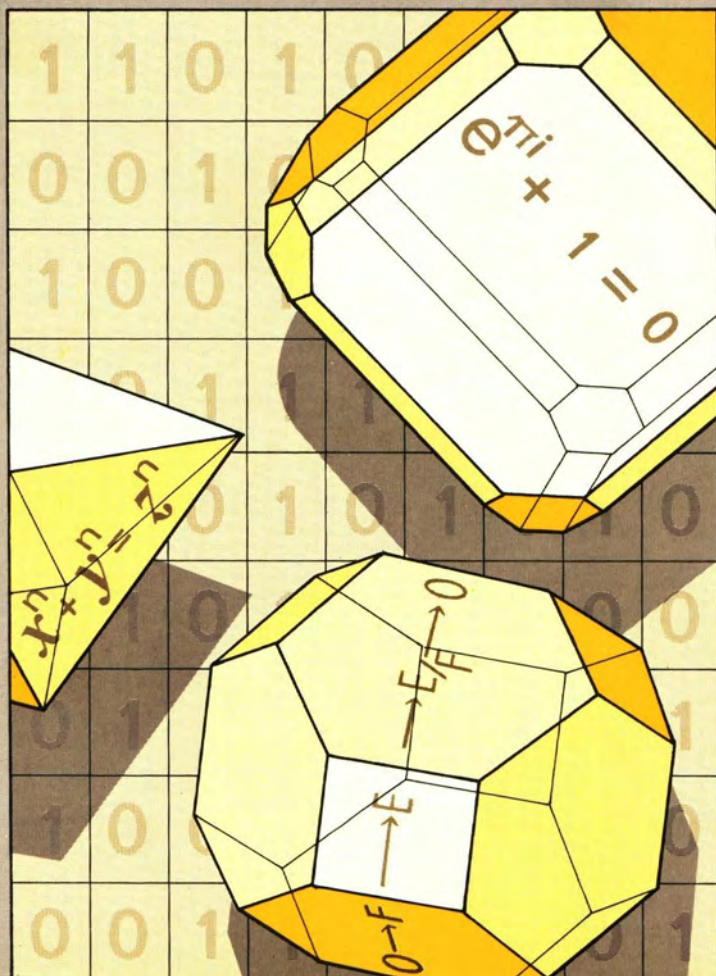

GAZETA de MATEMÁTICA

UM INSTRUMENTO DE TRABALHO E UM GUIA PARA
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA

Setembro de 1990

Nº 137

REVISTA FUNDADA EM 1940



GAZETA DE MATEMÁTICA

BOLETIM DE ENCOMENDA/ASSINATURA

Nome:

Morada:

Localidade: Código Postal:

Pretendo receber os seguintes números antigos da *Gazeta de Matemática*:
.....
.....

Destinadas a completar colecção? (Sim ou Não).

Pretende receber a encomenda pelo correio? (Sim ou Não).

Pretende assinar a *Gazeta de Matemática* para 1990? (Sim ou Não).

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Av. da República, 37 - 4.º — 1000 LISBOA — PORTUGAL — Telefone 77 32 51

SPM — pagamento de quotas / mudança de morada / inscrição de novo sócio

N.º Sócio: (excepto para novos sócios)

Nome:

Morada:

..... Código Postal:

Local de Trabalho:

Indique aqui se se trata de uma alteração da sua morada: Sim Não

Quota para o ano de 1990: 1200\$ (membros efectivos)
600\$ (membros estudantes)
600\$ (acordos de reciprocidade)

Pagamento por cheque n.º - / vale postal n.º

Assinatura: Data:/...../.....

JORNAL DE MATHEMATICA ELEMENTAR

Rua António Saúde, n.º 16, 4.º E.

1500 LISBOA

Director: Sérgio Macias Marques

Publicação mensal

(em A₄ com 16 páginas)

CAMPANHA DE ANGARIAÇÃO DE UM NOVO ASSINANTE/ESCOLA,
PARA CONSEGUIR MAIS 500 NOVOS ASSINANTES

(Preencha e devolva s. f. f.)

BOLETIM DE ASSINATURA

Desejo ser Assinante do J.M.E., sequência a decorrer,

90 a 99 (15/09/1989 a 15/06/1990) por 950\$ = 800\$ + 150\$ (pdc)^(*)

95 a 99 (15/02/1990 a 15/06/1990) por 500\$ = 400\$ + 100\$ (pdc)^(*)

(*)

(*) Risque a situação NÃO pretendida.

Nome:

Morada:

(localidade, se não for
a mesma do C. P.)

(C. P. Código Postal)

Profissão:

Envio cheque no valor de\$
 vale de correio

Assinatura: Data:/...../.....

(*) Se é ESTUDANTE, NÃO paga os 150\$ ou os 100\$ (dc).

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática*

DIRECTOR — *J. Gaspar Teixeira*

SEDE: Av. da República, nº 37, 4º, 1000 LISBOA - PORTUGAL

REVISTA FUNDADA EM 1940

UM INSTRUMENTO DE TRABALHO E UM GUIA PARA ESTUDANTES DE MATEMÁTICA

REDACTORES E COLABORADORES DESTES NÚMERO:

Luís de ALBUQUERQUE, Paulo ALMEIDA, António St. AUBYN,
Jaime CAMPOS FERREIRA, Ana Luísa CORREIA, Fernando COSTA,
José Luís FACHADA, José Manuel FERREIRA, Manuela Neves FIGUEIREDO,
Afonso FLORENTINO, Augusto FRANCO DE OLIVEIRA, Pedro FREITAS,
Sérgio MACIAS MARQUES, António MARQUES FERNANDES,
José MARQUES HENRIQUES, Eduardo MARQUES DE SÁ, José MORGADO,
Jorge Nuno OLIVEIRA E SILVA, Ernâni PINTO BASTO,
Maria Edite do ROSÁRIO, José SOUSA RAMOS, José Gaspar TEIXEIRA.

ASSINE, DIVULGUE E COLABORE!

A PUBLICAÇÃO DESTE NÚMERO DA *GAZETA DE MATEMÁTICA*
foi subsidiada pela FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

FICHA DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

- Registo na Direcção-Geral da Comunicação Social n.º 113443
- Composição e processamento de texto: Carlos Perpétuo, no Centro de Informática do Instituto Superior de Agronomia
- Capa de Jorge Estrela
- Impressão: Soc. Ind. Gráfica Telles da Silva, Lda., Lisboa
- Distribuição: Gradiva – Publicações, Lda., Rua de Almeida e Sousa, 21 r/c Esq. – Tel. 674067/8 – 1300 LISBOA
- Tiragem: 1000 exemplares
- Depositário: Sociedade Portuguesa de Matemática, Av. da República, 37-4.º – 1000 LISBOA Portugal
- Depósito Legal n.º 36918/90

Toda a colaboração para publicação nesta revista deve ser enviada dactilografada e em duas cópias.
A G.M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo prévio entre o Autor e a Redacção.

SUMÁRIO

À guisa de explicação...

por *José Gaspar Teixeira*

Para a História da Álgebra em Portugal – I

por *José Morgado*

Sobre a obra lógica de José Sebastião e Silva

por *António Marques Fernandes*

PONTOS DE EXAME – 12º Ano de Escolaridade, *Análise Matemática I, Algoritmos, Estatística Experimental*

PROBLEMAS

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

MATEMÁTICA E JOGOS

CRÍTICA DE LIVROS

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

ANTOLOGIA

MOVIMENTO CIENTÍFICO

DOCUMENTOS

G A Z E T A D E M A T E M Á T I C A

EDITOR — *Gazeta de Matemática*

DIRECTOR — *J. Gaspar Teixeira*

SEDE: Av. da República, nº 37, 4º, 1000 LISBOA – PORTUGAL

À guisa de explicação...

por José Gaspar Teixeira

A *Gazeta de Matemática* volta a publicar-se!

Depois de 14 anos de ausência, a mensagem que a *Gazeta* veiculou no passado e que então foi por muitos apreciada, é reconhecida como necessária no presente.

O sentido social aliado à preocupação do esclarecimento científico, firmaram-se na identidade da revista; fiel a esses propósitos, ela procurará continuar a ser “um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de matemática”, tal como se apresentou no seu primeiro número de Janeiro de 1940.

No último fascículo impresso da *Gazeta de Matemática* — nº 133–136, em 1975–76 — são expostas as razões para a sua interrupção, com um texto intitulado “À guisa de explicação...”, seguido da transcrição de cinco documentos complementares. Num período difícil que então decorreu tivemos o apoio logístico da Rei-

toria da Universidade Técnica de Lisboa, onde encontrámos a boa vontade de todo o pessoal, pelo que manifestamos publicamente o nosso profundo reconhecimento.

A *Gazeta de Matemática* nasceu da iniciativa de pessoas esclarecidas da “geração científica dos anos 40, em Portugal”, mais ligadas à matemática e à física.

A plêiade promotora do lançamento da revista pode resumir-se em António Monteiro, Bento Caraça, Hugo Ribeiro, Silva Paulo, Zaluar Nunes, a quem se deve um grande esforço para levar às Universidades portuguesas um Ensino Superior quando nelas proliferava “um Ensino Secundário sobre matérias do Ensino Superior”, como recordava Pedro José da Cunha, primeiro Presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática (S.P.M.). Esta, foi fundada na sala de Cálculo da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, aos doze dias do mês de Dezembro de mil novecentos e quarenta.

Ao completar meio século de existência da *Gazeta de Matemática*, daqui apelamos ao testemunho de colaboradores da re-

vista, ligados à fundação da Sociedade Portuguesa de Matemática e que felizmente se encontram entre nós:

Augusto Macedo Sá da Costa	(Sócio fundador da S.P.M. n.º 7)
José Ribeiro de Albuquerque	(" n.º 47)
Luís Guilherme Mendonça de Albuquerque	(" n.º 49)
Maria Pilar Baptista Ribeiro	(" n.º 5)
Pedro de Varennes Monteiro e Mendonça	(" n.º 30)

Presentes na nossa memória estão todos os colaboradores ao mesmo tempo sócios fundadores da S.P.M., a maioria dos

quais, inesquecíveis, nos deixa uma profunda saudade:

António Aniceto Ribeiro Monteiro	(Sócio fundador da S.P.M. n.º 12)
António Augusto Ferreira de Macedo	(" n.º 125)
António Joaquim Baptista dos Santos	(" n.º 38)
António Nicodemos de Sousa Pereira	(" n.º 136)
Armando Carlos Gibert	(" n.º 59)
Aureliano de Mira Fernandes	(" n.º 121)
Aurélio Marques da Silva	(" n.º 66)
Bento de Jesus Caraça	(" n.º 96)
Fernando Abreu Carvalho Araújo	(" n.º 60)
Hugo Baptista Ribeiro	(" n.º 13)
Jayme Rios de Souza	(" n.º 102)
José Duarte Silva Paulo	(" n.º 14)
José Júlio Andrade Santos	(" n.º 62)
José Sebastião e Silva	(" n.º 10)
José Vicente Gonçalves	(" n.º 115)
Luís Neves Real	(" n.º 104)
Manuel António Peres Júnior	(" n.º 133)
Manuel Augusto Zaluar Nunes	(" n.º 8)
Ruy Luís Gomes	(" n.º 98)
Vergílio Simões Barroso	(" n.º 48)

É justo recordar ainda António Dias, chefe da Tipografia Matemática, amigo dedicado da *Gazeta de Matemática* e apoiante de muitas outras publicações.

A todos é devida a mais profunda e sincera gratidão.

José Gaspar Teixeira
(Sócio fundador da S.P.M. n.º 124)

Para a História da Álgebra em Portugal: I

por José Morgado

Há razões para crer que o primeiro livro de Matemática editado em Portugal tenha sido o *Tratado da Pratica Darysmetica*, de Gaspar Nicolas, escrito em língua portuguesa e acabado de imprimir em 15 de Novembro de 1519, por "Germã Galharde".

Trata-se de um manual de Aritmética prática, que começa por alguns capítulos sobre as regras para somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros e números fraccionários, para extrair raízes quadradas de inteiros e para somar progressões. Enuncia, em seguida, vários problemas de que fornece soluções. Utiliza as regras de três, a regra da falsa posição, a regra de liga e outras.

As soluções dos problemas não são deduzidas: são indicadas, são verificadas, mas não se explica o modo como foram encontradas.

Alguns dos problemas foram colhidos nas obras de Frei Lucas Pacioli, nomeadamente na *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, obra editada em Veneza no ano de 1494.

Para um conhecimento mais completo do conteúdo do Tratado de Nicolas, é conveniente ler o artigo de Luís de Albuquerque, intitulado *O Primeiro Livro*

de *Aritmética Impresso em Portugal* [1], incluído no trabalho *Para a História da Ciência em Portugal*.

A propósito da utilização de alguns problemas de Frei Lucas, Gomes Teixeira, na sua *História das Matemáticas em Portugal* ([4], p. 99), lamenta que Nicolas não tivesse extraído da obra de Frei Lucas a parte relativa à Álgebra, a fim de a tornar conhecida em Portugal.

O livro de Frei Lucas e o de Gaspar Nicolas influenciaram o aparecimento, em 1541, e reedição em 1555, do livro

José Morgado e a Gazeta de Matemática

A *Gazeta de Matemática* congratula-se particularmente por contar com a valiosa colaboração do Professor José Morgado da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, através da publicação do texto que constitui a sua intervenção na Escola de Outono em História da Matemática (Novembro de 1988).

Durante cerca de vinte anos, José Morgado foi redactor da *Gazeta de Matemática* e apesar de ter sido forçadamente afastado do seu País por quase quinze anos, até ao 25 de Abril, foi vigoroso suporte desta revista no estrangeiro.

A Redacção da
Gazeta de Matemática

do aritmético português Bento Fernandes, *Tratado da Arte de Arismetica*, para uso dos mercadores. Este livro compreende, além do essencial do conteúdo do livro de Nicolas necessário aos mercadores, a parte do livro de Frei Lucas respeitante à resolução das equações do 1º e do 2º graus.

O livro de Nicolas, com os seus problemas de utilidade imediata e outros que põem em relevo propriedades curiosas dos números, despertou grande interesse, como o provam as várias edições que teve durante 200 anos, embora, nesse período, outros manuais de Aritmética tivessem sido publicados ([2], pp. 149–150). De facto, além da edição de 1519, teve outras em 1530, 1541, 1573, 1594, 1613, 1716 ([4], p. 99).



Mas a parte de Álgebra da obra de Frei Lucas viria a ser incluída, ampliada e melhorada, no tratado de Álgebra de Pedro Nunes, intitulado *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* [6], impresso em Antuérpia, em 1567.

Foi esta a última obra que Pedro Nunes publicou, quando já eram decorridos cinco anos depois da sua jubilação como catedrático da cadeira de Matemática da Universidade de Coimbra. Dedicou esta obra ao Cardeal D. Henrique, que então era regente do Reino e havia sido seu aluno. Na dedicatória, datada de 1 de Dezembro de 1564, diz que o primeiro livro de Álgebra que se imprimiu foi o de Frei Lucas, mas, em sua opinião, “tão obscuramente e tão sem método” que, sessenta anos depois da impressão, ainda muito poucos em Espanha “têm notícia de Álgebra”. Informa também que o seu *Libro de Algebra* havia sido escrito há perto de 30 anos, em língua portuguesa; mas, ocupado, como esteve, noutros estudos muito diferentes, retardou a sua publicação. Atendendo a que a língua castelhana é mais conhecida, resolveu publicá-lo em castelhano. A dedicatória, porém, foi deixada em língua portuguesa.

O ‘Libro de Algebra’ de Pedro Nunes

Tanto Gomes Teixeira, na sua *História das Matemáticas em Portugal*, como Garção Stockler no seu *Ensaio Historico sobre a Origem e Progressos das Mathematicas em Portugal*, manifestaram estranheza por a publicação ter sido feita em língua castelhana.

Assim, Gomes Teixeira perguntou ([4], p. 168):

“Que motivo levaria o nosso matemático a oferecer esta jóia científica à Espanha, publicando-a em língua castelhana?”

Não se sabe e não vale a pena apresentar hipóteses”.

Mas, apesar disso, sempre lançou uma hipótese, nos seguintes termos:

“Notemos apenas a este respeito que o livro foi publicado na Flandres, que naqueles tempos estava em poder dos castelhanos, e que o editor poderia ter imposto a condição de ser impresso em língua espanhola para ser ali mais facilmente acolhido”.

Garção Stockler, por seu lado, marcou a sua estranheza por estas palavras ([7], pp. 37–38):

“... ou fosse pelo motivo que ele mesmo declara na sua Dedicatória ao Cardeal Infante Dom Henrique, para que pudesse aproveitar o maior número de leitores, ou por efeito daquele geral pressentimento das futuras consequências da insidiosa política de Felipe II de Espanha, que determinou naquele tempo tantos homens de letras portugueses a escrever as suas obras na linguagem de nossos vizinhos, como se de nós não fizessem caso, ou nos fôsse mais fácil entender o idioma dos Castelhanos do que a eles o nosso”.

E, lembrando declarações feitas por Pedro Nunes na dedicatória, acrescentou:

“Custa, porém, a conciliar tanto zelo pelo progresso deste ramo das matemáticas na Espanha com o silêncio em que esteve sepultada esta obra por mais de trinta anos”.

Joaquim de Carvalho pretende explicar a publicação em castelhano, dizendo que, com a preferência pelo castelhano, Pedro Nunes obedecia a propósitos de confraternidade científica peninsular, dado que era a fala “mais comum” entre as gentes hispânicas, além de que, nesse tempo, o bilinguismo estava na moda.

Acredita que Pedro Nunes quis acima de tudo que a sua obra se divulgasse em Espanha e acha muito verosímil que o amor próprio de Pedro Nunes se tenha revoltado contra a petulância do alemão domiciliado em Espanha, Marco Aurel, manifestada no prómio do seu livro *Arithmetica Algebraica* publicado em 1552, pelas seguintes palavras:

“Considerando, amado leitor, a grande falta que nestes Reinos de Espanha há, da ciência Matemática, por ser ela tão necessária aos sábios verdadeiros, atrevi-me a escrever esta obra; [...] Assim, por ser coisa nova o que trato, jamais vista nem declarada [...], atrevi-me a tratá-la e escrevê-la em língua que tanto repugna à minha”.

Embora Joaquim de Carvalho declare não haver qualquer indício extrínseco de que Pedro Nunes tenha conhecido sequer o livro de Marco Aurel, admite que o silêncio de Pedro Nunes acerca desse livro seja filho do desprezo e a hipótese de que o livro de Aurel lhe causou indignação concorre, em sua opinião, para explicar não só a tradução que fez do seu *Libro de Algebra* para castelhano, como ainda a emoção que transparece de alguns passos da dedicatória e do aditamento com que termina a sua Álgebra ([8], pp. 428–430).

Para Pedro Nunes, o objectivo da Álgebra é determinar incógnitas por intermédio da resolução de equações, como se conclui das afirmações com que abre o primeiro capítulo do seu trabalho:

“Nesta Arte de Algebra o fim que se pretende é manifestar a quantidade ignota. O meio de que usamos para alcançar este fim, é igualdade”.

A própria dedicatória ao Cardeal D. Henrique começa assim:

“De todos os livros que nas Ciências Matemáticas tenho composto [...], nenhum é de tanto proveito como este de Álgebra, que é conta fácil e breve para conhecer a quantidade ignota, em qualquer propósito de Aritmética e Geometria, e em toda outra arte que usa de conta e de medida, como são a Cosmografia, Astrologia, Architectura e Mercantil”.

Registe-se desde já, no entanto, que o *Libro de Algebra* não se confunde com nenhum dos manuais de Aritmética Prática que tinham aparecido no nosso país. O *Libro de Algebra* não se reduz a um conjunto de regras avulsas para aplicação imediata a “toda outra arte que usa de conta e de medida”. Pedro Nunes teve sempre a preocupação de “demonstrar” os resultados expostos, teve sempre a preocupação de ensinar, não apenas como, mas também *porquê*.

Antes, porém, de se embrenhar nas demonstrações das várias regras de cálculo que enunciou, demonstrações por vezes longas, avança com algumas aplicações

“... para darmos algum gosto aos que esta arte de Álgebra por este nosso livro querem aprender, encontrando logo de início algum fruto, que é tornar conhecido por estas Regras o que antes era desconhecido; e, para que com maior atenção leiam o que se segue, como doutrina necessária para o que a arte pretende, pareceu-nos, por estes motivos, muito conveniente mostrarmos o uso das ditas regras em alguns Problemas, que por elas se podem resolver facilmente” ([6], p. 3).

Como se vê, Pedro Nunes teve a preocupação pedagógica de motivar o estudo das demonstrações.

A Álgebra não constituía, nesse tempo, uma disciplina autónoma com respeito à Geometria. Pedro Nunes, como outros matemáticos do seu tempo, recorria frequentemente à Geometria para demonstrar proposições de Álgebra, de modo que o rigor das suas demonstrações era o rigor que a Geometria de então permitia. Mas, mesmo sem constituir uma disciplina autónoma com respeito à Geometria, a Álgebra, nas mãos de Pedro Nunes, prestava já bons serviços à Geometria.



Pedro Nunes (reverso de uma moeda recentemente posta em circulação, da autoria do escultor José Candido).

Pedro Nunes dá um realce especial (digamos até, dá um realce carinhoso) ao papel da Álgebra na resolução de problemas geométricos. Assim, a propósito do problema considerado por Regiomontano,

“Dada a soma de dois lados de um triângulo e dados os segmentos em que o outro lado é dividido pela altura correspondente, determine-se cada um dos lados, a área e a altura”,

apresenta dois métodos de resolução: o seu próprio, em que usa Álgebra, e o de Regiomontano, que não usa Álgebra; e, em seguida, escreve ([6], pp. 323-324):

“A razão por que opero por Álgebra quase sempre, é que este tratado é feito para que nele se utilizem as Regras da Álgebra nos casos de Geometria. E também porque quem opera por Álgebra, vai entendendo a razão da obra que faz. [...] Quem opera por Álgebra vai fazendo discursos demonstrativos. Mas quem opera por outras regras [como fez Regiomontano], não entende logo a razão da obra que vai fazendo e para expor tal razão, que difere de caso para caso, será necessário usar muitas e muitas proposições de Euclides. Ora isto evita-se com as regras da Álgebra, porque, por elas, demonstramos todos os casos, sem necessidade de recorrer a outras proposições de Euclides.

[...] Encobrinando o artifício, não se produz ciência e, por este motivo, convém esta arte da Álgebra, a qual, posto que seja prática, revela as operações que acompanham as demonstrações. De maneira que quem sabe por Álgebra, sabe cientificamente”.

E Pedro Nunes continua:

“Vemos algumas vezes não poder um grande matemático resolver uma questão por meios geométricos, e resolvê-la por Álgebra, sendo a mesma

Álgebra tirada da Geometria, o que é coisa de admiração”.

Pedro Nunes tratou alguns problemas, no seu *Libro de Algebra*, que haviam já sido considerados por Regiomontano (como o que acima referimos), por Frei Lucas Pacioli, por Cardano, por Tartaglia, mas as soluções de Pedro Nunes são mais cuidadas, mais claras e, por vezes, mais rápidas ([5], p. 50).

LIBRO DE ALGEBRA

EN ARITHMETICA
Y GEOMETRIA.

Compuesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmographo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico subido en la Cathedra de Mathematicas en la Vniuersidad de Coymbra.



EN ANVERS.
En casa de la Biuda y herederos
de Iuan Stello.
1567.
CON PRIVILEGIO REAL.

Um aspecto importante do *Libro de Algebra* é salientado por Gomes Teixeira ([5], pp. 53-54):

“Ao contrário dos géometras gregos, que, na exposição dos assuntos, procuravam somente demonstrar as regras e teoremas, sem fazer conhecer os modos como os tinham obtido, Pedro Nunes, ao mesmo tempo que demonstra, ensina a investigar. ‘Oh! que bom fôra’, diz ele, ‘se os autores que escreveram nas ciências matemáticas nos

deixassem escritas as suas invenções pela maneira e com os mesmos discursos que fizeram até que as encontraram. E não como Aristóteles diz, na Mecânica, dos artífices que nos mostram, na máquina que fizeram, o que está de fora e escondem o artifício, para parecerem admiráveis. É a invenção muito diferente da tradição em qualquer arte, nem penseis que aquelas tantas proposições de Euclides e Arquimedes foram todas achadas pela mesma via pela qual as trouxeram até nós”.

Este trecho de Pedro Nunes encontra-se no *Libro de Algebra* ([6], p. 138) e tem sido muito apreciado. Foi transcrito por John Wallis, no seu *A Treatise of Algebra*, publicado em Londres, em 1685 e aparece no livro *The History of Mathematics: A Reader* ([11], p. 177), editado por John Fauvel e Jeremy Gray, em 1987.

A opinião de Gomes Teixeira sobre o trabalho de Pedro Nunes como matemático está expressa, quer no *Elogio Histórico de Pedro Nunes*, incluído no volume *Panegíricos e Conferências*, quer na *História das Matemáticas em Portugal*. No *Elogio Histórico*, escreveu ([5], p. 55):

“Como matemático teórico, não subiu até à criação de métodos gerais de investigação, mas comentou com profundeza teorias clássicas no seu tempo e aplicou com sagacidade e engenho métodos conhecidos à resolução de questões postas por ele mesmo ou por sábios que o precederam, algumas de muita dificuldade”.

Na *História das Matemáticas em Portugal*, pode ler-se ([4], p. 174):

“Não se encontram na Álgebra do nosso matemático invenções fundamentais, mas é perfeita na forma, clara e metódica na exposição, rigorosa em raciocínios, original em algumas demonstrações e nos métodos empregados para resolução de numerosos problemas que encerra.

