir dos uniformes.

Observe-se que os testes usando a normalidade foram feitos sobre os números normais x_i assim obtidos.

ANEXO I

No programa *ALEAS*

```

05 SFILE ALEA5/ALEA6, ALEA7/ALEA8
10 DIMENSION R(1500)
20 S = 9999.97
30 DO 1 I = 1, 1495, 6
40 DO 2 J = 1, 6
50 L = I + J - 1
60 RU = (S - INTF(S)) + (S * 3) / 10 ↑ 4
70 K = RU
80 R(L) = RU - K
90 S = R(L) * 10 ↑ 4
100 2
110 M = I + 5
120 IF (I - 499) 1, 10, 10
130 10 WRITE (1, 3) (R(L), L - I, M)
140 1
150 DO 4 L = 499, 1499

```

```

160 J = L + 1
170 7 IF (R(L) - R(J)) 5, 5, 6
180 6 T = R(L)
190 R(L) = R(J)
200 R(J) = T
210 5 J = J + 1
220 IF (J - 1500) 7, 7, 4
230 4
240 DO 8 I = 499, 1495, 6
250 M = I + 5
260 WRITE (3, 3) (R(L), L - I, M)
270 8
280 3 FORMAT(6(2X, F8.6))
290 STOP

```

1) são gerados 1.500 números pseudo-aleatórios $R(L)$, pelo método atrás indicado, obtendo-se $R(L+1)$ como resto da divisão de $R(L) * (10^4 + 3)$ por 10^6 .

2) destes 1.500 números aproveitam-se apenas os últimos 1.002, seguindo a prática corrente de gerar uma sucessão de dimensão m , maior do que aquela que é necessária, n , e desprezar os primeiros $m - n$ termos.

3) seguidamente, procede-se à ordenação dos 1.002 números obtidos, uma vez que para futuras aplicações de alguns testes é necessário considerar a sucessão ordenada.

Apresenta-se em seguida, a tabela dos números pseudo-aleatórios não ordenados.

NUMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES

| | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| .57797800E+00 | .51527600E+00 | .30538000E+00 | .71481500E+00 |
| .29584300E+00 | .31877300E+00 | .68901600E+00 | .23047100E+00 |
| .39798500E+00 | .48540000E-01 | .54677400E+00 | .37942700E+00 |
| .40784300E+00 | .64988900E+00 | .83959000E+00 | .41949700E+00 |
| .22385200E+00 | .19313200E+00 | .90340200E+00 | .73349200E+00 |
| .11945200E+00 | .87358300E+00 | .44914800E+00 | .82922600E+00 |
| .74307800E+00 | .11553000E-01 | .56276500E+00 | .33951000E+00 |
| .11817000E+00 | .52355000E-01 | .70519100E+00 | .22158000E-01 |
| .64316400E+00 | .56630100E+00 | .71236200E+00 | .75998100E+00 |
| .91497000E-01 | .24870500E+00 | .79521800E+00 | .56079300E+00 |
| .61160900E+00 | .91987800E+00 | .53969400E+00 | .55740500E+00 |
| .72693400E+00 | .52513300E+00 | .90672900E+00 | .76310000E-02 |
| .33591300E+00 | .13478300E+00 | .23226000E+00 | .29428300E+00 |
| .71198100E+00 | .94413900E+00 | .22722400E+00 | .92517300E+00 |
| .50357600E+00 | .27351600E+00 | .97756000E+00 | .53311300E+00 |
| .73413700E+00 | .56822400E+00 | .94420400E+00 | .87591700E+00 |
| .80209900E+00 | .39857700E+00 | .96309500E+00 | .83639700E+00 |
| .48090200E+00 | .45988700E+00 | .24516900E+00 | .42236500E+00 |
| .91898200E+00 | .57246600E+00 | .37636400E+00 | .76663400E+00 |
| .63977600E+00 | .68162700E+00 | .31761700E+00 | .12701600E+00 |
| .54172300E+00 | .85768300E+00 | .40486700E+00 | .88632400E+00 |
| .89826000E+00 | .29594600E+00 | .34905100E+00 | .55237000E+00 |
| .35782400E+00 | .31672900E+00 | .23610500E+00 | .75796700E+00 |
| .94385300E+00 | .36534300E+00 | .52696800E+00 | .26092700E+00 |
| .54785000E-01 | .12102000E-01 | .57577000E-01 | .94406300E+00 |
| .46405600E+00 | .95231800E+00 | .38870000E-01 | .81518700E+00 |
| .32010500E+00 | .63040000E-02 | .56784000E-01 | .71130000E-02 |
| .14636800E+00 | .11937100E+00 | .72256000E-01 | .77765100E+00 |
| .84128400E+00 | .36183400E+00 | .42122500E+00 | .50961500E+00 |
| .67828900E+00 | .92900300E+00 | .81462700E+00 | .71081700E+00 |
| .30582200E+00 | .14119100E+00 | .33840000E+00 | .14071000E-01 |
| .74732000E+00 | .44371200E+00 | .45348200E+00 | .17718700E+00 |
| .40122000E+00 | .40687800E+00 | .99581000E+00 | .82979000E-01 |
| .40960000E-01 | .72600000E+00 | .17632100E+00 | .73926000E+00 |
| .81497800E+00 | .22139200E+00 | .58095400E+00 | .27884100E+00 |
| .24671000E+00 | .83836600E+00 | .17064500E+00 | .95953600E+00 |
| .23459400E+00 | .64723400E+00 | .28133200E+00 | .16415600E+00 |
| .52069000E-01 | .84330900E+00 | .62395300E+00 | .40051500E+00 |
| .34757000E+00 | .74690400E+00 | .28444500E+00 | .30142400E+00 |
| .14453700E+00 | .80333100E+00 | .72374500E+00 | .62469700E+00 |
| .84140600E+00 | .58290300E+00 | .77779200E+00 | .25314500E+00 |
| .21161500E+00 | .78093100E+00 | .65752200E+00 | .19458200E+00 |
| .40360100E+00 | .21773000E+00 | .94887400E+00 | .58182000E+00 |
| .94080200E+00 | .83861000E+00 | .61278300E+00 | .67267000E+00 |
| .72165500E+00 | .71388400E+00 | .98518900E+00 | .84994700E+00 |
| .19598000E-01 | .38866000E-01 | .77702900E+00 | .62146200E+00 |
| .48306800E+00 | .13386700E+00 | .74240000E-01 | .62002800E+00 |
| .13550400E+00 | .44420100E+00 | .33775900E+00 | .60345600E+00 |
| .37534100E+00 | .54017800E+00 | .40352400E+00 | .45456100E+00 |
| .97601900E+00 | .11711300E+00 | .48247300E+00 | .18115400E+00 |

NUMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES (CONT.)

| | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| .85974000E-01 | .99531700E+00 | .16054300E+00 | .91604800E+00 |
| .22864300E+00 | .12010400E+00 | .39867200E+00 | .91705500E+00 |
| .30246500E+00 | .56178500E+00 | .53279700E+00 | .56698800E+00 |
| .58087700E+00 | .51567300E+00 | .27385500E+00 | .37365900E+00 |
| .71231700E+00 | .30208000E+00 | .70778500E+00 | .96988100E+00 |
| .72022100E+00 | .36632000E+00 | .29552300E+00 | .11346600E+00 |
| .30270000E-02 | .27870400E+00 | .87300700E+00 | .68722700E+00 |
| .33417300E+00 | .73454500E+00 | .65117500E+00 | .69897700E+00 |
| .86209700E+00 | .55415500E+00 | .21596300E+00 | .28152700E+00 |
| .11023500E+00 | .68284800E+00 | .52831100E+00 | .69269000E+00 |
| .97702600E+00 | .19093500E+00 | .92415400E+00 | .31527900E+00 |
| .73590700E+00 | .27329000E+00 | .11443100E+00 | .65710600E+00 |
| .35315000E-01 | .25154300E+00 | .18508000E+00 | .35098500E+00 |
| .89868700E+00 | .56968900E+00 | .59703600E+00 | .15472600E+00 |
| .72446300E+00 | .79847900E+00 | .18623900E+00 | .95114300E+00 |
| .28607700E+00 | .63322600E+00 | .16362600E+00 | .74804900E+00 |
| .73197000E+00 | .89424300E+00 | .11513300E+00 | .67825500E+00 |
| .58557700E+00 | .52684200E+00 | .16990000E-02 | .99957500E+00 |
| .74533700E+00 | .60133600E+00 | .15926200E+00 | .94820000E-01 |
| .48468600E+00 | .31303600E+00 | .29875800E+00 | .47180400E+00 |
| .45206300E+00 | .98225600E+00 | .50612400E+00 | .76333800E+00 |
| .67090400E+00 | .54308000E-01 | .24230000E+00 | .72723600E+00 |
| .53964800E+00 | .99504000E-01 | .34322200E+00 | .24630900E+00 |
| .83173200E+00 | .81315800E+00 | .19827000E-01 | .32837100E+00 |
| .69559300E+00 | .15581000E-01 | .85805300E+00 | .10623400E+00 |
| .65466900E+00 | .65208600E+00 | .81883800E+00 | .83770900E+00 |
| .60739700E+00 | .79298600E+00 | .23811900E+00 | .90561100E+00 |
| .82721500E+00 | .63359300E+00 | .82683400E+00 | .81775100E+00 |
| .96256100E+00 | .49421900E+00 | .67091900E+00 | .20694200E+00 |
| .36871000E-01 | .82017700E+00 | .23131400E+00 | .83099600E+00 |
| .44858400E+00 | .18178000E+00 | .34395400E+00 | .57272500E+00 |
| .97113600E+00 | .27434000E+00 | .21977800E+00 | .43994300E+00 |
| .75296600E+00 | .91816900E+00 | .44472300E+00 | .56546200E+00 |
| .31751100E+00 | .58580000E-01 | .97972700E+00 | .20709400E+00 |
| .56320800E+00 | .76588600E+00 | .16072700E+00 | .74765200E+00 |
| .76349400E+00 | .23539900E+00 | .69866000E+00 | .69494800E+00 |
| .56680900E+00 | .78743200E+00 | .67946400E+00 | .68179500E+00 |
| .99658800E+00 | .86729600E+00 | .56407700E+00 | .46600500E+00 |
| .45126900E+00 | .45305000E-01 | .18843700E+00 | .93039100E+00 |
| .70429000E+00 | .16771000E-01 | .76347900E+00 | .82766000E-01 |
| .90408900E+00 | .60200700E+00 | .87514300E+00 | .55941000E-01 |
| .57410200E+00 | .74632500E+00 | .48436500E+00 | .10772900E+00 |
| .61276800E+00 | .52003700E+00 | .92708400E+00 | .62094300E+00 |
| .29352400E+00 | .11845600E+00 | .91423600E+00 | .10339500E+00 |
| .26480700E+00 | .86189500E+00 | .53175900E+00 | .18789900E+00 |
| .55005500E+00 | .19566500E+00 | .24059100E+00 | .63226500E+00 |
| .54770500E+00 | .69008100E+00 | .87666900E+00 | .31930700E+00 |
| .31195000E-01 | .40453000E-01 | .65093000E+00 | .25683800E+00 |
| .14896200E+00 | .67095000E-01 | .14931300E+00 | .57766900E+00 |
| .42444400E+00 | .71531900E+00 | .33275400E+00 | .53961400E+00 |

NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES (CONT.)

| | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| .75607900E+00 | .55437000E-01 | .53719100E+00 | .52548400E+00 |
| .41730300E+00 | .28276300E+00 | .47356200E+00 | .43093000E-01 |
| .56555000E-01 | .71760700E+00 | .22780400E+00 | .72525200E+00 |
| .69727100E+00 | .80526400E+00 | .26085500E+00 | .32977500E+00 |
| .73789000E+00 | .11610600E+00 | .40865100E+00 | .73947300E+00 |
| .95184900E+00 | .34538500E+00 | .88213200E+00 | .96216000E+00 |
| .48758500E+00 | .31343300E+00 | .26723300E+00 | .13064800E+00 |
| .86853600E+00 | .96556300E+00 | .52489300E+00 | .50274800E+00 |
| .99313900E+00 | .37208700E+00 | .99104900E+00 | .46127500E+00 |
| .13483200E+00 | .72631900E+00 | .37663800E+00 | .51404000E+00 |
| .94205300E+00 | .35457000E+00 | .76759900E+00 | .29385600E+00 |
| .43823800E+00 | .69615400E+00 | .62486800E+00 | .55853500E+00 |
| .21826300E-01 | .32338100E+00 | .78438400E+00 | .19088900E+00 |
| .46625300E+00 | .93156600E+00 | .45708300E+00 | .19873200E+00 |
| .91995800E+00 | .34102100E+00 | .22890300E+00 | .71487600E+00 |
| .90637800E+00 | .49705700E+00 | .60781000E-01 | .99713300E+00 |
| .32395000E+00 | .46998800E+00 | .28865600E+00 | .42831600E+00 |
| .44611200E+00 | .45512600E+00 | .62346500E+00 | .51623700E+00 |
| .92130100E+00 | .77278300E+00 | .15114400E+00 | .89370900E+00 |
| .77295500E+00 | .86827300E+00 | .33263200E+00 | .31854400E+00 |
| .39951100E+00 | .31190700E+00 | .38660000E-02 | .67355500E+00 |
| .57440800E+00 | .79899800E+00 | .37578400E+00 | .96655500E+00 |
| .44608100E+00 | .14985800E+00 | .34323000E-01 | .33035500E+00 |
| .53797000E+00 | .30980100E+00 | .94042000E+00 | .22768000E-01 |
| .74851000E+00 | .34913800E+00 | .43001400E+00 | .42660700E+00 |
| .35114100E+00 | .46318200E+00 | .21404100E+00 | .49685000E-01 |
| .99429900E+00 | .97224600E+00 | .37843900E+00 | .52481300E+00 |
| .70142200E+00 | .32164200E+00 | .38414600E+00 | .60980400E+00 |
| .87094700E+00 | .81682000E-01 | .67099000E-01 | .18747100E+00 |
| .27631200E+00 | .94768000E+00 | .63823500E+00 | .26562700E+00 |
| .65954000E-01 | .73994600E+00 | .68349300E+00 | .97708300E+00 |
| .76331100E+00 | .40379500E+00 | .16380900E+00 | .57965300E+00 |
| .26682100E+00 | .95390000E-02 | .41512100E+00 | .45614800E+00 |
| .84992000E+00 | .75248900E+00 | .14836700E+00 | .11438200E+00 |
| .16104700E+00 | .95295900E+00 | .44948400E+00 | .18716600E+00 |
| .22363900E+00 | .56261000E-01 | .77940900E+00 | .43231400E+00 |
| .43613200E+00 | .63270800E+00 | .97408100E+00 | .73263700E+00 |
| .57196600E+00 | .37761100E+00 | .24443600E+00 | .95949000E-01 |
| .77957700E+00 | .11128400E+00 | .17641300E+00 | .65506200E+00 |
| .58240300E+00 | .77903900E+00 | .73094700E+00 | .66778800E+00 |
| .87888100E+00 | .45118900E+00 | .24397800E+00 | .51693900E+00 |
| .94245000E+00 | .32304600E+00 | .42644300E+00 | .71032900E+00 |
| .42154500E+00 | .71492200E+00 | .36427900E+00 | .88077000E+00 |
| .33960500E+00 | .72130000E-01 | .51842300E+00 | .78607400E+00 |
| .95068000E-01 | .96498300E+00 | .72481300E+00 | .30905300E+00 |
| .46137000E+00 | .88793000E-01 | .19438700E+00 | .45752100E+00 |
| .58695000E+00 | .26387200E+00 | .51308300E+00 | .36429000E+00 |
| .99524500E+00 | .43553400E+00 | .64183600E+00 | .28717200E+00 |
| .58469200E+00 | .67408900E+00 | .91658600E+00 | .60898000E+00 |
| .62672900E+00 | .17485200E+00 | .48269000E-01 | .83752600E+00 |

NUMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES (CONT.)

| | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| .77579300E+00 | .25813500E+00 | .12282400E+00 | .60562300E+00 |
| .49322000E-01 | .36924900E+00 | .60118700E+00 | .67108300E+00 |
| .84775400E+00 | .78508000E-01 | .31929600E+00 | .91671900E+00 |
| .94452500E+00 | .81224000E-01 | .48808900E+00 | .35034400E+00 |
| .48807300E+00 | .19771000E+00 | .69350200E+00 | .10476900E+00 |
| .18370000E-02 | .37327800E+00 | .89647500E+00 | .43780700E+00 |
| .38425300E+00 | .67824000E+00 | .43294300E+00 | .73227100E+00 |
| .90875800E+00 | .30790900E+00 | .13845000E-01 | .49597400E+00 |
| .22379100E+00 | .58259800E+00 | .72511900E+00 | .36172700E+00 |
| .35278900E+00 | .94761800E+00 | .27700000E-01 | .87343000E-01 |
| .69418900E+00 | .97328400E+00 | .75752800E+00 | .55563500E+00 |
| .21429000E-01 | .35490600E+00 | .12554000E+00 | .77441600E+00 |
| .48294600E+00 | .91279800E+00 | .71767200E+00 | .87649700E+00 |
| .60217900E+00 | .59227200E+00 | .49486400E+00 | .11969200E+00 |
| .27756300E+00 | .46364000E+00 | .79305100E+00 | .88681200E+00 |
| .78253700E+00 | .72221600E+00 | .32317200E+00 | .68567100E+00 |
| .76553900E+00 | .68831100E+00 | .17116400E+00 | .14908000E+00 |
| .25000600E+00 | .80723800E+00 | .79796400E+00 | .34853000E-01 |
| .63437500E+00 | .64930900E+00 | .39511000E-01 | .22580100E+00 |
| .69208300E+00 | .90983800E+00 | .10674100E+00 | .72973800E+00 |
| .57156900E+00 | .40913600E+00 | .58559200E+00 | .67947600E+00 |
| .79627000E+00 | .92516000E-01 | .43700200E+00 | .33282700E+00 |
| .26462400E+00 | .30291000E-01 | .99690800E+00 | .72603000E-01 |
| .25006700E+00 | .41777200E+00 | .97624800E+00 | .40661800E+00 |
| .40103700E+00 | .57527400E+00 | .46095800E+00 | .96768400E+00 |
| .74097300E+00 | .94810700E+00 | .91197800E+00 | .51361300E+00 |
| .66831000E+00 | .10658500E+00 | .16524300E+00 | .92721700E+00 |
| .95648800E+00 | .74601900E+00 | .43169200E+00 | .21631100E+00 |
| .75394200E+00 | .68672400E+00 | .29726200E+00 | .51370400E+00 |
| .58411200E+00 | .87401000E+00 | .72289100E+00 | .77211000E-01 |
| .34543400E+00 | .37819100E+00 | .44516000E-01 | .28964400E+00 |
| .31134600E+00 | .39457900E+00 | .97307400E+00 | .65881500E+00 |
| .13028500E+00 | .24348600E+00 | .59450300E+00 | .81753700E+00 |
| .82568900E+00 | .37022600E+00 | .36974100E+00 | .52362300E+00 |
| .79599600E+00 | .34511000E+00 | .13472600E+00 | .65988300E+00 |
| .81464200E+00 | .86345100E+00 | .10039300E+00 | .23413300E+00 |
| .30066000E-01 | .74556200E+00 | .85268200E+00 | .37918300E+00 |
| .96570400E+00 | .93675400E+00 | .35253000E+00 | .35284600E+00 |
| .51999500E+00 | .50734100E+00 | .93587300E+00 | .53793500E+00 |
| .96637500E+00 | .65263600E+00 | .31365000E+00 | .44226300E+00 |
| .95328300E+00 | .69294900E+00 | .57179800E+00 | .69864100E+00 |
| .50415600E+00 | .73595000E-01 | .17125500E+00 | .64882000E-01 |
| .17431000E-01 | .36488500E+00 | .94795800E+00 | .42380000E+00 |
| .26654600E+00 | .26213300E+00 | .11284400E+00 | .78320500E+00 |
| .39993900E+00 | .58564900E+00 | .25185200E+00 | .27591100E+00 |
| .94104600E+00 | .28074800E+00 | .32591800E+00 | .15973100E+00 |
| .78830500E+00 | .41774200E+00 | .67098000E+00 | .81747600E+00 |
| .21515500E+00 | .19194200E+00 | .99797600E+00 | .75696000E+00 |
| .87003100E+00 | .92366200E+00 | .39284300E+00 | .61099400E+00 |
| .77637300E+00 | .58214000E-01 | .31651900E+00 | .13739200E+00 |

NUMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES (CONT.)

| | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| .33261700E+00 | .16591100E+00 | .60494000E+00 | .21896600E+00 |
| .31220100E+00 | .94206400E+00 | .46904600E+00 | .86352700E+00 |
| .86356200E+00 | .20698700E+00 | .49477200E+00 | .20389000E+00 |
| .51013800E+00 | .90599300E+00 | .64305700E+00 | .49786600E+00 |
| .15036600E+00 | .10939200E+00 | .24983800E+00 | .12826700E+00 |
| .57684000E-01 | .12499000E-01 | .26052000E-01 | .60290700E+00 |
| .88052900E+00 | .93562500E+00 | .57638000E-01 | .55459800E+00 |
| .64234000E+00 | .32408300E+00 | .80553200E+00 | .74115200E+00 |
| .74155200E+00 | .74818600E+00 | .10567300E+00 | .45382000E-01 |
| .95160500E+00 | .90324600E+00 | .16899700E+00 | .47510000E+00 |
| .42093500E+00 | .60957500E+00 | .58144200E+00 | .16311800E+00 |
| .67297900E+00 | .81248700E+00 | .30394600E+00 | .36725000E+00 |
| .60617600E+00 | .58229300E+00 | .67244500E+00 | .47030800E+00 |
| .49396300E+00 | .11430500E+00 | .39787900E+00 | .98010400E+00 |
| .98477700E+00 | .72883800E+00 | .56618300E+00 | .52945100E+00 |
| .10205700E+00 | .87120200E+00 | .63829600E+00 | .87616200E+00 |
| .24423800E+00 | .11171200E+00 | .45015500E+00 | .90304800E+00 |
| .18475900E+00 | .14567800E+00 | .21269800E+00 | .61792200E+00 |
| .72058000E-01 | .79341300E+00 | .51186200E+00 | .15359700E+00 |
| .42957100E+00 | .23100000E-03 | .30858400E+00 | .76788500E+00 |
| .15573700E+00 | .83644300E+00 | .93880300E+00 | .84359900E+00 |
| .52399300E+00 | .49736200E+00 | .11345500E+00 | .88855200E+00 |
| .18277500E+00 | .30330100E+00 | .91847800E+00 | .5355500E+00 |
| .15552300E+00 | .69957200E+00 | .81481000E+00 | .54242100E+00 |
| .84067300E+00 | .25648700E+00 | .63838800E+00 | .79196400E+00 |
| .11663000E-01 | .66935900E+00 | .60014900E+00 | .29199400E+00 |
| .81693100E+00 | .75850100E+00 | .28603200E+00 | .17532500E+00 |
| .77991300E+00 | .46922500E+00 | .65697300E+00 | .69977000E+00 |
| .79904700E+00 | .87184300E+00 | .48910000E-01 | .24814000E+00 |
| .14777200E+00 | .16166900E+00 | .17278100E+00 | .32824900E+00 |
| .47452400E+00 | .65901400E+00 | .11452300E+00 | .57290800E+00 |
| .80274000E+00 | .80919100E+00 | .33507300E+00 | .73993100E+00 |
| .53085900E+00 | .18251200E+00 | .67037000E+00 | .71213000E+00 |
| .43231800E+00 | .47429100E+00 | .33135000E+00 | .49731600E+00 |
| .65555400E+00 | .50483900E+00 | .90395200E+00 | .22830400E+00 |
| .72400500E+00 | .21946900E+00 | .34911200E+00 | .16290500E+00 |
| .53610800E+00 | .68849400E+00 | .27680000E-02 | .68393100E+00 |
| .36530100E+00 | .10722500E+00 | .57585700E+00 | .29919600E+00 |
| .86002200E+00 | .79597700E+00 | .15431800E+00 | .64151200E+00 |
| .43707000E-01 | .20006000E+00 | .19908700E+00 | .46869100E+00 |
| .31479500E+00 | .88978800E+00 | .54610300E+00 | .66354600E+00 |
| .44672200E+00 | .56047200E+00 | .40630100E+00 | .23388900E+00 |
| .58792700E+00 | .32427000E-01 | .36562200E+00 | .31253200E+00 |
| .26184700E+00 | .25096300E+00 | .38500000E+00 | .15729000E+00 |
| .36691900E+00 | .28639400E+00 | .80037500E+00 | .15097200E+00 |
| .17658000E+00 | .33403200E+00 | .32268300E+00 | .80139400E+00 |
| .33927000E+00 | .71419000E+00 | .37863000E-01 | .74136500E+00 |
| .87842400E+00 | .87217900E+00 | .40685100E+00 | .72870100E+00 |
| .19248000E+00 | .37831300E+00 | .26558500E+00 | .64621200E+00 |
| .54876000E-01 | .92790400E+00 | .82500300E+00 | .50171100E+00 |

ANEXO II

Neste programa a variável duplamente indexada $K(L, M)$, representa o número de vezes que o dígito $L(L=0, 1, \dots, 9)$ ocorre na coluna $M(m=1, \dots, 6)$.

A contagem dos dígitos de cada número foi feita permutando esses dígitos circularmente e estudando sempre o algarismo das décimas.

CONTAR

```

5  SFILE ALEA5/ALEA6
7  DIMENSION K (10, 6), L (10)
9  Q = 0
10 INPUT, N
15 DO 25 M = 1, 6
16 DO 27 L = 1, 10
19 27 K (L, M) = 0
20 25
30 DO 1 J = 1, N
40 READ (1), U
50 DO 40 M = 1, 6
60 20 U = U * 10
70 I = INTF (U)
80 19 IF (I - 1) 2, 3, 4
90 4 IF (I - 3) 5, 6, 7
100 7 IF (I - 5) 8, 9, 10
110 10 IF (I - 7) 11, 12, 13
120 13 IF (I - 9) 14, 15, 16
130 2 K (1, M) = K (1, M) + 1
140 GO TO 16
150 3 K (2, M) = K (2, M) + 1
160 GO TO 16
170 5 K (3, M) = K (3, M) + 1
180 GO TO 16
190 6 K (4, M) = K (4, M) + 1
200 GO TO 16
210 8 K (5, M) = K (5, M) + 1
220 GO TO 16
230 9 K (6, M) = K (6, M) + 1
240 GO TO 16
250 11 K (7, M) = K (7, M) + 1
260 GO TO 16
270 12 K (8, M) = K (8, M) + 1
280 GO TO 16
290 14 K (9, M) = K (9, M) + 1
295 GO TO 16
300 15 K (10, M) = K (10, M) + 1

```

```

320 16 S = INTF (U) * 10 ↑ (- 6)
330 P = U + S
340 U = P - INTF (P)
350 40
360 1
365 PRINT, ↑ ↑ ↑
370 PRINT, α FREQUENCIA DOS DIGITOS.
380 PRINT, ↑ ↑
390 PRINT, α 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.
400 PRINT, ↑ ↑
410 DO 35 M = 1, 6
420 PRINT 37, (K (L, M), L = 1, 10)
425 PRINT, ↑
430 35
440 PRINT, ↑
450 DO 70 I = 1, 10
455 S = 0
460 DO 80 M = 1, 6
470 80 S = S + K (I, M)
480 70 L (I) = S
490 PRINT 37, (L (I), I = 1, 10)
500 PRINT, ↑ ↑ ↑ ↑
510 PRINT, α TESTES DE FREQUENCIA.
520 PRINT, ↑ ↑
530 DO 50 M = 1, 6
535 V = 0
540 DO 60 LL = 1, 10
550 X = (K (LL, M) - 100.2) ↑ 2
560 V = V + X
570 60
580 PRINT, «QUI QUADRADO», V/100.2
590 PRINT, ↑
600 50
610 PRINT, ↑ ↑
620 DO 90 I = 1, 10
630 Y = (L (I) - 601.2) ↑ 2
640 Q = Q + Y
650 90
670 PRINT, «QUI QUADRADO», Q/601.2
690 37 FORMAT (10 (2X, 14))
700 STOP

```

ANEXO III

Nas tabelas que a seguir se apresentam, a leitura dos números é sempre feita por linhas, i. e.,

$$r_1 = .39716237E-01,$$

$$r_2 = - .37520631E-01, \dots$$

na 1.^a tabela.

COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO EMPÍRICOS [N.º UNIFORMES]

| | | | |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| .39716237E-01 | -.37520631E-01 | -.14278973E-01 | -.51366374E-01 |
| -.38276593E-02 | .50278832E-02 | -.31362432E-01 | -.75269564E-02 |
| .55162760E-02 | -.14652047E-02 | -.59629254E-02 | .46685247E-01 |
| -.44001854E-01 | -.78604741E-02 | -.14549770E-01 | -.78328886E-02 |
| .43103396E-01 | -.44799081E-01 | .39915299E-01 | .34807469E-01 |
| -.29518931E-01 | -.95203409E-02 | .24378856E-01 | -.18254022E-01 |
| .49493122E-01 | -.28119958E-01 | -.57350242E-01 | -.18143435E-01 |
| -.18636305E-02 | -.43167027E-01 | .38122191E-01 | .25005224E-01 |
| -.70880197E-01 | .27800557E-02 | -.35195327E-01 | .34162372E-02 |
| .54008788E-01 | .81378899E-02 | -.36441621E-01 | -.51526461E-02 |
| .40162168E-01 | -.51273360E-03 | -.45907196E-02 | -.17583007E-01 |
| -.58788644E-01 | .54901591E-02 | -.89574805E-02 | .57818301E-01 |
| .81034515E-02 | .13157109E-02 | .32882353E-01 | -.32691065E-01 |
| .55943098E-01 | .74237673E-01 | -.29974260E-01 | -.65222459E-01 |
| .13558032E-01 | .31074892E-01 | -.50403607E-01 | .34352235E-01 |
| -.40402867E-01 | -.16979240E-01 | -.37197400E-01 | -.92601633E-01 |
| -.30364538E-01 | .25413590E-01 | -.32988916E-01 | -.23314680E-01 |
| -.40117023E-01 | -.15152792E-01 | -.25052091E-01 | .71562759E-02 |
| -.12613589E-01 | -.25807022E-01 | -.26928818E-01 | .53904271E-01 |
| .56114232E-01 | -.33127109E-01 | -.34813190E-01 | .87896002E-02 |
| -.43546931E-01 | .37833895E-02 | .11855627E-01 | -.26749605E-01 |
| .13948195E-01 | -.59401114E-01 | -.21685085E-01 | -.45517783E-01 |
| .35551980E-01 | .26650203E-01 | .44808407E-01 | .30007034E-01 |
| -.44152991E-01 | .10180996E-01 | .56545116E-01 | -.35689394E-01 |
| -.40320672E-02 | .63253680E-02 | .27206145E-01 | .17240293E-01 |
| .21555290E-01 | -.65422632E-02 | .24461743E-01 | .12739765E-02 |
| .22679474E-01 | .17383817E-01 | .10193614E-01 | -.11694853E-02 |
| -.24375632E-01 | -.94847944E-02 | .37623204E-01 | -.28798489E-01 |
| -.25974666E-01 | -.14541170E-01 | .61688433E-02 | -.27919295E-01 |
| -.22474481E-01 | .21841405E-01 | -.86520803E-02 | -.55333710E-02 |
| -.27492415E-01 | -.24906595E-01 | -.23561762E-01 | -.37669711E-03 |
| -.34527169E-01 | .19692103E-01 | .50267455E-01 | .55179917E-01 |
| -.20366777E-01 | .47730238E-01 | -.83348805E-02 | .16840481E-02 |
| .36228038E-01 | -.50363799E-01 | .26111527E-01 | .37212356E-01 |
| .23148490E-01 | .50843176E-01 | -.39904864E-02 | -.17209551E-01 |
| -.12994048E-02 | -.13076359E-01 | -.25623914E-02 | -.45562759E-01 |
| -.28340921E-01 | .57351637E-02 | .50805807E-01 | .73036060E-01 |
| .40040227E-01 | -.58861986E-01 | -.11308594E-01 | .11788390E-01 |
| .80205007E-01 | -.26388910E-01 | .58485853E-01 | -.11043586E-01 |
| .70476594E-02 | .68815285E-02 | -.18848295E-01 | .14270510E-01 |
| -.43717935E-01 | -.13218234E-01 | -.56533284E-01 | .11594233E-01 |
| .45204617E-01 | -.25313351E-01 | -.45806892E-01 | .24957839E-01 |
| -.85916492E-02 | -.47695165E-01 | -.12528483E-01 | .56865038E-01 |
| -.18214528E-01 | -.14246370E-01 | .45737427E-02 | .21733114E-01 |
| .42837650E-01 | .38782057E-02 | -.54587379E-02 | .39616509E-03 |
| 0-.12290766E-01 | .61716270E-03 | -.22356494E-01 | .21782523E-01 |
| .18099975E-01 | -.37605808E-01 | .30878903E-01 | .16616189E-01 |
| -.32770016E-01 | .1727851E-01 | -.64739214E-02 | -.17742202E-01 |
| .28373677E-01 | -.77637282E-02 | -.20726680E-01 | .27054743E-01 |
| .12719703E-01 | -.38415461E-01 | .17869359E-01 | -.17701056E-02 |
| -.42618106E-01 | .55885717E-02 | .34341384E-01 | .31403043E-01 |
| -.24931244E-01 | -.11901336E-01 | -.26645156E-02 | .27919980E-01 |
| .16786102E-01 | -.51901793E-01 | -.64658579E-01 | -.19231077E-01 |
| .65445298E-01 | -.29676430E-01 | -.98341601E-02 | -.34145652E-01 |
| -.51378351E-01 | .33365864E-02 | .12973097E-01 | -.21554560E-01 |
| -.33248553E-01 | -.18102043E-01 | -.17856383E-01 | -.10465274E-01 |
| .78208990E-01 | -.27106243E-01 | .11551550E-01 | -.29543251E-01 |
| .51297760E-01 | .28974268E-01 | .30905898E-01 | -.54492633E-01 |
| -.12098545E-01 | -.20648670E-01 | -.31674073E-01 | -.14645691E-01 |
| .24377981E-01 | .47538865E-02 | -.42395362E-01 | .17866005E-01 |
| .354424709E-01 | -.67060023E-01 | -.41200070E-01 | .16684785E-01 |
| .64481639E-01 | -.21231787E-01 | .16151218E-01 | .48703330E-01 |
| -.25152566E-01 | .32288869E-01 | .00000000E+00 | .00000000E+00 |

| | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| .12862962E+01 | -.11535091E+01 | -.41933743E+00 | -.15908768E+01 |
| -.89194954E-01 | .19053932E+00 | -.95898013E+00 | -.20605061E+00 |
| .20596697E+00 | -.14568299E-01 | -.15664504E+00 | .15064375E+01 |
| -.13582419E+01 | -.21658597E+00 | -.42789151E+00 | -.21571458E+00 |
| .13932918E+01 | -.13834252E+01 | .12925843E+01 | .11312350E+01 |
| -.90074651E+00 | -.26901685E+00 | .80180964E+00 | -.54490371E+00 |
| .15951344E+01 | -.85655491E+00 | -.17798989E+01 | -.54141040E+00 |
| -.27154014E-01 | -.13318709E+01 | .12359425E+01 | .82159573E+00 |
| -.22072914E+01 | .11953358E+00 | -.10800560E+01 | .13962966E+00 |
| .17377780E+01 | .25878011E+00 | -.11194247E+01 | -.13104945E+00 |
| .13003825E+01 | .15518940E-01 | -.11329897E+00 | -.52370725E+00 |
| -.18253360E+01 | .20514197E+00 | -.25123887E+00 | .18581152E+01 |
| .28769225E+00 | .73276959E-01 | .10704233E+01 | -.10009498E+01 |
| .17988802E+01 | .23767803E+01 | -.91512971E+00 | -.20285713E+01 |
| .45999485E+00 | .10133281E+01 | -.15604644E+01 | .11168548E+01 |
| -.12445549E+01 | -.56781232E+00 | -.11432987E+01 | -.28934413E+01 |
| -.92745806E+00 | .83449546E+00 | -.10103586E+01 | -.70476285E+00 |
| -.12355255E+01 | -.44694016E+00 | -.75964524E+00 | .25777228E+00 |
| -.36673027E+00 | -.78349246E+00 | -.81892845E+00 | .17344764E+01 |
| .18042860E+01 | -.10147238E+01 | -.10679848E+01 | .30936673E+00 |
| -.13438715E+01 | .15122749E+00 | .40621824E+00 | -.81326736E+00 |
| .47231957E+00 | -.18446631E+01 | -.65328621E+00 | -.14061280E+01 |
| .11547531E+01 | .87355833E+00 | .14471508E+01 | .97959598E+00 |
| -.13630161E+01 | .35331900E+00 | .18178971E+01 | -.10956628E+01 |
| -.95651915E-01 | .23152569E+00 | .89111979E+00 | .57631236E+00 |
| .71261712E+00 | -.17494552E+00 | .80442792E+00 | .71958627E-01 |
| .74812853E+00 | .58084610E+00 | .35371759E+00 | -.52269341E-02 |
| -.73827684E+00 | -.26789599E+00 | .12201802E+01 | -.87798874E+00 |
| -.78878809E+00 | -.42761987E+00 | .22658066E+00 | -.85021621E+00 |
| -.67822212E+00 | .72165511E+00 | -.24159171E+00 | -.14307602E+00 |
| -.83673167E+00 | -.75504924E+00 | -.71256783E+00 | .19816143E-01 |
| -.10589498E+01 | .65376162E+00 | .16195945E+01 | .17747723E+01 |
| -.61164268E+00 | .15394473E+01 | -.23157180E+00 | .84912220E-01 |
| .11761088E+01 | -.15592069E+01 | .85654231E+00 | .12072020E+01 |
| .76294411E+00 | .16377807E+01 | -.94338437E-01 | -.51191031E+00 |
| -.93309105E-02 | -.38134851E+00 | -.49226901E-01 | -.14075487E+01 |
| -.86353479E+00 | .21288133E+00 | .16366003E+01 | .23388231E+01 |
| .12965306E+01 | -.18276528E+01 | -.32550727E+00 | .40409433E+00 |
| .25652801E+01 | -.80187349E+00 | .18792023E+01 | -.31713605E+00 |
| .25434124E+00 | .24909340E+00 | -.56367596E+00 | .48250105E+00 |
| -.13492733E+01 | -.38583016E+00 | -.17540924E+01 | .39796119E+00 |
| .14596665E+01 | -.76789809E+00 | -.14152605E+01 | .82009892E+00 |
| -.23968217E+00 | -.14749084E+01 | -.36404189E+00 | .18280029E+01 |
| -.54365613E+00 | -.41830754E+00 | .17619365E+00 | .71823433E+00 |
| .13848973E+01 | .15422261E+00 | -.14071846E+00 | .44229786E-01 |
| -.35653273E+00 | .51210793E-01 | -.67449508E+00 | .71979508E+00 |
| .60346852E+00 | -.11561997E+01 | .10071371E+01 | .55659778E+00 |
| -.10034437E+01 | .57727765E+00 | -.17278669E+00 | -.52873601E+00 |
| .92800050E+00 | -.21352990E+00 | -.62301153E+00 | .88633718E+00 |
| .43351321E+00 | -.11817755E+01 | .59618367E+00 | -.24199692E-01 |
| -.13145312E+01 | .20825069E+00 | .11165121E+01 | .10236940E+01 |
| -.75582784E+00 | -.34423116E+00 | -.52452860E-01 | .91366884E+00 |
| .56196510E+00 | -.16077900E+01 | -.20107591E+01 | -.57576749E+00 |
| .20990414E+01 | -.90572169E+00 | -.27893196E+00 | -.10468982E+01 |
| -.15912552E+01 | .13711360E+00 | .44151757E+00 | -.64916310E+00 |
| -.10185601E+01 | -.54010290E+00 | -.53234282E+00 | -.29886796E+00 |
| .25022267E+01 | -.82453306E+00 | .39661289E+00 | .96494572E+00 |
| .16521404E+01 | .94697233E+00 | .10079898E+01 | -.16896310E+01 |
| -.35046073E+00 | -.62054728E+00 | -.96882445E+00 | -.43092154E+00 |
| .80178201E+00 | .18188415E+00 | -.13074951E+01 | .59607772E+00 |
| .11507328E+01 | -.20866174E+01 | -.12697374E+01 | .55876463E+00 |
| .20686008E+01 | -.63869714E+00 | .54190999E+00 | .15W01860E+01 |
| -.76281911E+00 | .10516759E+01 | .00000000E+00 | .00000000E+00 |

TESTE DE CORRELAÇÃO SERIAL (ANDERSON) [N.º UNIFORMES]

| | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| .12670467E+01 | -.11541821E+01 | -.41958211E+00 | -.15918051E+01 |
| -.89247007E-01 | .19065049E+00 | -.95953969E+00 | -.20617084E+00 |
| .20608714E+00 | -.14576810E-01 | -.15673645E+00 | .15073165E+01 |
| -.13590344E+01 | -.21671235E+00 | -.42814119E+00 | -.21584045E+00 |
| .13941046E+01 | -.13842324E+01 | .12933385E+01 | .11318951E+01 |
| -.90127209E+00 | -.26917583E+00 | .80227747E+00 | -.54522166E+00 |
| .15960651E+01 | -.85705470E+00 | -.17609375E+01 | -.54172631E+00 |
| -.27169867E-01 | -.13326480E+01 | .12366636E+01 | .82207510E+00 |
| -.22085793E+01 | .11960331E+00 | -.10806862E+01 | .13971113E+00 |
| .17387920E+01 | .28894859E+00 | -.11200778E+01 | -.13112592E+00 |
| .13011413E+01 | .15527985E-01 | -.11336508E+00 | -.52401283E+00 |
| -.18264011E+01 | .20526166E+00 | -.25138548E+00 | .18591994E+01 |
| .28786010E+00 | .73319704E-01 | .10710478E+01 | -.10015339E+01 |
| -.17999298E+01 | .23781671E+01 | -.91566368E+00 | -.20297550E+01 |
| .46026323E+00 | .10139194E+01 | -.15613749E+01 | .11175065E+01 |
| -.12452811E+01 | -.56814364E+00 | -.11439658E+01 | -.28951296E+01 |
| -.92799922E+00 | .83498236E+00 | -.10109481E+01 | -.70517408E+00 |
| -.12362464E+01 | -.44720095E+00 | -.76008849E+00 | .25792268E+00 |
| -.36694426E+00 | -.78394962E+00 | -.81940628E+00 | .17354885E+01 |
| .18053388E+01 | -.10153159E+01 | -.10686079E+01 | .30954723E+00 |
| -.13446556E+01 | .15131572E+00 | .40645525E+00 | -.81374189E+00 |
| .47259514E+00 | -.18457595E+01 | -.65366740E+00 | -.14069484E+01 |
| .11554269E+01 | .87406803E+00 | .14479951E+01 | .98016754E+00 |
| -.13638114E+01 | .35352514E+00 | .18189578E+01 | -.10963022E+01 |
| -.95707735E+00 | .23166077E+00 | .89163973E+00 | .57664861E+00 |
| .71303290E+00 | -.17504761E+00 | .80489728E+00 | .72000603E-01 |
| .74856504E+00 | .58118500E+00 | .35392396E+00 | -.52299937E-02 |
| -.73870762E+00 | -.26805231E+00 | -.12208921E+01 | -.87850104E+00 |
| -.78924834E+00 | -.42786939E+00 | .22671286E+00 | -.85071231E+00 |
| -.67861786E+00 | .72207617E+00 | -.24173268E+00 | -.14315951E+00 |
| -.83721989E+00 | -.75548980E+00 | -.71298361E+00 | .19827696E-01 |
| -.10595677E+01 | .65414307E+00 | .16205395E+01 | .17758079E+01 |
| -.61199957E+00 | .15403456E+01 | -.23170693E+00 | .84961754E-01 |
| .11767950E+01 | -.15601167E+01 | .85704207E+00 | .12079064E+01 |
| .76338926E+00 | .16387363E+01 | -.94393491E-01 | -.51220901E+00 |
| -.93363647E-02 | -.38157103E+00 | -.49255633E-01 | -.14083700E+01 |
| -.86403866E+00 | .21300553E+00 | .16375552E+01 | .23401877E+01 |
| .12972871E+01 | -.18287192E+01 | -.32569720E+00 | .40433010E+00 |
| .25667769E+01 | -.80234138E+00 | .18602987E+01 | -.31732110E+00 |
| .25448964E+00 | .24923873E+00 | -.56400486E+00 | .48278257E+00 |
| -.13500606E+01 | -.38605530E+00 | -.17551158E+01 | .39819338E+00 |
| .14605181E+01 | -.76834616E+00 | -.14160863E+01 | .82057742E+00 |
| -.23982263E+00 | -.14757690E+01 | -.36425431E+00 | .18290695E+01 |
| -.54397335E+00 | -.41855162E+00 | .17629645E+00 | .71865340E+00 |
| .13857053E+01 | .15431258E+00 | -.14080057E+00 | .44255583E-01 |
| -.35674077E+00 | .51240663E-01 | -.67488864E+00 | .72021506E+00 |
| .60382062E+00 | -.11568743E+01 | .10077247E+01 | .55692253E+00 |
| -.10040292E+01 | .57761447E+00 | -.17288752E+00 | -.52904452E+00 |
| .92854196E+00 | -.21365450E+00 | -.62337505E+00 | .88685433E+00 |
| .43376614E+00 | -.11824651E+01 | .59653152E+00 | -.24213822E-01 |
| -.13152982E+01 | .20837219E+00 | .11171635E+01 | .10242912E+01 |
| -.75626886E+00 | -.34443202E+00 | -.52483475E-01 | .91420193E+00 |
| .56229299E+00 | -.16087281E+01 | -.20119324E+01 | -.57610345E+00 |
| .21002662E+01 | -.90625017E+00 | -.27909472E+00 | -.10475091E+01 |
| -.15921836E+01 | .13719360E+00 | .44177518E+00 | -.64954188E+00 |
| -.10191544E+01 | -.54041805E+00 | -.53265344E+00 | -.29904236E+00 |
| .25036887E+01 | -.82501417E+00 | .39684430E+00 | .96550873E+00 |
| .16531044E+01 | .94752485E+00 | .10085779E+01 | -.16906169E+01 |
| -.35066523E+00 | -.62090936E+00 | -.96938975E+00 | -.43117298E+00 |
| .80224983E+00 | .18199026E+00 | -.13082560E+01 | .59642551E+00 |
| N11514042E+01 | -.20878349E+01 | -.12704783E+01 | .55909064E+00 |
| .20698078E+01 | -.63933998E+00 | .54222618E+00 | .15711021E+01 |
| -.76326421E+00 | .10522896E+01 | .00000000E+00 | .00000000E+00 |

| | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| .89095124E-02 | .19616429E-01 | -.16153633E-01 | -.18258266E-01 |
| -.24942084E-01 | -.79862726E-01 | -.19892684E-01 | -.17446274E-01 |
| -.32420809E-01 | -.18796278E-03 | -.41248343E-01 | -.77122693E-02 |
| -.15475685E-01 | -.40560535E-01 | -.43040611E-01 | -.25745921E-01 |
| .43024238E-01 | .47812469E-02 | -.38465657E-01 | .50725813E-01 |
| .41599573E-01 | .94891923E-02 | -.92766706E-02 | .34288967E-02 |
| -.55772734E-03 | .47221914E-01 | -.38237730E-01 | -.56262436E-01 |
| -.36257947E-02 | .11877855E-01 | -.73243302E-02 | -.23150529E-01 |
| .55250396E-02 | -.15471476E-01 | -.26080549E-01 | .30130764E-01 |
| .19643511E-01 | .16902417E-01 | -.28367685E-01 | .83571686E-02 |
| -.24973658E-01 | .27626664E-02 | -.45189735E-01 | -.12431368E-01 |
| .33295596E-01 | -.25696922E-01 | -.45489237E-02 | .75026201E-02 |
| -.40725756E-02 | .65272572E-02 | -.94954418E-02 | -.10123453E-05 |
| .28689418E-01 | .10907710E-01 | .24324046E-01 | -.27149170E-01 |
| -.42999215E-01 | -.50956988E-02 | -.26086901E-01 | .50852200E-01 |
| -.91091069E-02 | .16127663E-01 | .40695285E-01 | -.27632453E-01 |
| .10734420E-01 | -.14321402E-01 | -.61574017E-01 | -.36477206E-01 |
| .19704895E-02 | .69866028E-02 | .24848490E-02 | -.25865369E-01 |
| .73304757E-01 | .54480608E-01 | .14980670E-01 | .17017822E-01 |
| .39228545E-01 | -.55521030E-02 | -.14749085E-01 | -.64475725E-02 |
| -.45640089E-01 | -.15067577E-01 | .14630413E-01 | -.50237051E-01 |
| .43219498E-01 | -.28096485E-03 | .17331654E-02 | -.21388663E-02 |
| .32797757E-01 | -.12331713E-01 | -.10992615E-01 | -.52172528E-01 |
| .94938109E-02 | -.47775454E-01 | .25606184E-02 | .16145521E-01 |
| .27240163E-01 | .21360987E-01 | .35815996E-01 | .37321817E-01 |
| .18393468E-02 | .43774911E-02 | -.11852341E-01 | -.46928546E-01 |
| -.35946279E-01 | -.59830041E-02 | .45067905E-02 | -.16519234E-02 |
| .38763565E-01 | -.13867774E-01 | .29716208E-01 | -.74990451E-01 |
| -.16129938E-01 | .92454204E-02 | .20106593E-02 | -.16509234E-01 |
| .55612731E-02 | .57176063E-02 | .21121063E-01 | -.44889100E-01 |
| -.31019697E-01 | .27740374E-01 | -.25939390E-01 | .28916666E-01 |
| -.81137329E-02 | .14079509E-01 | -.12658594E-01 | .17627992E-01 |
| -.26716228E-01 | -.26119574E-02 | .23374445E-01 | -.30288191E-01 |
| .25954002E-02 | -.30419639E-01 | .51176198E-02 | .63951049E-01 |
| -.24701044E-01 | -.10370819E-01 | -.55786369E-01 | -.47363415E-01 |
| -.67603001E-01 | -.42158146E-01 | .56972081E-01 | -.47360630E-01 |
| .20231184E-01 | -.57777230E-03 | .48704454E-01 | .21213731E-01 |
| .16715455E-01 | -.11423923E-01 | .15385442E-01 | .18377327E-01 |
| .42130543E-01 | -.55670571E-02 | -.59625323E-01 | .21539754E-01 |
| -.26651662E-01 | -.59981627E-01 | .38575664E-01 | .19905966E-01 |
| .26187456E-01 | .21714877E-01 | -.32831194E-01 | .42503548E-01 |
| -.44248273E-01 | .32921125E-01 | -.50741771E-01 | -.23250572E-01 |
| .29689165E-01 | .62203552E-02 | -.19290277E-02 | .14980056E-01 |
| .12333195E-01 | .22047569E-01 | -.25738064E-01 | -.36784665E-02 |
| .29350351E-01 | .35089733E-02 | -.30534552E-01 | .51034583E-02 |
| -.72974076E-01 | .24825328E-01 | -.34756816E-01 | .11657936E-01 |
| .99465119E-02 | .11513402E-01 | .16854086E-01 | .18845638E-01 |
| -.28039368E-01 | .81649609E-02 | .28017641E-01 | -.18471003E-01 |
| .31050955E-01 | .62015425E-02 | .28799635E-03 | .33674120E-01 |
| -.13989339E-01 | -.91301257E-02 | -.25602794E-01 | .34000674E-01 |
| .24487658E-01 | -.49942377E-01 | -.38437244E-01 | .87500573E-02 |
| -.74134777E-01 | .23244484E-01 | .21471881E-01 | .37335638E-01 |
| .19825146E-01 | -.20317527E-01 | -.29288278E-01 | -.57669854E-01 |
| -.42268546E-01 | -.36188611E-02 | -.20621762E-01 | .61951140E-02 |
| .29289374E-03 | -.22773818E-01 | .23362130E-01 | .31455236E-01 |
| -.45373955E-02 | -.24080076E-01 | -.31470401E-01 | .55504133E-01 |
| .80708735E-02 | .22252965E-01 | .24330684E-01 | -.59757718E-02 |
| .68304677E-02 | -.19874987E-01 | -.53595475E-02 | .16260218E-01 |
| .17334539E-01 | -.23525431E-01 | -.47848293E-01 | -.14854088E-01 |
| .40158973E-01 | .10820017E-01 | .35572676E-02 | -.16138879E-01 |
| -.23058968E-01 | -.25516235E-02 | -.31798865E-01 | .38906642E-01 |
| .55735328E-01 | -.50738185E-02 | -.10717301E-01 | .20899804E-01 |
| .64050530E-01 | .30510741E-01 | .00000000E+00 | .00000000E+00 |

| | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| .31334530E+00 | .65176790E+00 | -.47884680E+00 | -.54536970E+00 |
| -.75663081E+00 | -.24925541E+01 | -.59703014E+00 | -.51976760E+00 |
| -.99301722E+00 | .25793688E-01 | -.12720366E+01 | -.21203345E+00 |
| -.45741832E+00 | -.12502964E+01 | -.13286863E+01 | -.78203839E+00 |
| .13916384E+01 | .18285971E+00 | -.11840819E+01 | .16350686E+01 |
| .13466078E+01 | .33166774E+00 | -.26148081E+00 | .14011483E+00 |
| .14106226E-01 | .15243179E+01 | -.11768776E+01 | -.17465998E+01 |
| -.82868782E-01 | .40716823E+00 | -.19977153E+00 | -.70000363E+00 |
| .20636940E+00 | -.45728527E+00 | -.79261526E+00 | .98410340E+00 |
| .65262391E+00 | .56598381E+00 | -.86490668E+00 | .29588690E+00 |
| -.75762880E+00 | .11905673E+00 | -.13966155E+01 | -.36119402E+00 |
| .10841369E+01 | -.78048963E+00 | -.11204690E+00 | .26887647E+00 |
| -.96990564E-01 | .23804734E+00 | -.26839570E+00 | .31766785E-01 |
| .93854556E+00 | .37650404E+00 | .80056555E+00 | -.82639206E+00 |
| -.13273779E+01 | -.12932929E+00 | -.79281602E+00 | .16390634E+01 |
| -.25618448E+00 | .54149552E+00 | .13180252E+01 | -.84166760E+00 |
| .37102671E+00 | -.42093393E+00 | -.19144874E+01 | -.11212312E+01 |
| .94017719E-01 | .25256627E+00 | .11027552E+00 | -.78581388E+00 |
| .23487404E+01 | .17537496E+01 | .50524152E+00 | .56963153E+00 |
| .12716647E+01 | -.14375524E+00 | -.43445205E+00 | -.17205911E+00 |
| -.14108502E+01 | -.44451891E+00 | .49417067E+00 | -.15561503E+01 |
| .13978101E+01 | .22854093E-01 | .86516417E-01 | -.35870174E-01 |
| .10684013E+01 | -.35804413E+00 | -.31571813E+00 | -.16173266E+01 |
| .33181372E+00 | -.14783445E+01 | .11267042E+00 | .54205997E+00 |
| .89273772E+00 | .70690961E+00 | .11638014E+01 | .12113971E+01 |
| .89872582E-01 | .17009786E+00 | -.34289222E+00 | -.14515756E+01 |
| -.11044497E+01 | -.15737510E+00 | .17418474E+00 | -.20478958E-01 |
| .12569677E+01 | -.40659570E+00 | .97100019E+00 | -.23385520E+00 |
| -.47809784E+00 | .32396263E+00 | .95287401E-01 | -.49008658E+00 |
| .20751466E+00 | .21245602E+00 | .69932615E+00 | -.13871131E+01 |
| -.94873739E+00 | .90854833E+00 | -.78815352E+00 | .94572838E+00 |
| -.22472285E+00 | .47675777E+00 | -.36837613E+00 | .58891767E+00 |
| -.81270770E+00 | -.50823567E-01 | .77055069E+00 | -.92560975E+00 |
| .11376980E+00 | -.92976455E+00 | .19349174E+00 | .20530898E+01 |
| -.74901206E+00 | -.29606447E+00 | -.17315523E+01 | -.14653209E+01 |
| -.21050506E+01 | -.13007935E+01 | .18324997E+01 | -.14652328E+01 |
| .67119898E+00 | .13472648E-01 | .15711778E+01 | .70225518E+00 |
| .56007435E+00 | -.32935084E+00 | .51803551E+00 | .61260254E+00 |
| .13633906E+01 | -.14422791E+00 | -.18528934E+01 | .71256008E+00 |
| -.81066689E+00 | -.18641554E+01 | .12510285E+01 | .66091953E+00 |
| .85946392E+00 | .71809532E+00 | -.10059886E+01 | .13751805E+01 |
| -.13668579E+01 | .10723007E+01 | -.15721034E+01 | -.70316578E+00 |
| .97014542E+00 | .22834683E+00 | -.29237628E-01 | .50522213E+00 |
| .42156054E+00 | .72861101E+00 | -.78179002E+00 | -.84533624E-01 |
| .95943623E+00 | .14264588E+00 | -.93339669E+00 | .19304412E+00 |
| -.22748187E+01 | .81640999E+00 | -.10668534E+01 | .40021706E+00 |
| .34612263E+00 | .39564866E+00 | .56445618E+00 | .62740485E+00 |
| -.85452930E+00 | .28981163E+00 | .91731215E+00 | -.55209388E+00 |
| .10131886E+01 | .22775220E+00 | .40837732E-01 | .10961012E+01 |
| -.41043810E+00 | -.25684884E+00 | -.77751444E+00 | .11064229E+01 |
| .80573696E+00 | -.15468363E+01 | -.11831838E+01 | .30852652E+00 |
| -.23115060E+01 | .76644291E+00 | .71041474E+00 | .12118340E+01 |
| .65836498E+00 | -.61045852E+00 | -.89400465E+00 | -.17910852E+01 |
| -.13049152E+01 | -.82649625E-01 | -.62007536E+00 | .22754901E+00 |
| .40992528E-01 | -.68809661E+00 | .77016144E+00 | .10259671E+01 |
| -.11168252E+00 | -.72938460E+00 | -.96297686E+00 | .17861010E+01 |
| .28683773E+00 | .73510313E+00 | .80077534E+00 | -.15714650E+00 |
| .24763117E+00 | -.59647077E+00 | -.13766898E+00 | .54568528E+00 |
| .57964227E+00 | -.71185346E+00 | -.14806468E+01 | -.43777099E+00 |
| .13010735E+01 | .37373225E+00 | .14417236E+00 | -.47838045E+00 |
| -.69710958E+00 | -.48916540E-01 | -.97335891E+00 | .12614900E+01 |
| .17934086E+01 | -.12863770E+00 | -.30701604E+00 | .69233261E+00 |
| .20562342E+01 | .99611367E+00 | .00000000E+00 | .00000000E+00 |

| | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| .31333730E+00 | .65175125E+00 | -.47883457E+00 | -.54535577E+00 |
| -.75661148E+00 | -.24924904E+01 | -.59701489E+00 | -.51975432E+00 |
| -.99299185E+00 | .25793029E-01 | -.12720041E+01 | -.21202803E+00 |
| -.45740664E+00 | -.12502645E+01 | -.13286524E+01 | -.78201841E+00 |
| .13916028E+01 | .18285504E+00 | -.11840516E+01 | .16350268E+01 |
| .13465734E+01 | .33165926E+00 | -.26147413E+00 | .14011125E+00 |
| .14105866E-01 | .15242789E+01 | -.11768475E+01 | -.17465551E+01 |
| -.82866665E-01 | .40715783E+00 | -.19976643E+00 | -.69998575E+00 |
| .20636413E+00 | -.45727359E+00 | -.79259501E+00 | .98407826E+00 |
| .65260724E+00 | .56596935E+00 | -.86488459E+00 | .29587935E+00 |
| -.75760945E+00 | .11905369E+00 | -.13965798E+01 | -.36118479E+00 |
| .10841092E+01 | -.78046969E+00 | -.11204404E+00 | .26886960E+00 |
| -.96988086E-01 | .23804126E+00 | -.26838884E+00 | .31765974E-01 |
| .93852158E+00 | .37649443E+00 | .80054510E+00 | .82637095E+00 |
| -.13273440E+01 | -.12932598E+00 | -.79279577E+00 | .16390215E+01 |
| -.25617794E+00 | .54148168E+00 | .13179915E+01 | -.84164610E+00 |
| .37101723E+00 | -.42092318E+00 | -.19144385E+01 | -.11212026E+01 |
| .94015317E-01 | .25255981E+00 | .11027270E+00 | -.78579381E+00 |
| .23486804E+01 | .17537048E+01 | .50522861E+00 | .56961698E+00 |
| .12716322E+01 | -.14375157E+00 | -.43444095E+00 | -.17205471E+00 |
| -.14108142E+01 | -.44450756E+00 | .49415805E+00 | -.15561105E+01 |
| .13977744E+01 | .22853509E-01 | .86514207E-01 | -.35869258E-01 |
| .10683740E+01 | -.35803498E+00 | -.31571007E+00 | -.16172853E+01 |
| .33180525E+00 | -.14783068E+01 | .11266755E+00 | .54204613E+00 |
| .89271491E+00 | .70689155E+00 | .11637716E+01 | .12113662E+01 |
| .89870286E-01 | .17009352E+00 | -.34288346E+00 | -.14515385E+01 |
| -.11044215E+01 | -.15737108E+00 | .17418029E+00 | -.20478435E-01 |
| .12569356E+01 | -.40658531E+00 | .97097539E+00 | -.23384923E+01 |
| -.47808563E+00 | .32395436E+00 | .95284967E-01 | -.49007406E+00 |
| .20750936E+00 | .21245059E+00 | .69930829E+00 | -.13870776E+01 |
| -.94871316E+00 | .90852512E+00 | -.78813339E+00 | .94570423E+00 |
| -.22471711E+00 | .47674560E+00 | -.36836672E+00 | .58890263E+00 |
| -.81268694E+00 | -.50622268E-01 | .77053100E+00 | -.92558610E+00 |
| .11376690E+00 | -.92974080E+00 | .19348679E+00 | .20530374E+01 |
| -.74899293E+00 | -.29605691E+00 | -.17315081E+01 | -.14652834E+01 |
| -.21049968E+01 | -.13007603E+01 | .18324529E+01 | -.14651954E+01 |
| .67118183E+00 | .13472304E-01 | .15711376E+01 | .70223724E+00 |
| .56006004E+00 | -.32934243E+00 | .51802227E+00 | .61258689E+00 |
| .13633558E+01 | -.14422422E+00 | -.18528460E+01 | .71254187E+00 |
| -.81064618E+00 | -.18641077E+01 | .12509966E+01 | .66090264E+00 |
| .85944196E+00 | .71807697E+00 | -.10059629E+01 | .13751454E+00 |
| -.13668230E+01 | .10722733E+01 | -.15720633E+01 | -.70314782E+00 |
| .97012064E+00 | .22834100E+00 | -.29236881E-01 | .50520923E+00 |
| .42154977E+00 | .72859240E+00 | -.78177005E+00 | -.84531465E-01 |
| .95941172E+00 | .14264224E+00 | -.93337284E+00 | .19303919E+00 |
| -.22747606E+01 | .81638913E+00 | -.10668261E+01 | .40020684E+00 |
| .34611378E+00 | .39563855E+00 | .56444176E+00 | .62738883E+00 |
| -.85450747E+00 | .28980423E+00 | .91728872E+00 | -.55207978E+00 |
| .10131628E+01 | .22774638E+00 | .40836689E-01 | .10960732E+01 |
| -.41042762E+00 | -.25684228E+00 | -.77749458E+00 | .11063947E+01 |
| .80571637E+00 | -.15467968E+01 | -.11831536E+01 | .30851864E+00 |
| -.23114469E+01 | .76642333E+00 | .71039659E+00 | .12118030E+01 |
| .65834816E+00 | -.61044293E+00 | -.89398181E+00 | -.17910394E+01 |
| -.13048818E+01 | -.82647514E-01 | -.62005952E+00 | .22754320E+00 |
| .40991481E-01 | -.68807903E+00 | .77014177E+00 | .10259409E+01 |
| -.11167967E+00 | -.72936597E+00 | -.96295226E+00 | .17860554E+01 |
| .28683040E+00 | .73508436E+00 | .80075489E+00 | -.15714249E+00 |
| .24762485E+00 | -.59645554E+00 | -.13766546E+00 | .54567134E+00 |
| .57962746E+00 | -.71183527E+00 | -.14806090E+01 | -.43775980E+00 |
| .13010403E+01 | .37372270E+00 | .14416868E+00 | -.47836823E+00 |
| -.69709177E+00 | -.48915291E-01 | -.97333404E+00 | .12614578E+01 |
| .17933628E+01 | -.12863441E+00 | -.30700820E+00 | .69231492E+00 |
| .20561817E+01 | .99608823E+00 | .00000000E+00 | .00000000E+00 |

REFERÊNCIAS

- [1] ANDERSON, R. L. (1942) — Distribution of the serial correlation coefficient, *Ann. Math. Stat.*, vol. 13.
- [2] ANDERSON, T. W. & DARLING, D. A. (1952) — Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes, *Ann. Math. Stat.*, vol. 23.
- [3] FISZ, MARIEK (1963) — *Probability Theory and Mathematical Statistics*, 3.^a ed., J. Wiley & Sons, inc., New York.
- [4] GUMBEL, E. J. (1958) — *Statistics of extremes*, Columbia Univ. Press, New York.
- [5] JOHNSON, N. & KORZ, S. (1970) — *Continuous univariate distributions-2*, Houghton Mifflin Company, Boston.
- [6] MISES, R. VON (1947) — Differentiable statistical functions, *Ann. Math. Stat.*, vol. 18.
- [7] MOSHMAN, J. (1967) — Random number generation (in *Mathematical methods for digital computers*), vol. II, Wiley & Sons.
- [8] SHERMAN, B. (1950) — A random variable related to the spacing of sample values, *Ann. Math. Stat.*, vol. 21.
- [9] SMIRNOV, N. V. (1936) — Sur la distribution de W^2 , *C. R. Acad. Scienc. de Paris*, vol. 202.
- [10] TIAGO DE OLIVEIRA, J. (1963) — Estatística de densidades-resultados assintóticos, *Rev. Fac. Ciênc. Lisboa*, 2.^a série A, vol. IX, fasc. 1.
- [11] TOCHER, K. D. (1969) — *The Art of Simulation*, 3.^a ed., English Univ. Press.
- [12] WALD, A. & WOLWOWITZ, J. (1943) — An exact test for randomness in the non-parametric case based on serial correlation, *Ann. Math. Stat.*, vol. 14.
- [13] WRIGHT, E. M. & HARDY, G. H. (1960) — *The theory of numbers*, 4.^a ed., Oxf. Univ. Press.

Informática Superior

por J. Marques Henriques

Faculdade de Ciências, Universidade de Luanda

Dada a relativa novidade da introdução de cadeiras avançadas de Informática nos currículos das nossas licenciaturas em Ciências Matemáticas, pareceu-nos de interesse apresentar o programa da cadeira de Informática Superior, do 5.º ano da licenciatura (ramo único de especialização científica) da Universidade de Luanda.

Este programa foi, originariamente, concebido para uma cadeira anual em que a par de uma certa ênfase em aspectos práticos fossem também discutidos múltiplos aspectos relacionados com outras cadeiras de matemáticas puras e aplicadas.

Contudo, no ano lectivo de 1973-74 a cadeira só pôde ser leccionada no 1.º semestre, o que obrigou a sérios condicionalismos e amputações. Em particular não foram focados os Capítulos 3 e 7 do programa e só superficialmente os Capítulos 4 e 5; também o Capítulo 6 não foi dado com a extensão inicialmente prevista.

Um outro condicionalismo resultou do facto de os conhecimentos prévios dos alunos serem constituídos, na generalidade, apenas por rudimentos da linguagem FORTRAN, ministrados nas cadeiras de Análise Numérica e Computação.

Da bibliografia mencionada foram utilizadas mais frequentemente as obras [1], [5], [8], [9], [16] e [17], em particular a última. Os pontos de exame relativos a esta cadeira poderão ser consultados na Gazeta de Matemática, na secção respectiva.

PROGRAMA

0. Revisão e ampliação dos conhecimentos de computadores e programação, nomeadamente no que se refere à estrutura dos modernos computadores, com discussão sumária da arquitectura e linguagem simbólica dos computadores disponíveis.

1. Linguagens de programação e seus tradutores. Descrições formais das linguagens de programação. Características funcionais e técnicas das linguagens automáticas, enquadradas num contexto de uma apresentação das mais importantes para fins científicos, com uma discussão dos seus aspectos mais característicos.

2. Linguagens algorítmicas (1.ª parte): APL. Estudo detalhado desta linguagem em especial do subconjunto disponível nos computadores existentes. Ênfase especial na simulação de linguagens e sistemas, com vista às suas ulteriores aplicações para a escrita de compiladores.

3. Linguagens algorítmicas (2.ª parte): PL/I. Estudo detalhado desta linguagem em especial do subconjunto disponível nos computadores existentes. Ênfase especial nas aplicações desta linguagem para o tratamento de informações não numéricas, acesso a ficheiros e tratamento de interrupções.

4. Tradutores. Modelos e técnicas de escrita de compiladores. Determinação de estrutura sintática e análise léxica. Compiladores incrementais, interpretadores e emuladores.

5. Funções recursivas. Definições e exemplos. Funções primitivas recursivas. Recursividade parcial. Computabilidade à Turing; equivalência da recursividade e da computabilidade à Turing. Aplicações da recursividade à análise matemática e à teoria dos números. Função de Ackermann.

6. Teoria dos autómatos e linguagens formais. Fundamentos matemáticos de relevo para a teoria dos autómatos. Linguagens de estrutura de frases. Linguagens regulares. Autómatos finitos e semigrupos gerados por autómatos finitos. Linguagens de contexto livre. Máquinas de Turing. Linguagens de contexto sensitivo. Sistemas de Thue.

7. Sistemas de exploração. Componentes dos sistemas de exploração. Optimização de recursos. Multiprogramação. Tempo repartido. Memórias virtuais e sistemas de memórias virtuais; algoritmos de substituição de páginas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARRON, D. (1970). *Recursive Techniques in Programming*. American Elsevier, New York.
- [2] BERTHET, L. (1973). *Le Language PL/I*. Dunod et Cie, Paris, 2ème édition.
- [3] BRAFFORD, P. and HIRSCHBERG, D. (1963). *Computer Programming and Formal Systems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- [4] DONOVAN, JOHN J. (1972). *Systems Programming*. McGraw-Hill Book Co., New York-London.
- [5] FALKOFF, A. and IVEYSON, KENNETH E. (1968). *APL/360 User's Manual*. IBM, Yorktown Heights.
- [6] FIKE, C. T. (1970). *PL/I for Scientific Programmers*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [7] FLORES, IVAN (1971). *Job Control Language and File Definition*. John Wiley and Sons, New York-London.
- [8] GRIES, DAVID (1971). *Compiler Construction for Digital Computers*. John Wiley and Sons, New York-London.
- [9] HELLERMAN, HERB (1973). *Digital Computer System Principles*. McGraw-Hill Book Co, New York-London, 2nd edition.
- [10] HOPGOOD, F. R. A. (1969). *Compiling Techniques*. American Elsevier, New York.
- [11] IVEYSON, KENNETH E. (1962). *A Programming Language*. John Wiley and Sons, New York.
- [12] KATZAN, HENRY (1970). *APL Programming and Computer Techniques*. Van Nostrand Reinhold, Co., New York.
- [13] KNUTH, DONALD E. (1968). *The Art of Computer Programming, Vol 1: Fundamental Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts-London.
- [14] ——— (1969). *The Art of Computer Programming, Vol. 2: Semi-numerical Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts-London.
- [15] MINSKY, MARVIN L. (1967). *Finite and Infinite Machines*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey-London.
- [16] PACITTI, TÉRCIO (1971). *FORTTRAN-Monitor Princípios*. Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 3.ª edição.
- [17] ROBINET, B. (1972). *Le Language APL*. Hermann et Cie., Paris.
- [18] SAMMET, JEAN (1969). *Programming Languages: History and Fundamentals*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

CIÊNCIA E SOCIEDADE

A «Gazeta de Matemática» inclui, a seguir, nas secções Ciência e Sociedade e Antologia, duas conferências da autoria do Professor Bento de Jesus Caraça «Galileo Galilei—Valor científico e valor moral da sua obra» e «A cultura integral do indivíduo—Problema central do nosso tempo», respectivamente. Estas duas conferências foram proferidas no curto intervalo de um mês durante o conturbado (nacional e internacionalmente) ano de 1933. «Viviam-se nessa altura horas inquietas e fecundas» escreveu o Prof. Caraça ao referir-se a essa época, e a sua resposta de homem e cidadão consciente como poucos, encontra-se esquematizada nas duas conferências que se apresentam, verdadeiras jóias do panorama cultural português dos anos trinta. Ao publicá-las, a «Gazeta de Matemática» sente-se participar na tarefa de «despertar a alma colectiva das massas» ao mesmo tempo que homenageia a memória de um dos seus fundadores e mais eminentes colaboradores.

Galileo Galilei valor científico e valor moral da sua obra(*)

por Bento de Jesus Caraça

MINHAS SENHORAS E MEUS SENHORES:

No dia 22 de Junho de 1633, faz hoje trezentos anos, quem pudesse ter penetrado numa certa sala do convento de Minerva, em Roma, teria assistido a uma cena singular.

Um velho de setenta anos ouvia, perante um tribunal constituído por dez cardeais, a leitura deste documento estranho:

«Nós (seguem os nomes e os títulos dos cardeais) pela misericórdia de Deus, Cardeais da Santa Igreja Romana, delegados especial-

mente como Inquisidores gerais da Santa Sé Apostólica, contra a maldade herética, da República Cristã.

«Sendo certo que tu, Galileo, filho de Vincenzo Galilei, florentino, de setenta anos de idade, foste denunciado em 1615 a este Santo Ofício por teres como verdadeira a falsa doutrina, ensinada por alguns, que o Sol seja centro do mundo e imóvel, e que a Terra se mova, ainda de movimento diurno; por teres

(*) Conferência realizada na Universidade Popular Portuguesa em 22 de Junho de 1933.

discípulos, aos quais ensinavas a mesma doutrina; por, acerca da mesma, teres correspondência com alguns matemáticos da Germânia; por teres dado à estampa algumas cartas intituladas «Das manchas Solares», nas quais explicavas a mesma doutrina como verdadeira; por, às objecções que às vezes te faziam tiradas da Sagrada Escritura, responderes interpretando a dita Escritura, conforme o teu sentido;

«E tendo sucessivamente sido apresentada cópia dum manuscrito, sob a forma de carta, a qual se dizia ter sido escrita por ti, a um tal teu discípulo, e nessa, seguindo a posição de Copérnico, se conterem várias proposições contra o verdadeiro sentido e autoridade da Sagrada Escritura;

«Querendo por isto este Sacro Tribunal dar providências contra a desordem e o dano que de aqui provinha e andava crescendo com prejuízo da Santa Fé;

«Por ordem de Nosso Senhor e dos Eminentíssimos e Reverendíssimos Senhores Cardeais desta Suprema e Universal Inquisição, foram, pelos Qualificadores Teólogos, qualificadas as duas proposições da estabilidade do Sol e do movimento da Terra do seguinte modo:

«Que o Sol seja centro do mundo e imóvel de movimento local, é proposição absurda e falsa em filosofia, e formalmente herética, por ser expressamente contrária à Sagrada Escritura;

«Que a Terra não seja centro do mundo nem imóvel, mas que se mova, ainda de movimento diurno, é igualmente proposição absurda e falsa em filosofia, e considerada em teologia *ad minus* errónea em Fé.

«Mas querendo-se naquele tempo proceder para contigo com benignidade, foi decretado na Sacra Congregação reunida diante de Nosso Senhor a 25 de Fevereiro de 1616, que o Eminentíssimo Cardeal Bellarmino te ordenasse que tu devessees totalmente abandonar a dita opinião falsa e que, recusando

tu tal fazeres, te fosse pelo Comissário do Santo Officio intimado que deixasses a dita doutrina e que não pudesses ensiná-la a outros, nem defendê-la, nem tratar dela, e que, se não te conformasses com a intimação, fosses encarcerado;

«E em execução do mesmo decreto, no dia seguinte, no mesmo palácio e na presença do acima dito Eminentíssimo Senhor Cardeal Bellarmino, depois de teres sido pelo mesmo Senhor Cardeal benignamente avisado e admoestado, te foi pelo Comissário do Santo Officio daquele tempo intimado, com notário e testemunhas, que totalmente devessees abandonar a dita falsa opinião e que no futuro a não pudesses sustentar, nem defender, nem ensinar de qualquer maneira, nem pela voz nem pelo escrito, e tendo tu prometido obedecer, foste mandado em paz.

«E a fim que se tolhesse inteiramente tão perniciosa doutrina e não andasse caminhando mais, com grave prejuízo da verdade católica, saiu um decreto da Sacra Congregação do Índice, por meio do qual foram prohibidos os livros que tratam de tal doutrina e foi esta declarada falsa e totalmente contrária à Sagrada e Divina Escritura.

«E tendo ultimamente aparecido aqui um livro, estampado em Florença no ano passado, cuja inscrição mostrava que fosses tu o seu autor, dizendo o título: «Diálogos de Galileo Galilei acerca dos dois Máximos Sistemas do Mundo, Ptolomaico e Copernicano»; e informada depois a Sacra Congregação de que, com a impressão do dito livro, cada vez mais tomava pé e se disseminava a falsa opinião do movimento da Terra e da estabilidade do Sol; foi o dito livro diligentemente considerado e nele achada expressamente a transgressão do preceito que te foi intimado, tendo tu no mesmo defendido a opinião já condenada e na tua face por tal declarada, acontecendo que tu, no dito livro, procuras persuadir que a deixas como indecisa e expressamente provável, o que também é

erro gravíssimo, não podendo de nenhum modo ser provável uma opinião declarada e definida por contrária à Escritura Divina.

«Por isso, por nossa ordem foste chamado a este Santo Officio, no qual, com o teu juramento, examinado, reconheceste o livro como por ti composto e dado à estampa. Confessaste que, cerca dez ou doze anos depois de te ter sido feita a intimação como acima, começaste a escrever o dito livro; que pediste autorização para o estampar sem porém significares àqueles que te deram semelhante faculdade que te tinha sido ordenado não sustentar, defender, nem ensinar de qualquer modo tal doutrina.

«Confessaste igualmente...

«E parecendo a nós que tu não tinhas dito inteiramente a verdade acerca da tua intenção, julgamos ser necessário proceder a um rigoroso exame de ti; no qual, sem porém prejuízo algum das coisas por ti confessadas e contra ti deduzidas como acima acerca da tua intenção, respondeste catòlicamente.

«Portanto, vistos e maduramente considerados os méritos desta tua causa, com as supraditas tuas confissões e escusas e quanto de razão se devia ver e considerar, chegámos contra ti à infra-escrita sentença:

«Invocando o Santíssimo Nome de Nosso Senhor Jesus Cristo e gloriosíssima Mãe sempre Virgem Maria;

«Por esta nossa definitiva sentença, a qual, reunidos *pro tribunali*, de conselho e parecer dos Reverendíssimos Mestres de Sacra Teologia e Doutores *unius utriusque iuris*, nossos consultores, proferimos nestes escritos, na causa e causas pendentes ante nós entre o Magnífico Carlo Sinceri, doutor *unius utriusque iuris*, Procurador Fiscal deste Santo Officio, duma parte, e tu, Galileo Galilei ante-dito, réu aqui presente, inquirido, processado e confesso como acima, da outra parte:

«Dizemos, pronunciamos, sentenciamos e

declaramos que tu, Galileo supra-dito, pelas coisas deduzidas no processo e por ti confessadas como acima, te tornaste veementemente suspeito de heresia, a saber, por teres sustentado e criado doutrina falsa e contrária às Sagradas e Divinas Escrituras, que o Sol seja centro da Terra e que não se mova de oriente para ocidente e que a Terra se mova e não seja centro do mundo, e que se possa ter e defender por provável uma opinião depois de ter sido declarada e definida por contrária à Sagrada Escritura;

«E conseqüentemente estás incurso em todas as censuras e penas dos sagrados cânones e outras constituições gerais e particulares, contra semelhantes delinquentes impostas e promulgadas.

«Das quais nos apraz absolver-te desde que primeiro, com coração sincero e fé não fingida, diante de nós, abjures, maldigas e detestes os supra-ditas erros e heresias e qualquer outro erro e heresia contrária à Igreja Católica e Apostólica, pelo modo e forma que por nós te será dada.

«E, a fim que este teu grave e pernicioso erro e transgressão não fique de todo impune, e sejas mais cauto para o futuro e exemplo a outros para que se abstenham de semelhantes delitos, ordenamos que, por público édito, seja proibido o livro dos «Diálogos de Galileo Galilei».

«Te condenamos ao cárcere formal neste Santo Officio ao nosso arbítrio; e por penitência salutar te impomos que pelos três próximos anos digas uma vez por semana os sete salmos penitenciais, reservando para nós a faculdade de moderar, mudar ou levantar, no todo ou em parte, as supra-ditas penas e penitências.

«E assim dizemos, pronunciamos, sentenciamos, declaramos, ordenamos e reservamos, nisto e em tudo o mais, do melhor modo e forma que de razão podemos e devemos.» (Seguem as assinaturas de sete dos dez cardeais).

Seguidamente o acusado ajoelhou e, com as mãos sobre os Evangelhos, leu em voz alta este outro documento, para esse fim expressamente confeccionado por mão alheia:

«Eu, Galileo Galilei, filho do falecido Vincenzo Galilei, de Florença, de minha idade setenta anos, constituído pessoalmente em juízo e ajoelhado diante de vós, Eminentíssimos e Reverendíssimos Cardeais, inquisidores gerais em toda a República Cristã contra a maldade herética;

«Tendo diante dos meus olhos os sacrosantos Evangelhos, os quais toco com as minhas próprias mãos, juro que sempre creí, creio agora, e com a ajuda de Deus creerei para o futuro, tudo aquilo que afirma, prega e ensina a Santa Igreja Católica Apostólica.

«Mas visto que, por este Santo Offício, por haver eu (depois de me ter sido intimado juridicamente pelo mesmo que abandonasse totalmente a falsa opinião que o Sol seja centro do mundo e que não se mova e que a que a Terra não seja centro do mundo e que se mova, e que não pudesse afirmar, defender nem ensinar de qualquer modo, pela voz ou por escrito, a dita falsa doutrina, e depois de me ter sido notificado que a dita doutrina é contrária à Sgrada Escritura) escrito e dado à estampa um livro no qual trato a mesma doutrina já condenada e empregado argumentos com muita eficácia a favor dela, sem dar nenhuma solução, fui julgado veementemente suspeito de heresia, por haver tido e crido que o Sol seja centro do mundo e imóvel, e a Terra não seja centro e se mova;

«Portanto, querendo eu afastar da mente das Eminências Veneráveis e de todo o fiel cristão esta veemente suspeição, justamente de mim concebida, com coração sincero e fé não fingida, abjuro, amaldiçoó e detesto os supraditos erros e heresias, e geralmente qualquer outro erro, heresia e seita contrária à Santa Igreja; e juro que para o futuro

não mais direi nem afirmarei, pela voz ou pelo escrito, coisas tais que por elas se possa haver de mim semelhante suspeição; mas, se conhecer algum herético, ou que seja suspeito de heresia, o denunciarei a este Santo Offício, ou ao Inquisidor ou Ordinário do lugar onde me encontrar.

«Juro ainda e prometo cumprir e observar inteiramente todas as penitências que me foram impostas, ou vierem a ser, por este Santo Offício;

«E, no caso de transgredir alguma das ditas promessas ou juramentos, o que Deus não queira, submeto-me a todas as penas e castigos pelos sagrados cânones e outras constituições gerais e particulares contra semelhantes delinquentes impostas e promulgadas.

«Assim Deus me ajude e estes seus santos Evangelhos, que toco com as minhas próprias mãos.

«Eu, Galileo Galilei, abjurei, jurei, prometi e me obriguei como acima; e, em fé do verdadeiro, pela minha própria mão subscrevi a presente cédula da minha abjuração e a recitei de palavra em palavra, em Roma, no convento de Minerva, neste dia 22 de Junho de 1633.»

Quando terminou a leitura deste acto de abjuração, acabara de viver-se um dos momentos mais dramáticos da história da ciência e da história do homem no mundo ocidental.

O choque violento entre duas ideias exigira, na sua fase culminante, o esmagamento, o rebaixamento aviltante, muito para além das fronteiras do humano, de um homem de ciência, um gigante cuja obra se levanta, aos nossos olhos de homens do século xx, como um monumento luminoso na linha incerta que separa duas épocas.

O que é que produziu uma tão grande brutalidade na luta, e por que razão encerramos uma congregação, órgão da Igreja Católica, obrigando um homem a tão desumana humilhação?

Vamos procurar responder a estas perguntas, pondo em evidência a verdadeira significação, do duplo ponto de vista moral e científico, dos factos que acabamos de recordar.

Frans Masereel, o poderoso artista criador de imagens, condensou, numa sucessão emocionante de gravuras, a história da *Ideia*. História comovente, que começa com a criação duma divindade nua, saída bruscamente da cabeça do homem, num lampejo de inspiração, e a acompanha nas várias fases da sua vida entre os outros homens, desde o momento em que ela, desembaraçando-se das vestes com que a multidão quer encobrir as suas formas, se lança numa correria louca pelo mundo, até àquele outro momento em que, voltando para junto do homem que a criou, o encontra exaltado na criação de nova divindade. Momento trágico esse, na vida das *Ideias*, momento que decide do seu destino. Umam morrem, enquanto se realiza triunfalmente a criação de outras — e é esse o desfecho pessimista que nos apresenta Masereel; outras porém resistem a essa prova suprema e continuam a sua carreira no mundo. De que lutas é cheia essa carreira! Quantos obstáculos há que vencer, de quantas ciladas que fugir, quantas tentativas de assassinato que evitar!

São essas ideias imortais que fazem o progresso da humanidade, e é na força com que se batem por elas que reside o valor moral dos homens e das gerações.

Mas há ainda outra categoria de ideias — aquelas que, não tendo poder de vitalidade que lhes permita viver após a criação de outras, conseguem no entanto sobreviver-se a si próprias, transformando-se em fantasmas do que eram. Esse grupo das ideias fantasmas é aquele em cujo nome se fere a luta contra as ideias criadoras. A sua frente está virada para o passado, e é para o *seu* passado que querem levar as sociedades,

esperando assim reencontrar o ambiente que lhes restitua a vida que perderam.

Que homem há que não tenha notado à sua volta o efeito paralizador das ideias fantasmas e as não tenha sentido a batalhar mesmo dentro de si próprio, procurando subjugá-lo, arrastá-lo para aquelas regiões sombrias onde não chega a luz fulgente das ideias imortais?

Que homem há, mesmo entre os de espírito mais aberto e mais livre, que não tenha sentido essa luta, mormente neste atormentado começo do século xx, em que um monstro na agonia, para se dar a ilusão de que ainda tem direito a viver, faz apelo a um imenso cortejo de espectros, de ideias fantasmas, para que elas lhe propiciem e justifiquem todos os arrancos senis, todas as vilanias?

E quantas vezes, na luta cruenta e desleal que esse cortejo promove, julgam as ideias fantasmas certa a vitória, porque conseguiram espetar as adversárias nas pontas das baionetas, ou amarrá-las ao potro da tortura!

Pretensão falaz! Para as proscritas abrem-se de par em par as portas das consciências, e daí, reconfortadas por um calor vivificante, surgem depois, mais belas no esplendor da sua nudez, mais fortes no seu poder criador.

É a história duma dessas ideias imortais — a ideia do heliocentrismo — que desejo traçar aqui, procurando acompanhá-la, e de caminho a algumas outras, a cuja sorte ela esteve ligada, nas fases mais significativas da sua vida.

Nessa jornada, encontraremos o episódio do julgamento de Galileo e veremos, depois de termos projectado sobre ele a luz que ponha em relevo a sua significação real, como ele representa um dos momentos de maior importância da história da humanidade no Ocidente.

E por este exemplo se verá quanto é errónea a opinião, infelizmente muito generalizada ainda hoje, de que a história da ciência é qualquer coisa de seco, que só aos profissionais interessa. A culpa, bem sei,

é dos próprios profissionais, que, na sua maioria, a não sabem viver e não têm olhos para ver, ou alma para sentir, esta verdade elementar: que a história da ciência, mesmo a do mais abstracto dos seus ramos, é uma história essencialmente, profundamente humana.

