GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO III **N.º 13** JANEIRO - 1943

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 5$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / LARGO DO PÔÇO NOVO / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

FUNDADA POR

B. CARAÇA, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO: *Faculdade de Ciências*, Rua da Escola Politécnica — Lisboa
COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO: *Soc. Ind. de Tipografia*, Rua Almirante Pessanha, 5 — Lisboa

ANO III - N.º 13 GAZETA DE MATEMÁTICA JANEIRO-1943

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Sobre una proyectividad compleja ligada a una conica dada

por ***José Gallego Diaz*** *(Universidad de Madrid)*

Establecemos en este trabajo una sencilla proyectividad compleja entre los puntos del plano de una conica, de tal forma que los puntos dobles de la misma sean los focos de la conica. Pudiendose determinar estos ultimos con la regla y el compas como raices de una ecuacion de segundo grado de coeficientes complejos, (Vease: J. Gallego Diaz: Resolucion grafica de la ecuacion de segundo grado, «Euclides», año segundo, nº 11) y se indica finalmente como puede aplicarse cuanto antecede al estudio de ciertos lugares geometricos.

1 — Supongamos dada una conica (C), con centro, de ecuacion:

$$a_{11}\,x^2+a_{22}\,y^2+a_{33}=0$$

y un punto $M\,(X_1\,,\,Y_1)$ de su plano. La polar de M corta a la conica en los puntos A y B. La circunferencia circunscrita al triangulo MAB vuelve a cortar a la conica en C y en D.

Sea $N\,(X_0\,,\,Y_0)$ el polo de la recta CD respecto a la conica (C). A un punto M le hemos hecho corresponder un solo punto N. Reciprocamente y como mas adelante demostraremos al punto N le hacemos corresponder el mismo punto M.

Veamos si existe una proyectividad compleja entre los afijos de los numeros complejos:

$$Z_1=X_1+Y_1\,i \quad \text{y} \quad Z_0=X_0+Y_0\,i\,.$$

La ecuacion de la polar de M respecto a la conica (C) es:

$$\text{(I)} \qquad a_{11}\,xx_1+a_{22}\,yy_1+a_{33}=0\,.$$

La ecuacion de la polar de N respecto a la misma conica es:

$$\text{(II)} \qquad a_{11}\,xx_0+a_{22}\,yy_0+a_{33}=0\,.$$

Las conicas que pasan por las intersecciones de (C) con (I) y (II) tienen por ecuacion:

$$a_{11}\,x^2+a_{22}\,y^2+a_{33}+\lambda\,(a_{11}\,xx_1+a_{22}\,yy_1+a_{33})(a_{11}\,xx_0+ \\ +a_{22}\,yy_0+a_{33})=0\,.$$

Y para que sean circunferencias se ha de verificar:

$$a_{11}+\lambda a_{11}^2\,x_1x_0=a_{22}+\lambda a_{22}^2\,y_1\,y_0 \\ \lambda a_{11}\,a_{22}(x_1\,y_0+y_1x_0)=0\,.$$

Es decir:

$$\text{(III)} \qquad x_1\,y_0+y_1\,x_0=0$$

$$\text{(IV)} \qquad a_{11}-a_{22}=\lambda\,(a_{22}^2\,y_1\,y_0-a_{11}^2\,x_1\,x_0)\,.$$

La circunferencia pasará por M si se cumple:

$$a_{11}\,x_1^2+a_{22}\,y_1^2+a_{33}+\lambda\,(a_{11}\,x_1^2+a_{22}\,y_1^2+a_{33})\,(a_{11}\,x_1\,x_0+ \\ +a_{22}\,y_1\,y_0+a_{33})=0\,.$$

Y suponiendo que N no pertenece a la conica (C):

$$a_{11}\,x_1^2+a_{22}\,y_1^2+a_{33}\neq 0\,,$$

resultando:

$$\text{(V)} \qquad 1+\lambda\,(a_{11}\,x_1\,x_0+a_{22}\,y_1\,y_0+a_{33})=0\,.$$

Eliminando λ entre (IV) y (V) se obtiene:

$$\text{(VI)} \qquad x_1\,x_0-y_1\,y_0=\frac{a_{33}}{a_{11}}-\frac{a_{33}}{a_{22}}=c^2\,.$$

Resolviendo el sistema (III) y (VI), resulta:

$$\text{(VII)} \qquad \left\{\begin{array}{l} X_0=\dfrac{c^2\,x_1}{x_1^2+y_1^2} \\[2ex] Y_0=\dfrac{-c^2\,y_1}{x_1^2+y_1^2} \end{array}\right.\,.$$

Es decir, llamando W a $Z_0=X_0+Y_0 i$ y $Z=Z_1=X_1+Y_1 i$,

$$\text{(VIII)} \qquad W=\frac{c^2}{Z}\,.$$

Se obtiene igualmente la condicion (V) substituyendo las coordenadas del punto $N\,(X_0\,,\,Y_0)$ en la ecuacion de la conica, lo cual expresa que la circunferencia pasa tambien por N, lo cual puede verse, directamente, en (VIII) que nos representa, pues, la ecuacion de una involucion compleja. Sus puntos dobles son, evidentemente, los focos de la conica, como *a priori* podia verse.

Puede darse una sencilla demostracion geometrica de cuanto antecede. Basta observar para ello que, por pertenecer los puntos A, B, C y D, a una circunferencia las cuerdas AB y CD estan igualmente inclinadas sobre los ejes y, por lo tanto, siendo O el centro de la conica, las rectas OM y ON, diametros conjugados con las direcciones AB y CD respectivamente, tambien son simetricos respecto de los ejes de la conica. Por otro lado siendo F y F' los focos de la conica (C) dada, es fácil demostrar que el cuadrilátero $MFNF'$ es armonico y por tanto, se verificará: $OM \cdot ON = OF^2 = c^2$, quedando pues, geométricamente demostrado que la transformacion que hace corresponder el punto N al M es el producto de una inversion por una simetria, como indica la formula (VIII) analiticamente.

2 — Consideremos ahora la parábola: $Y^2 = 2pX$. Repitiendo lo que se ha efectuado en el parrafo (1) llegamos a: $y_0 = -y_1$, $x_0 = p - x_1$, es decir:

$$W + Z = p .$$

Cuyo punto doble es, asímismo, el foco de la parabola, pudiendose enunciar el siguiente

Teorema. La circunferencia circunscrita al triangulo $MAB - M$ es un punto generico del plano de una parabola, y A y B los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde M a la parabola — pasa tambien por el punto simetrico de M respecto al foco de la parabola.

3 — Pasemos ahora a considerar el caso general en que la conica es dada por una ecuacion de la forma:

$$f(x, y, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0 .$$

Así como la ecuacion (VIII) representaba geometricamente el producto de una inversion por una simetria, ahora debemos hallar otra que nos represente una traslacion, un giro, una inversion y una simetria.

Con la misma notacion que en (1) y por el mismo procedimiento obtenemos:

$$\text{(X)} \quad (a_{11} - a_{22})(f'_{x_1} f'_{y_0} + f'_{y_1} f'_{x_0}) = 2a_{12}(f'_{x_1} f'_{x_0} - f'_{y_1} f'_{y_0}) .$$

$$\text{(XI)} \quad f'_{x_1} f'_{y_0} + f'_{y_1} f'_{x_0} - 2a_{12}(x_0 f'_{x_1} + y_0 f'_{y_1} + t_0 f'_{t_1}) = 0.$$

La condicion (X) es la analoga a la (III) y nos expresa que siendo I el centro de la conica, las rectas IM y IN estan igualmente inclinadas respecto de los ejes de la conica, y la condicion (XI) como la (VI), expresa, junto con la anterior, como es bien sencillo demostrar, que $IM \cdot IN = c^2$.

De la ecuacion (X) se puede deducir rapidamente la ecuacion que dá el conjunto de los ejes de la conica sin mas que hacer $X_1 = X_0$ y $Y_1 = Y_0$, resultando:

$$(a_{11} - a_{22}) f'_x f'_y = a_{12}(f'^2_x - f'^2_y) .$$

De la misma ecuacion (X) se obtiene:

$$\frac{f'_{y_0}}{f'_{x_0}} = -\frac{(a_{11} - a_{22}) f'_{y_1} - 2a_{12} f'_{x_1}}{(a_{11} - a_{22}) f'_{x_1} + 2a_{12} f'_{y_1}} .$$

Y para que dicha proyectividad real sea degenerada sera preciso que:

$$\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = -\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})} , \quad a_{11} = a_{22} \quad ,, \quad a_{12} = 0 .$$

Es decir que la conica dada sea una circunferencia. El reciproco es de inmediata demostracion.

Las ecuaciones (X) y (XI) son lineales en X_0 y Y_0. Resolviendolas y haciendo como antes:

$$W = X_0 + Y_0 i \quad , \quad Z = X_1 + Y_1 i .$$

Resulta:

$$W = \frac{(A_{13} + iA_{23}) Z - (A_{11} - A_{22} + 2A_{12} i)}{A_{33} Z - (A_{13} + iA_{23})} .$$

Y, para determinar los puntos dobles, haremos: $W = Z$ resultando:

$$\text{(XII)} \quad A_{33} Z^2 - 2(A_{13} + iA_{23}) Z + A_{11} - A_{22} + 2A_{12} i = 0$$

que es la ecuacion tal que los afijos de sus raices son los focos de la conica dada. En la parabola, como $A_{33} = 0$, queda:

$$\text{(XIII)} \quad Z = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_{11} - A_{22} + 2A_{12} i}{A_{13} + iA_{23}} .$$

4 — Entre las múltiples aplicaciones de las formulas antes establecidas al estudio de los lugares geometricos destacamos por su sencillez esta: «Lugar geometrico de los focos de las parabolas inscritas en un triangulo dado».

Como la ecuacion tangencial plückeriana de esas parabolas contendra un parametro lineal γ, la ecuacion (XIII) tambien lo contendrá, pero al variar γ de $-\infty$ a $+\infty$ el afijo de Z describe una circunferencia.

A GEOMETRIA DA DISTÂNCIA

por **Karl Menger**

(Introdução a «Distance Geometries — A study of the development of abstract metrics», de L. Blumenthal, publicada em *The University of Missouri Studies*, Vol. 13, n.º 2 — Abril 1938)

O icosaedro é um dos cinco sólidos regulares conhecidos dos gregos. Pode ser transformado em si próprio por meio de sessenta rotações. Estas rotações formam um grupo, isomorfo com o grupo de Galois da equação geral do 5.º grau que não é resoluvel por meio de radicais, mas que pode ser resolvida por meio das funções elípticas modulares. Reflectindo sôbre estas relações entre o icosaedro e outros campos da matemática, Felix Klein foi levado a notar que êste sólido regular «relaciona de uma maneira admirável a geometria, a teoria dos grupos, a algebra, e a teoria das funções — indicando assim o caminho para futuras investigações».

Há porém, uma figura geométrica mais simples do que o icosaedro, e que é conhecida desde o início da investigação matemática — o triângulo. Uma das suas mais importantes propriedades, o facto de que um dos seus lados não excede em comprimento a soma dos outros dois lados, relaciona os fundamentos de muitos ramos da matemática. Juntamente com as suas generalizações e especializações, a chamada *desigualdade triangular* parece-me formar, na verdade, o ponto central duma grande parte de tôda a matemática.

Além disso, esta opinião não é influenciada pelo facto de a desigualdade $|a+b| \leq |a|+|b|$ (que é um caso especial da desigualdade triangular) ser verificada para cada par de números reais ou complexos a, b. Já por aí se compreende que a desigualdade triangular desempenhe um papel central em tôda a teoria das funções, e em certos capítulos da teoria dos números. Mas a base da opinião anterior é fornecida pelos aspectos puramente geométricos desta desigualdade fundamental. O papel indiscutível que ela desempenha numa grande parte das matemáticas elementares; a sua conexão com a fórmula de Herão para a área do triângulo (cujas várias formas conduzem às generalizações da desigualdade triangular que estão na base dos fundamentos do espaço euclideano, assim como de outros espaços); o seu importante papel no isolamento feito por Fréchet das propriedades métricas do espaço com o objectivo de construir uma teoria geral das funções reais (a desigualdade triangular assegura de uma maneira particularmente simples a continuïdade uniforme da métrica, pelo que tôdas as hipóteses que implicam uma métrica continua são, num certo sentido, generalizações da desigualdade triangular); a sua íntima relação com o desvio de três pontos em relação a uma linha recta, que conduz, em combinação com o processo usual de passagem ao limite, a uma definição de curvatura, e, por conseguinte, ao domínio da geometria diferencial (enquanto a consideração análoga dos quaternos de pontos conduz a um novo desenvolvimento da teoria da curvatura das superfícies); a sua relação com o conceito de linhas de comprimento mínimo, fundamental no cálculo das variações — tôdas estas considerações mostram claramente que a desigualdade triangular relaciona muitos capítulos da matemática e indica o caminho de novas investigações.

Os domínios da geometria em que intervem a desigualdade triangular, são, de facto, teorias quantitativas que se referem a distâncias, comprimentos, áreas, volumes, curvaturas, etc., em contraste com as propriedades qualitativas consideradas em topologia. Precisamente por existir esta diferença, parece-me muito notável que alguns teoremas, assim como algumas demonstrações, sejam muito semelhantes na geometria métrica e na topologia. A distribuïção dos pontos dum espaço com certas propriedades métricas satisfaz às mesmas leis que a distribuïção dos pontos dum espaço com certas propriedades topológicas, como, por exemplo, certos pontos de ramificação duma curva. A principal razão desta analogia reside certamente no facto de, para o estudo dos subconjuntos gerais dos espaços gerais, os conceitos de grupos de transformações e de invariantes serem bastante menos importantes do que na geometria elementar. Daqui a razão por que há laços comuns entre as propriedades que são invariantes por transformações topológicas e as que são invariantes em relação às transformações que conservam a distância.

Os métodos desta geometria métrica não se adaptam à clássica divisão das teorias geométricas em sintéticas e analíticas. A geometria sintética assenta especificadamente em alguns postulados geométricos dos quais deduz todos os seus teoremas. A geometria analítica opera com modelos aritméticos, associados com entidades geométricas, aos quais aplica a algebra e o cálculo. A geometria métrica combina as duas características: sintética e analítica: opera com um conjunto de elementos não especificados, a cada par dos quais se associa um número, de acôrdo com certas condições. Êste ponto de partida está intimamente relacionado com o da teoria dos grupos; porque na teoria dos grupos, a cada par de elementos de um conjunto faz-se corresponder um elemento do mesmo conjunto, que verifica certas condições particulares. A geometria métrica tem, além disso, em comum com a teoria dos grupos abstractos e dos corpos, a tendência para deduzir resultados tão gerais quanto possível de hipóteses tão fracas quanto possível, e obter demonstrações simplificadas, generalizando as proposições.

É evidente que aparecem novos problemas em conexão com a introdução dêstes conceitos abstractos. Por exemplo, quando uma classe geral de entidades é definida por extensão duma classe de objectos conhecidos, é natural preguntar quais as características especiais pelas quais os objectos conhecidos se podem distinguir dos elementos da classe geral. Mas servirão os métodos gerais para descobrir novos resultados aplicáveis aos objectos conhecidos? Auxiliam os métodos gerais a resolução de velhos problemas?

D'Alembert considerou como um dos grandes «escândalos» da geometria do seu tempo, o facto de não se conseguir dar uma definição da linha recta. Há uma definição de linha recta no comêço dos *Elementos* de Euclides mas é muito obscura, e não se presta a ser usada no próprio sistema dedutivo de Euclides. A geometria analítica define cada linha recta por uma equação linear em coordenadas cartesianas, mas esta definição presupõe a introdução dum sistema arbitrário de eixos e unidades. Uma das mais importantes tentativas da geometria da recta depois dos Enciclopedistas, é a formulação duma teoria axiomática que opera com um pequeno número de axiomas respeitantes a elementos indefinidos chamados «linhas rectas», e às suas relações com outras entidades indefinidas chamadas «pontos» e «planos». Tais teorias, ocupando-se do sistema de tôdas as linhas rectas, fornecem-nos critérios para distinguir êste sistema de outros, por exemplo, o de tôdas as circunferências. Mas estas teorias não estabelecem critério algum para decidir se um dado objecto individual é ou não uma linha recta. Uma segunda teoria define a linha recta como um eixo de rotação de todo o espaço, mas fazendo referência a pontos fora do objecto que está para ser definido. Uma terceira teoria principia com algumas hipóteses relativas a uma relação indefinida chamada «situado entre» e define o segmento de recta que une dois pontos como o conjunto de todos os pontos situados entre os dois pontos dados. Mas se aplicarmos esta definição ao plano ordinário, no qual há muitas relações satisfazendo aos axiomas da relação «situado entre», é difícil ver como se pode derivar um critério para a relação ordinária «situado entre» (e assim uma definição da vulgar linha recta) a não ser que se acrescente a teoria com idéias métricas.

A geometria da distância define simplesmente o segmento que une dois pontos como o conjunto daquêles pontos para os quais a soma das suas distâncias aos dois pontos dados é igual à distância dêstes dois pontos; por outras palavras, é o conjunto de todos os pontos que satisfazem a uma certa igualdade triangular. Esta definição não tem originalidade — porque se limita a utilizar o conceito de «situado entre» acima mencionado — mas é clara, simples, intrínseca e capaz de generalizações de muitas espécies em classes extensas de espaços gerais.

Consideremos questões menos triviais; por exemplo as propriedades locais métricas das figuras. Até há pouco, a curvatura das curvas e a curvatura das superfícies eram estudadas, quási inteiramente por meio de métodos analíticos. Definindo os pontos por sistemas de coordenadas, e as figuras por equações, estas propriedades estudavam-se aplicando o cálculo diferencial às equações. A geometria das propriedades métricas locais era pràticamente identificada com a geometria diferencial. A representação dos pontos por coordenadas, e das figuras por equações, é, na verdade, um método fecundo—um método que enriqueceu a geometria com problemas para alguns séculos. Mas é sòmente um dos muitos métodos possíveis, e não é, atrevo-me a dizer, o mais simples, nem o mais geral, nem o mais natural. Utilizando propriedades locais puramente métricas, obtêm-se resultados muito mais gerais — teoremas que se aplicam a espaços não descritíveis por coordenadas (ou, pelo menos, em que a distância de dois pontos não pode ser expressa em função das suas coordenadas, à maneira usual). E mesmo nos espaços ordinários, os resultados aplicam-se a figuras para as quais os métodos do cálculo não podem ser usados. A geometria diferencial, no estudo das propriedades métricas locais das figuras, faz hipóteses, a seu respeito, que não são impostas pela natureza geométrica das questões dadas, mas sim pelos métodos analíticos aplicados à sua resolução. A diferenciabilidade das equações que definem as figuras é apenas considerada porque, sem esta hipótese, não se pode aplicar o cálculo diferencial.

Por outro lado, a geometria métrica estuda a curvatura duma curva, ou de uma superfície, considerando ternos e quaternos de pontos da figura, e as suas três ou seis distâncias, respectivamente. Êste estudo não presupõe que as figuras sejam dadas por meio de equações diferenciáveis. Na realidade êle nem sequer supõe que as figuras sejam dadas por equações, nem mesmo que os seus pontos sejam definidos por coordenadas. Êste método presupõe sòmente que uma distância é associada a cada par de pontos da figura. É verdade que, neste campo particular, os mais gerais argumentos da geometria métrica parecem à primeira vista, ser mais complicados do que as demonstrações clássicas da geometria diferencial. Mas isto é apenas devido ao facto da geometria diferencial operar com todo o simbolismo do cálculo, e poder assim fazer porque êste simbolismo é estudado por cada matemático logo no começo da sua aprendizagem tornando-se para êle uma espécie de A. B, C. Sòmente estas razões de ordem histórica e psicológica tornam possível que uma demonstração na qual figura um conceito como $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ pareça mais simples do que uma avaliação directa das propriedades dos quaternos de pontos.