[...] Pode dizer-se que na simplicidade e rigor da exposição das doutrinas da Álgebra não foi igualado por géometra algum do século XVI”.

Na opinião de Garção Stockler ([7], p. 58),

“O seu livro é o compêndio mais metódico e escrito com mais clareza, que até àquele tempo se publicou”.

Quase pelas mesmas palavras se exprime Pedro José da Cunha, no seu *Bosquejo Histórico das Matemáticas em Portugal* ([12], p. 23):

“Este *Libro de Algebra* de Pedro Nunes é o mais metódico e mais claro que até à sua época tinha aparecido”.

Rodolfo Guimarães, no seu trabalho *Sur la vie et l'oeuvre de Pedro Nunes* afirmou ([13], vol. 8, p. 27):

“Observa-se nesta bela obra uma generalidade nas demonstrações, uma abstracção nos enunciados dos exercícios, muito excepcionais para a época e que dá à obra de Pedro Nunes um carácter já inteiramente moderno”.

O padre jesuíta belga H. Bosmans, no seu artigo *L'Algèbre de Pedro Nuñez*, referindo-se aos 110 problemas que constituem o capítulo 5 da 3ª parte principal do *Libro de Algebra*, às demonstrações literais relativas a radicais e proporções, considera que tudo isto lhe confere “o seu carácter tão particular, já tão moderno” e acrescenta:

“Considerado no seu conjunto, este capítulo de Nunes não tem análogo em nenhum contemporâneo. Nunes, sob um certo aspecto, ultrapassa todos os seus émulos, mesmo os mais ilustres, mesmo os Cardano e os Stifel. Do primeiro ao último sem excepção, os problemas do capítulo 5 são exercícios abstractos sobre os números” ([14], pp. 245–246).

Bosmans considera Pedro Nunes um dos principais percursores de Viète.

Regista o facto de Nunes não se ter apercebido do futuro reservado às soluções negativas das equações, mas, apesar disso, afirma que Nunes foi um dos algebristas mais notáveis do século XVI, e escreve:

“Entre os grandes matemáticos que separam Stifel e Cardano, de Viète, ele brilha em primeiro lugar. É uma das glórias de Portugal”.

No decurso dos quase 30 anos que mediaram entre a primeira redacção do *Libro de Algebra* e a sua publicação, Pedro Nunes fez várias revisões e, segundo as suas próprias palavras, “confrontos com o que outros depois escreveram”.

Entretanto, Tartaglia descobriu e Cardano publicou, na sua *Ars Magna sive de regulis algebraicis*, um método de resolução da equação do 3º grau.

Pedro Nunes, preocupado em actualizar a sua obra, resolveu acrescentar-lhe um aditamento, a que deu o título *El Autor desta obra a los Lectores*, onde analisa o método de Tartaglia. Faz várias objecções, nomeadamente ao chamado caso irreductível, e termina o aditamento dizendo que, se conseguir um método melhor, o publicará em outro livro.

Comentando esta declaração Joaquim de Carvalho escreveu ([8], p. 466):

“Não há qualquer testemunho, directo ou indirecto, que indique haver Pedro Nunes escrito quaisquer páginas definitivas sobre resolução da equação cúbica e da biquadrática.

Creemos que a redacção deste passo somente autoriza pensar-se que era assunto que tinha em mente e que à data em que o redigiu (ou reviu definitivamente) não havia atingido uma solução satisfatória”.

Poucos anos depois da publicação da *Álgebra* de Pedro Nunes, publicou Rafael Bombelli a sua *Álgebra*. Preparada em 1560, só foi publicada em 1572.

Um dos exercícios considerados por Bombelli ([15], p. 225) foi a resolução da equação

$$x^3 = 15x + 4.$$

A aplicação do método de Tartaglia conduz a

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}},$$

expressão que, então, não tinha sentido, por causa da intervenção de $\sqrt{-1}$.

No entanto, é imediato que a equação considerada admite a raiz 4. Uma situação como esta não foi compreendida por Pedro Nunes, nem por Cardano, nem pelo próprio Tartaglia.

Bombelli teve então a ideia de que as duas raízes cúbicas poderiam talvez ser representadas por expressões do tipo $p + \sqrt{-q}$ e $p - \sqrt{-q}$, cuja soma, calculada de acordo com as regras “habituais”, seria igual a 4.

Vejamos o que diz o próprio Bombelli na sua *Álgebra* (tradução livre):

“Esta ideia, para muitos, parecia talvez extravagante; durante muito tempo, também fui da mesma opinião, pois tudo parecia apoiar-se mais na sofisticação do que na verdade. Entretanto, tanto procurei que acabei por provar ser esse o caso”.

Na verdade, Bombelli mostrou que $2 + \sqrt{-1}$ é um valor de $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$ e que $2 - \sqrt{-1}$ é um valor de $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$, e a soma de $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$ é precisamente igual a 4.

Graças aos trabalhos publicados por Pedro Nunes, nomeadamente, ao seu livro de Álgebra, em que mostra possuir um conhecimento crítico das obras matemáticas mais significativas até então aparecidas na Europa, e tendo em conta as referências elogiosas que lhe são feitas por matemáticos de outros países, acreditamos poder afirmar que, em meados do século XVI, a literatura matemática portuguesa estava razoavelmente actualizada.

E não só a literatura matemática estava razoavelmente actualizada. De facto, poucos são os países que, no século XVI, tiveram uma produção cultural de nível tão elevado como o alcançado pelo conjunto de escritores e cientistas: Gil Vicente, Bernardim Ribeiro, Sá de Miranda, António Ferreira, Diogo Bernardes, Luís de Camões, Frei Agostinho da Cruz, Frei Heitor Pinto, Frei Tomé de Jesus, Frei Amador Arrais, Fernão Mendes Pinto, Damião de Góis, Fernão Lopes de Castanheda, João de Barros, Gaspar Correia, Diogo do Couto, Fernão de Oliveira, Jerónimo Osório, Jorge Faria de Vasconcelos, Duarte Pacheco Pereira, Pedro Nunes, Garcia da Orta. E se atender-

mos a que, só no ano de 1567, o mesmo ano em que se publicou a Álgebra de Pedro Nunes, foram também publicadas, entre outras obras notáveis, as seguintes: *Crónica do Príncipe D. João*, por Damião de Góis; *Crónica de D. Manuel* (partes III e IV), por Damião de Góis; *Memorial das Proezas da Segunda Távola Redonda*, por Jorge Ferreira de Vasconcelos; 1ª edição portuguesa do *Palmeirim de Inglaterra*, por Francisco de Moraes; a versão latina, em Antuérpia, dos *Colóquios dos Simples e Drogas da Índia*, por Garcia da Orta ([8], p. 415 e [9], pp. 480-481), poderemos, sem dúvida, afirmar que, em meados do século XVI, não estávamos atrasados, com respeito aos outros países europeus, nos campos da produção literária, da produção histórica e da produção científica.

O período da decadência

Pedro Nunes morreu em 11 de Agosto de 1578, precisamente uma semana depois do desastre nacional de Alcácer-Quibir. Dois anos depois da sua morte, em 25 de Agosto de 1580, é derrotado, em Alcântara, D. António, o Prior do Crato, que tentou resistir ao exército invasor espanhol, comandado pelo Duque de Alba.

Portugal perdeu a sua independência e, com a perda da independência, acentuou-se a decadência que já se vinha manifestando em várias actividades nacionais, incluindo nos estudos matemáticos.

Na verdade, as Matemáticas, salvo uma ou outra excepção, não tinham ainda sido cultivadas em Portugal, pelos seus próprios méritos, mas somente em vista

de certas aplicações, especialmente à Astronomia e à Navegação. Mesmo as aplicações à Astronomia visavam essencialmente aplicações à Navegação.

Terminado o período dos Descobrimientos Marítimos, as Navegações decaíram, sobretudo a partir do reinado de D. Sebastião, ficando reduzidas a actividades mais ou menos rotineiras; desapareceu assim a principal motivação para a actividade matemática no nosso país, e daí a sua decadência.

Os poderes estabelecidos não tinham realmente fomentado o estudo da Matemática, mas apenas o de algumas das suas aplicações.

Quando, em 1290, o rei D. Dinis fundou a Universidade, as Ciências Matemáticas não foram incluídas no conjunto das ciências a serem estudadas na Universidade.

Garção Stockler, no seu *Ensaio Histórico*, explica isto pelo facto de o conhecimento destas ciências não ter sido considerado necessário para que a mocidade portuguesa pudesse dignamente habilitar-se para o estudo eclesiástico, única coisa que interessava aos prelados do reino, quando, em 1288, ofereceram o rendimento de umas tantas igrejas para servirem de dotação à Universidade [ver Nota 1].

Da investigação que fez, Stockler julga poder concluir que, ainda no ano de 1503, não existia na Universidade fundada em fins do século XIII, uma única cadeira de Matemática e que, só em 1518, D. Manuel I procurou remediar tal falta, criando uma cadeira, ainda não propriamente de Matemática, mas de Astronomia.

Outro facto a ter em conta: Pedro Nunes jubilou-se em 1562 e, só 30 anos depois, foi nomeado novo lente para lec-

cionar a cadeira de Matemática; foi André de Avelar, o melhor substituto possível para o cargo de professor da Universidade de Coimbra, mas de nível muito inferior ao de Pedro Nunes.

Assim, o estudo das Ciências Matemáticas, ou antes, o estudo de algumas das suas aplicações, até aos começos do século XVI, foi feito inteiramente à margem da Universidade portuguesa e tal estudo não foi suficientemente intenso e profundo para que as Ciências Matemáticas passassem a ser estudadas *pelos seus próprios méritos*.

A triste verdade é que, mesmo depois, poucas vezes as Ciências Matemáticas terão sido estudadas *pelos seus próprios méritos*; tanto assim é, que, em meados do século XIX, ainda se não tinha criado uma tradição de ensino da Matemática, como bem observou Alexandre Herculano, no seu trabalho intitulado *Da Eschola Polytechnica e do Collegio dos Nobres*, incluído no volume VIII dos *Opúsculos* ([16], p. 57), quando concluía que

“Não era, pois, entre nós, a matemática mais que uma enxertia, uma excepção ou antes uma aberração das tendências literárias do país”

e mais adiante (p. 60) insistia em que

“... considerando atentamente a história da instrução pública entre nós, vemos nela as tendências exclusivamente literárias, no sentido restrito da palavra”.

Nesse mesmo trabalho, refere-se à criação do *Instituto das Ciências Físicas e Matemáticas*, em 1835, por Rodrigo da Fonseca Magalhães, que se demitiu quatro meses depois; e há quem pense que a demissão foi devida à violência dos ataques

que sofreu, desencadeados por aqueles que se opunham à criação do Instituto.

Em seguida, Herculano faz o seguinte comentário ([16], pp. 60–61 e [17], p. 555):

“Quanta ignorância, quanto pedantismo, quanta preguiça, quanta incapacidade havia por nossa terra, tudo gemeu, tudo gritou e grasnou insultos, ponderações, reflexões eruditas, argumentadas, soporíferas.

[...] Não houve remédio: a campanha caiu sobre a física, a química, a botânica, a matemática, a astronomia”.

Até à década de 40 deste nosso século XX, a situação da matemática não se tinha modificado muito. Por isso, o saudoso amigo Hugo Ribeiro não estava errado quando, num artigo publicado na *Portugaliae Mathematica*, em 1980, ao descrever qual a situação da Matemática em Portugal, antes da actualização de António Aniceto Monteiro, afirmou ([18], p. V):

“Com uma ou outra excepção, a Matemática (pura) não era cultivada em Portugal e, assim, as escolas superiores limitavam-se a preparar professores das escolas secundárias, ou técnicos e cientistas que porventura as utilizariam”.

Em Portugal, como, em geral, na Europa, o século XVI ficou assinalado pelo fortalecimento ou influência da nobreza e do alto clero, fortalecimento esse que prosseguiu no século XVII e em grande parte do século XVIII.

O historiador Jaime Cortesão, no seu trabalho *Alexandre de Gusmão e o Tratado de Madrid* ([19], vol. I, p. 98), emitiu a opinião de que

“A Inquisição e o fanatismo inquisitorial eram apenas um dos aspectos da perversão do espírito religioso e da subordinação da Igreja ao absolutismo do Estado. Sob os efeitos dissolventes do ouro, o Estado, a nobreza e o alto clero



haviam-se dado as mãos para impôr a lei despótica dos seus interesses. Quebrada a velha mola da resistência organizada das classes populares — a burguesia e os mesteres — que outrora erguiam com vigor a voz nas Cortes, o regime tendeu para uma espécie de despotismo teocrático, de forma exterior asiática, que pesava, com aparato esplêndido, sobre os súbditos. Mas entre o Rei, o alto clero e a nobreza existia a consciência da solidariedade dos interesses comuns”.

O historiador Vitorino Magalhães Godinho, no seu livro *Estrutura da Antiga Sociedade Portuguesa*, chamou a atenção para o seguinte ([20], pp. 109–111):

“[...] por várias vezes no nosso país, como no resto da Península, a burguesia tentou forjar os quadros da Sociedade, chamando a si a iniciativa económica e a influência política, mas também por várias vezes esses esforços se goraram e a nobreza e o clero conseguiram recuperar o terreno perdido; a longo prazo a sociedade assume por isso um carácter ambíguo que lhe imprime uma ordem nobiliárquico-eclesiástica assente numa economia mercantilista até à medula.

[...] Sabemos que em toda a Europa, especialmente mediterrânea, o fim do século XVI representa uma decadência da burguesia e uma nova ascensão senhorial e nobre, bem como do poderio eclesiástico.

[...] Se acompanharmos a nossa literatura, como todos os testemunhos relativos à nossa vida social nos séculos XVII e XVIII, constatamos, na verdade, que a cultura portuguesa é essen-

cialmente nobiliárquica e eclesiástica, extremamente atrasada em relação à Europa além-Pirinéus. Na mentalidade das classes dirigentes está sem dúvida a outra razão da travagem da evolução social peninsular”.

O consumo das especiarias na Europa era já grande durante a Idade Média: umas eram usadas na preparação de alimentos, outras na fabricação de perfumes, outras ainda eram usadas para fins medicinais. O seu transporte do Oriente para a Espanha era feito pelo Golfo Pérsico, pelo Mar Vermelho, até às cidades italianas de Génova e Veneza, que, em seguida, as distribuíam pela Europa e com este comércio enriqueceram.

Ora, após a descoberta do caminho marítimo para a Índia, a situação mudou radicalmente: passaram a ser navios portugueses a transportá-las directamente da Índia para Lisboa; e a redução de grande número de intermediários, daí resultante, permitiu que elas fossem vendidas aos diversos países da Europa por preços muito mais baixos. Segundo assinala J. Hermano Saraiva, na *História Concisa de Portugal* ([21], p. 169), o lucro resultante da eliminação de intermediários era tão grande que o pequeno carregamento trazido na primeira viagem de Vasco da Gama valeu sessenta vezes o custo representado pela expedição.

O pagamento das especiarias na Índia era feito, parte em moeda e parte em produtos, não originários de Portugal, mas levados da Europa. Tais produtos tinham de ser comprados no exterior, porque em Portugal não se produziam. Como os negócios da Índia enriquecessem muitos aproveitadores, importavam-se também muitos artigos para esses endinheirados,

inclusivamente artigos de luxo. Aumentava o consumo de bens e diminuía o rendimento nacional. O comércio do Oriente, quando mais aumentava, mais empobrecia a nação.

Além das especiarias, africanas e asiáticas, e do ouro africano, a terceira grande mercadoria era constituída pelos escravos. Escravos vindos da Guiné e do Congo (incluindo o norte de Angola) supriam as necessidades de mão-de-obra na Europa, nas ilhas da Madeira, Cabo Verde e S. Tomé. Outros eram deixados no Continente. As classes economicamente dominantes serviam-se dos escravos para impedir ou inutilizar as lutas reivindicativas dos trabalhadores por melhores salários.

Damião de Góis calculou que, em meados do século XVI, entravam em Portugal dez a doze mil escravos por ano ([22], p. 93).

Como sublinha J. Hermano Saraiva ([21], p. 170),

“Não há, nos cem anos que durou o monopólio oriental, notícia de qualquer fabricação nova introduzida no país. Mesmo as drogas do Oriente não originaram qualquer actividade de tipo diferente das que vinham da época anterior. Ao terminar o século XVI, a produção artesanal portuguesa não difere muito da do século XIII”.

Pelo que respeita ao mundo rural,

“Pouco a pouco, as quintas e os casais, que andavam nas mãos dos lavradores, passavam à posse dos nobres, funcionários e aventureiros regressados da Índia, porque a terra foi o único género de investimento dessas economias” ([21], p. 175).

Aumentou o número de ociosos, o número de latifúndios, o número de hectares de terras incultas e, como não podia deixar de ser, aumentou a miséria nos campos.

Aumentou o número de parasitas sociais. Enquanto, por exemplo, no reinado de D. João II, o número de cortesãos era de cerca de 200, no reinado de D. Manuel, tal número subiu para cerca de 4000 e calcula-se que aumentos da mesma ordem de grandeza deve ter havido nas grandes casas senhoriais ([21], p. 177).

É claro que todo este clima é pouco propício ao incremento das actividades científicas; mas a situação foi ainda extraordinariamente agravada, pela introdução, em Portugal, da Inquisição e pela entrega quase total do ensino à Companhia de Jesus.

A Inquisição foi em Portugal especialmente poderosa e especialmente violenta.

A respeito da Inquisição, Gomes Teixeira acusou ([4], p. 199):

“Esta instituição, com os seus fanatismos, com as suas denúncias, com os seus roubos, com as suas prisões, com as suas torturas, com os seus autos de fé, com as suas fogueiras, foi uma mistura de tragédia dolorosa e de baixa comédia, que durante cerca de duzentos anos perturbou em Portugal todas as actividades e com elas o progresso geral do país”.

Na realidade, Portugal sofreu a Inquisição, não durante cerca de 200 anos, mas durante perto de 300 anos — desde 1536 até 1821. (A Inquisição foi finalmente suprimida em 5 de Abril de 1821 pelas Côrtes Constituintes).

Pela violência especial que a Inquisição atingiu em Portugal, Gomes Teixeira chegou a escrever que, se o processo de Galileu tivesse ocorrido em Portugal, então

“O castigo de Galileu seria talvez mais duro.

Os Pontífices Romanos reprovavam os excessos da Inquisição e, em Itália, eram ouvidos; mas na Ibéria, longe de Roma, não eram escutados e as Inquisições continuavam sempre na sua carreira lúgubre de perseguições e crimes” ([4], p. 201).

Seguem-se os nomes de alguns dos intelectuais encarcerados pela Inquisição:

- O sucessor de Pedro Nunes na Universidade de Coimbra, André de Avelar, condenado a cárcere perpétuo quando tinha já perto de 80 anos; os seus dois filhos e as suas quatro filhas foram também perseguidos e presos pela Inquisição.
- Dois netos de Pedro Nunes: Matias Pereira, encarcerado durante oito anos e Pedro Nunes Pereira, encarcerado durante mais de oito anos.
- Um filho do cronista Rui de Pina, o gramático Fernão de Oliveira, o poeta e erudito Diogo de Teive, o cronista Damião de Góis, o erudito Vicente Nogueira, o escritor Gaspar Clemente, o cônego e poeta Baltazar Estaço, o jurisconsulto Tomé Vaz, o jesuíta Padre António Vieira, o poeta Serrão de Castro, o engenheiro Bento de Moura Portugal, o Cavaleiro de Oliveira, o poeta Pereira Caldas, o poeta João Xavier de Matos, o poeta Bocage,

o matemático José Anastácio da Cunha, o poeta Curvo Semedo, o poeta José Agostinho de Macedo e muitos, muitos outros.

- Entre os assassinados pela Inquisição, citamos, por exemplo, António Homem, professor da Universidade de Coimbra e António José da Silva, o maior comediógrafo português depois de Gil Vicente ([23], vol. I e II).

Quanto ao ensino praticado pela Companhia de Jesus, limitamo-nos a transcrever de J. Hermano Saraiva ([21], p. 197), o seguinte:

“O objectivo [da Companhia de Jesus, no sector do ensino] era o de enraizar dogmas em que sinceramente se acreditava, não o de provocar críticas, porque o resultado das críticas é sempre o fim dos dogmas. O ensino não foi, pois, um treino para pensar, mas um alicerce para crer. E deu resultado, porque os portugueses do século XVII creram muito e pensaram pouco”.

Portugal recuperou a sua independência em 1640, depois de muitas lutas populares contra a ocupação espanhola, sobretudo a partir de 1682 [ver Nota 2].

Como pode ler-se nas *Lições de História de Portugal*, de Armando Castro ([24], vol. II, pp. 113–114),

“... logo a partir de 1581, altura em que se fixa o governo filipino, as tensões e os conflitos, mais ou menos localizados, se verificam indubitavelmente, mostrando que entre as mais amplas camadas da população o domínio castelhano era objecto de uma resistência natural, espontânea.

[...] após 1628, pouco mais ou menos, se vão aprofundar e agudizar choques das populações contra as autoridades estabelecidas, surgindo por vezes encabeçadas por mulheres e crianças, o que traduz historicamente a profundidade da crise que suscita essas explosões”.

E mais adiante, observa Armando Castro (p. 145):

“Se é certo que o golpe do 1º de Dezembro de 1640 foi totalmente obra da aristocracia (nem podia ser de outro modo devido ao receio da intervenção das massas populares, que constituía certamente uma das motivações mais profundas da decisão), o certo é que, quando tudo estava a postos, a cinco dias do 1º de Dezembro, e se tinha assentado desferir o golpe, os conjurados já tinham contactado representantes das forças populares a fim de os apoiarem, apoio que com certeza saberiam que espontaneamente não faltaria, como é óbvio”.

E não faltou! Tanto assim que, antes de 20 de Dezembro, a restauração da independência era um facto em todo o país ([24], vol. II, p. 148).

A Espanha não se conformou com a vitória portuguesa e seguiu-se um período de mais de 27 anos de guerra, que nos custou muitas vidas. Só em 13 de Fevereiro de 1668 foi assinado o tratado de paz.

Na luta pela conquista e defesa da nossa independência, a Inquisição, parte do alto clero e parte da aristocracia alinharam com os inimigos da independência de Portugal, contra o povo português. Estavam antes do 1º de Dezembro, estiveram no 1º de Dezembro e depois do

1º de Dezembro, contra o povo e contra a independência da Pátria.

Na conspiração para assassinar D. João IV, em 1641, estiveram envolvidos o Inquisidor Geral, D. Francisco de Castro, o arcebispo de Braga, D. Sebastião de Matos de Noronha, o bispo de Martfria, D. Francisco de Faria, o bispo-eleito de Malaca, D. Frei Luís de Melo, o duque de Caminha, D. Miguel de Noronha, o marquês de Vila Real, D. Luís de Menezes, o conde de Armamar, D. Rui de Matos de Noronha, o conde de Vale de Reis, D. Nuno de Mendonça, alguns mercadores, alguns altos e médios funcionários e outros.

O Inquisidor Geral D. Francisco de Castro acabou por ser perdoado, a pretexto de ter denunciado os seus cúmplices!...

Mas o poder e a impunidade da Inquisição eram tais que, mal recuperou a liberdade, reassumiu automaticamente as funções de Inquisidor Geral, como se o perdão, que lhe foi concedido, o tivesse livrado da obrigação moral e cívica de respeitar a soberania nacional ([24], vol. II, p. 156, [25], vol. II, p. 150, [26], p. 238).

A política seguida nos últimos reinados da dinastia de Aviz — fortalecimento do poder político e económico da nobreza e do alto clero e, por outro lado, esmagamento das classes populares — a perda da independência nacional e as lutas necessárias, primeiro para a recuperar e depois para a não perder novamente, as perseguições inquisitoriais e a orientação imposta ao ensino pela Companhia de Jesus, conseguiram isolar o nosso país do movimento científico europeu e quase conseguiram destruir o movimento científico nacional.

A reforma pombalina da Universidade de Coimbra constitui um saudável esforço para actualização científica e cultural, atribuindo ao ensino das ciências e, especialmente ao ensino da Matemática, uma importância, uma dignidade que até aí nunca tinham tido, no nosso país.

No seu artigo *O ensino da Matemática na reforma pombalina*, publicado, em 1947, na *Gazeta de Matemática* ([3], pp. 3-6), Luís de Albuquerque refere-se aos quase duzentos anos decorridos desde os últimos Estatutos pré-pombalinos da Universidade, em 1612, até à reforma pombalina, em 1772, e sublinha o enorme atraso científico resultante, não só do facto de os dois últimos séculos terem sido dos mais fecundos na evolução científica europeia, mas também da circunstância de os próprios estatutos de 1612 estarem já desactualizados na altura em que foram publicados.

E acrescenta:

“No que, em particular, respeita à matemática, a situação agravava-se ainda por outra razão: O ensino desta ciência nunca criara tradições entre nós (já Herculano o fez notar), a despeito de algumas belas obras publicadas nos séculos XVI e XVII por matemáticos portugueses, e das grandes viagens marítimas terem exigido a preparação de cosmógrafos e cartógrafos competentes. Contribui sem dúvida para isso, o facto de na Universidade só ter sido criada uma cadeira para o ensino desta ciência; para o mal ser ainda maior, esta cadeira estava enquadrada na Faculdade de Medicina — que era, aliás, a Faculdade onde menos forçadamente podia ser acolhida”.



Est. XXXI. Sebastião José de Carvalho e Melo (1699-1782), conde de Oeiras e marquês de Pombal (Gravura de “Carpinetti Lusitanus”, de 1759).