Quando surgiu a primeira ideia sobre a constituição do mundo? Impossível de assinalar para esse facto uma data pela qual ele se possa fixar, ao menos aproximadamente, no decurso dos tempos.

Mas o que pode afirmar-se, sem receio de errar, é que ele é tão velho como a existência do homem como ser pensante e consciente. Uma ideia sobre o sistema do mundo apareceu no dia em que alguém, curvando-se ansioso sobre o mistério da natureza, procurou projectar nesse abismo um raio de luz da sua inteligência e arrancar de lá um pouco de verdade.

Essa primeira ideia foi-se aperfeiçoando, corrigindo, modificando, associando a outras, até constituir-se um sistema mais ou menos coerente, mais ou menos adequado à interpretação dos factos observados.

Teríamos, portanto, para sermos completos na história, que remontar até alguns milénios antes de Cristo e estudar o grau de conhecimento dos diferentes povos até às mais recuadas épocas de que possuímos hoje documentos.

Nessa peregrinação, teríamos que interrogar os povos que se sucederam na Mesopotâmia, a região maravilhosa que, no dizer de Hendrik Van Loon, constitui a marmitta de fusão do mundo antigo, teríamos que debruçar-nos sobre a velha civilização do vale do Nilo, bem como, em épocas mais recentes, sobre aquela que floresceu em Creta, e, em cada uma das etapas desta jornada, haveria que analisar cuidadosamente as formas das instituições, estar atentos a todos os pro-

cessos de transformação, entrar nos templos e nos palácios dos reis.

Imaginemos realizada esta grande viagem pelo passado, e suponhamo-nos chegados, af pelo século VI antes de Cristo, a uma cidade da costa da Ásia Menor, no litoral do Mar Egeu — a cidade de Mileto.

O que nos ensinam a nós, homens de hoje, que estamos reduzidos a julgar pelos vestígios, bem raros, do que foram essas formas de civilização do mundo antigo, o que nos ensinam os testemunhos e documentos colhidos durante a fadigosa jornada? Bem pouca coisa, infelizmente. Não encontramos, na nossa sacola de viandante, mais do que fragmentos esparsos, que mal podem permitir uma reconstrução aproximada do que foram essas civilizações desaparecidas, reconstrução sempre sujeita a ser, em fraca ou forte medida, alterada quando um novo documento vem lançar um pouco mais de luz sobre a noite, em que a custo encontramos o caminho.

Os elementos de que dispomos só nos permitem considerar como adquirido um resultado: é que a ciência, como ciência, só mais tarde começou a constituir-se; o que até aqui se nos deparou foram dados empíricos directamente ligados à técnica e adquiridos em subordinação a ela, ou então formas mais elaboradas de conhecimento, mas encorporadas em sistemas religiosos, ou, quando muito, mal libertas deles.

Ora o pensamento só se não renega a si mesmo quando é livre; desde que preocupações de outra natureza intervêm a limitar-lhe o âmbito de acção, o edificio por ele construído está viciado nos seus alicerces. E que pode esperar-se dos frutos duma árvore cujas raízes estão atacadas dum mal orgânico?

Se vos trouxe até à cidade de Mileto é porque precisamente aí, e na época apontada, pelo século VI antes de Cristo, começa a desenhar-se um esforço de emancipação do pensamento criador. O homem vira-se para a natureza e procura arrancar-lhe os segre-

dos, com este objectivo: alcançar a íntima razão de ser das coisas, conhecer por conhecer, atingir a verdade. Abre-se uma era nova na História, caracterizada pela actividade racional do espirito.

Por que motivo foi a cidade de Mileto aquela em que despontou esta nova época do mundo ocidental?

A explicação é-nos dada pela sua situação geográfica e comercial privilegiada, que fez dela o centro das relações do Mediterrâneo com a Ásia, onde se tinham desenvolvido as civilizações passadas. Estabelece-se ali o contacto entre uma civilização velha, cheia de experiência, de mitos e de tradições milenárias, mas que perdera a força criadora, e uma civilização incipiente, de destino ainda incerto, audaz e irreverente na sua juventude rica de promessas.

Por outro lado, esse povo jovem estava passando por uma profunda transformação de natureza social que tinha como características essenciais a ascensão das classes populares e o alvorecer das instituições democráticas. Tudo indicava portanto esse povo como devendo ser o herdeiro da cultura velha e o seu reelaborador em formas novas.

Foi o que efectivamente aconteceu. A semente da cultura, lançada à terra por Thales e sobretudo por Anaximandro, um gigante do pensamento, de cujo cérebro brotaram ideias ainda hoje não ultrapassadas, germinou com tal pujança, que em breve foi toda a Grécia, oriental e ocidental, tomada pela febre de saber: formam-se escolas de filósofos, a todos os dominios do conhecimento se estende o afã de investigar. Dos primeiros dados empíricos começou a surgir, por efeito da actividade racional, uma construção grandiosa que ficou como um eterno título de glória dum povo livre.

Dessa construção grandiosa, de que a crítica moderna nos proporciona hoje uma visão que há algumas dezenas de anos era impossível, eu quereria descrever, em linhas gerais,

um dos compartimentos — o que diz respeito às concepções astronómicas.

Possa a beleza do motivo animar um pouco o descolorido da narração.

Quais eram as ideias dos primeiros filósofos gregos sobre a forma da Terra e a sua posição no mundo, não se sabe ao certo. Pode contudo dizer-se que a esfericidade tinha sido admitida desde a mais alta antiguidade e que Anaximandro devia ter essa mesma opinião, se bem que alguns testemunhos levem a crer que ele julgava ter a Terra antes a forma dum cilindro de altura igual a um terço do raio. É certo ainda que Pitágoras, pouco posterior a Anaximandro, admitia, sem reservas, a esfericidade.

Quanto à posição da Terra, ambos a supunham no centro do universo e imóvel.

Na elaboração posterior das ideias, conserva-se duma maneira, pode dizer-se, constante, a esfericidade, não sucedendo já o mesmo quanto à imobilidade e colocação no cosmos. Assim, vemos aparecer com Filolao, filósofo da escola pitagórica que viveu no século V antes de Cristo, quase um século depois de Pitágoras, uma doutrina oposta — a Terra é arredada do centro do universo, onde Filolao coloca o fogo central e, ao mesmo tempo, é-lhe dado um movimento em torno desse fogo central.

Destas duas concepções opostas nascem duas novas correntes de ideias, correntes que, no seu desenvolvimento através dos tempos, tendem a afirmar um antagonismo cada vez mais agudo.

Para bem podermos apreender as várias fases desse desenvolvimento e o consequente crescimento do antagonismo, temos de remontar ainda um pouco atrás e debruçar-nos por um momento sobre um formidável manancial de ideias que exerceu uma influência poderosíssima, em sentido positivo e negativo, sobre toda a filosofia posterior.

Refiro-me à escola de Elea, da qual são

representantes principais Parménides e Zenão, cuja vida ocupa o final do século VI e o começo do V antes de Cristo.

O labor desta escola exerceu-se em primeiro lugar por uma crítica aguda das concepções das escolas de Mileto e pitagórica.

Os filósofos da primeira, a de Mileto, ao procurarem resolver o problema da natureza das coisas, tinham concebido a identidade e unidade da matéria, considerando a pluralidade, que à vista se oferece, como uma ilusão dos sentidos. As exigências da razão estabeleceram assim uma profunda harmonia invisível, uma Unidade, para além dos dados imediatos da experiência.

A escola pitagórica, trilhando a mesma via da harmonia cósmica, procurou aplicar a matemática incipiente de que dispunha ao estudo das possíveis leis universais — ideia fecunda da qual deviam resultar algumas das mais belas realizações do espírito humano. Resolveu porém de modo diferente o problema da matéria; para ela, a realidade última era constituída pelas mónadas, pontos materiais com extensão, os quais formavam como que centros nucleares à volta dos quais se condensava a primitiva substância infinita para dar origem aos corpos reais.

Os conceitos racionais da geometria não estavam ainda, na mente de Pitágoras, suficientemente elaborados; para ele, uma recta era formada pela reunião de pontos materiais, e assim a cada recta, ou segmento, vinha ligado um número — o dos seus pontos. Aritmética e geometria não estavam portanto libertas ainda, duma maneira completa, da matéria. Por outro lado, a escola pitagórica admitia, em todas as coisas, a existência duma dualidade, a acção de dois princípios opostos — bem e mal, limitado e ilimitado, ímpar e par, etc.

Pois foi precisamente sobre a não compatibilidade destas ideias fundamentais — unidade da matéria da escola de Mileto, dualidade, pontos materiais, ordem matemática do

cosmos, da escola pitagórica — que se exerceu a crítica dos filósofos eleáticos.

Parménides, o primeiro grande racionalista da história da ciência, supõe a existência duma matéria una e indivisível, impenetrável, preenchendo o espaço inteiro. Num tal espaço, assim concebido, ele não encontra motivo possível de alteração ou movimento e por isso para ele o espaço é imóvel, querendo com isto significar-se, não que ele negue o movimento dos corpos, mas sim, como opina Enríques, que ele negue o movimento absoluto por não haver, fora do espaço, nada a que o poder referir.

Foi uma ideia genial esta, a da afirmação da relatividade do movimento, ideia que não foi compreendida pelos seus contemporâneos e que só nos nossos dias encontrou plena consagração.

Zenão, discípulo de Parménides, atacou em especial a teoria das mónadas da escola pitagórica, mostrando, com os seus célebres argumentos contra o movimento, cujo significado profundo só agora está revelado, que dessa teoria resulta a impossibilidade dum móvel atingir qualquer ponto da sua trajectória. Ficava assim rejeitada, por absurda, a teoria pitagórica e afirmada a continuidade da linha.

Que consequências imediatas teve a acção dos filósofos de Elea? Foram elas de duas ordens, positiva e negativa — as primeiras, por influência directa e no mesmo sentido, as segundas, por opposição e reacção violentas.

Comecemos pelas de ordem negativa. Foram, principalmente, duas — uma, o temor, a desconfiança do conceito de infinito, cujo uso levava a conclusões tão embaraçosas como as dos paradoxos de Zenão; outra, a negação da afirmação de Parménides sobre a impossibilidade de se conceber o movimento absoluto.

Por virtude da primeira consequência, toda a filosofia grega posterior nos aparece, duma maneira geral, impregnada de finitismo, acen-

tuando, assim, certa tendência já de Pitágoras — o infinito passa a ser banido dos raciocínios construtivos, o que teve como efeito retardar certos ramos da ciência de perto de vinte séculos, questão sobremaneira interessante, mas que não posso tratar aqui.

Por virtude da segunda consequência, aparece logo, pouco depois, a escola dos atomistas (Leucippo e Demócrito, principalmente) que, estabelecendo a existência do vácuo, nele faz mover, em todas as direcções, os átomos, realidade última da matéria, os quais, pelos seus choques e consequentes agrupamentos, vêm a produzir os corpos.

E não passemos adiante sem acentuar aqui duas coisas: primeira, que o vácuo aparece precisamente para que exista alguma coisa em relação à qual se possa considerar um movimento absoluto do mundo; segunda, que a ideia genial de Demócrito de pôr no início da realidade das coisas um movimento de partículas materiais no absoluto, traz no flanco esta outra ideia, o princípio de inércia, que, vinte séculos mais tarde, havia de presidir ao levantamento do edificio da mecânica clássica.

Mas não antecipemos, e passemos agora às consequências de ordem positiva. Assinalaremos esta que principalmente nos interessa: a ideia de Parménides de que o movimento era despido de significado absoluto, implicando apenas mudanças de posição relativa, levou naturalmente a esta outra — que se pode explicar o movimento dos planetas, tanto por uma sua própria rotação em torno da Terra imóvel, como por uma rotação desta. Não havendo movimento absoluto, mas apenas relatividade dele, as duas explicações equivalem-se.

É esta a razão por que vemos aparecer, como atrás disse, num filósofo da escola pitagórica, Filolao, a hipótese da Terra girando em torno do fogo central, devendo notar-se ainda que parece que já anteriormente a Filolao, e sob a mesma influência,

Anaxágoras tinha suposto um movimento de rotação da Terra.

Seria do maior interesse o seguir, a par e passo, as correntes das duas ideias fundamentais, mobilidade e imobilidade, através das diferentes fases que o seu desenvolvimento nos apresenta; o que só numa certa medida é possível pela escassez de documentos que, desses tempos, restam. Mas aquela parcela que actualmente se considera conhecida e interpretada fornece já abundante material que permite uma reconstrução fiel. Não seguirei, por incompatível com o tempo de que disponho, essas correntes com minúcia, e vou limitar-me a apresentar as suas fases mais características.

Ocupemo-nos, primeiro, da corrente geocêntrica e da imobilidade.

Teve início, como sistema elaborado racionalmente em Pitágoras, conforme vimos. No seu sistema há oito esferas, todas com centro no centro da Terra e movendo-se em torno dum eixo que passa por esse centro. Cada uma das primeiras sete é destinada a um planeta, incluindo neste número o Sol e a Lua; exterior a estas, existe a oitava esfera, onde estão incrustadas as estrelas fixas e que limita o mundo. A necessidade da introdução de esferas especiais para cada um dos planetas resultava do facto, observado desde a mais alta antiguidade, de haver na abóbada celeste certos astros errantes, os planetas, dotados de movimentos irregulares, enquanto toda a multidão dos restantes, as estrelas fixas, é dotada dum movimento aparentemente uniforme e circular, de oriente para ocidente.

Os números que medem as distâncias de cada um dos planetas à Terra ordenam-se de modo a corresponderem aos números característicos dos acordes musicais (Pitágoras tinha estudado as relações dos comprimentos das cordas da lira e estabelecido, assim, a primeira teoria matemática da música). Deste modo, no movimento das esferas celestes existia uma música que os sentidos

não apreendem, mas que, no silêncio das noites estreladas das costas da Itália, fazia vibrar harmoniosamente a alma do matemático e do místico que era Pitágoras.

Nas elaborações posteriores do sistema geocêntrico, as coisas perdem a simplicidade sugestiva que acabamos de referir. Notam-se movimentos particulares a que estão sujeitos os planetas e que o sistema de Pitágoras não permite explicar convenientemente. Por isso, vai-se complicando o sistema e aumentando o número de esferas.

Assim, com Eudócio de Cnido (século IV antes de Cristo) esse número eleva-se já a vinte e sete — uma para as estrelas fixas, quatro para cada um dos cinco planetas conhecidos então: Mercúrio, Vénus, Marte, Júpiter, Saturno, três para o Sol e três para a Lua. O sistema de Eudócio fez escola e foi mais tarde aperfeiçoado por Calippo, que elevou a trinta e quatro o número de esferas, e por Aristóteles, que o complicou ainda mais. É claro que a elevação do número de esferas não era feita por mero capricho dos filósofos, mas sim resultante da necessidade de explicar certos movimentos, ou anomalias neles, que até aí tinham passado despercebidos.

Detenhamo-nos um pouco na descrição das ideias astronómicas de Aristóteles⁽¹⁾, pois elas interessam grandemente ao que vai seguir-se.

Faz o grande Stagirita a classificação dos movimentos em simples, que são os rectilíneos e circulares, e mistos. Em relação aos movimentos, os corpos vêm classificados em simples, aqueles que têm apenas movimentos simples, e compostos, aqueles que têm movimentos mistos.

De entre os movimentos simples, procura Aristóteles se existe algum perfeito e conclui que o é apenas o movimento circular; a linha recta, diz ele, não é perfeita, por

duas razões — não o é a recta infinita porque a infinidade não se coaduna com a perfeição (influência pitagórica); não o é a recta finita porque lhe pode ser sempre ajuntada alguma coisa. Ora, a circunferência reúne as duas características do finitismo e de nada lhe poder ser ajuntado que a acrescente; completa-se a si mesma.

Qual é o movimento característico da Terra, que a todo o momento observamos? O movimento da queda dos corpos, que é essencialmente rectilíneo; logo, na Terra dominam os movimentos imperfeitos, ao contrário do que se passa nas regiões superiores do espaço, onde observamos movimentos circulares. Cá em baixo domina a imperfeição; lá, a perfeição.

E a imperfeição terrena e a perfeição celeste não são apenas referentes aos movimentos, mas sim aos próprios corpos; é a imperfeição da matéria terrena, corruptível, que a não deixa ascender à perfeição do movimento circular; deve portanto existir outra substância, inacessível aos nossos sentidos e estranha aos compostos terrenos, substância incorruptível e que deve dominar nas altas regiões do espaço, tanto mais perfeita, tanto mais incorpórea, quanto mais afastada de nós.

Resulta daqui ainda que a Terra tem de estar necessariamente imóvel no espaço. Como poderia ela mover-se? De movimento circular? Impossível! Esse é próprio da perfeição e da incorruptibilidade. De movimento rectilíneo? É esse o único que lhe convém, mas esse não é eterno. E como poderia sê-lo num mundo finito, limitado por uma esfera? Ora, a ordem do mundo é evidentemente eterna, portanto o movimento da Terra é impossível.

Em resumo, o sistema aristotélico afirmava: imobilidade da Terra no centro do universo, limitado e esférico; corruptibilidade, da matéria da Terra; perfeição e incorruptibilidade, inalterabilidade, harmonia

(1) Aristóteles, *De Coelo*.

dos movimentos circulares nos corpos celestes.

Estava-se bem longe, como se vê, daquelas correntes de ideias saídas da crítica eleática e da escola atomista.

Foram estas concepções de Aristóteles que Galileo mais tarde teve de combater e destruir, já veremos como e porquê.

Entretanto, lancemos uma vista de olhos sobre aquela outra corrente que atrás dissemos ter tido a sua origem no conceito de relatividade do movimento e que começou com o sistema de Filolao.

Neste sistema, em volta do fogo central, colocado no centro do mundo, giravam nove astros — Terra, Lua, Sol, os cinco planetas Mercúrio, Vénus, Marte, Júpiter, Saturno, e um novo corpo, *anti-terra*, invisível para o homem por se encontrar sempre, assim como o fogo central, da parte oposta à superfície habitada. Qual o papel desta misteriosa anti-terra e a razão porque foi introduzida, não se sabe ao certo; talvez para explicar os eclipses lunares, talvez simplesmente para que o número total dos corpos celestes fosse dez, número de especiais virtudes na escola pitagórica.

Pouco depois de Filolao, aparece uma modificação do seu sistema que representa, além dum progresso astronómico sensível, um passo dado no caminho do heliocentrismo. É ele devido a Heráclides, o qual, estudando o movimento dos planetas Mercúrio e Vénus, e notando que eles como que oscilam em movimento regular à esquerda e direita do Sol, emitiu a hipótese de que eles se não movem numa esfera tendo por centro a Terra, mas sim executam revoluções em torno do Sol.

A ideia arrojada de tomar o Sol como centro de movimento de planetas encontrou a sua plena expressão em Aristarco de Samos, matemático que viveu entre os anos 310 e 230 antes de Cristo. Teve Aristarco a audácia de, pela primeira vez, tirar a Terra

da sua posição privilegiada que, apesar de tudo, mantivera nos sistemas anteriores, e dar-lhe um lugar modesto entre os outros planetas, fazendo-os girar todos em circunferências com o Sol por centro.

É portanto aqui que surge pròpriamente essa ideia luminosa que os sistemas anteriores tinham, porém, preparado.

Provou Aristarco que o seu sistema explicava os movimentos dos planetas de acordo com as observações de então; colocou a Terra entre os dois planetas Vénus e Marte e supôs que a esfera das estrelas fixas devia estar a uma distância imensamente grande de nós, para que o efeito do movimento da Terra em torno do Sol não produzisse mudanças aparentes nas posições das estrelas. Como se vê, o sistema de Aristarco é, nas suas linhas gerais, aquele que, dezoito séculos mais tarde, deveria ser construído por Copérnico.

Que opinião formaram os contemporâneos acerca deste sistema heliocêntrico? Foi considerado mais como um produto bizarro de um grande engenho do que como qualquer coisa que merecesse ser tomada a sério. E imediatamente começou uma oposição tenaz à sua expansão. O choque era demasiado rude: as concepções usuais, a autoridade de Eudócio e Aristóteles, a rotina, tudo se opunha à adopção de ideia tão revolucionária como fosse o fazer o Sol centro do movimento planetário. Contra essa ideia se levantaram, com todas as forças, os tradicionalistas que viam ameaçados os alicerces do edificio que, à sombra de autoridades passadas, comodamente habitavam. Por outro lado, a explicação física do movimento da Terra aparecia cheia de dificuldades.

Tudo isto concorreu para a rejeição pura e simples da ideia de Aristarco, que parece só ter sido adoptada por um astrónomo daquele tempo — Seleuco, e para o retorno ao geocentrismo.

Cedo se reconheceu, porém, que as esferas

concêntricas que neste sistema se estabeleciam não bastavam para explicar certos fenômenos, como fosse a diferença de velocidades do Sol ao longo da eclíptica e as diferenças de diâmetro aparente de certos planetas.

Procurou-se, por consequência, uma explicação plausível destes factos, o que foi conseguido em parte, por Hiparco, astrónomo do século II antes de Cristo.

Supôs ele que o Sol girava em torno da Terra, mas descrevendo uma circunferência que não tinha como centro a Terra — o ex-cêntrico — o que explicava as anomalias referidas, e mostrou que esse movimento era equivalente à conjugação de outros dois movimentos circulares: um, sobre uma circunferência com a Terra por centro, o deferente, e outro sobre uma circunferência com centro sobre o deferente, circunferência a que chamou epicyclo.

Mais tarde, Cláudio Ptolomeu, no século II depois de Cristo, desenvolveu e aperfeiçoou o sistema de Hiparco, complicando-o grandemente de modo a conseguir explicar os movimentos que uma observação cada vez mais cuidada ia sucessivamente revelando.

Na sua «Sintaxe Matemática», mais tarde traduzida pelos Árabes com o nome de «Almagesto», que fez autoridade em astronomia durante quinze séculos, reuniu os resultados das observações até aí colhidas e expôs o seu sistema. É ele de tendência nitidamente aristotélica e assenta sobre as bases seguintes: 1.^a — a abóboda celeste tem a forma esférica e roda como uma esfera; 2.^a — análogamente, a Terra, considerada como um todo, possui também forma esférica, que é reconhecível por meio dos sentidos; 3.^a — quanto à posição, a Terra ocupa o meio do inteiro universo e está no seu centro; 4.^a — quanto à grandeza e distância, a Terra pode considerar-se, em relação ao raio da esfera das estrelas fixas, como um ponto; 5.^a — a Terra não possui nenhum

movimento que produza alteração no lugar ocupado por ela (movimento de translacção).

Não quero passar adiante sem advertir o seguinte: tanto os modelos duma como da outra das duas correntes, cuja história procurei traçar brevemente, satisfaziam, para o seu tempo, na explicação dos movimentos planetários. Eram modelos cinemáticos que tinham a função de «explicar as aparências». Pode mesmo dizer-se que o sistema ptolomaico era mais satisfatório do que o de Aristarco, pois este não sofrera trabalho de reelaboração, ao passo que aquele fora o fruto duma longa evolução e aproveitara os resultados extraídos dum grande material de observações.

Não seriam portanto argumentos de ordem cinemática que poderiam decidir entre uma ou outra das duas correntes de que nos estamos ocupando. Os argumentos decisivos deveriam vir a ser, como foram na realidade, de ordem física.

Ptolomeu foi o último grande astrónomo da antiguidade; a seguir abre-se aquilo a que pode chamar-se a Idade Média da astronomia.

Alguns séculos antes, começara já esse período trágico em que o espírito helénico, após uma luta desesperada, veio a sucumbir e a ser banido inteiramente por muito tempo.

O transporte do centro da cultura para Alexandria, posteriormente ao desmembramento do efémero império de Alexandre, produzira um contacto mais prolongado e mais íntimo entre a ciência e a filosofia gregas e a alma oriental. E, por virtude desse contacto, perdeu-se muito daquilo que formara o belo florescimento da civilização grega, porque nela foi introduzida uma forte dose de misticismo. Não um misticismo à Pitágoras, que, crendo numa ordem matemática do cosmos, era, no fundo, um racionalista, mas um misticismo que, partindo da posição idealista de Platão, foi acentuando a sua evolução

cada vez mais no sentido do abandono da filosofia natural.

O significado da «verdade» modifica-se; não se trata já de investigar, pelo pensamento, da existência possível das leis do cosmos: trata-se de procurar, para lá do homem, qualquer coisa de absoluto e transcendendo a razão.

Os ensinamentos dos mestres alteram-se e deformam-se; não há já pitagorismo e platonismo, mas neo-pitagorismo e neo-platonismo; os motivos racionais degradam-se; a ciência rola por uma ladeira escorregadia e, ao fundo dela, não se encontram mais do que caricaturas ridículas de belas figuras passadas — uma espécie de teosofia em vez da filosofia natural, a astrologia em vez da astronomia; o filósofo cede o passo ao teurgo. Especula-se sobre o «uno» e o «infinito», mas não como motivos naturais, antes como atributos misteriosos daquilo que transcende o homem; considera-se o êxtase religioso como meio de identificação com o absoluto, que aliás se conserva sempre envolto no vago e no misterioso; ergue-se em apoteose e glorifica-se o ininteligível, o inconcebível.

Foi como se a razão, fatigada pelo esforço tão grande e tão prolongado dos séculos anteriores, se estendesse, por uns momentos, a descansar, com a intenção de logo retomar a sua marcha gloriosa para a conquista da verdade.

Mas as coisas proporcionaram-se de modo que esse descanso breve de caminheiro veio a transformar-se em sono letárgico de mais duma dezena de séculos.

Mais a Oriente, levantara-se, entretanto, um movimento de violenta negação da vida.

Motivos de ordem política, que não são para examinar aqui, fizeram que esse movimento, durante largo tempo circunscrito a pequenos círculos de iniciados, se tornasse, no começo do século IV, religião oficial dum grande império. Pela sua feição católica, isto é, de absorção universal, a nova religião

entrou em luta contra o que restava da cultura helénica e do seu ideal científico.

Ciência?, para quê? Se os filósofos e os cientistas fossem capazes de bem dirigir o homem, não teria sido necessária a vinda do Cristo salvador.

Observação da natureza?, que resultados pode ela dar? Os sentidos são imperfeitos e que interesse pode haver em examinar e estudar a matéria corruptível desta baixa existência? Não, o que é preciso é preparar a alma para entrar no reino de Cristo. O homem está atingido do mal originário, o pecado, e por isso foi precipitado neste mundo da imperfeição; que aproveite a sua existência terrena para se purificar, se aperfeiçoar e ascender depois ao mundo superior da incorruptibilidade e da imaterialidade.

A verdade?, quem for sedento dela encontra o seu manancial único e absoluto nos textos sagrados.

O movimento do cristianismo que, a princípio, fora estranho à ciência (se bem que no fundo fosse anti-científico, por ser um movimento de negação da vida) foi levado, pelas necessidades da luta contra todos os ideais que se lhe opunham, a tomar uma posição marcadamente anti-científica, não porque, repito, essa tivesse sido a sua intenção originária, mas porque era a ciência, era a razão, um dos baluartes dos seus adversários.

O anti-cientismo ficou como uma marca a fogo no corpo da cristandade; os restos, bem frágeis e bem desfigurados, de helenismo refugiam-se novamente em Atenas, para fugir à perseguição que lhes moviam em Alexandria. Por algum tempo se arrasta essa escola, até que em 529 o imperador Justiniano a encerra — a ortodoxia cristã revelava-se já incompatível com a livre ascensão filosófica.

Os doutores recomendam aos cristãos que se abstenham de ter contactos com os matemáticos e todos aqueles que professam a ciência pagã; a razão é subordinada à fé, é o «credo ut intelligam» de Santo Anselmo;

sobre a Europa estende-se uma imensa asa negra — a noite da ignorância.

Pela segunda metade do século XII, regista-se uma mudança sensível neste estado de coisas; ao Ocidente são reveladas as obras de Platão e Aristóteles; elas despertam um enorme interesse — multiplicam-se os tradutores e os comentadores.

No século seguinte, S. Tomás de Aquino procede a uma formidável revisão de valores e faz uma tentativa de harmonização do ideal cristão da vida com o aristotelismo.

Estaremos em face de um renascimento do espírito científico? Não é por enquanto, nem por esta via, que esse renascimento pode ser esperado. O casamento da ciência com a religião não é uma união livre de duas entidades que, completando-se, mutuamente se realizem; é, antes, um contrato em que uma das partes se obriga a servir a outra. De Aristóteles foi tirado aquilo, e era muito, que poderia servir para escorar, no domínio do conhecimento, o sistema cristão.

As religiões não têm por objectivo conhecer; as suas incursões pelos domínios das construções racionais fazem-se, não com um intuito de investigação desinteressada, mas sim com o de adquirir um sistema de ideias que sirva de suporte à sua doutrina ética.

As atitudes da ciência e da religião, em face do problema da investigação, são portanto totalmente diferentes. E em nenhuma situação essa diferença aparece com tão saliente nitidez como em face do erro. Enquanto para a ciência o erro é, pode dizer-se sem paradoxo, o mais activo dos seus agentes, pois é ele que vem revelar sempre que as doutrinas interpretativas não se ajustam perfeitamente aos resultados da observação, o que origina imediatamente uma renovação doutrinária, que significa uma passagem a um grau mais elevado do saber, a religião é insensível ao erro e à contradição racional; procura manter íntegro o seu sistema de ideias, só abandonando alguma

quando a sua conservação por mais tempo é de molde a fazer perigar a estabilidade do edifício que a possui.

Pode dizer-se, portanto, que o progresso da ciência se realiza pela aquisição, pela incorporação constante de ideias criadoras na sua vanguarda, ao passo que o da religião se faz, pelo contrário, pelo abandono, na retaguarda, de ideias fantasmas, cuja conservação se tornou já impossível.