Se certos conceitos métricos, não mais complicados do que uma derivada parcial de 2.ª ordem, fôssem condensados em símbolos unânimente adoptados, então o estudo métrico das propriedades locais seria ràpidamente reconhecido, não só como mais geral, mas também muito mais simples do que o processo da geometria diferencial clássica. Com o objectivo de generalizar factos conhecidos a espaços e figuras mais gerais, é conveniente estar-se na espectativa de que estas noções métricas conduzam imediatamente à descoberta de factos desconhecidos respeitantes aos objectos usuais da geometria diferencial.

Para justificar êste optimismo em relação ao efectivo poder criador da geometria métrica das propriedades locais, mencionaremos outro campo clássico no qual a geometria métrica obteve já novos resultados — o Cálculo das Variações. As curvas que tornam mínimo um integral de uma função dependente duma curva e das suas tangentes, foram inicialmente procuradas entre curvas diferenciáveis. A curva de Goldschmidt, constituída por três segmentos com dois ângulos, que minimiza a área da superfície de revolução, mostrou a necessidade de estender a classe das curvas admissíveis. Mais tarde, foram estudadas mais sistemàticamente soluções com ângulos. Hahn e Tonelli introduziram o integral de Lebesgue com o fim de tornar possível a admissão de tôdas as curvas rectificáveis.

Mas Hahn construíu um integral cujas curvas *minimizantes* são espirais de comprimento infinito. Carathéodory mostrou que esta circunstância pode dar-se com uma função integranda tão simples como a raíz quadrada de um polinómio do 8.º grau. A geometria métrica, considerando o integral ao longo duma curva como o seu comprimento, de harmonia com uma métrica apropriada, é capaz de operar num campo de curvas admissíveis que contém tôdas as curvas contínuas (rectificáveis ou não) e com classes extremamente gerais de funções integrandas e espaços correspondentes.

Desta maneira consegue-se provar a existência de soluções para problemas que doutra maneira as não teriam, entre êles o problema de minimizar integrais de funções algébricas simples.

É possível, por exemplo, dar demonstrações simples e curtas de teoremas de existência cuja generalidade excede, em três direcções, a dos teoremas mais gerais obtidos por Tonelli.

A geometria métrica foi também aplicada ao Cálculo das Variações por Marston Morse. A sua aplicação é feita numadirecção diferente, mas parece-me muito notável que, partindo de investigações puramente analíticas, êste eminente matemático fôsse levado a desenvolver e utilizar métodos métricos nos seus trabalhos fundamentais dos últimos anos. (Por «métodos métricos» entendo a associação de uma distância a cada par de elementos onde tal associação seja possível e útil, e a subordinação conseqüente de vários campos de investigação a uma idéia comum).

Tudo isto mostra que é certamente muito útil ter uma visão de conjunto dos resultados obtidos nêste domínio, descrita por um especialista como Leonard L. Blumenthal cuja contribuïção é assinalada em três direcções diferentes:

(1) por meio de resultados originais (em particular resultados relativos à caracterização dos espaços conhecidos entre espaços gerais e suas aplicações à teoria dos determinantes); (2) por uma cuidadosa correcção de erros encontrados em trabalhos anteriores; (3) esclarecendo muitos aspectos da história dêste assunto, pelo que muito aprendi com a leitura do seu trabalho. Por isso aceitei com prazer o convite que me fêz de escrever algumas páginas de introdução ao seu livro, que contribuirá, assim o espero e creio, para tornar mais conhecido êste vasto campo da matemática.

Tradução de C. VENTURA

Uma função contínua sem derivada

por R. Tambs Lyche (Trondheim, Noruega)

(Publicado em *L'Enseignement Mathématique*, Vol. 38 (1939-1941), págs. 208-211)

1. O exemplo dado por Weierstrass duma função contínua que não admite derivada para nenhum valor da variável é muito complicado para que se possa expor num curso elementar de Análise. Deve-se a M. B. L. van der Waerden (Math. Zeitschr. 32 Band, 1930, pag. 474) um exemplo de natureza bem simples. Apesar disso, para ser apresentado duma maneira inteligente aos principiantes, a demonstração exige considerações um pouco complicadas, se bem que sejam de natureza elementar. (Ver, por exemplo, E. Landau: Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, pag. 73, onde o autor examina um exemplo da mesma espécie).

Dada a importância duma concepção precisa da noção de derivada, parece-nos útil fornecer um exemplo em que a demonstração pode ser dada em poucas linhas. Aquêle que proponho não difere no fundo do de M. van der Waerden, a não ser na maneira de o definir.

2. Seja x uma quantidade real qualquer, e ponhamos

$$x=a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i}}+\cdots \tag{1}$$

onde a é um número inteiro e $\{\alpha_i\}$ uma sucessão de números naturais crescentes, em número ilimitado ou não. É sabido que esta representação de x é única, salvo no caso em que a sucessão $\{\alpha_i\}$ é limitada:

$$x=[a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots]+\frac{1}{2^{\alpha_k}} \tag{2}$$

Pois neste caso tem-se também a representação:

$$x=[a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots]+\frac{1}{2^{\alpha_k+1}}+\frac{1}{2^{\alpha_k+2}}+\cdots \tag{2a}$$

Ponhamos agora

$$f(x)=\frac{\alpha_1}{2^{\alpha_1}}+\frac{\alpha_2-2}{2^{\alpha_2}}+\frac{\alpha_3-4}{2^{\alpha_3}}+\cdots+\frac{\alpha_i-2(i-1)}{2^{\alpha_i}}+\cdots \tag{3}$$

Verifica-se fàcilmente que $f(x)$ é definida por esta fórmula para todo o valor real de x, pois que um cálculo fácil mostra que as duas definições possíveis, se x é da forma (2) ou (2a), coincidem.

Êste último facto assegura a continuïdade da função $f(x)$ em qualquer ponto. Com efeito, tomando $|h|<\frac{1}{2^n}$ as representações de x e de $x+h$ coincidem nos termos de expoentes $<n$. Isto é evidente no caso geral (1), e terá ainda lugar no caso (2 ou 2a) segundo $h>0$ ou $h<0$. Por conseqüência as expressões para $f(x)$ e $f(x+h)$ coincidirão também nos termos de expoentes $<n$. A continuïdade é por isso manifesta.

3. Demonstremos agora que $f(x)$ não admite derivada em nenhum ponto x. Consideremos primeiro o caso em que x é da forma (2). Tomemos $h=\frac{1}{2^{\alpha_k+r}}$. Segue-se que $f(x+h)-f(x)=\frac{\alpha_k+r-2k}{2^{\alpha_k+r}}$ donde $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\alpha_k+r-2k$ quantidade que tende para infinito com r.

Tomemos o caso geral, em que x é da forma (1). Ponhamos

$$x_1=a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i}}$$

$$x_2=a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i-1}}.$$

Acha-se neste caso

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{\tau_i}{\rho_i},\quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=\frac{\alpha_i-2i-\tau_i}{1-\rho_i}$$

pondo para abreviar

$$\rho_i=2^{\alpha_i}\left[\frac{1}{2^{\alpha_{i+1}}}+\frac{1}{2^{\alpha_{i+2}}}+\cdots\right] \tag{4}$$

$$\tau_i=2^{\alpha_i}\left[\frac{\alpha_{i+1}-2i}{2^{\alpha_{i+1}}}+\frac{\alpha_{i+2}-2(i+1)}{2^{\alpha_{i+2}}}+\cdots\right] \tag{5}$$

Suponhamos agora que $f(x)$ tem uma derivada $f'(x)=\lambda$ no ponto x. Então ter-se-á, por um lado

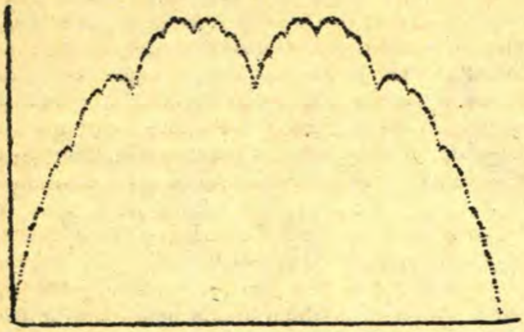
$$\lim_{i\to\infty}\frac{\tau_i}{\rho_i}=\lambda \tag{6}$$

Mas por outro a expressão

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}-\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{\alpha_i-2i-\frac{\tau_i}{\rho_i}}{1-\rho_i}$$

deveria tender para zero quando i aumenta. Ora isso exige que $\lim_{i\to\infty}(\alpha_i-2i)=\lambda$, e sendo α_i e $2i$ inteiros, ter-se-ia, a partir de um certo valor de i, $\alpha_i-2i=\lambda$. Mas se pusermos em (4) e (5) $\alpha_i=2i+\lambda$ ter-se-á $\rho_i=\frac{1}{3}$ $\tau_i=\frac{\lambda+2}{3}$ e por isso $\frac{\tau_i}{\rho_i}=\lambda+2$ o que é impossível em virtude de (6).

4. Notemos finalmente que a função $f(x)$ se poderia definir do seguinte modo: designando por $g(x)$ o afastamento de x do número inteiro mais próximo, tem-se:



$$f(x)=g(x)+\frac{1}{2}g(2x)+\frac{1}{2^2}g(2^2x)+\cdots+\frac{1}{2^n}g(2^nx)+\cdots$$

que é por isso uma função da mesma espécie da de M. van der Waerden. A representação gráfica de $f(x)$ é dada na figura junta, fazendo uso dos pontos correspondentes aos valores de x da forma (2) com $a=0$ e $k \gtreqless q$. Se bem que todos estes pontos sejam uma pequena parte dos pontos da curva, dão uma idéia completa da curva em questão, pois que os pontos intermidários têm ordenadas que diferem pouco das ordenadas dos pontos da figura.

Tradução de J. DA SILVA PAULO

PEDAGOGIA

Secção a cargo de Bento Caraça

SÔBRE O ENSINO DA GEOMETRIA NOS LICEUS

por JOSÉ CARDOSO GUERRA

Êste simples e despretencioso relatório sôbre o ensino da Geometria no 1.º ciclo, foi-me amàvelmente solicitado pela Comissão Pedagógica da S. P. M. e a sua publicação na «Gazeta» não tem outro objectivo senão o de poder chamar a atenção dos interessados no assunto, que poderão fornecer contribuïções muito mais valiosas tiradas da sua própria experiência e cuja divulgação seria convenientíssima para a pedagogia.

Nos dois últimos períodos do ano passado o acaso forneceu-me uma bela oportunidade para completar com a experiência pessoal o meu trabalho sôbre «O ensino da geometria no 1.º ciclo» de que constou a minha dissertação de exame de estado.

Afirmava eu então que, provàvelmente, o facto de se não fazer o ensino experimental da geometria no 1.º ciclo, seria devido certamente à falta de tempo, reduzido apenas às três horas semanais. Porém agora posso afirmar francamente o contrário.

O programa da geometria é tão pequeno relativamente, que levou um antigo professor a confessar-me que dava o programa vagarosamente em dois dias e que depois se via em apuros para preencher o resto do tempo...

Para mostrar que há realmente tempo para se fazer um ensino experimental vou expôr resumidamente o que fiz nos 2.º e 3.º anos que me foram entregues. Claro que se mais tempo houvesse melhor se faria.

2.º ano

Determinação aproximada do perímetro de uma linha curva com o emprêgo de um cordel; em particular, avaliação do perímetro de uma circunferência para a determinação experimental de um valor aproximado de π pelo cociente da divisão do perímetro pelo diâmetro. Equivalência de algumas figuras planas pelo emprêgo da balança.

Teorema de Pitágoras pelos pesos. Avaliação de áreas pelos pesos com escôlha prévia de uma unidade. Emprêgo do papel milimétrico. Nova determinação de π pelo cociente da divisão da área do círculo obtida experimentalmente pelo quadrado do raio.

3.º ano

Repetição de alguns trabalhos do ano anterior como avaliação de áreas, equivalências e determinação de π. Equivalência de alguns volumes e sua determinação por deslocamento de água. Para êste trabalho de belo efeito, utilizei uma proveta graduada em centímetros cúbicos, correspondendo cada divisão a 10 centímetros cúbicos. Todos os alunos verificaram a leitura inicial e final. Da comparação do valor obtido assim como o obtido pela aplicação das fórmulas verificou-se uma diferença no máximo de 2 centímetros cúbicos o que é muito pouco, como fàcilmente verifiquei por pequenas variações das medidas feitas.

Tive o cuidado de chamar sempre a atenção para o rigor necessário nos trabalhos executados e para as aproximações que racionalmente se podem exigir dêstes métodos.

A execução de parte de alguns trabalhos foi forçadamente voluntária por não haver tempo de os fazer completamente na aula. Limitei-me portanto a aconselhar e a mostrar as vantagens da manufactura dos mesmos.

As conclusões foram tiradas na aula com a máxima eficiência porque as atenções estavam completamente absorvidas na execução das experiências. Mais uma vez me foi dado verificar que a aula de trabalhos manuais pode prestar uma colaboração preciosa na rigorosa execução dos modelos necessários.

O ter sido estudante e o contacto íntimo com os estudantes levaram-me à conclusão firme de que as únicas entidades capazes de avaliarem justamente as qualidades pedagógicas do ensino que o professor está ministrando, são os próprios alunos a quem êle se dirige. Por outro lado o professor que o deseja ser na realidade, por estar convencido da importante contribuïção que pode dar para o aperfeiçoamento do ensino, deve interessar-se por saber o mais honesta e sinceramente possível qual a verdadeira impressão que causa nos seus alunos, quais os seus principais defeitos a abolir. Ora parece-me que a única forma de conseguir isto consiste na elaboração anual de uns inquéritos por escrito, em que os alunos expuzessem as suas francas impressões. A maneira de executar êsse inquérito seria caso a estudar.

A propósito da remodelação do programa do ensino das matemáticas nos liceus, de tão urgente necessidade, segundo parece a tantos, sinto-me com a coragem, também ditada pela experiência, de fazer a seguinte observação: O início do estudo da matemática nos liceus é feito pelas operações da aritmética com muitas das suas «maçadoras» propriedades. Que mau comêço para as crianças! Que dificuldades e que repugnâncias naturalmente manifestadas! Que interesse têm para êles as propriedades associativas, distributivas e até modulares? Que tempo perdido e que tão bem podia ser empregado no melhor estudo de outros assuntos, fracções, por exemplo, principal deficiência da maioria dos estudantes liceais.

ACÊRCA DO ENSINO DOS LOGARITMOS

por J. SEBASTIÃO E SILVA

A Matemática constitue o instrumento que convém especialmente para tratar as noções abstractas de tôda a natureza e, neste domínio, o seu poder não tem limites. É por isso que um livro sôbre Física moderna, se não é puramente a descrição de trabalhos de experiência, deve ser essencialmente matemático.

(P. Dirac, *Quantum Mechanics*, 1930).

Todo o novo corpo de descoberta se apresenta com aspecto matemático, porque não existe outro guia que pudéssemos utilizar.

(C. G. Darwin, 1920).

I. A intervenção crescente da Matemática na vida moderna e a sua influência decisiva no progresso dos povos constituem realidades a que não podem manter-se estranhos os regimes de ensino. «*Se o Mundo não precisa dum número muito grande de professores de Matemática, precisa no entanto de muitíssimas pessoas que possam fazer uso inteligentemente da Matemática*». [1] Sim, é cada vez maior o número de profissões que, em países civilizados, requerem uma sólida cultura matemática, e a capacidade de aplicar *inteligentemente* a Matemática. Mas tal cultura e tal capacidade não se adquirem fàcilmente — é esta a verdade — sem uma preparação liceal, em que seja banida tôda a estreiteza de vistas tendente a formar *indivíduos automatizados na aplicação de receitas.*

A Matemática representa uma forma de linguagem que, dia a dia, se torna mais necessário aprender, no mundo em que vivemos. Essa linguagem não se limita já a modalidades particulares do pensamento abstracto: a sua universalidade tornou-se patente, desde a criação da Álgebra da Lógica. Vemos hoje a antiga ciência da «quantidade» invadir os mais distantes domínios da Ciência: a Biologia, as Ciências sociais, a Psicologia, etc. reclamam os serviços da Matemática — e novos ramos desta ciência têm de ser criados [2], outros

[1] Do artigo «Como estudar Matemática», publicado na revista *The American Mathematical Monthly*, e traduzido no n.º 12 da «G. M.».

[2] Um exemplo: a Álgebra da Genética. Como observa Ernst Mach, «o poder das matemáticas consiste em se absterem de todo o pensamento inútil, economizando admiràvelmente as operações mentais».

têm de ser desenvolvidos, para atender a múltiplas solicitações que partem do exterior.

Saber pensar e saber exprimir-se, matemàticamente, é uma necessidade que se vai alargando a um número crescente de pessoas, desde que a Ciência e Técnica passaram a condicionar a Vida e o curso dos acontecimentos, sôbre a face da Terra [3].

Todavia, estes factos não me cegam a ponto de não me deixarem ver que, entre os rapazes e as raparigas que freqüentam os liceus, há, relativamente, um grande número, que não virá a fazer uso efectivo de Matemática, exceptuadas aquelas rudimentares noções aritméticas de aplicação quotidiana. É verdade que, mesmo para êsses, o ensino da Matemática oferece vantagens indiscutíveis, não pelos conhecimentos que faculta, mas pelos serviços que presta na formação da inteligência. Mas também é manifesto que, para êsses alunos, a preparação matemática não exige tantos cuidados como para os outros — os que se destinam a determinados cursos científicos. Como proceder então, desde que o ensino tenha de ser feito em comum? A questão é delicada, sem dúvida. Mas o que desde logo se apresenta como um êrro e uma injustiça é que, para atender *exclusivamente* à primeira categoria de alunos fôssem privados os outros e, em especial, os bem dotados para a Matemática, de receber uma *sensata* preparação nessa disciplina, em anos preciosos da vida, quando geralmente se decide do seu futuro. Não estimular, *na medida do possível*, as aptidões particulares do aluno, parece-me longe de corresponder ao objectivo da Educação. Que vitalidade se deve esperar dum ensino, cujo nível seja regulado pelo que possa existir de comum às aptidões de *todos* os alunos? Não será êsse o modo mais eficaz e directo de contribuir para o triunfo da mediocridade? Sim, as escolas não têm por missão fabricar génios: mas também não se fizeram para matar vocações! [4] Que não seja igual o aproveitamento de todos os alunos em relação a uma dada disciplina, isso é apenas um facto minuciosamente previsto: na escala das classificações há lugar para vinte hipóteses... O que será então preciso, é estabelecer, com nitidez e justiça, o *mínimo* a exigir de cada aluno para a sua aprovação.

Ensino idêntico para todos, é um princípio talvez muito cómodo para o professor; mas, *para bem de todos*, há que substituí-lo por êste outro: *ensino que favoreça, tanto quanto possível, as aptidões de cada um.*

De resto, a especialização devia começar, a meu ver, já nos dois últimos anos do liceu, como se fazia antes de 1936; conviria mesmo ir mais longe do que então, estabelecendo maior número de ramificações. Êsses dois últimos anos teriam portanto um carácter pre-universitário.