Luís de Albuquerque, depois de salientar que a Junta de Providência Literária, encarregada dos trabalhos preparatórios para a Reforma, mostrou ter plena consciência do nosso atraso, transcreve, nas suas linhas gerais, os programas das quatro cadeiras de Matemática que passariam a compôr o Curso Matemático, criado e organizado pela Reforma. A primeira cadeira tratava de *Elementos de Aritmética e Geometria Elementar*; a segunda tratava de *Álgebra* (compreendendo equações e sua resolução, propriedades e uso das séries), *Geometria* (Tratado analítico das cónicas), *Cálculo Diferencial e Cálculo Integral*; a terceira cadeira tratava de *Mecânica, Óptica e Acústica*; e a quarta cadeira tratava de *Astronomia*.

Um aspecto importantíssimo dos novos Estatutos foi posto em relevo por Luís de Albuquerque, nos seguintes termos:

“Propositadamente deixámos para o fim uma orientação revelada nos Estatutos que só em nossos dias voltou a ser activamente defendida: a de que o papel da Universidade não deve ser apenas o de dotar o país com diplomados para prover às exigências do funcionalismo ou das profissões chamadas liberais: cabe-lhe também o encargo de promover e organizar a investigação científica”.

Pode bem imaginar-se o progresso que tal orientação representou, se tivermos em vista que (p. 6):

“Até à época pombalina serviam de guia nas lições, tratados há muito ultrapassados, impondo-se aos professores a obrigação de os seguir e aos alunos o de estudar por eles: chegava-se a escrever expressamente nos Estatutos de 1612, que os estudantes deviam *sempre* defender as opiniões (muitas vezes velhas de um milhar de anos) que os autores desses tratados neles defendiam”.

Razão tinha Joaquim de Carvalho, quando escreveu ([10], p. 323):

“Com tais métodos de ensino e planos de estudos, a originalidade tornou-se aberração e a renovação de ideias, heresia: e porque a vigência dos Estatutos filipino-joaninos se prolongou integralmente até à reforma pombalina, a vida universitária oferece o espectáculo da inércia e da carência de ideias científicas”.

De entre as recomendações contidas no Estatuto pombalino, Gomes Teixeira ([4], p. 226) destaca de modo especial a seguinte:

“Aconselha-se aos professores e discípulos que associem ao ensino e ao estudo das ciências o da sua história. Por este meio dá-se vida às teorias e eleva-se o espírito, obrigando-o a olhar para o alto, para os génios”.

Antes da reforma pombalina, os estudos matemáticos tinham sido quase completamente banidos da Universidade e, por isso, não havia professores portugueses para as quatro cadeiras. Houve que chamar os italianos Miguel Ciera, para a de Astronomia e Miguel Franzini, para a de Álgebra. Monteiro da Rocha foi nomeado para a de Mecânica e José Anastácio da Cunha para a de Geometria (em 5 de Outubro de 1773).

(continua no próximo número da *Gazeta de Matemática*)

Notas:

1) No Vol. I da *História de Portugal* de Oliveira Marques, p. 178, pode ler-se:

“Em 1288, um grupo de clérigos tendo à frente os priores de Alcobaça, Santa Cruz de Coimbra e S. Vicente de Fora de Lisboa, solicitou do papa Nicolau IV a confirmação da criação de uma Universidade, que tinham estabelecido em Lisboa de comum acordo com o rei. Sugerida pela Igreja e financeiramente mantida pela Igreja também, a Universidade destinava-se a constituir uma espécie de seminário para futuros clérigos. Só pouco a pouco é que os laicos foram entrando nela.

Comparada com as universidades de Itália, França ou Inglaterra, a Universidade portuguesa não surgiu demasiado cedo. Mesmo em Castela haviam sido criadas universidades anteriormente. Contudo, em contraste com outros países marginais da Europa — como os da Escandinávia, a Escócia e os estados eslavos — ou com a Alemanha, Portugal veio muito à frente, o que implicava a existência de uma vida cultural assaz desenvolvida para o tempo.

É verdade que nunca foram grandemente favoráveis as condições para que a Universidade prosperasse, pelo menos antes do século XV. Teve sempre pouco prestígio, tanto em Portugal como no estrangeiro. Não evitou a saída de estudantes para Oxford, Paris, Salamanca ou Bolonha, nem a qualidade dos seus professores jamais atraiu estudantes estrangeiros. O corpo docente nunca excedeu umas vinte pessoas, limitando-se a cinco lentes nos começos do século XIV. Para fins locais, contudo, a Universidade revelou-se indubitavelmente útil, preparando alguns clérigos de melhor qualidade, advogados, notários e uns quantos médicos”.

Joaquim de Carvalho, em *Instituições de Cultura – Período Medieval* (incluído no vol. III de *Obra Completa*, pp. 147–148), diz que “foi um perfeito “estudo geral” o que D. Dinis fundou em 1 de Março de 1290, por um diploma, revelado em 1912 pelo eminente Professor Dr. António de Vasconcelos”.

“[...] Anteriormente à publicação deste diploma conheciam-se dois documentos relativos à origem da Universidade portuguesa: a carta em la-

tim, datada de Montemor-O-Novo, de 12 de Novembro de 1288, dirigida ao papa pelo abade de Alcobaça, pelos priores de Santa Cruz de Coimbra, de S. Vicente de Lisboa, de Guimarães e de Alcáçova de Santarém, e por vinte e dois reitores de diversas igrejas, na qual se formula o intento de criar um Estudo Geral, e a bula de Nicolau IV, datada de Orvieto a 9 de Agosto de 1290, dirigida já à “Universidade dos mestres e escolares de Lisboa”.

Estes documentos não eram concordes. Pela carta, os prelados e reitores, depois de alegarem que haviam conferenciado com el-rei D. Dinis “rogando-lhe encarecidamente se dignasse de fazer ordenar um Estudo Geral na sua nobilíssima cidade de Lisboa” e de terem assentado entre si o provimento do salário dos mestres e doutores, taxando logo o que cada igreja e mosteiro havia de contribuir, suplicavam do Pontífice a aprovação e “confirmação de uma obra tão pia e louvável”.

[...] Pela bula, expedida dois anos depois desta súplica, o Estudo Geral de Lisboa é considerado já como fundado pelos cuidados e louvável providência de D. Dinis [...], a ponto de o Pontífice se dirigir à “Universidade dos mestres e escolares de Lisboa”.

[...] Daqui a discordância dos historiadores, afirmando uns que a Universidade fora fundada por influência e a pedido do clero, e julgando outros que a acção deste se limitou a solicitar a confirmação da aplicação das rendas eclesiásticas e, dissentindo todos sobre o ano do seu estabelecimento.

A publicação do diploma de D. Dinis resolveu definitivamente estas dúvidas. Quanto ao tempo, indica irrefragavelmente a data de 1 de Março de 1290; e quanto à iniciativa da fundação, reivindica-a o rei, reivindicação que o pontífice indirectamente confirma, pois considera o Estudo Geral de Lisboa fundado e funcionando”.

No livro de Jaime Cortesão, *Os Factores Democráticos na Formação de Portugal* (vol. I das *Obras Completas*, Livros Horizonte, 3ª edição 1978, p. 177), diz-se que a Universidade foi fundada em 1293. Trata-se certamente de uma “gralha”.

2) Em [24], vol. II, p. 118, pode ler-se:

“[...] em 1628 ou 1629, surgira uma revolta popular na cidade do Porto. Com efeito, em Abril de um desses anos (1628 segundo Agostinho Rebelo da Costa, autor da *Descrição Topográfica e Histórica da Cidade do Porto*, obra de 1788, mas 1629 segundo Manuel Severim de Faria, contemporâneo desses sucessos), o Real Conselho de Estado enviou de Madrid o secretário desse Conselho, Francisco de Lucena, que se hospedou no Convento de S. Francisco. Porém começou a correr entre “a gente vulgar” (diz Severim de Faria, esclarecendo Rebelo da Costa, que foram “regateiras e outras mulheres semelhantes”, a que depois se juntou um número igual de marujos) que esta autoridade vinha lançar novos tributos, incluindo até sobre as *maçarocas*. E tendo encontrado Francisco de Lucena, a multidão descarregou sobre ele “uma nuvem de pedras”. Acorreu o juiz de

fora, que não conseguiu dominar o motim, pelo que foi chamada uma companhia de soldados; todavia, Lucena, receoso, resolveu não prosseguir com a sua missão, pelo que, depois de se refugiar no Convento da Serra, retornou a Madrid, embora a nobreza e senado lhe assegurassem que poderia continuar com as suas diligências porque a situação estava dominada. Depois o bispo, o presidente do Conselho de Estado e o conde de Miranda pediram a Filipe III que perdoasse, visto o motim haver sido provocado por “mulheres de ínfima plebe”, e o caso encerrou-se sem represálias”.

BIBLIOGRAFIA

- [1] LUÍS DE ALBUQUERQUE – *O Primeiro Livro de Aritmética Impresso em Portugal*, incluído em “Para a História da Ciência em Portugal”, Livros Horizonte, Lisboa, 1973.
- [2] LUÍS DE ALBUQUERQUE – *Sobre a História da Ciência em Portugal*, incluído em “Crónicas de História de Portugal”, Lisboa, 1987.
- [3] LUÍS DE ALBUQUERQUE – *O Ensino da Matemática na Reforma Pombalina*, *Gazeta de Matemática*, nº 34 (1947), 3–6.
- [4] FRANCISCO GOMES TEIXEIRA – *História das Matemáticas em Portugal*, Academia das Ciências de Lisboa, Biblioteca de Altos Estudos, Lisboa, 1934.
- [5] FRANCISCO GOMES TEIXEIRA – *Elogio Histórico de Pedro Nunes*, incluído em “Panegíricos e Conferências”, pp. 1–83, Academia das Ciências de Lisboa, Coimbra, 1925.
- [6] PEDRO NUNES – *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, vol. VI das “Obras”, nova edição revista e anotada por uma comissão de sócios da Academia das Ciências de Lisboa, MCML.

[7] FRANCISCO DE BORJA GARÇÃO-STOCKLER - *Ensaio Histórico sobre a Origem e Progressos das Mathematicas em Portugal*, Officina de P.N. Rougeron, Paris, 1819.

[8] JOAQUIM DE CARVALHO - *Anotações Histórico-Bibliográficas* ao vol. VI das Obras de Pedro Nunes, "Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria", Academia das Ciências de Lisboa, MCML; incluído também no vol. V da "Obra Completa" de Joaquim de Carvalho, História e Críticas Literárias, História da Ciência (1925-1975), 589-659, Fundação Calouste Gulbenkian, Braga, 1987.

[9] JOAQUIM DE CARVALHO - *Livros de D. Manuel II*, incluído em "Obra Completa", vol. IV, História da Cultura (1948-1955), 425-532, Fundação Calouste Gulbenkian, Braga, 1983.

[10] JOAQUIM DE CARVALHO - *Instituições de Cultura - Século XVI*, incluído em "Obra Completa", vol. III, História da Cultura (1922-1948), 308-328, Fundação Calouste Gulbenkian, Braga, 1982.

[11] JOHN FAUVEL and JEREMY GRAY (editors) - *The History of Mathematics: A Reader*, MacMillan Education in association with THE OPEN UNIVERSITY, 1987.

[12] PEDRO JOSÉ DA CUNHA - *Bosquejo Histórico das Matemáticas em Portugal*, Exposição Portuguesa em Sevilha, Lisboa, 1929.

[13] RODOLFO GUIMARÃES - *Sur la vie et l'oeuvre de Pedro Nunes*, Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto, vol. IX (1914), 54-64, 96-117, 152-167, 210-227; vol. X (1915), 20-36.

[14] H. BOSMANS, S.J. - *L'Algèbre de Pedro Nuñez*, Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto, vol. III (1908), 222-271.

[15] RAFAEL BOMBELLI - *L'Algebra*, prima edizione integrale, Introduzione di U. Forti, Prefazione di E. Bortolotti, Fetrinelli Editore Milano, 1929.

[16] ALEXANDRE HERCULANO - *Da Eschola Polytechnica e do Collegio dos Nobres*, incluído em "Opúsculos", tomo VIII, 3ª ed., pp. 27-94, Livraria Bertrand, Lisboa.

[17] RÓMULO DE CARVALHO - *História do Ensino em Portugal desde a fundação da Nacionalidade até ao fim do regime de Salazar-Caetano*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1986.

[18] HUGO RIBEIRO - *Actuação de António Aniceto Monteiro em Lisboa, entre 1939 e 1942*, Portugaliae Mathematica, vol. 39 (1980), V-VII.

[19] JAIME CORTESÃO - *Alexandre Gusmão e o Tratado de Madrid*, 2 vol., primeiramente publicados no Rio de Janeiro, em 1952 e 1956; reedição Livros Horizonte, Lisboa, 1984.

[20] VITORINO MAGALHÃES GODINHO - *Estrutura da Antiga Sociedade Portuguesa*, 3ª ed., Coleção Temas Portugueses, Editora Arcádia, 1977.

[21] JOSÉ HERMANO SARAIVA - *História Concisa de Portugal*, Coleção Saber, Publicações Europa-América, Mira Sintra-Mem Martins, 1978.

[22] JOSÉ RAMOS TINHORÃO - *Os Negros em Portugal, Uma Presença Silenciosa*, Editorial Caminho, Coleção Universitária, Lisboa, 1988.

[23] ANTÓNIO BAIÃO - *Episódios Dramáticos da Inquisição Portuguesa*, vol. I e II, 3ª ed., Coleção Seara Nova, 1972 e 1973.

[24] ARMANDO CASTRO - *Lições de História de Portugal*, vol. I e II, Biblioteca Universidade Popular, Editorial Caminho, Lisboa, 1982 e 1983.

[25] A.H. OLIVEIRA MARQUES - *História de Portugal*, vol. I (12ª ed., 1985), vol. II (10ª ed., 1984), vol. III (2ª ed., 1981), Palas Editores, Lisboa.

[26] ANTÓNIO JOSÉ SARAIVA - *Inquisição e Cristãos-Novos*, Coleção Civilização Portuguesa, Editorial Inova, Porto, 1969.

Sobre a obra lógica de José Sebastião e Silva

por *António Marques Fernandes*

José Sebastião e Silva foi um dos mais proeminentes matemáticos portugueses de todos os tempos. Nasceu a 12 de Dezembro de 1914 em Mértola, no Alentejo. Licenciou-se em matemática no ano de 1937 na Faculdade de Ciências de Lisboa e foi sempre com grande brilhantismo que evoluiu na sua carreira, quer enquanto estudante quer posteriormente. É fundamentalmente conhecido pelos seus trabalhos no domínio da Análise Funcional onde se encontram importantes contribuições suas. No entanto, o primeiro grande trabalho de Sebastião e Silva situou-se num plano diverso daquele e pode encontrar-se na sua tese inédita "*Para uma teoria geral dos homomorfismos*", trabalho elaborado em 1944 em Roma. É sem dúvida uma exposição rica em ideias e também profícua em novas direcções de pesquisa. Trata-se de uma incursão nos domínios da Lógica Matemática que resulta, numa parte, de uma preocupação unificadora traduzida na procura de uma base comum de ramos da própria matemática, que até então eram encarados como fundamentalmente distintos; de uma outra parte no reconhecimento de que uma qualquer "*estrutura*" possui uma "*geometria*", procurando então saber se uma vez dada essa "*geometria*" poderemos recuperar a "*es-*

trutura" em si. Quanto à preocupação unificadora é importante não a confundir com algumas tentativas frustradas de reduzir a matemática à lógica (nas palavras de J.S. e Silva, à *Mathematica Universalis*) pois a existência de paradoxos quer sintáticos quer semânticos, já então impossibilitavam uma tal tarefa e Sebastião e Silva sabia-o bem. O que ele procurava era um conjunto de proposições de grande generalidade. Se quisermos agora esclarecer aquilo que deve ser entendido por "*geometria*" de uma "*estrutura matemática*" teremos de fazer algumas considerações preliminares que serão no entanto heurísticas na sua forma. Começemos com a seguinte:

Consideração 1: (Linguagem) Uma linguagem é em larga medida um conjunto de símbolos que se agrupam de determinada forma de modo a transmitir ideias num processo comunicativo. Uma linguagem como o português insere-se numa classe de linguagens ditas *naturais*. Tais linguagens não são contudo livres de contradição, isto é, podemos formular nelas juízos contraditórios. Assim nasceu a necessidade de, pelo menos, isolar algumas linguagens capazes de serem utilizadas em matemática, já que para isso temos

que banir qualquer possibilidade de contradição. Embora não exista uma noção geral de linguagem matemática, existem contudo diversos exemplos de tais linguagens, mais ou menos estudados, sendo que aquele que é simultaneamente o mais estudado e o mais utilizado é o de linguagem de primeira ordem. Uma linguagem será então um conjunto de palavras que se formam a partir de alguns símbolos básicos utilizando algumas regras sintáticas; tais palavras destinam-se a terem uma determinada interpretação, isto do ponto de vista semântico. À primeira vista uma linguagem matemática não seria muito diferente de uma linguagem natural, mas esta primeira vista olha para a gênese, para o processo formativo, e esse é essencialmente semelhante, no entanto quer a sintaxe quer a semântica de uma linguagem matemática encontram-se suficientemente enfraquecidas e remodeladas de modo a não encerrar as contradições típicas de uma linguagem natural. As palavras são fundamentalmente de dois tipos — termos e fórmulas — um termo é por exemplo a expressão $x + y$, já que quando substituimos as variáveis por elementos (por exemplo de \mathbf{N}) obtemos (feitas as contas) um elemento (de \mathbf{N} , neste caso); uma fórmula é, por outro lado, um juízo feito acerca de determinados elementos, por exemplo $\forall x (x \geq 0)$, que é verdadeira em \mathbf{N} mas é falsa em \mathbf{R} .

Consideração 2: (*Modelo de uma Linguagem*) Uma vez fixada uma sintaxe e uma semântica, de um modo geral especificamos uma determinada linguagem discriminando os seus símbolos básicos. Alguns desses símbolos são símbolos lógicos ($\sim, \forall, \exists, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, =$;

as variáveis) outros destinam-se a serem interpretados como relações (exemplos de relações são a relação binária “menor que” definida em \mathbf{N} ou a relação unária definida no mesmo conjunto “ x é par”) e podem por exemplo ser $R, \in, < \text{ ou } \geq$; outros destinam-se a serem interpretados como operações: $+, \otimes, \oslash, f$. Deste modo e já que todas as linguagens possuem os mesmos símbolos lógicos, identificamos uma determinada linguagem como o conjunto dos seus símbolos não lógicos. Consideremos então a seguinte linguagem $\mathcal{L} = \{f\}$ onde f é para ser interpretado como uma operação binária. \mathcal{M} diz-se um modelo de \mathcal{L} se $\mathcal{M} = (U, g)$, onde U é um certo conjunto e g é uma operação binária definida em U , isto é, $g : U \times U \rightarrow U$ é uma aplicação.

Esta noção de modelo de uma linguagem, pode ser considerada como uma especificação de um conceito ainda muito impreciso — o de estrutura matemática. De facto trata-se de um problema complexo e talvez mesmo insolúvel, aquele de definir o que deve ser entendido por estrutura matemática. No entanto e no que se segue quando se falar de estrutura matemática isso deve ser entendido como sinónimo de modelo de uma certa linguagem.

Consideração 3: (*Automorfismo*) Consideremos uma linguagem

$$\mathcal{L} = \{f_1, \dots, f_n, R_1, \dots, R_m\},$$

onde os f_i se destinam a ser interpretados como operações de ordem p_i e os R_j se destinam a ser interpretados como relações de ordem q_j (para simplificar diremos que uma relação R definida num conjunto X é de ordem $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, se R for um

subconjunto de X^n). Consideremos um modelo $M = (X; g_1, \dots, g_n, T_1, \dots, T_m)$ da linguagem anterior, onde:

$$(1) \quad g_i: X^{p_i} \rightarrow X$$

são aplicações e:

$$(2) \quad T_j \subseteq X^{q_j};$$

então uma aplicação $\sigma: X \rightarrow X$ que seja bijectiva, diz-se um automorfismo de M se:

$$\forall i \leq n \quad \forall a_1, \dots, a_{p_i} \in X$$

$$\sigma(g_i(a_1, \dots, a_{p_i})) = g_i(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_{p_i}))$$

e:

$$\forall j \leq m \quad \forall a_1, \dots, a_{q_j} \in X$$

$$(a_1, \dots, a_{q_j}) \in T_j \text{ sse } (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_{q_j})) \in T_j.$$

Um automorfismo é por assim dizer uma reorganização dos elementos, de tal modo que os elementos permutados desempenham relativamente à estrutura o mesmo papel.

Consideração 4: (Definibilidade)

Esta noção é muito importante em todo o processo matemático. Se pensarmos numa certa estrutura $M = (U; \dots)$ modelo de uma certa linguagem \mathcal{L} e numa certa operação ou relação definida sobre U , pode acontecer que uma ou outra possa ser descrita por meio de palavras da própria linguagem \mathcal{L} . Por exemplo se considerarmos uma linguagem com um único símbolo que se destina a ser interpretado por uma operação binária, então $(\mathbb{N}, +)$ onde “+” é a operação de adição em \mathbb{N} , é um modelo dessa linguagem. Consideremos agora a relação binária definida em \mathbb{N} do seguinte modo:

$$T = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2: a < b\},$$

onde “<” é a ordem usual de \mathbb{N} . Temos que $(a, b) \in T$ se e só se $\exists t (a+t=b \wedge t \neq 0)$ e esta última expressão é uma fórmula de \mathcal{L} . Sempre que isto acontece dizemos que a operação ou relação em causa é \mathcal{L} -definível.



Voltando ao trabalho de Sebastião e Silva, podemos agora descrever aquilo que deve ser entendido como “geometria” de uma determinada estrutura matemática M . Para ele essa “geometria” residia no conjunto das propriedades dessa estrutura (isto deve ser entendido como as relações definidas sobre essa estrutura) que ficavam invariantes para os seus automorfismos (se T é uma relação de ordem n definida sobre X onde $M = (X; \dots)$, se $(a_1, \dots, a_n) \in X^n$ e se σ é um automorfismo de M então T diz-se invariante para σ se qualquer que seja aquele (a_1, \dots, a_n) se tem que $(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \in T$ se e só se $(a_1, \dots, a_n) \in T$).

A investigação de Sebastião e Silva passou então a orientar-se no sentido de caracterizar essa geometria. Ao longo do seu trabalho obtém uma generalização da teo-

ria de Galois e introduz um conceito de definibilidade mais geral do que o anteriormente mencionado, obtendo por esta via as ferramentas necessárias para alcançar aquele que é talvez o maior objectivo da tese, o teorema seguinte:

Teorema. *Dada uma linguagem \mathcal{L} e um seu modelo M , a geometria de M é constituída pelas relações \mathcal{L} -definíveis.*

Impõem-se algumas chamadas de atenção:

- 1) Em primeiro lugar a linguagem que Sebastião e Silva utiliza é uma linguagem particular, pelo que ele não resolveu o problema em geral, mas apenas num caso concreto.
- 2) A resolução do problema para outras linguagens encontra-se portanto em aberto. Existem pelo menos indícios de que a sua resolução depende não apenas da linguagem, mas da própria estrutura.

Uma outra questão levantada pelo próprio Sebastião e Silva e que está ainda intimamente relacionada com as considerações anteriores é a seguinte: dado um grupo de transformações bijectivas de um conjunto U saber como e quando é possível construir um modelo $M = (U; \dots)$ de uma determinada linguagem \mathcal{L} , de tal modo que o conjunto de transformações previamente dado seja o grupo de automorfismos de M . Aqui está um problema delicado e de difícil resolução, como aliás é reconhecido pelo próprio Sebastião e Silva.

A tese inédita termina com algumas considerações de ordem filosófica que dizem essencialmente respeito, por um lado aos objectivos da própria matemática que na opinião do próprio Sebastião e Silva

deve ser um jogo imaginativo que não pode perder de vista a própria realidade, por outro lado ao método da matemática que ele defende dever ser o mais construtivo possível, mas não apenas isso, isto é, devemos tomar como válidos, métodos que transcendem o construtível no caminho para alcançar a "verdade matemática".

Uma última palavra para o conteúdo da tese inédita, que como já foi referido é do ponto de vista científico muito rica, até pelos problemas que deixa em aberto. Mas uma riqueza igualmente grande pode ainda ser encontrada do ponto de vista pedagógico, já que não é vulgar que uma obra que aborde assuntos desta ordem os exponha de forma tão intuitiva e inteligível.

Por todos estes motivos a "Tese inédita" é sem dúvida um trabalho que deve ser lido e estudado.

BIBLIOGRAFIA

[1] JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA - *Para uma Teoria Geral dos Homomorfismos*, trabalho escrito em Roma em 1944 e mantido inédito até à sua publicação em Portugal pelo Instituto Nacional de Investigação Científica, em 1985, nas "Obras de José Sebastião e Silva", Vol. I, pp. 133-363.

[2] JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA - *Sugli Automorfismi di un Sistema Matematico Qualunque*, Pontificia Accademia Scientiarum, Commentationes, Vol. IX, N^o 9, memória apresentada em 1945. Este trabalho foi traduzido para inglês e apresentado por A.J. Franco de Oliveira sob o título "On Automorphisms of Arbitrary Mathematical Systems", na revista *History and Philosophy of Logic*, 6, 1985.

[3] NATHAN JACOBSON - *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. III, Van Nostrand Company Inc., 1964.

PONTOS DE EXAME

ENSINO SECUNDÁRIO

12^o Ano de Escolaridade -
- Via de Ensino
(1^o, 2^o e 5^o cursos)

1^a fase; 1^a chamada - 1989
(Duração da prova: 1h 30m)

I

1. Prove que (\mathbf{R}, θ) é semigrupo, sendo \mathbf{R} algebrizado pela operação θ definida por $a \theta b = a \cdot |b|$ (\cdot multiplicação usual em \mathbf{R}).