Diferença essencial na selecção das ideias, antagonismo de métodos, que não pode deixar de produzir divergência nos resultados.

Seja-me perdoada esta demasiado longa peregrinação pelo passado. Ela pareceu-me, no entanto, indispensável, para bem se poder compreender a significação dos factos que se produziram ao alvorecer do século XVII e que agora podemos expor rapidamente.

Qual era, nessa altura, a situação, em relação às correntes de ideias de que atrás nos ocupámos?

Estava universalmente aceite, e era ensinada nas Universidades como doutrina oficial, a física de Aristóteles e a sua concepção do cosmos, a que fizemos breve referência. Triunfava o geocentrismo, na forma mais aperfeiçoada do sistema ptolomaico. Os astros eram mantidos nas suas órbitas circulares, perfeitas, pela «anima motrix», inacessível à razão, como tudo o que é divino. Era estabelecida a autoridade suprema das Escrituras Sagradas, tanto em teologia como em filosofia natural.

Pelo meado do século XVI, tinha surgido, porém, o primeiro grande golpe de picareta nos alicerces do edifício tão laboriosamente construído. Da autoria de Copérnico, um humanista e astrónomo polaco, aparecera, em 1543, um livro intitulado «De revolutionibus orbium coelestium», onde era ressuscitada a concepção heliocêntrica de Aristarco de Samos. As duas correntes estavam nova-

mente em face uma da outra e a luta ia recomeçar.

O aparecimento do livro de Copérnico suscitou, como era natural, vivas polémicas; a autoridade de Aristóteles estava em cheque. E contudo o sistema de Copérnico apresentava-se apenas como uma hipótese plausível, com tanto direito à vida como a contrária. E nem outro fora o intuito do seu autor ao construí-la. Ele próprio mostrou que os dois sistemas eram, do ponto de vista cinemático, equivalentes, e nenhum facto de ordem física apparecera ainda a impor a adopção da nova imagem do universo. Por outro lado, os fundamentos da física aristotélica eram conservados e os planetas continuavam a mover-se sobre órbitas circulares, como convinha ao mundo supra-lunar.

Mas, dentro em pouco, com o desenvolvimento da astronomia de observação, obra principalmente de Tycho-Brahe, revelaram-se anomalias que o complicado sistema dos epiciclos de Ptolomeu e Hiparco não conseguia explicar.

Seguidamente, Kepler, no final do século xvi, depois de aturadas observações sobre o planeta Marte e utilizando o enorme material colhido por Tycho-Brahe, reconheceu que os dados da experiência eram incompatíveis com a hipótese dos movimentos circulares dos planetas e, ao cabo de longos cálculos e locubrações, estabeleceu que a órbita desse planeta devia ser uma elipse de que o Sol occupasse um dos focos — segundo golpe no aristotelismo.

É nesta altura que aparece, no primeiro plano do movimento científico, Galileo Galilei.

Estamos em 1610. Galileo é professor na Universidade de Pádua e a luz do seu ensino irradiou já por toda a Europa, tornando-o célebre em todos os centros de cultura. Desde muito novo, mostrou uma notável aptidão para a invenção mecânica, o que não impedia o seu espirito, maravilhosamente plástico, de

revelar inclinações para as letras e para as artes.

No seu activo de homem de ciência conta já realizações importantes: balança hidrostática, estudos sobre o pêndulo e sobre a queda dos graves; desde há muito tempo é um adepto fervoroso do sistema copernicano, a respeito do qual mantém correspondência com Kepler, não tendo, porém, publicado nada sobre o assunto, por temer, sem a apresentação de provas irrefutáveis, a perseguição dos falsos sábios de então.

No final do ano anterior, 1609, construiu a sua luneta astronómica, o primeiro telescópio com que se fizeram observações de astros.

Inicia essas observações logo em Janeiro de 1610, e à sua vista, de potência assim singularmente aumentada, começa, pela primeira vez, o mundo supra-terrestre a revelar alguns dos seus segredos.

E o que mostra o telescópio aos olhos maravilhados de Galileo? Que a Lua é um corpo como a Terra, com montes e vales; que o planeta Vénus apresenta fases; que o planeta Júpiter possui satélites e que é, portanto, centro de um movimento planetário; que o Sol apresenta alterações à sua superfície, alterações visíveis sob a forma de manchas, que se geram e desaparecem, e cujas deslocações aparentes provam a existência dum movimento de rotação do Sol.

Estava abalado, nos seus fundamentos, o edificio aristotélico. Não só apparecia um corpo celeste, a Lua, com aparência idêntica à da Terra, como o facto de um planeta ser centro de movimento de outros planetas menores vinha provar que nada havia de *fisicamente* impossível em que o Sol o fosse também. Mas — coisa capital! — a diferença fundamental entre o mundo terrestre e o supra-lunar esvaía-se como fumo. Nos corpos celestes havia também geração e destruição, como o mostravam as manchas solares; nos céus havia corruptibilidade, tal como na

Terra, mundo do pecado e das imperfeições.

A filosofia oficial corria grave perigo; já não era apenas um modelo do mundo, apresentado como simples hipótese, nem a derrogação dos movimentos circulares, afirmada por um astrónomo e matemático; era qualquer coisa de essencial, de fundamental, era o núcleo do sistema, a diferença dos dois mundos, que se encontrava ameaçada.

Surgem então, com a maior violência, os ataques. Galileo multiplica-se na defesa das suas opiniões e observações. Aos argumentos tirados dos textos oficiais, responde com a sua experimentação, com o telescópio. Grande número dos seus adversários, depois de terem assim observado, rendem-se à evidência.

Em 1613, já então em Florença, desde há alguns anos, publica as suas «Cartas sobre as Manchas Solares», que levantam a maior indignação nos meios dos adeptos do aristotelismo. Mas Galileo é já inexpugnável no campo propriamente científico; há que encontrar outra coisa forte, decisiva. Se as coisas se tivessem passado três séculos mais tarde, não teria sido difícil descobrir, na luneta astronómica, o olho de Moscovo. À falta de recurso tão precioso, lançou-se mão de coisa de análoga subtilidade, se bem que de não tão alto poder criador de malefício... o dedo de Satanás. Que era, senão traça diabólica, a afirmação de que a Terra se movia em torno do Sol e não era aquele que girava à volta da Terra? Pois não eram bem claras e terminantes as Escrituras Sagradas? — «Então falou Josué ao Senhor naquele dia em que entregou os amorrheus nas mãos dos filhos de Israel, e disse em presença deles: «Sol, detém-te, sobre Gabaon; e tu, Lua, pára sobre o vale de Ajalon. E o Sol e a Lua pararam até que o povo se vingou dos seus inimigos».

Do púlpito da igreja de Santa Maria a Nova, em Florença, as matemáticas foram

acusadas, pela boca do dominicano Caccini, de invenção diabólica, e foi requerida a expulsão dos seus cultores de todos os Estados cristãos.

Galileo respondeu a esses ataques afirmando a sua fé católica e dizendo que, em matéria de astronomia e de física, se não podiam tomar à letra as passagens da Bíblia, empregando assim, nesse tempo, para que a ciência não fosse condenada em face da Bíblia, exactamente os argumentos que mais tarde deviam servir, e que ainda hoje vemos empregar, para que a Bíblia não seja condenada em face da ciência.

Mas a acusação de heresia, uma vez lançada, não podia parar sem atingir o seu fim. Aparece um outro dominicano, Lorini, que denuncia Galileo à Inquisição como herético, apoiando-se nos sermões de Caccini.

Começa a correr o processo. No final de 1615 Galileo é chamado a Roma, onde defende as suas obras e facilmente triunfa dos seus inimigos. Mas a 24 de Fevereiro de 1616 reúne o colégio dos censores teólogos, o qual, por unanimidade, resolve considerar como absurdo em filosofia, e formalmente herético, o fundamento do sistema copernicano.

É-lhe então intimada, como vimos na sentença, a ordem de não mais ensinar nem defender tal sistema.

Galileo volta para Florença e continua os seus trabalhos anteriormente iniciados, exercendo um labor gigantesco no domínio das físicas.

Introduz nelas a observação sistemática e a experimentação como método de aquisição da verdade, orientação essa que deveria prevalecer em todo o movimento científico posterior. Neste rumo novo dado à ciência, e ao qual ela ficou devendo as mais brilhantes das suas conquistas, é justo colocar ao lado do nome de Galileo, seu grande realizador, os nomes gloriosos dos precursores Roger Bacon e, sobretudo, Leonardo da Vinci, este último talvez a organização mais completa

dos últimos vinte séculos no mundo ocidental; não esqueçamos também Francis Bacon, um dos que mais valiosamente trabalharam pela renovação da ciência e que, sobretudo pelo seu «*Novum Organum*», exerceu larga influência sobre os filósofos posteriores.

Estudando a queda dos graves, Galileo destruiu inteiramente a dinâmica aristotélica, que considerava as velocidades da queda como proporcionais aos pesos dos corpos; pelo contrário, ele provou que a velocidade da queda é, abstracção feita da resistência do ar, a mesma para todos os corpos, qualquer que seja o seu peso. Estabeleceu, à custa de prodígios de engenho na experimentação, as leis dessa queda — proporcionalidade das velocidades aos tempos, proporcionalidade dos espaços aos quadrados dos tempos.

Estudou as leis do pêndulo. Enunciou o princípio de independência das forças.

Reflectindo sobre o sistema planetário, foi levado a perguntar a si próprio como eram fisicamente possíveis os movimentos de corpos de tão grandes massas como os planetas, através dos espaços; e que forças seriam essas que continuamente (de acordo com a dinâmica aristotélica) deveriam estar actuando sobre os planetas para os manter nos seus movimentos. Por outro lado ainda, foi obrigado, pelos seus adversários, a procurar uma resposta a esta pergunta embaraçadora — se a Terra se move como pode acontecer que esse movimento nos passe despercebido?

Perguntas estas que em boa hora se puseram à sua mente, pois iam obter como resposta dois dos princípios fundamentais da mecânica clássica: o princípio de inércia e o princípio de relatividade. De um e outro deu enunciados que, se bem que não tenham exactamente a forma que hoje lhes damos, mostram, bem à evidência, com quanta clareza ele os via e que papel lhes reconhecia na construção da dinâmica.

Com a introdução do princípio de inércia,

a ideia antiga, da dinâmica aristotélica, da força constante como criadora de velocidade, é destruída; o conceito de força aparece agora banhado de uma luz nova — aparece como criador de acelerações, visto que, pelo princípio de inércia, um corpo tende a perseverar no seu estado de repouso ou de movimento rectilíneo e uniforme desde que qualquer força o não constanja a mudá-lo, e, por consequência, a aplicação de uma força constante origina-lhe acréscimos de velocidade, isto é, aceleração.

O estabelecimento do princípio de inércia marca uma grande data na história da ciência — ele é o resultado final daquela grande corrente que vimos iniciar-se com a teoria cinética do mundo, da escola atomista. E é curioso notar que em todos os pensadores que, mais ou menos, seguiram as ideias de Demócrito, se encontra um pressentimento do princípio de inércia; com efeito, como era possível, sem ele, isto é, sem uma espécie de indiferença entre o repouso e o movimento uniforme e rectilíneo, conceber aquelas partículas materiais, movendo-se eternamente no vácuo?

Encontramo-nos portanto num momento privilegiado em que se assiste ao encontro de duas grandes correntes de ideias — a do heliocentrismo e a tradição atomista.

Temos que mencionar ainda uma terceira corrente, iniciada no século xv por Nicolau de Cusa — a corrente do infinitismo.

A ideia de infinito, por tantos séculos banida do domínio da ciência, surge repentinamente à luz do Sol e atinge, no século xvi, com Giordano Bruno, o máximo de vibração, verdadeira explosão de lava que abraça a natureza inteira. A colaboração íntima entre essa nova corrente e a doutrina heliocêntrica estabelece-se imediatamente. A nova imagem do mundo alarga singularmente os acanhados limites em que até aí o tinham querido encerrar. No universo há milhares, há milhões de estrelas, porventura outros tantos sóis, cada

um deles com o seu cortejo de planetas; como pode coadunar-se esta representação grandiosa com uma mesquinha esfera finita onde estão incrustadas as estrelas fixas? O universo não pode deixar de ser infinito, criação, diz Giordano Bruno e repetirá Newton mais tarde, de um ente superior, onnipotente e eterno — infinito.

Veja-se que época maravilhosa esta em que se realiza a confluência de três grandes correntes de ideias, contribuindo todas para a construção de um vasto domínio científico.

O que caracteriza o valor científico duma época é qualquer destas duas coisas: ou o nascimento de ideias criadoras, lançadas em seguida em todas as direcções, e cujo rasto luminoso se mede pelas sugestões fecundas que proporcionam, pela agitação que provocam e pelas reacções que suscitam; ou a confluência dessas ideias e seus cortejos que de diferentes pontos do horizonte, surgem a congregar-se, a unir-se, preparando uma síntese vasta de todos os conhecimentos até aí adquiridos. Foi da primeira natureza aquele período de encanto que se estende do século VI ao IV antes de Cristo na Grécia antiga; foi da segunda o constituído pelos séculos XVI e XVII da nossa era.

O papel fundamental de Galileo na formação dessa formidável síntese, procurei traçá-lo atrás. Outros viriam depois dele para completar o trabalho, corrigir algumas opiniões, seguir na mesma esteira. Entre esses, há um particularmente grande — Newton, de cujo cérebro potente saiu, como corpo acabado e perfeito, a mecânica clássica. Mas não esqueçamos os nomes gloriosos de Descartes e Huygens, que poderosamente contribuíram, com os materiais carreados pela sua experimentação, ou com ideias sistematizadas e ordenadoras, para a grandiosidade da construção, na sua harmonia, na sua simplicidade.

E depois? que se fez, uma vez atingido

esse grande planalto da ciência humana que foi a edificação da mecânica clássica? Depois, continuaram a surgir ideias, apareceram novos problemas a resolver e novas subidas íngremes que havia que transpor, na esperança de, para além delas, descobrir mais vastos e mais belos horizontes.

E todo esse prodigioso trabalho veio a conduzir a uma nova confluência de algumas grandes correntes, neste primeiro quartel do século XX (1).

É uma nova grande época da história da ciência, esta a que estamos assistindo, a terceira nos últimos trinta séculos; está alcançado um novo planalto na fadigosa jornada do conhecimento.

Quais serão os novos caminhos que daqui por diante hão-de ser trilhados, as novas formas que o pensamento vai tomar, impossível de o prever. Mas aproveitemos, ao menos, a altura em que, por singular felicidade, estamos colocados, para admirar o panorama vasto que a nossa vista abarca; deixemos mergulhar os nossos olhos maravilhados nas belezas da paisagem que se nos oferece; deixemos embalar a nossa alma dolorida na harmonia superior desta epopeia sem par.

Não quero, antes de terminar e embora correndo o risco de abusar da vossa complacência, deixar de me referir aos últimos anos da vida de Galileo.

Sabemos já, porque o vimos na sentença, que ele desobedeceu à ordem que lhe tinham dado de não mais emitir a sua opinião sobre o sistema de Copérnico. E não serei eu que o acuse por isso — o amor pela sua dama, a ciência, foi naquela alma de católico sincero, mais forte do que o sentimento de obediência à Igreja.

(1) Vide quadro e nota explicativa no final da conferência.

Em 1632 apareceram os seus «Diálogos sobre os Máximos Sistemas», verdadeira jóia literária e científica, que constitui um marco luminoso na história da ciência.

Seguiu-se o processo, a condenação e a abjuração. Como nos confrange hoje a leitura daquele documento pavoroso em que um homem, humilhando-se ao máximo, se renega, a si, à sua obra, aos seus discípulos que implicitamente promete denunciar! E não tem faltado, e não falta hoje ainda, quem o censure por isso com aspereza.

Decerto, Galileo não teve a vibração ardente dum Giordano Bruno que preferiu acabar na fogueira a desviar-se do caminho que traçara. Não teve a altivez desdenhosa e forte dum Zenão de Elea que, na agonia do suplício, respondeu ao tirano da sua cidade, Nearco, que lhe perguntava irônica-mente: o que te ensina agora a filosofia? — ensina-me o desprezo pelo tirano!

Mas eu pergunto qual de nós tem o direito de condenar aquele velho que perante a ameaça da tortura e sabendo a sua obra muito superior ao acto de abjuração, o fez, para que o deixassem viver e trabalhar.

Dias depois da condenação, saiu do cárcere e foi para o edificio da embaixada de Florença em Roma. Daí, seguiu, em Dezembro do mesmo ano, para a vila de Arcetri, perto de Florença, onde, com excepção de curtíssimos intervalos, residiu até à morte, recluso e com a permissão de receber apenas visitas isoladas e não muitas ao mesmo tempo.

Mas aí tinha Galileo o maior refrigério para a sua alma. Perto estava o convento de San Matteo onde, sob o véu da irmã Maria Celeste, vivia a sua filha mais velha. Mas nem esse consolo teve por muito tempo — em Abril do ano seguinte, ela morria.

A adversidade, que com tanto afinco o persegue, não alcança contudo abatê-lo; continua a trabalhar e a escrever. Mas, alguns anos mais tarde, atinge-o nova des-

graça; por uma estranha ironia do destino, aquele homem cujo olhar, através da luneta astronómica, ou estudando a queda dos graves, abriu uma era nova para a ciência, cegou. Foi como se tivesse reboado pelo espaço uma grande gargalhada sarcástica — vingança dos deuses, espíritos motores dos astros, contra aqueles olhos que de lá os tinham expulsado; aqueles olhos dos quais, mais do que de nenhuns outros, se podia dizer como dos do poeta — «Zum Sehen geboren, zum Schauen bestellt...» (1).

Nessa cegueira, da vista que não do espírito, viveu Galileo ainda quatro anos, durante os quais trabalhou com a ajuda dos seus discípulos Viviani e Torricelli.

Morreu a 8 de Janeiro de 1642. Nesse dia, a Igreja estava livre dum fardo pesado, a ciência sofria uma das maiores perdas de todos os tempos.

Examinado, a traços largos, o valor científico da obra de Galileo, vejamos agora qual o seu valor moral.

Ele está, pode dizer-se, condensado nesta frase com que Salviati, aquele dos interlocutores dos «Diálogos» que representa a nova doutrina, responde a Simplicio, o aristotélico — «quanto à Terra, nós procuramos nobilitá-la e aperfeiçoá-la, visto que procuramos fazê-la semelhante aos corpos celestes, e de certo modo pô-la no céu, donde os vossos filósofos a expulsaram».

Efectivamente, toda a obra de Galileo, bem como dos filósofos e cientistas dos séculos XVI e XVII, consiste numa revalorização do homem e no desfazer de um curioso paradoxo que a civilização cristã tinha originado.

Não se percebe, com efeito, como possam conciliar-se as duas posições que o cristianismo adoptou, uma no campo da ética, outra no da ciência.

(1) «Nascidos para ver, fadados para admirar...».

Diz-se ao homem — a vida na terra nada vale em si, porque é a existência no mundo imperfeito do pecado original; que o justo a aproveite para se purificar, na obediência, na humildade, na prática das boas acções, com o objectivo da recompensa na existência eterna depois da morte.

Mas como se compreende então que este mundo da imperfeição, do mal, da corruptibilidade, seja colocado no primeiro de todos os lugares — no centro do universo? E como se compreende, mais, um apego tão grande a essa situação de preferência, precisamente por parte da Igreja católica, cuja doutrina da humildade humana perante Deus seria antes compatível com o último, o mais modesto dos lugares do cosmos, sua criação?

Qual a explicação desta contradição, deste paradoxo? Parece-me simples. É que era precisamente essa a doutrina que convinha para manter em equilíbrio um estado social em que os bens da vida eram logradouro duma ínfima minoria. Para a maioria, esmagadora mas ignara, era preciso, para que ela não tomasse consciência da sua força, mantê-la no culto da sua própria imperfeição e indignidade. Para essa, a humildade absoluta, a obediência, o nada como valor individual e colectivo, porque os grandes senhores, os poderosos, esses podiam pagar-se o luxo de ter astrólogos, já que os astros, os corpos celestes da matéria incorruptível, presidiam ao seu nascimento e velavam de lá, do mundo supra-lunar, sobre a sua existência neste vale de lágrimas...

O que havia afinal era, não a humildade do homem, tomado como um todo, que se esvaía modesto perante o mistério da criação, mas sim, pelo contrário, o orgulho desmedido do homem, mas considerado individualmente nos privilegiados, que projectava a sua sombra arrogante sobre o cosmos para que pudesse projectá-la em seguida, de modo sinistro, sobre a humanidade.

E como a situação era assim, paradoxal,

só podia ser desfeita com outro paradoxo. Foi o que realmente se deu — o homem valorizou-se desde que a Terra, e portanto ele, foi arredada da sua posição de privilégio no universo.

Grande lição esta, que nós ganhamos ainda hoje em meditar, porque ela encerra ensinamentos que todo o homem devia ter presentes e como que engastados na consciência.

Hoje também está travada uma luta cruenta pela valorização do homem e o adversário real é ainda o mesmo — a projecção abusiva do indivíduo, como indivíduo, sobre a sociedade. Simplesmente, a frente dessa luta não está agora no plano astronómico, mas sim no social.

Hoje ainda estamos sofrendo porque falsos deuses, ideias fantasmas, se instalaram nos pontos nevrálgicos da armadura espiritual e moral das sociedades.

Por isso nos é transmitida inteira, à nossa geração de hoje, a mensagem desses grandes naturalistas do século XVII e, em especial, a mensagem de Galileu.

E essa mensagem diz-nos — expulsai os falsos deuses; valorizai o homem, acabando com a projecção abusiva e criminosa do individual sobre o colectivo; humanizai a sociedade!

NOTA EXPLICATIVA

No quadro seguinte estão indicadas as correntes de ideias a que no texto se fez referência e que, partindo da filosofia grega, vêm influenciar o movimento científico posterior.

São quatro essas grandes correntes: uma partindo de Pitágoras — geocentrismo, esfericidade, imobilidade da Terra; outra que, tendo a sua origem em Anaxágoras e Filolao, adquire, com Aristarco de Samos, a sua verdadeira significação — heliocentrismo; uma terceira, saída directamente da escola de Elea — relatividade do movimento; finalmente,

a que surgiu da escola de Demócrito — doutrina atomista.

Na segunda metade do século XVII, estava definitivamente constituída, na obra de Newton, a mecânica clássica, graças à contribuição das correntes heliocentrista, atomista e infinitista.

A corrente geocentrista foi abandonada após o completo triunfo da heliocentrista.

A corrente da relatividade do movimento seguiu, até vir confluir na mecânica relativista, já no século XX.

Os princípios fundamentais sobre que Newton fez assentar a mecânica clássica são:

1.º — *Lei de inércia* (tradição atomista, Galileo) — Todo o corpo persevera no seu estado de repouso ou de movimento uniforme e rectilíneo, se qualquer força a ele aplicada o não constrange a mudá-lo.

2.º — *Lei da quantidade de movimento* (Galileo, Newton) — A alteração do movimento é proporcional à força actuante e segue a recta segundo a qual tal força actua.

3.º — *Lei de acção e de reacção* (Newton) — A acção é sempre igual e contrária à reacção, isto é, as mútuas acções de dois corpos são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.

Destas três leis fundamentais, Newton deduziu vários corolários entre os quais o

Corolário 5.º — *Princípio de relatividade da mecânica clássica* — Os movimentos dos corpos incluídos num dado espaço conservam-se iguais, uns em relação aos outros, quer o espaço se ache em estado de repouso, quer se ache em movimento rectilíneo e uniforme, sem movimento circular.

Pode enunciar-se este princípio do seguinte modo: as leis que regulam os fenómenos mecânicos são verificadas, num sistema de coordenadas em repouso, exactamente do mesmo modo que num outro sistema que se mova, em relação ao primeiro, com movimento rectilíneo e uniforme.

Tanto o tempo como o espaço têm, para Newton, uma significação absoluta e cada um deles não tem relação de nenhuma natureza um com o outro ou com qualquer coisa de estranho; são inertes, portanto, em relação aos fenómenos.

O espaço absoluto é homogéneo (estrutura euclideana) e imóvel.

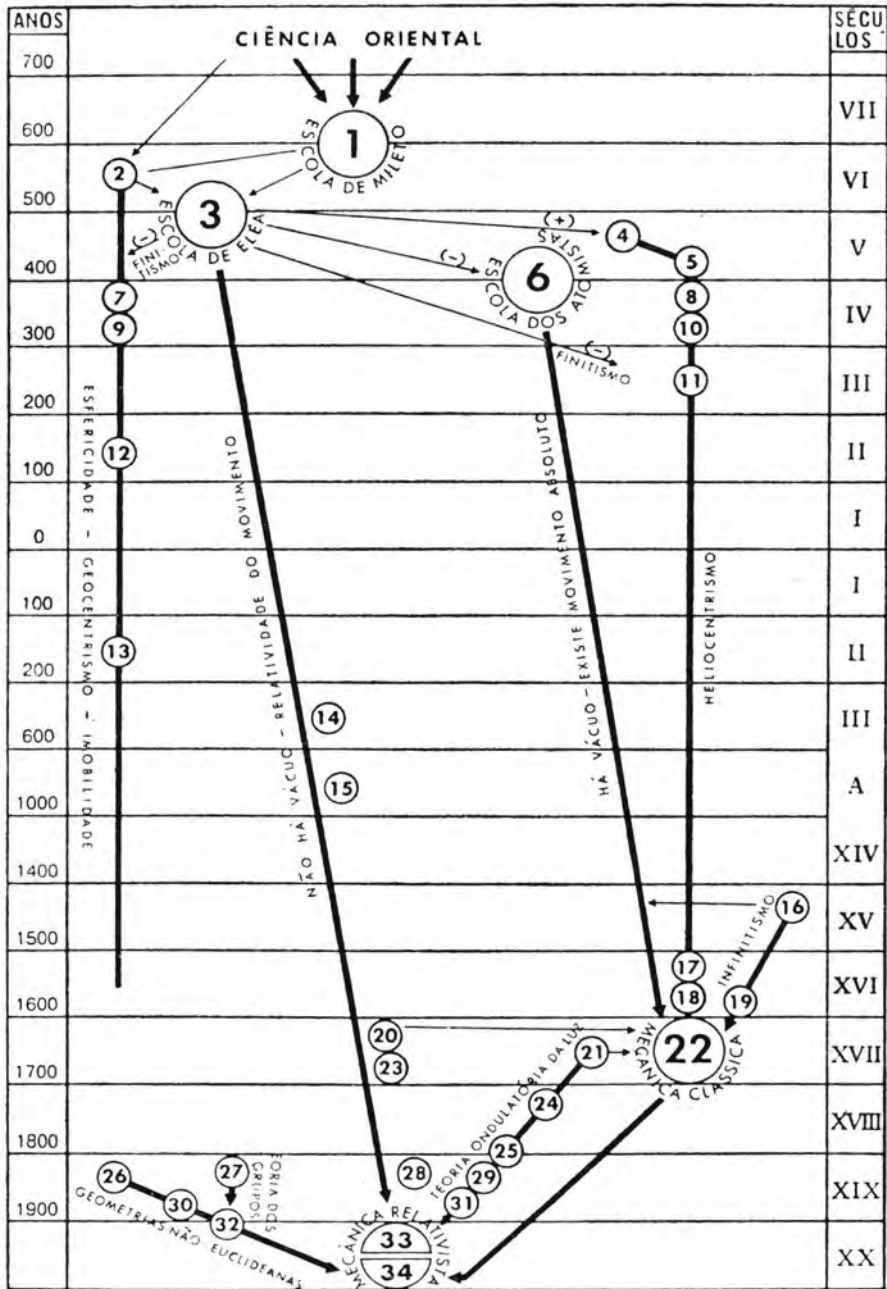
O movimento é susceptível de um significado absoluto em relação a um sistema de referência em repouso absoluto (reencontra-se aqui a ideia da doutrina atomista, contrária à da doutrina de Elea que nega o movimento absoluto).

Posteriormente a Newton, a mecânica clássica não cessou de estender os seus domínios e de registar triunfos. Mas, paralelamente, ia-se desenvolvendo uma outra corrente de ideias que, mais tarde, havia de entrar em conflito com ela — a teoria ondulatória da luz, criada por Huyghens e que, no princípio do século XIX, graças aos trabalhos de Young e Fresnel, triunfou sobre a teoria emissora de Newton.

Exigiu a teoria ondulatória a introdução, na física, de um fluido — o éter, meio vibratório indispensável para a propagação da luz, e preenchendo o espaço inteiro. A introdução do éter constituiu um golpe rude na concepção newtoneana do espaço, pois a ideia de que o espaço não tem relação com qualquer coisa de estranho estava, desde logo, condenada. Com efeito, que diferença há entre um espaço vivo, produzindo fenómenos e um espaço inerte, sem relação com os fenómenos, mas cheio de um fluido que é o meio actuante deles?

Pelo final do século XIX, estava unanimemente aceite a existência do éter e admitida a sua imobilidade em relação aos movimentos dos corpos.

Procurou-se então medir a velocidade absoluta da Terra em relação ao éter, pela diferença das velocidades da luz, à superfície da Terra, conforme o sentido da propagação.



Como essa diferença de velocidades, consequência necessária da mecânica clássica, não se verificou em nenhuma das experiências feitas (algumas de um extremo rigor) foi-se levado a admitir, como um novo princípio, que a luz se propaga sempre com a mesma velocidade em todas as direcções e qualquer que seja o estado de movimento da fonte que a emite.

Ao mesmo tempo, Einstein, interpretando o resultado negativo dessas experiências, foi levado a generalizar o princípio da relatividade da mecânica clássica (que dizia respeito apenas aos fenómenos mecânicos) enunciando o princípio de relatividade (restrita) — as leis que regulam o desenvolvimento dos fenómenos físicos são independentes dos sistemas de coordenadas escolhidos para exprimi-las, desde que eles se movam, em relação uns aos outros, com movimentos rectilíneos e uniformes.