Não quere isto dizer que se deva desprezar a cultura geral. Convém estimular, em certa medida, o interêsse por questões de ordem geral, e, sobretudo, favorecer hábitos de leitura. Mas não exageremos! Subsiste entre nós um culto perigoso do enciclopedismo, e da multiplicidade de aptidões — como se fôssemos felizes contemporâneos de Descartes ou de Leonardo de Vinci. Será preciso lembrar que não é êsse culto a maneira mais adequada de evitar o acréscimo de incompetência?

Eis como penso a respeito do problema do ensino liceal, e da posição que nêle deve atribuir-se à Matemática. E é pensando assim que julgo ser *homem do meu tempo, virado para os problemas do meu tempo e do meio em que vivo.*

II. Já muitas pessoas devem ter notado que, no programa dos nossos liceus, a Análise Matemática [5] ocupa um lugar modestíssimo, comparado com o que se concede à Álgebra e à Geometria. Tenha-se em vista, por exemplo, a extensão do programa de geometria do 4.º ano, e a imensa variedade de questões subtis a que dá origem, no 7º. ano, o trinómio do 2.º grau. E, contudo, é precisamente a Análise o ramo da Matemática que mais útil e fecundo se tem revelado; o que mais brilhante êxito alcançou até hoje na inter-

---

(3) Não é sòmente em nossos dias que se atribue à Matemática um papel central no ensino das ciências. Vejamos como, sôbre êste assunto, se pronuncia Michel Chasles: «*Mostra a História que os imperadores que encorajaram a cultura das matemáticas — fonte comum de tôdas as ciências exactas — são também aquêles cujos reinos foram os mais brilhantes e cuja glória foi a mais duradoura*».

(4) Tenha-se em vista o caso de Evaristo Galois. Trata-se, evidentemente, dum caso único na História. Mas a verdade é que êste exemplo veio lançar uma luz intensa e trágica sôbre os vícios dum sistema de ensino.

(5) Chamamos aqui Análise ao ramo de Matemática em que intervêm o conceito geral de função e o conceito de limite. Assiste-se, a cada momento, a rectificações de fronteira entre os diversos domínios da Matemática; assim, até há pouco, foi considerado como teorema fundamental da Álgebra uma proposição que pertence pròpriamente à Análise. Na Álgebra moderna, êsse teorema passou a um plano secundário.

pretação do universo físico.[6] Verifica-se, por outro lado, que, no sentido duma introdução à Análise, os radicais, os logaritmos e as funções circulares constituem uma rica provisão de material exemplificativo, direi mesmo, laboratorial, em que o aluno pode adquirir uma experiência preciosa no manejo da ferramenta matemática, e familiarizar-se com o ponto de vista da teoría das funções, muito diferente do ponto de vista algébrico. Històricamente, foi êsse estudo que levou os investigadores a «uma teoria dos limites, dos exponenciais, dos indivisíveis, que vieram a ser os preliminares essenciais da criação da Análise». Parece-me portanto um êrro lamentável que não se procure obter o máximo rendimento na utilização dêsses recursos; que não se passe a adoptar um critério mais *racional, mais desempoeirado,* no ensino dessas matérias.

Já em números anteriores da «Gazeta de Matemática», me referi à necessidade de introduzir, no programa dos liceus, o ensino de processos de cálculo aproximado. A técnica das aproximações, aliada ao uso de tabelas, gráficos e máquinas, representa o aspecto prático da Análise. É essa técnica que torna possíveis os serviços prestados pela Matemática às ciências de observação e de experimentação. Vem a propósito recordar um espectáculo que se repete com freqüência confrangedora nos nossos liceus (e até nas nossas universidades!): um aluno, chegado ao têrmo duma embrulhada de cálculos que para êle pouco significam, vem comunicar, cheio de mágua e confusão, que não obteve «resultado certo». Êste exemplo dá uma idéia de como, no nosso ensino, andam desligadas a teoria e a prática; não sòmente se dá um predomínio, que julgo excessivo, à parte especulativa, como ainda se estabelece uma classificação lamentável das matérias em «*conhecimentos teóricos* (coisas bonitas que não servem para nada)» e «*noçõezinhas práticas, úteis para a vida*».

III. ¿Será ou não possível dar a alunos do liceu, em condições de ser ùtilmente apreendida, uma noção intuïtiva de número irracional? Eu estou plenamente convencido de que tal é possível. Já no 1.º ano os alunos (normalmente crianças de 10 ou 11 anos) aprendem a desenvolver quebrados em dízima e observam que, em certos casos, a dízima gerada é infinita periódica; já no 2.º ano aprendem a calcular raízes quadradas a menos duma décima, duma centésima, etc., e podem saber que, no caso de o radicando não ser quadrado perfeito, a dízima gerada é ainda infinita, mas não periódica.[7] — ¿E, não será possível, depois disto, dar a alunos do 4.º ou 5.º ano uma idéia satisfatória de número irracional, mediante a consideração das dízimas infinitas aperiódicas?

Não esqueçamos, por outro lado, o partido que se pode tirar do apêlo à intuïção geométrica. Já se não trata, manifestamente, da *intuïção sensível.* Exige-se agora um pequeno esfôrço de idealização. Mas todo o indivíduo *normal* de 14 anos será capaz de realizar êsse esfôrço, na mesma medida em que é capaz de conceber a sucessão natural dos números inteiros. É preciso não perder de vista que, durante séculos, e ainda no tempo de Cauchy, os matemáticos se conformaram com uma teoria «sintética» dos números reais, inspirada na medição das grandezas contínuas, de que è protótipo o segmento de recta. Recordemos, por último, que foi o teorema de Pitágoras que proporcionou o primeiro contacto com a questão da irracionalidade.

De resto, tão difícil será fazer compreender, intuïtivamente, a um aluno do liceu, o que seja número irracional, como fazer-lhe compreender, pelo mesmo processo, o que seja limite duma sucessão convergente, no caso simples em que a sucessão é crescente ou decrescente (no sentido lato)[8] — e, contudo, ainda se não deixou de

[6] Deve registar-se que, sendo a mais útil, esta é também a parte da Matemática que maior interêsse filosófico apresenta. Nos seus alicerces, levantam-se curiosas dificuldades, que já divertiram os eleatas, e que reaparecem hoje, com um carácter mais agudo, nas rijas discussões provocadas pelo cantorismo.

[7] A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ (o caso mais simples, entre os radicais) parece-me acessível a alunos do 4.º ou 5.º ano. Essa demonstração, apresentada a título de exemplo, constituirá um factor decisivo na preparação psicológica do aluno para o estudo da irracionalidade.

Por outro lado, também não será difícil imaginar uma demonstração, acessível a alunos dêsses anos, do teorema segundo o qual são aperiódicas as dízimas representativas dos números irracionais. Basta para isso recorrer à série geométrica (que era apresentada no 5.º ano, antes de 1936) e mostrar que tôda a dízima periódica se pode escrever sob a forma duma série geométrica. Não é portanto necessário transferir o assunto para a aritmética do 7.º ano. Um bom exemplo de aplicação da série geométrica é ainda fornecido pelo problema de Aquiles e a tartaruga.

[8] Neste caso será mesmo acessível uma definição rigorosa: «Consideremos uma sucessão de números (reais) $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ tais que $a_1 \leq a_2 < \cdots \leq a_n \leq \cdots$. Então, se existir um número λ que verifique as condições: 1) λ é superior a todos os termos da sucessão; 2) nenhum número menor que λ é superior a todos os termos da sucessão — diremos que λ é o «limite da sucessão» e escreveremos $\lambda = \lim a_n$. Análoga definição para o caso em que

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots .$$

apresentar, com êxito, nos liceus, uma noção intuïtiva de limite, nem se desistiu de aplicar intuïtivamente essa noção ao estabelecimento de fórmulas de áreas e volumes, e até, por vezes, ao cálculo do número *irracional* π (definido por uma sucessão convergente, de que é deduzida a expressão do têrmo geral).

Não venho aqui defender a idéia de apresentar nos liceus uma teoria geral dos números irracionais, à Dedekind — porque, felizmente, ainda não perdi o sentido das realidades. Trata-se apenas (e já não é pouco) de levar o aluno a aperfeiçoar a sua intuïção e a enriquecer a sua experiência, na resolução de *problemas escolhidos*, relativos a classes *particulares* de irracionais. Êsses problemas (que devem com freqüência referir-se a questões concretas) podem agrupar-se em duas categorias:

1) *Problemas de comparação.* Exemplos: Indicar que relação de grandeza se verifica entre $\frac{5}{3}$ e $\sqrt[3]{10}$; entre $1+\sqrt{3}$ e $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; entre 1,2 e $\log_5 7$, etc.

2) *Problemas de aproximação.* Exemplos: Calcular, com n decimais exactas, o valor numérico das expressões: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $2\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$, $5-\log_2 3$, $2^{\sqrt{3}}$, etc.

A resolução dos problemas de qualquer destas classes depende, muitas vezes, da resolução de problemas da outra classe. Por exemplo, a comparação dos valores de $\sqrt[3]{5}$ e $1+\log_7 3$ depende do cálculo aproximado dêsses valores; e, por sua vez, êste cálculo exige a comparação de $\sqrt[3]{5}$ e de $\log_7 3$ com números racionais, nomeadamente com fracções decimais. É contudo evidente que, no caso da igualdade, o cálculo aproximado não mais nos levaria a uma conclusão. Assim, por exemplo, não é por cálculo aproximado que podemos saber se a igualdade $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}=1+\sqrt{2}$ é ou não verdadeira.

Em casos simples, o critério de comparação reveste-se de carácter algébrico, e é fixado pelo *princípio da conservação das leis formais* [9]. Por exemplo, a introdução das irracionalidades do tipo $\log_k a$ (a e k racionais; $k \neq 1$) deve fazer-se, tendo em vista a conservação duma das conhecidas propriedades de monotonia das potências, e, dêste modo, a relação de grandeza entre $\log_k a$ e um número racional r deverá ser idêntica ou contrária à que se verifica entre k^r e $k^{\log_k a}=a$, conforme se tiver $k>1$ ou $k<1$.

De resto, já os processos de cálculo da soma e do produto de dois números reais são determinados pelas respectivas propriedades de monotonia. O mesmo, exactamente, cabe dizer a respeito da potência de expoente irracional, cuja noção *intuïtiva* pode sem dificuldade ser apresentada no liceu, mediante problemas adequados de aproximação — *e, do ponto de vista lógico, será igualmente possível apresentar essa noção antes ou depois dos logaritmos, por muito que êste facto perturbe o senso-comum.*

Quanto aos problemas de aproximação, desde logo se descobre neles o inconveniente de conduzirem, geralmente, a cálculos muito laboriosos, sobretudo nesta fase em que, relativamente a operações irracionais, o aluno só conhece um processo particular de cálculo: o da extracção da raiz quadrada [10]. Está então indicado o uso de tábuas numéricas [11], entre as quais não deveria figurar a de logaritmos, enquanto não tivesse sido exposta a respectiva teoria — para não inverter a ordem didàcticamente admissível [12].

Resumindo: deve conduzir-se gradualmente o aluno do campo algébrico para o campo topológico, procurando sempre colocá-lo numa situação análoga à do investigador. «*Os matemáticos não começaram por definir os números: trabalharam com êles*». (F. Osgood, *Functions of a complex variable*).

---

[9] Convém recordar que a aplicação dêste princípio compreende duas fases: 1) verificar que só *um* critério é possível, desde que se pretenda conservar uma dada propriedade; 2) averiguar quais das propriedades do anterior domínio subsistem no domínio ampliado e, portanto, quais as condições em que é legítimo operar sôbre os novos números. É manifesto que a segunda parte não pode ser executada no ensino liceal, porque tal exigiria uma análise lógica delicada e muito abstracta dos fundamentos da Álgebra. Temos portanto de nos conformar com algumas verificações e, em tudo o mais, seguir os ensinamentos da evolução histórica.

[10] É preciso destruir entre os alunos a idéia preconcebida de que, sem o auxílio duma tábua de logaritmos, estão impossibilitados de fazer o cálculo de raízes de índice superior a 2; e também a idéia de que certos métodos são inadmissíveis em Matemática, só porque recorrem a tentativas. Convém lembrar-lhes que, até no processo usual da divisão, se empregam tentativas, e que, para efectuar uma simples operação racional, se faz uso de tábuas numéricas — que foram decoradas no ensino primário...

[11] Já no número anterior indiquei como se pode tirar partido das tábuas de quadrados.

[12] O que me parece em particular indispensável é o ensino (que não se faz nos nossos liceus) de processos para a cotação dos erros que se cometem nos cálculos numéricos, quando efectuados com o auxílio da tábua de logaritmos.

Particularmente importante me parece chamar a atenção do aluno para o facto de que a noção de «irracional», a noção de «contínuo», a noção de «infinito» são desprovidas de significado experimental. O que não impede que tais noções tenham proporcionado à Matemática a maneira mais cómoda e mais fecunda de ser útil às ciências experimentais [13].

III. A «resposta» do Sr. Prof. Bento Caraça às minhas considerações, publicadas no precedente número da «Gazeta de Matemática», parece-me insistir demasiado em aspectos puramente secundários do problema discutido. Não obstante, a leitura da referida «resposta» (secção V) levou-me à conclusão de que o autor não está longe de concordar comigo: — o método que preconizo para apresentar nos liceus a noção de logaritmo, parece não lhe repugnar, desde que seja exibido com a indumentária, *mais económica*, das progressões aritmética e geométrica. Sim, porque se trata apenas duma diferença de *forma!* E quer por uma forma quer pela outra, o resultado é o mesmo, inevitávelmente o mesmo: — *desde que tenha compreendido realmente a definição, o aluno fica «ipso facto» habilitado a construir uma tábua de logaritmos!* Não será então o mesmo saber o que é logaritmo, e saber construir uma tábua de logaritmos?! Pois eu tenho de confessar que só muito dificilmente consigo distinguir as duas coisas. Bem sei que se consegue muitas vezes, em Análise, demonstrar a existência duma função, definida num certo intervalo, sem que tal demonstração forneça qualquer meio de *construir* a função — mas tal não é o caso da função logarítmica. E, ainda que se tenha imaginado, (embora eu não a conheça) uma definição de logaritmo, puramente existencial, idealista, à Zermelo, estou convencido de que *ninguém, com o sentido das realidades, hesitaria* em substituí-la por uma *definição construtiva,* no puro sentido da escola intuïcionista [14].

Pode também acontecer que o processo de construção sugerido por uma demonstração de existência conduza a cálculos tão laboriosos que seja práticamente impossível utilizá-lo. Mas tal não sucede ainda com o método elementar que sugeri (mas que não pretendo ter descoberto!) para o cálculo directo dos logaritmos, o qual se encontra implícito na própria definição de logaritmo, *qualquer que seja a forma de que esta se revista.* Êsse método não difere essencialmente (o que não admira) do que permitiu a Briggs construir as suas tábuas de 14 decimais [15], e que F. Klein considera mais potente do que o método usado pelo inventor dos logaritmos. Além disso, eu tive o cuidado de lembrar o recurso da tábua de quadrados, que reduz enormemente a dificuldade dos cálculos. E, depois, há um facto que não se pode negar, porque se impõe com tôda a fôrça da evidência: — é a simplicidade quási infantil do método que sugeri. [16] Até, para evitar dúvidas, o reduzi às linhas essenciais: «*Seja* a *o número dado. Calculemos a sua potência de expoente* p, *sendo* p *um inteiro qualquer. Se fôr* $10^n < a^p < 10^{n+1}$, *ter-se-á* $10^{\frac{n}{p}} < a < 10^{\frac{n+1}{p}}$, *e portanto* $\frac{n}{p} < \log a < \frac{n+1}{p}$». Dêste modo se consegue fazer o cálculo directo de $\log a$ com um êrro inferior a $\frac{1}{p}$.

Pois bem: foi o processo tão simples e inocente, condensado nas breves palavras anteriores, que me pôs em risco de ser apedrejado, como algoz das «pobres massas académicas»!...

Há um ponto que particularmente me interessa esclarecer. Não é verdade que eu tenha afirmado categóricamente: «Deve-se *obrigar* o aluno a construir uma tábua de logaritmos». Sôbre êste ponto a minha opinião ficou nìtidamente formulada: «*Mesmo que o aluno não chegue a construir uma*

---

[13] Até no Cálculo das Probabilidades, cujas aplicações se estendem hoje às ciências biológicas, sociais, económicas e psicológicas, se reconheceu a vantagem de substituir, em muitos casos, a variável discreta pela variável contínua.

[14] A função logarítmica pode também ser definida a partir da conhecida equação funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$, juntando-lhe a condição de continuïdade. (Em linguagem moderna: «Diz-se logarítmica tôda a função que estabelece um isomorfismo algébrico e topológico, entre o grupo multiplicativo dos números positivos e o grupo aditivo dos números reais»). Mas, ainda neste caso, é construtiva a correspondente demonstração de existência.

[15] Êste método pode apresentar-se do seguinte modo: *Seja* a *um número compreendido entre* 1 *e* 10; *para saber se o seu logaritmo está compreendido entre* 0 *e* $\frac{1}{2}$ *ou entre* $\frac{1}{2}$ *e* 1, *basta comparar* a *com* $10^{\frac{1}{2}}$. *Suponhamos que* $\log a$ *se encontra no intervalo* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$: *para saber agora se está compreendido entre* $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{3}{4}$ *ou entre* $\frac{3}{4}$ *e* 1, *procede-se anàlogamente, comparando* a *com* $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt{\sqrt{1000}}$; *e assim sucessivamente.* Não será difícil reconhecer que, no fundo, êste método não difere daquele que defendo.

[16] As minhas considerações não teriam sido tão longas se eu tivesse como propósito exclusivo expor secamente o método em questão.

dessas tábuas, ficará (e é isto o fundamental) a ter a legítima convicção de que seria capaz de construi-la se tanto quizesse».

E quando *sugeri, como exercício,* a construção duma tábua de logaritmos, de 3 ou 4 dècimais, *por uma «équipe» de alunos, com auxílio duma tábua de quadrados* (a que indiquei ocupa duas páginas dum pequeno livro), eu tinha reflectido sôbre o assunto: supondo que uma «équipe» de 30 alunos se propunha construir uma tábua de 3 dècimais (para números compreendidos entre 1 e 100), cada aluno teria de calcular directamente, quando muito, três logaritmos — o que, neste caso, pode fazer-se em menos de 30 minutos.