2. Averigue se o semigrupo referido em 1. é comutativo.

3. Sendo $\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{R} : |x^2 - 3| \geq 3\}$ e \mathbf{B} o conjunto dos termos da sucessão de termo geral $u_n = \operatorname{tg}(4n + 1) \frac{\pi}{4}$, determine o conjunto dos pontos fronteiros de $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$.

II

1. Designando por \bar{z} o conjugado do número complexo z , represente graficamente (diagrama de Argand) o conjunto definido pela condição

$$z \bar{z} \leq \left| \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \right| \wedge \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4} .$$

2. Considere o número complexo $z = \operatorname{cis} \alpha$, com $\alpha \in]0, \pi[$. Mostre que

$$|z - 1| = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} .$$

III

Calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n+3} \right)^{\frac{n+2}{5}} .$$

IV

Considere a função f , real de variável real, definida por

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x - 1 .$$

1. Prove que existe pelo menos um número real α , do intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, tal que $\alpha + \operatorname{sen} \alpha = 1$.

2. Calcule, a partir da definição, a derivada de $f(2x)$ no ponto 0.

V

Resolva a equação

$$\log 5 + \log(x+1) = \log(9x-3) - \log(x-1) .$$

Parte de opção

(Responder a uma e só uma das questões A ou B)

A

1. Estabeleça uma das fórmulas de transformação em produtos da soma ou da diferença de dois senos ou de dois co-senos.

2. Como aplicação das fórmulas referidas em 1., resolva, em \mathbf{R} , a equação

$$\cos(2x) + \cos(6x) = \sin(3x) - \sin(5x).$$

B

1. Determine as assíntotas do gráfico da função definida por

$$y = x + \arctg x \quad \left(\arctg x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right).$$

2. Prove que

“Se o gráfico de uma função ímpar tem assíntota para $x \rightarrow +\infty$, então tem assíntota para $x \rightarrow -\infty$, sendo iguais os respectivos declives e simétricas as ordenadas na origem.”

Resolução:

I.1. (\mathbf{R}, θ) constitui um grupóide, pois se $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $a \theta b = a \cdot |b| \in \mathbf{R}$. A propriedade associativa é verificada já que

$$\begin{aligned} (a \theta b) \theta c &= (a \cdot |b|) \theta c = (a \cdot |b|) \cdot |c| = \\ &= a \cdot (|b| \cdot |c|) = a \cdot (|b \cdot c|) = \\ &= a \theta (b \theta c). \end{aligned}$$

Logo (\mathbf{R}, θ) é um semigrupo.

I.2. $a \theta b = b \theta a \Leftrightarrow a \cdot |b| = b \cdot |a|$, relação que não é válida, por exemplo, para $a = 1$ e $b = -1$.

I.3. Dizer que $x \in A$, equivale a ter $x^2 - 3 \geq 3$ ou $x^2 - 3 \leq -3$, ou seja, $x^2 \geq 6$ ou $x^2 \leq 0$. Logo

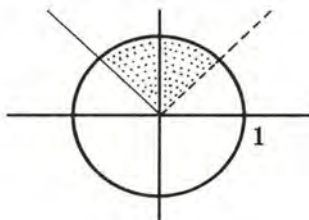
$$\mathbf{A} =]-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, +\infty[\cup \{0\}.$$

Por outro lado, para cada número natural, n , $u_n = \operatorname{tg}(\pi + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Assim,

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} =]-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, +\infty[\cup \{0, 1\}$$

e o conjunto dos seus pontos fronteiros é dado por $\{-\sqrt{6}, 0, 1, \sqrt{6}\}$.

II.1. A condição $z \bar{z} \leq |\operatorname{cis} \frac{\pi}{4}|$ equivale a $|z|^2 \leq 1$. Logo o conjunto que a condição dada define é constituído pelos pontos do círculo de raio 1 e centro em $(0, 0)$, do plano complexo, cujo argumento é maior que $\frac{\pi}{4}$ e menor ou igual que $\frac{3\pi}{4}$, representado na figura:



II.2. Com $z = \operatorname{cis} \alpha$,

$$\begin{aligned} |z - 1|^2 &= |(\cos \alpha - 1) + i \operatorname{sen} \alpha|^2 = \\ &= \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1 + \operatorname{sen}^2 \alpha = \\ &= 2(1 - \cos \alpha) \quad (\alpha \in]0, \pi]). \end{aligned}$$

Por outro lado, $1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$ o que implica que $|z - 1|^2 = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$. Logo $|z - 1| = 2 |\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}| = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, pois $\frac{\alpha}{2}$ é um ângulo do primeiro quadrante.

III. Tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+3} \right)^{\frac{n+2}{5}} &= \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+3} \right)^{n+3} \cdot \left(1 + \frac{-2}{n+3} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{5}} = \\ &= (e^{-2} \cdot 1)^{\frac{1}{5}} = e^{-\frac{2}{5}}. \end{aligned}$$

IV.1. Como $f(0) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, temos que $f(0) f(\frac{\pi}{2}) < 0$. Logo existe pelo menos um real $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tal que $f(\alpha) = 0$, conforme o pretendido.

IV.2. Seja $g(x) = f(2x)$. Temos que

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin 2x}{x} = \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

V. Se x satisfaz a equação dada, então necessariamente $\log 5(x+1) = \log\left(\frac{9x-3}{x-1}\right)$, ou seja, $5(x^2 - 1) = 9x - 3$. Resolvendo esta equação do segundo grau, obtemos como raízes 2 e $-\frac{1}{10}$. Há que ver agora se estes valores pertencem ao domínio das funções envolvidas na equação. Como $9(-\frac{1}{10}) - 3 < 0$ e $-\frac{1}{10} - 1 < 0$, concluímos que $-\frac{1}{10}$ não pode ser solução da equação. Para o valor 2, tais entraves não se verificam, pelo que $x = 2$ é a única solução que a equação tem.

VI.A.1. De

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

e

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

obtemos, adicionando termo a termo,

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cdot \cos b.$$

Assim, se a e b forem soluções do sistema

$$\begin{cases} a + b = \alpha \\ a - b = \beta, \end{cases}$$

concluímos que

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Para a diferença obteríamos

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2},$$

procedendo analogamente. O mesmo se passa para a soma e diferença de dois cosenos, a partir das fórmulas correspondentes para o coseno da soma e da diferença de dois ângulos, obtendo-se então, respectivamente,

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

e

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

VI.A.2.

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos 6x &= \sin 3x - \sin 5x \iff \\ 2 \cos 4x \cos(-2x) &= 2 \sin(-x) \cos 4x \iff \\ 2 \cos 4x (\cos 2x + \sin x) &= 0 \iff \\ 2 \cos 4x (1 - 2 \sin^2 x + \sin x) &= 0. \end{aligned}$$

Ora,

$$\cos 4x = 0 \iff x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

No que respeita à equação $-2 \sin^2 x + \sin x + 1 = 0$, concluímos, pela resolução de uma equação do segundo grau, que x deverá satisfazer $\sin x = 1$ ou $\sin x = -\frac{1}{2}$. Logo para além dos indicados acima, x poderá assumir os valores $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ou $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

VI.B.1. Como

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2} (x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = +\infty,$$

as rectas dadas por $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$, constituem as assíntotas verticais. Atendendo a que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \pm\infty,$$

concluimos não existirem assíntotas horizontais. No que respeita às assíntotas oblíquas, se existirem, elas são da forma $y = mx + b$, onde

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx).$$

Ora,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \operatorname{arc\,tg} x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + \operatorname{arc\,tg} x}{x}\right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \operatorname{arc\,tg} x - x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Logo, $y = x + \frac{\pi}{2}$ e $y = x - \frac{\pi}{2}$ constituem as assíntotas oblíquas do gráfico da função.

VI.B.2. Sendo $f(-x) = -f(x)$ temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

e com

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(-x) + mx) =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = -b,$$

donde se conclui facilmente o requerido.

(Resolução de *Maria Edite do Rosário*)

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Análise Matemática I

Exame final - 2ª época - 1988

1. Sendo $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{x}$ para cada $x \neq 0$,

a) estude a função do ponto de vista da continuidade e da diferenciabilidade;

b) calcule os limites de f e f' nos pontos $+\infty$ e $-\infty$ e os limites laterais das mesmas funções no ponto 0;

c) estude o sinal dos valores de f , f' e f'' em todos os pontos em que estas funções estão definidas;

d) determine uma equação da tangente ao gráfico de f no seu ponto de inflexão;

e) esboce o gráfico da função f .

2.1. Determine os pontos em que convergem, absoluta e simplesmente, as séries de potências:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} x^n;$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n (x+2)^n.$

2.2. Desenvolva em série de Mac-Laurin a função $\log(1 + \frac{1}{x+1})$ e indique o "maior" intervalo aberto em que a série representa a função.

2.3. Estude, quanto à convergência pontual no intervalo $[0, +\infty[$, a sucessão de funções $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$. Será a convergência uniforme nesse intervalo? E em $[1, +\infty[$?

3.1. Sendo $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ uma função contínua limitada, indique, justificando

- a) os limites nos pontos $+\infty$ e $-\infty$ da função f , definida por:

$$f(x) = x^3 + \frac{\varphi(x)}{1 + |x|};$$

- b) o contradomínio da função f .

3.2. Sendo $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ uma função duas vezes diferenciável em \mathbf{R} e $g(x) = f(x \operatorname{sen} x)$

- a) calcule $g'(x)$ e $g''(x)$, expressos em função de derivadas de f em pontos convenientes;
 b) supondo $f'(0) > 0$, justifique que g tem um extremo no ponto 0; máximo ou mínimo?

3.3. Sendo $\varphi:]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ uma função diferenciável verificando a condição $\varphi(n) = \varphi(n+1)$ para cada inteiro positivo n ,

- a) Quantas raízes tem a equação $\varphi'(x) = 0$?
 b) Se existir o $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x)$, qual será o seu valor?

4. Sendo f e g funções uniformemente contínuas,

- a) prove que a soma, $f + g$, é uma função uniformemente contínua;
 b) prove que se f e g são limitadas, o produto $f g$ é uma função uniformemente contínua;
 c) mostre, por meio de um exemplo, que se f ou g não forem limitadas, a função $f g$ poderá não ser uniformemente contínua.

Resolução:

1.a) f é diferenciável — e portanto contínua — em cada ponto do seu domínio, $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (no ponto 0 tem uma descontinuidade de 1ª espécie).

- b) Como

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} = 1,$$

é

$$f(+\infty) = f(-\infty) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Por outro lado, de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = -\infty$, decorre $f(0^+) = \frac{\pi}{2}$, $f(0^-) = -\frac{\pi}{2}$. Para $f'(x) = -\frac{1}{2x^2+2x+1}$ ($x \neq 0$) vem $f'(+\infty) = f'(-\infty) = 0$ e $f'(0^+) = f'(0^-) = -1$.

c) O sinal de $f(x)$ é o de $\frac{x+1}{x}$: a função é positiva em $] -\infty, -1[\cup] 0, +\infty[$, nula no ponto -1 e negativa em $] -1, 0[$; como $2x^2 + 2x + 1 > 0$ para qualquer $x \in \mathbf{R}$, é $f'(x) < 0$ para qualquer $x \neq 0$. Quanto a

$$f''(x) = \frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2} \quad (\text{para } x \neq 0),$$

o seu sinal é o de $4x+2$:

$$f''(x) > 0 \quad \text{em }]-\frac{1}{2}, 0[\cup] 0, +\infty[,$$

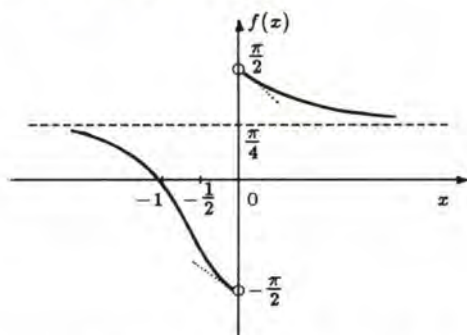
$$f''(-\frac{1}{2}) = 0,$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{em }]-\infty, -\frac{1}{2}[.$$

d) O gráfico de f tem uma inflexão no ponto $-\frac{1}{2}$; como $f'(-\frac{1}{2}) = -2$, uma equação da tangente ao gráfico no ponto com essa abscissa é:

$$y + \frac{\pi}{4} = -2 \left(x + \frac{1}{2} \right).$$

e) Gráfico (ver figura).



2.1.a) O raio de convergência da série

é

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{\log n}{\log(n+1)} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\log n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1; \end{aligned}$$

há, portanto, convergência absoluta para $|x| < 1$, divergência para $|x| > 1$. Para $x = 1$, atendendo a que $\frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$ para $n \geq 3$ e à divergência da série harmônica, pode concluir-se que a série diverge. Para $x = -1$ trata-se de uma série alternada, cujo termo de ordem n tende para zero; como a condição

$$\frac{\log n}{n} > \frac{\log(n+1)}{n+1}$$

é equivalente a $\log n^{n+1} > \log(n+1)^n$ e portanto também a $n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (desigualdade certamente verificada a partir de alguma ordem, visto que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge para e), pode concluir-se, pelo critério de Leibnitz, que a série converge (convergência simples, dada a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$).

b) O raio de convergência da série é $r = 1/\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1}\right) = 2$; a série é absolutamente convergente se $|x+2| < 2$, divergente se $|x+2| > 2$. Para $x = 0$ ou $x = -4$ o módulo do termo de ordem n é superior a 1, não podendo portanto convergir para zero: a série diverge em ambos os extremos do seu intervalo de convergência.

2.2. A condição $1 + \frac{1}{x+1} > 0$ equivale a $x > -1$ ou $x < -2$; segue-se que, se a função dada for igual à soma da sua série de Mac-Laurin num intervalo $] -r, r[$, se terá necessariamente $r \leq 1$ (vamos ver que essa igualdade se verifica em $] -1, 1[$, sendo portanto este o "maior" intervalo aberto em que a série representa a função). Para $x > -1$ é

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) = \\ &= \log(x+2) - \log(x+1) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} - \frac{1}{1+x}$$

Como, para $|x| < 1$, se tem:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

e para $|x| < 2$

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n},$$

vem, para $|x| < 1$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n.$$

Primitivando e atendendo a que $f(0) = \log 2$, obtém-se:

$$f(x) = \log 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right) x^{n+1}$$

($|x| < 1$). Pode observar-se que, no ponto 1, a soma da série ainda é igual ao valor da função.

2.3. A sucessão converge pontualmente em $[0, +\infty[$ para a função:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

como se verifica imediatamente. A convergência não pode ser uniforme nesse intervalo, visto que as funções f_n são contínuas em $[0, +\infty[$ e f é descontínua no ponto 0.

Sendo $\delta > 0$ arbitrário e $x \in [1, +\infty[$, a condição:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+nx} < \delta,$$

equivalente a $nx > \frac{1}{\delta} - 1$, será certamente verificada desde que seja $n > \frac{1}{\delta} - 1$. Pode portanto concluir-se que a convergência é uniforme em $[1, +\infty[$.

3.1.a) Sendo φ limitada e k um número real tal que $|\varphi(x)| \leq k$ para qualquer $x \in \mathbf{R}$, ter-se-á

$$\left| \frac{\varphi(x)}{1+|x|} \right| \leq \frac{k}{1+|x|},$$

e portanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\varphi(x)}{1+|x|} = 0.$$

Dai resulta imediatamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

b) A função é contínua, como logo se reconhece atendendo a que φ é contínua, por hipótese; nestas condições, assumindo f valores — tanto positivos como negativos — de módulo arbitrariamente grande (como decorre da alínea anterior) o teorema do valor intermédio permite concluir facilmente que $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

3.2.a)

$$g'(x) = f'(x \sin x) (\sin x + x \cos x),$$

$$g''(x) = f''(x \sin x) (\sin x + x \cos x)^2 + f'(x \sin x) (2 \cos x - x \sin x).$$

b) Como $g'(0) = 0$, $g''(0) = 2 f'(0) > 0$, a função g tem um mínimo no ponto 0.

3.3.a) De acordo com o teorema de Rolle, em cada intervalo $]n, n+1[$ deve existir pelo menos um ponto em que φ' se anule; a equação $\varphi'(x) = 0$ tem, portanto, infinitas raízes.

b) Designando por x_n um ponto do intervalo $]n, n+1[$ que verifique $\varphi'(x_n) = 0$, deverá ter-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'(x_n) = 0$ e também $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'(x_n) = \alpha$ se for $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = \alpha$. Assim, se este último limite existir, terá de ser igual a zero.

4.a) Dado $\delta > 0$, determinem-se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que, para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}$, se tenha

$$|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{2}$$

e

$$|x - y| < \beta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\delta}{2}.$$

Sendo $\varepsilon = \min\{\alpha, \beta\}$ e $|x - y| < \varepsilon$, ter-se-á:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &\leq \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \delta. \end{aligned}$$

b) Suponha-se $|f(x)| < M$ e $|g(x)| < N$ para qualquer $x \in \mathbf{R}$. Dado $\delta > 0$, determinem-se números positivos α e β por forma que, para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}$:

$$|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{2N}$$

e

$$|x - y| < \beta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\delta}{2M}.$$

Com $\varepsilon = \min\{\alpha, \beta\}$ e $|x - y| < \varepsilon$ ter-se-á:

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(y)| &\leq \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y) + \\ &\quad + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + \\ &\quad + |f(x) - f(y)||g(y)| < \\ &< \delta. \end{aligned}$$

c) Serve de exemplo o produto fg , com $f(x) = x$ e $g(x) = \sin 2\pi x$. Reconhece-se imediatamente que f e g são uniformemente contínuas em \mathbf{R} e que só g é limitada; para ver que fg não é uniformemente contínua basta observar que, com $x_n = n + \frac{1}{n}$ e $y_n = n$, se tem $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ e

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [(fg)(x_n) - (fg)(y_n)] &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{2\pi}{n} \right) = 2\pi. \end{aligned}$$

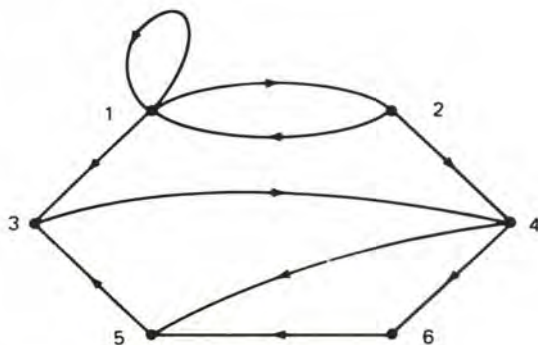
(Resolução de Jaime Campos Ferreira)

UNIV. DA BEIRA INTERIOR-COVILHÃ

Algoritmos(*)

Exame Final - 1987/88

1. O grafo direccionado



pode ser representado pela sua matriz de adjacência A tal que $A[I; J]$ é 1 sse houver um "caminho" do nó I para o nó J :

A					
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

(*) Nota: Na disciplina de Algoritmos, do 4º ano da licenciatura em Matemática/Informática da Universidade da Beira Interior em 1987/88 foi usada a linguagem APL, não como metodologia de programação mas como veículo de expressão algorítmica. Os pontos de exame reflectem esta escolha. Uma excelente referência bibliográfica é a lição proferida aquando da atribuição do Prémio Turing a Kenneth E. Iverson: Notation as a tool of thought, *Communications of the Association for Computing Machinery*, Vol. 23, pp. 444-465, August 1980.

- a) Calcule $A \vee . \wedge A$;
 b) Mostre que o produto interno de a) representa os "caminhos" de I para J com 2 percursos, isto é, toma o valor 1 sse existir um K tal que $A[I; K] \leftrightarrow A[K; J] \leftrightarrow 1$.

2. Prove que com ω vector de elementos numéricos todos distintos se verifica a identidade $\Delta\omega \leftrightarrow \phi\nabla\omega$.

Mostre com um exemplo que a identidade não se verifica no caso de haver elementos repetidos.

3. As diferentes maneiras de distribuir ω objectos distintos por $I = 1, 2, \dots, \omega$ células ordenadas constituem os números de Stirling do 2º tipo de ordem ω . Por exemplo, com $\omega \leftrightarrow 4$ e $I \leftrightarrow 2$ há 7 maneiras:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

Com $I \leftrightarrow 1$ só há 1 hipótese (todos os objectos na mesma célula) e analogamente com $I \leftrightarrow 4$ (todos os objectos em células distintas).

Por contagem directa obter-se-ia para $I \leftrightarrow 3$ o valor 6 de modo que os números de Sterling do 2º tipo e ordem 4 são $STE 4 \leftrightarrow 1761$.

O cálculo de $STE 5$ a partir de $STE 4$ (ou de uma ordem qualquer para a seguinte) é feito recursivamente multiplicando 0, $STE 4$ por 0, $\iota 4$, e o resultado rotado de uma componente e somado com o vector originário: $01761 + 1141840$.

Logo,

$STE 5$

1 15 25 10 1 .

Escreva uma função que calcule recursivamente $STE \omega$ para ω inteiro e positivo.

4. Uma matriz quadrada A diz-se equi-somável se:

i) Com $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} \geq 0$
 $(i, j = 1, \dots, n)$;

ii) $\sum_{i=1}^n a_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{kj}$ para $k = 1, \dots, n$;

iii) $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} = 1$.

Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 2/7 & 2/7 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1/7 \\ 1/7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é equi-somável. Estas matrizes desempenham um papel importante não só na teoria dos grafos como nos processos estocásticos com um número finito de estados.

Escreva uma função que aplicada a um quadro de ordem 2 tenha como resultado 1 se for uma matriz equi-somável e 0 no caso contrário.

5. Dum "texto" constituído por um vector de caracteres onde as "palavras" são separadas por um único carácter, por exemplo o espaço em branco, pretende-se construir a matriz das palavras, pela ordem das ocorrências, eventualmente preenchidas à direita por espaços.

Escreva expressões que permitam essa operação. Se essas expressões constituírem uma função *PALAVRAS* deverá ser, por exemplo:

$M \leftarrow$ PALAVRAS 'O ESFORÇO E GRANDE
E O HOMEM E PEQUENO'

M

O

ESFORÇO

E

GRANDE

E

O

HOMEM

E

PEQUENO

ρM

9 7 .

Ou, em notação APL, $\wedge /, \bar{1} \downarrow A < 1 \phi A$ ou ainda $A < . \geq 1 \phi A$.

Analogamente $B[1] > B[2] > \dots > B[\rho\omega]$ ou, em APL, $\wedge / \bar{1} \downarrow B > 1 \phi B$ ou $\wedge /, (B \circ . > B) = (\iota \rho B) \circ . > \iota \rho B$ ou ainda $B < . < 1 \phi B$.

Mas isso verifica-se sse $A[1] = B[\rho\omega]$, $A[2] = B[1 + \rho\omega]$, ..., $A[\rho\omega] = B[1]$ simultaneamente, logo $A = \phi B$ e isso sse

$$\omega[\Delta\omega] \leftrightarrow \phi\omega[\nabla\omega] \leftrightarrow \omega[\phi\nabla\omega]$$

e, como os elementos de ω são todos distintos é assim porque $\Delta\omega \leftrightarrow \phi\nabla\omega$.

3. Do enunciado sai imediatamente

$$STE : (0, R) + \omega \uparrow (\iota \rho R) \times R \leftarrow STE \omega - 1 \\ : \omega = 1 : \iota 1 .$$

4. Também do enunciado

$$EQUI : (1 = + /, \omega) \wedge \wedge / (+ / \omega) = + \neq \omega \\ : (\vee /, \omega < 0) \vee \neq / \rho \omega : 0 .$$

5. Uma hipótese é

$$Z \leftarrow MAT W; B; E; I \\ W \leftarrow (\sim W \square SS'') / W \\ W \leftarrow ('' = \bar{1} \uparrow W) \downarrow ('' = 1 \uparrow W) \downarrow W \\ B \leftarrow ('' = W \leftarrow ''', W, ''') \\ E \leftarrow \bar{1} + 1 \downarrow I - \bar{1} \phi I \leftarrow B / \iota \rho B \\ Z \leftarrow ((\rho E), \uparrow / E) \rho (, E \circ . \leq \iota / E) \setminus ('' \neq W) / W$$

(Resolução de J. Marques Henriques)

Resolução:

1. Quanto a a),

$$A \vee . \wedge A$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Para o cálculo podia ter-se em consideração que, para argumentos booleanos, $\vee . \wedge \leftrightarrow \lceil . \times$.

b) Para a demonstração bastaria notar que $(A \vee . \wedge A) [I; J] = 1 \leftrightarrow 1 = \vee / A [I;] \wedge A [; J] \leftrightarrow$ existir no vector booleano $A [I;] \wedge A [; J]$ pelo menos um 1 \leftrightarrow existir pelo menos um K tal que $1 = A [I; K] \wedge A [K; J] \leftrightarrow A [I; K] = 1 \wedge A [K; J] = 1$.

2. Com os elementos de ω todos distintos, fazendo $A \leftarrow \omega[\Delta\omega]$, $B \leftarrow \omega[\nabla\omega]$ e usando a notação matemática convencional tem-se:

$$A[1] < A[2] < \dots < A[\rho\omega] .$$

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Estatística

Exame final - 1ª chamada - 1990

I

(Nota: Para responder às diferentes questões, utilize os cálculos auxiliares constantes na observação final ao enunciado deste grupo)

Os seguintes dados referem-se a classificações obtidas por 10 estudantes num dado exame, ao seu Q.I. e ao nº de horas dispendidas na preparação do exame:

Classif. (y)	79	97	51	65	82	93	81	68	60	86
Q.I. (x_1)	112	126	111	109	112	121	120	113	111	124
Horas (x_2)	8	13	3	7	11	9	8	4	6	4

1. Construa um diagrama de extremos e quartis para as classificações obtidas por aquele grupo de estudantes.

2. Estime um modelo de regressão linear múltipla das classificações em função do Q.I. e das horas de estudo.

3. Considere o exame realizado por estudantes que possuem o mesmo Q.I.. Qual a variação esperada nas classificações por cada hora a mais de tempo de estudo?