Sobre estes dois princípios, edificou-se um novo corpo de doutrina, a mecânica relativista (restrita) na qual os anteriores conceitos de espaço e tempo da mecânica clássica são inteiramente modificados.

O espaço e o tempo perdem a independência que tinham na construção newtoneana e fundem-se numa só entidade — o cronótopo quadridimensional de Minkowski, de estrutura euclideana; desaparece o velho conceito de simultaneidade; as distâncias, no espaço ou no tempo, diferem, conforme forem referidas a um sistema ou a outro em movimento rectilíneo e uniforme em relação ao primeiro; altera-se também o conceito clássico de massa.

Ficavam, porém, fora da teoria, assim constituída, os fenómenos de gravitação, e os movimentos de rotação continuavam com um significado absoluto. Por isso, Einstein foi levado, alguns anos mais tarde, a proceder a uma nova generalização — teoria da relatividade geral.

A alteração das concepções foi ainda mais profunda. Houve que abandonar a estrutura euclideana do espaço, aproveitando assim os resultados de uma outra grande corrente de ideias que surgira um século antes — a das geometrias não euclidianas.

Como consequência da impossibilidade de demonstração do postulado das paralelas da geometria clássica de Euclides, à custa ape-

- 1 — *Thales*, 624?-548; *Anaximandro*, 611-545; etc.
- 2 — *Pitágoras*, 580-504.
- 3 — *Parménides*, 540-; *Zenão*, 504?-.
- 4 — *Anaxágoras*, 500-428.
- 5 — *Filolao*, 400-.
- 6 — *Leucippo*, 490?; *Demócrito*, 460-360.
- 7 — *Eudózio*, 408-355.
- 8 — *Heráclides*, 350-.
- 9 — *Aristóteles*, 384-322.
- 10 — *Ecfanto*, 350-.
- 11 — *Aristarco de Samos*, 310-230.
- 12 — *Hiparco*, 130-.
- 13 — *Ptolomeu*, 150-.
- 14 — *Santo Agostinho*, 354-430.
- 15 — *Erigenes*, 815-877.
- 16 — *Nicolau de Cusa*, 1401-1464.
- 17 — *Copérnico*, 1473-1543.
- 18 — *Kepler*, 1571-1630.
- 19 — *Giordano Bruno*, 1548-1600.

- 20 — *Descartes*, 1596-1650.
- 21 — *Huyghens*, 1629-1695.
- 22 — *Galileo*, 1564-1642; *Newton*, 1642-1727.
- 23 — *Leibniz*, 1646-1716.
- 24 — *Euler*, 1707-1783.
- 25 — *Young*, 1733-1829; *Fresnel*, 1788-1827.
- 26 — *Gauss*, 1777-1855; *Lobatschevski*, 1793-1856; *Bolai*, 1802-1860.
- 27 — *Evaristo Galois*, 1811-1832.
- 28 — *Duhamel*, 1797-1872.
- 29 — *Maxwell*, 1831-1879.
- 30 — *Riemann*, 1826-1866.
- 31 — *Hertz*, 1857-1894; *Lorentz*, 1853-1928.
- 32 — *Klein*, 1849-1925; *Sophus Lie*, 1842-1889.
- 33 e 34 — *Teoria da relatividade. Einstein*, 1879-1955.

NOTA — As datas referentes à maioria dos filósofos da antiguidade são apenas aproximadas.

nas dos outros postulados e axiomas da mesma geometria, foi-se levado, em primeiro lugar, à construção de outros edificios geométricos, em cujos fundamentos não figura o postulado das paralelas. Foi o primeiro passo dado no caminho do estudo das possíveis estruturas espaciais.

O estudo e classificação sistemática das geometrias foi possibilitado pela aplicação, ao campo geométrico, de um conceito — o conceito de grupo, que, no início do século XIX (quase contemporaneamente com a criação das geometrias não euclidianas), surgira no estudo de um problema de Álgebra. De uma região da Análise completamente isolada (verdadeiro penhasco no domínio das ciências matemáticas de então), nasceu assim uma nova corrente que veio enriquecer poderosamente, algumas dezenas de anos mais tarde (1872), a Geometria e, como consequência, no princípio deste século, a Física (1).

Na nova mecânica, nenhum movimento tem significação absoluta — é o triunfo com-

pleto da corrente saída da escola de Elea, mas à custa de que prodígios de análise e de que profunda transformação de conceitos que os filósofos gregos não poderiam sequer vislumbrar!

Neste novo corpo de doutrina, confluem, como se vê, quatro grandes correntes: a que vem directamente da mecânica clássica, a saída da teoria ondulatória da luz, a da relatividade do movimento, e a das geometrias não euclidianas.

Ela é, portanto, uma prodigiosa síntese, de uma amplitude e vastidão que, há algumas dezenas de anos, se não podia mesmo suspeitar.

O exame deste quadro fornece ainda úteis motivos de reflexão de outra natureza.

Verifica-se facilmente que os períodos de grande actividade científica coincidem com aqueles em que domina a aspiração de liberdade e de plena realização do indivíduo. Tão certo é que em épocas de opressão e tirania, em que impera o sentimento da humildade e da obediência, pode assistir-se ao vegetar de uma multidão de servos dóceis, mas nunca ao erguer daquelas superiores construções do pensamento criador e livre.

(1) Sobre este assunto, verdadeira maravilha da história da ciência, vide A. de Mira Fernandes, *Evolução do conceito de Grupo*, Imprensa da Universidade de Coimbra, 1932.

ANTOLOGIA

A cultura integral do indivíduo — problema central no nosso tempo (*)

por Bento de Jesus Caraça

NOTA EXPLICATIVA (**)

As páginas que vão ler-se contêm a matéria de uma conferência que o autor realizou em 1933 (25 de Maio) a convite de uma organização de novos — a União Cultural «Mocidade Livre», para inauguração da sua actividade.

Viviam-se nessa altura horas inquietas e fecundas. A marcha acelerada dos acontecimentos na Europa pressagiava grandes transformações próximas. Hitler tomara, havia meses, o poder na Alemanha; agitavam-se as mais variadas correntes dentro e fora do Reich; a instabilidade geral era manifesta; tudo isto criara um ambiente de expectativa e ansiedade.

Os espíritos moços, como sempre, viviam os acontecimentos com intensidade, despertavam para as preocupações mais fundas, auscultavam o futuro cheios de optimismo, uniam-se para pensar. Foi desse ambiente que nasceu a União Cultural «Mocidade Livre».

O futuro imediato não correspondeu às aspirações e impaciências desses espíritos juvenis e ardentes. O desenvolver da vida social europeia seguiu por caminhos que haviam de provocar a revisão de muitos optimismos fáceis e, em contrapartida, fazer abrir muitos olhos para realidades cruéis, em suma, proporcionar grandes lições.

(*) Conferência realizada na União Cultural «Mocidade Livre» em 25 de Maio de 1933.

(**) Nota inserta na 2.ª edição desta conferência, em cadernos da «Seara Nova», 1939.

Tudo isso fez que se amortecessem alguns entusiasmos das primeiras horas. Que importa? é essencial que tenham existido! Mas foram mais algumas ilusões perdidas, dir-se-á. Não. As ilusões nunca são perdidas. Elas significam o que há de melhor na vida dos homens e dos povos. Perdidos são os cépticos que escondem sob uma ironia fácil a sua impotência para compreender e agir; perdidos são aqueles períodos da história em que os melhores, gastos e cansados, se retiram da luta, sem enxergarem no horizonte nada a que se entreguem, caída uma sombra uniforme sobre o pântano estéril da vida sem formas.

Benditas as ilusões, a adesão firme e total a qualquer coisa de grande, que nos ultrapassa e nos requer. Sem ilusão, nada de sublime teria sido realizado, nem a catedral de Estrasburgo, nem as sinfonias de Beethoven. Nem a obra imortal de Galileo.

MINHAS SENHORAS E MEUS SENHORES:

Quis a União Cultural «Mocidade Livre» que, neste seu primeiro acto público, eu lhe prestasse a minha colaboração, dizendo-vos algumas palavras acerca da sua razão de ser, da necessidade da sua existência, das suas intenções de acção futura.

Aceitei, se bem que me não tenha proposto fazer-vos a apresentação desse organismo

que, em boa hora, alguns espíritos moços decidiram fundar.

Essa apresentação está sobejamente feita pelo simples facto da sua constituição, e a junção feliz, no seu próprio nome, das duas palavras «cultura» e «mocidade» abre horizontes rasgados para a esperança daqueles que, não tendo desesperado de viver melhores dias, vêem precisamente numa renovação espiritual da geração nova a condição indispensável para a realização das ideias que lhes são caras.

Quero afirmar aqui a minha inteira solidariedade com estes moços que pretendem compreender e viver o seu tempo e trazer-lhes, do mesmo passo, a minha modesta contribuição para o seu labor que será fecundo, na medida da força e poder de sinceridade que puserem, através ainda das maiores dificuldades, em se conservarem iguais a si mesmos, fiéis a si mesmos. Esta foi a intenção com que aceitei o encargo que me cometeram.

Encargo pesado, pois não é fácil tarefa o alguém abalançar-se hoje a emitir juízo, por mais despretençioso que ele deseje ser, sobre o tempo que vivemos. Mas não há também tarefa mais importante nem mais urgente. O que o mundo for amanhã, é o esforço de todos nós que o determinará. Há que resolver os problemas que estão postos à nossa geração e essa resolução não a poderemos fazer sem que, por um prévio esforço do pensamento, procuremos saber, por uma análise fria e raciocinada, quais são esses problemas, quais as soluções que importa dar-lhes — saber donde vimos, onde estamos, para onde vamos.

E pensemos, agora que ainda o podemos fazer. Amanhã pode ser tarde, porque a tempestade que tem vindo a acumular-se sobre as nossas cabeças pode desencadear-se e arrastar-nos nos seus turbilhões brutais. A violência da borrasca não nos permitirá que façamos mais do que gestos elementares e instintivos que só não nos trairão se forem,

a todo o momento, orientados e dominados por uma personalidade de uma só peça, aquela personalidade que agora temos de forjar — enquanto é tempo.

O dizer-se que a época actual é caracterizada essencialmente por uma perturbação e inquietação vivas, é já quase um lugar comum, de tal maneira isso se impõe, mesmo após o mais superficial exame. Não é, contudo, demasiado repeti-lo, pois há muitos sujeitos de ouvido duro que ainda o não compreenderam ou não quiseram compreender e que, numa cegueira teimosa, continuam a querer aplicar, para medida de valores numa sociedade abalada nos seus fundamentos, aqueles padrões cujo uso já de há muito não é legítimo.

Desenguem-se essas pessoas. O que estamos actualmente vivendo e sofrendo não é apenas uma borbulhagem fugaz, destinada a passar como tantas coisas passam, sem deixar sinal; é, muito pelo contrário, uma época de transição, uma ponte de passagem entre aquilo que desaparece e o que vai surgir. E nessa ponte de passagem chocam-se todas as correntes, coexistem todas as contradições, fazendo dela aparentemente uma feira de desvarios e, na realidade, um formidável laboratório de vida.

Época singular! em que podemos assistir às manifestações do mais alto poder criador e do mais persistente esforço de sistematização — Einstein e Broglie — e, paralelamente, à desorganização total da vida económica e à destruição deliberada precisamente daquilo de que a maioria carece.

Época em que é possível um tal campear do cinismo que um ministro holandês propõe, numa conferência internacional, a interdição do bombardeamento aéreo do inimigo em tempo de guerra, para que alguns dias depois um avião *holandês* lance, sobre um barco *holandês*, em tempo de paz, uma bomba que

semeia a morte a bordo⁽¹⁾; mas em que é também possível um tal florescimento de virtudes, que um homem, velho e fraco, consegue, quase só com o poder da sua alma que é forte, agitar milhões de homens num esforço de emancipação nacional e, o que é mais, de libertação de uma casta dos preconceitos que a escravizam, excluindo-a do convívio humano.

Época em que se verifica um tão grande desprezo pela existência alheia que na sombra se prepara, metódicamente, sistematicamente, cientificamente, a destruição do homem; mas em que ao mesmo tempo existe uma tal admiração pelo corpo humano que, num vasto movimento de cultura física, ele se enaltece e glorifica no que tem de nobre e belo — antítese simbólica do nosso tempo: preparação da guerra química e salão do nu fotográfico.

É numa época assim, tão intimamente trabalhada por antagonismos irreconciliáveis, que se pretende vir falar-vos num problema central? Não estará errado pela base o título e intenção desta conferência? É o nosso tempo susceptível de mais do que pequenos problemas parcelares sem conexão uns com os outros e reflectindo, na sua pulverização, o amorfismo actual?

É a estas perguntas, que a mim mesmo tenho posto com angústia, que vou procurar dar uma resposta.

Para ela, não reivindico outra categoria de valor que não seja a honestidade com que foi procurada. Sei demasiado, para que outro mérito pretenda ver-lhe atribuído, quanto são falíveis ainda os juízos mais prudentes, e, se não receio o erro, é só porque estou sempre pronto a corrigi-lo.

Do mesmo modo que é impossível pelo

simples exame de alguns minutos, descobrir, no bater das ondas numa praia, o movimento regular das marés, assim também quem se detiver na contemplação de um único momento histórico não poderá surpreender o ritmo da evolução que o determina e condiciona.

Num como noutro caso, só o recuo que forneça aos fenómenos uma perspectiva adequada pode permitir um estudo objectivo da sua natureza e significação. No primeiro, algumas horas bastam; no segundo, é todo o largo período da história da humanidade que se torna indispensável abraçar numa apreciação de conjunto.

Vejamos se nos aparece assim, ao menos nas suas linhas gerais, alguma lei à qual se subordine todo o desenvolvimento que a história nos apresenta ao longo do extenso caminho percorrido, desde o aparecimento dos primeiros agrupamentos humanos até às sociedades de hoje.

Creio que essa lei existe e que pode formular-se, pouco mais ou menos, nos seguintes termos: *no seio das sociedades humanas manifestam-se permanentemente dois princípios contrários — o individual e o colectivo — de cuja luta resultará um estado superior dessas mesmas sociedades, em que o primeiro princípio — o individual — chegado a um elevado grau de desenvolvimento, se absorverá no segundo.*

Demoremo-nos por alguns instantes na explanação da ideia contida neste enunciado que, receio muito, corre o perigo de, à primeira vista, vos aparecer como paradoxal.

Nos primeiros grupos humanos, em que aquilo que distingue o homem dos outros animais se encontra ainda mal liberto da ganga da irracionalidade primitiva, não há lugar para mais do que para os instintos e sentimentos gregários, num estado de existência em que o indivíduo mal tem consciência de si, fundindo-se no agrupamento de que depende. É só a pouco e pouco que os mais aptos, os mais capazes pela força ou pelas

(1) Estávamos, nessa altura, em 1933. O cinismo campeava já, mas não tinha sido ainda arvorado em método político. Largo caminho andado nestes seis anos. (Nota da 2.ª edição, 1939).

qualidades de observação, se vão elevando acima do grupo, destacando-se dele, impulsionando-o e fazendo-o progredir.

O esforço individual aparece assim como indispensável para o progresso do agregado que, sem ele, permaneceria sempre tal qual nasceu, como acontece, por exemplo, com certas associações de animais inferiores que hoje vemos.

Mas essa acção do individual sobre o colectivo não tem apenas, infelizmente, a virtude criadora de progresso que lhe acabamos de assinalar.

Bem depressa ela se manifesta com outros caracteres que formam o cortejo sinistro do domínio do indivíduo sobre o grupo — o mais capaz só subsidiariamente põe o seu esforço ao serviço do agregado; a sua primeira ideia é servir-se dessa capacidade maior para seu interesse próprio.

E aqui reside o grande drama em que, de todos os tempos, se tem debatido a humanidade — condenada a só poder evoluciona e progredir sob a acção vivificadora e fecunda de alguns dos seus indivíduos. Ela vê-se ao mesmo tempo impotente para impedir que esses indivíduos se transformem em seus verdugos. Ela assiste, incapaz de o evitar, à criação das castas que são como outras tantas sanguessugas sobre o seu corpo, sem, ao menos, lhe restar a solução de as eliminar, porque isso equivaleria à sua morte no pântano estéril da incapacidade.

Encarada sob este ângulo, a História da Humanidade aparece-nos como uma gigantesca luta, gigantesca no espaço e no tempo, entre o individual e o colectivo. Luta gigantesca, e trágica, e sangrenta, em que transparece um domínio quase permanente do individual sobre o colectivo e, de longe em longe, um estremecimento do grande corpo mortificado, um movimento de revolta, um triunfo efémero do colectivo, que logo cai sob outro ou o mesmo jugo pela sua incapacidade de se reconhecer e dirigir.

E esse grande corpo, curvado ao peso dos seus donos, segue o seu caminho sem parar, cai aqui, levanta-se além e aspira, aspira sempre a qualquer coisa de melhor. Mas esse «qualquer coisa» é vago e impreciso e, por isso mesmo que o é, leva a todos os desvios e todos os erros, pressurosamente amparados e com cuidado mantidos, precisamente por aqueles — o princípio individual em acção — a quem uma consciência colectiva forte ameaçaria no seu poderio egoísta.

E assim acontece que a pobre humanidade, não abdicando da sua aspiração confusa a uma felicidade e unidade superiores e não encontrando em si, no seu corpo chagado, de que alimentar a pureza da sua chama interior, renuncia a si própria e vai procurar fora os elementos que dêem alimento e vida a essa aspiração e pureza. As castas depressa reconhecem quanto esse sentimento de evasão do homem as pode servir e, daquilo que é puro desejo de elevação do espírito, fazem, a breve trecho, a adoração de um ídolo; deformou-se um sentimento, mas enraizou-se mais o poder. Abre-se assim um grande capítulo da História, capítulo que não é, de todos, o menos dramático — o das concepções religiosas. Sobre a terra paira, como uma consequência necessária da luta entre o individual e o colectivo, uma ideia vagabundeante e de encarnações polimorfos — aqui, um deus feroz do deserto, além uma coorte de deuses amáveis de uma península ridente, mais adiante, sobre uma estrutura social absurda, um deus absurdo — infinita bondade e infinito amor criando e regendo um mundo onde existe a malquerença e a injustiça.

A luta entre o indivíduo e a colectividade não se trava sempre no mesmo plano de vida nem com o mesmo grau de amplitude.

De época para época, os seus aspectos variam, não porque no fundo a sua essência mude, mas porque as circunstâncias características dessa época lhe fazem tomar uma

aparência diversa — as formas da vida são várias e permitem diferentes transposições de plano do mesmo fenómeno fundamental. Uma vez, a revolta elementar e cega dos que têm fome, outra, uma tentativa de unificação política de um grande império, depois, o assalto a esse mesmo império e o seu desmembramento, mais tarde, a reivindicação dos direitos políticos do cidadão, de várias maneiras, e com fisionomias locais e temporais determinadas, nos aparece esse grande movimento que permanece sempre uno na sua significação profunda.

Evidentemente, não pretendo com isto afirmar que todo o fenómeno da vida social, no extremo da sua minúcia, seja uma manifestação dessa luta, mas nem por isso nas suas linhas gerais deixa de ser assim, do mesmo modo que a existência de cordilheiras de montanhas não impede a esfericidade da terra.

Para que o quadro da diversidade seja completo, não lhe faltam sequer vastas regiões vazias, períodos extensos em que reina a acalmia e onde as sociedades parecem ter encontrado uma posição de equilíbrio fecunda para o progresso espiritual e material.

Mas, mesmo nesses períodos de tranquilidade, as forças íntimas que trabalham a estrutura social não estão em repouso. Não é difícil discernir as correntes que carregam incessantemente os materiais para a nova fase de luta. A agitação do organismo social não é menos viva, simplesmente ela exerce-se em camadas mais fundas, interessando os alicerces e deixando provisoriamente de parte a epiderme. Por isso, em todas as épocas de transformação nas relações sociais se encontram sempre pessoas a quem os acontecimentos surpreendem e que até ao fim negam aquilo que é a própria evidência.

Vejam os como se podem caracterizar esses períodos intermédios de acalmia.

Após uma grande transformação da orgânica social estabelece-se o equilíbrio entre as

forças que a produziram, equilíbrio esse resultante da vitória de uma ideia revolucionária, encarnada por grupos determinados do agregado.

O que é que deu a essa ideia um carácter revolucionário e a fez inscrever na bandeira de certos agrupamentos de forças?

Se examinarmos a questão de perto, reconheceremos que a estrutura anterior não era já compatível com o estado real da evolução da sociedade. Os interesses dos grupos, castas ou classes, detentores do poder, ou duma sua parcela, encontravam-se em franco e violento antagonismo com os interesses gerais, antagonismo esse revelado, conforme a época considerada, em certo plano da vida social.

Dá-se então o choque, o qual, mais ou menos violento conforme a questão debatida, interessa em maior ou menor grau os fundamentos da estrutura existente, e nesse choque as forças dividem-se em dois campos: o daqueles que querem conservar ou, melhor, fazer sobreviver a si mesmo, um organismo condenado, e o dos que, tomando como lema a nova ideia, pretendem ascender, impondo formas novas.

O poder revolucionário duma ideia mede-se portanto pelo grau em que ela interpreta as aspirações gerais, dadas as circunstâncias do momento em que actua. Assim, uma ideia ou teoria que, em dada época, é revolucionária, pode, noutra em que as circunstâncias sejam diferentes, ter perdido por completo esse carácter. Por exemplo, teve carácter revolucionário, no seu tempo, a teoria do direito divino dos reis, quando oposta à soberania divina dos papas, teoria que, mais tarde, não só perdeu essa característica, como até se revestiu duma feição eminentemente reacçãoária; foi altamente revolucionária a doutrina individualista dos pensadores liberais do século XVIII, doutrina que, sob essa forma, é nos nossos dias obstáculo ao progresso e que só deixará de o ser quando compreendida

num sentido que as circunstâncias actuais exigem (1).

Mas não antecipemos, e voltemos ao ponto que no momento nos ocupa.

A vitória de uma ideia revolucionária significa, na época em que se dá, um acomodamento momentaneamente estável, mais perfeito que o anterior, entre as forças em presença; significa que se deu um novo passo no sentido de subtrair o colectivo à tirania do individual; sentem-no bem as massas que, nessas épocas de comoção dos fundamentos da sociedade, se lançam, numa explosão de entusiasmo, ao assalto do corpo decrépito e parasitário que sobre elas vive.

Mas a sua falta de preparação cultural, o não reconhecimento de si mesmas como um vasto organismo vivo e uno, torna-as incapazes de levar a sua obra mais além da destruição do passado; impossibilita-as de proceder à construção da ordem nova que a sua revolta preparou.

Então dá-se, no dia seguinte ao do triunfo, a sua abdicação, num grande gesto de renúncia — essa obra de reconstrução, é um novo grupo, uma nova classe, mas não a colectividade inteira, que a vai empreender sob a égide da bandeira que presidiu à vitória.

As novas forças detentoras do poder realizam as reformas indispensáveis, os interesses gerais estão por um momento satisfeitos; numa base mais larga que a passada, concordam o individual e o colectivo — abre-se um período de acalmia, período cuja duração depende da medida em que a nova classe

dirigente se conserva fiel aos motivos que originaram o seu advento e também do grau de consciência colectiva das massas.

Passa algum tempo e começa nova diferenciação — os interesses egoístas dos dirigentes sobrepoem-se aos interesses gerais, são novos elementos individuais que começam a exercer opressão sobre a colectividade; aparecem contradições, a massa sente-o e afasta-se intimamente dos que a governam; surge nova ideia ou nova doutrina de antecipação que encarna as aspirações surdas dos que sofrem; tudo recomeça — a situação torna-se revolucionária; de af à revolução vai um passo. Evitá-la? Só seria possível por uma reacomodação da classe dominante, mas esta é levada insensivelmente, a despeito da evidência e dos avisos até de alguns dos seus membros mais clarividentes ou mais desinteressados, a aferrar-se aos seus privilégios, a defender-se pela força, em vez de se voltar para aqueles princípios que, na sua pureza, a levaram ao triunfo passado.

Dá-se assim um anquilosamento da classe dirigente; a doutrina ou teoria, em cujo nome antes lutara e vencera, perde o seu carácter revolucionário, torna-se, primeiro, conservadora, e mais tarde, quando os antagonistas são flagrantes e se trava a luta, reaccionária.

Tudo recomeça, disse acima, mas seria vão pretender-se que recomeça exactamente nas mesmas bases. Não; da etapa anterior, alguma coisa, às vezes muito, ficou definitivamente adquirido.

A marcha para um estado superior da orgânica, para a supressão do antagonismo entre o individual e o colectivo é permanente, simplesmente o caminho seguido não é direito e fácil, é antes um caminho tortuoso, sempre ascendente — «la route en lacets qui monte» de que falava Renan. Que essa aquisição de um estado superior de *unidade* só pode fazer-se pela luta e através de contradições, é lei fundamental da vida; não há que pretender, fora da realidade, modificá-la, mas

(1) Não se advoga aqui o anti-individualismo; condena-se a realização individualista actual, a qual permite e facilita que as mais fortes organizações da reacção internacional — finança, comércio de armamentos, tráfico de carne branca, etc. — se acobertem à sua obra, impondo quando é preciso formas de restrição das liberdades públicas mais puras e mais características do verdadeiro individualismo.

sim que interpretá-la, compreendê-la e actuar em consequência.

Cada fase da luta é um passo novo dado no caminho para a unidade do individual e do colectivo; ela interessa cada vez mais as camadas profundas, que assim surgem progressivamente para a luz, se arrancam a si mesmas da treva e conquistam um lugar ao sol.

Na época actual, estamos vivendo precisamente uma fase dessa luta, a mais ampla e mais crua de todos os tempos.

O que é que lhe dá essa amplitude e essa crueza até hoje ainda não atingidas? Para o vemos, temos que recuar um pouco.

Pelo final do século xv⁽¹⁾, começa a aparecer no mundo ocidental uma classe cuja intervenção nas relações sociais se torna cada vez mais frequente e mais vigorosa.

Serve-lhe de suporte económico a extensão crescente das relações comerciais com outras partes do mundo, a aparição de inventos importantes, como a imprensa, o desenvolvimento das ciências de observação que, tendo tido em Rogério Bacon o seu precursor, deviam contar nos séculos xvi e xvii com os nomes brilhantes de Leonardo da Vinci, Copérnico, Kepler e Galileo⁽²⁾.

(1) O aparecimento da burguesia deve na realidade reportar-se a alguns séculos antes, à formação dos primeiros grupos urbanos e ao despontar da indústria e das relações comerciais. Se aqui me refiro ao século xv, é para marcar a época a partir da qual é o seu peso crescente na vida social que vai constituir o factor dominante da evolução da civilização ocidental.

(2) Não se julgue haver entre o ritmo das descobertas e do desenvolvimento das ciências de observação, por um lado, e o acréscimo de poder da burguesia, por outro, uma simples relação de causa e efeito, em qualquer dos sentidos. Há entre um e outro fenómeno um complexo de relações de *acção recíproca* — as necessidades da vida social *impulsivando* o movimento científico e este por sua vez

Durante estes séculos e os seguintes, o peso dessa classe nova não cessou de aumentar e a luta contra a então classe detentora do poder foi crescendo em intensidade.

Essa luta feriu-se em primeiro lugar contra a Igreja que, omnipotente durante toda a Idade Média, estava no entanto a braços com uma grave crise interior e via escaparem-lhe lentamente das mãos as alavancas mercê das quais até aí disfrutara os benefícios de uma hegemonia material e espiritual.

Luta cruenta foi essa, a de um organismo corrompido que queria continuar a sobreviver-se, luta a que não faltaram, ao lado de guerras sangrentas, os episódios mais dramáticos, como o suplício de Giordano Bruno e o processo monstruoso movido a Galileo.

Alcançada porém a vitória da concepção laica do Estado e dissipada em Westfália a esperança de continuação da soberania papal, pelo divórcio do Sacerdócio e do Império, pareceria que a nova classe deveria definitivamente ascender à direcção da sociedade, impondo uma ordem nova. Tal não se deu porém. O conflito religioso, por maior acuidade que tivesse revestido, não interessava os alicerces do edificio; esses eram trabalhados por outras correntes e a luta ia continuar noutro plano — o político-económico.

Vemos assim aparecer, na segunda metade do século xvii, várias concepções quanto à natureza e legitimidade do Estado, concepções que oscilavam entre dois polos extremos: a do Estado justificado na medida em assegura e promove a defesa da liberdade individual e propicia as condições de uma existência racional, única verdadeiramente

facilitando o progresso social e fazendo criar novas necessidades. Isto parece, e é de facto, um lugar-comum, uma banalidade. Mas o que é mais estranho é a frequência com que aparecem pessoas a defender a «independência do Espírito em relação à matéria» e ideias como esta — que o progresso científico se faz ao acaso do aparecimento de homens geniais!

humana, — Spinoza; a do Estado consubstanciado com uma pessoa sagrada, cuja actuação tem um só controlo — o da sua própria consciência, inspirada directamente por Deus, único a quem o soberano tem que dar contas — Bossuet.

Triunfou momentaneamente a tese de Bossuet, na pessoa de Luís XIV; a de Spinoza deveria esperar pelo século XVIII para que lhe fosse dada uma realização parcial na grande transformação que se avizinhava.

Por várias razões, que seria longo enumerar aqui, foi a França o ponto nevrálgico das contradições e conflitos dessa época; lá se concentrou a actividade dos grandes individualistas revolucionários, obreiros espirituais da revolução que havia de abrir uma era nova na História.