IV. Resta-me agora analisar o seguinte aspecto da questão: Qual das *formas* indicadas deve preferir-se para a definição de logaritmo? Eu acho que se deve optar pela definição apresentada a partir da noção de potência, e vou dizer porquê. É que, para mim, essa forma é seguramente a menos artificiosa e a mais manuseável; a que mais visìvelmente se integra na linha mestra do desenvolvimento da Matemática, e a que mais còmodamente, e com mais naturalidade, permite demonstrar as proposições da teoria dos logaritmos [17]. Depois de familiarizado com as seis operações: adição, subtracção, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, o aluno será naturalmente conduzido a considerar a segunda operação inversa da potenciação: a logaritmação. Depois de tomar contacto com uma primeira classe de irracionais — os que se exprimem como raízes aritméticas de números racionais positivos — o aluno é levado ao conhecimento duma nova classe de irracionais: os que se exprimem como logaritmos de números racionais positivos (em sistemas de base racional) [18]. Cada uma destas classes gera um corpo. E nestas duas ampliações sucessivas do corpo racional — uma algébrica e a outra transcendente — não se chega a praticar nenhum atentado contra a lógica; pelo contrário, é êste um procedimento muito lógico e muito razoável, que deve mesmo satisfazer os exigentes espíritos à Kronecker e à Brouwer, e que está no espírito da Álgebra moderna. Não considero exacta a afirmação de que se faz aqui uso dum «instrumento analítico imperfeitamente definido»: o que se faz é uso duma função *perfeitamente definida* no corpo racional, mas ainda não definida (porque tal se pode por enquanto dispensar) no corpo dos números reais. Não raro se utiliza a mesma função definida no corpo real, antes de o ser no corpo complexo (ou no corpo complexo, antes de o ser num anel de matrizes), e não sei de ninguém que se tenha revoltado contra semelhante *crime*. E se amanhã um matemático fôr conduzido a novas generalizações dêste conceito?... De resto, um *crime* análogo se pode cometer na definição das raízes aritméticas dos numeros racionais: por exemplo, para definir $\sqrt{2}$, podemos partir da função x^2 definida sòmente no corpo racional. Vendo bem, pratica-se uma *monstruosidade* dêste género, tôdas as vezes que se inventa uma nova categoria de números. Assim, as equações: $ax=b$, com a e b inteiros positivos; $a+x=b$, com a e b racionais positivos, e $x^2+a^2=0$ com a racional, são o ponto de partida para a criação dos números fraccionários, dos números racionais negativos e dos números complexos racionais, respectivamente. Do mesmo modo, a impossibilidade de resolver em certos casos as equações $x^m=a$, com m inteiro e a racional positivo, e $a^x=b$ com a e b racionais positivos $(a\neq 1)$, podem tomar-se como ponto de partida para a introdução das duas mencionadas classes de irracionais.

É claro que, na aplicação desta doutrina, não se deve perder de vista a mentalidade do aluno. Em especial, convém dar ao ensino uma orientação de *redescoberta*. Assim, no caso de que nos estamos ocupando, mostra-se ao aluno como, em certos casos, é possível substituir multiplicações por adições, etc. O aluno verá nisso uma idéia muito engenhosa, mas logo se lhe depara uma dificuldade: «Será sempre possível determinar os expoentes que permitem fazer a substituição?» É esta uma boa oportunidade para lhe demons-

---

[17] Em particular, o teorema fundamental (relativo ao logaritmo dum produto) aparece como a transformação muito feliz duma propriedade das potências, que os alunos conhecem desde o 1.º ano. Convêm notar que Neper foi levado à descoberta dos logaritmos por meio das progressões: mas era essa, com efeito, a maneira mais cómoda de chegar à noção de logaritmo neperiano — que não à de logaritmo decimal. O princípio da inércia passou depois a fazer sentir os seus efeitos...

Será no entanto de útil esclarecimento, depois de apresentada a definição de logaritmo a partir da noção de potência, mostrar como varia o logaritmo, quando o número cresce em progressão geométrica.

[18] Mais geralmente, o aluno virá a conhecer irracionalidades do tipo $\log_k a$ em que a e k pertencem a um domínio *já considerado.* Com efeito, há uma infinidade de combinações possíveis: $\sqrt[m]{\log_k a}$, $\log_k(\log_r a)$, etc. — o que mostra a comodidade do conceito genérico de irracional, a-pesar-das enormes dificuldades lógicas que tal generalização introduz.

trar que, se fôr N um número inteiro, que não seja potência de expoente inteiro de 10, não existe nenhum número racional r tal que $10^r = N$ (19). Depois disto, a questão pode ser apresentada nos seguintes termos: «Se não existe em todos os casos um tal expoente, no campo racional, vamos introduzir números irracionais dum modo adequado para que o problema seja sempre possível, ou, o que é equivalente, vamos ladear a dificuldade de modo que o resultado seja pràticamente atingido». E tudo o que vier em seguida será a execução directa e sistemática dêste plano.

A Matemática não se constrói dum bloco... E é bom que o aluno se habitue a considerar esta ciência como um «evoluir» e não como qualquer coisa de acabado e perfeito; como «obra de homens e para homens», em que êle mesmo poderá vir a colaborar, e não como generosa dádiva de deuses. Só assim o «carácter convencional de tôda a definição» matemática deixará de repugnar ao espírito do principiante, porque foi preparado o terreno psicológico, favorável à aceitação de tais convenções, *adaptadas a um certo fim.* Só dêste modo se conseguirá pôr têrmo à lenda, que se criou, da aridez e do tecnicismo estreito da Matemática. Só então deixaremos de ouvir a pessoas *cultas* esta impertinente pregunta: «¿Pois ainda há que descobrir em Matemática? A Matemática não é então um assunto esgotado?» De semelhante estado de espírito é grandemente responsável a orientação que tem predominado no ensino desta disciplina. Só utilizando, como aconselha Klein, o método *intuïtivo* e *genético,* será possível evitar as tão freqüentes atitudes de incompreensão e, mesmo, de rebelião, a respeito da Matemática, e despertar no aluno o amor desta ciência. Tem-se afirmado que a aplicação *integral* dêsse método tornaria o ensino demasiado lento. Embora seja a experiência que, neste ponto, deva ditar a última palavra, eu creio que só de comêço haveria uma aparente perda de tempo — perda que seria depois amplamente compensada pelo *à vontade,* a consciência e o interêsse com que o aluno passaria a encarar os diferentes assuntos. E em tudo isto, a *intuïção,* que desempenha um papel dominante, como guia poderoso, na fase da redescoberta, cederia depois o lugar a uma *lógica rigorosa,* na consolidação dos resultados. É claro que tal aperfeiçoamento lógico não será sempre possível ou vantajoso, no liceu — mas acontece que muitas vezes é possível, e fácil, e proveitoso. Nos casos restantes, devemos conformar-nos com a base intuïtiva — que, no ensino da Matemática, é seguramente preferível a uma base autoritária e, ainda mais, a uma base de mistificação.

Eu sei o que muitas pessoas, com prática de ensino secundário (devo dizer que também tenho alguma) costumam responder a observações semelhantes às anteriores: «Fantasias! Tudo isso é muito bonito, mas a verdade é que os alunos são incapazes de acompanhar um ensino com êsse nível. A *pràticazinha* desfaz muitas ilusões!» Tese na verdade muito cómoda, mas tese desanimadora — tese perigosa! E pouco lisonjeira para os estudantes portugueses. (Mas serão incapazes *todos* os alunos? E, vendo bem, onde estará muitas vezes a incapacidade?) Fantasia, sonho, delírio — essas palavras não me assustam: já as conheço bem. São palavras que se fazem ouvir, tôdas as vezes que é preciso incomodar S. Ex.ª, a Rotina.

(19) Êste teorema pode ser demonstrado dum modo extraordinàriamente simples, desde que se admita intuïtivamente um facto elementar.

NOTAS:

1.ª Não foi inconsideradamente que, no precedente número da «G. M.», tomei como escudo a opinião de Klein. Ao leitor menos informado, direi que Felix Klein (1849-1925) é geralmente considerado como um modêlo de matemático ligado à realidade. Foi enérgico defensor do *fusionismo,* isto é, da solidariedade entre os diferentes ramos da Matemática, e mesmo entre os diferentes ramos da Ciência. Neste sentido, as suas idéias revestem-se dum carácter nitidamente revolucionário. A obra de F. Klein (na Matemática e na Pedagogia) distingue-se por um vigoroso cunho de originalidade e juventude.

2.ª Sôbre a construção de tábuas de logaritmos, recomendo vivamente a leitura do livro de L. Hogben, *Les Mathématiques pour tous* (1939), no capítulo: «Comment furent découverts les logarithmes». Êste livro de Matemática para *todos* apresenta ainda um processo de construção de tábuas trigonométricas e três processos para o cálculo de π. Pouco práticos, estes inglêses!... Quantos são os alunos que, na vida *real,* se ocuparão do cálculo de π?

3.ª O método que preconizo para a definição de logaritmo presta-se particularmente para uma demonstração *completa* do teorema relativo ao logaritmo dum produto, do qual se deduzem fàcilmente as restantes proposições da mesma teoria: *Sejam* a *e* b *números positivos dados. Se tivermos* $10^m \leq a^p \leq 10^{m+1}$ *e* $10^n \leq b^p \leq 10^{n+1}$, *sendo* p *um inteiro arbitrário, teremos também* $m/p \leq \log a \leq (m+1)\, p$, $n/p \leq \log b \leq (n+1)/p$, *donde* $(m+n)/p \leq \log a + \log b \leq (m+n+2)/p$. *Por outro lado, multiplicando ordenadamente as duas primeiras duplas desigualdades, temos* $10^{m+n} \leq (ab)^p \leq 10^{m+n+2}$, *donde* $(m+n)/p \leq \log(ab) \leq (m+n+2)/p$. *Assim, os valores de* $\log(ab)$ *e de* $\log a + \log b$ *pertencem ambos ao segmento* $[(m+n)/p,\ (m+n)/p + 2/p]$: *a sua diferença não pode exceder, em valor absoluto, o comprimento dêste segmento, ou seja,* $2/p$. *Teremos, pois:* $\log(ab) = \log a + \log b + \varepsilon$, *em que* $|\varepsilon| < 2/p$; *mas, como* p *é arbitràriamente grande, segue-se que* $\varepsilon = 0$ *e portanto* $\log(ab) = \log a + \log b$. Para maior generalidade, pode substituir-se 10 por k, designando por k a base do sistema.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

Secção a cargo de A. Pereira Gomes

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PÔRTO

UM CURSO PELO DOUTOR ANTÓNIO MONTEIRO

Integrado no plano de trabalhos do Centro de Estudos Matemáticos da Faculdade de Ciências do Pôrto, realizou o Dr. António Monteiro, de 23 de Outubro a 7 de Novembro, um curso subordinado ao tema «Introdução ao Estudo da Noção de Função Contínua».

Um curso promovido fora do plano oficial de estudos universitários, quando é professado por uma personalidade científica de primeira plana sôbre assuntos de grande actualidade, provoca sempre um forte movimento de curiosidade e interêsse. Observa-se, porém, com freqüência, que êsse interêsse diminui ràpidamente e só a raros acompanha até final do curso.

É-nos grato notar que isto se não verificou com as lições do Dr. António Monteiro. Apesar do prejuízo que, sem dúvida, adveio, para um pleno rendimento do curso, do facto de um conjunto de circunstâncias ter obrigado à sua realização num período em que a vida escolar estava ainda perturbada com os exames da 2.ª época, a freqüência destas lições manteve-se com tôda a regularidade. O Dr. António Monteiro teve, de facto, também sob êste aspecto, o mérito de sustentar, da 1.ª à última lição, o vivo interêsse com que o ouviu um grande grupo de alunos, assistentes e professores.

Dêste modo, o curso desenvolveu-se num verdadeiro ambiente de trabalho, estranho a quaisquer formalidades, em que cada um, procurando apreender as idéias centrais da exposição, se colocava em condições de sentir a essência do problema da caracterização topológica da noção de continuïdade, problema que foi analizado até às suas últimas conseqüências.

O curso foi desenvolvido de acôrdo com o seguinte programa:

I — Definições métricas

A noção de função contínua. Funções com um número finito de variáveis reais ou complexas. Funções de uma infinidade numerável de coordenadas (espaço l^2). Funções de quadrado somável (espaço L^2). Espaços l^p e L^p. Funcionais do cálculo das variações. Vizinhanças de diferentes ordens. Unificação pela teoria dos espaços distanciados.

II — Definições topológicas

Relações entre as noções de espaço métrico e de espaço topológico.

A noção de espaço (V) de Fréchet e a definição de continuïdade de Cauchy.

A noção de fecho de um conjunto como noção primitiva da topologia. Os conjuntos fechados e os espaços de Sierpinski. Novas definições de continuïdade.

Espaços topológicos particulares.

Espaços topológicos mais gerais (Moore) e a teoria das funções contínuas nestes espaços (Garrett Birkhoff).

O problema da caracterização dos espaços topológicos pelo tipo de continuïdade. O problema de Wiener.

III — Generalizações

Sistemas parcialmente ordenados e Álgebras de Boole. Sistemas parcialmente ordenados topológicos. Generalização da noção de função contínua e de homeomorfia.

Dado o êxito das lições que constituíram êste curso, é para lamentar que não tivesse havido possibilidade de prolongar por mais algumas semanas a estadia do Dr. António Monteiro entre nós, o que lhe poderia permitir dar um maior desenvolvimento ao estudo de certas questões, apenas apontadas, em particular, o problema da caracterização dos espaços topológicos, pelo tipo de continuïdade, o problema da caracterização da recta pelo conjunto das suas deformações topológicas, e a generalização da noção de função contínua e de homeomorfia em sistemas parcialmente ordenados topológicos.

A. PEREIRA GOMES

Publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto

Acabam de aparecer mais duas publicações da colecção criada por êste Centro de Estudos: «Sôbre os grupos abelianos», por A. Almeida Costa, professor extraordinário da Universidade do Pôrto e «Cálculo Tensorial», por Manuel Gonçalves Miranda, assistente da Universidade do Pôrto.

RECTIFICAÇÃO

Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências (Pôrto-1942)

No penúltimo parágrafo da pg. 19, (G. M. - n.º 12), na 5.ª linha a contar do fim, onde se lê: praxe das palavras *sem convicção...*, deve ler-se: praxe das palmas *sem convicção.*

A uma má revisão, cuja responsabilidade é da Redacção, se deve o êrro assinalado.

N. R.

DUAS PALESTRAS DE VULGARIZAÇÃO MATEMÁTICA NA UNIVERSIDADE DO PÔRTO

Dirigida a todos os alunos da Universidade do Pôrto, realizou o Dr. António Monteiro duas palestras subordinadas ao título geral «Miniatura Matemática».

A realização de palestras de vulgarização matemática vem ao encontro de um desejo unânime dos estudantes de tôdas as Faculdades, que vêem numa amplificação dos seus conhecimentos dentro dos domínios desta ciência não só uma necessidade de adaptação ao seu rápido progresso, mas também um meio eficiente de abordar a crítica de alguns problemas de outras ciências, Biologia, Física, Química, etc.

A avaliar pela maneira como estas duas palestras foram recebidas no nosso meio académico, é de esperar a continuação, dentro da Universidade, duma tão útil actividade de vulgarização, em que muito desejaríamos ver incluída a colaboração de estudantes.

Seguem os sumários das referidas palestras:

1.ª — *Geometrias finitas*

Plano euclideano finito (com 4 e 8 pontos). Espaço euclideano a 3 dimensões (com 8 pontos). Axiomas da Geometria e a noção de isomorfismo. Sistemas categóricos e não categóricos.

2.ª — *Álgebra finita e a geometria analítica*

Álgebra dos pares e dos ímpares. Leitura de um relógio. Anéis, domínios de integridade e corpos finitos Extensão algébrica de um corpo. Representação plana dum corpo de 4 números complexos. Relações entre a Álgebra e a Geometria Finita.

A. P. G.

O SEMINÁRIO DE FÍSICA TEÓRICA ANEXO AO C. E. M. DO PÔRTO

Anuncia-se, para o comêço do próximo ano, a vinda do Prof. Alexandre Proca, nome bem conhecido no domínio da Física, e um dos investigadores do Instituto de Henri Poincaré de Paris.

Ficará dêste modo assegurada a continuïdade dos trabalhos do Seminário de Física Teórica anexo ao C. E. M. da Universidade do Pôrto, que sob a orientação do Dr. Guido Beck tem realizado uma obra útil, tanto no domínio da investigação como no de actualização.

O Dr. Guido Beck tem-se ocupado de alguns sistemas de operadores diferenciais que se deduzem das equações de Dirac; um dêsses sistemas está em relação com o fenómeno da produção dos pares; outro constitui uma generalização das equações de Maxwell no vazio.

O Assistente Rodrigues Martins, da Faculdade de Ciências de Coimbra, fêz uma exposição sôbre os dados experimentais que servem de base às modernas concepções das fôrças nucleares.

O Prof. Ruy Luís Gomes fêz uma comunicação sôbre a noção de probabilidade em Mecânica Quântica.

O Assistente Fernandes de Sá, da Faculdade de Ciências do Pôrto, estuda o problema do comportamento das grandezas físicas relativamente a uma transformação de Lorentz, segundo a teoria de Dirac.

A. P. G.

FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA

O Laboratório de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa, a que está anexo o Centro de Estudos de Física do Instituto para a Alta Cultura, vai promover, brevemente, uma série de sessões, onde será apresentado um conjunto de experiências sôbre vários assuntos — rádioactividade, raios X, efeito fotoeléctrico, etc. — que interessarão um grande público, sobretudo os alunos e licenciados em Ciências Físico-Químicas.

Trata-se de mais uma actividade do Seminário de Física, cujas sessões se realizam regularmente neste Laboratório e de que já a «Gazeta de Matemática» deu notícia aos seus leitores o ano passado. É com vivo prazer que registamos esta iniciativa digna de louvor a todos os títulos e que bastante contribue para manter ligados à Escola os seus diplomados.

Consta-nos também que a Secção de Matemática da mesma Faculdade, vai promover, êste ano, a realização duma série de colóquios e conferências a cargo do seu pessoal docente, estando prevista uma intensa colaboração com o Observatório Astronómico de Lisboa (Tapada da Ajuda) no domínio da Astronomia e da Geodesia. O objectivo é formar um centro de investigação no campo das matemáticas puras e aplicadas, independente do Centro de Estudos Matemáticos do Instituto para a Alta Cultura, que funciona na mesma

Faculdade. A iniciativa e direcção dêste novo centro pertence à Secção de Matemática da Faculdade que iniciou já, há tempos, os trabalhos preparatórios para a realização dêste objectivo.

A «Gazeta de Matemática» espera poder informar os seus leitores sôbre as actividades dêstes centros de trabalho e dar notícias mais detalhadas no próximo número.

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

A «Gazeta de Matemática» noticia no presente número um acréscimo da actividade matemática verificada no I. S. T., que se deve às palestras realizadas por alunos dêste Instituto sôbre assuntos de matemáticas puras e especializadas que interessam sobretudo aos estudantes de engenharia.

A «G. M.» felicita esta iniciativa como tôdas aquelas que têm por fim aumentar a cultura matemática dos estudantes portugueses e dá a seguir o resumo dos assuntos tratados nas palestras já realizadas.

1.º colóquio — pelo aluno do 3.º ano de engenharia química, Marques Pereira:

Interpolação numérica. — Fórmulas interpoladoras de Lagrange e Newton. Fórmulas de Gauss. Teorema de Hermite.

2.º colóquio — pela aluna do 4.º ano de engenharia electrotécnica, Guida Lami:

Problemas clássicos de geometria. — Problemas geométricos elementares resolúveis pela régua, e pela régua e compasso. – Problemas geométricos de ordem superior: duplicação do cubo e trisecção do ângulo. Impossibilidade da sua resolução pela régua e compasso. – Problemas transcendentes: quadratura do círculo. Impossibilidade da sua resolução algébrica. — Quadratrizes e intégrafos.

3.º colóquio — pelo aluno do 4.º ano de engenharia civil, Júlio Ferry:

Nomografia. — Definição e classificação geral dos nomogramas: nomogramas de 1, 2 e 3 planos. Sistemas de nomogramas. — Estudo dos nomogramas de pontos alinhados. Noção de classe e género. Tipos possíveis. – Aplicações à engenharia.

4.º colóquio — pelo aluno do 4.º ano de engenharia electrotécnica, Adelino Costa:

Aplicações dos complexos à electricidade. — Métodos de representação dos n.os complexos. — Introdução da variável tempo; métodos de representação das correntes alternadas. Método analítico. Método dos vectores girantes. Método da representação simbólica. — Aplicações.