4. Qual a nota que se prevê para um aluno com um Q.I. de 110 e com 6 horas de estudo? Indique a precisão da sua resposta.

5. Se lhe fosse pedido que escolhesse apenas um dos factores acima considerados (Q.I. ou horas) para explicar a classificação dos estudantes, qual escolheria e porquê? Escreva então a equação do modelo de regressão linear simples baseado nesse factor, fazendo os comentários que considerar adequados quanto ao uso desta equação de regressão em vez da obtida no ponto 2.

Observação: Cálculos auxiliares

Matriz de correlações

	y	x_1	x_2
y	1.000	0.808	0.708
x_1	0.808	1.000	0.361
x_2	0.708	0.361	1.000

Soma dos quadrados

Regressão	1675.7
Residual	289.9
Total	1965.6

Estimativas dos coeficientes de regressão

Constante	-115.7
x_1	1.516
x_2	2.214

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 762 \quad \sum_{i=1}^{10} x_{1i} = 1159 \quad \sum_{i=1}^{10} x_{2i} = 773$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 60030 \quad \sum_{i=1}^{10} x_{1i}^2 = 134673 \quad \sum_{i=1}^{10} x_{2i}^2 = 625$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i x_{1i} = 88981 \quad \sum_{i=1}^{10} y_i x_{2i} = 5864 \quad \sum_{i=1}^{10} x_{1i} x_{2i} = 8525.$$

II

1. A média e variância de uma primeira série de 15 observações são respectivamente:

$$\bar{x}_1 = 30, \quad s_1^2 = 25,$$

e a média e variância de uma segunda série de 20 observações são:

$$\bar{x}_2 = 40, \quad s_2^2 = 36.$$

Qual a média e a variância do conjunto das 35 observações?

2. Seja $p(x)$ uma distribuição de probabilidade para $x = 1, 2, \dots, n, \dots, 2n - 1$. Se $p(n+k) = p(n-k)$, mostre que:

a) $E(X) = n$;

b) Todos os momentos de ordem ímpar em torno do valor médio se anulam.

III

Um cultivador tem na sua cave duas categorias de vinhos engarrafados: garrafas de vinho tinto e garrafas de vinho branco.

Supõe-se que nesta cave só há vinhos de três anos (1968, 1969 e 1970) e que há o mesmo número de garrafas de cada ano.

A percentagem de garrafas de vinho tinto entre as engarrafadas em cada um daqueles anos (1968, 1969 e 1970) é de 70%, 50% e 90%, respectivamente.

1. Um ladrão leva uma garrafa ao acaso que verifica ser de vinho branco. Qual é a probabilidade de ter sido engarrafado em 1969?

2. Depois de ter provado o vinho branco, o referido ladrão achou que ele era muito bom. Decide então fazer nova 'visita' à cave com o objectivo de levar consigo pelo menos três garrafas de vinho branco. Considerando que a escolha é feita ao acaso, quantas garrafas deverá ele levar de modo a garantir a satisfação do seu desejo em pelo menos 60%.

IV

Um comerciante pretende adquirir frutos de um pomar A ou B. Como o peso dos frutos é factor preferencial, o comerciante toma uma amostra casual de 36 frutos em cada pomar escolhe aquele a que corresponde a amostra com maior peso médio. Se o peso dos frutos for normalmente distribuído, sendo

Pomar	Valor Médio (grs)	Desvio Padrão (grs)
A	20	2
B	18	5

com que probabilidade escolhe o comerciante o pomar B?

V

Numa experiência agronómica pretende-se avaliar o crescimento total das plantas (expresso em peso seco) relativamente a dois regimes de fertilização A e B.

Ao fim de determinado tempo procedeu-se a medições, tendo-se obtido os seguintes resultados:

A	5.44	5.36	5.60	6.46	6.75	6.03	4.15	4.44
B	5.12	3.80	4.96	6.43	5.03	5.08	3.22	4.42

1. Numa experiência anterior (com um elevado número de plantas da mesma cultivar) relativa ao tratamento A, obteve-se uma variância de 0.42. Verifique se os dados actuais são consistentes com esse valor. Diga, justificando, se haveria alguma(s) hipótese(s) necessária(s) à resolução do problema.

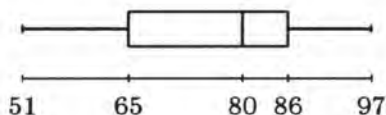
2. Verifique se os dois regimes de fertilização A e B evidenciam diferenças significativas no que respeita ao crescimento das plantas. Explícite e verifique as hipóteses necessárias à resolução do problema.

Resolução:

I

1. O que é necessário para a construção do diagrama de extremos e quartis:

- ordenação dos dados:
51 60 65 68 79 81 82 86 93 97;
- $x_{\min} = 51$, $x_{\max} = 97$;
- $\tilde{x} = \frac{x_{(6)} + x_{(6)}}{2} = 80$;
- $Q_1 = q_{0.25} = x_{(3)} = 65$;
- $Q_3 = q_{0.75} = x_{(8)} = 86$;



2. Por consulta dos cálculos auxiliares constantes na observação final do enunciado, obtém-se que o modelo de regressão linear múltipla é:

$$\hat{y} = -115.7 + 1.516 x_1 + 2.214 x_2 .$$

3. Considerando constante o Q.I., a variação esperada na resposta quando o nº de horas de estudo aumenta de uma unidade é dada pelo coeficiente de regressão associado a essa variável. Logo há um aumento esperado de 2.214 na classificação.

4.

$$y = -115.7 + 1.516 \times 110 + 2.214 \times 6 = 64.344 .$$

A resposta é dada com a precisão de

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT} = 0.8525 .$$

5. Escolheria Q.I. porque é o que apresenta um coeficiente de correlação com a variável resposta, mais elevado: $r_{x_1 y} = 0.808$

$$b = \frac{n \sum x_{1i} y_i - \sum x_{1i} \sum y_i}{n \sum x_{1i}^2 - (\sum x_{1i})^2} = 1.929 .$$

A equação é

$$\hat{y} = -147.3 + 1.929 x_1 ,$$

com $R^2 = 0.6529$, que é muito baixo.

Portanto ambos os factores (Q.I. e horas) têm de ser considerados na regressão.

II

1.

$$n_1 = 15, \quad \bar{x}_1 = 30, \quad s_1^2 = 25 ;$$

$$n_2 = 20, \quad \bar{x}_2 = 40, \quad s_2^2 = 36 .$$

Para o conjunto das $n = 35$ observações temos:

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{35} = 35.71 ,$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}{n - 1} .$$

Sendo assim é necessário calcular para a 1ª série de observações $\sum x_{1i}^2$ e para a 2ª série $\sum x_{2i}^2$. Então

$$s_1^2 = \frac{\sum x_{1i}^2 - n_1 \bar{x}_1^2}{n_1 - 1} \Rightarrow \sum x_{1i}^2 = 13850 ,$$

$$s_2^2 = \frac{\sum x_{2i}^2 - n_2 \bar{x}_2^2}{n_2 - 1} \Rightarrow \sum x_{2i}^2 = 32684 ,$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}{n - 1} = \\ &= \frac{(13850 + 32684) - 35 \times (35.71)^2}{34} = \\ &= 55.9370 . \end{aligned}$$

2. a)

$$E(X) = \sum_{x=1}^{2n-1} x p(x) =$$

$$\begin{aligned} &= 1 p(1) + 2 p(2) + \dots + (n-1) p(n-1) + \\ &+ n p(n) + (n+1) p(n+1) + \dots + \\ &+ (2n-1) p(2n-1) . \end{aligned}$$

Se $p(n-k) = p(n+k)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} E(X) &= 2np(1) + 2np(2) + \dots + \\ &\quad + 2np(n-1) + np(n) = \\ &= n \left[2p(1) + 2p(2) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + 2p(n-1) + p(n) \right] = \\ &= n \sum_{x=1}^{2n-1} p(x) = n. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mu^{2k+1} &= E[(X-n)^{2k+1}] = \\ &= \sum_{x=1}^{2n+1} (x-n)^{2k+1} p(x) = \\ &= (1-n)^{2k+1} p(1) + (2-n)^{2k+1} p(2) + \\ &\quad + \dots + (n-n)^{2k+1} p(n) + \dots + \\ &\quad + (2n-2-n)^{2k+1} p(2n-2) + \\ &\quad + (2n-1-n)^{2k+1} p(2n-1). \end{aligned}$$

As parcelas equidistantes de $(n-n)^{2k+1} \cdot p(n)$ são iguais em valor absoluto, mas de sinais contrários, logo $\mu^{2k+1} = 0$.

III

1. A probabilidade de extrairmos uma garrafa de cada um daqueles anos é igual para todos: $P(68) = P(69) = P(70) = 1/3$.

$$\begin{aligned} P(T/68) &= 0.70, & P(T/69) &= 0.50, \\ P(T/70) &= 0.90, \end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned} P(B/68) &= 0.30, & P(B/69) &= 0.50, \\ P(B/70) &= 0.10, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/68) \cdot P(68) + P(B/69) \cdot P(69) + \\ &\quad + P(B/70) \cdot P(70) = 0.30 \end{aligned}$$

$$P(69/B) = \frac{P(B/69) \cdot P(69)}{P(B)} = \frac{5}{9}.$$

2. Como vimos $P(\text{Branco}) = 0.3$.

Seja X o nº de garrafas de vinho branco que ele retira aleatoriamente das existentes na cave (onde se supõe, como é óbvio, que existem muitas).

Tem-se então

$$X \cap B(n; 0.3).$$

Pretende-se determinar n de modo que

$$P[X \geq 3] \geq 0.60 \iff P[X \leq 2] \leq 0.40.$$

Consultando as tabelas da binomial, temos que terá de ser $n \geq 10$.

IV

$$n_1 = n_2 = 36.$$

Sejam X_A e X_B as variáveis aleatórias que designam o peso dos frutos do pomar A e B, respectivamente. Temos

$$\begin{aligned} X_A &\cap \mathcal{N}(20, 2) \text{ e } X_B \cap \mathcal{N}(18, 5), \text{ donde} \\ \bar{X}_A &\cap \mathcal{N}(20, \frac{1}{3}) \text{ e } \bar{X}_B \cap \mathcal{N}(18, \frac{5}{6}). \end{aligned}$$

A probabilidade de o comerciante escolher o pomar B é dada por

$$\begin{aligned} P[\bar{X}_B > \bar{X}_A] &= P[\bar{X}_B - \bar{X}_A > 0] = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{29/36}}\right) \approx 0.0113. \end{aligned}$$

V

1. Podemos realizar um teste de hipóteses

$$H_0: \sigma_0^2 = 0.42,$$

$$H_1: \sigma_0^2 \neq 0.42.$$

Considerando como hipótese a normalidade dos comprimentos das plantas ao ser usado o fertilizante A, a estatística do teste é

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \cap \chi_{(n-1)}^2.$$

Tomando como nível de significância $\alpha = 0.05$, a região crítica é

$$\text{R.C.} =]-\infty, \chi_{0.975}^2(7) \cup \chi_{0.025}^2(7), +\infty[=]-\infty; 1.69 \cup 16.01; +\infty[.$$

O valor da estatística é $13.66 \notin \text{R.C.}$, logo a um nível de significância de 0.05 não há motivos para rejeitar que os dados actuais sejam consistentes com aquele valor para a variância.

2. Dado tratar-se de amostras independentes e considerando a hipótese da normalidade de cada uma das populações de medições, vamos verificar em primeiro lugar se é de admitir a hipótese da igualdade de variâncias.

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2,$$

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2,$$

$$\text{Estatística do teste: } F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cap F_{(7,7)},$$

$$F_{\text{cal}} = 0.8771.$$

A um nível de significância de 0.05 temos a região de rejeição

$$]-\infty, 0.2002 \cup [4.9949, +\infty[;$$

como F_{cal} não pertence à região de rejeição, não se rejeita H_0 .

Para estudar a existência de diferenças significativas no uso dos dois fertilizantes temos o teste

$$H_0: \mu_1 = \mu_2,$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2,$$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cap t_{(14)} \text{ e}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

$$T_{\text{cal}} = 1.6486.$$

Considerando um nível de significância de 0.05

$$\text{R.C.} =]-\infty; -2.145 \cup]2.145; +\infty[,$$

sendo assim $T_{\text{cal}} \notin \text{R.C.}$. Logo para um nível de significância de 0.05 não rejeitamos a hipótese de os dois fertilizantes serem semelhantes.

(Resolução de *Manuela Neves Figueiredo*)

Convidamos todos os professores a enviarem enunciados de pontos de exame relativos ao 12º ano de escolaridade e aos primeiros anos da Universidade, com as respectivas resoluções.

A *Gazeta de Matemática* ficará reconhecida.

PROBLEMAS

Quer o estudante, quer o professor de matemática deparam aqui e ali com problemas cujo enunciado nem sempre denuncia a sua natureza — do trivial ao profundo. Nem por isso esses problemas deixam de ocupar, às vezes com teimosia, o tempo de quem os formulou ou simplesmente encontrou, constituindo-se em geral como subproduto da faina matemática. Aqui se apresentam hoje alguns problemas do foro da análise matemática real. Naturalmente que a *Gazeta de Matemática* fica à espera de respostas dos leitores que serão publicadas após selecção, bem como de novos problemas...

1. Sejam f, f_n ($n = 1, 2, \dots$), funções reais de variável real; suponhamos que para todo $x \in \mathbf{R}$ e qualquer sucessão $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ se tem $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$. Será que f é necessariamente contínua?
2. Seja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ contínua. Prove que
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1).$$
3. Sendo $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ contínua tal que $f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$ para todo $x \in \mathbf{R}$, será que f tem de ser constante?
4. Dada a sucessão (a_n) de números reais de termo geral $a_n > 0$, tal que $\sum a_n$ converge, será sempre possível encontrar uma sucessão (c_n) de termos positivos ($c_n > 0$), tal que $\lim c_n = +\infty$ e $\sum c_n a_n$ seja convergente?
5. Será que uma sucessão (x_n) de números reais não negativos ($x_n \geq 0$) tal que $x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^2}$ para todo n , é necessariamente convergente?
6. Seja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ uma função real de variável real tal que:
 - i) Se $[a, b] \subset [0, 1]$ então $f([a, b])$ contém o intervalo de extremos $f(a), f(b)$;
 - ii) Para todo $c \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(c)$ é fechado.Será f necessariamente contínua?

(Problemas propostos por
Jorge Nuno Oliveira e Silva)

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

Esta secção é aberta a todo o leitor que deseje contribuir com problemas, algoritmos, programas, observações, técnicas, etc., para o desenvolvimento da actividade experimental em matemática. Por *experiência* em matemática encaramos o acto de recorrer a uma simulação computacional, mas que pode também ser física ou de outro tipo permitindo desenvolver uma ideia e encontrar os possíveis resultados. Os leitores são convidados a contribuir com sugestões, temas, experiências, que traduzam resultados interessantes de matemática, ou problemas que, embora simples, tenham *complexidade* e denotem igualmente a capacidade de estarem transformando a maneira de trabalhar em ciência, reintroduzindo o método experimental em matemática.

O Caos

por *J. Sousa Ramos*

1 – O Conceito de Caos

Neste primeiro número abordaremos as teorias do caos e a sua simulação no computador. Em próximos artigos trataremos de temas como fractais, atractores estranhos, autómatos celulares, redes neuronais, máquinas que aprendem, prova automática de teoremas em geometria e aritmética, etc.. Recorrendo ao computador a teoria da iteração das aplicações do intervalo e do plano apresenta conceitos e resultados simples de compreender e usar experimentalmente. O nosso objectivo é dar e explicar os algoritmos e programas necessários para o seu uso no computador.

A ciência do caos estende-se hoje a toda a actividade científica. O conceito de caos de um modo mais ou menos consciente, com mais ou menos rigor, é vulgarmente utilizado e exprime propriedades dos fenómenos sobre os quais recai cada vez mais a nossa atenção. Em ciências físicas, químicas, biológicas, sociais, políticas, etc., os fenómenos caóticos são os que mais atraem os novos investigadores. Um matemático não pode ficar indiferente a este entusiasmo crescente pelo estudo do caos, sobretudo, porque esse estudo surgiu e avança predominantemente em resultado do trabalho dos matemáticos. O principal motor desse trabalho e o que permite avançar é, sem

dúvida, o uso crescente dos microcomputadores. A facilidade de utilização, capacidade gráfica e eficácia na obtenção de resultados e sua compreensão permitem trazer um número crescente de amadores e profissionais a estes novos tópicos da matemática.

Seguidamente estudamos o exemplo mais importante, que é igualmente o mais simples, de um sistema dinâmico caótico. Por sistema dinâmico entendemos um par (X, f) , onde X representa o sistema ou espaço e f a dinâmica ou aplicação, que uma vez iterada, $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$, e partindo de uma posição inicial x_0 , define órbitas $(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$, onde $x_i = f^i(x_0)$, $i \in \mathbb{N}$. O sistema dinâmico mais simples que apresenta caos é o par (I, f) , onde I é o intervalo $[0, 1]$ e $f: I \rightarrow I$ é a aplicação quadrática f_b :

$$f_b(x) = 4bx(1-x),$$

onde o parâmetro real b pertence igualmente a $[0, 1]$. Neste caso, a caracterização mais simples de uma situação de caos corresponde à propriedade de o sistema, para valores de $b > 0.8925\dots$, apresentar um número de órbitas periódicas N_k com crescimento exponencial em k (sendo k a ordem de iteração). Uma órbita é periódica de período p se $x_p = x_0$, e a função N_k é de crescimento exponencial em k se como função de k crescer mais depressa que qualquer polinómio em k , $P(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \dots + a_m k^m$.

2 - Estudo Experimental do Caos

Consideremos a aplicação f_b do intervalo nele próprio. Para cada valor do parâmetro b o gráfico da aplicação $f_b(x)$ é uma parábola de altura b (ver fig. 1).

Exercício 1: *Construa um programa de computador que desenhe a parábola e que permita variar a sua altura (solução: ver procedimento itera1 no quadro 1 relativo ao programa da parábola).*

Os programas estão escritos em Pascal, versão 4 ou 5 do Turbo-Pascal da Borland International.

Definimos iteração como a repetição da acção de aplicar f . Assim a iterada de ordem k de $f = f_b$ quando aplicada a um ponto inicial $x_0 = 1/2$ é dada por:

$$\begin{aligned} x_0 = 1/2 &\xrightarrow{f} x_1 = 4b \cdot 1/2(1 - 1/2) = b \\ &\xrightarrow{f} x_2 = 4b^2(1 - b) \\ &\xrightarrow{f} \dots \\ &\xrightarrow{f} x_k = f^k(x_0). \end{aligned}$$

Exercício 2: *Usando o computador ou uma calculadora fixe o valor de $b \in [0, 1]$ e determine várias órbitas partindo de diferentes valores iniciais $x_0 \in [0, 1]$. Repita o exercício para outros valores de $b \in [0, 1]$. Observe os resultados. Tente encontrar órbitas periódicas de períodos pequenos (menores que 7) (solução: ver procedimento itera2 e itera3).*

As órbitas periódicas que se obtêm por iteração no computador são as órbitas periódicas estáveis ou atractivas, isto é, que atraem as órbitas com condições iniciais vizinhas. As repulsivas ou instáveis, embora existam em maior número, só são possíveis de determinar recorrendo a programas mais elaborados, que poderemos tratar numa outra ocasião.

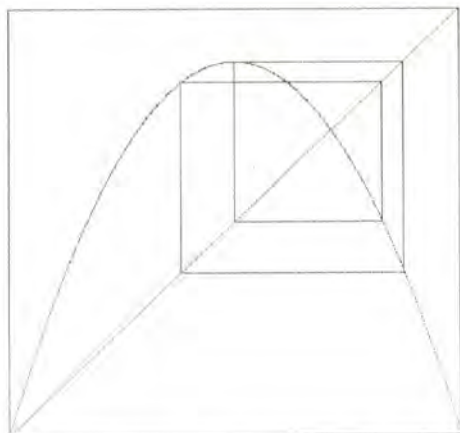


Fig. 1: Iteradas da parábola.

Exercício 3: Construa um programa de computador que visualize a iteração geométrica, de acordo com a figura 1 (solução: ver procedimento itera3).

```

program parabola;
uses graph;
var gd, gm, k, I : integer;
    b, x, x1 : real;
procedure quadro;
begin
cleardevice;
initgraph(gd, gm, '');
line(0,0,199,0);
line(199,0,199,199);
line(199,199,0,199);
line(0,199,0,0);
line(0,199,199,0);
end;
procedure itera1;
begin
for k:=1 to 4 do
begin
b:=0.8+k/20;
for I:=1 to 400 do
begin
x:=i/400; x1:=4*b*x*(1-x);
putpixel(i div 2,round(199-199*x1),7);
end;
end;
end;
end;

```

```

procedure itera2;
var j : integer;
begin
b := 0.95;
for I:=1 to 400 do
begin
x := i/400;
for j:=1 to 2 do x:=4*b*x*(1-x);
putpixel(i div 2,round(199-199*x),7);
end;
line(0,199,199,0);
end;
procedure itera3;
begin
for k:=1 to 8 do
begin
b := 0.8+k/40;
for I:=1 to 400 do
begin
x:=i/400;
x1:=4*b*x*(1-x);
putpixel(i div 2,round(199-199*x1),7);
end;
line(0,199,199,0);
x:=0.5;
for I:=1 to 35 do
begin
x1:=4*b*x*(1-x);
line(round(199*x),199-round(199*x),
round(199*x),199-round(199*x1));
line(round(199*x),199-round(199*x1),
round(199*x1),199-round(199*x1));
x := x1;
end; readln;
quadro ;
end;
end;
begin
gd:=detect; gm:=1;
initgraph(gd, gm, '');
quadro; itera1;
readln; quadro; itera2;
readln; quadro; itera3;
readln;
closegraph;
end.

```

Exercício 4: Construa um programa de computador que coloque em abscissas os valores de $b \in [1/2, 1]$ e em ordenadas os valores de $x \in [0, 1]$.

Varie o parâmetro b de $1/2$ a 1 , por acréscimos de 0.01 . Itere 100 vezes, para cada valor de b , partindo de um valor inicial $x_0 \in]0, 1[$ arbitrário. Registe apenas as 50 últimas iteradas de acordo com o gráfico da figura 2, o qual deve obter no seu computador (solução: ver programa bifurcação).

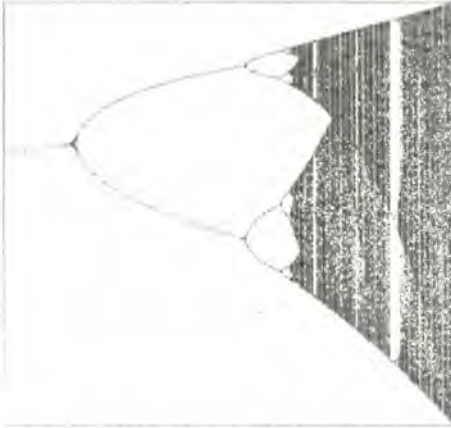


Fig. 2: Diagrama de bifurcação.

Estes gráficos chamam-se *diagramas de bifurcação* e a palavra *bifurcação* esconde um conceito matemático muito interessante. Para valores de b menores que um dado valor b_{i_1} (dito de bifurcação) o gráfico mostra que por iteração, os valores de $x_i = f^i(x_0)$ caem num ponto fixo, caracterizado por $x_{k+1} = f(x_k) = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$. Para valores de $b \in]b_{i_1}, b_{i_2}[$ o gráfico mostra que por iteração os valores de x_i caem numa órbita de período 2, isto é, (x_k, x_{k+1}) pois tem-se $x_{k+2} = f(x_{k+1}) = f^2(x_k) = x_k, x_{k+3} = f(x_{k+2}) = f^2(x_{k+1}) = x_{k+1}$ e $x_k \neq x_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$. Dizemos então que os valores de b_{i_1} e b_{i_2} são valores de bifurcação pois a órbita periódica atractiva de período 1 (ou ponto fixo), que existia para $b < b_{i_1}$,

desaparece em $b = b_{i_1}$ (na verdade torna-se repulsiva) e dá origem para $b \in]b_{i_1}, b_{i_2}[$ a uma órbita atractiva de período 2. Para $b = b_{i_2}$ dá-se uma nova bifurcação criando-se uma órbita atractiva de período 4, e assim sucessivamente. São os fenómenos de duplicação de período — um número infinito de bifurcações.

Exercício 5: Usando o programa realizado no exercício 4 identifique experimentalmente outros pontos de bifurcação. Descubra as órbitas periódicas de períodos 3 e 5.

Exercício 6: Construa um programa que coloque em abcissas o número de iteradas e em ordenadas o valor de x . Observe a variação $x(k)$ com o número k de iterações, para diversos valores do parâmetro b .

Exercício 7: Faça “correr” o programa construído em 4, mas colocando em abcissas outros valores de b pertencentes a um subintervalo $[b_1, b_2]$ de modo a ampliar pormenores do diagrama de bifurcação. Procure obter por ampliações deste tipo (mudanças de escala) figuras semelhantes à inicial; poderá observar fenómenos de auto-similaridade — a parte é idêntica ao todo.