A nova classe, que vimos começar a manifestar-se alguns séculos antes, inscreveu na sua bandeira as reivindicações fundamentais formuladas por esses homens, e assim tornou possível um novo acordo, numa base ampla, entre o individual e o colectivo. Quando esses homens reclamavam o reconhecimento dos direitos do indivíduo, não faziam mais que pretender subtrair a colectividade ao poderio de uma classe restrita e, portanto, reforçando a personalidade individual, dar, por isso mesmo, uma força nova ao agregado.

O grande erro dos individualistas de hoje é o conservarem-se agarrados à letra das fórmulas, sem notarem que os termos têm agora um sentido novo que lhe é emprestado pela diferença fundamental das circunstâncias.

Então, por não haver liberdade reconhecida expressamente, os interesses gerais exigiam a luta por esse reconhecimento; hoje, em que dela se usou e abusou criminosamente, os mesmos interesses gerais exigem uma limitação, não do uso mas do abuso. Desenvolvimento e reforçamento da perso-

nalidade, sim, tarefa essencial, mas que eles sejam permitidos e propiciados a todos (1).

Por que razão o estado social saído da revolução francesa não garantiu até hoje essa identificação da individualidade com a colectividade?

A burguesia, após a sua ascensão ao poder, não resistiu ao anquilosamento que vimos atrás ser característica essencial das classes dirigentes (2). Depressa cessou a harmonia dos seus interesses com os interesses gerais. Os seus fundamentos económicos — livre concorrência e propriedade privada — cedo se tornaram, pela acção implacável da evolução acelerada do século XIX, em armas terríveis que ela brandiu em seu exclusivo proveito.

A civilização de base capitalista tornou inoperantes os princípios de liberdade individual e de igualdade, para não falar já na fraternidade que só por sarcasmo se pode pretender que esteja incluído hoje entre as ideias dominantes da governação.

Um elemento novo entrou em cena — a máquina, cujo desenvolvimento permitiu, como diz Ayguesparse no seu luminoso estudo sobre *Maquinismo e Cultura*, «uma formidável síntese entre uma classe — a burguesia, e uma doutrina económica — o capitalismo».

E essa síntese, que teria sido fecunda se a máquina tivesse sido posta, como devia, ao serviço do homem, tornou-se, pelo contrário, monstruosa, porque produziu, não a emancipação, mas a escravização económica do trabalhador.

O homem escravo da coisa — eis a grande condenação, no campo moral, do regime social contemporâneo (3).

Contra esse regime social, levantam-se de todos os lados os protestos e as flagelações; vamos ver dois exemplos.

(1) V. nota da página 78.

(2) O mesmo fenómeno se deu fora da França nos restantes países de civilização burguesa.

(3) V. nota I no final da conferência.

Ouçamos, em primeiro lugar, o que a este respeito diz o Dr. Harold Laski, professor da Universidade de Londres, no seu livro *Gramática da Política*:

«Podem resumir-se brevemente os resultados deste sistema. A produção efectua-se com desperdícios e sem plano conveniente. As «comodidades», os serviços necessários à vida da comunidade, não são repartidos de modo a satisfazer as necessidades ou a produzir o máximo de utilidade social. Construimos cinemas sumptuosos e temos falta de casas de habitação. Gastamos em navios de guerra o dinheiro necessário para as escolas. Os ricos podem gastar num só jantar o salário semanal de um operário, enquanto o operário não pode enviar à escola os filhos insufficientemente alimentados. Uma rapariga rica gastará no seu primeiro vestido de baile mais do que o salário anual dos trabalhadores que o fizeram. Em suma, produzimos «comodidades» inúteis e distribuimo-las sem atender às necessidades sociais. Mantemos num parasitismo ocioso uma vasta classe cujos gostos exigem que capital e trabalho concordem em satisfazer necessidades sem nenhuma relação com os interesses humanos. E esta classe não se põe à margem da comunidade. Como tem o poder de tornar as suas exigências eficazes, estimula a imitação servil daqueles que procuram misturar-se a ela. A riqueza transforma-se em padrão de medida do mérito; e a recompensa da riqueza é a capacidade de fixar os níveis daqueles que procuram adquiri-la. Esses níveis são fixados, não para satisfação de um fim moral, mas do desejo de ser rico. Os homens podem começar a adquirir bens para assegurar a sua existência, mas continuam a adquirir para alcançar a distinção que lhes confere a propriedade. Ela satisfaz a sua vaidade e o seu amor do poder; permite-lhes harmonizar a vontade da sociedade com a sua. Resulta daqui o que pode logicamente espe-

rar-se de uma tal ambiência. Produzem-se bens e serviços, não para os utilizar, mas para tirar da sua produção elementos de posse. Produz-se para satisfazer, não exigências legítimas, mas aquelas que são susceptíveis de render. Aniquilam-se as fontes naturais de riqueza. Falsificam-se as «comodidades». Lançam-se negócios fraudulentos. Corrompem-se os legisladores. Falsificam-se fontes do saber. Realizam-se alianças artificiais para aumentar o preço das «comodidades». Exploram-se, com uma crueza por vezes terrível, as raças atrasadas da humanidade...».

Isto diz o professor Laski. Demos agora a palavra ao Dr. Oliveira Salazar, o qual, num discurso recentemente pronunciado em Lisboa, menos violento nos termos, não formulou, no entanto, uma crítica menos condenatória. São suas estas palavras, que transcrevo do *Século* de 17 de Março de 1933:

«Nós adulterámos o conceito de riqueza, desprendemo-la do seu fim próprio de sustentar com dignidade a vida humana, fizemos dela uma categoria independente que nada tem que ver com o interesse colectivo nem com a moral e supusemos que podia ser finalidade dos indivíduos, dos Estados ou das nações, amontoar bens sem utilidade social, sem regras de justiça na sua aquisição e no seu uso. Nós adulterámos a noção de trabalho e a pessoa do trabalhador...»

Pois muito bem. É para sustentar *isto* que se cria e desenvolve, por toda a parte, um aparelho repressivo de cuja actuação brutal todos os dias temos novas afirmações.

À falência completa no campo moral, vem juntar-se, como é do conhecimento de todos, a falência total no campo económico. A pro-

letarização de vastas camadas da população de todo o mundo, a destruição dos meios de consumo, que a todo o momento se realiza, no meio de povos a quem falta o indispensável, a existência de dezenas de milhões de desempregados, são factos que falam bem eloquentemente por si e dispensam, por isso, comentários.

Nunca se viu um anquilosamento tão completo e tão rápido de uma classe dirigente e nunca se viu também um tão grande apego ao poder. É que a crise atinge os fundamentos da orgânica. Por isso, como dizia acima, a luta é mais crua do que nunca.

E também mais ampla do que nunca, precisamente porque os alicerces estão atingidos.

Há alguns séculos, os destinos de um agrupamento social jogavam-se no próprio local em que o agrupamento vivia. Hoje, o futuro de nós, portugueses, joga-se tanto em Portugal, como em Nova York ou nas planícies do norte da China.

«O desenvolvimento do nacionalismo foi a obra do século XIX, o do internacionalismo será a do século XX». Estas palavras, proferidas há pouco na Sorbonne por Lord Lytton que, por encargo da Sociedade das Nações, presidiu à comissão que foi à China investigar das causas do conflito sino-japonês, merecem ser meditadas pelos adeptos do nacionalismo.

Não por aqueles para quem a pátria é um balcão de compra e venda, esses não precisam de pensar, nem têm tempo para isso; mas pelos que, nem por estarem num campo errado, merecem menos consideração e respeito, desde que nele militem com boa fé e desinteresse.

Poucas questões há que tenham sido tão mal postas como esta do nacionalismo e isso não admira, pois foram sempre as águas turvas o ambiente propício para as manobras de certos pescadores...

Se ser nacionalista é, reconhecendo a exis-

tência de grupos étnicos com características próprias, trabalhar pelo desenvolvimento desses grupos (nações), defender e propulsionar a autonomia das suas instituições de vida e cultura, num largo espírito de colaboração com os outros grupos étnicos, como pode deixar de ser-se abertamente, francamente, nacionalista?

Mas se ser nacionalista é ver em cada estrangeiro um inimigo em potência⁽¹⁾, viver em guerra económica permanente com as outras nações; encerrar-se cada um em sua casa para que, fora do controle da parte sua e pura dos outros grupos, uma certa classe possa viver parasitariamente sobre outra; se ser nacionalista é isto e depois, quando interesses internacionais da alta indústria e da alta finança o exigem, ir-se estupidamente para uma matança estúpida, para que, sobre as fronteiras regadas de sangue generoso, se unam de novo, em faina macabra, mãos sinistras a mercadejar; se ser nacionalista é isto, pergunto como se pode sê-lo sem que a razão condene e o coração se insurja.

Aos nacionalistas de boa fé direi, e é só para esses que falo, que o defender-se hoje a divisão da humanidade em grupos hostis ou, pelo menos, indiferentes uns aos outros, separados em compartimentos estanques, é trabalhar contra a linha geral da evolução histórica, é contrariar o princípio de unidade que a determina, é retardar, quem sabe por quanto tempo, o advento de um período de civilização superior, cujo desejo têm porventura inscrito no coração.

Agora, é toda a humanidade que é chamada a resolver o seu próprio problema, está tudo em causa, há que refazer tudo, e por isso o nosso tempo é o mais perturbado e inquieto

(1) Houve, no entanto, uma certa altura em que ser nacionalista significava defender os interesses de certas potências estrangeiras; não me parece que o progresso seja grande...

de todos os tempos que o homem tem vivido. A ocasião é única também para realizar finalmente um grande passo nessa síntese grandiosa do indivíduo e da colectividade.

Aquela luta multimilenária, a que comecei por me referir no início desta palestra, vai entrar numa fase decisiva.

Conseguirá a Humanidade, num grande estremecimento de todo o seu imenso corpo, tomar finalmente consciência de si mesma, revelar a si própria a sua alma colectiva, feita do desenvolvimento ao máximo, pela cultura, da personalidade de todos os seus membros?

Eis a grande tarefa que está posta, com toda a sua simplicidade crua, à nossa geração — *despertar a alma colectiva das massas*.

Ou ela a realiza e ascendemos a um estado superior de *unidade*, ou fracassa, e amanhã assistiremos a um novo gesto de renúncia e o individual continuará a sobrepor-se ao colectivo numa adulteração criminosa da moral social.

Precisamos, para não trair a nossa missão, de nos forjarmos personalidades íntegras, de analisarmos o nosso tempo e de actuar como homens dele. Como homens que sabem distinguir o fundamental do acessório, que, na resolução de um problema, não se deixam perder no emaranhado dele, nem cegar pelas nuvens de fumo que os interessados pela sua não solução a todo o momento e infatigavelmente lançam.

Dessas nuvens de fumo, tantas e de tão variados aspectos, quero referir-me hoje a uma apenas — a confusa questão das elites. Confusa e delicada.

Vejam, em primeiro lugar, qual é, a este respeito, a tese corrente. Com pequenas variantes, pode exprimir-se assim. Em todos os tempos, o progresso da civilização, o florescimento das ciências, das letras e das artes, foi obra de uma elite, mais ou menos reduzida; e deve ser sempre assim — a massa geral da humanidade não é acessível a certas

preocupações que só espíritos elevados sentem; a guarda e a propulsão das instituições culturais da sociedade deve ser portanto confiada a um grupo restrito, a uma elite, a qual, só, tem direito a orientar superiormente os destinos do agregado.

Muito bem. Analisemos agora com algum cuidado esta tese para ver o que nela se contém de verdadeiro.

Uma dúvida se forma, logo após o primeiro exame: as elites propulsoras, em cada período histórico, do desenvolvimento científico, literário, artístico, foram realmente aquelas que, nesse período, ditaram a forma de constituição da sociedade, a orientaram, regularam o seu funcionamento orgânico? por outras palavras, elite científica e cultural e classe dirigente, são a mesma coisa? ou, melhor ainda, a primeira está compreendida na segunda? Uma consulta à história fornece resposta imediata pela negativa. É abrir esse grande livro e prestar ouvidos aos queixumes e protestos com que aqueles homens verdadeiramente de elite, aqueles que, alguns séculos mais tarde, dão o tom ao mundo da alma e do pensamento, respondem às perseguições que os seus contemporâneos das classes dirigentes lhes movem.

Incompreensão completa duma forma nova de pensar, temor de que um ataque à rotina abale os alicerces de um poderio egoísta de natureza espiritual ou material, vários são os elementos que se conjugam para fazer desses homens um grupo à margem, que só à força de heroísmo consegue conservar aceso, e transmitir às gerações seguintes, o facho da cultura.

Passam-se ao menos as coisas de maneira diferente no século em que vivemos? Devemos confessar, em homenagem àquilo que temos como a verdade, que, apesar de as condições actuais de vida constituírem, dentro de certos limites, um meio mais propício para a luta de ideias, não deixa porém de ser certo que a actuação das elites, sempre que queira

exercer-se contra os interesses da classe dirigente, está sujeita a perigos análogos aos de outros tempos. Quando é preciso, queimam-se livros, demitem-se professores, fecham-se fronteiras, abrem-se prisões, e se na Indochina um povo pretende conservar a autonomia das suas instituições e defender-se contra a civilização do álcool que querem impor-lhe, lá estão os tribunais franceses para distribuir, com mão larga e generosa, em nome dos sagrados princípios da liberdade, da igualdade e da fraternidade, dezenas de condenações à morte (1).

Mas, se a identificação de classe dirigente e elite cultural nunca se deu nem se dá, para quê o pretender estabelecê-la?

Razão evidente e única — porque a classe dirigente, não tendo que fazer de momento, nem necessitando, dessas antecipações geniais no domínio da ciência e da cultura (aos seus autores é dada a liberdade de morrer na miséria), precisa no entanto daquilo a que podemos chamar valores científicos e culturais de segundo plano, carece de tomar posse do que da ciência vai derivando constantemente para as aplicações, a fim de adquirir uma base mais sólida de existência e domínio. E como, por outro lado, ela sabe bem que mal vai ao seu poderio quando ele é exclusivamente de natureza material, fabrica, para seu uso próprio, um conceito novo de elite, deformador do verdadeiro, e, armada com esse conceito novo e servida por aqueles que se prestam a dar-lhe corpo, pretende aparecer como suporte único do movimento cultural, relegando para o domínio do subversivo, a que é preciso dar caça, tudo aquilo que contrariar os seus cânones.

(1) Estas palavras foram escritas em 1933. Se o fossem agora é evidente que outros e mais dramáticos exemplos teriam sido escolhidos. Onde está a elite cultural alemã? Einstein? Freud? Onde está a elite que dirigiu o corpo hoje esfacelado da Checoslováquia? e a da Espanha? (Nota da 2.ª edição, 1939).

E devemos concordar em que tem realizado a primor essa tarefa. O trabalho de submissão, de lamber de botas, da parte das chamadas camadas intelectuais, tem sido duma perfeição dificilmente excedível. Digamos, para irmos até ao fim, que os mais excelsos nesse mister são frequentemente aqueles que, partidos das camadas ditas inferiores, se guindaram, umas vezes a pulso, outras em acrobacia de palhaço, a posições que deveriam utilizar para defesa dos bens espirituais e que só usam para trair os seus antigos irmãos no sofrimento.

Problema grave, e tanto, que não faltam as vozes que, para o resolver, advogam um abandono da cultura por verem nela, não um meio de elevar, mas sim de diminuir a condição humana. Terão razão os que assim pensam? Conduz a civilização necessariamente a uma escravização do homem?

Para podermos responder a estas perguntas, temos que começar por definir os termos e pôr depois convenientemente o problema.

O que é o homem culto? É aquele que:

1.º — Tem consciência da sua posição no cosmos e, em particular, na sociedade a que pertence;

2.º — Tem consciência da sua personalidade e da dignidade que é inerente à existência como ser humano;

3.º — Faz do aperfeiçoamento do seu ser interior a preocupação máxima e fim último da vida.

Ser-se culto não implica ser-se sábio; há sábios que não são homens cultos e homens cultos que não são sábios; mas o que o ser culto implica, é um certo grau de saber, aquele precisamente que fornece uma base mínima para a satisfação das três condições enunciadas.

A aquisição da cultura significa uma elevação constante, servida por um florescimento do que há de melhor no homem e por um

desenvolvimento sempre crescente de todas as suas qualidades potenciais, consideradas do quádruplo ponto de vista físico, intelectual, moral e artístico; significa, numa palavra, *a conquista da liberdade*.

E para atingir esse cume elevado, acessível a todo o homem, como homem, e não apenas a uma classe ou grupo, não há sacrificio que não mereça fazer-se, não há canseira que deva evitar-se. A pureza que se respira no alto compensa bem da fadiga da ladeira.

Condição indispensável para que o homem possa trilhar a senda da cultura — que ele seja economicamente independente. Consequência — o problema económico é, de todos os problemas sociais, aquele que tem de ser resolvido em primeiro lugar. Tudo aquilo que for empreendido sem a resolução prévia, radical e séria, desse problema, não passará, ou duma tentativa ingénua, com vaga tinta filantrópica, destinada a perder-se na impotência, ou de uma mão-cheia de pó, atirada aos olhos dos incautos.

Não deve também confundir-se cultura com civilização.

O grau de civilização de um povo mede-se pela quantidade e qualidade dos meios que a sociedade põe à disposição do indivíduo para lhe tornar a existência fácil; pelo grau de desenvolvimento dos seus meios de produção e distribuição; pelo nível de progresso científico e utilização que dele se faz para as relações da vida económica.

O seu grau de cultura mede-se pelo conceito que ele forma do que seja a vida e da facilidade que ao indivíduo se deve dar para a viver; pelo modo como nele se compreende e proporciona o consumo; pela maneira e fins para que são utilizados os progressos da ciência; pelo modo como entende a organização das relações sociais e pelo lugar que nelas ocupa o homem.

Assim, um povo pode ser civilizado e não ser culto e vice-versa. Não pode, por exemplo, comparar-se o nível desenvolvido de

civilização do povo americano actual com o incipiente do povo ateniense do período áureo, como não podem também comparar-se os seus respectivos graus de cultura, muito superior o deste ao daquele⁽¹⁾. Entre um Péricles e um Hoover medeia uma distância enorme, aquela mesma que separa o povo que applicava a lei do ostracismo para evitar que um individuo influente pudesse exercer coacção sobre a liberdade dos cidadãos, daquele outro povo em que há anos foi possível que um grupo de homens metesse outro homem, porque era revolucionário, dentro de uma gaiola e o andasse mostrando de terra em terra, a tanto por cabeça.

Definidos os termos, podemos agora resolver o problema posto — o problema do homem, unidade social, perante a cultura.

Se o desenvolvimento da civilização, entendida como acima, só por si, pode conduzir ao automatismo e à consequente escravização do homem, o que nos é mostrado pela civilização capitalista actual, é isso devido, não a um alto mas sim a um baixo grau de cultura que permite que os meios de progresso sejam utilizados num ambiente de completo abandono dos objectivos superiores da vida.

E esse abandono, e a adulteração que se lhe segue, só podem ser evitados pelo reforçamento intenso da cultura; esta aparece-nos assim como um condicionador e correctivo constante da marcha da civilização.

Como se põe então agora a questão das elites? Evidentemente que o cultivo e progresso da ciência, bem como a sua applicação à vida corrente da sociedade, hão-de ser sempre obra de grupos especializados — pros-

(1) Fala-se, evidentemente, do tipo médio da classe superior num ou noutro caso. Se nos reportarmos às classes inferiores, não sei se haverá grande diferença entre a condição de um negro das plantações de algodão e a de um escravo grego, fosse ele escravo de um Aristóteles...

pectores e realizadores; chamemos-lhes elites, se assim o quiserem — existem e existirão, como existem e existirão as elites das outras profissões e actividades.

Mas o que não deve nem pode ser monopólio de uma elite, é a cultura; essa tem de reivindicar-se para a colectividade inteira, porque só com ela pode a humanidade tomar consciência de si própria, ditando a todo o momento a tonalidade geral da orientação às elites parciais.

Só deste modo poderá levar-se a bom termo a realização daquela tarefa essencial que atrás vimos ser o problema central posto às gerações de hoje — *despertar a alma colectiva das massas* (1).

Houve quem dissesse um dia que as gerações dos homens são como as das folhas, passam umas e vêm outras.

Está na nossa mão o desmentir o significado pessimista desta frase.

Só figuram de folhas caídas, para uma geração, aquelas gerações anteriores cujo ideal de vida se concentrou egolisticamente em si e que não cuidaram de construir para o futuro pela resolução, em bases largas, dos problemas que lhes estavam postos, numa elevada compreensão do seu significado humano.

Essa concentração egoísta tem um nome — *traição*, e, se hoje traírmos, será esse o nosso destino — ser arredados com o pé, como se arreda um montão de folhas mortas.

E não queiramos que amanhã tenham de praticar para connosco esse gesto, impiedoso mas justiceiro, exactamente o mesmo que hoje nos vemos obrigados a fazer para com aquilo que, do passado, é obstáculo no nosso caminho.

(1) V. nota II no final da conferência.

NOTA I. — *O problema do maquinismo.* O processo da máquina e da sua acção na vida social contemporânea tem sido feito, nos últimos anos, muitas vezes, e com diferentes orientações. Há quem a acuse dos maiores males de que actualmente enferma a civilização — o desemprego, a super-produção, o automatismo do homem, e há quem leve a delicadeza da sua sensibilidade ao ponto de se cobrir de suores frios à ideia do que seria um mundo regido pela máquina, estandardizado, frio e sem poesia. O tema é evidentemente daqueles que se prestam à fantasia...

Mas dum estudo sério dele ressaltam dois factos fundamentais:

1.º — A existência da máquina na vida de hoje é um *facto* contra o qual não há que fantasiar nem lamuriar. Ela veio a introduzir-se lentamente, ganhando pouco a pouco novos campos e já agora não é concebível o desenvolvimento normal da vida dos povos sem ela; mais, ela está destinada a tomar nesse desenvolvimento uma parte cada vez maior.

2.º — Os males não estão na máquina mas na *desigualdade de distribuição dos benefícios que ela produz*. O mal não está em que se reduza de 100 a 5 o número de horas necessário para a fabricação de dado produto, mas sim em que o benefício correspondente seja reservado a uma minoria, escravizando a essa má distribuição a maioria. Quer dizer, o problema fundamental é, não um *problema de técnica*, mas um *problema de moral social*. E não é aos técnicos que se pode entregar a sua resolução. É a *homens*.

NOTA II — O leitor poderá perguntar se o *despertar da alma colectiva das massas* tem algum significado real para a marcha da civilização tal como foi esquiçada atrás, ou se pelo contrário, a experiência dos últimos anos mostrou ou não que esse despertar se deu (Alemanha e Itália) num sentido de expansão imperialista e, conseqüentemente, de regressão de liberdade.

O conjunto dos movimentos que se têm dado na Europa nos últimos anos é muito complexo e sai fora dos limites duma simples *nota* a sua análise aprofundada. Podem, no entanto, dar-se algumas perspectivas dessa análise.

Em primeiro lugar, todo esse complexo de fenómenos se torna totalmente incompreensível se o ponto de vista para o seu estudo não for convenientemente escolhido. Mais de uma pessoa, conhecendo a Alemanha por lá ter habitado, ao verificar a existência, lado a lado, de manifestações da mais alta civilização e da

mais negra barbaridade⁽¹⁾, se declara incapaz de perceber. Alguns falam de psicose colectiva, outros do poder magnético de um grande visionário, etc., etc., tudo explicações tão insuficientes que melhor será confessar incapacidade de compreender.

Ora as coisas tomam talvez jeitos de se esclarecerem se se considerar a situação da Europa nos últimos vinte anos e a posição da Alemanha dentro dela.

Recorde-se o final da guerra, a revolução alemã, o tratado de Versalhes e o que ele representou como contradição brutal entre os objectivos apregoados da luta e os resultados reais da vitória; o que ele representou como fonte de humilhação material e moral para o povo alemão. Recordem-se as dificuldades da vida da República de Weimar, com base de apoio no partido social-democrata e recorde-se, sobretudo, o grande, o tremendo erro da política europeia pós-guerra — a política egoísta praticada durante anos pela França em relação a essa República. O mais elementar senso político indicava que era o interesse da França e da Europa ajudar a social-democracia alemã que poderia transformar-se num grande factor de paz e de liberdade no centro da Europa. Mas os Poincaré, os Laval, os Tardieu não o viram assim — a sua pequenez de horizonte político não lhes permitiu que fizessem mais do que exactamente o contrário do que deveriam fazer. A despeito da boa-vontade dum Briand — o único homem de Estado da França nesse período, com um pouco de humanidade — a França é a grande responsável do que se está passando agora.

Mas não caímos no erro fácil de atribuir tudo aos erros dos homens. O desejo natural de largas camadas da população francesa de não deixar fugir os frutos duma vitória dificilmente conseguida, por um lado; um mau estado da economia mundial que gerou uma política geral de nacionalismo económico — exactamente o contrário do que deveria racionalmente fazer-se, mas os interesses de classe sobrepuseram-se, por toda a parte, aos interesses gerais —; a crise terrível que a partir de 1929 se desencadeou sobre o mundo capitalista; tudo isto são razões suficientemente fortes para explicar que a política desses homens dificilmente poderia ter sido diferente daquilo que foi. Muito bem, mas eu pergunto — o que é então um estadista? (2).

A partir de 1931, as coisas levaram na Alemanha jeito de se precipitarem. No primeiro plano da acti-

vidade política, na *fachada*, quatro forças principais: a social-democracia e o partido católico ao centro, o nacional-socialismo de Hitler e o partido comunista, aos lados. As forças do centro, passivas, detinham ainda o poder, num movimento duma regularidade de evolução surpreendente — a social-democracia abandonando dia a dia, com sorrisos, elegantemente, as alavancas que tinha na mão, em proveito do partido católico de Brüning, o qual as havia de transmitir, também elegantemente, a Hitler (3). As forças dos lados, igualmente activas e percucientes, lutavam diariamente nas ruas pelo poder, mas as possibilidades não eram as mesmas, a luta era desigual — havia as forças por detrás da *fachada*. Estas congregaram-se em dois núcleos principais: o exército; a finança e grande indústria. Com problemas particulares, com interesses particulares, o sentido de acção destas duas forças, quando se aproximasse a hora do perigo comum, não oferecia porém dúvidas. Foi o que realmente se deu — *Hitler subiu ao poder numa altura em que as suas forças eleitorais estavam em regressão* como o haviam mostrado umas eleições realizadas meses antes. Quer isto dizer que os seus adversários directos mais perigosos — a extrema esquerda comunista — estivessem a ponto de tomar o poder? Não, mas representavam, em todo o caso, para a armadura capitalista alemã um perigo suficiente para que esta resolvesse entregar-se a quem, não sendo de todo um aliado, oferecia no entanto garantias largas de acomodamento.

Mas a corrente das coisas é mais forte do que a vontade dos homens. Hitler atrairá a si uma grande parte da juventude alemã, agitando duas ideias fundamentais — internamente, uma revolução socialista externamente, o repúdio da vergonha de Versalhes e a miragem da construção dum novo grande império

Não é impunemente que se faz apelo, mesmo demagógicamente, às massas. Uma vez elas postas em movimento atrás duma bandeira, só três coisas são possíveis: ou dar-lhes inteira satisfação, cumprindo o programa traçado, ou, se isso não for possível, uma de duas — tomar outra força de apoio e fazê-las retornar à chicotada a quietude amarga anterior, o remoer de mais uma desilusão; ou agitar-lhes diante dos olhos espantelhos sucessivos, cuja acção perniciosamente explique a impossibilidade de cumprimento do programa.

É a esta última extremidade que Hitler se tem visto reduzido, a despeito de alguns triunfos sérios

(1) V. atrás, pág. 84, a distinção entre *civilização* e *cultura*.

(2) A questão está imperfeitamente posta. Em termos de maior rigor deve-se pô-la assim: — é possível haver um grande estadista duma classe, em período de declínio dessa classe?

(3) Na Áustria passou-se mais tarde o mesmo. Só os operários de Viena tentaram romper a certa altura a elegância das atitudes. Mas foram metidos na «ordem» a tiros de caução.

em política exterior. Incapaz de realizar o socialismo interior — a ala esquerda do seu partido pagou caro, com sangue, a impaciência que manifestou a esse propósito — incapaz de encontrar, por agora, força maior do que a da própria imensidade que pôs em movimento, recorre aos espantelhos: o judeu, o comunismo, o espaço vital, etc.

Dá-se aqui uma circunstância curiosa que empresta ao drama toda a sua grandeza histórica. O fundo das acusações de Hitler às chamadas democracias é quase sempre justo: que a Alemanha foi tratada em humilhantes termos após a guerra, está certo; que a Alemanha está inferiorizada na posse de recursos materiais — matérias-primas e meios de compra — em proveito das «democracias refasteladas», está certo também. O que já, evidentemente, não está certo são as consequências que disso ele pretende tirar. Mas é este fundo de justiça, inegável, que explica a adesão de grande parte do povo alemão a Hitler e a facilidade com que a parte menos pura das suas tropas de choque se entrega, no meio de silêncio geral, a cenas que são a vergonha dum século.

Assistimos aqui a um despertar das massas, mas apenas num sentido, digamos, *negativo*; um despertar que reage apenas contra a injustiça de que se sente vítima; um despertar truculento que não atinge a profundidade do sentido da reflexão e da justiça; acima de tudo, um despertar orientado sem grandeza. Mas essa profundidade e essa grandeza, não é já sob a conduta de Hitler que podem ser atingidas. Sem a envergadura duma grande figura histórica (Lutero, numa situação análoga de injustiça material — a divisão do mundo pelos reis de Portugal e Espanha feita no final do século xv pelo papa Alexandre Borgia — soube dar ao movimento de reacção do norte contra essa injustiça uma direcção extremamente fecunda dentro das realidades nacionais) Hitler apega-se ao que é fácil, ao que é transitório — a expansão imperialista — para mascarar a sua falência na política interior. O resto ultrapassa-o. De modo que todo o problema está nisto — *saber em que grau o despertar da alma colectiva das massas na Alemanha é independente de Hitler e quando, afastado este, esse despertar entrará na fase, por enquanto não atingida, das realizações duradouras e fecundas.*

Será preciso dizer que aqui se contém, neste momento, a chave dos destinos da Europa?