5.º colóquio Pelo aluno do 5.º ano de engenharia electrotécnica, Dr. David Lopes Gagean:

Elementos da teoria dos operadores. — Introdução sôbre mecânica ondulatória e mecânica quântica. — Origem da teoria dos operadores. Elementos desta teoria.

6.º colóquio — pelo aluno do 4.º ano de engenharia electrotécnica, Carlos Ribeiro da Silva.

Séries de Fourier. Aplicações à electro-acústica. — Definição da electro-acústica. Definição matemática de vibração sinusoidal. Grandezas características das curvas não sinusoidais. — Séries de Fourier. Cálculo dos seus coeficientes. Harmónicas. Vários aspectos. — Métodos de cálculo dos coeficientes. — Aplicações.

7.º colóquio – pelo aluno do 4.º ano de engenharia electrotécnica, Conte Morais:

Equações diferenciais. Aplicações à electricidade. — Equações ordinárias. Aplicação a um circuito eléctrico. — Resolução de algumas equações às derivadas parciais. — Aplicação à transmissão da electricidade ao longo dum cabo.

LA AGRUPACIÓN DE ALUMNOS DE ESTÚDIOS MATEMATICOS DE MADRID

Com vivo prazer assinalamos na «Gazeta de Matemática» a existência dêste agrupamento de Estudantes de Engenharia de Madrid.

Em Abril próximo «La Agrupación» promove a realização de uma série de conferências sôbre «Teoria das transformações geométricas», a cargo do Professor auxiliar da Universidade Central D. José Gallego Diaz, redactor principal de «Euclides», revista espanhola de ciências matemáticas, físico-químicas e naturais. O mesmo professor realizou em 1942, sôbre esta matéria, um curso que, pelo êxito alcançado, motivou o pedido do público da sua repetição.

Apresentamos aos nossos leitores, pelo interêsse do assunto, um pequeno resumo do programa das lições:

I — *Generalidades sôbre transformações* – Noção de grupo de transformações — Grupos abelianos — Invariantes — Translação, rotação, simetria, homotecia — Noção de corpo e de anel — Isomorfismo e automorfismo — Transformações homográficas — Invariante de uma figura em relação a um grupo de transformações — Invariantes fundamentais e diferenciais.

II — *Transformações homográficas do plano* — Subgrupo — Grupos isomorfos — Grupos do movimento — Invariantes — Homologia.

Transformações homográficas do espaço

III — *Transformações pontuais* — Transformações birracionais e quadráticas — Inversão — Projecção estereográfica; aplicações à trigonometria esférica e à cosmografia — Coordenadas pentaesféricas.

IV — *Transformações duais* — Coordenadas tangenciais — Princípio da dualidade.

V — *Transformações de contacto* — Elementos de contacto — Transformações de Sophus Lie — Suas equações.

VI — *Transformações no espaço n-dimensional* — Geometria cinemática e geometria estática.

As conferências a realizar são públicas e no final são propostos aos alunos alguns exercícios.

SÔBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA NA SUÍÇA

por Maria do Pilar Ribeiro

II

Prosseguindo no objectivo de informar os leitores da «Gazeta de Matemática» sôbre o ensino na Suíça, deixamos hoje as transcrições de regulamentos escolares e planos de conjunto, para dar notícias de questões de detalhe que nos parecem interessar. Elas referem-se, por enquanto, só ao ensino superior e a três cursos distintos da Escola Politécnica Federal. Do 1.º damos uma parte do programa; do 2.º o assunto duma lição e, finalmente, do 3.º alguns exercícios práticos.

1. Um dos cursos da Escola de Matemática e Física do presente semestre que tem despertado um grande interêsse, é o de «Espaços Topológicos» que o professor Hopf, pela primeira vez, realiza êste ano em Zürich. O facto de haver em Lisboa um grupo de estudiosos da topologia geral que aí fizeram, já no ano passado, uma série de conferências de introdução com objectivos diferentes dos dêste curso, mas com um programa em parte muito semelhante ao das primeiras lições do prof. Hopf, leva-nos a dar notícia, desde já, do programa duma 1.ª parte do curso, que vai até ao fim do mês de Novembro. No fim do semestre daremos notícia das lições restantes e só então, naturalmente, poderá fazer-se uma idéia de conjunto. O curso teve início em 12 de Outubro com 4 tempos de aula de 45 m.

Introdução histórica — Introdução sucessiva de conceitos novos de espaço (Descartes, Grassmann, Schläfli, Riemann, Hilbert). Exemplos. Espaços funcionais (Fréchet). Objectivo da Topologia Geral. Relações com a teoria dos conjuntos (Cantor, Hausdorff) e teoria da dimensão. Programa do curso.

I — Teoria geral dos espaços topológicos e métricos

Notas prévias sôbre a álgebra das classes. Axiomas dos espaços topológicos (de Kuratowski) *e noções fundamentais* (conjuntos fechados, abertos, vizinhanças, pontos de acumulação, fecho dum conjunto). Análise dos axiomas em termos de fecho. Axiomas em termos de conjuntos fechados e abertos, e discussão. Relações entre o fecho dum conjunto e os conjuntos abertos do espaço. Sistema de vizinhanças dum ponto. Base e sua utilização para caracterizar o fecho. Axiomática, por intermédio das vizinhanças, dos espaços de Kuratowski e análise da equivalência com as axiomáticas anteriores. Equivalência topológica de dois sistemas de vizinhanças. Relativização. Exemplos.

Exemplos de espaços topológicos. Espaços métricos. Espaços com um número finito de pontos. Recta, plano, espaço R^n (vizinhanças esféricas, rectangulares e quadradas). Definição de espaços métricos e de métrica fraca Enunciado do problema da metrização. Exemplos de espaços métricos ou de métrica fraca, importantes na Geometria e na Análise, discussão e comparação das diversas métricas usuais em cada espaço (R^n, de Hilbert, espaços de funções, espaço dos sub-conjuntos dum conjunto). Noção de convergência. Exemplos dos espaços de funções: convergência uniforme, convergência em média, convergência ordinária. Definição de espaço L de Fréchet. Comparação desta noção com a de espaço topológico. (Classes de Baire). Produto topológico de dois espaços. Exemplos.

Transformações continuas. Notas prévias sôbre as transformações e a álgebra das classes. Diversas caracterizações da continuïdade duma transformação dum espaço topológico noutro (fecho, conjuntos fechados, conjuntos abertos, vizinhanças, convergência) e discussão. Casos de espaços topológicos particulares, definição de Cauchy. Continuïdade uniforme. Transformações biunívocas e não bicontínuas. Exemplos. Homeomorfismo. Funções contínuas e discussão. Funcionais contínuas, discussão e exemplos. Conexão. Exemplos. Invariância topológica desta noção.

Axiomas de separação. Espaços acessíveis, de Hausdorff e normais. Discussão. Exemplos mostrando o fortalecimento efectivo e sucessivo destas condições de separação. Propriedades dos espaços normais utilizáveis no problema da metrização: Problema da existência de funções reais contínuas, discussão detalhada e resolução.

Axiomas de numerabilidade. 1.º axioma de numerabilidade, A_1, exemplos. Relação com os espaços métricos e a noção de convergência. Exemplo dum espaço de Hausdorff que não verifica o 1.º axioma de numerabilidade A_1. 2.º axioma de numerabilidade, A_2, e suas conseqüências (A_1, Teorema de Borel, separabilidade). Equivalência de A_2 e da separabilidade nos espaços métricos. Exemplo dum espaço verificando A_1 e não A_2. Análise do espaço de Hilbert e de espaços de funções quanto à numerabilidade e separabilidade. Exemplo dum espaço de funções ortogonais isométrico ao espaço de Hilbert. Exemplo dum espaço normal verificando A_1 separável e não verificando A_2.

Homeomorfismos de espaços topológicos a sub-conjuntos do espaço de Hilbert e um teorema de metrização. Qualquer espaço topológico normal e verificando A_2 é homeomorfo a um sub-conjunto do espaço de Hilbert.

(Continua no próximo número).

ANTOLOGIA

LA MATHÉMATIQUE — AVANT-PROPOS

por Paul Montel

(de Encyclopédie Française — Tome I — L'outillage mental)

Tôda a nossa vida moderna está como que impregnada de matemática. Os actos cotidianos e as construções do homem trazem a sua marca e não só as nossas alegrias artísticas e a nossa vida moral lhe sofrem a influência. Os próprios animais se lhe submetem, e o seu instinto, desenvolvido pelo lento trabalho da hereditariedade, conduzi-os à descoberta de leis matemáticas que só o homem soube formular e que parecem existir nêles como que ligados obscuramente à forma da sua consciência.

A matemática aparece a cada instante na vida corrente para as necessidades comuns à maior parte dos homens, mas muitas vezes cada um dêles tem além disso uma ferramenta a empregar uma máquina a utilizar, um aparelho a pôr em marcha, sem falar dos especialistas, construtores, arquitectos, engenheiros, marinheiros, etc., para os quais o uso profissional da matemática tem um carácter permanente; é uma direcção a definir, um diâmetro a medir, uma velocidade a avaliar, uma casa a construir de que é preciso estabelecer o plano, um corte, um alçado. A matemática intervém mesmo para apaziguar a dor humana: o médico emprega-a nas dosagens, o bacteriologista na contagem dos micróbios, e o cirurgião na forma das suas intervenções e na disposição dos pensos.

Tôdas estas operações aritméticas ou geométricas que o homem efectua como que brincando, necessitaram séculos para que a humanidade conseguisse precisá-las, isolá-las, estabelecer as suas técnicas. Pode-se medir o caminho percorrido observando a maneira de contar dos povos chamados primitivos: êles recorrem a uma mímica que utiliza os dedos das mãos e dos pés ou então aplicam sucessivamente os objectos a contar sôbre as diferentes partes do corpo: reconhece-se neste último processo o esbôço da noção de correspondência tão fértil nas matemáticas actuais.

Os primitivos não vão muito longe na sua maneira de contar; de resto, os grandes números só aparecem lentamente; a palavra milhão è do século XV, bilião do século XVI, e isto numa Europa Ocidental já avançada.

A ideia, tão simples para nós, que, depois de qualquer número inteiro existe outro, esta idéia a que se reduz em última análise a noção de infinito matemático, é relativamente recente. Escapou à Grécia antiga e o génio de Arquimedes não a exprimiu claramente. Tinha, no entanto, feito na sua *Da Areia* um esfôrço enorme para mostrar que se pode dar nome a um número muito grande ainda que êle ultrapasse o dos grãos de areia que enchessem a terra, ou mesmo o Universo.

Vinte séculos passaram depois da afirmação de Arquimedes; a humanidade, familiarizou-se com os grandes números e com os seus inversos, os números muito pequenos. O estudo do Universo e o do átomo introduziram expressões numéricas que já deixaram de nos espantar, se bem que o nosso espírito não possa evocar uma imagem das grandezas que êles representam. Semelhantes nisto aos primitivos que dizem «muito» para além de um certo número, não sabemos traduzir doutra maneira a idéia de que uma nebulosa, por exemplo, está a uma distância de nós que corresponde a várias centenas de milhões de anos de luz.

Um outro caminho pelo qual a matemática se introduz na vida dos indivíduos e dos povos é o da probabilidade. Um grande número das nossas decisões dizem respeito a acontecimentos dos quais aos nossos olhos certos elementos de incerteza estão submetidos às leis do acaso. Estas decisões são guiadas e muitas vezes determinadas pela noção de probabilidade, algumas vezes sob uma forma imprecisa ou apenas consciente.

É também o cálculo das probabilidades que regula diversas medidas de ordem colectiva respeitantes à vida económica e social; a vida de organismos como bancos ou companhias de seguros sôbre a vida, a doença, a invalidez, o incêndio, a saraiva ou o roubo, os dispositivos de certos aparelhos como o telefone, a regulação do tiro, etc.

Pela estatística, os matemáticos elucidam outras questões de ordem financeira, económica ou social. As matemáticas aplicam-se também à higiene social, à educação das crianças, à psicologia e à técnica.

As matemáticas aparecem igualmente nos fenómenos respeitantes ao gôsto, à sensibilidade e à vida moral. Todos sabem o seu papel na arte, e, em particular, na arquitectura. A beleza das formas, está ligada à existência de relações simples e o número de ouro dos gregos aí intervem freqüentemente.

Começaram-se recentemente trabalhos destinados a caracterizar a beleza de certos vasos por expressões matemáticas. As notas e os acordes musicais correspondem, também, a relações numéricas simples e a poesia está estritamente ligado ao número

«A pintura e a poesia são matemáticas veladas», disse Forains. Existe além disso na própria matemática uma beleza intrínseca, dum carácter necessàriamente um pouco esotérico, que reside na harmonia das relações que formulam as suas leis.

A matemática exerce a sua influência mesmo sôbre a vida moral quer duma maneira directa, como no estudo dos jogos de azar, por exemplo, quer duma maneira indirecta, obrigando o espírito a hábitos de precisão e ordem que são transferidos naturalmente para o mundo moral. A imprecisão e a confusão do pensamento facilitam a certos homens a realização de actos que a nossa ética reprova.

As ciências, em geral, e por isso as matemáticas, exigem uma sinceridade e uma probidade em todos os instantes cujo efeito é contagioso. Assim as matemáticas pouco a pouco penetraram em todos os domínios da actividade humana, algumas vezes invisíveis mas sempre presentes. Para o homem civilizado de hoje o «saber contar» não é menos indispensável do que o «saber ler e escrever». A ciência do número e da extensão é pois útil em cada instante e a todos, e é uma verdadeira doença ignorar os seus rudimentos. De resto, como escreveram os Goncourt: «de duas inteligências iguais, colocadas em condições idênticas, a prioridade pertence àquela que conhecer geometria»'

Se as matemáticas estão estritamente ligadas a tôdas as formas da vida individual ou colectiva, é na elaboração da própria ciência que o seu papel é fundamental. A matemática é a linguagem da ciência e uma disciplina não merece verdadeiramente o nome de ciência senão a partir do momento em que as matemáticas aí penetram. Elas fornecem-lhe a expressão das suas leis, quer resultem dum estudo atento das ligações que unem os diferentes elementos variáveis de um fenómeno, quer resultem de valores médios de acções em número bastante grande das quais certas condições nos escapam.

Destas leis, as transformações de cálculo tiram conseqüências variadas que deverão ser submetidas ao contrôle experimental.

Uma das mais potentes tentativas de explicação dos fenómenos naturais que nos oferece a história das ciências, a teoria da relatividade, tem por fim dar uma imagem do Universo por meio de uma geometria a quatro dimensões.

As necessidades das ciências da natureza, das ciências humanas e das suas aplicações criam novas correntes para a investigação matemática e fazem desabrochar novos métodos. Mas a maior parte das vezes, o matemático vai ao sabor da sua fantasia. Plutarco diz que Arquimedes desdenhava da ciência de inventar máquinas e que empregava os seus melhores esforços «a escrever sòmente das coisas cuja beleza e subtileza não estivessem ligadas à necessidade».

Os matemáticos estudam cada vez mais as leis que regem as relações entre os números; criam os métodos que servem para êste estudo e outros problemas se levantam sob os seus passos à medida que avançam na resolução dos precedentes; como sempre numa região vivamente iluminada aparecem de novo cantos de sombra. As suas descobertas ficam, por vezes, sem aplicação durante séculos: são ferramentas esperando a mão do operário que delas saberá tirar partido. Tem-se dito muitas vezes: quando os gregos estudavam as secções cónicas, não previam o papel que elas desempenhariam um dia na astronomia e na navegação. Pode-se acrescentar: na balística, para a localização dos canhões por meio do som.

A ciência matemática tem o privilégio de crescer por justaposição de novas doutrinas às antigas, as ciências da natureza e as ciências humanas, pelo contrário, desenvolvem-se freqüentemente substituindo as antigas por teorias novas que se edificam sôbre ou ao lado das ruínas daquelas. Na cidade da matemática limitam-se a abrir novas avenidas, conservando os velhos bairros por meio de simples arranjos interiores. A alegria estética que traz ao matemático a contemplação desta cidade é a sua verdadeira recompensa. A beleza das suas construções abstratas oferece-lhe, por vezes, a mesma harmonia que as linhas de arquitectura ou os acordes da música.

A sua solidez desafia os séculos. Como escre-Vito Volterra: «a morte pode fazer desaparecer os impérios; a geometria de Euclides está de acôrdo com a geometria de hoje». Um teorema de Newton de Gauss ou de Poincaré guardará a sua verdade enquanto a razão humana permanecerá inalterável. No renovamento contínuo das doutrinas e das Escolas que governam as ciências da natureza e as ciências humanas, sòmente a matemática e a arte possuem perenidade.

Tradução de J. DA SILVA PAULO

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1942)

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 4

1195 — Determine as soluções inteiras e positivas da equação $\frac{3}{11}x+\frac{2}{7}y=29$. R: *Da equação proposta tira-se* $x=106-y+(7-y):21$ *e se fizermos* $y=7$ *vem* $x=99$. *As soluções inteiras serão dadas por* $x=99+22n$ *e* $y=7-21n$; *e as soluções inteiras e positivas obtêm-se substituindo nas fórmulas anteriores* n *por qualquer dos valores inteiros que verifiquem a seguinte dupla desigualdade* $-\frac{9}{2}<n<\frac{7}{21}$.

1196 — Determine os valores de x qve satisfazem a desigualdade $-x^2-11x+12>0$. R: $-12<x<1$ *visto* 1 *e* -12 *serem as raizes do trinómio, primeiro membro da desigualdade.*

1197 — As raízes de uma equação biquadrada são duas reais, do mesmo valor absoluto e de sinal contrário e as outras duas imaginárias puras conjugadas. De que natureza são as raízes da equação resolvente? Justifique a resposta. R: *As raizes da biquadrada são as raizes quadradas das raizes da resolvente; por isso as raizes da resolvente têm que ser, no caso pôsto, ambas reais e uma positiva e outra negativa.*

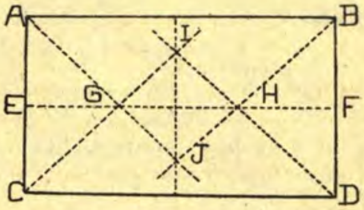
1198 — Verifique a identidade: $(\cos a-\cos b)^2+(\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b)^2=4\operatorname{sen}^2 1/2(a-b)$. R: *Do 1.º membro da igualdade, depois de desenvolver os quadrados e simplificar, obtém-se* $2-2(\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b)=2[1-\cos(a-b)]$. *Por outro lado, se notarmos que* $\cos^2\frac{1}{2}A-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A=\cos A$ *e que, por isso, é* $1-2\operatorname{sen}^2 A/2=\cos A$ *ou* $2\operatorname{sen}^2 A/2=1-\cos A$, *o segundo membro torna-se em* $2[2\operatorname{sen}^2(a-b)/2]=2[1-\cos(a-b)]$, *o que verifica a identidade.*

1199 — Sendo $\operatorname{sen} a=4/5$, calcule $\operatorname{sen} 2a$, $\cos 2a$ e $\operatorname{tg} 2a$. R: *Como* $\operatorname{sen} 2a=2\operatorname{sen} a\cos a=\pm 2\operatorname{sen} a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}$, *tem-se* $\operatorname{sen} 2a=\pm 2\cdot 4/5\cdot\sqrt{1-16/25}=\pm 24/25$; $\cos 2a=1-2\operatorname{sen}^2 a=1-2\cdot 16/25=-7/25$ *e* $\operatorname{tg} 2a=\pm\frac{24}{7}$.