Finalmente o que é o caos? Existem várias definições de caos. Neste contexto elementar e experimental entendemos como caóticas todas as aplicações definidas para $b > b_\infty$, onde o valor de $b = b_\infty = 0.8925\dots$ é obtido da 1ª acumulação de um número infinito de duplicações de período.

Um outro conceito interessante é o de órbita ergódica; uma tal órbita tem a propriedade de ser aperiódica.

Exercício 8: Com o programa construído no exercício 2, procure um valor de b , para o qual partindo de qualquer $x_0 \in (0, 1)$, a órbita $f^k(x_0)$ é aperiódica.

Exercício 9: Repetir os exercícios anteriores para outras famílias a um parâmetro de aplicações com apenas um máximo ou um mínimo, por exemplo, $f_a(x) = x^2 + a$, $f_a(x) = a \sin(x)$ e $f_a(x) = a \exp(x)$.

```

program bifurcacao;
uses crt, graph;
var gd, gm, k, i : integer;
    b, x : real;
begin
  gd := detect; gm:=1;
  initgraph(gd, gm, '');
  line(0,0,639,0);
  line(639,0,639,199);
  line(639,199,0,199);
  line(0,199,0,0);
  for k:=1 to 639 do
  begin
    b := 0.7+0.3*k/639;
    x := 0.5;
    for I:=1 to 100 do
      begin
        x := 4*b*x*(1-x);
        if i > 50 then
          putpixel(k, round(200-199*x), 15);
      end;
    end;
  end;
  repeat until keypressed;
  closegraph;
end.

```

3 - Expoentes de Liapunov

O expoente de Liapunov λ mede a taxa de divergência de órbitas que em dado momento são vizinhas. Podemos no caso unidimensional defini-lo a partir da média geométrica das derivadas $A_i = \frac{df_b}{dx}(x_i)$ ao

longo dos pontos da órbita (x_0, x_1, \dots, x_k) ou mais precisamente a partir do limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{A_0 \dots A_k};$$

ao logaritmo deste número chama-se expoente de Liapunov, tendo-se portanto:

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k \log \frac{df_b}{dx}(x_i)$$

(ver fig. 3).

```

program liapunov;
uses graph;
var
  gd, gm, k, I : integer;
  b, x, y, z : real;
procedure liap;
begin
  for k:=1 to 600 do
  begin
    b:=0.8+k/3000;
    x:=0.9; z:=0;
    for I:=1 to 75 do
      begin
        x:=4*b*x*(1-x);
        y:=4*b-8*b*x;
        z:=z+ln(abs(y));
      end;
    z:=z/75;
    putpixel(k, round(100-100*z), 7);
  end;
end;
begin
  gd:=detect; gm:=0;
  initgraph(gd, gm, '');
  line(0,0,600,0);
  line(600,0,600,199);
  line(600,199,0,199);
  line(0,199,0,0);
  liap; readln;
  closegraph;
end.

```

Como se vê através deste exemplo o computador encarado como um laboratório de experiências onde se aprende a descobrir "coisas" e a simular todo o tipo de fenômenos. O leitor não precisa de conhecer mais do que o modelo que lhe é apresentado; os programas para o computador são simples como se vê e podem

ser modificados e usados pelo leitor mesmo inexperiente em computação. A experimentação, a procura de compreensão, a descoberta de regularidades dentro da complexidade, deve ser encarada como um jogo do qual se tira prazer e inteligibilidade.

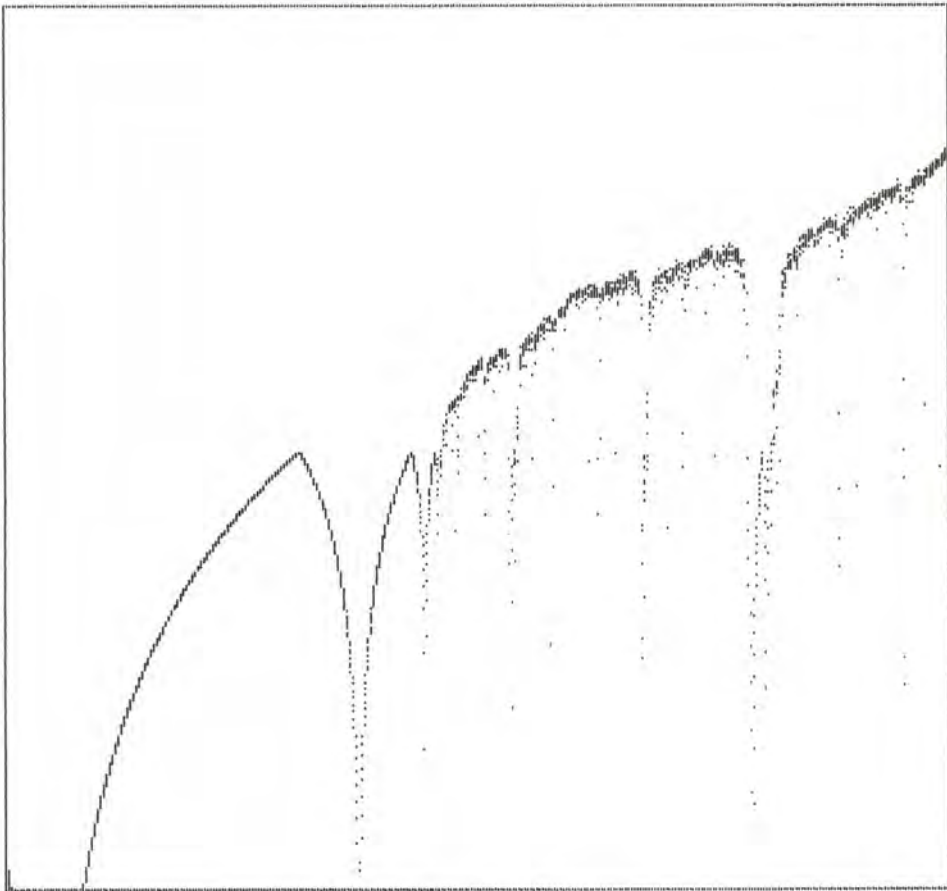


Fig. 3: Expoente de Liapunov.

MATEMÁTICA E JOGOS

Não pretendemos nesta secção fazer qualquer introdução à teoria dos jogos matemáticos. A secção não terá aliás um modelo fixo. Uma vez constará de pequenas questões ou problemas matemáticos apresentados na forma de um jogo, outras da análise matemática de pequenos jogos, outras ainda, simplesmente, de pequenas notícias ou biografias que caibam neste tema. Em resumo, pretendemos sublinhar o aspecto lúdico da matemática. Muitos jogos têm por sua vez duas componentes essenciais — o acaso e a estratégia — que permitem analisá-los matematicamente. É neste contexto que situaremos a matemática e os jogos.

A lei do mais fraco

por *José L. Fachada*

A matemática surge, frequentemente, como um auxiliar da nossa intuição e senso comum, entrando, por vezes, em contradição com uma e outro. É o caso do jogo-problema que dirijo aos leitores e que irá acompanhar-nos, futuramente, durante algum tempo, dada a riqueza de questões e de variantes que permite.

O problema é clássico e poderíamos chamar-lhe:

A lei do mais fraco

Imagine-se uma luta entre 3 pistoleiros A , B e C com distintas capacidades de tiro. Por exemplo: A é 100% certo, B 80% e C somente 50%.

A luta irá desenrolar-se do seguinte modo: após o sorteio totalmente aleatório

para decidir da ordem por que vão disparar, um de cada vez terá a liberdade de alvejar o adversário que quiser ou atirar para o ar ou mesmo para si próprio. A luta prossegue em disparos sucessivos até que reste somente um pistoleiro vivo.

Questões:

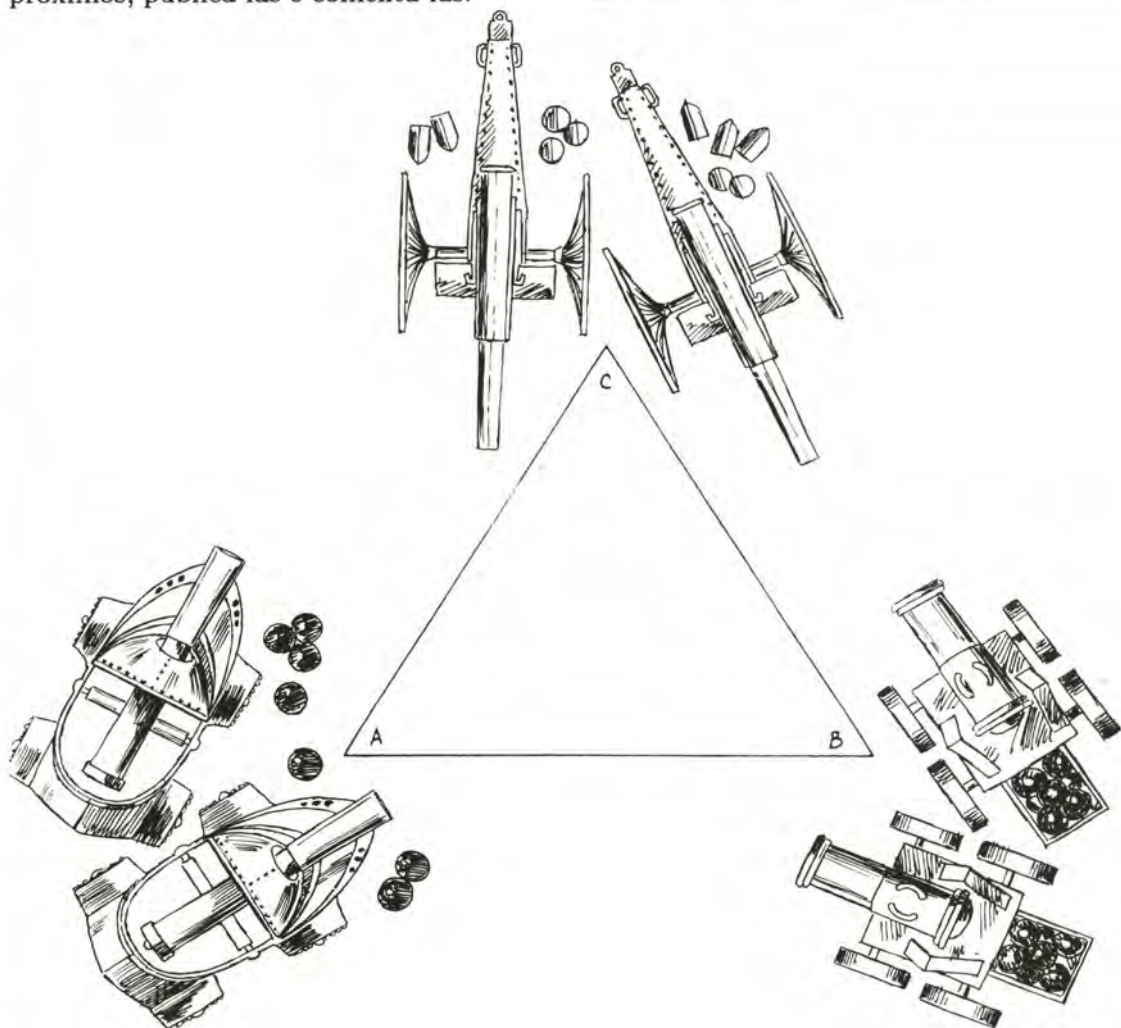
- 1) Quais as estratégias ótimas que deverão seguir cada um dos pistoleiros de modo a aumentar as suas probabilidades de sobrevivência? Em particular, realce qual a estratégia óptima para o pistoleiro mais fraco, C ?
- 2) Quais as probabilidades de sobrevivência de cada um dos pistoleiros se todos seguirem as suas estratégias ótimas?

Variantes: Pode pensar-se em alterar as regras do jogo, permitindo, por exemplo, que os pistoleiros disparem *simultâneo*, e continuem do mesmo modo a luta até que não mais do que um deles sobreviva (neste caso, pode obviamente não sobreviver nenhum!).

Ficamos à espera das soluções, mesmo que incompletas, que os leitores nos queiram enviar e procuraremos, em números próximos, publicá-las e comentá-las.

NOTÍCIA

Realizaram-se os 4^{os} Campeonatos Internacionais de França de Jogos Matemáticos e Lógicos: Meias-Finais a 28 de Abril e Final a 7 de Julho na "Cité des Sciences et de l'Industrie" em Paris. Contamos poder apresentar no próximo número problemas e outras notícias sobre esta realização.



CRÍTICA DE LIVROS

LUÍS T. MAGALHÃES — *Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada*. Texto Editora; Lisboa, 1989; 401 págs..

“[...] penso que se ganha bastante em não exagerar no grau de abstracção e em manter sempre que possível uma ligação com aplicações concretas”. Se esta frase, extraída do prefácio deste livro, define uma postura do seu autor perante a matemática, sintetiza ela igualmente a filosofia desta obra, dedicada a uma Álgebra Linear, tão comumente encerrada no exoterismo dos formalismos algébricos, bastas vezes meio-caminho para um isolamento científico que, não sendo condenável, se demonstra aqui ser facilmente evitável.

Sendo os aspectos teóricos da Álgebra (Linear) ineludivelmente sedutores, como aliar-lhes o fascínio da sua utilização, enquanto metodologia para tratar, de forma tão eficaz, tantos problemas da matemática e da física? Eis-nos perante um exemplo importante dessa perspectiva, a constituir algo de novo na literatura matemática portuguesa. Um livro que de Álgebra Linear tratando, extravasa os muros que a confinam, falando de muita outra matemática — da Análise Numérica à Geometria, das Equações Diferenciais às Equações Integrais, da Interpolação Polinomial à Análise de Fourier — e das suas aplicações à física, introduzidos por meio de exemplos e exercícios.

Registemos ainda as preocupações computacionais tidas pelo autor, se bem que pouco sistematizadas, sob o ponto de vista algorítmico. Mas esse é talvez o futuro. Ou já o presente?

(Afonso Florentino)

J. SANTOS GUERREIRO — *Curso de Análise Matemática*. Escolar Editora; Lisboa, 1989; 431 págs..

É uma reedição em bloco dos três primeiros volumes do “Curso de Matemáticas Gerais” do mesmo autor, falecido em 1987. Excluiu-se, não sabemos porquê, o volume dedicado à Álgebra Linear, alterando o título original, mais conforme aliás com a época em que o livro foi redigido, há cerca de vinte anos. O estilo de sistematização bourbakista tem vindo a ser relegado para obras de consulta esporádica e pontual e nesse aspecto a obra continua de actualidade. Mas sabemos que sendo o próprio autor o seu maior crítico, actualizado e exigente consigo próprio como era, não deixaria de observar que do ponto de vista didáctico a obra é dotada, tendo tido aliás uma influência marcante no nosso meio, pelo grande rigor que nela é inculcado. Pretendeu-se provavelmente fazer uma homenagem póstuma à memória do autor, que merecendo-a, merecia mais.

(A.F.)

DIRK J. STRUIK – *História Concisa das Matemáticas*. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro; Coleção Ciência Aberta, nº 33; Gradiva; Lisboa, 1989; 360 págs..

Há muito que se esperava a publicação em língua portuguesa desta pequena mas equilibrada obra de Dirk J. Struik. Trata-se de um clássico popular sobre o assunto em que o desenvolvimento histórico da matemática é inserido no devir da sociedade. Este ponto de vista era relativamente novo na época em que se publicou a primeira edição norte-americana, em 1948, estando mesmo na origem de alguns dissabores que o autor teve. Poderia pensar-se que se trataria hoje, pelo contrário, de um ponto de vista desactualizado, em razão daquela data. Isto, apesar das correcções e acrescentos das sucessivas quatro edições norte-americanas, de que foi traduzida para português, a última, datada de 1986, em que se inclui um capítulo inteiramente novo dedicado à primeira metade do século XX. Certo é porém, que a tradução da obra em pelo menos dezasseis línguas, atesta um extraordinário acolhimento em todo o mundo e isso deve-se sem dúvida à justeza e carácter universal do ponto de vista defendido.

A morte prematura do saudoso Professor João Santos Guerreiro impediu-o de incluir nesta edição uma nota sobre a história da matemática em Portugal, como era seu desejo, em sintonia com o que já sucedera com traduções noutras línguas como foi o caso do alemão, chinês, italiano, holandês, russo, ucraniano e sendo ainda o caso da edição mexicana em língua espanhola, para a qual o autor também utilizou o título *Historia Concisa de las Matemáticas*, no plural.

Assinale-se que Dirk J. Struik, nascido na Holanda em 1894 e portanto já perto de ser centenário, colaborou na *Gazeta de Matemática* em 1943, no nº 14, com um interessante artigo intitulado “A Sociologia da Matemática” (num número anterior um texto seu já tinha sido traduzido: “Os logaritmos”, vol. 11, 1942). Como sabemos que Dirk J. Struik se mantém em plena actividade, albergamos a esperança de novas colaborações.

(A.F.)

J. TIAGO DE OLIVEIRA – *O essencial sobre A História das Matemáticas em Portugal*. Coleção Essencial, nº 41; Imprensa Nacional – Casa da Moeda; Lisboa, 1989; 59 págs..

É próprio da Coleção Essencial a reduzida extensão dos textos o que torna difícil a abordagem de qualquer tema. Das seis dezenas de páginas (de pequeno formato), metade dizem respeito a anexos e notas pelo que o essencial se reduz ao essencialíssimo. Tal como o autor refere logo no prefácio, outas obras sobre o assunto já vieram a lume no passado mas mesmo assim “não parece muito estudado o evoluir das Matemáticas em Portugal” — O *Ensaio Histórico sobre a Origem e os Progressos das Mathematicas em Portugal*, de Francisco da Borja Garção-Stockler (1819), *Les Mathématiques en Portugal*, de Rodolfo Guimarães (1909), o *Bosquejo histórico das matemáticas em Portugal*, de Pedro José da Cunha (1929) e enfim a *História das Matemáticas em Portugal*, de Francisco Gomes Teixeira (1934), constituem marcos de referência sobre o assunto.

É com agrado que registamos o aparecimento deste novo livrinho, mas seria desejável obra actual de outra dimensão. Naturalmente que para tal haverá que reflectir no conselho que o compositor Fernando Lopes Graça dava numa carta dirigida a alguém que pretendia escrever sobre a música em Portugal: “[...] haverá que começar pelo princípio: rasgar [as] trevas, apurando diligentemente, pacientemente, beneditinamente as peças do processo histórico necessárias para tal. Trabalho de escavação, primeiro, de talhe e afeição de materiais, em seguida, só depois do que verdadeiramente se poderá proceder ao trabalho de construção. Deu-se V. Ex.^a a essa tarefa de escavação e de apuro de materiais? Se não deu, a sua História nunca poderá ser uma História, mas uma simples colecção de factos mais ou menos irrelacionados uns com os outros, uma lista de efemérides sem significação ou um repositório de anedotas [...]” (in Fernando Lopes Graça, *Obras Literárias*, “A Música Portuguesa e os seus Problemas II”, Caminho, 1989, 2.^a ed., pág. 67; o texto é de 1955).

Que o tal trabalho de escavação está por fazer prova-o o facto de se conservarem inéditas obras que mereceriam estudo, como recorda o autor; a propósito de uma delas, datada de 1559, dizia Luís de Albuquerque: “[...] sabemos existir entre os manuscritos da Biblioteca Nacional de Lisboa um volume de comentários de D. Francisco de Melo a uma obra de Euclides e a um texto atribuído então a Arquimedes [...]; mas de que serve sabê-lo, se continuamos a não fazer a mínima ideia do valor de tais comentários?” (Fragmentos de Euclides numa versão portuguesa do século XVI, in *Revista de Ciências do Homem*, da Univ. de Lourenço Marques, série A, vol. I

(1968) e republicado na colectânea de textos de Luís de Albuquerque, *Estudos de História*, vol. I, Univ. de Coimbra, 1974). Acrescentemos que os manuscritos aludidos tornam-se cada vez mais ilegíveis com o tempo; casos há, porém, em que os textos simplesmente se perderam, ficando nós apenas com o título, como sucedeu com um de 1627 do filósofo Francisco Sanches comentando criticamente os princípios da geometria euclideana (e como era crítico este grande céptico!). Mais recentemente, como recorda J. Tiago de Oliveira, também se perderam os “*Escritos Posthumos*” de Anastácio da Cunha (1744–1787). Este ilustre matemático e poeta português, saíu da espécie de limbo em que se encontrava, sobretudo graças à reedição da sua obra fundamental — *Principios Mathematicos* — bem como de uma controversa tradução por um seu discípulo, pela iniciativa do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, em 1987. Nesse ano do bicentenário da morte de Anastácio da Cunha tiveram lugar aliás, muitas acções destinadas a divulgar e promover a sua obra.

No nosso século XX também há que escavar, para usar a analogia de Fernando Lopes Graça. Felizmente as obras científicas de José Sebastião e Silva foram publicadas e as obras didácticas vão sê-lo brevemente mas será suficientemente conhecido o papel e a obra científica de António Aniceto Monteiro?

Na opinião do autor d’“O essencial sobre a História das Matemáticas em Portugal”: “A partir dos anos 50 pode dizer-se que, como efeito do impulso dos anos 30, ainda que com variadas orientações, se assiste a uma explosão que vai crescendo, com altos e baixos, embora com uma curta estagnação a seguir ao 25 de Abril de 1974.

Mas as massas críticas tinham sido atingidas!" Só o futuro poderá testar o optimismo do autor.

Para terminar, anotemos por um lado a existência de dois anexos sobre temas para os quais não há em geral muita referência: um relativo aos seguros e outro relativo

à estatística e à demografia. Assinalemos por outro lado uma gralha ingrata que envolve o nome de Álvaro Tomás — mais escavação a fazer! — onde devia figurar o de António Luís (pág. 16, linha 28).

(A.F.)

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

F.R. DIAS AGUDO - *Análise Real, Volume I - Números reais e espaços R^n* . Escolar Editora; Lisboa, 1989; 316 págs..

Apoiando-se nas suas Lições de Análise Infinitesimal (em 2 vols.) anteriormente publicadas, o autor refundiu o texto, introduzindo alterações significativas que resultaram numa actualização conseguida. Esta actualização era necessária devido à evolução dos programas de matemática no ensino secundário.

F.R. DIAS AGUDO - *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, 4ª edição. Escolar Editora; Lisboa, 1989; 367 págs..

O sopro de actualização não se faz sentir como na obra acabada de referir neste Boletim Bibliográfico. Trata-se de uma mera reedição retocada. Deve-se isso sem

dúvida a uma menor premência nas alterações curriculares nesta matéria.

MARIA RAQUEL VALENÇA - *Métodos Numéricos*. Instituto Nacional de Investigação Científica - Imprensa Nacional - Casa da Moeda; Braga, 2ª edição, 1990; 263 págs..

Um livro que pode servir de apoio a um curso introdutório de análise numérica que inclua como tópicos gerais os seguintes: equações não lineares, sistemas de equações lineares, interpolação, aproximação de funções, integração e equações diferenciais ordinárias. Útil também para quem pretenda abordar estes temas, a partir de conhecimentos básicos de álgebra linear, do cálculo diferencial e integral, e do domínio de uma linguagem de programação e correspondente experiência de utilização computacional.

JAMES GLEICK – *Caos – A construção de uma nova ciência*. Prefácio de Jorge Buescu; Tradução de José Carlos Fernandes e Luís Carvalho Rodrigues. Coleção Ciência Aberta, nº 38; Gradiva; Lisboa, 1989; 420 págs..

Um bom exemplo para mostrar que o jornalismo e a ciência podem compatibilizar-se na boa divulgação científica. A palavra caos — como já sucedera com a palavra catástrofe — não deve sugerir-nos um tema relapso ao tratamento científico, a descambar para o esotérico. Um dos méritos do autor, repórter científico do *New York Times* é o de nunca ter cedido às tentações da extrapolação fácil, informando sim com rigor mas amavelmente, sobre uma área da matemática que teve a sua origem em trabalhos de Henri Poincaré sobre mecânica celeste e que intervém hoje nos mais diversos domínios, como um capítulo da teoria dos sistemas dinâmicos, que prolonga o estudo clássico das equações diferenciais. Boa divulgação pois, numa nova era de interdisciplinaridade, na esteira do programa inserto nestas palavras de Louis de Broglie: instruir sem deformar, elevar o nível intelectual dos leitores sem baixar o nível da exposição.

HEINZ R. PAGELS – *Simetria Perfeita*. Tradução de Henrique Leitão e Paulo Ivo Teixeira. Coleção Ciência Aberta, nº 39; Gradiva; Lisboa, 1990; 455 págs..

Livro de divulgação sobre o papel das simetrias nas modernas teorias sobre a matéria, quer no que respeita as galáxias quer no que respeita os quarks. Um livro interessante na já longa série desta colecção.

ROBERT LENOBLE – *História da Ideia de Natureza*. Tradução de Teresa Louro Pérez. Edições 70; Lisboa, 1990; 367 págs..

Trata-se de uma tradução de um texto publicado em 1969 e deixado inacabado devido à morte do autor. Reveste-se de grande interesse; não é propriamente uma história — a ciência medieval está ausente — mas uma colecção de textos de carácter histórico sobre a ideia de Natureza. Note-se que já tinha sido publicada em Portugal, nos anos 60, uma obra sobre o mesmo tema (*A Ideia da Natureza de R.G. Collingwood*, Col. Divulgação e Ensaio, nº 22, Editorial Presença [sem data]).

Autor e Diligência de Inquirição — Contribuição para a História da Universidade de Coimbra no Século XVII. Prefácio, Introdução e Transcrição por JOAQUIM FERREIRA GOMES. Fundação Calouste Gulbenkian; Lisboa, 1989; 533 págs..