Mas não nos iludamos. Se o enunciar da questão parece fácil e claro, a sua resolução afigura-se-me extremamente difícil. Ao analisá-la do ponto de vista internacional (e só assim pode ser estudada) surgem as complicações, tais e de tão estranho carácter, que se não enxerga, no meio de tantas possibilidades,

qual o caminho necessário de saída. A hegemonia de Hitler sobre o centro da Europa cortando-a em duas, do Báltico ao Mediterrâneo, hegemonia conseguida através da aliança com a Itália (a primeira grande vítima futura de tudo isto) é um facto inegável, uma realidade política, económica e geográfica. Mas grande nau, grande tormenta; essa hegemonia acabou por provocar, como reacção, uma conjugação poderosa de forças opostas a qualquer novo acto de expansão imperialista na Europa. À primeira vista, parece ser Hitler o inimigo n.º 1 dessas forças postas ao serviço da paz (1) e por um lado assim é; no entanto, Hitler é hoje um homem absolutamente indispensável na Europa capitalista (2); as consequências do seu desaparecimento seriam incalculáveis (que se não esqueça disto quem quiser perceber a política britânica dos últimos anos. Muita coisa obscura se torna então clara). Assim o compreendeu Chamberlain — o único estadista que a burguesia encontrou depois da guerra, com tudo o que de *pequeno* um estadista burguês hoje deve ter — aquele extraordinário Chamberlain, tão *ingénuo* enquanto houve democracias para destruir na Europa, aquele surpreendente Chamberlain que, sentindo Hitler perdido em Setembro passado, tão pressurosamente correu a salvá-lo com a farsa sinistra dos compadres de Munich! Ah! quanto daria Chamberlain (3) para que Hitler fosse um pouco mais cordato; haveria tanta possibilidade de entendimento, perspectivas de tão belos negócios... Mas aí reside o drama — Hitler (4) não pode ser cordato; nasceu do lado negativo duma catástrofe, e caminha às cegas para outra, incapaz de se manter no caminho normal do equilíbrio interno.

De modo que mais necessário e urgente que nunca, para pôr termo a esta coisa sórdida, anti-racional, a esta macacada que é a política europeia presente, mais necessário do que nunca é e continua a ser *despertar a alma colectiva das massas.*

Lisboa, Maio de 1939.

Estas palavras foram escritas em Maio passado. Hoje a Europa está de novo em guerra. O leitor poderá verificar, à luz dos acontecimentos actuais, em que medida a análise feita corresponde (melhor —

(1) Esta análise precisava de ser completada por virtude da participação da U. R. S. S. nesse sistema defensivo; mas este problema, só por si, necessitava dum estudo à parte.

(2) Coisa paradoxal, mas verdadeira — Hitler é, ao mesmo tempo, o homem que mais tem trabalhado para precipitar o fim da Europa capitalista.

(3) Leia-se: a alta finança inglesa.

(4) Leia-se: o nacional-socialismo alemão.

correspondia) à realidade. A quem vir atitude de injustiça para com Chamberlain nas referências que lhe fiz, recomendo a leitura dos manifestos lançados pela aviação britânica em território alemão nos primeiros dias de guerra: «A Alemanha não estava ameaçada e não era tratada com injustiça. Não se lhe permitiu a ocupação da Renânia, a realização do «Anschluss» e recuperar em paz (1) os alemães dos sudetas?... Todas (2) as ambições alemãs poderiam ter sido satisfeitas pacificamente, desde que fossem justas...» (3).

Mas agora, que vamos arrastados pelo turbilhão, os acontecimentos ultrapassam-nos com uma rapidez que nos não deixa por vezes fixar as cambiantes momentâneas de perspectiva.

Uma coisa me parece no entanto certa — *esta Europa entrou na fase central da carreira louca da morte; começou a descida aos infernos. E a Europa nova há-de surgir (daqui a quanto tempo?) aquecida pelo sol do oriente, aquele longínquo oriente onde se estão jogando os verdadeiros destinos do mundo.*

Lisboa, 8 de Setembro de 1939.

(1) !!!

(2) Todas?! até que fronteira?

(3) Devemos entender que as acções anteriores da Alemanha (Espanha, Checoslováquia) foram justas e favorecidas por negociações amigáveis?

MOVIMENTO MATEMÁTICO

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS

O Comité Organizador convida todas as pessoas interessadas a assistir ao Congresso Internacional de Matemáticos que se realiza em Vancouver, Canadá, de 21 a 29 de Agosto de 1974. Apresentamos a seguir um resumo do programa.

Vancouver é um centro turístico muito popular durante o Verão e o Congresso terá lugar em plena estação turística. Os interessados deverão preencher e enviar o impresso de inscrição (1) tão depressa quanto possível.

PROGRAMA

Todas as sessões programadas terão lugar na Universidade de British Columbia.

Considerando que um dos objectivos principais do Congresso é promover contactos mensais entre matemáticos, os organizadores pretenderam integrar os aspectos científico e social do programa. Providenciou-se para dar às pessoas frequentes oportunidades de se encontrarem e conversarem em ambiente agradável. O tamanho e a localização do recinto da Universidade contribuem para se atingir esta finalidade.

Com o mesmo objectivo estão sendo planeados passeios, piqueniques e encontros para grupos relativamente pequenos de pessoas. O domingo será um dia de trabalho leve, prevendo-se que cada pessoa tenha considerável tempo livre durante vários dias, com pelo menos dois dias, sem sessões normais de trabalho no seu domínio de interesse.

CONFERÊNCIA DE CARÁCTER GERAL

Haverá cerca de 16 conferências com a duração de 1 hora, feitas por pessoas convidadas, cada uma das quais informará os membros do Congresso sobre a evolução geral da Matemática num ramo importante e será acessível à maioria dos matemáticos, mesmo trabalhando noutros ramos.

Está previsto que estas conferências se efectuarão numa sala de teatro da Universidade com 450 lugares e transmitidas por televisão a cores para todo o recinto. Haverá monitores de televisão em muitas salas comuns e em algumas residenciais. As conferências serão gravadas, podendo ser repetidas em ocasiões convenientes num grande écran servido por 450 lugares ou, se necessário, em pequenas salas equipadas com monitores de televisão.

CONFERÊNCIAS ESPECIALIZADAS

Aproximadamente 150 membros serão convidados a fazer conferências de 45 minutos, nas quais serão apresentados desenvolvimentos em ramos mais especializados da matemática. Terão obviamente uma índole mais técnica, sendo principalmente dirigidas aos interessados nos respectivos assuntos. Estes foram agrupados nas 20 secções a seguir indicadas (os números entre parêntesis indicando o número aproximado de participantes em cada secção).

1. Lógica Matemática. Fundamentos da Matemática (7)
2. Álgebra (13)
3. Teoria dos Números (7)
4. Geometria algébrica (7)
5. Grupos algébricos e subgrupos discretos (7)
6. Geometria (5)
7. Topologia algébrica e diferencial (9)
8. Geometria diferencial. Análise sobre «manifolds» (7)
9. Topologia geral. Análise real e funcional (8)
10. Álgebras de operadores. Análise harmónica. Representações de grupos (8)
11. Probabilidades e estatística matemática. Potencial. Teoria da medida e da integração (10)
12. Análise complexa (7)
13. Equações de derivadas parciais (10)
14. Equações diferenciais ordinárias. Sistemas dinâmicos (7)
15. Teoria do controlo e problemas de optimização (7)
16. Física matemática. Mecânica (10)
17. Matemática numérica (8)
18. Matemática discreta. Teoria da computação (10)
19. Estatística aplicada. Matemática nas ciências sociais e biológicas (7)
20. História e Educação (5)

PEQUENAS COMUNICAÇÕES

Os membros do Congresso terão oportunidade de apresentar comunicações orais de 15 minutos sobre o seu trabalho matemático. Todos os interessados em fazer tais comunicações são solicitados a submeter resumos (em inglês, francês, alemão ou russo) ao

Comité Organizador, até 15 de Abril de 1974. Estes resumos serão publicados e distribuídas cópias no Congresso. Cada resumo deve ser dactilografado a preto em papel encorpado branco de boa qualidade, com os símbolos manuscritos também em tinta preta, sendo a mancha impressa 20 cm \times 10 cm no máximo, de modo a permitir a reprodução fotográfica. Nome e apelido (em letras maiúsculas), filiação em instituição científica, país e título do trabalho (por esta ordem), serão escritas a um espaço nas duas primeiras linhas, reentrantes 1,25 cm em relação à mancha escrita. Uma classificação do assunto deve figurar no topo da página fora do rectângulo escrito.

SEMINÁRIOS

Está no espírito do Congresso encorajar actividade matemática por pequenos grupos de pessoas, agindo por sua própria iniciativa. Por esta razão, será feito o possível por concentrar as sessões de cada secção em poucos dias sucessivos, de modo a deixar o resto do tempo livre para actividades individuais.

Aos membros do Congresso que desejem promover a realização de seminários, recomenda-se que tratem entre si da sua organização, antecipadamente ou durante o encontro, procedendo depois à requisição de uma sala por tempo determinado, num serviço próprio a funcionar na zona de inscrição. Para manter o espírito de informalidade e de espontaneidade, as requisições de salas para seminários só são aceites depois de 20 de Agosto de 1974.

ACTIVIDADES NA UNIVERSIDADE DE SIMON FRASER E NA UNIVERSIDADE DE VICTORIA

Estas duas universidades manter-se-ão abertas durante o Congresso, sendo os participantes convidados a visitar as duas instituições. Alguns grupos poderão realizar aí os seus seminários, pelo que um certo número de salas de aula e residenciais será reservado para uso dos membros do Congresso.

ACTIVIDADES SOCIAIS

Vancouver tem uma situação geográfica singular, entre o mar e as montanhas. Praias e ilhas, lagos e correntes, parques e bairros exóticos (como o bairro chinês, o segundo do continente, com os seus numerosos restaurantes e armazéns), oferecem excelentes oportunidades de actividade turística.

ALOJAMENTO

Estará disponível na Universidade de British Columbia, alojamento para 3000 pessoas. Grandes

agrupamentos de quartos foram também reservados para o C. I. M. em hotéis, localizados principalmente no centro da cidade. Funcionará uma carreira de autocarros entre os hotéis do centro e a Universidade.

INSCRIÇÕES

Um impresso de inscrição⁽¹⁾ deve ser preenchido e enviado tão depressa quanto possível para

International Congress of Mathematicians University of British Columbia, Vancouver 8, B. C. Canada

PREÇOS DE INSCRIÇÃO

(em dólares canadianos)

- | | |
|------------------------------|----------|
| (1) Para membros ordinários, | |
| recebido antes de 30-6-1974 | \$ 40.00 |
| depois desta data | \$ 50.00 |
| (2) Para membros associados | \$ 20.00 |

É considerada membro associado uma pessoa acompanhante de um membro ordinário e que não participe nas actividades científicas do Congresso. Os membros associados não receberão cópias dos resumos nem das actas do C. I. M., mas gozarão todos os outros direitos dos membros ordinários.

Todas as crianças com menos de 12 anos de idade que acompanhem um membro ordinário serão cobertas por uma única inscrição de \$ 20.00.

Nenhuma despesa de inscrição recairá sobre uma criança se os únicos serviços requisitados para ela consistirem em alojamento exterior à Universidade.

CAUÇÃO

Como atrás dissemos, um depósito de \$ 30.00 é exigido para alojamento em hotel exterior. Esta quantia deverá ser enviada directamente ao hotel, no interesse do próprio participante.

PAGAMENTO

Todos os cheques e ordens de pagamento devem ser emitidos em moeda canadiana e pagáveis a: International Congress of Mathematicians.

DEVOLUÇÃO

Em caso de desistência recebida pelo Comité Organizador antes de 1 de Agosto de 1974, o montante da inscrição (e a inscrição, quando exista) será devolvido na totalidade.

⁽¹⁾ A «Gazeta de Matemática» fornecerá uma cópia do impresso de inscrição a quem o solicitar.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS
MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Estatística I — Exame
Final — 4.º Semestre — 2-4-1973.

5810 — 1) Dada a distribuição de valores:

11 12 14 15 16 16

representando as classificações de um aluno no decurso do ano lectivo, calcule:

a) A média; b) A mediana; c) A moda; d) A variância.

2) Uma variável aleatória tem a densidade:

$$f(x|\theta) = 0 \text{ se } x < 0 \\ = \frac{x}{\theta^2} e^{-x^2/2\theta^2} \text{ se } x \geq 0.$$

Encontre a distância entre os quartis (1.º e 3.º) e mostre que a razão entre esta distância e o desvio padrão é independente de θ . Notando que o cálculo do desvio padrão pode ser reduzido a propriedades da normal, avalie essa razão.

3) Uma amostra de n observações (x_1, \dots, x_n) tem a densidade

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{1}{2}(x_i - \beta x_i - 1)} \quad (\text{tomando } x_0 = 0).$$

Formule um teste da hipótese $\beta = 1$. Pode aplicar o método usual (n grande) para determinar a região de rejeição?

4. Deduza a função característica de uma variável aleatória de densidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS
MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Estatística I — Exame
Final — Epoca de Recurso — 20-6-1973.

I

5811 — Mostre que para qualquer variável casual X , com distribuição $F(x)$, sob a condição de $E(X)$ ser finito, se verifica $\lim_{x \rightarrow \infty} x[1 - F(x)] = 0$.

II

Uma moeda com probabilidade p de sair escudo é atirada $n+2$ vezes (ordens $0, 1, 2, \dots, n, n+1$). Na prova de ordem i , define-se uma variável indicatriz I_i que toma o valor 0 se não sair escudo e 1 se sair. Define-se agora a variável X_j ($j = 1, \dots, n$) da forma seguinte: $X_j = I_j + I_{j-1}I_{j+1} - I_j(I_{j-1} + I_{j+1})$ (i.e. $X_j = 1$ se $I_{j-1} = I_{j+1} = 1 - I_j$ ou seja se o resultado na prova i é distinto do anterior e do posterior — verifique isso por uma tabela).

Calcule o valor médio e a variância de $\sum_{j=1}^n X_j$, supondo os I_j independentes.

III

Um par aleatório (X, Y) tem a densidade $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} |x^2 + y^2 - 2\rho xy| \right]$.

Supondo uma amostra de n pares $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, formule um teste de $\rho = 0$ (independência), ao nível de significância de 5% .

IV

Supondo que as variáveis casuais X e Y possuem a densidade de probabilidade conjunta

$$f(x, y) = x + y \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ = 0 \quad \text{senão,}$$

calcule o coeficiente de correlação entre X e Y .

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Estatística II — Exame Final — 1.ª Época — 30-7-1973.

I

5812 — Se for r o coeficiente de correlação dos n pares de observações (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$), calcule o coeficiente de correlação dos n pares

$$(\alpha x_i + \beta, \gamma y_i + \delta),$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, números reais.

II

Recorrendo exclusivamente às definições mostre que $E(F_{n,m})$, onde $F_{n,m}$ é uma variável com a distribuição F com, respectivamente, n e m graus de liberdade, é independente de n .

III

Considere uma amostra de dimensão n de um universo com densidade $f(x; \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < \theta < +\infty$; determine o estimador de máxima verosimilhança de θ .

IV

Na demonstração do teorema de NEYMAN-PEARSON uma das hipóteses assumidas foi a de que todos os espaços de probabilidade eram completos. Mostre que esta condição não é essencial, pois que, dado um espaço de probabilidade o seu completivo é sempre completo.

V

Suponha que é conhecido o vector P das probabilidades dos N acontecimentos elementares de um espaço finito e discreto, isto é,

$$\wedge/(P > 0), P < 1 \leftrightarrow 1$$

$$+ / P \leftrightarrow 1$$

$$p P \leftrightarrow N$$

e que qualquer acontecimento deste espaço é representado por um vector lógico, por exemplo U , de dimensão N , com componentes 1, correspondentes aos acontecimentos elementares contidos no acontecimento, e 0, se não for o caso. A probabilidade do acontecimento U , $P(U)$, será então dada por $+ / U / P$.

Dada uma matriz booleana X , de 2 linhas e N colunas, em que cada linha representa dois aconteci-

mentos quaisquer U e V , neste espaço, escreva uma função APL que permita calcular a probabilidade da união $U \cup V$.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Programação Matemática — Exame Final — 1.ª Chamada — 14-7-1973.

I

5813 — a) Designe por H_2 o (espaço de Hilbert) conjunto de todas as sucessões de números reais $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Com $x, y \in H_2$ e $\alpha \in R$ define-se

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots).$$

É H_2 um espaço convexo? Indique, pelo menos, um subconjunto convexo de H_2 . Justifique.

b) Defina a soma de dois conjuntos $K, L \subset R^n$ por

$$K + L = \{z \mid z = x + y, x \in K, y \in L\}$$

e o produto de K por $\alpha \in R$ por

$$\alpha K = \{z \mid z = \alpha x, x \in K\}.$$

Se $L \subset K$ com $\alpha = -1$ define-se a diferença $K - L = K + \alpha L$.

Mostre que com K e L convexos e $L \subset K$ é convexa a diferença $K - L$.

II

Suponha um programa linear dado sob a forma:

$$(L) \quad Q(x) = p^T x = \min \\ Ax \geq b, x \geq 0$$

onde $x, p \in R^n$, $b \in R^m$ e A é uma matriz (real) de m linhas e n colunas, de característica qualquer.

Determine o dual de (L) e mostre que os dois programas são equivalentes.

III

a) Converta para vírgula flutuante (computador hexadecimal de palavras de 32 bits) o valor real 16.25;

b) Estando armazenada na memória de um computador, por colunas, uma matriz A , triangular superior de ordem N , e um vector X de N componentes, escreva um subprograma em FORTRAN que efectue o cálculo de $B = A \cdot X$ e transmita as componentes de B ao programa principal.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Programação Matemática — Exame Final — 2.ª chamada — 28-7-1973.

I

5814 — a) Mostre que o conjunto das soluções admissíveis do programa convexo:

$$\begin{aligned} F(x) &= \min \\ f_j(x) &\leq 0 \quad (j = 1, \dots, m) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

onde F, f_1, \dots, f_m são funções convexas, é um conjunto convexo.

b) Dê um contra-exemplo mostrando que se sobre um conjunto convexo que não seja aberto está definida uma função convexa, ela não é obrigatoriamente contínua.

II

Prove que condição necessária e suficiente para que uma função f definida num subconjunto convexo K do espaço R^n seja convexa é que o conjunto $\{(x, \Phi) \mid x \in K, \Phi \in R, f(x) \leq \Phi\}$ seja convexo em R^{n+1} .

III

Considere o problema dos transportes para o exemplo seguinte: uma empresa produtora e distribuidora de um determinado produto possui 8 fábricas com as capacidades c_j ($j = 1, \dots, 8$); estas devem abastecer 200 clientes mensalmente com as quantidades q_k ($k = 1, \dots, 200$). A capacidade total de produção é ajustada periodicamente de tal modo que seja

sempre $\sum_{j=1}^8 c_j = \sum_{k=1}^{200} q_k$. O custo de transporte da fábrica j para o local k é a_{jk} . Pretende determinar-se quais as quantidades x_{jk} a enviar da fábrica j para o cliente k , de tal modo que sejam mínimos os custos totais dos transportes, i. e. $Q = \sum_j \sum_k c_{jk} x_{jk} = \min$.

a) Estabeleça a matriz A deste problema dos transportes;

b) Determine se o programa linear resultante é sempre solúvel;

c) Escreva um troço de programa FORTRAN que gere A de tal modo que conhecida a localização de um elemento seja possível determinar o seu valor evitando trabalhar com a matriz A , ou qualquer das suas submatrizes, em memória.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Informática Superior — 1.º Teste — 18-12-1973.

I

5815 — a) Mostre que se L e K são vectores lógicos com $(\rho L) = \rho K$ ou matrizes lógicas conformáveis com $(\rho L)[2] = (\rho K)[1]$, então são válidas as identidades duais

$$\begin{aligned} \wedge /, (L \vee \wedge K) &= \sim (\sim L) \wedge \vee \sim K \\ \wedge /, (L \wedge = K) &= \sim (\sim L) \vee \neq \sim K. \end{aligned}$$

b) Poderá tirar-se alguma conclusão relativamente à estrutura das funções (diádicas) $\vee, \wedge, =$ e \neq ? Deduza uma identidade dual para \lceil e \lfloor .

II

a) Supondo que a função (diádica) \lfloor não é uma função nativa num determinado interpretador, defina uma função diádica, MIN, que a simule.

b) Use MIN na definição de uma nova função MINIMO que simule $\lfloor /$ (redução por MIN) para argumentos tanto vectoriais como matriciais.

III

Dado um alfabeto A , mostre que a estrutura que se obtém definindo sobre A^* (conjunto das produções

finitas de A) a catenação de dois quaisquer dos seus elementos («strings») é um semi-grupo (semi-grupo livre gerado por A), com identidade.

- 2) Mostre que se $G \subset M$ então $G \cap (G \Delta M) = \emptyset$ e $G + (M \Delta G) = M$;
- 3) Indique qual o conjunto $A \Delta M \Delta G$.

Universidade de Luanda — CURSO SUPERIOR DE ECONOMIA — Estatística — 1.º Teste — 19-12-1973.

I

5816 — a) Mostre que, para qualquer sucessão de valores não agrupados x_1, \dots, x_n , designando por \bar{x} , G e H , resp., as médias aritmética, geométrica e harmónica, se tem sempre $\bar{x} \geq G \geq H$, verificando-se a igualdade se e só se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. (Sugestão: indução finita relativamente a n).

b) Considere uma distribuição de frequências (dados agrupados) com marcas de classe $x_i = 0, 1, \dots, n$ e frequências $f_i = \binom{n}{i}$. Calcule:

- 1) O intervalo de variação;
- 2) A média aritmética;
- 3) A mediana;
- 4) A moda;
- 5) O terceiro momento centrado, m_3 ;
- 6) A variância.

Se quizesse caracterizar sumariamente esta distribuição por uma medida de localização e outra de dispersão, indique quais as que lhe parecem mais adequadas; justifique.

II

O capital acumulado ao fim de n anos, c_n , a partir de uma unidade de capital colocada à taxa de $r\%$ an ano é dada pela fórmula $c_n = (1+r/100)^n$; escreva um programa completo (com excepção das instruções de saída) que efectue o cálculo de uma tabela de valores de c para $n = 1, 2, \dots, 100$ e $r = 3,5, 4, 4,5, 5, \dots, 8$. Neste programa é importante, além da lógica, a rapidez da execução dos cálculos. (Sugestão: $c_n = c_1 \cdot c_{n-1}$).

III

a) Seja Ω o conjunto dos alunos matriculados em Estatística, M o subconjunto de Ω dos alunos do sexo masculino, A o dos de olhos azuis e G os que têm mais de 1,75 m de altura.

- 1) Indique um conjunto de $P(\Omega)$ que não seja nenhum dos acima especificados;

IV

A empresa ABC produziu as seguintes quantidades em milhares de unidades) nos anos indicados:

| | |
|------|-------|
| 1963 | 62,0 |
| 1964 | 69,8 |
| 1965 | 84,3 |
| 1966 | 90,4 |
| 1967 | 81,0 |
| 1968 | 98,0 |
| 1969 | 122,4 |
| 1970 | 130,8 |
| 1971 | 146,8 |
| 1972 | 170,6 |

Indique uma medida estatística adequada para exprimir a evolução ao longo deste período; justifique a escolha que fez dessa medida estatística.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS — 5.º Ano — Informática Superior — 2.º Teste — 18 de Fevereiro de 1974.

I

5817 — Escreva uma função diádica que simule o operador do «produto interno» da catenação e da estruturação $(, \cdot \rho)$. Nota: com esta função poder-se-ão gerar, entre outras, estruturas com elementos repetidos como $(\cdot 3), \cdot \rho : 3 \leftrightarrow 122333$.

II

Desenvolva um algoritmo que, incorporado numa parse, permita determinar se, dada uma instrução aritmética escrita numa linguagem automática — por exemplo em FORTRAN — os nomes simbólicos que ocorrem nessa instrução são identificadores da linguagem (no caso do FORTRAN se se tratam de nomes alfanuméricos sem caracteres em branco com um a seis caracteres, o primeiro dos quais alfabético).

III

Classifique as linguagens de programação do ponto de vista da sua tradução/execução e indique algumas

em cada um desses grupos, com uma breve indicação de alguns aspectos que considere importantes e que as distingam umas das outras.

Universidade de Luanda — LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS — 5º Ano — Informática Superior — Exame Final — 28 de Fevereiro de 1974.

I

5818 — Desenvolva um algoritmo que, incorporado numa parse de um compilador de FORTRAN, permita determinar a validade léxica das instruções de GO TO simples e de GO TO calculado (pressuponha, para facilitar, que estas instruções não estão rotuladas e que não ocupam mais de um cartão de programa).

Este algoritmo deverá englobar um teste à correcção do(s) rótulo(s) de transferência que entram nas instruções, bem como, no caso do GO TO calculado, ao valor da variável de salto.

II

É dada uma matriz de observações X de elementos x_{ki} ($k = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$). Define-se, para os vectores-coluna de X , uma matriz de variâncias e covariâncias de elemento genérico

$$r_{ij} = \frac{\sum_k (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_k (x_{ki} - \bar{x}_i)^2 \sum_k (x_{kj} - \bar{x}_j)^2}} \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

onde $\bar{x}_i = \sum_k x_{ki}/n$ e $\bar{x}_j = \sum_k x_{kj}/n$. Escreva uma função monádica que admita X como argumento, teste que X é de facto uma matriz, e forneça como resultado a matriz dos r 's.

III

Define-se a sucessão de FIBONNACCI $\{F_n\}$,

$$0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 13 \ \dots,$$

em que cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \geq 2$), $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

a) Escreva uma função APL tal que, dado N , permita calcular *recursivamente* os N primeiros termos desta sucessão.

b) Exponha as vantagens e possíveis inconvenientes da escrita de programas do tipo recursivo.

IV

Diga o que são gramáticas de estrutura de frase e qual a diferença entre as de contexto sensitivo e as de contexto livre.

Enunciados dos n.ºs 5812 a 5818 de J. Marques Henriques

LITERATURA MATEMATICA RECENTE

Editor — MASSON ET C.^{ie}, Paris

- J. BASS — *Cours de Mathématiques — Troisième Édition Revue et Corrigée.*
— *Exercices de Mathématiques.*
- M. BOUIX — *Les Fonctions Généralisées ou Distributions.*
- M. A. TONNELET — *Les Vérifications Experimentales de la Relativité Générale.*
- A. HOCQUENGEM & P. JAFFARD — *Mathématiques. Tome I. Éléments de calcul différentiel et intégral.*

Editor — LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD — Paris

- MARCEL DOLIGEZ — *Gravitation — Contribution à la théorie corpusculaire de la gravitation.*
- H. LAURENT — *Théorie des Jeux de Hasard.*

Editor — DUNOD, Paris

Monographies Universitaires de Mathématiques

22. A. G. KUROSCH — *Algèbre générale.*
23. I. M. GUELFAND et N. Y. VILENKIN — *Les distributions. Tome 4: Applications de l'analyse harmonique.*
24. C. FOURGEAUD et A. FUCHS — *Statistique.*
25. J. GARSOUX — *Analyse mathématique*
26. A. GUICHARDET — *Analyse harmonique commutative.*
27. G. HOCHSCHILD — *La structure des groupes de Lie.*
28. MME Y. CHOQUET-BRUHAT — *Geometrie différentielle et systèmes extérieures.*
29. PHAM MAU QUAN — *Introduction à la géométrie des variétés différentiables,*
30. R. ISAACS — *Jeux différentiels. Théorie des jeux appliqués aux domaines de la guerre, des poursuites, du contrôle et de l'optimisation.*
31. O. A. LADYZENSKAJA et N. N. ORAL'OEVA — *Equations aux dérivées partielles de type elliptique.*
32. J. LÉVY-BRUHL — *Introduction aux structures algébriques.*

BENTO
DE JESUS
CARAÇA

CONFERÊNCIAS E OUTROS ESCRITOS

Livraria Sá de Costa — Rua Garrett, 100-102

ENSAIOS
de Geografia Humana e Regional

POR

ORLANDO RIBEIRO
(1 Volume)

Livraria Sá de Costa — Rua Garrett, 100-102

E. S. CABRERA H. J. MEDICI

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS
EN LA REPUBLICA ARGENTINA

Matemática 1 a 4

Trigonometria, nociones de limite continuidad y derivada

Ejercicios 1 a 4

Astronomia Elemental

Libreria del Colegio — BUENOS AIRES

GAZETA DE MATEMÁTICA

Preço deste número: 120 escudos

Assinatura para o estrangeiro, 200 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.º 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.º 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 100, para o que basta indicar o nome, a morada e o local de cobrança. As assinaturas são renovadas automaticamente no

seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

| | Portu- gal | Estran- geiro |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------|------------------|
| N.º 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto) | 40\$00 | 75\$00 |
| N.º 16 a 49, cada | 12\$50 | 25\$00 |
| N.º 50, 76-77 | 60\$00 | 100\$00 |
| 51 a 75 { número simples | 17\$50 | 25\$00 |
| 78 a 99 { " duplo | 35\$00 | 50\$00 |
| 101 a 108 | | |
| N.º 100 | 100\$00 | 150\$00 |
| N.º 109-12, 113-16, 117-20 e 121-24 | 120\$00 | 200\$00 |

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento
de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 120\$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Eq.º — LISBOA - 2 — Telefone 369449