1200 — Determine recorrendo ao cálculo logarítmico a expressão geral dos ângulos cujo coseno é $-0{,}3145$. R: $\log\cos\alpha=\log 0{,}3145=\bar{1}{,}49762$, *e* $\alpha=71^\circ 41' 9''$. *Como o coseno dado é negativo e como* $-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)$ *um dos ângulos que satisfazem ao problema é* $108^\circ 18' 51''$ *e a expressão geral dos arcos cujo coseno é* $-0{,}3145$ *será dada por* $\alpha=n\cdot 360^\circ\pm 108^\circ 18' 51''$, *onde* n *é um inteiro qualquer.*

1201 — Reduza à dízima as fracções 3/5, 2/7 e 3/14. Classifique as dízimas obtidas. R: $3/5=0{,}6$; $2/7=0,(285714)$ *e* $3/14=0{,}2(142857)$ *e portanto a primeira é uma dízima exacta; a segunda periódica simples e a terceira periódica mixta.*

1202 — Traçam-se as bissectrizes dos quatro ângulos de um rectângulo. Demonstre que: 1.º, essas bissectrizes formam um quadrado; 2.º, as diagonais do quadrado são paralelas aos lados do rectângulo; 3.º, o comprimento comum dessas diagonais é a diferença dos comprimentos dos lados do rectângulo. R: *Seja* ABCD *o rectângulo e* AJ, CG, BH *e* DI *as bissectrizes que se encontram nos pontos* G, I, H, J. *Os triângulos* AGC *e* BHD *são rectângulos isósceles por os ângulos em* $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\hat{B}$ *e* $\hat{D}$ *medirem cada um* 45º, *e como aquêles dois triângulos têm as hipotenusas iguais terão os catetos iguais e será* AG=CG=BH=HD. *Por outro lado os triângulos* CID *e* AJB *são também rectângulos isósceles e dai resulta* BJ=AJ=CI=DI *e portanto* GI=IH=HJ=JG *donde se conclue que o quadrilátero* GIHJ *é um quadrado, visto os ângulos em* G, J, I *e* H *serem rectos e os lados iguais.* 2.º *As diagonais* IJ *e* GH, *como formam ângulos de* 45º *com as bissectrizes* CI, AJ, BJ *e* DI *são paralelas aos lados do rectângulo.* 3.º FH=BF=EG=EA=1/2 AC *logo* EF−GH=HF+GE=AC *donde* GH=EF−AC=AB−AC c. q. d.



Soluções dos n.os 1195 a 1202 de J. Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 2

1203 — Um agricultor dispendeu a quantia de 155 esc. diários para pagar o trabalho das suas vindimas a um grupo de homens e mulheres. Cada homem recebeu 13$ diários e cada mulher 7$. Quantos eram os homens e quantas as mulheres. R: *Sejam* x *e* y *respectivamente o número de homens e mulheres. Ter-se-á* $13x+7y=155$, *equação que admite a única solução inteira e positiva* $x=6$ esc. $y=11$ esc.

1204 — Que valores se deverão atribuir ao coeficiente m da equação $x^2+mx+8=0$ para que uma das raízes seja dupla da outra? R: *Sejam* x_1 *e* $2x_1$ *as raizes da equação. Ter-se-á* $3x_1=-m$ *e* $2x_1^2=8$ *ou seja* $m=\pm 6$.

1205 — Dada a função $y=\log_2 x$ faça o estudo da sua variação quando x percorre o intervalo $(0, +\infty)$. Diga quais as propriedades mais importantes desta função e faça a sua representação gráfica referente ao intervalo (0, 16) da variável independente.

1206 — Numa circunferência de raio r traçou-se uma corda de 127,68 metros, que subtende um arco cuja amplitude é igual a $50^\circ\,32'\,15''$. Calcule o comprimento do raio, expresso em centímetros. Utilize logaritmos. R: *Será* $r=\dfrac{6384}{\text{sen}\,25^\circ\,16'\,7'',5}$ *e, por isso,* $\log r=3{,}80509+0{,}36971=4{,}17480$ *donde* $r=14956$ cm.

1207 — Supondo que α é o ângulo do 2.º quadrante que satisfaz a igualdade $\text{tg}\,\alpha=-\sqrt{2}$ calcule $\text{cosec}\,\alpha$. R $\text{cosec}\,\alpha=+\sqrt{3/2}$.

1208 — Quais são os ângulos compreendidos entre 4π e 6π radianos e cuja tangente é $-1{,}351$. Utilize tábuas naturais. R: *São os ângulos* $\alpha=5\pi-0{,}933$ *radianos e* $\alpha=6\pi-0{,}933$ *radianos.*

1209 — Demonstre que se num triângulo rectângulo um dos ângulos agudos é duplo do outro, um dos catetos é metade da hipotenusa. R: *Seja* [ABC] *o triângulo rectângulo e* $\hat{A}=2\hat{C}$. *Tracemos a circunferência circunscrita ao triângulo. É óbvio que* $\overline{AC}$ *é diâmetro da circunferência. Por outro lado fàcilmente se deduz ser* $\hat{A}=60^\circ$ *e* $\hat{C}=30^\circ$ *o que prova ser* $\overline{AB}$ *o lado do hexágono inscrito e portanto igual ao raio, metade do diâmetro que é a hipotenusa.*

1210 — Uma esfera de área igual a $4\pi\,\text{cm}^2$ é circunscrita a um cubo. Calcule a área do cubo. R: *Como a esfera é circunscrita ao cubo, o seu diâmetro é diagonal do cubo. Ora o lado do cubo* l *está relacionado com a diagonal* d *pela relação* $d^2=3l^2$ *donde* $l^2=4/3\,\text{cm}^2$ *e portanto a área* $A=6l^2=8\,\text{cm}^2$.

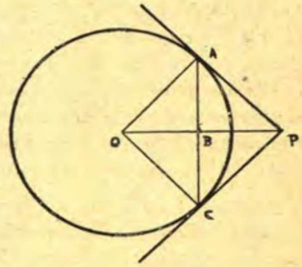
Soluções dos 1205 a 1210 de J. Calado.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, 13-10-1942

1211 — *a)* Defina superfície cónica e superfície cilíndrica, cone e cilindro; dê algumas propriedades importantes referentes a áreas e volumes de cones e cilindros. *b)* É dada uma esfera de raio r e um ponto P exterior, à distância $2r/\sqrt{3}$ do centro; de P tira-se a superfície cónica tangente à esfera e considera-se o cone que tem P como vértice e cuja base é limitada pelo círculo de tangência. Exprima o volume dêsse cone em função do volume V da esfera. R: *De* $OAP \sim OAB \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \quad ou \quad \overline{OB}=r\sqrt{3}/2.$$

Do triângulo rectângulo OAB *vem* $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=r^2-\dfrac{3r^2}{4}=\dfrac{r^2}{4}$. *Representando por* V *o volume da esfera e por* V′ *o do cone, tem-se* $V'=\dfrac{1}{3}\pi\overline{AB}^2\cdot\overline{BP}=$



$$=\frac{1}{3}\pi\overline{AB}^2(\overline{OP}-\overline{OB})=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{4}\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}-\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi r^3}{24\sqrt{3}}=\frac{1}{32\sqrt{3}}V.$$

1212 — Dada a equação $x^2+px+q=0$, de raízes α e β, determine a equação do 2.º grau que tem como raízes $\alpha_1=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$, $\beta_1=\beta+\dfrac{1}{\beta}$. R: *Sabe-se que* $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$. *Tem-se*

$$\alpha_1+\beta_1=\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\left(p+\frac{p}{q}\right),$$

$$\alpha_1\cdot\beta_1=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+$$

$$+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}-2=q+\frac{1}{q}+\frac{p^2}{q}-2.$$

A equação pedida é

$$x^2+\left(p+\frac{p}{q}\right)x+q+\frac{1}{q}+\frac{p^2}{q}-2=0.$$

1213 — Calcule o valor numérico da expressão

$$\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right):\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \text{ para } x=0{,}04712.$$

R: *A expressão dada é igual a*

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x}.$$

Para $x=0{,}04712$ *vem* $\sqrt{0{,}95288}=N$

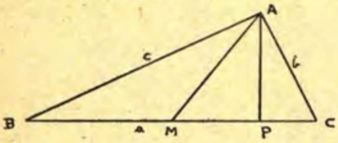
$$\log N=\frac{1}{2}\log 0{,}95288=\frac{1}{2}\cdot\bar{1},97904=\bar{1},98952$$

$N=0{,}97616$.

1214 — *a)* Defina polígono regular e dê as propriedades que conhece referentes à medida dos seus ângulos. ¿Que polígonos regulares convexos podem figurar como faces dum poliedro regular convexo? Porquê? *b)* Calcule o raio de um círculo conhecendo a diferença D entre a área dêsse círculo e a do hexágono regular inscrito. R: b) *A área do circulo é* $S=\pi r^2$ *e a área do hexágono* $S_6=\frac{3\sqrt{3}\,r^2}{2}$.

Logo $D=\pi r^2-3\sqrt{3}\,r^2/2=r^2(\pi-3\sqrt{3}/2)$ *donde* $r^2=\frac{2D}{2\pi-3\sqrt{3}}$.

1215 — Dado um triângulo rectângulo de catetos b e c e hipotenusa a, resolva o triângulo determinado pela altura e pela mediana correspondente à hipotenusa. R: $\overline{AM}=a/2$. *Dos triângulos semelhantes* $ABC \sim APC$ *resulta* $\overline{AP}=bc/a$. *Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo* APM *vem, por fim,* $\overline{PM}^2=\overline{AM}^2-\overline{AP}^2=a^2/4-b^2c^2/a^2$.



1216 — ¿Quantos números inteiros há de quatro algarismos que sejam divisíveis por todos os números dígitos? R: *O m. m. c. de todos os números dígitos é* $N=2^3\times3^2\times5\times7=2.520$. *Logo há três números que satisfazem ao enunciado:* 2.520, 5.040 *e* 7560.

Soluções dos n.os 1211 a 1216 de A. Sá da Costa.

Instituto Superior Técnico

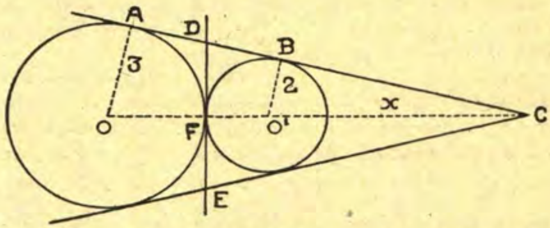
Ponto n. 2

1217 — Uma liga de ouro e cobre contém 20 % de cobre. Juntando-lhe 500 gramas de ouro, a percentagem do metal nobre passa a ser de 85 por cento. Calcular a quantidade de ouro existente naquela liga e o pêso da mesma liga. R: *Se forem* x *e* y *os pesos de cobre e ouro existentes na liga, as equações que resolvem o problema são* $x=\frac{20}{100}(x+y)$ *e* $x=\frac{15}{100}(x+y+500)$, *donde o pêso de ouro* $y=1200$ gr *e o pêso da liga* $x+y=1500$ gr.

1218 — Determinar os valores inteiros e positivos de a e b para os quais a função de x definida pela equação $\frac{x-a+1}{x^2+x-1}=\frac{y+b-1}{y^2-y+1}$ se anula para $x=2$. R: *Será então* $\frac{2-a+1}{4+2-1}=\frac{b-1}{1}$ *donde* $5b+a=8$ *cujas soluções em números inteiros são dadas por* $b=1+m$ *e* $a=3-5m$; *donde a única solução inteira e positiva* $b=1$, $a=3$.

1219 — Sendo $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta$ as raízes da equação $(x-1)(k^2x+1)=2k$, exprimir $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ em função de k e determinar k para que α e β sejam complementares. R: *A soma das raizes da equação é* $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{k^2-1}{k^2}$ *e o produto* $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{-(2k+1)}{k^2}$; *logo será* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{(k^2-1):k^2}{1+\frac{2k+1}{k^2}}=\frac{k-1}{k+1}$ *e se* α *e* β *forem complementares será* $k=-1$.

1220 — Dadas duas circunferências de raios 2 e 3 centímetros, tangentes exteriormente, determinar a área do triângulo formado pelas tangentes comuns às mesmas circunferências. R: *O triângulo pedido é o triângulo* CDE. *Dos triângulos semelhantes* AOC *e* BO'C *tira-se* $\frac{3}{2}=\frac{5+x}{x}$ *ou seja*



$x=10$; *e dos triângulos semelhantes* DFC *e* BO'C *tira-se* $\frac{x+2}{DF}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$ *logo* $DF=\sqrt{6}$. *Finalmente a área pedida é* $12\sqrt{6}\ \text{cm}^2$.

1221 — Dado um rectângulo de lados a e b, tirar, pelo meio do lado a, uma recta que divida o rectângulo em duas partes cujas áreas estejam na razão $m:n$. R: *Seja* x *um dos segmentos que a recta que passa pelo meio do lado* a *determina no lado oposto. As áreas dos trapézios formados são dadas pelas expressões:* $\frac{\frac{a}{2}+x}{2}\times b$ *e* $\frac{\frac{a}{2}+(a-x)}{2}\times b$ *donde* $\frac{a+2x}{3a-2x}=\frac{m}{n}$ *e finalmente* $x=\frac{a(3m-n)}{2(n+m)}$.

1222 — Um cone de revolução e uma esfera estão assentes sôbre um plano horizontal. Sabendo que o raio da esfera é igual a 8 centímetros e que, no cone, a altura e o diâmetro da base são iguais ao diâmetro da esfera, determinar a distância daquele plano a que se lhe deve tirar um plano paralelo para que sejam iguais as secções determinadas por êste plano no cone e na esfera. R: *Seja* x *o raio das secções e* y *a distância do plano horizontal ao plano secante. Será* $x^2 = y(16-y)$ *(na esfera) e* $\frac{x}{8}=\frac{16-y}{16}$ *(no cone), donde se obtém* $y=16-2x=16-\frac{64}{5}=\frac{16}{5}$ cm.

Soluções dos n.os 1217 a 1222 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS GERAIS - ÁLGEBRA SUPERIOR - COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — I.º exame de freqüência, 1941-1942

1223 — Efectuando duas transformações sucessivas escreva a equação cujas raízes estão relacionadas com as da equação $2x^6-x^5+4x^2-3=0$ pela expressão $y=3+\frac{1}{x}$. R: *Efectuar primeiro a transformada em* $z=\frac{1}{x}$ *e em seguida aumentar de* 3 *unidades as raízes desta transformada. Vem* $3y^6-54y^5+401y^4-1572y^3+3429y^2-3941y+1858=0$.

Solução do n.º 1223 de J. Pais Morais.

1224 — Determine as condições a que devem satisfazer os números reais a, b, c, para que os afixos dos imaginários $\frac{a+i\sqrt{3}}{a-i\sqrt{3}}$ $\frac{b+i\sqrt{3}}{b-i\sqrt{3}}$ $\frac{c+i\sqrt{3}}{c-i\sqrt{3}}$ sejam os vértices dum triângulo eqüilátero. Sendo $a=0$ calcule os valores de b e c. R: *Note-se que os três complexos têm módulos iguais a* 1 *e que os seus afixos serão vértices dum triângulo eqüilátero se os seus argumentos forem* $\alpha, \alpha+\frac{2\pi}{3}, \alpha+\frac{4\pi}{3}$. *Da introdução desta condição resultam as duas condições* $b-a=ab+3$ *e* $c-b=bc+3$.

Solução do n.º 1224 de A. Sá da Costa.

1225 — Calcule, usando a fórmula de Leibnitz, a derivada de 3.ª ordem da função $y=\operatorname{sen}\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$.

1226—Exprima em função de p real os números reais x e y de modo que $(3-4i)(x+yi)=p$ e X e Y reais em função de q real de modo que $\frac{3-4i}{X+Yi}=q$. Indique que condições devem dar-se para que seja $p=q$. Será possível determinar p e q de modo que haja um número $(a+bi)$ que satisfaça simultâneamente às duas condições? R: $\begin{cases} x=3p/25 \\ y=4p/25 \end{cases}$ $\begin{cases} X=3/q \\ Y=-4/q \end{cases}$ $\begin{cases} X_x=8/25 \\ Y_y=-16/25 \end{cases}$. *Não existe o complexo* $a+bi$ *a que se refere o enunciado. A sua existência implicaria a verificação simultânea de* $pq=+25$ *e* $pq=-25$.

1227 —Deduza a condição que deve verificar-se para que o segundo e terceiro termos da equação $f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ se possam anular por meio da mesma transformação. R: *A transformação a que se refere o enunciado só existe se fôr verificada uma das três condições* $a_1=0$, $a_2=0$ *(com* $n\neq 0$*)*.

Soluções dos n.os 1226 e 1227 de J. Pais Morais.

I. S. C. E. F. — 1.ª CADEIRA — I.º exame de freqüência, 27-2-42

1228 — Calcular o produto das determinações de $i^{1/n}$. Discussão. R: $i^{1/n}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^{1/n}=$

$$=\left(\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi/2+2k\pi}{n}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$[k=0,1,2\cdots(n-1)]$.

O produto será

$$P=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right)^n\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)[\cos(n-1)\pi+i\operatorname{sen}(n-1)\pi]=$$

$=\pm i$ *conforme fôr* n *impar ou par.*

1229 — Dadas as duas rectas $r_1\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ $r_2\begin{cases} 2x-z-2=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ achar a sua distância, o seu ângulo e a direcção da perpendicular comum. R: 1.ª) *Como imediatamente se reconhece, a recta* r_1 *é perpendicular ao plano* Oxy, *encontrando êste no ponto* $(1,1,0)$, *e a recta* r_2 *é perpendicular ao plano* Oxz, *no ponto* $(2,0,2)$. *Por conseqüência, as rectas são ortogonais e o seu ângulo mede* 90°. *Em virtude do exposto a distância das duas rectas é a diferença das abscissas dos seus traços nos planos* Oxy *e* Oxz, *isto é,* $d=1$. *Por serem* r_1 *e* r_2 *perpendiculares, respectivamente, a* Oxy *e* Oxz, *elas são paralelas a* Oyz *e a direcção da perpendicular comum é a do eixo* Ox, *cujos parâmetros são* $(1,0,0)$. 2.ª) *A distância de* r_1 *a* r_2 *é igual à distância dum ponto arbitrário de* r_1 *ao plano* π *que contém* r_2 *e é paralelo a* r_1. *A equação geral* *dos planos que contêm* r_2 *é* $2x-z-2+\lambda(x-z)=0$, *ou,* $(2+\lambda)x-(1+\lambda)z-2=0$. *A equação de* π *obtém-se desta escolhendo* λ *de modo tal que a direcção normal a* π *seja perpendicular à recta* $r_1 \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1} \end{cases}$. *Isto é* $1+\lambda=0$, *donde* $\lambda=-1$ *e* $\pi)\ x-2=0$. *A medida da distância do ponto* $(1,1,0)$ *da recta* r_1 *ao plano* π *é* $d=|1-2|=1$.

Por ser $r_1 \left\{ \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1} \right.$ *e* $r_2 \left\{ \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{0} \right.$ *tem-se* $\cos(r_1 \,\hat{,}\, r_2)=\dfrac{0}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}}=0$ *e* $r_1 \,\hat{,}\, r_2=\dfrac{\pi}{2}$.

A direcção da perpendicular comum é definida pelo vector $u \wedge v$ *onde* $u=K$ *e* $v=J$, *logo* $u \wedge v=-I$ *e os parâmetros directores são* $(1,0,0)$.

Soluções dos n.os 1228 e 1229 de A. Sá da Costa.