O texto agora publicado refere-se à *Devassa à Universidade de Coimbra*, ou seja à sindicância mandada fazer pelo Rei durante o período da ocupação espanhola. Nas palavras do prefaciador, “[...] é indiscutivelmente um documento de valor inestimável para o estudo dos costumes, das mentalidades e das ideias no Portugal do primeiro quartel do século XVII”.

JOAQUIM FERREIRA GOMES – *A Universidade de Coimbra durante a Primeira República (1910–1926)*. Alguns Apontamentos. Instituto de Inovação Educacional; Lisboa, 1990; 491 págs..

O Sétimo Centenário da Universidade Portuguesa, a decorrer este ano, já mereceu deste autor quatro livros, sendo este o mais recente, além de vários artigos. Esta obra constituirá consulta obrigatória para quem queira conhecer aquele período da nossa história académica.

Filosofia. História. Conhecimento. — Homenagem a Vasco de Magalhães Vilhena. Coordenação de Eduardo Chitas e Hernâni A. Resende. Coleção Universitária; Caminho; Lisboa, 1990; 340 págs..

Com textos de mais de 20 autores, esta obra além de homenagear justamente Vasco de Magalhães Vilhena, homem de rigor e de crítica, contém artigos de alguma forma relacionados com a obra do homenageado, bem assim como a sua bibliografia activa.

JOÃO MARIA DE FREITAS BRANCO — *Dialéctica, Ciência e Natureza — Um estudo sobre a noção de "Dialéctica da Natureza" no quadro do pensamento científico moderno.* Coleção Universitária; Caminho; Lisboa, 1990; 319 págs..

Do Prefácio do autor respigamos o seguinte passo, significativo do teor da obra:

"A concepção dialéctica da natureza aqui apresentada pretende assumir-se como factor de racionalidade contra certas tendências modernamente manifestadas no seio do trabalho científico. Nessa medida, este livro é também uma espécie de manifesto contra os eternos cultores

de mistérios, de desordens, de visões agnósticas e de outros pessimismos cognitivos. Nele se pretendeu demonstrar que as conclusivas da ciência contemporânea não constituem um convite ao misticismo e ao irracionalismo. Há que, na base dessas mesmas conclusivas, travar nova batalha contra os demolidores da Razão, e para isso se propõe uma reinterpretação da moderna "crise da Razão".

Este percurso implica novo esforço de reconciliação da ciência com a filosofia. Reconciliação essa que não deve ser concebida como relação hierarquizada, mas sim como reconhecimento de uma fértil dependência mútua erigida a partir de uma dupla recusa:

- a) do imperialismo filosófico (subjugação da ciência à filosofia, filosofias da ciência);
- b) do cientismo (necessária concordância do sistema filosófico com os resultados do saber experimental, redução do conhecimento válido ao conhecimento científico).

Neste nosso tempo sem Verdade e sem Deuses a concepção dialéctica do real objectivo oferece-nos uma via de superação do estado de desnorte característico do homem hodierno. A crise revelou-se endógena e não accidental. E ser moderno consiste precisamente em saber estar em crise criativa. Para viver e sobreviver neste universo quente, complexo e incerto, velejando sobre as alteradas vagas do oceano cósmico, é necessário alterar o estilo arquitectónico do pensar, edificar uma nova Razão. Impõe-se saber pensar dialecticamente, para assim ser capaz de assumir a própria crise como estado normal de uma nova existência."

ANTOLOGIA

O texto que reproduzimos, da autoria de I.R. Šafarevič (lê-se Chafarevitch) é uma tradução da secção introdutória do tomo I, dedicado à *Álgebra* da colecção *Problemas da Matemática Contemporânea e Rumos Fundamentais — Resultados da Ciência e da Técnica*, vol. 11 (ed. de A.I. Kostrikin e I.R. Šafarevič, publicado por Viniti, Moscovo, 1986).

O que é a álgebra?

por I.R. Šafarevič

O que é a álgebra? É um ramo da matemática, um método, ou um referencial do pensamento? Estas questões não têm respostas claras e curtas. Podemos tentar descrever o lugar ocupado pela álgebra na matemática dirigindo a nossa atenção para aquilo que Hermann Weyl referia com uma palavra um tanto ou quanto impronunciável: “coordenatização” (veja-se H. Weyl, *The classical groups*, 1939). Um indivíduo poderia fazer-se uma ideia do mundo baseando-se exclusivamente nos seus órgãos dos sentidos, na vista, no tacto, na sua experiência na manipulação de objectos do mundo exterior e na intuição que dela resulta. No entanto, outro ponto de vista seria possível: as impressões subjectivas podem transformar-se em marcos objectivos, em números, através de *medidas*, que podem preservar-se indefinidamente e comunicar-se a outros indivíduos que não experimen-

taram as mesmas impressões; além disso, é possível operar sobre esses números obtendo novas informações sobre os objectos que se medem, o que é ainda mais importante.

O mais velho exemplo é a ideia de *contar* (coordenatização) e de *calcular* (operação), o que nos permite tirar conclusões sobre um certo número de objectos sem os abarcar todos de uma vez. As tentativas de *medir* ou de “expressar em números” uma variedade de objectos deram lugar às fracções e aos números negativos, estendendo os números naturais. A tentativa de expressar como um número a diagonal de um quadrado de lado 1 levou à famosa crise da matemática da antiguidade e à construção dos números irracionais.

As medidas determinam os pontos de uma recta através de números reais e mais geralmente, exprimem muitas quantidades

físicas como números. Deve-se a Galileu a definição mais radical, no seu tempo, da ideia de coordenatização: "medir tudo o que é mensurável e tornar mensurável tudo o que ainda o não é". A partir da época de Galileu, esta ideia teve um brilhante sucesso. A criação da geometria analítica permitiu representar os pontos do plano como pares de números, os pontos do espaço como ternos de números e através de operações sobre números, conduziu à descoberta de mais e mais factos geométricos. O êxito da geometria analítica deve-se porém sobretudo ao facto de reduzir a números não apenas os pontos, mas também as curvas, as superfícies, etc.. Por exemplo, uma curva plana é dada por uma equação $F(x, y) = 0$; no caso de uma recta, F é um polinómio linear, determinado pelos seus 3 coeficientes: os coeficientes de x , de y e o termo constante. No caso de uma secção cónica temos uma curva de grau 2, determinada pelos seus 6 coeficientes. Se F é um polinómio de grau n é fácil ver que tem $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ coeficientes; a curva correspondente é determinada por estes coeficientes, na mesma forma em que um ponto é dado pelas suas coordenadas.

Para exprimir as raízes de uma equação através de números, introduziram-se os números complexos o que constituiu um passo num ramo completamente novo da matemática, que inclui a teoria das funções elípticas e das superfícies de Riemann.

Durante muito tempo deve-se ter julgado que o caminho indicado por Galileu consistia em medir "tudo" em termos de uma colecção de números conhecida e fora de discussão, consistindo o único problema na obtenção de métodos de medida

cada vez mais subtis, como sejam a introdução das coordenadas cartesianas ou de novos instrumentos físicos. É certo que de vez em quando os números considerados conhecidos (simplesmente chamados números) se revelavam inadequados: isto conduziu a uma "crise" que só seria resolvida com a extensão da noção de número, criando novas formas de números que viriam a tornar-se em breve, por sua vez, como a única possibilidade. Seja como for, em geral, em dada altura a noção de número era considerada perfeitamente clara e o desenvolvimento fazia-se no sentido da sua extensão:

"1, 2, muitos" → números naturais →
 → inteiros → racionais →
 → reais → números complexos.

Mas as matrizes, por exemplo, formam um mundo completamente independente de "objectos do tipo dos números" que não podem ser englobados nesta sequência. Ao mesmo tempo descobriram-se os quaterniões e outros "sistemas hipercomplexos" (hoje chamados álgebras). As transformações infinitesimais levaram aos operadores diferenciais para os quais a operação natural resulta ser algo de inteiramente novo: o colchete de Poisson. Os corpos finitos surgem na álgebra e os números p -ádicos em teoria dos números. A pouco e pouco tornava-se claro que qualquer tentativa de tudo abarcar com um conceito de número, estava votada ao fracasso. Deste modo o princípio declarado por Galileu revelava-se pouco tolerante; a ideia de "tornar mensurável tudo o que ainda o não é" discrimina claramente tudo aquilo que teimosamente se recusa a ser medido, ficando as-

sim excluído da esfera de interesses da ciência a até mesmo da razão (tornando-se uma *qualidade segunda* ou *secunda causa* na terminologia de Galileu. Mesmo se, mais modestamente, restringíssemos o polémico termo “tudo” aos objectos da física e da matemática, sempre apareceriam muitos deles que não poderiam ser “medidos” em termos de “números habituais”.

O princípio da coordenatização pode porém ser preservado se admitirmos que o conjunto de “objectos tipo-número” a utilizar com esse fim seja tão diverso quanto o é o mundo dos objectos físicos e matemáticos a coordenatizar. Os objectos a servir como “coordenadas” deveriam satisfazer apenas certas condições de carácter bastante geral.

Devem ser individualmente discerníveis. Por exemplo, apesar dos pontos de uma recta terem propriedades idênticas (uma recta é homogénea) e um ponto poder assinalar-se apenas com um dedo, os números são individuais: 3 , $\frac{7}{2}$, $\sqrt{2}$, π , etc.. (O mesmo princípio se usa para distinguir dois bichinhos de estimação recém-nascidos que o dono destriça atando-lhes ao pescoço fitas de cores diferentes.)

Devem ser suficientemente abstractos para reflectir propriedades comuns a uma vasta gama de fenómenos.

Alguns dos aspectos fundamentais das situações em estudo deverão reflectir-se em operações a efectuar entre os objectos usados como coordenadas: adição, multiplicação, comparação de grandezas, diferenciação, formação de colchetes de Poisson e por aí fora.

Podemos precisar o nosso ponto de vista da maneira seguinte:

Tese. *Tudo o que é objecto de estudo matemático (curvas e superfícies, funções, simetrias, cristais, quantidades da mecânica quântica, etc.) pode ser “coordenatizado” ou “medido”. No entanto, para lograr uma tal “coordenatização” os números “ordinários” não são de modo algum adequados.*

Reciprocamente, quando encontramos um novo tipo de objecto, somos forçados a construir (ou a descobrir) novos tipos de “quantidades” para o “coordenatizar”. A construção e o estudo das quantidades que surgem desta forma é o que caracteriza o lugar da álgebra na matemática (de uma maneira muito aproximada, evidentemente).

Deste ponto de vista, o desenvolvimento de qualquer ramo da álgebra consiste em duas etapas. A primeira é o nascimento do novo tipo de objectos algébricos a partir de algum problema de coordenatização. A segunda etapa é a sua carreira subsequente, ou seja, o desenvolvimento sistemático da teoria dessa classe de objectos; nesta fase, a relação com os objectos de partida, ora se mantém íntima ora desaparece quase completamente. No que se segue(*) tentaremos não perder de vista estas duas etapas. Mas como os cursos de álgebra só se ocupam em geral da segunda etapa, manteremos o equilíbrio prestando um pouco de atenção à primeira.

Concluiremos esta secção com dois exemplos de coordenatização que são menos referidos do que os considerados até agora.

(*) Recordamos que o texto desta *Antologia* é o texto introdutório de um livro (N. do T.).

Exemplo 1. *O Dicionário da Mecânica Quântica.* Em mecânica quântica as noções físicas básicas são “coordenatizadas” através de objectos matemáticos, da forma que se representa no quadro 1.

Exemplo 2. *Modelos Finitos para os Sistemas de Incidência e os Axiomas de Paralelismo.* Começemos com uma pequena digressão. Na construção axiomática da geometria é frequente considerar apenas uma parte dos axiomas em vez de os tornar na totalidade; para ser claro limitamo-nos à geometria plana. Põe-se então a questão de saber que realizações são possíveis do sistema de axiomas escolhido: existirão outros sistemas de objectos, além da geometria plana “usual”, para os quais o conjunto de axiomas é satisfeito? Consideramos agora um conjunto de axiomas muito natural relativos a “incidência e paralelismo”.

- a) Dois quaisquer pontos distintos determinam uma e uma só recta.
- b) Dada uma recta e um ponto que não lhe pertence existe uma e uma só recta que passa pelo ponto e que não intersecta aquela recta (ou seja que lhe é paralela).
- c) Existem pelo menos três pontos não colineares.

Sucedee que este conjunto de axiomas admite muitas realizações, algumas delas em franco conflito com a nossa intuição, compreendendo apenas um número finito de pontos e de rectas. Duas realizações desse tipo estão representadas nas figuras 1 e 2. O modelo da figura 1 tem 4 pontos A, B, C, D e 6 rectas $AB, CD; AD, BC; AC, BD$. O da figura 2 tem 9 pontos $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e 12 rectas $ABC, DEF, GHI; ADG, BEH, CFI; AEI, BFG,$

Quadro 1

Noção física	Noção matemática
Estado de um sistema físico	Recta φ num espaço de Hilbert complexo de dimensão infinita
Grandeza física escalar	Operador auto-adjunto
Grandezas simultaneamente mensuráveis	Operadores que comutam
Grandeza no estado φ com o valor preciso λ	Operador admitindo o vector próprio φ de valor próprio λ
Conjunto dos valores possíveis como medidas de uma grandeza	Espectro de um operador
Probabilidade de transição de um estado φ para um estado ψ	$ (\varphi, \psi) $, onde $ \varphi = \psi = 1$

CDH ; CEG , BDI , AFH . É fácil verificar que os axiomas a), b) e c) são satisfeitos; na nossa lista de rectas, as famílias de rectas paralelas estão separadas com ponto e vírgula.

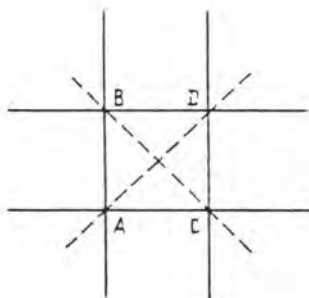


Fig. 1

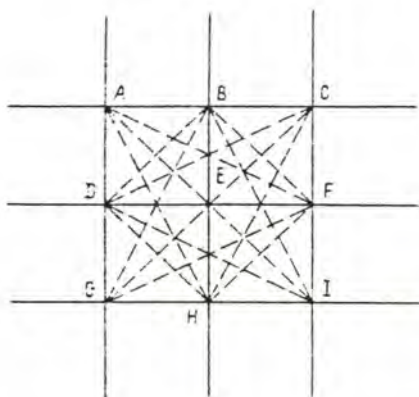


Fig. 2

Voltemos ao nosso tema principal e tentemos coordenatizar os modelos para os axiomas a), b), c) acabados de construir. Para o primeiro caso usaremos a seguinte construção: escreveremos 0 ou 1 para a propriedade de um inteiro ser par ou ímpar respectivamente; definiremos então operações sobre os símbolos 0 e 1 por analogia com as propriedades desses inteiros relativos à adição e multiplicação.

Por exemplo, como a soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar escreveremos $0 + 1 = 1$, e assim por diante. O resultado pode exprimir-se nas "tabelas da adição e da multiplicação" das figuras 3 e 4.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Fig. 3

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Fig. 4

O par de entidades 0 e 1 com as operações assim definidas servir-nos-á para coordenatizar a "geometria" da figura 1. Com este propósito atribuiremos aos pontos, coordenadas (x, y) de acordo com:

$$A = (0, 0), \quad B = (0, 1), \\ C = (1, 0), \quad D = (1, 1).$$

É fácil verificar que as rectas da geometria são então definidas pelas equações lineares seguintes:

$$AB: 1x = 0; \quad CD: 1x = 1; \\ AD: 1x + 1y = 0; \\ BC: 1x + 1y = 1; \\ AC: 1y = 0; \quad BD: 1y = 1.$$

Na verdade estas são as 6 únicas equações não triviais que podem formar-se usando as quantidades 0 e 1 .

A construção é análoga para a geometria da figura 2, embora seja ligeiramente mais complicada: suponhamos que repartíamos o conjunto dos inteiros em

três conjuntos U , V e W , da maneira seguinte:

U = inteiros divisíveis por 3,

V = inteiros com resto 1 na divisão por 3,

W = inteiros com resto 2 na divisão por 3.

As operações com os símbolos U , V , W definem-se como no primeiro exemplo; assim, um número em V mais um número em W dá sempre um número em U , de modo que fazemos $V + W = U$; analogamente, o produto de dois números em W é sempre um número em V de modo que temos $W \cdot W = V$. É fácil elaborar as correspondentes tabelas de adição e multiplicação.

Não custa então verificar que a geometria da figura 2 é coordenatizada com U , V , W através de:

$$\begin{aligned} A &= (U, U), & B &= (U, V), & C &= (U, W), \\ D &= (V, U), & E &= (V, V), & F &= (V, W), \\ G &= (W, U), & H &= (W, V), & I &= (W, W); \end{aligned}$$

mais uma vez, é possível exprimir as rectas através de todas as equações lineares que podem escrever-se usando os símbolos U , V , W ; por exemplo, AFH é dada por $Vx + Vy = U$ e DCH por $Vx + Wy = V$.

Construímos assim sistemas finitos de números para coordenatizar geometrias finitas. Voltaremos mais tarde à discussão destas construções.

Estes poucos exemplos já dão uma primeira ideia de que espécie de objectos pode ser usada numa ou noutra versão de "coordenatização". Para começar, a colecção de objectos a usar deve ser rigorosamente delineada; por outras palavras devemos indicar um conjunto (ou mesmo vários conjuntos) de que esses objectos possam ser elementos. Em segundo lugar devemos poder operar sobre esses objectos, isto é, devemos definir operações que nos permitam obter novos elementos, a partir de um ou mais elementos do conjunto (ou conjuntos).

Para já mais nenhuma restrição terá de ser imposta, na natureza dos conjuntos a usar; do mesmo modo uma operação pode ser uma regra completamente arbitrária que a k elementos associa um novo elemento. É certo que essas operações preservarão usualmente algumas semelhanças com as operações entre números. Em particular em todas as situações que encontraremos, $k = 1$ ou 2 . Os exemplos básicos de operações com as quais todas as construções subsequentes devem comparar-se serão: a operação $a \mapsto -a$ que a um número associa o seu oposto; a operação $b \mapsto b^{-1}$ que a cada número diferente de zero associa o seu inverso (nestes casos $k = 1$); e as operações $(a, b) \mapsto a + b$ e $a \cdot b$ de adição e multiplicação (aqui $k = 2$).

MOVIMENTO CIENTÍFICO

História e desenvolvimento da ciência em Portugal no século XX

Levou a efeito a Academia das Ciências de Lisboa, de 13 a 17 de Novembro de 1989, um colóquio dedicado à História e Desenvolvimento da Ciência em Portugal no século XX. Tendo Vasconcellos Marques, como secretário-geral, e Armando Pombeiro como vice-secretário, inseriu-se esta iniciativa na sequência do colóquio de 1985, sobre o mesmo tema, mas sem incluir o século XX, cujas actas se acham publicadas pela própria Academia, sob o título "História e Desenvolvimento da Ciência em Portugal".

O colóquio pretendeu cobrir a quase totalidade das áreas do conhecimento científico e tecnológico, nomeadamente a Matemática, a Física, a Química, as Ciências Naturais (Geologia, Biologia e Botânica), as Engenharias (Civil, Mecânica, Electrotécnica, de Minas e de Materiais), as Ciências Médicas, a Agronomia e, ainda, os Estudos Literários e Linguísticos, a História, a Geografia, a Filosofia e Pedagogia, a Sociologia, o Direito e a Economia Política.

Dada a sobrecarga do programa, pela amplitude temática que a organização, louvavelmente, procurou, e perante a opção da não realização de sessões paralelas, foram os conferencistas coarctados

pelo reduzido tempo de que dispuseram, facto que os obrigaria a referir, apenas de modo resumido, alguns dos aspectos que tinham em mente. Para além deste senão, seria, sem dúvida de grande interesse, a realização de uma sessão exclusivamente dedicada à "geração científica dos anos 40, em Portugal", cuja acção concertada não foi assim consagrada, dando-se somente uma visão dispersa, em cada área da Ciência, da sua actividade científica e cívica, que reputamos como o fenómeno mais importante da Ciência em Portugal, na primeira metade do século XX.

O colóquio iniciou-se, na sala Maynense, com a sessão dedicada à Matemática, coordenada por J. Tiago de Oliveira, que incorporou a mesa juntamente com Pinto Barbosa, que presidiu, e Vasconcellos Marques. Começou este último por referir alguns aspectos da organização, tendo salientado o elevado número de comunicações apresentadas, todas a incluir nos três volumes, previstos, das actas do colóquio.

Jaime Campos Ferreira foi o primeiro orador, com uma comunicação intitulada "Algumas figuras dominantes da Análise Matemática em Portugal (de Gomes Teixeira a Sebastião e Silva)", constando de uma parte sobre as obras de Gomes Teixeira, Vicente Gonçalves e Mira Fernandes, uma outra sobre a geração de 40

(relativamente à qual salientou a acção de António Aniceto Monteiro, Bento de Jesus Caraça e Ruy Luís Gomes), para numa última parte se ater exclusivamente à obra de Sebastião e Silva (que um pouco mais circunstanciadamente pormenorizou, mormente no que respeita aos trabalhos sobre Cálculo Simbólico e Teoria das Distribuições).

Seguiu-se-lhe Margarita Ramalho, para se debruçar sobre "Alguns aspectos da Álgebra em Portugal no século XX". Começou por salientar o grande interesse que, nos anos 30, o aparecimento do livro de Van Der Waerden suscitou. Indicou Mira Fernandes como o primeiro matemático português a interessar-se pela resolubilidade algébrica e a Teoria dos Grupos, em cujo estudo seria posteriormente seguido por Madureira e Sousa, e Almeida e Costa. Relativamente à Teoria dos Reticulados, destacou principalmente os trabalhos de António Aniceto Monteiro, e ainda os de Hugo Ribeiro, José Morgado, Pereira Gomes e Almeida e Costa. Finalmente na Teoria dos Anéis, procedeu a uma análise breve da obra de Almeida e Costa, e da influência que ele teve no desenvolvimento de outros aspectos importantes da teoria, através de outros matemáticos, como Tiago de Oliveira e Maria Luísa Galvão.

A finalizar a sessão, tomou a palavra António Ribeiro Gomes, que procedeu a uma síntese da sua comunicação, intitulada: "A Matemática Aplicada em Portugal no século XX". Nesta área englobou os domínios da Física-Matemática, da Mecânica Racional e Celeste, da Astronomia, das Probabilidades e da Estatística. Assim, começou por referir o papel incrementador que Pedro José da Cunha teve, relativamente aos três primeiros domínios

indicados, cuja acção se viu prosseguida, quer nos trabalhos de Ruy Luís Gomes, quer, principalmente, nos de Mira Fernandes, em relação aos quais mais demoradamente se debruçou. No que respeita à Astronomia realçou a actividade de Manuel Pereira de Barros, em consequência da construção do Observatório Astronómico do Porto; a terminar, salientou, no âmbito das Probabilidades e da Estatística, a acção de Pacheco de Amorim.

Nos intervalos das três comunicações, foram feitas algumas intervenções por parte da assistência, das quais nos merecem uma referência especial, pelo excepcional interesse que tiveram, as de Abreu Faro, sobretudo pelo modo como realçou alguns aspectos das personalidades de Mira Fernandes, Vicente Gonçalves e Sebastião e Silva, e da importância que cada um deles teve no ensino universitário.

Apesar dos pequenos reparos que efectuámos, não queremos deixar de destacar a excepcional envergadura desta realização, que, confirmada pelos discursos de F. Dias Agudo e J. Tiago de Oliveira, na sessão de encerramento, presidida pelo Presidente da República, parece inserida num esforço notável de voltar a dar à Academia o papel importante que desenvolveu no passado. A julgar pelo discurso final do seu presidente, J. Pinto Peixoto, — intitulado "Quo vadimus, Academia das Ciências" — parece, esta realização, não ser uma acção isolada, mas antes integrar-se num projecto de maior participação cultural e científica. Dessa alocução, uma boa notícia para os matemáticos: a publicação, para breve, dos volumes que faltam (IV e V) das Obras de Pedro Nunes.

(José M. Ferreira)

Conferência europeia de mulheres em matemática

O grupo *European Women in Mathematics* realizou de 16 a 18 de Fevereiro último, na Reitoria da Universidade Técnica de Lisboa, o seu 4º Encontro. Esta organização, fundada há mais de 40 anos, desde sempre apoiou o ingresso das mulheres matemáticas na carreira universitária.

A inserção plena e o reconhecimento da mulher em todas as áreas científicas, tornarão obsoletos este tipo de encontros. A sua existência revela, porém, que são reconhecidos como necessários por sectores significativos da comunidade matemática.

Em relação a este encontro parece-nos de lamentar a escassa divulgação dada pelas suas organizadoras.

(J.M.F.)

Série de conferências por I. Grattan-Guinness sobre História da Matemática

Durante o mês de Abril foram proferidas conferências deste historiador da matemática, em Lisboa, Braga, Coimbra e Évora. A realização das conferências deveu-se a um acordo entre a Royal Society of London e a Academia das Ciências de Lisboa, inserindo-se em actividades do Seminário Nacional de História da Matemática, com o patrocínio da Sociedade Portuguesa de Matemática e a colaboração dos Departamentos de Matemática das Universidades de Lisboa, Minho, Coimbra e Évora e ainda do Departamento de Educação e de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa

e do Seminário de Lógica Matemática, em curso no Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, de Lisboa. Eis os títulos das conferências:

- Current work in History of Mathematics
- Three lectures on founders of Modern Logic:
 1. Boole: Logic as Applied Mathematics
 2. Peirce: between Logic and Mathematics
 3. Russell: Mathematics as Applied Logic
- Three traditions in Classical Mechanics
- History of Mathematics in Mathematics Education
- Three lectures on the founders of the Calculus:
 1. Before and with Newton and Leibniz
 2. Euler versus Lagrange
 3. Cauchy's reforms
- The life and work of Joseph Fourier

Congresso sobre História da Universidade

5-9 de Março de 1990

O Congresso realizou-se com o objectivo de celebrar o 7º Centenário da Fundação da Universidade de Coimbra e o de desenvolver estudos científicos re-

lativos à História da Universidade. Estavam inscritas 113 comunicações sobre os seguintes temas, entre outros:

- Fontes para a História da Universidade;
- Universidade e Igreja;
- Universidade e Poder Político;
- Universidade como Instituição;
- Universidade, Ciência e Cultura;
- Universidade e Sociedade;
- Conflitos académicos;
- Coimbra, cidade universitária;
- História Económica da Universidade;
- A Universidade Portuguesa e as Universidades Americanas e Europeias.

Fractal 90

1st IFIP Conference on Fractals

"Os fractais na ciência fundamental e aplicada"

6-8 de Junho de 1990

Conferência organizada pela Associação Portuguesa de Informática, representando a International Federation for Information Processing (IFIP); teve lugar em Lisboa no Laboratório Nacional de Engenharia Civil e na Fundação Calouste Gulbenkian.

6^o Congresso Português de Informática

A Associação Portuguesa de Informática, promoveu este Congresso em Lisboa, de 25 a 29 de Junho de 1990, na Fundação Calouste Gulbenkian.

Física 90

7^a Conferência Nacional de Física

Lisboa, 24-27 de Setembro de 1990

Organizada pela Sociedade Portuguesa de Física a Conferência decorrerá nas instalações do Museu de Ciência da Universidade de Lisboa e do Museu Nacional de História Natural, ambos situados no edifício da antiga Escola Politécnica, Rua da Escola Politécnica, 56, 1200 LISBOA.

Durante a realização da Conferência terão lugar as Olimpíadas Nacionais de Física, da responsabilidade da Delegação Regional de Lisboa da Sociedade Portuguesa de Física.

Estão previstas as seguintes "Oficinas e Seminários":

- 1 - O Retroprojector nas aulas de Física.
- 2 - O Computador no Ensino da Mecânica.
- 3 - Estudo Experimental da Cinemática e Dinâmica.
- 4 - Aquisição de Dados em Computador no Ensino Secundário.
- 5 - Osciloscópio. Utilização no Ensino Secundário.
- 6 - Exploração do Telescópio nas aulas de Física.
- 7 - Estratégias Metacognitivas e Resolução de Problemas.
- 8 - Relatividade Restrita no Ensino Secundário.
- 9 - Mecânica Quântica no Ensino Secundário.
- 10 - História da Física na Emergência de alguns Conceitos.

- 11 – Física e Medicina.
- 12 – Física e Ambiente.
- 13 – A Física e a Bola de Bilhar.
- 14 – Física e Arquitectura.
- 15 – Como montar Clubes de Ciência.
- 16 – Laser. Utilizações no Ensino.
- 17 – O Ensino da Termodinâmica.
- 18 – A Astronomia no Ensino Secundário.
- 19 – Holografia.
- 20 – Física — Baixas Temperaturas.
- 21 – Física — Baixas Pressões.

1ª Conferência em Estatística e Optimização

3-5 de Dezembro de 1990

Com lugar em Tróia, terá como língua oficial o Português e o Inglês, sendo constituída por Sessões Plenárias e dividida por Sessões Paralelas, uma de Estatística e outra de Optimização.

DATAS IMPORTANTES:

- 15 de Maio de 1990 – Pedido de sumários, inscrição final;
- 1 de Julho de 1990 – Limite de envio de sumários;
- 30 de Setembro de 1990 – Limite de envio das comunicações.

CONTACTO:

Comissão Organizadora da 1ª Conferência Estatística e Optimização,
CT Estatística e Aplicações,
Av. 24 de Julho, 134 – 5º,
1300 LISBOA,
Tel: (01) 67 83 05/6/7.
Telefax: 67 83 08.

Centro de Astrofísica do Porto cria Núcleo de Divulgação

Criado em 1989, o Centro de Astrofísica da Universidade do Porto propõe-se desenvolver um Núcleo de Divulgação com o objectivo de promover a divulgação científica na área de Astronomia/Astrofísica.

O arranque deste Núcleo, será, em princípio, feito através do envolvimento em tempo parcial dos alunos dos anos terminais da Licenciatura Interdisciplinar Física/Matemática Aplicada – ramo de Astronomia da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

CONTACTO:

Centro de Astrofísica da Universidade do Porto, Rua das Taipas, 135,
4000 PORTO.

Tel: (02) 38 03 13 / 38 07 69.

Telex: 28 109 FCUP P.

Telefax: (02) 69 87 36.

Encontro sobre Computadores no Ensino da Física e da Química

22-24 de Fevereiro de 1990

Em organização conjunta da Sociedade Portuguesa de Física e Projecto Minerva, foram objectivos deste encontro:

- Reunir docentes do Ensino Básico, Secundário e Superior, interessados na utilização de computadores em Física e Química;
- Divulgar “software” desenvolvido ou existente em Portugal para o Ensino da Física e da Química;
- Discutir as várias modalidades de exploração do computador no ensino e sua integração curricular.

No âmbito das actividades deste encontro, teve lugar um concurso de "software" dirigido a estudantes e procurou criar-se um Centro de Desenvolvimento e Divulgação de "software" Educacional para Física e Química.

No encontro houve conferências Plenárias, Comunicações orais, Demonstrações, Painéis e Exposições.

CONTACTO:

Comissão Organizadora do Encontro,
Dep. de Física da Universidade de
Coimbra, Rua Larga,
3000 COIMBRA.

Tel: (039) 236 71/75.

Telex: 52 601 DEFIUC P.

Telefax: (039) 291 58.

RecPad 90

29 e 30 de Março de 1990

O 2º Encontro da Associação Portuguesa de Reconhecimento de Padrões, teve lugar na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e contou com a participação de convidados nacionais e estrangeiros.

CONTACTO:

Associação Portuguesa de Reconhecimento de Padrões, Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL, Dep. de Informática, 2825 Monte da Caparica.
Tel: (01) 295 44 64.

Homenagem da Revista de História das Ideias ao Professor Joaquim de Carvalho

Em 1992 ocorre o 1º centenário do nascimento do Prof. Joaquim de Carvalho.

O Instituto de História e Teoria das Ideias, fundado pelo Prof. J.S. da Silva Dias na sequência do Seminário de Cultura Portuguesa, não poderia ficar indiferente a este acontecimento. Na verdade, o Prof. Joaquim de Carvalho, que foi docente desta Faculdade e director da Imprensa da Universidade, extinta pelo governo de Salazar e que agora com os novos Estatutos irá ser restaurada, foi, acima de tudo, um dos mais significativos historiadores da cultura. Este Instituto sente-se, assim, de alguma forma, como herdeiro de uma tradição científica e pedagógica em que o Prof. Joaquim de Carvalho pontificou.

(Nota extraída da Revista de História das Ideias, vol. 11, publicada pelo Instituto de História e Teoria das Ideias, da Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra, Coimbra, 1989.)

DOCUMENTOS

A Encyclopédie Méthodique, publicada a partir de 1751 sob o impulso de D'Alembert, o abade Bossut, Diderot, o marquês de Condorcet e outros, é um símbolo da Revolução Francesa. O Infante D. Henrique é ele próprio um símbolo das iniciativas portuguesas na descoberta de novos mundos.

Em plenas comemorações da Revolução Francesa e dos Descobrimentos Portugueses, a *Gazeta de Matemática* pediu ao Professor Luís de Albuquerque — velho colaborador da *Gazeta* — um comentário ao passo que se reproduz da Encyclopédie. A resposta não se fez esperar e veio acrescida de um outro texto sobre a vida da *Gazeta* que é por si só um documento.

Passemos ao comentário do Professor Luís de Albuquerque:

Um comentário acerca de um texto da Encyclopédie Méthodique, de 1784

por *Luís de Albuquerque*

1. É com grande alegria que vejo renascer este sonho que foi e vai ser a "Gazeta de Matemática"; e espero que o novo fôlego da revista venha a ter em conta os erros e as frustrações da primeira e por vezes penosa série.

A "Gazeta" apareceu há meio século com claros propósitos de intervenção; uma das suas intenções era questionar a estrutura e o conteúdo do ensino da Matemática, sobretudo a nível secundário, e por isso queria sobretudo chegar aos liceus e aos que neles ensinavam. Penso que falhou nesse propósito, e julgo que não terá sido apenas por ser dirigida e am-

parada por gente "mal vista"; se assim foi de facto, seria bom indagar-se porque tal aconteceu, para se não repetirem agora os erros que levaram ao desaire.

A "Gazeta" tinha há cinquenta anos construído uma bela obra se tivesse podido ou tivesse sabido cumprir o seu plano fundamental. Todavia, a sua acção interventora não é agora menos necessária do que era então; sabemos todos as dificuldades com que se debate o ensino não superior de Matemática (o superior também terá as suas, mas aí a história será um tanto diferente!); talvez isso resulte sobretudo do facto de se ter criado subitamente

Depuis la découverte de la boussole, la navigation, toujours aidée de l'Astronomie, se perfectionnoit de jour en jour, & s'ouvroit un champ plus étendu. Les anciens, qui n'avoient aucun moyen de connoître à chaque instant la position du vaisseau sur le globe, osoient rarement perdre de vue les côtes de la mer. La boussole leva cet obstacle; & on put entreprendre, avec sûreté, de marcher à travers les mers comme à travers les terres. En 1420, le Prince Henri, fils de Jean I, Roi de Portugal, alla chercher sur l'Océan de nouvelles régions; il découvrit l'Isle de Madere; puis, tournant vers l'orient & le midi, il parcourut une partie de la côte occidentale de l'Afrique. Il eut une foule d'imitateurs: on connoît les expéditions de *Vasco de Gama*, de *Christophe Colomb*, d'*Americ Vespuce*, & de plusieurs autres: ce n'est pas ici le lieu d'en parler. Pour représenter la route que le vaisseau devoit suivre, & pour le diriger en effet suivant cette route, le Prince Henri imagina les cartes marines, connues sous le nom de *cartes plates*. L'usage des globes terrestres étoit très-ancien: celui des cartes, plus récent, avoit la préférence, depuis que Ptolomée & les Arabes avoient donné des méthodes géométriques pour projeter les cercles de la terre sur une simple surface plane; mais le prince Henri, qui vouloit marquer par des lignes droites, les différens rhumbs de vent d'un vaisseau, ne pouvoit y employer ces cartes, & il fut obligé d'imaginer une autre construction. Il suppose que les méridiens sont exprimés par des lignes droites parallèles, & les cercles parallèles à l'équateur, par d'autres lignes droites parallèles, perpendiculaires aux premières; il trace sur la carte la rose des vents; ensuite, pour marquer la route d'un vaisseau qu'il suppose suivre un même rhumb de vent, il mène du lieu de départ au lieu d'arrivée une ligne droite, & il croit que la ligne des vents, parallèle à celle-là, remplit l'objet proposé. Mais ces cartes ne peuvent réellement servir que pour de petites étendues du globe. Lorsque les espaces sont considérables, les degrés des cercles parallèles à l'équateur ne peuvent pas être représentés, d'un cercle à l'autre, par des lignes égales, comme l'auteur le suppose; car on fait que les circonférences de ces cercles diminuent continuellement de l'équateur aux poles. De plus, la route, par un même rhumb de vent, n'est pas, dans cette construction même, une simple ligne droite, si ce n'est dans les deux hypothèses très bornées où le vaisseau suivroit toujours le même méridien ou le même parallèle. On sentit bientôt ces inconvéniens, & on y apporta du remède dans les deux siècles suivans.

Fragmento de uma página do *Discours Préliminaire* da Encyclopédie (Mathématiques, Tome I, pág. *zliv*) a que se refere o comentário especialmente feito para a *Gazeta de Matemática* pelo Professor Luís de Albuquerque.

um número incontável de escolas e, por falta de suportes financeiros, se ter adiado para um mais tarde que ainda não chegou a implantação das correspondentes estruturas mínimas.

Pode ser uma explicação da “crise” que estamos vivendo, mas não passa de uma hipótese, evidentemente. Creio que a “Gazeta de Matemática” podia e devia ser a patrocinadora de um grande inquérito sobre este assunto.

Peço me relevem uma opinião que ultrapassa o que me foi pedido. Mas estas coisas “mexem” connosco.

2. Vejamos agora o que posso dizer acerca do “Discours Préliminaire” que o abade Bossut escreveu para o Tomo I da parte dedicada à Matemática (os franceses usavam, e usam ainda, a forma plural) da *Encyclopédie Méthodique*, de 1784. Para que se veja que os *enciclopédicos* afinal não sabiam tudo...

Não falarei da divisão que Bossut faz da Matemática em dois ramos; podia ser válida ou aceitável no seu tempo, mas está de há muito ultrapassada; o *enciclopédico* abade não foi profeta...

Muito pior do que isso, contudo, é falar do passado com muito deficiente informação. Diz ele que depois “da descoberta da bússola a navegação, sempre apoiada pela Astronomia, se aperfeiçoou dia a dia”; não data a descoberta (e bem!), mas exagera claramente a intervenção da Astronomia na náutica; isso só teve uma importância decisiva por meados do século XV, mas revestiu-se de aspectos bastante elementares.

Em seguida Bossut afirma que, em 1420, o “príncipe Henrique, filho de D. João I, rei de Portugal, foi procurar no

oceano (*sic*) novas regiões, e descobriu a ilha da Madeira; depois, dirigindo-se para o oriente e para o sul, percorreu uma parte ocidental da África”.

Ora bem: sabe-se sem qualquer dúvida que a Madeira, Porto Santo, Desertas e Selvagens eram conhecidas no século XIV; também se sabe que, a respeito de navegações, o infante se limitou a ir três vezes a Ceuta (uma para tomar a fortaleza, outra para a descercar e a última para daí partir a caminho de Tânger, onde o esperava um desaire militar que custou a vida ao irmão D. Fernando); quer dizer: nunca navegou pelo largo oceano e nunca percorreu a costa ocidental africana. Mas esta última parte da afirmação do abade ainda se pode aceitar, se a entendermos num sentido metafórico: D. Henrique não esteve pessoalmente empenhado em tais navegações, mas patrocinou ou autorizou outros para que o fizessem; por isso no século XIX o cognominaram de “navegador”.

ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE.

MATHÉMATIQUES,

Par MM. D'ALEMBERT, l'Abbé BOSSUT, DE LA LANDE,
le Marquis de CONDORCET, &c.

TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez PANCEVOUX, Libraire, hôtel de Thou, rue des Poitevins

A LIÈGE,

Chez PLOMTEUX, Imprimeur des Etats.

M. DCC. LXXXIV.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

A seguir o autor, que possivelmente leu um tratado de geografia de George Fournier (o mais antigo livro que sei ter divulgado o disparate), afirma categoricamente que “o infante D. Henrique imaginou as cartas marítimas, conhecidas sob o nome de cartas planas”, e explica que, se o uso dos globos era muito antigo, “o das cartas, mais recente, se tornou preferencial, desde que Ptolomeu e os Árabes indicaram métodos geométricos para projectar os círculos da Terra sobre uma simples superfície plana”.



DISCOURS PRÉLIMINAIRE,

PAR M. L'ABBÉ BOSSUT.

LE NOM SEUL des Mathématiques, qui, dans son étymologie, veut dire *Instruction*, *Science*, peint d'une manière juste & précise l'idée noble qu'on doit s'en former. En effet, elles ne font qu'un enchainement de principes, de raisonnemens & de conclusions, que la certitude & l'évidence accompagnent toujours: caractère propre des connoissances scientifiques.

On fait que les Mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs; par exemple, les distances, les surfaces, les vitesses, &c. Elles se divisent en *Mathématiques pures* & *Mathématiques mixtes*, autrement appellées *Sciences Physico-Mathématiques*.

Fragmento de uma página do
Discours Préliminaire da Encyclopédie
(Mathématiques, Tome I, pág. 1).

É claro que o infante D. Henrique não inventou qualquer tipo de carta, e também é seguro (sabemo-lo hoje, desde que se descobriu uma carta babilónica, por exemplo) que o desenho cartográfico sobre um plano (de tijolo ou de papiro) é muito anterior à

construção de globos (os povos a que devemos as mais antigas cartas hoje conhecidas talvez nem tivessem a noção de esfericidade da terra); e se Ptolomeu propôs, na verdade, vários sistemas convencionais de representação cartográfica, os Árabes não tiveram nisso qualquer interferência.

No entanto, Bossut vai mais longe e escreve: “o príncipe Henrique, que desejava representar por linhas rectas os diferentes rumos de ventos (seguidos) por um navio, não podia empregar essas cartas (as de Ptolomeu e as dos Árabes, entenda-se), e foi obrigado a imaginar uma outra construção. Supôs que os meridianos fossem representados por linhas rectas paralelas, e os círculos paralelos ao equador (isto é: os paralelos terrestres) por outras linhas rectas paralelas, perpendiculares às primeiras; traçou uma rosa de ventos na carta; depois, para marcar a derrota de um navio que supostamente seguia um rumo constante, traçou do lugar de partida ao lugar de chegada uma linha recta, e acreditou que a linha de rumo paralela a essa recta satisfazia o objectivo desejado”.

Pode-se dizer que tudo isto é um grande equívoco.

Em primeiro lugar, e como ficou dito, o infante D. Henrique não teve a mínima interferência no tipo da cartografia do seu tempo; ela continuava então a ser praticada como o faziam desde há mais de um século cartógrafos do Mediterrâneo. Se bem entendo o que Bossut quer dizer, ele admitiu que a “carta henriquina” podia ser coberta de uma quadrícula, a partir de uma escala de latitudes (aliás abusivamente introduzida nas cartas tradicionais) e de uma escala igual aposta à linha equatorial; a quadrícula resultaria de traçar, a partir dessas escalas, de pseudo-

-meridianos rectilíneos e de paralelos ou pseudo-paralelos também rectilíneos; isto é um “fantasma histórico”; nunca existiu, mas espalhou-se por escritos de historiadores modernos com o pomposo mas bem falso nome de “carta plana quadrada”.

Além disso, D. Henrique e os seus navegadores nunca terão encarado o problema do traçado na carta de uma linha de rumo constante, como pretendeu Bossut. Isso foi preocupação de Pedro Nunes em 1537. Ele e, depois, Gerard Krammer (Mercator) tiveram perfeita consciência do problema a que o abade alude no final do

seu arrasado; coube ao matemático flamengo resolvê-lo praticamente através da chamada carta de “latitudes crescidas”, a que chegou por via para nós desconhecida; mas a novidade levou muitos anos a ser aceite pelos marinheiros, mesmo os compatriotas de Mercator.

Feitas estas observações, posso dizer que me parece notável que as grandes navegações dos séculos XV e XVI ainda estivessem de tal modo presentes nos sábios do “século das luzes” que Bossut, embora com incorrecções, lhes concedesse tão longo espaço na sua “Introduction”.

Evolução dos temas matemáticos nos últimos 100 anos

Segundo o Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (Anuário dos Progressos da Matemática), primeira publicação anual de recensão bibliográfica dedicada à matemática, surgida em 1871, os temas matemáticos eram então os seguintes, subdivididos em 38 subcategorias:

História e Filosofia

Álgebra

Teoria dos Números

Probabilidades

Séries

Cálculo Diferencial e Integral

Geometria Analítica

Geometria Sintética

Mecânica

Física Matemática

Geodesia e Astronomia

Na actualidade, de acordo com as publicações congéneres, *Mathematical Reviews* e *Zentralblatt für Mathematik* os temas matemáticos são os seguintes, subdivididos em cerca de 3400 subcategorias:

Generalidades

História e biografia

Lógica matemática e fundamentos

Teoria dos conjuntos

Combinatória

Ordem, reticulados, estruturas algébricas ordenadas

Sistemas matemáticos gerais

Teoria dos números

Teoria dos corpos e polinómios

Anéis comutativos e álgebras

Geometria algébrica

Álgebra linear e multilinear: teoria das matrizes

Anéis associativos e álgebras
 Teoria das categorias, álgebra homoló-
 gica
 K -teoria
 Teoria dos grupos e generalizações
 Grupos topológicos, grupos de Lie
 Funções reais
 Medida e integração
 Funções de uma variável complexa
 Teoria do potencial
 Várias variáveis complexas e espaços
 analíticos
 Funções especiais
 Equações diferenciais ordinárias
 Equações às derivadas parciais
 Diferenças finitas e equações funcionais
 Sucessões, séries, somabilidade
 Aproximação e desenvolvimentos
 Análise de Fourier
 Análise harmónica abstracta
 Transformações integrais, cálculo ope-
 racional
 Equações integrais
 Análise funcional
 Teoria dos operadores
 Cálculo das variações e controlo ópti-
 mo; optimização
 Geometria
 Conjuntos convexos e tópicos geométri-
 cos relacionados
 Geometria diferencial
 Topologia geral
 Topologia algébrica
 Variedades e complexos celulares
 Análise global, análise em variedades
 Teoria das probabilidades e processos
 estocásticos

Estatística
 Análise numérica
 Ciência da computação
 Mecânica das partículas e sistemas
 Mecânica dos sólidos
 Mecânica dos fluidos
 Óptica, teoria electromagnética
 Termodinâmica clássica, transmissão
 de calor
 Mecânica quântica
 Estatística física, estrutura da matéria
 Relatividade
 Astronomia e astrofísica
 Geofísica
 Economia, investigação operacional,
 programação, jogos
 Biologia e ciências do comportamento
 Teoria dos sistemas: controlo
 Informação e comunicação, circuitos

(Estas divisões temáticas foram re-
 tiradas do número 1 de 1868 do
 Jahrbuch über die Fortschritte der
 Mathematik e da 1980 Mathemat-
 ics Subject Classification (1985 Re-
 vision), compilação dos gabinetes e-
 ditoriais de Mathematical Reviews
 e Zentralblatt für Mathematik.)

1980 **MATHEMATICS**
SUBJECT
CLASSIFICATION

(1985 Revision)

O estado da cultura científica portuguesa reflecte-se necessariamente na vida dos jornais científicos da época.

A dolorosa e educativa experiência que temos vivido com a publicação de dois jornais de matemática levam-nos mesmo a pensar que o estudo da vida administrativa, directiva e diplomática dos jornais científicos é susceptível de iluminar com novas cores o ambiente científico das épocas em que se publicaram.

A indiferença e o derrotismo na hora em que nascem os jornais. O silêncio e a expectativa perante aqueles que não morrem à nascença. O ataque à intriga quando o jornal firma a sua posição.

Quantos jornais científicos não desapareceram como resultado da maldade ou da indiferença dos homens? Quantos sacrifícios, quantas horas de trabalho e canseiras inutilizadas pela incompreensão do meio? Mas também que alegria e contentamento não provoca o esforço dispendido numa tarefa que transcende o interesse imediato de cada um?

Por detrás da serenidade das comunicações científicas encontra-se uma vida real feita de lutas e paixões à imagem e semelhança dos homens.

PREÇO AVULSO: 450 escudos

PREÇO DA ASSINATURA (2 números): 900 escudos

600 escudos para os sócios da S.P.M.

A Gazeta de Matemática precisa de si:

ASSINE A REVISTA, DIVULGUE-A E COLABORE!

FALTAM-LHE NÚMEROS ANTIGOS?
DESEJA COMPLETAR A SUA COLECÇÃO?

Envie-nos o seu pedido! Apesar de alguns números da *Gazeta de Matemática* se encontrarem há muito tempo esgotados, estão ainda disponíveis muitos exemplares de números antigos. Encontram-se à venda ao preço unitário de 200 escudos (para os sócios da Sociedade Portuguesa de Matemática: 100 escudos).

A Gazeta de Matemática pretende constituir-se num pólo de interacção entre as pessoas interessadas em matemática. Não se tratando de uma revista de investigação, os artigos para publicação deverão ser atraentes e acessíveis a estudantes de formação intermédia, do liceu à universidade, de modo a estimular um melhor ensino e uma melhor investigação. Os originais para publicação devem ser dactilografados.

———— * ————

The aim of the *Gazeta de Matemática* is to provide an interactive flow concerning mathematical interested people. As this is not a research journal, papers for publication should be attractive and accessible to undergraduated students in order to stimulate good teaching and good research. Originals for publication must be dactilographed.

———— * ————

Gazeta de Matemática veut être un pôle d'interaction pour tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques. Étant donné qu'il ne s'agit pas d'une revue de recherche, les articles à publier devront être attrayants et accessibles aux étudiants de formation intermédiaire, du lycée à l'université, de manière à stimuler un meilleur enseignement et une meilleure recherche. Les originaux à publier devront être dactilographiés.

SUMÁRIO

À guisa de explicação...

por *José Gaspar Teixeira*

Para a História da Álgebra em Portugal – I

por *José Morgado*

Sobre a obra lógica de José Sebastião e Silva

por *António Marques Fernandes*

PONTOS DE EXAME – 12º Ano de Escolaridade, *Análise Matemática I, Algoritmos, Estatística Experimental*

PROBLEMAS

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

MATEMÁTICA E JOGOS

CRÍTICA DE LIVROS

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

ANTOLOGIA

MOVIMENTO CIENTÍFICO

DOCUMENTOS

G A Z E T A D E M A T E M Á T I C A

EDITOR — *Gazeta de Matemática*

DIRECTOR — *J. Gaspar Teixeira*

SEDE: Av. da República, nº 37, 4º, 1000 LISBOA – PORTUGAL