CÁLCULO INFINITESIMAL E ANÁLISE SUPERIOR

I. S. C. E. F. — 2.ª CADEIRA — **1.º exame de freqüência, 21-2-1942**

1230 — Mostrar que o produto infinito $\prod_{k=0}^{\infty}\left[1-\left(\dfrac{n}{(n-1)z}\right)^n\right]$ $(z=x+iy)$ é absolutamente convergente fora do círculo de raio 1 e de centro na origem. R: *O carácter do produto infinito é o da série de têrmo geral* $u_n(z)=\left(\dfrac{n}{(n-1)z}\right)^n$. *A aplicação do critério de Cauchy* $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{n}{(n-1)z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$ *mostra que a série é absolutamente convergente para* $|z|>1$, *isto é, em tôda a região do plano d'Argand exterior ao círculo de centro na origem e de raio* 1.

1231 — Estudar a convergência do integral $\int_0^{\infty}(\log t)^m \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$. R: *O integral é impróprio de* 2.ª *espécie e sê-lo-á de* 1.ª *se* $m>0$. *Como integral de 2.ª espécie êle será convergente se a função integranda fôr um infinitésimo no ponto impróprio de ordem igual à do infinitésimo* $t^{-1}(\log t)^{\alpha}$ *onde* $\alpha<-1$. *Portanto, se* $m<-1$ *a função integranda pode escrever-se sob a forma* $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t(\log t)^{-m}}$ *cujo numerador é uma função limitada e o integral converge nessa hipótese. Por ser* $m<-1$ *o integral não é impróprio de* 1.ª *espécie, como já se dissera. Com efeito tem-se* $\lim_{t\to 0}(\log t)^m \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}=0$ *se* $m<-1$.

1232 — Calcular o integral

$$I=\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+2)^2\,(x^2+3)^2}\,dx.$$

R: *Tem-se* $I=\dfrac{Ax^2+Bx+C}{(x+2)\,(x^2+3)}+D\log(x+2)+E\log(x^2+3)+F\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+c$. *A aplicação do método de Fubini conduz a*

$$\begin{cases} D+2E=0 \\ A-2D-4F-\sqrt{3}\,F=0 \\ 2B+6D-14E-2\sqrt{3}\,F=0 \\ 3A-2B-3C+12D+12E+7\sqrt{3}\,F=3 \\ 12A-4C+9D+24E+6\sqrt{3}\,F=2 \\ 6B-3C+18D+12\sqrt{3}\,F=1. \end{cases}$$

1233 — Supondo convergente o integral $\int_0^{\infty}\dfrac{e^{-az}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}}=f(a,s,x)$ em certos domínios paramétricos, procurar as suas derivadas parciais em ordem a x, s e a. R: $\dfrac{\partial f}{\partial a}=\int_0^{\infty}\dfrac{e^{-az}z^{s}\,dz}{e^{2\pi ix-z}-1}$,

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-az}z^{s-1}\log z}{1-e^{2\pi ix-z}}\,dz,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\int_0^{\infty}\frac{e^{2\pi ix-(a+1)z}\,z^{s-1}\,2\pi i}{(1-e^{2\pi ix-z})^2}\,dz.$$

I. S. T. — CÁLCULO — **1.º exame de freqüência, 1942**

1234 — Estudar a convergência do integral $I=\int_a^{\infty}(e^{\operatorname{sen} x})'\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^k}\,dx$. R: *Se* $a>0$ *o integral é impróprio de* 2.ª *espécie, diverge se* $k\leq 1$ *e converge se* $k>1$ *porque, neste caso, tem-se* $I=\int_a^{\infty}\dfrac{e^{\operatorname{sen} x}.\cos x.\operatorname{sen} x}{x^k}\,dx$ *e o numerador da função integranda é limitado. Se* $a<0$, *tem-se*

$$I=\int_a^{b^2}(e^{\operatorname{sen} x})'\frac{\operatorname{sen} x}{x^k}\,dx+\int_{b^2}^{\infty}(e^{\operatorname{sen} x})'\frac{\operatorname{sen} x}{x^k}\,dx=I_1+I_2.$$

Onde I_1 *é um integral riemanniano se* $k>0$, *e é impróprio de* 1.ª *espécie de* $k<0$, *sendo convergente para* $k<1$ *e divergente para* $k\geq 1$. *E* I_2 *é impróprio de* 2.ª *espécie, sendo divergente para* $k\leq 1$ *e convergente para* $k>1$. *Logo, no caso* $a<0$ *o integral* I *é sempre divergente.*

1235 — Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, onde $f_1(x)=x$ e $f_n(x)=x^{1/(2n-1)}-x^{1/(2n-3)}$, averiguar se será legítimo integrá-la têrmo a têrmo em qualquer intervalo do eixo real. R: *Note-se que* $S_1(x)=x$, $S_2(x)=x^{1/3}$, $S_3(x)=x^{1/5}, \ldots S_n(x)=x^{1/(2n-1)}$ *e que* $S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=1$ *qualquer que seja* x *finito. Tem-se, portanto,* $\lim_{x\to 0} S(x)=1$. *Mas,* $S(0)=0$ *porque para* $x=0$ *se anulam todos os termos da série. A função* S(x) *tem uma descontinuïdade na origem e, por conseqüência, a série dada não é uniformemente convergente; todavia, pode ser legítimo integrá-la têrmo a têrmo. Calculemos* $\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b dx=b-a$ *e o*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b x^{1/(2n-1)}\,dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}\left(b^{2n/(2n-1)}-a^{2n/(2n-1)}\right)=b-a\,.$$

Logo, é legítimo integrar a série dada têrmo a têrmo, embora ela não seja uniformemente convergente.

1236 — Calcular a segunda derivada $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ da função $y(x)$ definida pela equação $\dfrac{\sqrt{2ky-y^2}}{k}=\operatorname{sen}\dfrac{x+\sqrt{2ky-y^2}}{k}$, no ponto (x,y).

1237 — Escrever o desenvolvimento de Taylor da função $f(x,y)=(x\cdot y)^a+\operatorname{sen} xy$, $a>0$, na vizinhança do ponto $(1,2)$.

Soluções dos n.os 1230 a 1235 de A. Sá da Costa.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

I. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — 1.º exame de freqüência, 1942

1238 — Dado o vector $u(P)$, função do ponto variável P, e a homografia α_u, função do vector u, tal que

$\alpha_u I=\operatorname{grad}(u|I)$, $\alpha_u J=\operatorname{grad}(u|J)$, $\alpha_u K=\operatorname{grad}(u|K)$. 1.º Achar o vector e o primeiro invariante da homografia α_u; 2.º ¿Quando é que α_u é uma dilatação e quando é que é axial?; 3.º Mostrar que $\operatorname{grad}(u|v)=\alpha_u v+\alpha_v u$; 4.º Comparar α_u com a homografia $\dfrac{du}{dP}$. Podem ser iguais?

1239 — Determinar, entre dois pontos A e B do plano xy, a curva plana que torna mínimo o integral $\int_{AB} y\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^3 ds$. (Supõe-se que o coeficiente angular da tangente varia continuamente, entre os extremos A e B da curva).

1240 — Resolver a equação

$f(x)=\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy$ sendo $f(x)=3x^2+4$ e $K(x,y)=2xy^2+3x^2y^3$. [$D(\lambda)$ e $\Delta(x,y:\lambda)$ são quadráticas em λ].

1241 — Supondo que a densidade é, em cada ponto, proporcional à soma das coordenadas cartesianas dêsse ponto, calcular o momento de inércia do rectângulo que tem por vértices os pontos $A(0,1)$, $B(4,1)$, $C(4,3)$, $D(0,3)$ em relação ao seu centro de gravidade, utitizando a fórmula $MI_g=\Sigma\Sigma\, m_i m_j r_{ij}^2$, devidamente modificada. (r_{ij} é a distância dos pontos m_i e m_j).

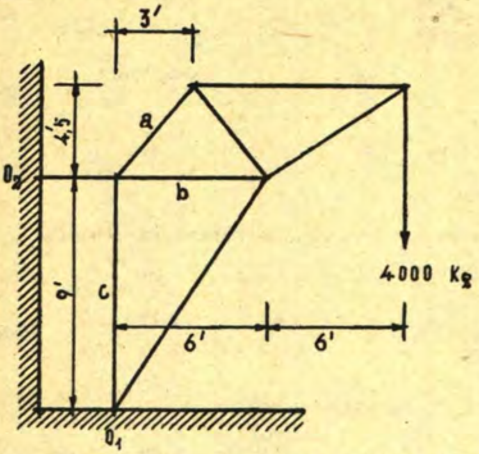
F. C. P. — MECÂNICA RACIONAL — 1.º exame de freqüência, Fevereiro, 1942

1242 — Verifique se o campo de vectores $W_p=(1-3z-y)\cdot i+(x-2z)\cdot j+(-1+2y+3x)\cdot k$ é um campo de momentos e no caso afirmativo calcule o invariante escalar do campo.

1243 — Determine dois vectores, um dos quais localizado sôbre o eixo Ox, que constituam um sistema gerador do campo precedente no caso, subentende-se, de ser um campo de momentos.

1244 — Dadas as fôrças complanas F_1, F_2, F_3, indicadas na figura, localize no seu plano, usando das propriedades dos funiculares, uma quarta fôrça F_4 que torne o sistema equivalente a um binário B de momento dado (200 m.kg) (o sentido fica ao arbítrio do aluno).

1245 — Dado o sistema articulado representado na figura, calcular as tensões nas barras a, b e c

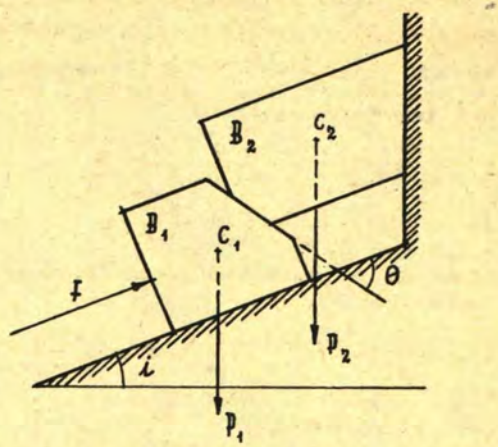


e indicar se são tensas ou comprimidas, (O_1, O_2 pontos fixos).

1246 — Dois blocos B_1 e B_2, de pesos p_1 e p_2, encontram-se em equilíbrio na posição indicada na figura, devido à acção da fôrça F paralela à linha de maior declive do plano que os suporta. Conhecidos p_1 e p_2, i e θ, calcular F pela aplicação do teorema do trabalho virtual, desprezando o atrito.

Dados numéricos:

$i=30^o$; $\theta=45^o$; $p_1=200$ kg.; $p_2=100$ kg).



1247 — Um ponto móvel P descreve a espiral de Arquimedes $r=4\theta/\pi$ (r expresso em decímetros e θ em radianos) de tal modo que a sua aceleração é central e dirigida para o polo da espiral. Sabendo que, para $\theta=\pi/2$, a velocidade de P é 20 cm/s e que o movimento se faz no sentido dos $\theta\theta$ decrescentes, calcular: *a)* a constante das áreas; *b)* a velocidade e a aceleração quando $\theta=20^o$.

PROBLEMAS

Secção a cargo de A. Ferreira de Macedo e Mário de Alenquer

PROBLEMAS PROPOSTOS

1248 — Determinar o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos que têm um lado dado e o vértice oposto sôbre uma recta dada.

1249 - Determinar a equação geral das superfícies S tais que, designando por $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ os pontos em que a normal num ponto M duma delas encontra respectivamente os planos YOZ, ZOX e XOY, a razão anarmónica $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, M)=k$.

Problemas n.os 1248 e 1249 propostos por José Morgado (Pôrto).

1250 — Dado o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ substituí-lo por outro que tenha por limites dois números dados, A e B, por meio da substituïção $x=my+n$, sendo m e n dois números a determinar (Sturm).

Problema n.º 1250 proposto por Rui Verdial (Pôrto).

1251 — Dum barril cheio tira-se um litro de vinho, e substitui-se por água. Depois tira-se um litro da mistura e substitui-se por água. Efectuada esta operação 35 vezes, verifica-se que o barril contém quantidades iguais de água e vinho. Calcular a capacidade do barril.

1252 - Lugar do centro dum círculo que se desloca de tal forma que os seus eixos radicais com dois círculos fixos passam por dois pontos fixos.

1253 — Mostrar que o sistema é possível, e resolvê-lo

$$\begin{cases} (ad+be)\,x+(ae+bf)\,y+(af+bd)=0 \\ (bd+ce)\,x+(be+cf)\,y+(bf+cd)=0 \\ (cd+ae)\,x+(ce+af)\,y+(cf+ad)=0 . \end{cases}$$

1254 — Prove que

$$\sum_{r=0}^{n-1} 2^r \operatorname{tg}(2^r x)=\operatorname{cotg} x-2^n \operatorname{cotg}(2^n x).$$

Problemas n.os 1251 a 1254 propostos por Mário de Alenquer.

SOLUÇÕES RECEBIDAS

1090 — Achar os máximos e mínimos de $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ em que x, y, z verificam a equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. R: *Diferenciando as duas relações, temos:*

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0\\ \frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}+\frac{z\,dz}{c^2}=0.\end{array}\right.$$

O método dos multiplicadores de Lagrange fornece as equações:

$$\left\{\left(\frac{1}{u}+\frac{\lambda}{a^2}\right)x=0,\ \left(\frac{1}{u}+\frac{\lambda}{b^2}\right)y=0\ e\ \left(\frac{1}{u}+\frac{\lambda}{c^2}\right)z=0.\right.$$

Como não pode ser simultâneamente $x=y=z=0$, *temos as três soluções:*

$$\left\{\begin{array}{l}x=y=0\\ z=u=-\lambda=c,\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}y=z=0\\ x=u=-\lambda=a\end{array}\right.\ e\ \left\{\begin{array}{l}z=x=0\\ y=u=-\lambda=b.\end{array}\right.$$

A função é pois máxima ou mínima nos pontos $(0,0,c)$, $(a,0,0)$ *e* $(0,b,0)$. *Suponhamos que é* $a>b>c$. *Nesta hipótese vê-se fàcilmente que o primeiro ponto é um mínimo e o segundo um máximo. Quanto ao 3.º ponto, escrevendo*

$$u=\sqrt{x^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)+z^2}=$$
$$=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)z^2+b^2}$$

e notando que $\frac{b}{a}<1$ *e* $\frac{b}{c}>1$, *vê-se que é mínimo numas secções e máximo noutras, não se tratando pois nem dum máximo nem dum mínimo.*

Solução de Rui Verdial (Pôrto).

A solução é correcta, mas não foram, porém, considerados os duplos sinais das soluções. Os pontos de estacionaridade são da forma $(0,0,\pm c)$, etc.

M. A.

1188 — Para que a expressão $dz+Adx+Bdy$ admita um factor integrante independente de z é necessário e suficiente que seja da forma $dz+zd\varphi+e^{-\varphi}d\psi$ em que φ e ψ são funções só de x e y. R: *Multiplicando a expressão diferencial dada pelo factor integrante* v *obtemos a expressão:* $v\,dz+Av\,dx+Bv\,dy$ *que deve ser diferencial exacta. Portanto:* $\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial A}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial B}{\partial z}$ *e* $\frac{\partial(Av)}{\partial y}=\frac{\partial(Bv)}{\partial x}$, *visto que* $\frac{\partial v}{\partial z}\equiv 0$ (v *independente de* z). *Integrando:* $A=\frac{z}{v}\frac{\partial v}{\partial x}+\Phi(x,y)$ *e* $B=\frac{z}{v}\frac{\partial v}{\partial y}+\Psi(x,y)$ *donde* $Av=z\frac{\partial v}{\partial x}+v\Phi$ *e* $Bv=z\frac{\partial v}{\partial y}+v\Psi$. *Portanto:* $\frac{\partial Av}{\partial y}=z\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\Phi\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ *e* $\frac{\partial Bv}{\partial x}=z\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}+\Psi\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, *donde* $\Phi\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\Psi\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ *ou* $\frac{\partial(v\Phi)}{\partial y}=\frac{\partial(v\Psi)}{\partial x}$. *Portanto* $v\Phi$ *e* $v\Psi$ *são derivadas parciais duma certa função* $F(x,y)$, *isto é,* $v\Phi=\frac{\partial F}{\partial x}$ *e* $v\Psi=\frac{\partial F}{\partial y}$. *Então,* $A=\frac{z}{v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial F}{\partial x}$ *e* $B=\frac{z}{v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{v}\frac{\partial F}{\partial y}$. *Ponhamos* $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ *e* $F=\Psi(x,y)$ *ou* $\frac{\partial(\log v)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial(\log v)}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ *donde o factor integrante* $v=e^{\varphi}$. *Então* $A=z\frac{\partial\varphi}{\partial x}+e^{-\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, $B=z\frac{\partial\varphi}{\partial y}+e^{-\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial y}$,

$$dz+Adx+Bdy=dz+\left(z\frac{\partial\varphi}{\partial x}+e^{-\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dx+\left(z\frac{\partial\varphi}{\partial y}+e^{-\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dy=dz+z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right)+e^{-\varphi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy\right)=dz+z\,d\varphi+e^{-\varphi}\,d\Psi,\quad \text{c. q. p.}$$

Solução de Rui Verdial (Pôrto).

1189 — Ache o lugar geométrico dos centros das esferas que passam por dois pontos fixos A e B e são tangentes a um plano fixo ω. Discussão. R: *Podemos escolher o triedro de referência, de tal maneira que o plano dado seja o plano* xy, *e as coordenadas dos pontos* A *e* B *sejam respectivamente:* $A(0,0,z_1)$ *e* $B(0,y_2,z_2)$. *Então, se as coordenadas do centro forem* $C(x,y,z)$, *as do ponto de tangência serão evidentemente* $T(x,y,0)$, *e as condições do problema,* $\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{TC}$, *fornecem as equações:* $x^2+y^2+(z-z_1)^2=x^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=z^2$, *donde as equações do lugar geométrico:*

$$\left\{\begin{array}{l}y_2\left(y-\frac{y_2}{2}\right)+(z_2-z_1)\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)=0\\ 2z_1z=x^2+y^2+z_1^2.\end{array}\right.$$

O lugar é uma cónica, assente num plano Π. *Se um dos pontos, seja* A, *pertence ao plano* ω, *é* $z_1=0$, *a projecção da cónica no plano* xy *reduz-se a uma circunferência de raio nulo e o lugar geométrico reduz-se à intersecção do eixo dos* zz *com* Π, *de coordenadas* $P\left(0,0,\frac{y_2^2+z_2^2}{2z_2}\right)$. *Se os pontos* A *e* B *pertencem ambos ao plano* ω, *o problema é manifestamente impossível no campo real. O lugar reduz-se aos dois pontos imaginários conjugados, de coordenadas:* $\left(\pm\frac{y_2 i}{2}, \frac{y_2}{2}, 0\right)$. *É claro que se as cotas dos pontos forem de sinais contrários a solução é também imaginária. Se as cotas forem iguais,* $z_1=z_2$, *o lugar é uma parábola assente no plano* $y=y_2/2$ *e de eixo paralelo ao eixo dos zz. Se* $y_2=0$ *teremos uma circunferência assente num plano de cota constante, igual à média aritmética das cotas de* A *e* B, *e de raio igual à média geométrica das mesmas cotas.*

Solução de Rui Verdial (Pôrto).

A solução está certa, embora padeça de certos defeitos que passamos a enumerar, porque alguns dêles são de fácil emenda.

1. A discussão não está arrumada, de forma que o leitor possa, sem ter o trabalho de refazer êle próprio a solução, verificar que foram consideradas tôdas as hipóteses possíveis.

2. Na discussão misturam-se as soluções reais e as imaginárias, considerando estas últimas só quando não as há reais, o que é mau método: ou se consideram sempre ou nunca se consideram.

3. O Autor nem sempre levou tão longe quanto seria para desejar a interpretação geométrica dos resultados analíticos que obteve.

A propósito queremos observar que em problemas de geometria elementar, como êste, é sempre preferível uma solução geométrica a uma solução analítica. Pena é que a geometria sintética seja uma disciplina que não se estuda (ou se estuda mal, imperfeitamente pendurada dos dados analíticos) nas nossas universidades, dando como resultado que os nossos licenciados são incapazes de a ensinar nos liceus, de forma que ninguém a sabe em parte nenhuma. A fuga para os métodos analíticos, que daí resulta, tira ao raciocínio matemático grande parte da sua originalidade e da sua finura, transformando-o no simples jôgo mais ou menos automático, mais ou menos hábil, de algoritmos sem dúvida complexos e elegantes, mas cujo domínio não é senão uma parte da cultura matemática.

Veja-se a êste respeito a elegância da seguinte solução do mesmo problema (S. Vatriquant, Bruxelas):

Seja M *o ponto de intersecção da recta* AB *com o plano* ω *e* T *o ponto de contacto da esfera com* ω. *Será então* $MA \cdot MB = MT^2 = \text{const.}$ *O lugar de* T *é uma circunferência do plano* ω, *com centro* M. *A perpendicular a* ω *em* T *passa pelo centro* C *da esfera; êsse centro está no plano* β, *perpendicular a* AB *no seu ponto médio. O lugar do centro* C *é pois a elipse secção por* β *da superfície cilíndrica de revolução cuja directriz é o lugar de* T.

Se AB *é paralela a* ω, *o ponto* M *está no infinito, o lugar de* T *é uma recta, o de* C *uma parábola, etc.*

Mário de Alenquer

1190 — Mostre que os 6 planos perpendiculares às 6 arestas dum tetraedro passando pelos meios das projecções das mesmas arestas sôbre um mesmo plano têm um ponto comum. R: *Sejam* V_1, V_2, V_3, V_4 *os vértices do tetraedro,* V_1', V_2', V_3', V_4' *as suas projecções sôbre um plano* ω *e* Π_{ij} *o plano, nas condições do enunciado, relativo à aresta* $V_i V_j$. *Os planos* $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$ *cortam-se segundo uma recta,* p_4, *perpendicular à face* V_1, V_2, V_3 *e passando pelo centro do círculo circunscrito a* V_1', V_2', V_3', *por:* 1) *a intersecção de dois quaisquer dos planos* (Π_{12}, Π_{13}, *por exemplo*) *ser perpendicular à face* V_1, V_2, V_3; 2) *os traços de* $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$ *em* ω *serem as mediatrizes dos lados do triângulo* V_1', V_2', V_3'. *Pela mesma razão* $\Pi_{12}, \Pi_{14}, \Pi_{24}$ *intersectam-se segundo uma recta* p_3 *concorrente com* p_4, *visto* p_3 *e* p_4 *serem complanas e não poderem ser paralelas em virtude da não coplanaridade dos pontos* V_1, V_2, V_3, V_4. *Os planos* $\Pi_{23}, \Pi_{24}, \Pi_{34}$ *cortam-se segundo uma recta* p_1 *que passa pelo ponto de encontro de* p_3 *e* p_4, *visto ser a intersecção de* Π_{24} *e* Π_{23}. *Portanto os planos* $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{14}, \Pi_{23}, \Pi_{24}$ *e* Π_{34} *passam por um mesmo ponto como pretendia provar-se.*

Solução de José Morgado (Pôrto).

1192 — Ache a equação geral das superfícies tais que: se por um ponto M duma delas se tira a normal MN até ao plano Oxy, o comprimento MN é igual a ON. R: *As equações da normal,* $\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$ *fornecem as coordenadas de* N, *fazendo* $Z=0$, $X_1=x+pz$, $Y_1=y+qz$ *e* $Z_1=0$. *E então:*

$$\overline{MN}^2=(X_1-x)^2+(Y_1-y)^2+(Z_1-z)^2=p^2z^2+q^2z^2+z^2,$$

$$\overline{ON}^2=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2=(x^2+2pxz+p^2z^2)+(y^2+2qyz+$$

$$+q^2z^2).\quad \overline{ON}^2-\overline{MN}^2=x^2+y^2-z^2+2pxz+2qyz=0,$$

donde $\frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-x^2-y^2}$ *e daqui o integral primeiro* $C_1=\frac{y}{x}$. *Escrevendo as equações com outra forma:*

$$\frac{2x\,dx}{2x^2}=\frac{2y\,dy}{2y^2}=\frac{2z\,dz}{z^2-x^2-y^2}=\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$$

e pondo $x^2+y^2+z^2=u$, *temos:* $\frac{dx}{x}=\frac{du}{u}$ *donde o novo integral primeiro* $C_2=\frac{u}{x}=\frac{x^2+y^2+z^2}{x}$.

A equação geral pedida será: $\frac{x^2+y^2+z^2}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Solução de Rui Verdial (Pôrto).

Nota — A «Gazeta de Matemática» só publica a solução de problemas insertos na secção Problemas Propostos, a não ser quando pela sua originalidade ou qualquer outro facto mereçam ser publicados. Dentre as soluções recebidas escolhe as melhores mencionando tôdas as outras que sejam correctas.

— No próximo número serão consideradas em especial as Matemáticas Elementares.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Secção a cargo de J. da Silva Paulo

6 — ESTÉVE H. et MITAULT R. + **Arithmétique décimale** — conforme o programa da Classe de Matemáticas. 1 vol. in-16 (18×13) de VI—126 pgs.; preço 18 frs.; Gauthier Villars. Paris 1939.

Os dois autores, bem conhecidos por numerosas publicações sôbre o ensino secundário, deram a êste manual o título de «Aritmética decimal», para resumir a idéia fundamental da pedagogia que expõem: aproximar-se o mais possível dum ensino lógico em relação estreita com o concreto.

O novo programa da Classe de Sixième é caracterizado pelo emprêgo dos números decimais em ligação com a medida das grandesas.

Os autores não tem outra ambição na última classe do ensino secundário.

O número decimal, medida duma grandeza, conduz à noção quási imediata, por aproximação ilimitada, dum número decimal generalizado, paralelo à noção de segmento de recta quer êste segmento seja comensurável ou não com a unidade de comprimento.

Sempre com o mesmo espírito, recusaram-se a separar a Aritmética das outras partes da matemática e não hesitam em recorrer à Álgebra, à Geometria, à Teoria dos Vectores e mesmo à Análise sempre que isso possa trazer qualquer simplificação.

Decidiram-se os autores a publicar êste livro depois de demorado estudo da exposição crítica de H. Lebesgue sôbre a Medida das grandezas.

(Duma notícia de A. Buhl (Toulouse) publicada em L'Enseignement Mathématique, vol. 38).

7 — GARCIA, António Parellada — **Gráficos y Nomogramas** — (XII+111 pág.) — Dossat, editor — Madrid.

A nomografia, creação original do ilustre matemático francês M. d'Ocagne, tem, como é sabido, um vastíssimo campo de aplicação. A sua utilidade é notória para quem se dedique a trabalhos técnicos da mais diversa índole. Por isso, esta obra do sr. Parellada, escrita com admirável claresa e grande número de exercícios, deve prestar serviços valiosos a todo aquêle que queira desenvolver-se no manejo e construção de nomogramas. Os gráficos de pontos alinhados, de linhas cotadas, em coordenadas trilineares, em coordenadas tangenciais e muitos outros, são expostos de maneira fácil e didática, cingindo-se o autor ao programa de admissão à Academia Geral Militar e às Escolas de Engenheiros. O último capítulo da obra é dedicado ao estudo das funções periódicas sinusoidais e também aqui a clareza e concisão são bem patentes.

(G. D. da revista «Euclides»)

8 — RIOS, Sixto — **Conferencias sobre a teoria de la Integral** explicada en la catedra de la «Fundacion Conde de Cartagena», de la Real Academia de Ciencias, y redactadas por A. Rodriguez Sanjuán, profesor ayudante de la Facultad de Ciencia de la Universidad Central. (En litografia).

O jovem catedrático da Universidade de Valência, doutor Sixto Rios, proferiu umas conferências sôbre a «Teoria do Integral» na Academia de Ciências de Madrid durante o curso passado, que aparecem agora coligidas com uma claresa admirável pelo dr. Sanjuán, professor adjunto da Universidade Central. As três primeiras lições são dedicadas à teoria dos conjuntos, passando imediatamente ao integral de Lebesgue, suas propriedades e interpretação geométrica. Estudam-se a seguir os integrais de Denjoy, Perron e Stieltjes, concluindo com uma magnífica lição sôbre a integração em espaços abstratos, partindo dos conceitos introduzidos pelo genial matemático Maurice Frechet.

No fim de cada capítulo incluem-se notas e exercícios que contribuem para a melhor compreensão das questões tratadas anteriormente ou para ampliar conceitos conhecidos. Uma selecta bibliografia valoriza estas conferências, que confirmam o sr. Rios como um dos mais notáveis valores da nova geração matemática espanhola.

(G. D. da revista «Euclides»)

9 — BIRKHOFF, Garrett and MACLANE, Saunders. — **A Survey of Modern Algebra**, Macmillan Company. New-York. 1941-XI+450 pág. $3.75.

Trata êste livro da álgebra moderna que particularmente interessa aos primeiros anos da Universidade. Um admirável aspecto dêste livro é o alto ponto de vista em que se coloca. Estabelece contacto com muitos ramos da matemática e pode por isso servir como introdução ao estudo de tôda a matemática moderna. Assim, tem um cuidadoso desenvolvimento do estudo dos números reais, incluindo a noção de corte de Dedekind, estuda a teoria dos conjuntos com o conceito de ordem, e a discussão de numerabilidade e número cardinal. No estudo das matrizes e das formas quadráticas é encarado o ponto de vista geométrico. Estabelece também contacto com o campo da lógica matemática no capítulo da álgebra das classes e com as idéias da topologia na demonstração do teorema fundamental da álgebra. O índice é o seguinte:

I, Os inteiros. II, Números racionais e corpos. III, Números reais. IV, Polinómios. V, Números complexos. VI, Teoria dos grupos. VII, Vectores e espaço vectorial. VIII, A Álgebra das matrizes. IX, Grupos lineares. X, Determinantes. XI, Álgebra das classes. XII, Transfinito aritmético. XIII, Anéis e ideais. XIV, Corpos de números algébricos. XV, Teoria de Galois. Como se pode avaliar por êste esbôço, os sistemas concretos com os quais o estudante está familiarizado, são estudados em primeiro lugar, apresentando as suas propriedades como axiomas, encaminhando-se assim o estudo para a definição axiomática dos mais importantes sistemas algébricos abstratos. Isto é feito com muita ciência, ao mesmo tempo que grande número de excelentes exercícios habilita o aluno a tomar melhor conhecimento da teoria. Existe um largo espaço entre o primeiro capítulo preenchido com as propriedades elementares dos números inteiros e o último em que se prova a não resolubilidade da equação do quinto grau por meio de radicais. Podemos afirmar, no entanto, que o aluno que seguir os capítulos intermediários atingirá a maturidade necessária para se embrenhar nos meandros da teoria de Galois. A mais séria crítica que se pode fazer ao livro e que é bem pequena, é que a teoria dos determinantes é desenvolvida sòmente a partir das matrizes com elementos num corpo. Por causa das aplicações, crêmos, que teria valido a pena tratar o caso geral no qual os elementos pertencem a um anel comutativo. O livro está escrito num estilo claro e, parece-nos, sem erros.

(De N. Jacobson. em «Mathematical Reviews», vol. 3, n.º 4).

10 — BOURBAKI, N.—**Éléments de mathématique.** Part. I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I. Théorie des ensembles (fascicule de résultas). Actual. Sci. Ind. n.º 846. Hermann & Cie., Paris 1939. VIII+51 pgs.

Bourbaki é um escritor de um grupo de jovens matemáticos franceses que estão publicando um trabalho enciclopédico sôbre os mais modernos ramos da matemática. Êste livro trata da teoria dos conjuntos e é sòmente um resumo do volume pròpriamente dito. Propõe-se dar ao leitor interessado em um dos volumes seguintes a necessária preparação da teoria dos conjuntos sem perder agora tempo com uma introdução axiomática rigorosa e com as demonstrações; mas o assunto é disposto de tal modo que muitas das demonstrações podem fàcilmente ser completadas. O índice contém:

1, Elementos e partes de um conjunto; 2, Funções; 3, Produto de vários conjuntos; 4, Soma, intersecção e produto duma família de conjuntos; 5, Relações de equivalência, conjunto cociente; 6, Conjuntos ordenados; 7, Potência, conjuntos numeráveis; 8, Escadas de conjuntos e estruturas. A última secção apresenta um método interessante para tratar as estruturas, tais como ordem, topologia, grupo, anel, etc., numa base geral e dando conceitos como isomorfismo definido com a máxima generalidade. O método dos conjuntos parcialmente ordenados é bem acentuado e bem posta em evidência a importância do lema de Zorn.

(De S. Eilenberg, em «Mathematical Reviews», vol. 3, n. 2).

11 — BOURBAKI, N. — **Éléments de mathématique**—Part I. Les strutures fondamentales de l'analyse. Livre III. Topologie générale. Chapitres I et II, Actual. Sci. Ind. n.º 858. Hermann & Cie. Paris. 1940. VIII+132+II pgs.

O primeiro capítulo intitulado «Estruturas topologicas» é dedicado ao estudo da topologia nos espaços de Hausdorff. A discussão é baseada no conceito de filtro. Uma família, não vasia, F, de sub-conjuntos do conjunto X, é chamado um filtro se: (1) todo o conjunto contendo um conjunto de F pertence a F; (2) a intersecção de dois conjuntos de F pertence a F; (3) o conjunto vasio não pertence a F. O filtro F converge para x se cada vizinhança de x contém um conjunto de F. Usando êste conceito de convergência estabelece-se uma equivalência completa entre vizinhanças, conjuntos abertos e convergência topológica. Outros assuntos discutidos no capítulo são: continuïdade de transformações, produto, compacidade, (significando bicompacidade) e conexão.

O capítulo segundo é dedicado às estruturas uniformes que são a substituïção moderna dos espaços métricos. Com o uso dos filtros é apresentado um método muito elegante. Os principais resultados são: (1) cada espaço uniforme pode ser embebido num espaço completo uniforme; (2) cada espaço compacto é homeomórfico a um espaço uniforme. Ambos os capítulos são seguidos de notas históricas e contém muitos exercícios de variada dificuldade. As notações e terminologia são rigorosas.

(De S. Eilenberg, Ann Arbor, Mich., em «Mathematical Reviews», vol. 3, n.º 2).

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Agros — Boletim dos Estudantes de Agronomia. Ano 25, n.º 5 — Setembro-Outubro, 1942.

Boletin Matematico — (Buenos Aires). Revista argentina de Matemática. — Ano XV, n.ºs 1-2.

Educação Britânica, de J. E. Hales e outras publicações da Embaixada Britânica em Portugal.

Euclides — (Madrid). Revista de Ciências Exactas, Fisico-Quimicas y Naturales. Ano II (1942), n.ºs 21 e 22.

Horizonte — Quinzenário cultural. Ano I, n.º 10.

The National Geographical Magazine (Washington), vol. 81, n.º 3, Março, 1942.

Revista Politécnica — (São Paulo-Brasil), Ano 37.º, n.º 139, e ano 38.º, n.º 140.

Técnica — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T., n.º 133 (Dezembro, 1942).

A situação financeira da «Gazeta de Matemática»

CONTA DO N.º 12 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Receita		*Despesa*	
Receita da venda avulso e por assinatura de 644 números	2.814$75	Composição, impressão, papel e brochura	4.000$00
Existência de 662 números ao preço de custo	2.118$40	Sua quota parte nas despezas gerais realizadas até 31 de Dezembro de 1942	814$00
		31-XII-1942, *Superavit*	119$15
	4.933$15		4.933$15

CONTA DE RECEITA E DESPEZA

1942 Receita da venda avulso e por assinatura dos N.ºs 1 a 17	25.986$25	1942 *Deficit em 1941*	1.072$70
		Composição, impresssão, papel e brochura do N.º 9	1.410$00
		Idem, idem do N.º 10	2.592$50
		Idem, idem do N.º 11	2.525$35
		Idem, idem do N.º 12	4.000$00
		Dois desenhos para o n.º 13	35$00
		Despezas de expedição, cobrança, propaganda, etc.	4.263$90
		Dezembro, 31 — *Saldo*	10.086$80
	25.986$25		25.986$25
1943 Janeiro, 1 — *Saldo*	10.086$80		

BALANÇO

31-12-1942

ACTIVO		PASSIVO	
Caixa		*Credores diversos*	
Numerário em cofre	10.086$80	Contas a liquidar	465$00
Edições		*Assinantes*	
Existência da «Gazeta», n.ºs 1 a 12	-$-	Cobrança antecipada das assinaturas relativas a 1943	9.240$00
		Situação liquida	381$80
	10.086$80		10.086$80

A. S. C. e O. M. R.

A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

publicará em 1943 cinco números no dia 15 de cada um dos meses seguintes:
Janeiro, Março, Maio, Julho, Novembro

Cada número terá um mínimo de 32 páginas e o preço de Esc. 5$00

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exame de freqüência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuïção normal dêstes pontos, pelos diferentes números da *Gazeta de Matemática* é a seguinte:

Exames de aptidão — N.^{os} de Março, Maio e Julho.
1.º exame de freqüência — N.^{os} de Novembro e Janeiro.
2.º exame de freqüência — N.^{os} de Março e Maio.
Exames finais — N.^{os} de Maio e Julho.

Cada um dêstes números poderá publicar e publicará, em geral, outros pontos além dos indicados.

A *Gazeta de Matemática* não é um mero arquivo de pontos, mas um jornal de cultura matemática.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A Administração da *Gazeta de Matemática* aceita assinaturas anuais de cinco números, ao preço de Esc. 20$00, para o que basta dar a indicação do nome, morada, local da cobrança e do número em que deve ter início. A assinatura será renovada, automàticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário.

Para simplificar o trabalho da cobrança, tôdas as assinaturas serão acertadas de modo tal que passem a ter início com o número de Janeiro de cada ano, pelo que a primeira cobrança das assinaturas, com início em qualquer outro número, será de Esc. 4$00, Esc. 8$00, Esc. 12$00 e Esc. 16$00, correspondendo a 1, 2, 3 ou 4 números.

NÚMEROS ATRAZADOS

Encontram-se completamente esgotados os N.^{os} 1, 2, 5, 9 e 10. Os restantes são ainda vendidos avulsamente ao preço de capa: N.º 3 Esc. 6$50, N.º 4 Esc. 3$00, N.º 6 Esc. 4$00, N.º 7 Esc. 6$00, N.º 8 Esc. 4$00, N.º 11 Esc. 5$00, N.º 12 Esc. 5$00.

COLECÇÕES COMPLETAS

Com excepção duma pequena reserva que a Administração da *Gazeta de Matemática* retirou do comércio, estão inteiramente esgotadas as colecções completas. Encontram-se ainda à venda algumas colecções dos N.^{os} 2 a 8, Esc. 35$00.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial