GAZETA DE MATEMÁTICA

ANO LXI

N.º 138

JANEIRO 2000

SUMÁRIO

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática

GAZETA DE MATEMÁTICA

ANO LXI | N.º 138 | JANEIRO 2000

SUMÁRIO

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática

FICHA TÉCNICA

Título
Gazeta de Matemática

Propriedade
Sociedade Portuguesa de Matemática, Av. da República 37, 4º, 1050-187 Lisboa – Telefone: 21 7939785, Fax: 21 7952349 – Internet: http://www.spm.pt/~spm

Director
Presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática

Conselho Editorial
Graciano de Oliveira (Director), Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 3000 Coimbra; gdoliv@mat.uc.pt

Vítor Neves (Director Adjunto), Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 3810-193 Aveiro; vneves@mat.ua.pt

António Batel Anjo, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 3810-193 Aveiro; batel@mat.ua.pt

António J. Antunes, Escola Secundária de José Estevão, Av. 25 de Abril 3810 Aveiro; ajantunes@lusoweb.pt

Fernanda Patrício, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 3000 Coimbra; mfsp@mat.uc.pt

José Sousa Pinto, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 3810-193 Aveiro; jspinto@mat.ua.pt

Assistente de Redacção
Delfim Marado Torres, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 3810-193 Aveiro; delfim@mat.ua.pt

Produção
Fundação João Jacinto de Magalhães

Design gráfico da capa
Gabinete de Imagem da Fundação João Jacinto de Magalhães

Impressão
Imprensa de Coimbra, L.da

Edição
N.º 138 • Janeiro de 2000

Tiragem
3000 Exemplares

ISSN
0373-2681

Depósito legal
36918/90

APOIOS
Este número foi apoiado pela Fundação Calouste Gulbenkian e pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia

GAZETA

DE

MATEMÁTICA

PUBLICADA POR

A. MONTEIRO, B. CARAÇA, H. RIBEIRO, J. PAULO, M. ZALUAR

1.º ANO - N.º 1 — PREÇO DÊSTE NÚMERO: 3$00 — JANEIRO 1940
DEPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA - LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

"A essência da matemática reside na sua liberdade"

George Cantor, Mathematische Annalen, Bd. 21, p. 564.

Fac-simile obtido de original gentilmente cedido para o efeito pelo Professor Doutor Jaime de Carvalho e Silva

Editorial

Devemos aos matemáticos da geração de quarenta a criação da Gazeta de Matemática. Geração de homens e mulheres cultos, interessados nos problemas da época, conscientes do atraso português empenharam-se com entusiasmo e gosto no que faziam. Não sendo tempo do matemático unidimensional, estudavam Matemática com os olhos postos no mundo.

Estudavam Matemática seduzidos pela vida. Deixaram obra feita e mais não fizeram porque não lho permitiram.

Fundaram a *Portugaliae Mathematica* e a Sociedade Portuguesa de Matemática.

Em 1939, António Monteiro, Bento Caraça, Hugo Ribeiro, Silva Paulo e Zaluar Nunes trouxeram a *Gazeta de Matemática* à luz do dia. Até 1976 publicaram-se 136 números e em 1990 apareceu o número 137. Hoje, com o número 138, damos continuidade ao projecto iniciado em 1939 e, para o sublinhar, apresentamo-lo com o aspecto gráfico que a Gazeta teve durante décadas.

A minha homenagem aos homens e mulheres da geração de quarenta.

A Gazeta de Matemática foi, de acordo com o subtítulo conhecido por várias gerações, o *jornal dos concorrentes ao exame de aptidão e dos estudantes das Escolas Superiores.* O tempo é, porém, feito de mudança. A sua orientação editorial já foi divulgada; passará a ser o jornal do ensino pré-universitário do século XXI e, a partir do próximo número, o seu grafismo concordará com os nossos dias.

A *Gazeta de Matemática* renasce no ano 2000, inaugurando o Ano Mundial da Matemática.

O Director

Sejamos dignos dos matemáticos portugueses da década de 40

F. R. Dias Agudo

Professor Jubilado da Faculdade de Ciências de Lisboa

Em meados da década de 1930 os planos de estudo das nossas Faculdades de Ciências eram, com ligeiras alterações, os que vinham do início da Primeira República e assim se manteriam por muitos mais anos, de tal modo que Vicente Gonçalves viria a escrever, em 1948, na Revista dos Alunos da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa:

"Nós, em Matemática, estamos cem anos atrás dos franceses. [...]. Não havia mal que as nossas Universidades ensinassem o abc das Matemáticas (superiores); por toda a parte se fazia o mesmo, e sensivelmente ao mesmo nível. Lamentável era, sim, que não passássemos das primeiras letras, mas disso não ia culpa a quem então ensinava. Em França, por exemplo, a par de cursos gerais (vastíssimos!), havia já inúmeros cursos especializados; a nação punha assim ao alcance dos seus filhos imensas possibilidades de cultura superior, que totalmente faltavam entre nós. [...]. Raras (Universidades) se resignavam à subalternidade da mera transmissão de conhecimentos vindos do passado ou de além fronteiras; em quase todas, velhas ou moças, se sentia aquela vibração criadora que denuncia nas nacionalidades (e nos indivíduos) a maioridade científica".

Entretanto a Junta de Educação Nacional, de 1929 (retomando os propósitos de uma Junta Orientadora dos Estudos que António Sérgio pretendera criar, sem êxito, em 1923) e o Instituto para a Alta Cultura, que a substituira em 1936, haviam nascido para fomentar a investigação científica entre nós. Da sua acção, traduzida, principalmente, pela concessão de bolsas e criação de centros de estudo, muitos cientistas vieram a beneficiar. Os bolseiros que nessa altura foram enviados para o estrangeiro sentiram bem o estado de atraso científico em que nos encontrávamos e tomaram iniciativas notáveis (à margem dos cursos oficiais) para tentar melhorar a situação.

Em 1937 é criada a *Portugaliae Mathematica*, revista destinada à publicação de trabalhos originais. Mas os nossos cientistas de então não se preocupavam exclusivamente com as suas próprias carreiras e tinham em mente toda a valorização da ciência no nosso país. E foi assim que, em 1940, surgiu a Sociedade Portuguesa de Matemática com o propósito de promover a actualização dos estudos de Matemática em Portugal, em conjugação com os respectivos centros de estudo da iniciativa do Instituto para a Alta Cultura; e também a *Gazeta de Matemática*.

Lia-se na *Apresentação*, no nº 1, de Janeiro de 1940:

"A Gazeta pretende ser um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de Matemática das Escolas Superiores portuguesas num campo onde elas encontram, por ventura, as maiores dificuldades – o campo da preparação prática. [...]. Para isso procederá à publicação de todos os pontos de exames de frequência e finais de todas as cadeiras de Matemáticas das Escolas Superiores, acompanhando-os dos resultados e, quando pareça conveniente, dos passos fundamentais da resolução ou, mesmo, da resolução completa. [...] Outro problema que à Gazeta merecerá um cuidado especial é a situação dos centenares de candidatos à admissão das Escolas Superiores [...]. Pois bem, a Gazeta de Matemática procederá à publicação dos pontos de matemática saídos dos exames de aptidão das várias Escolas, dará os esclarecimentos necessários para a sua resolução e assim contribuirá para orientar os candidatos. Em cada número publicar-se-á também um artigo de carácter didáctico, sobre um assunto de matemáticas elementares ou superiores. [...]. Para que o interêsse (da massa dos estudantes a que se dirige) seja mais acentuado, [...] cada número conterá algumas questões propostas para os leitores resolverem. [...]. E assim, com a colaboração de todos, redactores e leitores, a Gazeta de Matemática constituirá um organismo vivo, um instrumento eficiente de trabalho e, ao mesmo tempo, um Amigo, animado do desejo de bem servir. Este é, acima de todos, o seu objectivo fundamental".

A *Gazeta de Matemática* foi-se publicando com grande regularidade, em geral com quatro números por ano. O entusiasmo dos seus fundadores – António Monteiro, Bento Caraça, Hugo Ribeiro, José Paulo e Manuel Zaluar – era tal que, conforme nos relata A. Pereira Gomes no seu escrito "A Comunidade Matemática Portuguesa e a Investigação na Década de 40", alguns deles, quais ardinas, chegaram a vender o primeiro número na "Baixa Lisboeta".

Os matemáticos portugueses da década de 40 não descuravam, pois, a preparação dos estudantes das nossas escolas superiores e dos candidatos às universidades, sendo interessante ver como alguns deles, a especializarem-se no estrangeiro, não deixavam de enviar de lá, para publicação na *Gazeta*, trabalhos próprios ou traduções de grande interesse para a formação desses estudantes (e dos professores que os deviam ensinar). Davam-se também notícias do movimento matemático nacional e estrangeiro e apresentavam-se críticas de alguns livros.

Para se apreciar a riqueza do conteúdo da *Gazeta de Matemática* nesses anos de trabalho intenso, que terminaram abruptamente, em 1947, com o afastamento, por motivos políticos, de cientistas de grande valor, vejamos alguns dos artigos publicados (além de noticiários vários, pontos de exame, problemas propostos, críticas de livros), com a indicação do número em que surgiram:

Artigos sobre História da Matemática

Abel e Galois por Bento Caraça (nº 2)

Levi-Civita por A. de Mira Fernandes (nº 10)

Galileo e Newton por Bento Caraça (nº 11)

Sophus Lie por A. de Mira Fernandes (nº 12)

Henri Lebesgue por J. Vicente

Gonçalves (nº 12)

David Hilbert por Bernardino Machado (nº 14)

Evolução do pensamento matemático por Beppo Levi, tradução de M. Augusta Fernandez (nº 15)

Origen y evolución de algunas teorias matemáticas – Calculo de variaciones – Topologia por L. A. Santaló (nº 29)

Godofredo Guilhermo Leibniz por J. Gallego-Diaz (nº 30)

O ensino da Matemática na Reforma Pombalina por Luis Mendonça de Albuquerque (nº 34)

Artigos de carácter pedagógico

Sobre a maneira de estabelecer a fórmula de Taylor por J. Sebastião e Silva (nº 11)

Clubes de Matemática por António Monteiro (nº 11) – a que logo se seguiram notícias sobre a criação de tais clubes na Faculdade de Letras de Lisboa, Faculdade de Ciências de Lisboa, Instituto Superior de Agronomia, Instituto Superior Técnico

A teoria dos logaritmos no ensino liceal – polémica entre Bento Caraça e J. Sebastião e Silva (nºs 11, 12 e 13)

Como estudar matemática por W. C. Arnold, tradução de F. Schaller Dias e J. Paulo (nº 12)

Sobre o ensino da Matemática na Suiça por Maria Pilar Ribeiro (nºs 12, 13 e 24)

O trabalho manual e a iniciação matemática por F. Lobo de Ávila Lima (nº 14)

Sobre o ensino da matemática na Espanha por Sixto Rios (nº 14)

Os trabalhos manuais e o ensino da geometria por Clara O. Larson, tradução de J. Silva Paulo (nº 16)

Conselhos aos estudantes de matemática da Escola Politécnica Federal de Zurich, tradução de Maria do Pilar Ribeiro (nº 19)

A estratégia e táctica do estudo por W. W. Sawyer, tradução de F. Carvalho Araújo (nº 21)

Organização duma sala de Matemática por Ruy da Silva Leitão (nº 22)

A geometria demonstrativa no ensino liceal por Nicodemos Pereira (nº 25)

Sobre a índole do ensino da Matemática em Zurich por Hugo B. Ribeiro, bolseiro do I. A. C. em Zurich (nº 26)

Sobre a correlação entre a Matemática e a Física no Ensino Liceal por Rómulo de Carvalho (nº 31)

Um método activo no ensino da geometria intuitiva por Emma Castelnuevo, tradução de J. Sebastião e Silva (nº 33)

Debates sobre o (hoje tão actual) insucesso escolar

Algumas reflexões sobre os exames de Aptidão por Bento Caraça (nº 17)

Acerca do ensino da matemática nos liceus por José Cardoso Guerra (nº 18)

Sobre o treino de estudo dos nossos professores por Hugo B. Ribeiro, bolseiro do I. A. C. em Zurich (nº 19)

Sobre o ensino da matemática no curso liceal por António Augusto Lopes (nºs 19 e 25)

Algumas considerações por António dos Santos Almeida e *Nota* de Bento Caraça (nº 19)

Em guisa de continuação de um debate

por Bento Caraça (nº 23)

O problema do ensino em Portugal por Ruy Luís Gomes (nº 27)

Algumas deficiências em matemática de alunos dos Liceus por Maria Teodora Alves (nº 32)

Resultados dum exame de geometria - 1º ciclo por Maria Teodora Alves (nº 33)

Artigos que serviam de complemento ao pouco que se ensinava nos nossos cursos superiores ou sobre matérias do ensino secundário

A noção de contingente por António Monteiro (nº 1)

Corpos quadráticos e seus ideais por José da Silva Paulo (nºs 2 e 4)

Do integral de Riemann ao integral de Lebesgue por Henri Lebesgue, tradução de H. R. e *Nota* de Ruy Luís Gomes (nº 4)

Os métodos axiomáticos modernos e os fundamentos da matemática por J. Dieudonné, tradução de M. Z. (nº 8)

A noção de grupo topológico por Hugo Ribeiro, bolseiro do I. A. C. (nºs 17 e 18)

Pequena introdução à Álgebra Moderna por J. Sebastião e Silva, bolseiro em Roma do I. A. C. (nº 20)

Resolução de algumas equações transcendentes por J. da Silva Paulo (nº 20)

Estudo de algumas propriedades dos polinómios inteiros por J. J. Rodrigues dos Santos (nº 22)

Álgebras em involução por A. de Mira Fernandes (nº 24)

Da importância da topologia na matemática moderna por Achile Basi (nº 26)

Que é uma estrutura? por Garret Birkhoff, tradução de Manuel Zaluar (nº 27)

Que é um quadriculado? por Hugo Ribeiro, bolseiro do I. A. C em Zurich (nº 27)

Estrutura da divisibilidade dos inteiros por J. D. da Silva Paulo (nº 30)

Sobre o cálculo simbólico por José Sebastião e Silva (nºs 31, 32 e 33)

Artigos sobre aplicação da Matemática a diversas áreas

Aplicação do cálculo das probabilidades à resolução de um problema de Biologia por A. Quintanilha, H. B. Ribeiro e L. W. Stevens (nº 10)

O efeito Compton por A. Gibert, bolseiro do I. A. C. em Zurich (nº 27)

Una nueva teoria matemática de la division de las células por J. Gallego Diaz (nº 29)

Mathématiques et Biologie por G. Teissier (nº 30)

Conferências radiodifundidas para interessar o grande público na ciência e, em especial, na matemática

O valor social da investigação científica por Ruy Luís Gomes (nº 19)

Os objectivos da Junta de Investigação Matemática por António Monteiro (nº 21)

A investigação científica ao serviço da saúde por Corino de Andrade

A investigação científica e a defesa da produção vegetal por Branquinho d'Oliveira (nº 23)

A investigação científica nas ciências sociais por Fernando Pinto Loureiro (nº 24)

A investigação científica em Biologia e a sua importância prática por José Antunes Serra (nº 24)

A investigação científica e o ensino por António Júdice (nº 26)

Por experiência própria, sei quanto lucravam com a *Gazeta de Matemática* os estudantes daquele tempo. No meu caso particular acresce que, tendo sido aluno de Silva Paulo no Liceu de Santarém, vi-me "cooperador" da *Gazeta* logo no meu 1º ano da Faculdade de Ciências de Lisboa, passei a frequentar, ainda antes de acabada a licenciatura, o seminário que ali dirigiam alguns matemáticos da geração a que me tenho vindo a referir e nela publiquei os meus primeiros artigos – trabalhos de estudante, cujo interesse pela matemática encontrara ambiente propício nessas reuniões de estudo, complemento importante do que se aprendia nas disciplinas curriculares.

Hoje, numa época em que se dá ao "publish or perish" uma importância que reputo exagerada, tem sido menor a percentagem de docentes universitários que se interessam pelos aspectos pedagógicos que tanto preocupavam os nossos matemáticos da década de 40. Já na conferência *Algumas considerações sobre o ensino superior da matemática em Portugal* (Boletim SPM nº 24, Nov. 1992) afirmei que muitos dos nossos jovens investigadores, chamados a ensinar cadeiras básicas, ou não resistem à tentação de nelas introduzir as teorias e estruturas que lhes são úteis nos seus próprios trabalhos ou julgam poder "queimar" etapas na aprendizagem com a preocupação de levar os estudantes mais rapidamente à fronteira dos conhecimentos – o que, afinal tem a ver com uma especialização prematura, de que também discordava nessa conferência. Foi, pois, sem surpresa que li a entrevista ao Professor Charles R. Johnson, conduzida pelo Professor J. Simões Pereira (Boletim SPM nº 40, Maio 1999) – e traduzo livremente:

"Nos Estados Unidos da América cuidamos muito que todo o estudante de pós-graduação fique competente numa variedade de áreas, uma vez que, se chamado a ensinar, dele se espera que esteja em condições de leccionar qualquer curso dos primeiros anos, além de que fica assim em condições de entrar em discussões sobre assuntos diferentes da sua área de especialização. Em Portugal, as pessoas nestas condições são a excepção e não a regra... Depois de um bom curso de licenciatura, há tendência para afunilar a preparação posterior, não proporcionando aos licenciados cursos avançados num bom número de áreas. Ora, quando uma pessoa tenha realizado, de certo modo, tudo o que pode ser feito na área reduzida em que se especializou, o que acontece a seguir?"

Desejo, sinceramente, que o relançamento da *Gazeta* pela Sociedade Portuguesa de Matemática venha a ter o maior êxito. E para isso é necessário (embora não suficiente) que as entidades oficiais e a sociedade em geral a acarinhem e mostrem alguma confiança nestas iniciativas não governamentais em prol da ciência.

Só como exemplo de dificuldades que não seria natural encontrar nos tempos que correm, e com que temos de lutar, refiro que em relatório que apresentei ao INIC (que era então o organismo aderente da União Matemática Internacional, IMU) sobre a minha participação na Assembleia Geral desta Organização, realizada em 1990, sugeri que se estudasse a possibilidade de as relações com a IMU passarem a ser desempenhadas pela Sociedade Portuguesa de Matemática, à semelhança do que sucede em muitos outros países. Fui novamente designado como delegado nacional à Assembleia Geral de 1994 e como a sugestão anterior não tivera qualquer sequência, voltei a chamar a atenção para a necessidade de analisar o problema em relatório que apresentei à JNICT (que, entretanto, absorvera o INIC). Daí a minha surpresa quando, a propósito da Assembleia Geral de 1998, recebi na Academia das Ciências a seguinte mensagem do Secretário da IMU, o Professor Jacob Palis: "Preciso de sua ajuda: já enviámos três vezes a carta anexa e ainda não sabemos o nome do delegado de Portugal para a Assembleia Geral. Seria que o senhor poderia me indicar uma pessoa que eu pudesse falar? Muito obrigado por sua atenção."

Ao mesmo tempo que o informei que devia dirigir-se ao Instituto para a Cooperação Científica e Tecnológica Internacional – um dos três organismos em que a JNICT se cindira – enviei cópia da correspondência para aquele Instituto. Pois, passado algum tempo, soube que Portugal não tomara parte na 13ª Assembleia Geral da União Matemática Internacional, realizada em Dresden em Agosto de 1998. Ora, quem não aparece, esquece, e nada disto contribui para o prestígio do sistema científico português...

Duas ou três histórias da História da Matemática[1]

João Filipe Queiró

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
jfqueiro@mat.uc.pt

Começo por agradecer o honroso convite da Comissão Organizadora para participar nesta homenagem. É uma honra para mim, e é também com grande gosto que aqui estou.

Eu não fui aluno do Professor José Morgado, nem colega na mesma instituição, mas, como todos os matemáticos portugueses, conheço o seu percurso pessoal, a cuja evocação já hoje assistimos, e conheço a sua paixão de sempre pela Matemática.

Gostaria de começar esta palestra precisamente por aí, pela paixão, regularmente demonstrada, e de muitas maneiras, até hoje, do Professor José Morgado pela Matemática e, mais geralmente, pelas virtualidades do espírito racional. Trata-se de características essenciais do espírito moderno, que tanta influência tiveram na evolução do Mundo nos últimos séculos.

É evidente que a atitude perante a ciência e o espírito científico não pode hoje ser a mesma que era há um século atrás. O optimismo dos meios cultos oitocentistas relativamente à noção de progresso unidireccional das sociedades, movido pela racionalidade e pelos avanços da Ciência, tem hoje de ser temperado pela constatação de muitos problemas observados no século XX.

Para usar uma frase do gosto de José Anastácio da Cunha, "a Experiência tem mostrado", não tanto que a Ciência não é uma panaceia universal, mas que a Ciência deve ser prudente, não deve pretender que pode e sabe mais do que em cada momento realmente pode e sabe, e deve saber ser humilde na busca da verdade.

Mas ao mesmo tempo que devem ser humildes, os cientistas têm de estar atentos à tendência, sobretudo em certos meios educativos, para a importação de ideologias anti-científicas que parecem perigosas, num sentido que já direi qual é. Refiro-me àquele tipo de concepções, às vezes chamadas "pós-modernas", que vêem as ciências como meras "construções sociais", com tudo o que isso implica, por um lado, de contingência e relativização, e, por outro lado e consequentemente, de deslegitimização e desvalorização.

Claro que o debate académico é por definição livre, e quem quiser recusar a existência de uma realidade objectiva e olhar para os físicos, químicos, matemáticos e biólogos como construtores de narrativas contingentes tem com certeza liberdade para o fazer.

Convém no entanto estar atento à influência negativa que essas correntes de opinião podem ter no sistema educativo. O perigo a que me referi há pouco é esse: precisamente porque em Portugal há Ciência e cultura científica a menos, temos poucos mecanismos de

[1] Palestra na sessão de homenagem ao Prof. José Morgado realizada na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em 19 de Fevereiro de 1999.

defesa em relação ao crescimento dessas concepções na decisiva matéria da instrução e educação.

A cultura científica, em cujo cerne reside a Matemática, é hoje condição do desenvolvimento cívico dos portugueses, permitindo-lhes uma intervenção crítica e informada sobre o funcionamento e os rumos da sociedade nos aspectos mais diversos.

O Professor José Morgado destaca-se, como já disse, pelo entusiasmo que sempre revelou pela Matemática, pelo seu estudo e pela sua divulgação. Esse entusiasmo, demonstrado ao longo de tanto tempo, e em contextos tão variados, tem a marca da autenticidade, e não pode deixar de ser para nós fonte de inspiração.

*

Uma das áreas pelas quais o Professor José Morgado revelou grande interesse é a História da Matemática, e foi para falar de História da Matemática que fui convidado. Temo que ao ter aceite esse convite não tenha dado sinais da tal prudência a que me referi atrás. De facto, não é segredo que não sou historiador. Tenho apenas um interesse de alguns anos pela História em geral, e pela História da Matemática em particular.

Falando da palavra "história", a língua inglesa, e agora também o português do Brasil, têm duas palavras onde nós só temos uma. No contexto desta palestra não parece mal que só tenhamos uma: de facto, a História da Matemática está cheia de personalidades e de episódios que propiciam verdadeiras "histórias", fascinantes pelo dramatismo, pelo brilho da inteligência e pelo rasto que deixaram e consequências que tiveram.

E tal como nas histórias "normais", dos livros de quadradinhos aos romances clássicos, também na História da Matemática se podem encontrar heróis, que acompanhamos no seu génio, nas suas aventuras e desventuras, e que deixam em nós um rasto de admiração e fascínio.

Claro que tentar perceber a História da Ciência, e da Matemática em particular, por uma lista de heróis é como tentar perceber o mundo de hoje pelos títulos dos jornais.

Vale a pena, portanto, olhar as pessoas e as coisas de perto. Vale a pena fazer viagens ao passado e contactar directamente com as obras e, através delas, com os seus autores. Rapidamente desaparece alguma ideia que tivéssemos de que os grandes nomes do passado são uma espécie de figuras empalhadas, que rotineiramente debitariam teorias acabadas e perfeitas nas horas de expediente.

Nos génios quase tudo pode ser interessante. Só para dar um exemplo, do domínio do anedótico: há tempos, lendo um livro sobre Galileu, deparei com um episódio que ilustra que os génios também se enganam (se calhar é preciso errar muito para acertar muito), mas que até a defender um erro se pode ser genial.

Galileu é uma das maiores figuras de sempre da História da Ciência, sendo a introdução e o uso sistemático do método experimental uma das suas grandes contribuições.

Em 1623, Galileu publicou um livro intitulado *Il Saggiatore* em que responde a diversas críticas científicas de um padre jesuíta, Horácio Grassi, publicadas quatro anos antes. Uma das matérias controversas era a de saber se o atrito do ar aquece ou arrefece os corpos. Grassi sustentava que aquece, e em defesa desta tese resolveu citar um autor grego do século X, Suidas. Segundo Suidas, os antigos Babilónios coziam ovos da seguinte maneira: colocavam-nos numa funda e depois rodavam a funda vigorosamente.

Galileu defendia a tese de que o atrito do ar arrefece os corpos. Numa aplicação irrepreensível dos princípios do método experimental, e numa manifestação da sua tendência para o sarcasmo mortífero, não perdeu a oportunidade. Escreveu ele em *Il Saggiatore*:

Se [Grassi] quer que eu acredite, com Suidas, que os Babilónios coziam os ovos rodando-os com uma funda, assim farei. Mas devo dizer que a causa deste efeito era muito diferente do que ele sugere. Para descobrir a verdadeira causa raciocino assim: "Se não conseguimos obter um efeito que outros anteriormente obtiveram, é porque nas nossas operações nos falta qualquer coisa que produzia o sucesso deles. E se só nos falta uma coisa, então só essa coisa pode ser a verdadeira causa. Ora não nos faltam ovos, nem fundas, nem homens vigorosos para as rodar; mas os nossos ovos não ficam cozidos, apenas arrefecem mais depressa se por acaso estivessem quentes. E como nada nos falta excepto sermos Babilónios, então ser Babilónio é verdadeira causa de os ovos ficarem cozidos, e não o atrito do ar."

*

Estudar História da Matemática acaba por ser isto mesmo: ver os nomes tornarem-se pessoas, perceber melhor o que cada um fez, conhecer o contexto em que germinaram as ideias, contactar com lapsos e incertezas, numa palavra, apercebermo-nos da "espessura" que faz a verdadeira história. É um exercício que pode ter muito interesse.

Várias vezes ouvi, e os presentes também ouviram, o Professor José Morgado contar histórias da Matemática. Para esta palestra escolhi como objectivo central, precisamente, seguindo o seu exemplo, contar ou recordar brevemente duas histórias da Matemática. Uma respeitante a um grande episódio da História da Matemática universal, e a outra a um pequeno episódio da História da Matemática em Portugal. Estas histórias envolvem, entre outros, dois matemáticos bem conhecidos de todos: Galois e Anastácio da Cunha. Não vou aqui repetir apologias, mas apenas olhar com alguma atenção para certos aspectos das suas obras.

Quanto a Galois, pelo seu génio e pelo dramatismo da sua curtíssima vida é difícil que não pertença à galeria de heróis de todas as pessoas que se interessam pela Matemática. Tentarei sublinhar, por um lado, que o seu trabalho genial sobre as equações polinomiais se inscreve num contexto e numa tradição que começa em Lagrange, e, por outro lado, que se faz injustiça a Galois ao reduzir a importância do seu trabalho algébrico à questão das equações.

Sobre Anastácio da Cunha, recordarei uma polémica matemática em que esteve envolvido, polémica mais tarde "arbitrada" por Gomes Teixeira, que não lhe deu a razão toda.

Em ambos os casos, não se trata de diminuir a importância da personalidade envolvida, objectivo que seria um pouco estúpido, mas de a olhar mais de perto, na convicção de que assim a compreenderemos, e às condições em que se manifestou, um pouco melhor.

*

A primeira história que vou recordar é bem conhecida de todas as pessoas com interesse pela Matemática. Refiro-me à aventura de séculos à procura de fórmulas resolventes para equações polinomiais numa incógnita.

Este é sempre um assunto fácil de introduzir, porque toda a gente conhece de cor a fórmula para o caso do segundo grau.

Para os terceiro e quarto graus as fórmulas foram descobertas por matemáticos italianos em meados do século XVI. A seguir, durante dois séculos, inúmeros matemáticos dedicaram grande engenho e esforço à busca de uma fórmula para o caso das equações do quinto grau.

Todos sabemos hoje que esses esforços não podiam levar a nada, porque tal fórmula não existe, conforme demonstrado no início do século XIX por Abel, sendo o resultado deste ampliado e explicado por Galois.

Mas o que não é talvez tão familiar é que a viragem conceptual decisiva que conduziu a tal desfecho se deu décadas antes, e se deveu a Lagrange.

Numas *Reflexões sobre a resolução algébrica das equações*, em 1770, Lagrange resolve estudar de forma sistemática todos os métodos propostos até aí para as equações de graus 2, 3 e 4, com o objectivo de os reduzir a princípios gerais que permitissem compreender *a priori* o que é que os faz funcionar, para depois tentar a sua aplicação ao estudo das equações de graus superiores.

Este longo trabalho, de grande clareza, lê-se ainda hoje com proveito e com interesse, sobretudo conhecendo nós a sequência da história. Está reproduzido nas *Obras Completas* de Lagrange.

O caso da equação geral do segundo grau permite ilustrar algumas das ideias de Lagrange. Suponhamos que as raízes são λ_1 e λ_2:

$$x^2 + a_1 x + a_2 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

(igualdade de onde se tiram as conhecidas relações $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1$, $\lambda_1\lambda_2 = a_2$).

Note-se que as raízes se podem escrever da seguinte forma:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left[\lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\right]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left[\lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)\right]$$

o que se pode resumir numa expressão comum:

$$\frac{1}{2}\left[\lambda_1 + \lambda_2 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}\right]$$

Mas $\lambda_1 + \lambda_2$ e $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ são polinómios simétricos em λ_1 e λ_2. Logo (pelo teorema fundamental da teoria dos polinómios simétricos), são polinómios nos polinómios simétricos elementares $\lambda_1 + \lambda_2$ e $\lambda_1\lambda_2$, isto é, são polinómios nos coeficientes da equação. De facto, tem-se

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1 \ , \ (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = a_1^2 - 4a_2$$

Sai então a expressão para as raízes

$$\frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right)$$

que é a nossa bem conhecida fórmula resolvente.

Passemos ao terceiro grau, e à equação

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

com raízes λ_1, λ_2 e λ_3.

Lagrange observa que em todos os métodos de obtenção da fórmula resolvente desempenham papel central funções do tipo

$$y = \lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3$$

onde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Note-se que, como $1 + \omega + \omega^2 = 0$, as raízes se podem escrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\lambda_1 = \frac{1}{3}[&\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ &+ (\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3) \\ &+ (\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3)]\end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}[\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ + \omega^2(\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3) \\ + \omega(\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3)]$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3}[\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ + \omega(\lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3) \\ + \omega^2(\lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3)]$$

Na expressão $y = \lambda_1 + \omega\lambda_2 + \omega^2\lambda_3$, permutemos λ_1, λ_2 e λ_3 de todas as maneiras possíveis. Obtemos ao todo seis expressões, que, escrevendo

$$z = \lambda_1 + \omega^2\lambda_2 + \omega\lambda_3\,,$$

são as seguintes:

$$y\,,\ \omega y\,,\ \omega^2 y\,,\ z\,,\ \omega z\,,\ \omega^2 z\,.$$

Temos aqui seis valores diferentes, e, portanto, para os obter, e com eles as raízes da equação proposta, teríamos de resolver uma equação de grau 6. Mas, como se vê imediatamente, elevando-os ao cubo ficam apenas dois valores diferentes, y^3 e z^3, que vamos designar por Y e Z. Por serem apenas dois é possível obtê-los como soluções de uma equação do segundo grau, a que Lagrange chama "equação reduzida" (*réduite*), no que constitui o passo decisivo para a fórmula resolvente das equações de grau 3. É que os coeficientes desta equação auxiliar

$$(\xi - Y)(\xi - Z) = \xi^2 - (Y + Z)\xi + YZ = 0$$

são simétricos em Y e Z e portanto são insensíveis a permutações de λ_1, λ_2 e λ_3, que, ou não alteram Y e Z, ou os transformam um no outro. Esses coeficientes são, portanto (pelo teorema fundamental da teoria dos polinómios simétricos), polinómios nos coeficientes da equação original. As expressões exactas são:

$$Y + Z = -2a_1^3 + 9a_1a_2 - 27a_3$$

$$YZ = \left(a_1^2 - 3a_2\right)^3$$

Determinados $Y = y^3$ e $Z = z^3$ em função de a_1, a_2 e a_3 através da resolução daquela equação, vêm y e z escritos em função de ω e dos coeficientes da equação. Usando as expressões acima apresentadas para λ_1, λ_2 e λ_3, vêm finalmente as três raízes expressas em termos dos coeficientes usando radicais. No caso em que $a_1 = 0$ vem a expressão

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{Y} + \sqrt[3]{Z}\right)$$

que é a fórmula resolvente de Cardano-Tartaglia.

Analogamente, Lagrange mostra que todos os processos conhecidos para chegar à fórmula resolvente da equação do quarto grau dependem da possibilidade de achar funções das raízes λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 que, quando estas são permutadas de todas as 24 maneiras possíveis, tomem apenas três valores diferentes, de modo a esses valores serem as raízes de uma equação cúbica auxiliar cujos coeficientes são polinómios nos coeficientes da equação original.

Lagrange é assim conduzido ao estudo sistemático de funções de muitas variáveis e do seu comportamento (em particular o número de valores que tomam) sob permutações dessas variáveis. Demonstra muitas proposições a respeito desta questão, podendo dizer-se que o cálculo das permutações de facto nasce aqui.

A aplicação do seu método de análise *a priori* das equações para os graus 3 e 4 contém já várias das ideias fundamentais da futura teoria de Galois, como o objectivo essencial de exprimir racionalmente as raízes da equação proposta em termos de quantidades intermédias que por sua vez se obtêm dos coeficientes usando extracções sucessivas de radicais.

Diz Lagrange, já perto do fim:

Eis aqui, se não me engano, os verdadeiros princípios da resolução das equações e a análise mais própria para lá chegar; tudo se reduz, como vemos, a uma espécie de cálculo das combinações, pelo qual encontramos a priori os resultados que devemos esperar. Seria oportuno aplicá-los às equações do quinto grau e dos graus superiores, cuja resolução é até ao momento desconhecida; mas esta aplicação exige um número demasiado grande de investigações e de combinações, cujo sucesso é de resto muito duvidoso, para que possamos neste momento dedicar-nos a tal trabalho; esperamos no entanto poder voltar a isso noutra altura, e contentar-nos-emos aqui com ter lançado os fundamentos de uma teoria que nos parece nova e geral.

Noutra passagem, Lagrange admite que para o quinto grau pode não haver uma fórmula resolvente com radicais como as que existem para os graus anteriores.

Este trabalho de Lagrange teve enorme influência. O italiano Paolo Ruffini, no virar para o século XIX, coloca-se exactamente no mesmo ponto de vista e apresenta uma demonstração da inexistência de uma fórmula resolvente para as equações de grau 5. Embora o seu raciocínio tenha uma lacuna, Ruffini procede a uma análise pormenorizada do que hoje chamaríamos os subgrupos do grupo simétrico S_5. Alguns anos mais tarde, Cauchy elogia Ruffini e generaliza os seus resultados sobre permutações. Pouco depois, Abel completa a demonstração da inexistência de tal fórmula resolvente. O raciocínio de Abel combina as técnicas de Lagrange com os resultados de Ruffini e Cauchy sobre permutações.

O jovem Galois entra em cena logo a seguir, por volta de 1830. Todos já ouvimos falar da sua vida dramática, da sua morte num duelo aos 20 anos, da noite anterior ao duelo fatal passada a escrever cartas e resumos das suas descobertas.

Qual é a sua contribuição exactamente na questão das equações? Ouçamos as suas palavras:

Dada uma equação algébrica de coeficientes quaisquer, numéricos ou literais, reconhecer se as raízes podem ou não exprimir-se por radicais, tal é a questão de que oferecemos uma solução completa.

A questão é muito mais subtil do que a de saber se existe ou não uma fórmula resolvente geral. Demonstrada a inexistência de uma tal fórmula geral para as equações de grau superior a 4, podia em princípio dar-se o caso de para cada equação numérica particular as suas raízes se exprimirem usando radicais em função dos coeficientes, sem essas expressões provirem de uma fórmula geral. Mas de facto não é assim: há equações para as quais isso é possível e há outras para as quais não é. É natural que tal possibilidade dependa da forma particular da equação e das suas raízes, e Galois esclareceu como se processa essa dependência.

A solução de Galois é completa, mas o importante não é tanto o esclarecimento da velhíssima questão das equações. O importante é a extraordinária fecundidade do novo ponto de vista proposto, que é nem mais nem menos que o da Teoria dos Grupos, criada de modo fulgurante por Galois depois do tactear de Lagrange, Ruffini e Cauchy com as permutações. O próprio Galois diz da questão da resolubilidade das equações por radicais:

Podemos afirmar que não existe na Análise pura matéria mais obscura e talvez mais isolada de tudo o resto.

O objecto de aplicação da nova teoria são as equações. A cada equação Galois associa de forma precisa um grupo de permutações das suas raízes. E demonstra com extraordinária elegância conceptual (e concisão, o que não ajudou os seus contemporâneos a entendê-lo) que a resolubilidade da equação por radicais depende de o grupo ter ou não ter certa propriedade (a que hoje se chama *solubilidade*), relacionada com a sua estrutura de subgrupos. O grupo da equação reflecte portanto se esta goza ou não da propriedade de ser resolúvel por radicais: tal acontece se e só se o grupo for solúvel.

O que importa aqui é este original ponto de vista. Na História da Matemática Galois é uma figura virada para o futuro, e não, como aconteceria se se tivesse limitado a esclarecer a obscura e isolada matéria das equações, virada para o passado. A teoria dos grupos, sobretudo a maneira como o seu criador a usou, veio a invadir e a influenciar decisivamente domínios variados da Matemática e das suas aplicações.

Da plataforma iniciada por Lagrange e continuada por Ruffini, Cauchy e Abel, Galois transporta a questão para um nível completamente diferente, com uma invenção conceptual que se liberta do contexto original e se coloca no centro da abordagem matemática moderna a muitas questões de Geometria e Análise.

Uma analogia geométrica simples e sugestiva permite compreender melhor a definição do grupo de uma equação. Trata-se da noção de simetria de uma figura plana. Pense-se em todas as bijecções do plano nele próprio que conservam distâncias (as chamadas *isometrias* do plano), e dessas tomem-se apenas as que transformam a figura dada nela própria. Este conjunto é um grupo, que se chama *grupo das simetrias* da figura, e reflecte de forma natural a forma da figura, pois traduz as possibilidades de, movendo-a sem a deformar, fazê-la coincidir com ela própria.

Suponhamos por exemplo que a figura dada é um quadrado. Facilmente se vê que uma isometria que transforme o quadrado nele próprio tem de aplicar vértices em vértices. O grupo procurado é portanto, numerando os vértices de 1 a 4, um subgrupo do grupo simétrico S_4. Mas não é todo o S_4. É simples ver que, designando por R a rotação de 90^o no sentido directo em torno do centro do quadrado, e por S, U, T e V as reflexões relativamente às medianas e às diagonais do quadrado, o grupo tem exactamente oito elementos: $I, R, R^2, R^3, S, T, U, V$. A sua tabela é a seguinte:

$\circ$	I	R	R^2	R^3	S	T	U	V
I	I	R	R^2	R^3	S	T	U	V
R	R	R^2	R^3	I	T	U	V	S
R^2	R^2	R^3	I	R	U	V	S	T
R^3	R^3	I	R	R^2	V	S	T	U
S	S	V	U	T	I	R^3	R^2	R
T	T	S	V	U	R	I	R^3	R^2
U	U	T	S	V	R^2	R	I	R^3
V	V	U	T	S	R^3	R^2	R	I

Mas se tivermos um rectângulo (não quadrado), o grupo de simetrias é mais pequeno. Mantendo as notações acima, o grupo terá apenas os elementos I, R^2, S, U. Um rectângulo é uma figura "menos simétrica" do que um quadrado, e esse facto é reflectido pela menor riqueza do seu grupo de simetrias. Já uma circunferência tem um grupo de simetrias infinito. O grupo de simetrias de uma figura "mede" assim a suas propriedades de simetria.

A analogia agora é a seguinte. Seja dada uma equação $p(x) = 0$, com $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ as raízes da equação. A extensão $\mathbb{M} = \mathbb{K}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ vai desempenhar aqui o papel do plano no exemplo acima, enquanto a equação desempenha o papel da figura a estudar. As transformações bijectivas são as aplicações de $\mathbb{M}$ nele próprio que conservam as operações de corpo, a que se costuma chamar automorfismos de $\mathbb{M}$; e dessas tomamos apenas aquelas que fixam os elementos de $\mathbb{K}$ (e portanto transformam o polinómio $p(x)$ nele próprio). Estes automorfismos são os elementos do grupo de Galois da equação.

Facilmente se vê que um automorfismo de $\mathbb{M}$ que fixe os elementos de $\mathbb{K}$ tem de aplicar raízes de $p(x)$ em raízes de $p(x)$. (As raízes desempenham aqui o papel dos vértices.) O grupo em causa pode portanto ser visto como um subgrupo de S_n.

De novo podemos olhar para o grupo de uma equação como, de alguma forma, medindo a "simetria" da equação. Para equações de grau 4 ou menor, os seus grupos são todos solúveis, e as equações são solúveis por radicais.

Para o grau 5 ou superior, existem equações tão "simétricas" que os seus grupos já não são solúveis, e é portanto impossível, pelo teorema de Galois, exprimir as raízes dessas equações em termos dos coeficientes usando radicais. Por exemplo, pode mostrar-se que o grupo da equação $x^5 - 4x + 2 = 0$ é S_5. Este grupo não é solúvel, o que significa que é impossível exprimir as raízes dessa equação a partir dos coeficientes usando as quatro operações algébricas e a extracção de radicais.

Este ponto de vista concreto, em que os grupos aparecem como grupos de transformações – não necessariamente finitos – que deixam invariantes os objectos mais variados, revelou-se extremamente fecundo noutros campos da Matemática, nas mãos de Klein, Lie, Poincaré e Cartan. E sucederam-se também, até aos dias de hoje, as aplicações a outras áreas científicas, como a Cristalografia (na descrição das estruturas cristalinas que ocorrem na natureza) e a Física (na classificação das partículas fundamentais).

*

O segundo episódio que vou recordar, ao pé do anterior, é um *fait divers*, mas tem o interesse de se passar em Portugal. Trata-se de um conflito entre duas personalidades bem conhecidas da História da Matemática em Portugal, José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha, e de uma intervenção a respeito desse conflito, mais de um século mais tarde, de Francisco Gomes Teixeira, figura tutelar da casa onde nos encontramos e, na verdade, de toda a Ciência portuguesa.

José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha foram ambos professores na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra depois da grande reforma de 1772 (os únicos portugueses). As suas vidas foram muito diferentes.

O primeiro nasceu em 1744, foi tenente num regimento de artilharia, e indicado pelo próprio Marquês de Pombal ao Reitor da Universidade para professor na nova Faculdade. Quando D. José morreu e o governo do Marquês caiu, Anastácio da Cunha foi preso às ordens da Inquisição, condenado num auto-da-fé em Lisboa e impedido de voltar à Universidade. Morreu de doença com apenas 42 anos. Não há tempo para dar conta aqui das vicissitudes da sua vida, que estão bem documentadas. Deixou uma obra matemática notável, de que o aspecto mais saliente é a tentativa, em alguns aspectos bem sucedida, de fundamentar a Análise em bases rigorosas, tarefa que só no século XIX, com Cauchy, Weierstrass e outros, se viu levada a cabo por completo.

Quanto a Monteiro da Rocha, era 10 anos mais velho. Foi jesuíta no Brasil, tendo abandonado a Companhia quando Pombal a expulsou do país. Regressado a Portugal na década de 60 do século XVIII, teve papel importante na redacção dos novos Estatutos para a Universidade, sendo com naturalidade nomeado professor na Faculdade de Matemática logo que esta foi criada. Aqui ficou muitos anos, vindo a ser director da Faculdade, director do Observatório Astronómico (que ele próprio criou) e vice-reitor da Universidade. Foi um dos primeiros sócios da Academia das Ciências de Lisboa. Deixou vários trabalhos sobre Matemática e Astronomia, e traduziu alguns manuais para uso no ensino da Faculdade.

Das relações entre estas duas figuras no início, enquanto conviveram na Faculdade em Coimbra, não temos informação precisa. Talvez o indício mais revelador seja um poema muito interessante de Anastácio da Cunha, intitulado *Contra os vícios que impedem o progresso das ciências*. O poema é um diálogo entre dois personagens, Alcino e Montésio. É provável que se trate do próprio Anastácio e de Monteiro. A ser assim, o poema revela da parte do primeiro certo respeito e mesmo ternura pelo segundo, embora com alguma ironia:

> Que te serve, Montésio, envelheceres
> Curvado sobre os livros, noite e dia...

Na resposta a Alcino, diz Montésio que os fins que se propõe, em seus trabalhos, são:

> O ser útil ao rei, à pátria, ao estado;
> O respeitar das leis o mando augusto...

Seja como for, não é difícil imaginar o contraste entre as duas personalidades. Anastácio da Cunha é um espírito livre, um poeta apaixonado. Monteiro da Rocha é a imagem do rigor austero, um construtor de instituições, defensor dos estatutos pombalinos durante anos, muito tempo depois da queda do Marquês.

Nos anos de 1785-86, com Monteiro em Coimbra e Cunha já em Lisboa (professor na Casa Pia), os dois travam uma polémica escrita muito violenta, que revela grande degradação nas suas relações. Tudo começa com uma carta de Anastácio da Cunha a uma terceira pessoa, carta cujo texto se torna público. Monteiro da Rocha responde, e há uma réplica de Cunha. A causa próxima da controvérsia é uma crítica de Anastácio da Cunha, na primeira carta, a um prémio atribuído pela Academia das Ciências de Lisboa, num processo em que esteve envolvido Monteiro da Rocha.

Estes textos (publicados, com extensas notas, por António José Teixeira na revista *O Instituto* entre 1890 e 1892) são extremamente interessantes e reveladores, pela variedade de assuntos tratados, pela vivacidade, pela dureza. Neles há de tudo um pouco: análise de questões matemáticas, reflexões sobre pedagogia, acusações de incompetência, remoques pessoais.

É impossível resumir estes textos aqui, e é pena (essa é que seria uma verdadeira história de contar!). Mas das várias questões matemáticas abordadas, pode ter interesse recordar uma, precisamente porque Gomes Teixeira, em 1905, dedicou um artigo ao esclarecimento dela.

Na réplica final de Anastácio da Cunha – a que Monteiro da Rocha, que se saiba, já não respondeu – lê-se a certa altura:

Não é possível tirar-se-lhe [a Monteiro da Rocha] o costume de dar por erróneo o que não entende! Podia lembrar-se do que lhe sucedeu com a equação da catenária na sua Tradução da Mecânica do Abade Marie; do absurdo que imprimiu nas erratas presumindo que emendava o autor; e devia ter algum respeito a quem está acostumado há muito tempo a emendar-lhe os seus erros. Mas só calcula bem os nossos lugares relativos. Fia-se em estar de alto, e eu por terra.

A *Mecânica* do Abade Marie foi um dos livros traduzidos por Monteiro da Rocha. Em determinado trecho desta obra, discute-se a catenária, a curva cuja forma é assumida por um cabo suspenso pelos extremos. Claro que na situação de um cabo sujeito à força da gravidade se podem supor as forças paralelas. O livro de Marie analisa a seguir o caso em que as forças apontam para um ponto, um centro de atracção. Depois de certas considerações, chega-se à representação paramétrica

$$x = z\cos(\theta-\varphi), \quad y = z\sin(\theta-\varphi)$$

onde

$$z = \frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2}\cos\frac{2m}{1+m^2}\varphi$$

e

$$m^2 = \frac{b+a}{b-a} \quad (b > a).$$

φ é o parâmetro da curva. a, b e θ são constantes, e z é a norma do vector (x, y), supondo que a origem das coordenadas está no centro de atracção das forças.

Diz Marie, sem demonstração ou mais comentários:

Se m for um número inteiro, a curva é algébrica.

Na sua errata, Monteiro da Rocha, nesta frase, manda substituir m por $m + \frac{1}{m}$. É esta correcção que Anastácio da Cunha qualifica de "absurda", e é esta divergência que Gomes Teixeira analisa, análise que, apesar de se tratar sem dúvida de uma questão de pormenor e não muito difícil, se revela interessante.

O texto de Gomes Teixeira, "Sobre uma questão entre Monteiro da Rocha e Anastácio da Cunha", é o primeiro artigo do primeiro volume dos *Anais científicos da Academia Politécnica do Porto*, que ele próprio fundou em 1905.

Para analisar a questão da algebricidade da curva é bastante óbvio que é preciso ir à procura de relações algébricas entre $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ e $\cos\frac{2m}{1+m^2}\varphi$. Gomes Teixeira procede assim. Suponha-se que $\frac{2m}{1+m^2}$ é racional, digamos

$$\frac{2m}{1+m^2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

com α e β inteiros. Recordem-se as fórmulas de Bernoulli para o coseno e o seno do múltiplo de um ângulo:

$$\cos k\omega = \frac{1}{2}\Big[(2\cos\omega)^k - \frac{k}{1!}(2\cos\omega)^{k-2} + \frac{k(k-3)}{2!}(2\cos\omega)^{k-4} - \dots\Big]$$

$$\sin k\omega = \sin\omega\Big[(2\cos\omega)^{k-1} - \frac{k-2}{1!}(2\cos\omega)^{k-3} + \frac{(k-3)(k-4)}{2!}(2\cos\omega)^{k-5} - \dots\Big]$$

Aplicando a primeira delas com $k = \alpha$ e $\omega = \frac{\varphi}{\beta}$ obtém-se

$$\cos\alpha\frac{\varphi}{\beta} = \frac{1}{2}\Bigg[\left(2\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^\alpha - \frac{\alpha}{1!}\left(2\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha-2} + \frac{\alpha(\alpha-3)}{2!}\left(2\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha-4} + \dots\Bigg]$$

Aplicando as duas com $k = \beta$ e $\omega = \frac{\varphi}{\beta}$ obtém-se

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\Bigg[\left(2\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^\beta - \frac{\beta}{1!}\left(2\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-2} + \frac{\beta(\beta-3)}{2!}\left(2\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-4} + \dots\Bigg]$$

$$\sin\varphi = \sin\frac{\varphi}{\beta}\Bigg[\left(2\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-1} - \frac{\beta-2}{1!}\left(2\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-3} + \frac{(\beta-3)(\beta-4)}{2!}\left(2\cos\frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-5} + \dots\Bigg]$$

Agora tomemos as expressões para x e y, recordando que $\frac{2m}{1+m^2} = \frac{\alpha}{\beta}$:

$$x = z\cos(\theta-\varphi) = \left(\frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2}\cos\frac{\alpha}{\beta}\varphi\right) \cdot (\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)$$

$$y = z\sin(\theta-\varphi) = \left(\frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2}\cos\frac{\alpha}{\beta}\varphi\right) \cdot (\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi)$$

Nestas duas expressões vamos substituir $\cos\frac{\alpha}{\beta}\varphi$, $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$ pelas fórmulas anteriormente obtidas. Para aligeirar a escrita ponhamos $Z = \cos\frac{\varphi}{\beta}$ e $W = \sin\frac{\varphi}{\beta}$. Chegamos a um resultado da forma

$$x = A_1.Z^{\alpha+\beta} + A_2.Z^{\alpha+\beta-1} + \dots + W.\left(B_1.Z^{\alpha+\beta-1} + B_2.Z^{\alpha+\beta-2} + \dots\right)$$

$$y = a_1.Z^{\alpha+\beta} + a_2.Z^{\alpha+\beta-1} + \dots + W.\left(b_1.Z^{\alpha+\beta-1} + b_2.Z^{\alpha+\beta-2} + \dots\right)$$

Aqui Gomes Teixeira diz que os coeficientes $A_1, A_2, \dots,$ $B_1, B_2, \dots,$ $a_1, a_2, \dots,$ $b_1, b_2, \dots$ são "quantidades constantes". Este é um ponto interessante. É evidente que estes coeficientes são funções racionais das constantes originais a e b, e também, não de θ, mas de $\cos\theta$ e $\sin\theta$. Claramente os coeficientes da relação algébrica procurada entre x e y vão ser deste tipo.

A existência dessa relação é agora fácil de estabelecer. Já temos duas relações polinomiais entre x, y, Z e W. Como também se tem

$$Z^2 + W^2 = 1\,,$$

eliminando Z e W entre as três equações temos uma relação algébrica do tipo $g(x, y) = 0$ entre x e y.

Conclusão: sob a hipótese feita de $\frac{2m}{1+m^2}$ ser racional, a curva em causa é algébrica (com coeficientes do tipo descrito).

Esta análise de Gomes Teixeira dá razão tanto a Marie como, de certa forma, também a Monteiro da Rocha, porque mostra que a curva é algébrica tanto quando m é inteiro (como diz Marie) como quando $m + \frac{1}{m}$ é inteiro (como diz Monteiro da Rocha), já que em ambos os casos $\frac{2m}{1+m^2}$ é racional. Claro que Monteiro da Rocha erra ao corrigir Marie, mas não erra na "correcção" que propõe.

Mas Gomes Teixeira não pára aqui, e mostra que uma pequena variante do mesmo raciocínio sugeriria que a curva só é algébrica se m for inteiro (caminho provavelmente seguido por Marie, e compreendido por José Anastácio da Cunha) e outra variante sugeriria que isso só acontece se $m + \frac{1}{m}$ for inteiro (caminho provavelmente seguido por Monteiro da Rocha, e que o terá levado à errata criticada por Anastácio da Cunha).

Diz Gomes Teixeira no início do seu artigo:

Na lista dos matemáticos notáveis que teve Portugal no século XVIII, ocupam o lugar primordial José Monteiro da Rocha e José Anastácio da Cunha. Foram ambos lentes na Universidade de Coimbra na ocasião da célebre reforma desta grande instituição pelo Marquês de Pombal e foram ambos considerados pelos seus contemporâneos como homens de grande valor, conceito que a história da ciência portuguesa confirmou. Este valor, só eles, inimigos irreconciliáveis, o não reconheciam um ao outro; e por isso quem formasse opinião a respeito deles pelo que cada um dizia do seu adversário, faria de ambos juízo bem injusto.

*

Estas duas histórias não pretendem ter moral nenhuma, mas apenas, como disse atrás, ilustrar o interesse que tem olhar de perto para certos episódios e personalidades neles intervenientes. Só assim se apreende completamente a "espessura" dessas personalidades, que faz a verdadeira história.

O Professor José Morgado pertence seguramente à espessura, à substância da Matemática em Portugal neste século. Creio que é isso mesmo que aqui estamos a assinalar e a celebrar.

Uma intersecção surpreendente

João Queiró
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
jfqueiro@mat.uc.pt

Rosa Amélia Martins
Campus Universitário de Santiago
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
rosa@mat.ua.pt

Resumo: Nesta nota observa-se que certo corpo convexo, a meio caminho entre uma esfera e um cubo, tem uma secção plana circular.

Em $\mathbb{R}^3$ a bola unitária para a norma euclidiana é a esfera de centro na origem $(0,0,0)$ e raio 1. Para a norma "infinito" é o cubo de aresta 2 com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.
Para a norma "um" é o octaedro cujos vértices são os pontos médios das faces do cubo anterior.

Relembremos que normas são estas:

– a norma euclidiana (associada ao produto interno usual) é a função $\|.\|_2$, que a cada vector $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ faz corresponder o número real (não negativo) dado pela expressão $\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$. A bola unitária associada ($\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq 1\}$) é portanto a tal esfera de raio 1. Representemo-la por B_2.

– a norma "infinito" é a função $\|.\|_\infty$, que a cada vector $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ faz corresponder $\|x\|_\infty = \max\{| x_1 |, | x_2 |, | x_3 |\}$. A bola unitária associada é o referido cubo de aresta 2. Representemo-la por B_∞.

– a norma "um" é a função $\|.\|_1$, que a cada $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ faz corresponder $\|x\|_1 =| x_1 | + | x_2 | + | x_3 |$. A bola unitária correspondente é o octaedro já mencionado. Representemo-la por B_1.

É geometricamente evidente que $B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$.

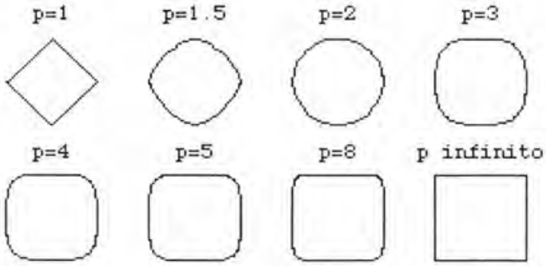
Seja agora p um número real não inferior a 1. Consideremos a norma p de Hölder associada, isto é, a função $\|.\|_p$ que a cada x de $\mathbb{R}^3$ faz corresponder $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p)^{\frac{1}{p}}$. A bola unitária associada, B_p, fica "encaixada" entre o octaedro B_1 e a esfera B_2 se $1 \leq p \leq 2$, e entre a esfera B_2 e o cubo B_∞ se $p \geq 2$.

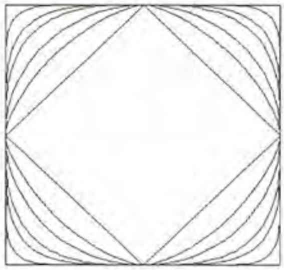
De um modo geral, se $p < p'$ tem-se, pela conhecida desigualdade de Jensen, $\|x\|_p \geq \|x\|_{p'}$, donde $B_p \subseteq B_{p'}$. Como existe x_0 tal que $\|x_0\|_p > \|x_0\|_{p'}$ (por exemplo $x_0 = (1,1,1)$) tem-se a inclusão estrita $B_p \subset B_{p'}$.

Para qualquer $p > 1$ a bola B_p é diferenciável, isto é, em cada ponto da fronteira passa um e um só plano tangente à bola nesse ponto. Só não são diferenciáveis B_1 e B_∞.

A intersecção de B_1 ou B_∞ com um plano que passe pela origem é uma figura poligonal. Para $1 < p < \infty$ a intersecção de B_p com qualquer plano que passe pela origem é uma região convexa plana limitada por uma linha fechada e diferenciável (por cada ponto da linha passa uma e uma só recta do plano, tangente à linha nesse ponto). No caso $p = 2$ essa intersecção é obviamente um círculo de raio 1.

A figura seguinte representa a intersecção de B_p com qualquer um dos planos coordenados, para $p = 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4, 5, 8, \infty$.





Para algum $p \neq 2$ poderá acontecer que a intersecção de B_p com um plano que passe pela origem seja um círculo? Por estranho que pareça, pode. É o que acontece com $p = 4$ e o plano Π de equação $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, por exemplo. (Atendendo às simetrias da bola servem também os planos de equação $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ou $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.)

Esse surpreendente resultado é o objectivo da presente nota.

Teorema: *A intersecção de* Π *com* B_4 *é um círculo de raio* $\sqrt[4]{2}$.

Demonstração:

Para cada p, representemos por $\partial(B_p)$ a fronteira da bola B_p. O que pretendemos demonstrar é que $\partial(B_4) \cap \Pi$ é uma circunferência de raio $\sqrt[4]{2}$, isto é, que para qualquer $y \in \partial(B_4) \cap \Pi$ se tem $\|y\|_2 = \sqrt[4]{2}$.

Associe-se a cada ponto x de $\partial(B_1)$ a semirecta Ox que passa por x e tem origem em $O = (0,0,0)$. Cada semirecta Ox intersecta $\partial(B_4)$ num ponto x' univocamente determinado por x. Seja P a aplicação que transforma x em x'.

Por construção P é uma bijecção de $\partial(B_1)$ em $\partial(B_4)$ e transforma cada vector num vector que lhe é colinear. Então podemos escrever a igualdade

$$\Pi \cap \partial(B_4) = P(\Pi \cap \partial(B_1)).$$

Iremos representar os seis vértices do octaedro B_1 por

$$V_1 = (1,0,0),$$

$$V_2 = (0,1,0),$$

$$V_3 = (0,0,1),$$

$$V_4 = -V_1,$$

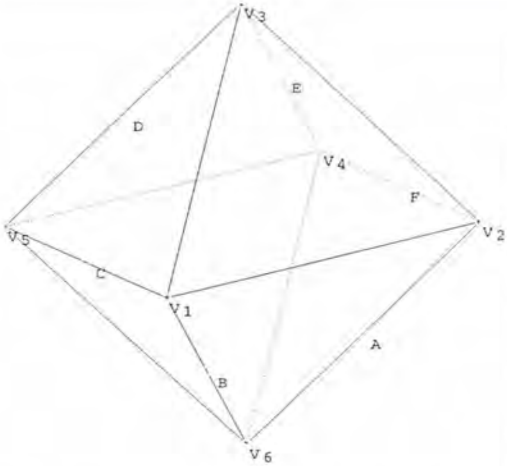
$$V_5 = -V_2,$$

$$V_6 = -V_3,$$

e as oito faces por

F_1, a face definida por V_1, V_2 e V_3;
F_2, por V_4, V_2 e V_3;
F_3, por V_4, V_5 e V_3;
F_4, por V_1, V_5 e V_3;
F_5, por V_1, V_2 e V_6;
F_6, por V_4, V_2 e V_6;
F_7, por V_4, V_5 e V_6;
F_8, por V_1, V_5 e V_6.

A figura seguinte representa $\Pi \cap B_1$.



A fronteira de B_1 é a reunião dos oito triângulos F_1,...,F_8. Então

$$\Pi\cap\partial(B_1) = \Pi\cap(\cup_{i=1}^{8} F_i) = \cup_{i=1}^{8}(\Pi\cap F_i).$$

Mas o plano Π não intersecta F_1 e F_7 porque as coordenadas de um ponto de Π não podem ter todas o mesmo sinal.

Consideremos então, por exemplo, um ponto genérico de $\Pi \cap F_5$. Qualquer ponto x de F_5 é combinação linear convexa de V_1, V_2 e V_6, isto é, é da forma

$$x = \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,-1)$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Por outro lado, por ser $x \in \Pi$, é $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$. Então é $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2}$ e podemos escrever

$$x = (\alpha_1, \frac{1}{2} - \alpha_1, -\frac{1}{2}) \text{ com } 0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2}$$

ou, fazendo $a = 2\alpha_1$,

$$x = \frac{1}{2}(a, 1-a, -1) \text{ com } 0 \leq a \leq 1.$$

(Note-se que é $\|x\|_1 = 1$, como seria de esperar.)

Para $a = 0$ obtém-se o ponto A, para $a = 1$ obtém-se o ponto B (ver a figura).

Repetindo o raciocínio para obter as coordenadas de um ponto genérico de cada um dos outros lados do hexágono vem, com $0 \leq a \leq 1$:

- para $\Pi \cap F_8$ é $x = \frac{1}{2}(1, -a, -1+a)$ obtendo-se B para $a = 0$ e C para $a = 1$.
- para $\Pi \cap F_4$ é $x = \frac{1}{2}(1-a, -1, a)$ obtendo-se C para $a = 0$ e D para $a = 1$.
- para $\Pi \cap F_3$ é $x = \frac{1}{2}(-a, -1+a, 1)$ obtendo-se D para $a = 0$ e E para $a = 1$.
- para $\Pi \cap F_2$ é $x = \frac{1}{2}(-1, a, 1-a)$ obtendo-se E para $a = 0$ e F para $a = 1$.

Finalmente para $\Pi \cap F_6$ é $x = \frac{1}{2}(-1 + a, 1, -a)$ obtendo-se F para $a = 0$ e A para $a = 1$.

Repare-se que as coordenadas dos pontos de cada lado do hexágono $[ABCDEF]$ se podem obter a partir das coordenadas dos pontos do lado [AB], por exemplo, por mudança de sinal das coordenadas ou por alguma permutação delas. Por outro lado, este tipo de transformações (mudanças de sinal e permutações de coordenadas), não altera qualquer norma de Hölder de um vector. Sendo assim, basta-nos calcular $\| P(x) \|_2$ para $x \in \Pi\cap F_5$, por exemplo.

$P(x)$ é a projecção de x sobre $\partial(B_4)$, como foi já referido. Temos portanto

$$P(x) = \frac{\lambda}{2}(a, 1-a, -1)$$

com $\lambda \geq 0$ e $\frac{\lambda}{2}[a^4 + (1-a)^4 + 1]^{\frac{1}{4}} = 1$, ou seja, $\lambda = 2[a^4 + (1-a)^4 + 1]^{-\frac{1}{4}}$.

Substituindo vem

$$P(x) = [a^4+(1-a)^4+1]^{-\frac{1}{4}}(a, 1-a, -1)$$

com $0 \leq a \leq 1$. Calculemos a norma euclidiana deste vector:

$$\|P(x)\|_2$$
$$= [a^4+(1-a)^4+1]^{-\frac{1}{4}}[a^2+(1-a)^2+1]^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$(\| P(x) \|_2)^4 = \frac{[a^2 + (1-a)^2 + 1]^2}{a^4 + (1-a)^4 + 1}.$$

Mas

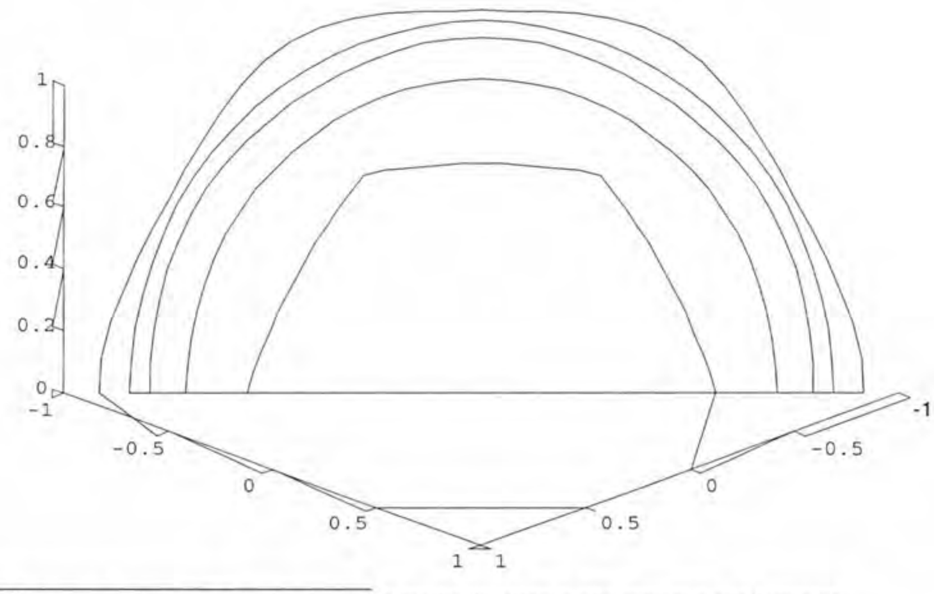
$$\begin{aligned}&[a^2 + (1-a)^2 + 1]^2 \\ &= (a^2+1-2a+a^2+1)^2 = 4(a^2-a+1)^2 \\ &\quad = 4(a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&a^4 + (1-a)^4 + 1 \\ &= a^4 + (1 - 4a + 6a^2 - 4a^3 + a^4) + 1 \\ &\quad = 2(a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1).\end{aligned}$$

Então vem $(\|P(x)\|_2)^4 = 2$, ou seja, $\|P(x)\|_2 = \sqrt[4]{2}$, como se queria provar. ■

Observação. A intersecção deste plano Π com B_p é interessante para qualquer valor de p. Para $p = 1$ e $p = \infty$ essa intersecção é um hexágono [2]. No primeiro caso, o hexágono, chamemos-lhe h_1, está contido em $c = \Pi \cap \partial(B_2)$. No segundo caso, h_∞, contém c. Os vértices de cada um destes dois hexágonos estão nas semirectas definidas pela origem e pelos vértices do outro. Para $1 < p < 2$ a intersecção de Π com B_p é um "hexágono arredondado" que, no limite, é o hexágono h_1 $(p = 1)$ ou o círculo c $(p = 2)$. Para $p > 4$ essa intersecção volta a ser do tipo "hexágono arredondado" que, no limite, é um círculo $(p = 4)$ ou o hexágono h_∞ $(p = \infty)$. Tanto num caso como noutro os pontos da fronteira de $\Pi \cap B_p$ que se encontram *mais afastados* da origem, ou seja, aqueles que correspondem aos vértices, pertencem às semirectas que unem a origem aos vértices de h_1 ou h_∞. Para $2 < p < 4$ a fronteira da intersecção $\Pi \cap B_p$ é uma linha em que os pontos *mais próximos* da origem se encontram nas semirectas já referidas. A figura seguinte mostra metade de $\Pi \cap B_p$ para $p = \frac{3}{2}, 2, 3, 4, 8$.



[2] Estamos a designar por "hexágono" a região do plano e não apenas a sua fronteira.

Sobre a questão do Algoritmo para o Problema do Caixeiro Viajante

Ana Maria de Almeida e Maria Rosália Dinis Rodrigues

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
{amca, rosalia}@mat.uc.pt

Resumo: Sabemos que há problemas para os quais se demonstrou que não existem algoritmos que os resolvam (como o Problema da Paragem – Turing 1936, ou o 10º Problema de Hilbert – Matijasevic, 1970), enquanto outros há que, apesar de ser possível construir algoritmos para a sua resolução, esses algoritmos possuem "ordens de complexidade" tão grandes que originam a denominação de "ineficientes". O Problema do Caixeiro Viajante encontra-se neste último caso, sendo classificado como *NP*-completo. Mas o que significa "*NP*-completo"? E será ou não possível encontrar um algoritmo "eficiente" para este problema? De facto, não basta identificar um problema e garantir que existe pelo menos uma solução para ele, é ainda necessário saber se ele pode ser efectivamente resolvido em tempo e espaço de memória finitos.

1 Prólogo

A propósito do artigo "O Problema do Caixeiro Viajante"[2], publicado na Folha Informativa nº8 – Out/98, e a pedido de alguns colegas, serve este como resposta à questão da existência (ou não) de algoritmo para o Problema do Caixeiro Viajante. Para além disso, e no sentido da divulgação pretendida pela folha informativa abranger o máximo de público, tentámos tornar este artigo o mais informal possível. A quem pretender aprofundar os conceitos e teorias aqui aflorados recomendamos as referências [5], [6] ou [1].

2 Introdução

"– [...] Imagina que viajas para a América e que tens lá 25 amigos. Cada um deles vive numa cidade diferente e tu queres visitá-los a todos. Agarras no mapa e pensas na melhor maneira de o fazer, ou seja, o mínimo de quilómetros possível de modo a poupares o máximo de tempo e gasolina. Qual é o caminho mais curto? Como poderás descobri-lo?

[...]

– Onde está o problema insolúvel? Só preciso de calcular quantos percursos

existem e escolher o mais curto.
– Ahá! – gritou o velhote – Se fosse assim tão simples! Mas com 25 amigos já tens 25! possibilidades, e isto é um número horrorosamente grande. Mais ou menos

1600 000 000 000 000 000 000 000 00

É impossível experimentá-las todas para se saber qual é a mais curta. Nunca chegarias ao fim, mesmo com o mais potente computador que exista.
– Por isso, e numa palavra, não é possível.
– Isso depende muito. Já pensámos muito sobre este assunto. Os Diabos dos Números mais inteligentes já experimentaram com todos os truques possíveis e imaginários, e chegaram à conclusão de que às vezes resulta e outras não.
– Que pena. – Disse o Roberto – Se resulta apenas às vezes, ficamos a meio do caminho.
– E, o que é pior ainda, não conseguimos provar, definitivamente, que não existe uma solução perfeita. Nesse caso não teríamos que continuar a procurar. Teríamos ao menos demonstrado que não existe demonstração, o que, afinal de contas, seria também uma demonstração." – "O Diabo dos Números", Enzensberger.

3 Problemas, algoritmos e complexidade

Vamos começar pelo princípio, isto é, vamos definir de um modo mais rigoroso os termos utilizados no título desta secção.

Informalmente, dizemos que um *problema* não é mais do que aquilo que o algoritmo resolve mas, na verdade, é um objecto com o qual se pode trabalhar, e que podemos descrever como sendo constituído por um domínio – contendo todas as suas possíveis *concretizações* ou *particularizações* – e por uma questão geral a todas essas concretizações (no sentido em que pode ser aplicada a qualquer uma delas) produzindo uma *resposta*. Formalmente, podemos estabelecer um problema usando um par do seu domínio (C, R), onde C é uma descrição genérica de uma qualquer concretização, e R é uma *resposta*. O Problema do Caixeiro Viajante – **PCV** – aparece então formalizado como:

Caixeiro Viajante

Concretização: Conjunto de cidades,

$$c_1, \dots, c_n,$$

e distâncias inteiras positivas[3], $d(c_i, c_j)$, com $i, j = 1, \dots, n$.

Resposta: Permutação π do conjunto dos índices que minimiza

$$d(c_{\pi(n)}, c_{\pi(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)}) .$$

Um *algoritmo* é um método faseado de resolução de um dado problema, no sentido em que, quando aplicado a uma qualquer particularização do problema, *garante* a obtenção de uma solução. Podemos formalizar um algoritmo (ou método de resolução) de diferentes modos, nomeadamente, através de Máquinas de Turing ou de programas de computador, mas, e principalmente neste último caso, quando se pretende utilizar uma máquina para tratar problemas reais, procuramos encontrar algoritmos que, não só garantam a obtenção da solução desejada, mas que resolvam de um modo "eficiente" o problema proposto. Mas o que é um algori-

[3]Sem perda de generalidade pois, num computador, os irracionais são aproximados por racionais que podem, por multiplicação por um factor apropriado, ser transformados em inteiros.

tmo "eficiente"? Em geral, a resposta a esta pergunta, e apesar de haver outros recursos envolvidos, relaciona eficiência com tempo: procuramos construir algoritmos capazes de solucionar problemas *em tempo útil*.

Um problema só está *resolvido* se for possível construir um método geral para resolver qualquer concretização desse problema embora, na prática, só se possa resolver um conjunto finito de concretizações (até um dado comprimento máximo) devido a limites físicos dos recursos disponíveis. No entanto, se os métodos são gerais, poderão ser aplicados à resolução de concretizações maiores caso os recursos possam ser aumentados. Para o problema aqui em causa, o *tamanho* de cada concretização será, necessariamente, o número n de cidades e parece óbvio afirmar que o tamanho da concretização afecta o comportamento dos métodos de resolução em termos de utilização de recursos pois, quanto mais cidades, mais distâncias e, muito provavelmente, mais tempo gasto. Mas como podemos efectivamente estimar o tempo de resolução de um algoritmo quando aplicado a uma qualquer concretização?

Essa estimativa permite medir a *complexidade* de um método ou algoritmo, e é feita através da determinação de um *limite superior* para a quantidade do recurso – tempo – gasta pela aplicação do método de resolução a concretizações de tamanho n, e que é usualmente designada, em Ciências da Computação, como o *pior dos casos*[4], isto é, o pior que se pode esperar quando um dado método ou procedimento usa um dado recurso. Somos, então, conduzidos à definição seguinte:

> Um método diz-se *da ordem de F(n)*, e escreve-se $\mathcal{O}(F(n))$, se existir uma constante k tal que o tempo de execução do método, para qualquer concretização de tamanho n, é limitado superiormente por $kF(n)$.

F(n)	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50
n	0.00001 segundos	0.00002 segundos	0.00003 segundos	0.00004 segundos	0.00005 segundos
n^2	0.0001 segundos	0.0004 segundos	0.0009 segundos	0.0016 segundos	0.0025 segundos
n^3	0.001 segundos	0.008 segundos	0.027 segundos	0.064 segundos	0.125 segundos
n^5	0.1 segundos	3.2 segundos	24.3 segundos	1.7 minutos	5.2 minutos
2^n	0.001 segundos	1.0 segundos	17.9 minutos	12.7 dias	35.7 anos
3^n	0.59 segundos	58 minutos	6.5 anos	3855 séculos	$2\text{x}10^8$ séculos

Tabela 1 Comparações entre alguns tipos de ordens de complexidade relativamente ao recurso tempo.

[4] Pode perfeitamente acontecer que um dado método, para alguma concretização (ou mesmo para a maioria delas), utilize o recurso em causa em muito menor quantidade que a assim calculada. No entanto, a garantia mais rigorosa para concluir sobre a complexidade de um dado método relativamente a qualquer uma das suas concretizações encontra-se neste limite superior.

Assim sendo, um método dir-se-á, por exemplo, *Linear* se for $\mathcal{O}(n)$, *Polinomial* se for $\mathcal{O}(n^p)$ ou *Exponencial* se for $\mathcal{O}(p^n)$.

Claro que a "qualidade" real de classificações como as anteriormente apresentadas vai depender do tipo de máquinas disponíveis para a aplicação do método em causa. Se, por exemplo, usarmos uma máquina imaginária (e nem tão imaginária como isso) que, em termos de tempos de execução, apresenta os valores da tabela 1, podemos ver como a utilização do tempo pode variar em função do tamanho n, para alguns exemplos típicos de ordens de complexidade e para concretizações relativamente pequenas. Facilmente se verifica que, mesmo que algumas exponenciais comecem por apresentar valores mais baixos que algumas polinomiais, muito cedo perdem essa vantagem para passarem a apresentar valores incríveis (mas totalmente correctos)! Claro que, com uma máquina mais rápida, os tempos apresentados sofreriam um certo decréscimo mas este decremento só é realmente notório em métodos polinomiais pois, para os exponenciais, a ordem de complexidade é tão grande que a resolução se torna impraticável mesmo para concretizações de dimensões relativamente pequenas. De facto, suponha-se que temos 2 métodos, um com ordem de complexidade $\mathcal{O}(n^3)$ e outro da $\mathcal{O}(2^n)$, e uma máquina suficientemente rápida para que ambos resolvam concretizações de tamanho $n = 100$ em *uma hora*. Se conseguirmos um computador duas vezes mais rápido, podemos agora resolver com o método polinomial, na mesma hora, particularizações com $n = 126$ enquanto que o método exponencial só vai resolver, no mesmo tempo, concretizações com tamanho $n = 101$...

4 Métodos polinomiais e problemas de decisão – A classe P

Pelo pequeno exemplo apresentado na tabela 1 percebe-se que é desejável conseguir métodos *quando muito* polinomiais para aplicar à resolução de problemas. De facto, a maioria dos métodos exponenciais não é mais que uma variante do método de Procura Exaustiva – procura-se, entre *todas* as soluções possíveis para uma dada concretização de um problema, aquela que melhor satisfaz os requisitos exigidos. Por outro lado, métodos polinomiais aparecem, em geral, devido à apreensão de propriedades intrínsecas à estrutura do problema, permitindo reduzir o conjunto de soluções possíveis para aquelas ditas *admissíveis* ou mesmo a uma *única* solução bem caracterizada.

A maioria dos investigadores concorda que um problema só se diz *completamente resolvido* quando encontrado um método polinomial que o resolva e, mais ainda, diz-se que um problema *não pode ser tratado* (do inglês *intractable*) caso seja demasiadamente complexo para que possa existir um método polinomial que o resolva. Esta procura da classificação polinomial de problemas é muito importante pois permite tirar conclusões, com grande exactidão, sobre o comportamento de um método relativamente ao uso de um dado recurso o que, como vimos, já não acontece nos exponenciais[5]. O próximo passo torna-se óbvio: decidir, *por análise do problema*, se pode ou não existir

[5] Mais ainda, a complexidade de um problema pode ser considerada, no seu essencial, como independente da representação escolhida desde que esta seja uma codificação "sensata" da concretização em causa. Para mais promenores ver [5].

um algoritmo polinomial que o resolva! Entramos no domínio do estudo da *Complexidade de Problemas* ao invés da complexidade de algoritmos. Restringimos, aqui o nosso estudo aos, assim denominados, *Problemas de Decisão*, que não são mais do que problemas cuja resposta é "Sim" ou "Não". O Problema do Caixeiro Viajante não é um problema de decisão pois a resposta de cada concretização é a permutação que minimiza a distância. Pode, no entanto, ser facilmente reformulado como um problema de decisão, **PCV–Dec**:

Caixeiro Viajante–Decisão

Concretização: Conjunto de cidades, $c_1, \ldots, c_n$, distâncias inteiras positivas, $d(c_i, c_j)$, com $i, j = 1, \ldots, n$ e $i \neq j$, e um inteiro positivo k.

Resposta: "Sim", se e só se existe uma permutação π do conjunto dos índices tal que

$$d(c_{\pi(n)}, c_{\pi(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)}) \leq k\,.$$

Todos os problemas de decisão para os quais ou se conhecem ou se pode, comprovadamente, construir métodos polinomiais de resolução são agrupados sobre a definição geral de problemas pertencentes à classe P[6]. Podemos portanto dizer que, se um problema de decisão não pertence a P, é um problema *difícil*. Mas qual a relação entre o PCV–Dec e o PCV? Será que, se um pertencer a P, o outro também pertencerá, ou não podemos relacioná-los deste modo? [7] mostra que [7],

Teorema 1 *Existe um algoritmo polinomial em tempo para o PCV* sse *existe um algoritmo polinomial em tempo para o PCV–Dec.*

Este teorema garante-nos que podemos, de facto, restringir a nossa atenção ao problema PCV–Dec e procurar saber se este é ou não um problema difícil, procurando responder à seguinte questão: será que PCV–Dec pertence a P?

Sabemos que existem problemas que não estão em P: se o problema não é resolúvel por nenhum algoritmo, então, não pode pertencer a P, como no caso do Problema da Paragem de Turing[8]. De facto, Alan Turing demonstrou, no primeiro terço do século XX, que existem problemas *não decidíveis* (do inglês, *undecidable*) pois são tão complicados que não existe nenhum algoritmo que os possa resolver. Estes problemas constituem o exemplo perfeito de um problema que não pode ser tratado (podemos dizer que são "intratáveis")! Por outro lado, existem problemas que só são resolúveis por algoritmos exponenciais e que, portanto, também não pertencem a P. No entanto, e apesar de todos os indícios sugerirem que a resposta para a questão do PCV–Dec estar em P é negativa, não nos será possível apresentar provas concretas nesse sentido, pois, *para já*, elas não existem.

[6] Seguindo a notação de [6] esta classe está contida na classe mais geral FP onde se agrupam todos os problemas com algoritmos polinomiais sem restrições .

[7] Resultados análogos podem ser obtidos para a maioria dos problemas de optimização [5].

[8] Não é possível construir um algoritmo que, para um qualquer programa de computador e dados arbitrários, consiga decidir se esse programa, quando aplicado a esses dados, pára ou continua indefinidamente.

5 Não Determinismo – A classe *NP* e problemas completos para *NP*

Até ao momento, não conhecemos nenhum método que resolva o PCV–Dec em tempo polinomial. De facto, existe um número factorial de caminhos (permutações) possíveis de definir que poderão ou não ser menores do que k. No entanto, dado um qualquer caminho particular, I, podemos provar que a resposta associada é "Sim"(S) bastando para isso somar as distâncias correspondentes e comparar com k, sendo esta verificação obviamente feita em tempo polinomial no comprimento de I. Isto não implica que o problema possa ser resolvido em tempo polinomial pois não procurámos entre as várias permutações existentes mas, apenas, se uma certa permutação verifica a propriedade desejada.

A classe *NP* pretende incluir este tipo de problemas, ou seja, problemas de decisão para os quais se pode verificar se uma dada concretização corresponde a uma resposta S em tempo polinomial. No sentido de podermos classificar estes problemas como pertencentes à classe *NP*, podemos construir um método, dito *não–determinista* que "resolva" um dado problema X, no sentido de verificar todas as respostas S, em duas fases:

1. Dada uma qualquer concretização x do problema, obter, de algum modo não–determinista ("adivinhar"), uma sequência y tal que $|y| \leq p(|x|)$ [9], para algum polinómio p;

2. Executar um algoritmo de verificação em x e y que devolva a resposta "sim" ou "não".

Este *método não–determinista* é uma ferramenta poderosa: podemos descrevê-lo como um algoritmo que possui uma instrução especial que provoca subdivisões na computação, que passa assim a decorrer em paralelo. Como é evidente, estas computações paralelas podem crescer exponencialmente no tempo decorrido, como ilustra a figura 1.

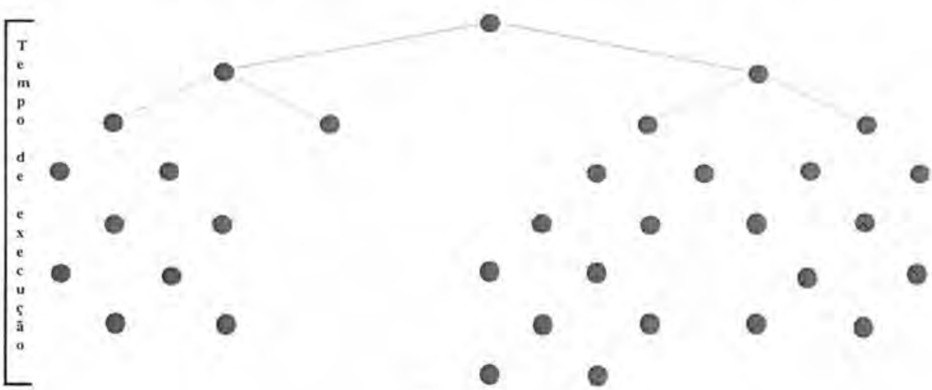


Figura 1

[9] $|x|$ representa o tamanho de x.

Estas considerações levam-nos à seguinte definição : um problema de decisão pertence à classe **NP**[10] se pode ser resolvido por um método não–determinista com um limite polinomial no recurso tempo.

Facilmente se verifica que o PCV–Dec está em *NP*. Mas que relação existe entre *P* e *NP*? Obviamente, $P \subseteq NP$ pois um algoritmo determinista polinomial não é mais do que um caso particular de um método não–determinista polinomial que não usa a instrução de paralelismo. Parece, no entanto, difícil acreditar que possa existir um algoritmo puramente determinista que possa simular não–determinista usando, *apenas*, um gasto polinomial de tempo.

Por um lado, é óbvio que, se $P = NP$, o PCV–Dec estaria em *P* e poderíamos começar a procurar um algoritmo polinomial para o PCV, com a certeza que ele existiria. Por outro lado, e apesar de os investigadores do domínio da Teoria da Complexidade acreditarem na hipótese $P \neq NP$, não foi até agora encontrada qualquer prova para a conjectura de que *P* esteja propriamente contido em *NP*. Quer isto dizer que não podemos afirmar que o PCV–Dec não pode ser resolvido em tempo polinomial a menos que se prove que $P \neq NP$.

Prova-se, no entanto, que,[11]

$$P \neq NP \iff \text{PCV–Dec} \notin P\,.$$

O problema *X* diz-se *transformável* para *Y* se existe uma transformação constructiva que aplica qualquer concretização do problema *X* para uma concretização equivalente do problema *Y*. Note-se que também uma transformação deve obedecer a limites para os recursos que utiliza, donde, se o tempo usado for polinomialmente limitado, podemos dizer que *X* é *polinomialmente transformável* para *Y*[12].

Define-se um problema *X* como polinomialmente *difícil* para *NP* se $\forall Y \in NP$, *Y* é polinomialmente transformável para *X*. E diz-se que *X* é *completo para NP* se *X* é polinomialmente difícil para *NP* e $X \in NP$.

Quer isto dizer que, *X* é *NP-completo* sse:

- $X \in NP$;
- qualquer outro problema em *NP* é polinomialmente transformável para *X*.

Existem vários problemas já identificados como *NP*–completos, sendo o da *Exequibilidade*[13] um dos primeiros:

Exequibilidade

Concretização: Conjunto de literais $U = \{u_1, \bar{u}_1, \ldots, u_n, \bar{u}_n\}$ e conjunto de claúsulas $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ onde cada c_i , $1 \leq i \leq m$ é constituído por literais de *U* (está na forma conjuntiva normal).

Resposta: "Sim", se e só se existe uma atribuição de valores lógicos a cada um dos literais em *U* tal que todas as claúsulas de *C* são satisfeitas (isto é, são verdadeiras).

[10] Cook e Karp foram os primeiros a mencionar e definir esta classe de problemas e foi Karp quem, em 1972, apresentou a denominação *Nondeterministic Polynomial time–NP*.

[11] Ou, equivalentemente, que o PCV–Dec é *NP*–completo.

[12] Para a formalização de polinomialmente transformável ver [1] ou [6]

[13] Tradução livre do inglês *Satisfiability* . O resultado da identificação deste problema como NP–completo é o denominado *Teorema de Cook*.

Outro exemplo de um problema *NP*–completo que voltaremos a encontrar (e que muito nos vai ajudar) é o do

Ciclo Hamiltoniano – **CH**
Instância: Grafo, $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$.
Resposta: "Sim", se e só se existe um caminho fechado que inclui todos os nós de G.

Dizer que um problema X é *NP*–completo, pode ser interpretado como dizer que X é um dos problemas mais difíceis em *NP*, segundo transformações compatíveis com P. Quer isto dizer que, se o PCV–Dec for *NP*–completo e se estiver em P, então, $P = NP$. Assim, é de todo o interesse saber se um problema é completo para *NP* segundo reduções compatíveis com P pois, então, pode afirmar-se que esse problema será resolvido em tempo polinomial se e só se $P = NP$.

6 PCV–Dec é *NP*–completo

Como vimos, a complexidade de um problema *NP*–completo está intimamente relacionada com a conjectura $P \neq NP$. Daí que, usualmente, a demonstração de que um novo problema é *NP*–completo ultrapasse a mera prova imediata e seja um exercício de (tentativa) de demonstração da conjectura: se conseguirmos provar que um problema completo para *NP* possui um algoritmo polinomial ...

No caso que temos em mãos, nada disto vai acontecer. Vamos mostrar apenas uma das provas típicas de *NP*–completude para o PCV-Dec, que ajuda também a exemplificar uma das técnicas de transformação entre problemas.

Note-se, em primeiro lugar, que as transformações (polinomiais ou não), são transitivas pelo que, se conseguirmos transformar um problema conhecido como *NP*–completo para o PCV-Dec, então todos os outros problemas em *NP* são também transformáveis para o PCV-Dec e, como este está em *NP*, está provado o pretendido.

Mais ainda, vamos provar que o PCV é *NP*–completo, provando que ele contém um caso particular (uma restrição) que é *NP*–completo. Nesse sentido, observemos o seguinte problema:

Caixeiro Viajante–Simétrico
Concretização: Conjunto de cidades, $c_1, \ldots, c_n$, distâncias inteiras positivas, $d(c_i, c_j)$, com $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ e tais que $d(c_i, c_j) = d(c_j, c_i)$, e um inteiro positivo k.
Resposta: "Sim", se e só se existe uma permutação π do conjunto dos índices tal que

$$d(c_{\pi(n)}, c_{\pi(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)}) \leq k .$$

Apesar de este ser o problema em que, habitualmente, as pessoas pensam quando se referem ao Caixeiro Viajante, ele é, de facto, um caso especial do problema mais genérico (note-se que tivemos de impôr uma restrição aos valores possíveis para as distâncias entre as cidades). Podemos ainda especializar mais, impondo a restrição adicional $d(c_i, c_j) + d(c_j, c_k) \geq d(c_i, c_k)$, isto é, impomos uma desigualdade triangular. É evidente que o Caixeiro Viajante, simétrico e com desigualdade triangular é um caso particular do problema inicial. Se este for *NP*–completo, por força maior, também o será o PCV.

Seja $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ um grafo qualquer. Defina-se conjunto de cidades,

$c_1, \ldots, c_n$, como sendo constituído por todos os nós de V e ainda, para i,j =1, ..., n ,

$$d(c_i, c_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } c_i \text{ liga a } c_j \\ 2 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Assim sendo, temos que

$$d(c_i, c_j) = d(c_j, c_i) \quad \text{e}$$

$$d(c_i, c_j) + d(c_j, c_k) \geq d(c_i, c_k) .$$

Ora, é evidente que existe um ciclo hamiltoniano se e só se existe um caminho fechado com distância $\sharp V$ e construímos, assim, para uma qualquer concretização do problema do ciclo hamiltoniano, uma concretização equivalente do PCV, simétrico e com desigualdade triangular. Mais ainda, o ciclo hamiltoniano é, necessariamente, o caminho mais curto entre todos os vértices, o que significa que, se resolvermos o CH, também resolvemos o PCV. Como, de acordo com o anteriormente exposto, o CH é *NP*–completo, está concluída a nossa demonstração de que

Teorema 2 *O PCV–simétrico e com desigualdade triangular é NP–completo.*

E, como este é, apenas, uma restrição do PCV geral, concluímos finalmente que:

O PCV–Dec é *NP*–completo.

7 Problemas, complexidade e aproximações

Mesmo que um problema qualquer seja classificado como *NP*–completo, se foi suficientemente importante para ser estudado é porque, provavelmente, é suficientemente importante para que seja necessário encontrar uma solução (ou resolução). Uma das consequências práticas da classificação como *NP*–completo (ou difícil) é a da restrição de estratégias e concentração de energias numa das opções seguintes:

Comecemos por notar que, em muitos casos, apenas um pequeno detalhe na descrição de um problema pode provocar uma mudança de P para *NP*–completo. Assim, e dado um qualquer problema, este não deve ser encarado taxativamente, isto é, embora por um lado possa intuitivamente parecer que deve ser possível provar que é *NP*–completo, deve-se, por outro lado, tentar descobrir se é possível construir um algoritmo que o resolva em tempo polinomial ou vice-versa.

Mesmo quando é possível demonstrar que um dado problema é completo para *NP*, e caso a necessidade de obter uma solução exacta seja premente (e o risco de uma grande perda de tempo seja secundário), nem tudo está perdido: o facto de o problema geral X ser completo para *NP* não implica necessariamente que a mesma classificação se imponha para todos os seus subproblemas ou restrições. Esses subproblemas, sendo particularizações, são independentes em termos de classificação pois que, enquanto alguns sejam ainda *NP*–completos, outros haverá que podem ser resolvidos em tempo polinomial, como é o caso da Compactação de Elementos Rectangulares numa área Rectangular, problema que está classificado como NP-completo mas que, no entanto, possui subproblemas demonstradamente em P (ver [1]). Uma análise mais profunda do problema geral poderá, então, possibilitar a identificação de casos particulares que sejam suficientemente importantes para serem salientados e estudados de per si, o que, eventualmente, poderá conduzir à descoberta de problemas particulares resolúveis em tempo polinomial. Poderá mesmo descobrir-se que as concretizações para as quais o problema não pode ser resolvido por um algoritmo polinomial são raras e possíveis de identificar a priori.

Por outro lado, e porque o tempo é, na maioria dos casos, um bem precioso, poderá ser possível "aproximar" a resolução do problema através do uso de algoritmos polinomiais, algoritmos esses que **não garantem** a obtenção da solução que satisfaz totalmente a pergunta feita (a "melhor" solução ou *solução óptima*) mas garantem, pelo menos, a obtenção de uma resposta que a satisfaz parcialmente (aproxima a solução óptima). Isto porque, dependendo do contexto em que o problema se põe e, caso não seja humanamente possível resolver o problema devido à relativa efemeridade da vida humana, poderá ser importante obter soluções "parciais" para a sua resolução. Neste caso, os algoritmos que aproximam a melhor solução são designados de *heurísticas*, e são especialmente importantes na generalidade dos problemas que surgem na área da Optimização Combinatória. Nestes casos, e o PCV é um deles, temos problemas de procura de extremos com três constituintes fundamentais [5]:

- um conjunto de concretizações, C;
- um conjunto finito de *soluções admissíveis*, $S(I)$, para cada concretização $I \in C$;
- uma função f, dita *função objectivo* que faz corresponder a cada par $(I, s) \in C{\times}S(I)$ um valor numérico denominado *valor da solução s*.

Um extremo absoluto para a concretização I é dito *solução óptima* e será este uma solução admissível $s^* \in S(I)$ tal que $\forall s \in S(I), f(I, s^*) = extr\{f(I, s)\}$, onde *extr* designará *mínimo* ou *máximo*, consoante for o caso.

Caso o problema seja completo (ou difícil) para NP, o melhor que podemos esperar conseguir em tempo polinomial é a obtenção de um extremo local ao invés do esperado extremo global, o que pode ser conseguido através do uso de heurísticas. Evidentemente que, a construção de heurísticas tenderá a procurar métodos *quando muito* polinomiais, caso contrário, estaríamos de volta ao ponto de partida.

Referências

[1] Almeida, A. M. de: *Uma Abordagem Particular ao estudo de alguns Problemas NP–completos*, Departamento de Matemática, FCTUC, 1994.

[2] Batel Anjo, A.J., Rodrigues, M.R.D.: *O Problema do Caixeiro Viajante*, Folha Informativa nº8 do Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, Outubro, 1998.

[3] Edmonds, J.: *Paths, trees and flowers*, Canad. J. Math., 17, 1965, pp. 449–467.

[4] Enzensberger, H.M.: *O Diabo dos Números*, Edições ASA 1998.

[5] Garey, M.R., Johnson, D.S.: *Computers and Intractability – A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, 1979.

[6] Johnson, D.S.: *Algorithms and Complexity – A Catalog of Complexity Classes*, Handbook of Theoretical Computer Science, Editor Jan Van Leeuwen, Vol.A, Elsevier Science Publishers B.V., 1990, pp. 67–161.

[7] Johnson, D.S. e Papadimitriou, C.H.: *Computational complexity, The Traveling Salesman Problem*, Edited by E.L.Lawler, J.K.Lenstra, A.H.G.Rinnooy Kan, D.B.Shmoys, John Wiley & Sons Ltd., 1985, pp. 37–85.

[8] Turing, A.: *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc., Serie 2, 42, 230–265 e 43, 544–546, 1936.

Os teoremas do cosseno e do seno na geometria esférica

D.A. Catalano

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
domenico@mat.ua.pt

1 Introdução

Apesar da geometria plana ser fundamental nos currículos escolares, não se deveria esquecer o facto de que a Terra tem uma forma geométrica mais próxima de uma esfera do que de um plano. Por isso parece-nos importante apresentar algumas noções de geometria esférica. Um exemplo típico de aplicação prática é a navegação. Mas também na mecânica a geometria esférica tem muitas aplicações.

Do ponto de vista puramente teórico um dos objectos geométricos mais interessante é o triângulo. Iremos aqui expor partes da teoria sobre triângulos esféricos com o objectivo de mostrar os seguintes resultados:

a) A soma dos ângulos internos de un triângulo esférico é sempre maior de π.

b) É sempre possível, a partir de três quantidades escolhidas entre os comprimentos dos lados e os ângulos de um triângulo esférico, calcular as outras.

No plano, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π e triângulos semelhantes têm os mesmos ângulos internos. Portanto, dados só os ângulos internos de um triângulo plano, nada podemos dizer sobre o comprimento dos lados.

Mostraremos b) utilizando o teorema do cosseno e do seno da geometria esférica exemplificando as várias situações e os procedimentos de cálculo num diagrama. Por isto, fórmulas que serão utilizadas no diagrama terão uma numeração diferente.

Sendo a esfera unitária S^2 um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ os seus elementos serão, dependendo do contexto, pontos do espaço tridimensional ou vectores de $\mathbb{R}^3$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^3$, denotaremos por $a \cdot b$ e por $a \times b$, respectivamente, o produto interno usual de a com b e o produto externo de a com b.

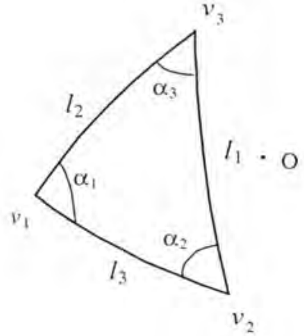
2 Triângulos esféricos

Seja

$$S^2 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1\Big\}$$

a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. A intersecção de um plano que contém a origem $O = (0, 0, 0)$ com S^2 é um *círculo máximo*. Dados $a, b \in S^2$ é fácil ver que há sempre um círculo máximo γ que os contém. Aliás, se $-b \neq a \neq b$, o círculo γ é único e uma equação do plano cuja intersecção com S^2 é γ será $(a \times b) \cdot v = 0$. Arcos de círculos máximos contêm os caminhos mais curtos em S^2 entre os seus extremos. No plano, temos a mesma situação para segmentos de rectas.

Um *triângulo esférico* é um triplo (v_1, v_2, v_3) de pontos de S^2, sendo v_1, v_2, v_3 vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$. Adoptaremos, como convenção, que o triângulo (v_1, v_2, v_3) é um triplo de vectores positivamente orientados, ou seja, tais que $(v_1 \times v_2) \cdot v_3 > 0$. Note-se que $(v_1 \times v_2) \cdot v_3 = (v_2 \times v_3) \cdot v_1 = (v_3 \times v_1) \cdot v_2$.
Podemos imaginar um triângulo esférico como o conjunto formado pelos seus vértices v_1, v_2, v_3 e pelos seus lados l_1, l_2, l_3 como na figura:



2

onde:

- l_i é o arco de círculo máximo entre v_{i+1} e v_{i+2} $(i = 1, 2, 3)$, sendo $(i, i+1, i+2)$ uma permutação cíclica de $(1, 2, 3)$[14].

- α_i é o ângulo entre os dois planos que contêm a origem O e, respectivamente, l_{i+1}, l_{i+2} .

Denotando por s_i o comprimento do arco do círculo máximo l_i temos que

$$0 < s_i < \pi \quad \text{e} \quad 0 < \alpha_i < \pi$$

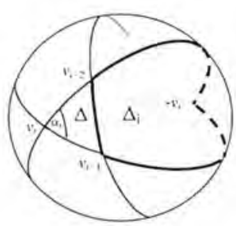
Mais, sendo s_i o ângulo em radianos entre os vectores v_{i+1} e v_{i+2}, então

$$\begin{aligned} \cos s_i &= v_{i+1} \cdot v_{i+2} \quad \text{e} \\ \sin s_i &= |v_{i+1} \times v_{i+2}| \end{aligned} \tag{1}$$

3 Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

Para cada ângulo α_i do triângulo $\Delta = (v_1, v_2, v_3)$ seja Δ_i o triângulo $(v_{i+2}, v_{i+1}, -v_i)$.

$\Delta \cup \Delta_i$ é o diedro de vértices v_i, $-v_i$ e ângulo α_i.



Como sabemos a área da esfera é $A(S^2) = 4\pi$. Então a área do diedro $\Delta \cup \Delta_i$ será

$$A(\Delta) + A(\Delta_i) = \frac{\alpha_i}{2\pi}\, 4\pi$$

de onde concluímos

$$3A(\Delta) + \sum_{i=1}^{3} A(\Delta_i) = 2\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \tag{2}$$

[14] A adição para índices é dada pela tabela

+	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

Seja $-\Delta$ o triângulo $(-v_1, -v_3, -v_2)$ e $-\Delta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ o triângulo $(-v_{i+1}, -v_{i+2}, v_i)$. Sendo, por simetria,

$$A(\Delta) = A(-\Delta),$$
$$A(\Delta_i) = A(-\Delta_i) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

e

$$A(\Delta) + \sum_{i=1}^{3} A(\Delta_i) + A(-\Delta) + \sum_{i=1}^{3} A(-\Delta_i) = A(S^2)$$

por outro lado, concluímos que

$$A(\Delta) + \sum_{i=1}^{3} A(\Delta_i) = \frac{1}{2}4\pi \qquad (3)$$

Subtraindo (3) de (2) temos que $2A(\Delta) = 2\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i\right) - 2\pi$ ou seja

$$A(\Delta) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

Sendo assim, como $A(\Delta) > 0$, temos o seguinte resultato: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi > 0$, isto é:

> *A* soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior que π.

4 O triângulo polar

Seja Δ o triângulo (v_1, v_2, v_3). *O triângulo polar associado a* Δ é o triângulo $\Delta' = (v_1', v_2', v_3')$ em que v_1', v_2' e v_3' verificam

$$v_i' = \frac{v_{i+1} \times v_{i+2}}{|v_{i+1} \times v_{i+2}|}, \qquad \text{isto é,}$$

$$\Delta' = \left(\frac{v_2 \times v_3}{|v_2 \times v_3|}, \frac{v_3 \times v_1}{|v_3 \times v_1|}, \frac{v_1 \times v_2}{|v_1 \times v_2|}\right).$$

Sejam s_i' e α_i', respectivamente, os comprimentos dos lados e os ângulos do triângulo Δ' e seja Δ'' o triângulo polar associado a Δ'. Então temos a seguinte

Proposição 3 *i)* $\Delta'' = \Delta$ *ii)* $s_i' = \pi - \alpha_i$ *iii)* $\alpha_i' = \pi - s_i$.

Demonstração. i) O símbolo $||$ indicará proporcionalidade entre vectores sendo o factor de proporcionalidade positivo. Utilizando a identidade vectorial

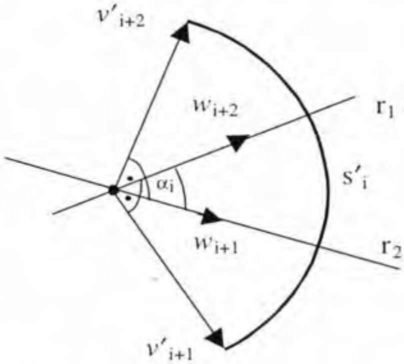
$$(a \times b) \times c = (c \cdot a)\, b - (c \cdot b)\, a \qquad (4)$$

da definição de triângulo polar, sendo $a \cdot (a \times b) = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} v_i'' \,||\, v_{i+1}' \times v_{i+2}' \,||\, &(v_{i+2} \times v_i) \\ &\times (v_i \times v_{i+1}) \\ &= [(v_i \times v_{i+1}) \cdot v_{i+2}]\, v_i \,||\, v_i \end{aligned} \qquad (5)$$

Mas como $|v_i''| = |v_i| = 1$ de (5) concluímos que $v_i'' = v_i$. Em particular $s_i'' = s_i$.

ii) A figura seguinte não é mais que a projecção ortogonal dos triângulos Δ e Δ' sobre o plano Π_i ortogonal a v_i que contém a origem O. Como v_{i+1}' e v_{i+2}' são ortogonais a v_i, então v_{i+1}' e v_{i+2}' pertencem ao plano Π_i. As projecções ortogonais dos planos que passam por O e contêm os lados l_{i+1} e l_{i+2} sobre o plano Π_i serão duas rectas r_1 e r_2, sendo r_1 ortogonal a v_{i+1}' e r_2 ortogonal a v_{i+2}'. O ângulo entre r_1 e r_2 será então α_i. Denotaremos por w_{i+1}, w_{i+2} as projecções ortogonais de v_{i+1}, respectivamente, v_{i+2} sobre o plano Π_i.



Sendo $|v'_{i+1}| = |v'_{i+2}| = 1$, da figura anterior, concluímos: $s'_i = \pi - \alpha_i$.

iii) Utilizando i) e ii) temos $s_i = s''_i = \pi - \alpha'_i$. Então $\alpha'_i = \pi - s_i$.

5 O teorema do coseno

Utilizando a igualdade ii) da proposição do parágrafo anterior, (1) e a identidade de Lagrange

$$(a\times b)\cdot(c\times d) = (a\cdot c)\,(b\cdot d) - (a\cdot d)\,(b\cdot c)\,,$$

vem

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_i &= \cos(\pi - s'_i) = -\cos s'_i \\
&= -\,v'_{i+1}\cdot v'_{i+2} \\
&= -\,\frac{v_{i+2}\times v_i}{|v_{i+2}\times v_i|}\cdot\frac{v_i\times v_{i+1}}{|v_i\times v_{i+1}|} \\
&= -\,\frac{(v_{i+2}\times v_i)\cdot(v_i\times v_{i+1})}{\sin s_{i+1}\ \sin s_{i+2}} \\
&= -\,\frac{(v_{i+2}\cdot v_i)\,(v_i\cdot v_{i+1})}{\sin s_{i+1}\ \sin s_{i+2}} \\
&\quad+\frac{(v_{i+2}\cdot v_{i+1})\,(v_i\cdot v_i)}{\sin s_{i+1}\ \sin s_{i+2}}
\end{aligned}$$

e de (1) concluímos que

$$\cos\alpha_i = \frac{\cos s_i - \cos s_{i+1}\cos s_{i+2}}{\sin s_{i+1}\ \sin s_{i+2}} \qquad \text{(C1)}$$

Resolvendo esta igualdade a $\cos s_i$, obtém-se: (**Teorema do cosseno**)

$$\begin{aligned}
\cos s_i &= \cos s_{i+1}\cos_{i+2} \\
&\quad - \sin s_{i+1}\sin s_{i+2}\cos\alpha_i
\end{aligned} \qquad \text{(C2)}$$

Como na geometria plana, o teorema do cosseno permite-nos calcular o comprimento de um lado de um triângulo, conhecendo o comprimento dos outros dois lados e o ângulo entre eles.

Aplicando o teorema do cosseno ao triângulo polar Δ' associado a Δ e utilizando as igualdades ii) e iii) da proposição do parágrafo anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_i &= -\cos\alpha_{i+1}\cos\alpha_{i+2} \\
&\quad + \sin\alpha_{i+1}\sin\alpha_{i+2}\cos s_i
\end{aligned} \qquad \text{(C3)}$$

Mais, resolvendo a última igualdade relativamente a $\cos s_i$, vem

$$\cos s_i = \frac{\cos\alpha_i + \cos\alpha_{i+1}\cos\alpha_{i+2}}{\sin\alpha_{i+1}\sin\alpha_{i+2}} \qquad \text{(C4)}$$

6 O teorema do seno

Sejam $\varepsilon = (v_i\times v_{i+1})\cdot v_{i+2}$ e $\varepsilon' = (v'_i\times v'_{i+1})\cdot v'_{i+2}$. Por um lado, de (5) sabemos que

$$(v_{i+2}\times v_i)\times(v_i\times v_{i+1}) = \varepsilon\ v_i \qquad (6)$$

Por outro lado, de (1), i) e ii) da proposição do parágrafo 4, temos que

$$\begin{aligned}
&(v_{i+2}\times v_i)\times(v_i\times v_{i+1}) \\
&= |v_{i+2}\times v_i|\,|v_i\times v_{i+1}|\,(v'_{i+1}\times v'_{i+2}) \\
&= \sin s_{i+1}\sin s_{i+2}\,|v'_{i+1}\times v'_{i+2}|\,v''_i \\
&= \sin s_{i+1}\sin s_{i+2}\sin s'_i\ v''_i \\
&= \sin s_{i+1}\sin s_{i+2}\sin\alpha_i\ v''_i \\
&= \sin s_{i+1}\sin s_{i+2}\sin\alpha_i\ v_i
\end{aligned} \qquad (7)$$

De (6) e (7) concluímos que

$$\sin s_{i+1} \sin s_{i+2} \sin \alpha_i = \varepsilon \qquad (8)$$

Aplicando o mesmo raciocínio ao triângulo polar Δ' associado a Δ, utilizando ii) e iii) da proposição do parágrafo 4, temos que

$$\sin \alpha_{i+1} \sin \alpha_{i+2} \sin s_i = \varepsilon' \qquad (9)$$

Sendo (9) independente de i, esta continua a ser válida se escrevermos $i+1$ em vez de i. Isto é,

$$\sin \alpha_{i+2} \sin \alpha_i \sin s_{i+1} = \varepsilon' \qquad (10)$$

Dividindo ordenadamente (10) por (8) temos

$$\frac{\sin \alpha_{i+2}}{\sin s_{i+2}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

e, como $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ não depende de i, podemos concluir que: **(Teorema do seno)**

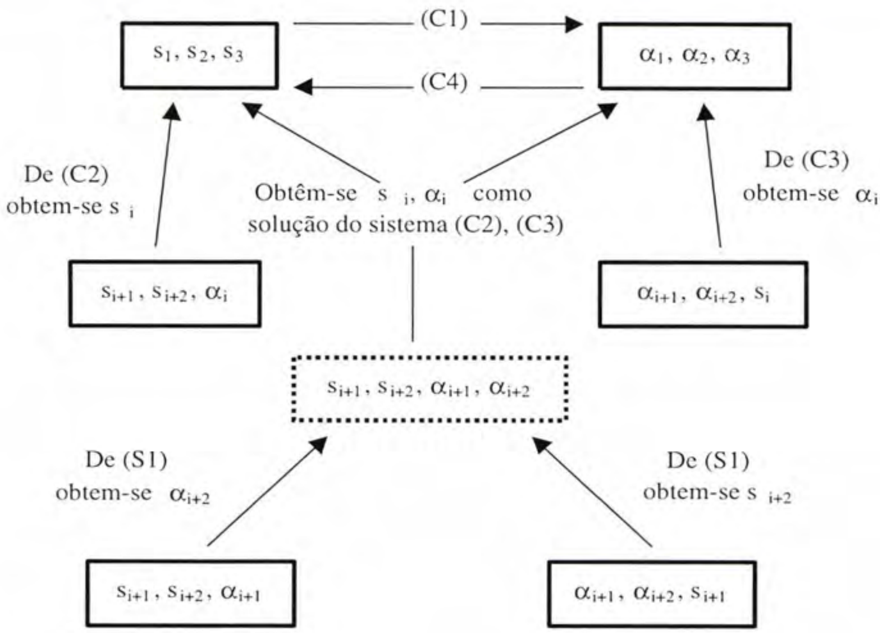
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin s_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin s_2} = \frac{\sin \alpha_3}{\sin s_3}. \qquad (S1)$$

7 Conclusões

O diagrama da página seguinte descreve como, através das fórmulas do parágrafo 5 e do teorema do seno, é sempre possível, a partir de três quantidades escolhidas entres os comprimentos dos lados e os ângulos de um triângulo esférico, calcular as outras. Observamos que, de (C1), se obtêm os ângulos a partir dos comprimentos dos lados e que, de (C4), se obtêm os comprimentos dos lados a partir dos ângulos. Mais, sendo $\sin t = \sin(\pi - t)$, utilizando o teorema do seno (S1) para calcular um ângulo ou o comprimento de um lado, temos sempre duas soluções.

As setas do diagrama vão de um conjunto de quantidades supostas conhecidas a um conjunto de quantidades a calcular e, trazem a informação de qual a fórmula a utilizar e, eventualmente, qual a quantidade que se consegue calcular através dessa fórmula.

Cremos que é possível conseguir programar um computador ou uma máquina calculadora, a partir do diagrama, de modo a calcular todas as quantidades dadas apenas três delas.



Referências

[1] M. Berger, *Geometry, Volume II*, Springer.

Pentágono inscrito numa circunferência

A. J. M. Antunes

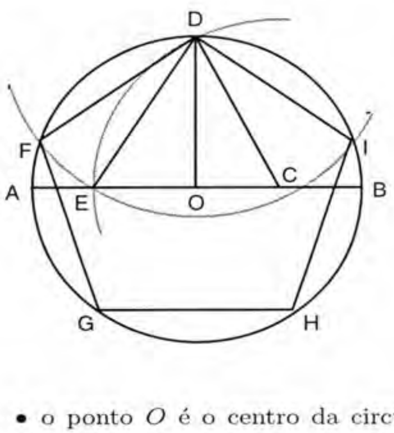
Escola Secundária de José Estevão
ajantunes@lusoweb.pt

Com este trabalho pretende-se fazer uma breve nota da História da Matemática e resolver um "velho" problema com ferramentas actuais.

Todos os conceitos envolvidos devem ser do conhecimento dos alunos do 12° ano, pelo que as justificações e cálculos pedidos constituem uma proposta de exercício, permitindo que o aluno siga uma pequena demonstração desenvolvendo a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.

Cláudio Ptolomeu (séc. II d.C.) deu-nos uma elegante construção do pentágono regular inscrito numa circunferência, na qual afirma que os comprimentos dos lados do pentágono, do hexágono e do decágono regulares inscritos na mesma circunferência, são os comprimentos dos lados de um certo triângulo rectângulo.

A construção é a seguinte:



- o ponto O é o centro da circunferência considerada e $[AB]$ um seu diâmetro;
- C é o ponto médio de $[OB]$;
- o ponto D obtém-se traçando OD perpendicularmente a AB;
- o ponto E pertence a $[OA]$ e verifica $\overline{CE} = \overline{CD}$.
- o ponto F está sobre a circunferência e $\overline{DF} = \overline{DE}$.

Os comprimentos dos lados do triângulo rectângulo $[DEO]$, $\overline{DE}$, $\overline{DO}$ e $\overline{EO}$, são, respectivamente, os comprimentos dos lados do pentágono, do hexágono e do decágono regulares inscritos na circunferência.

1. Demonstraremos que $\overline{DF}$ é o comprimento do lado do pentágono, provando que $D\hat{O}F = \frac{2\pi}{5}$ radianos (numa circunferência, a ângulos ao centro iguais correspondem cordas iguais).

1.1. Prova de que

$$\cos\left(D\hat{O}F\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Sem perda de generalidade, consideremos $r = 1$.
Tem-se sucessivamente:

$$\overline{DO} = 1$$

$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(porquê?)}$$

$$\overline{DF} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \qquad \text{(porquê?)}$$

Das propriedades do produto escalar de vectores deduz-se:

$$\left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OF}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OD}\right\|^2$$
$$-2 \times \left\|\overrightarrow{OF}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OD}\right\| \times \cos\left(D\hat{O}F\right)$$

(deduza) e, da condição anterior, pode concluir-se:

$$\cos\left(D\hat{O}F\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \text{(deduza)}$$

1.2. Prova de que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Como

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

então

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 0$$

logo $\frac{\pi}{5}$ é uma raiz da equação $\cos(3\alpha) + \cos(2\alpha) = 0$. Das relações

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

e

$$cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$$

(deduza), conclui-se que as equações

$$cos(3\alpha) + cos(2\alpha) = 0 \qquad (0.1)$$

e

$$4cos^3(\alpha) + 2cos^2(\alpha) - 3\cos(\alpha) - 1 = 0 \qquad (0.2)$$

são equivalentes. Como π é raiz da equação (0.1) e $\cos(\pi) = -1$, o polinómio $4x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ é divisível por $x + 1$ e pode concluir-se que são equivalentes as equações

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

e

$$(x+1)\left(4x^2 - 2x - 1\right) = 0 \quad \textit{(prove)}$$

e que as suas raízes são

$$-1, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \qquad \textit{(prove)}.$$

Tem-se então

$$\cos(3\alpha) + \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = -1 \vee \cos(\alpha) = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \vee \cos(\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

logo *cos* $\left(\frac{\pi}{5}\right)$ é um daqueles três valores.

Como $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, então $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ *(porquê?)* concluindo-se ser

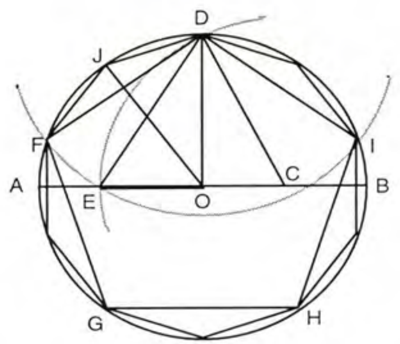
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Tem-se então

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \textit{(deduza)}.$$

Podemos agora concluir que $D\hat{O}F = \frac{2\pi}{5}$ radianos, pelo que $\overline{DE}$ é o comprimento do lado do pentágono regular inscrito na circunferência.

2. Facilmente provará *(prove)* que $\overline{OE}$ é o comprimento do lado do decágono regular inscrito na circunferência. Bastará, para tal, considerar um ponto J da circunferência tal que $\overline{DJ} = \overline{JF}$.



Como é do conhecimento geral que o comprimento do lado do hexágono regular é igual ao raio da circunferência, fica demonstrada a relação entre os comprimentos dos lados do pentágono, do hexágono e do decágono regulares inscritos na mesma circunferência.

Exames nacionais do ensino secundário
Algumas notas

Arsélio Martins
Escola Secundária de José Estevão
Aveiro
adam@mail.telepac.pt

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
jaimecs@mat.uc.pt

1 Alguma história

Uma das primeiras actividades da Sociedade Portuguesa de Matemática aquando da sua criação foi a constituição de uma Comissão Pedagógica; esta viu o seu plano de trabalhos aprovado por unanimidade na primeira reunião de estudo da SPM realizada em 26 de Junho de 1941. Nesse plano eram criticados os exames do ensino secundário:

"c) as condições de selecção são defeituosas, por má organização dos pontos e pelas normas de classificação;

d) acresce que os pontos, dada a sua textura habitual, vão influir sobre a qualidade do ensino, com manifesto prejuízo deste."

Na sequência desta reunião, a Comissão Pedagógica elaborou um estudo sobre os pontos de exame liceais de Matemática, relativos ao ano de 1940-1941, onde se criticava a forma como tais pontos de exame foram elaborados:

"demasiado extensos [...] não permite [...] avaliar da capacidade de raciocínio [...] [e da] aptidão para pôr, resolver e discutir problemas", "fortes disparidades no grau de dificuldade", "imprecisão de linguagem", "figuras mal feitas", "figuras erradas", "erros nas respostas", etc, etc;

além disso os critérios impostos pelo Ministério para a correcção e classificação das provas, constantes do folheto intitulado *Instruções aos reitores dos liceus sobre os exames liceais e de admissão aos liceus*, continham a

"disposição anti-pedagógica de mandar reduzir a zero a cotação de uma resposta deficiente ou incompleta, sem contemplação pelo trabalho realizado [...], mesmo que ele mostre estar de posse de todos os elementos para a resolução".

Este estudo foi aprovado em Assembleia da SPM de 10 de Dezembro de 1941 que deliberou enviar uma protesto ao Ministério da Educação, onde consta nomeadamente:

"1º- Considerar como injustificado e condenável, tanto do ponto de vista científico, como do ponto de vista pedagógico, o actual regime para os exames de liceu na disciplina de Matemática, já pela sua deficiência como meio de investigação dos conhecimentos dos examinandos, já pelo perigo, ainda maior, que representa pela deformação que provoca na orientação do ensino."

O Ministério da Educação deu indirectamente razão à SPM ao emitir em 21 de Fevereiro de 1942 uma nota intitulada *As instruções dadas à comissão organizadora dos pontos*, que dizia o seguinte:

"Pelo sr. Ministro da Educação Nacional foram dadas as seguintes instruções à Comissão organizadora dos pontos para exames liceais:

I: *O ponto modelo traduz uma orientação geral a seguir pela Comissão, não um paradigma que seja forçoso adoptar. Pode, portanto, deixar de seguir-se quanto:*

1) *às cotações a atribuir a certa questão; e*

2) *ao número de questões a propor, à sua ordenação e ao processo da sua formulação.*

II: *Pode a Comissão organizar os pontos com extensão menor do que a prevista no ponto modelo: pode e a experiência mostra que em alguns casos deve".*

1.1 Entre o secundário e o superior

Em Novembro de 1943, Bento de Jesus Caraça publica, na Gazeta de Matemática, um texto em que pretende analisar a coordenação (ou falta dela) entre o ensino secundário e o ensino superior através dos resultados dos exames de aptidão ao ISCEF. Da análise sobressai que os alunos cometem erros perfeitamente aberrantes (do tipo *"o lugar geométrico dos lados dum ângulo é a bissectriz"*, *"polígonos são figuras planas de um número ilimitado de lados"*, *"são chamadas superfícies de revolução às figuras do espaço que são geradas por sólidos"*) que Bento Caraça atribui à falta de espírito crítico e ao automatismo do ensino da Matemática, com uma clara tendência para aplicar fórmulas e receitas. Depois de algumas reacções publicadas na Gazeta de Matemática volta ao tema em Fevereiro de 1945 tentando oferecer a sua explicação para tão deplorável estado de coisas. Aí aponta algumas graves disfunções no sistema educativo, como a tendência para haver um número enorme de alunos "externos particulares" e "externos individuais" com altíssimas taxas de reprovações (um Director Geral atribuiu este facto ao facto de sermos uma "terra de autodidactas!") ou ainda a deficiente formação de professores (que num severo artigo de Hugo Ribeiro era apontada como a causa principal da degradação do ensino).

No primeiro dos artigos referidos Bento de Jesus Caraça afirma:

"É frequentíssimo encontrar entre os candidatos um desprezo total pelos resultados e seu possível enquadramento dentro do problema a que dizem respeito. É hoje limitadíssimo o número de candidatos que faz uma idéia clara do que seja a discussão dos resultados dum problema. Mas a coisa vai ainda mais longe e verifica-se em muitos casos uma completa indiferença, até, pela verosimilhança dos resultados. [...] Um candidato [...] encontra para a altura dum cone 7,2 metros e para geratriz do mesmo cone 3 metros e continua imperturbàvelmente o cálculo do volume do cone. Outro [...] encontra para altura do mesmo cone o número $6-3\pi$ e continua imperturbàvelmente! [...] Tôdas estas insuficiências, se reduzem, creio eu, fundamentalmente a duas: falta de espírito crítico e automatismo. Diante do problema, a primeira reacção do candidato é procurar a fórmula que se aplica [...] e atirar-nos com o resultado, não do problema, mas da aplicação da fórmula."

José Sebastião e Silva, em 1968, manifesta-se violentamente contra a influência nefasta que os exames de então tinham no ensino . Escreveu:

"[...] um sistema que tem vindo a agravar-se por todo um conjunto de factores (entre os quais avulta o da explosão escolar) que reduziram o ensino à preparação em massa para o exame, e, portanto, à degradação e à mecanização dos processos. [...] além de ficarem pelo caminho cerca de 80% dos alunos, consta que há numerosos casos de esgotamento! Tenho conhecimento de um caso de suicídio, e quem sabe se não haverá outros. Pergunto: É assim, com uma geração de frustrados e de nevróticos, que se poderá construir o Portugal de amanhã? [...] estamos em presença de um sistema educacional que não ensina a observar nem a experimentar, nem a reflectir, nem a raciocinar, nem a escrever, nem a falar: ensina apenas a repetir mecânicamente, a imitar e, por conseguinte, a não ter personalidade. É um sistema que reprime o espírito de autonomia e todas a possíveis qualidades criadoras do aluno, nas idades decisivas em que essas qualidades deveriam ser estimuladas ao máximo: um sistema feito à medida da mediocridade obediente, que acerta o passo enquadrada em legiões de explicadores. É, portanto, um ensino em regime de desdobramento: professor-explicador (e o mais grave é que o professor já conta com o explicador). [...] Depois na Universidade, o drama atinge o ápice. [...] Em certas cadeiras, a percentagem de reprovações atinge 90%. [...] haveria que facultar aos alunos mal preparados que são quase todos a frequência de um ano pré-universitário, a funcionar na Universidade ou em alguns liceus [...] teria essencialmente carácter de transição, de orientação e de recuperação à semelhança do que se faz em outros países. [...] verifica-se um divórcio quase total entre o ensino secundário e o ensino universitário [...]."

Estes problemas não são fáceis de resolver. Outros países, com outros sistemas, têm problemas semelhantes aos nossos. Em França, não há exames de acesso à Universidade na maioria dos cursos, mas a reprovação nos dois primeiros anos da Universidade chega a atingir os 80%. Na Grécia, onde apenas cerca de um quinto dos candidatos consegue entrar na Universidade, os exames de acesso ao ensino superior desvalorizam de tal modo o ensino secundário, que os alunos faltam a este para se poderem preparar melhor, em escolas privadas, para um exame tão decisivo para o seu futuro. Em Espanha o exame de acesso ao ensino superior não permite eliminar o "divórcio quase total entre o ensino secundário e o ensino universitário"; com efeito, em comunicação apresentada nas "IX Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas" (LUGO, 9-11 de Setembro de 1999), Luciano González Fernández, da Universidad de Vigo, afirma:

"Elegimos la Universidad del sur de Galicia porque estamos implicados en ella y no porque se trate de un caso aislado dentro de la Universidad Española. La enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Universidad no tiene en cuenta cual es la formación con la que llega el alumnado. El primer tema con el que se enfrentan alumnas y alumnos, en varias materias de Matemáticas cuando inician sus estudios universitarios es el de espacios vectoriales, cuando nunca oyeron hablar de estructuras algebraicas. En otras materias se les dedican varias sesiones al teorema de valor medio, cuando de todos es conocido que se trata de una pregunta recurrente de las pruebas de acceso a la Universidad. Urge una buena coordinación entre la enseñanza universitaria y la preuniversitaria."

Pensamos que estes problemas só se

resolverão, por um lado com um investimento na melhoria da qualidade técnica dos exames, por outro, com uma adequação entre o que é questionado no exame e o percurso anterior dos alunos; por fim é indispensável a intensificação do diálogo entre os professores do ensino secundário e os professores do ensino superior.

2 A actualidade dos exames. O impacto dos números

Os exames nacionais do ensino secundário, que é do que falamos, têm tido diversas valências. Na actualidade, para os alunos sujeitos a matrícula, a classificação dos exames influencia as classificações finais do ensino secundário e pode produzir a reprovação de um aluno que tenha obtido aprovação no processo de avaliação contínua, para além de servir como classificação específica para o ingresso no ensino superior. Para os alunos não sujeitos a matrícula, a classificação do exame substitui todo o processo da avaliação contínua e os alunos reprovam se tiverem uma classificação inferior a 10 em 20 valores.

Os exames nacionais de Matemática assumem para todos os estudantes do ensino secundário uma importância muito grande e implicam obrigações por parte dos professores que entram em contradição, muitas vezes, com as metodologias que pretendem utilizar na leccionação e que são as indicadas nos programas. Embora essa contradição possa em parte ser falsa por resultar de incompreensões e dificuldades na aplicação do programa, não pode iludir-se. Muitos professores entendem que, por via das obrigações impostas pela própria existência dos exames, não podem cumprir os programas e são levados a substituir a leccionação sugerida pelos programas por uma preparação redutora com vista ao êxito nos exames. Convenhamos que um fraco êxito desta concepção tem resultado nos exames. Na base deste argumento, levantam-se vozes contra os exames; diz-se que a existência dos exames condiciona e empobrece, por si só, o ensino e a aprendizagem.

Outros, ao contrário, entendem que, sem os exames, os professores tenderiam a sobrevalorizar um ou outro aspecto da sua preferência (particularmente no que respeita aos conteúdos) e não abordariam todos os aspectos que são considerados relevantes para a formação secundária dos cidadãos. Estes atribuem aos exames qualidades de instrumento de regulação e de alguma aferição das práticas lectivas dos diferentes professores.

É também verdade que a imagem social da Matemática e do seu ensino tem vindo a ser marcada (negativamente, claro) pelos fracos resultados dos exames nacionais. Os estudos sobre a realidade do ensino não chegam a atingir o grande público, enquanto que os resultados dos exames e as suas consequências têm larga repercussão na imprensa. A realidade do aproveitamento escolar em Matemática é desastrosa e ela deve ser meditada considerando a incapacidade do sistema de alfabetizar matematicamente os cidadãos venham eles a prosseguir estudos ou não.

Não nos deteremos sobre estes aspectos gerais do problema que foram tratados em vários artigos da revista "Educação & Matemática" e em vários outros estudos publicados.

O que nos interessa aqui é analisar alguns aspectos da actualidade dos exames de Matemática. Deter-nos-emos sobre a prova 135 (aquela a que são sujeitos os estudantes "normais" ou em idade normal). A sua importância é, desde logo, estabelecida pelo número de inscritos para prestar essa prova. Na primeira fase (Junho/Julho) de 1999, inscreveram-se 84829 estudantes. Mais nenhuma prova tem um tal número de inscritos. Segue-lhe os passos em número de inscritos a prova de Português B com 73775 inscritos e nenhuma outra chega aos 50000. Basta este facto numérico para perceber a importância que a este exame é dada pela comunicação social.Destes mais de oitenta mil inscritos só 42240 realizam exames como internos, ou seja, cerca de metade não têm classificação de frequência igual ou superior a 10 valores. A classificação média dos alunos internos é $7,2$ e a classificação final da disciplina (resultado do exame combinado com a classificação de frequência) é $10,9$, sendo que mais de 16000 desses examinandos obtiveram classificação final inferior a 10 e, por via do exame, reprovam no ensino secundário.

É claro que a situação dos alunos que reprovaram na frequência ou anularam a matrícula é bem pior. A classificação média dos mais de 17000 alunos que se candidataram a exame para aproveitamento do ensino secundário é de $2,7$ e mais de 16000 ficam reprovados, tendo classificações finais da disciplina inferiores a 10.

Estes dados da 1^a fase dos exames nacionais de Matemática mais normais têm um impacto social muito relevante. Todos os dados das restantes provas são secundários em relação a estes. Vale a pena referir que os dados dos alunos repetentes que prestam as diversas provas mais não fazem do que provar a inutilidade das repetências ao nível da apropriação de conhecimentos e competências matemáticas.

Continua a ser necessário que as sociedades científicas e as associações profissionais, tal como o fizeram no passado, continuem a debruçar-se sobre os problemas decorrentes dos exames nacionais. Muitas das perplexidades do passado subsistem hoje. Claro que convém ter presente a complexidade da situação actual.

3 Provação e prova.

3.1 As mudanças feitas e as mudanças por fazer

A população escolar é muito mais complexa (na diversidade das proveniências sociais) do que a população do passado. Há muito mais estudantes e ainda é verdade que os pais (e as comunidades em que se integram) se encontram longe do saber escolar. Os portugueses ainda têm baixos índices de escolarização e não acompanham seguramente a escola dos filhos até ao nível do 12^o ano. Há, por isso, duas rupturas com o elitismo do ensino secundário de há 30 ou 40 anos.

A natureza do ensino foi mudando, mas não é verdade que todas as mudanças tenham sido concertadas ou sequer adequadas. A democratização do acesso foi acompanhada de mudanças de programas – conteúdos e métodos – e mais raramente de mudanças fundamentais ao nível dos apoios sociais que corrigissem desigualdades, da formação inicial e continuada de professores, da organização escolar, etc.

Muitos dos papéis educativos tradicionalmente atribuídos às famílias chegaram à(ou foram transferidos para a) escola, incluindo a verificação da apropriação de competências gerais de cultura, atitudes e valores (que passaram a ser considerados na cultura da escola). A escola continua a ter a mesma organização por salas e turmas e os professores são formados para essa relação física, enquanto os papéis atribuídos à escola foram sendo alterados e em contradição com essa organização. De qualquer modo, apesar das práticas escolares não se terem alterado fundamentalmente, a avaliação da frequência reformou-se da simplicidade e absorveu a complexidade dos novos papéis. Em todas as disciplinas. Para o bem e para o mal, a classificação da frequência não representa o mesmo que a classificação de uma prova de exame sendo esta última, em grande medida, o que mais se aproxima da "redutora(?)" classificação tradicional.

Precisamos que as escolas públicas assumam como preocupação a classificação dos exames dos seus utentes. As classificações da frequência e do exame não são comparáveis. Sabemos que o desenvolvimento das competências gerais, desenvolvidas na leccionação, só pode beneficiar a execução de uma prova parcial.

Neste quadro difícil, os exames devem ser o quê?

3.2 Adequação dos exames

Os resultados dos exames levantam um grande número de questões e, particularmente, exigem a clarificação do modelo.

1. Os exames devem tentar esclarecer o nível de aquisições previsto pelos programas nacionais de ensino. Se for verdade que os exames questionam aquilo que os programas enunciam como sendo o fundamental da formação dos cidadãos, então os resultados dos exames dizem-nos que os estudantes do ensino secundário demonstram uma formação muito aquém do que é desejável.

2. Os exames devem ser adequados especialmente às aplicações práticas do programa? Devem. Mas isso é complicadíssimo, pois as aplicações do programa variam de escola para escola, de turma para turma, de professor para professor. Asssim sendo, o mais razoável é esperar que os professores cumpram um mesmo programa essencial; o que é esperar que esta adequação seja reduzida ao programa prescrito. De qualquer modo, baterias de questões devem ser (e são) testadas num grupo representativo de alunos.

3. Os exames devem respeitar as principais indicações dadas pelas provas modelo, publicadas antecipadamente. Os diversos tipos de exercícios, a forma do questionamento, o grau de dificuldade, a insistência em certos temas são, pela via da prova-modelo, conhecidos antecipadamente permitindo a preparação para os exames reais.

Deve dizer-se que, no essencial e tanto quanto sabemos, o Gabinete de Avaliação Educacional – GAVE – tem procurado fazer essas adequações e tem feito verificações sobre a adequação dos seus produtos, recorrendo a paineis de consultores que integram a SPM e a APM, para além de autores de orientações e programas e autores de manuais escolares.

3.3 Sobre a prova 135 da 1ª chamada de 1999

A prova é constituída por duas partes, tal como a sua prova-modelo.

A primeira parte apresenta nove questões de escolha múltipla. Quatro delas, mobilizam conhecimentos de análise (noções de limite, derivadas e seus significados geométricos) e pedem interpretação de gráficos e de modelação simples. Das restantes, três mobilizam conhecimentos de geometria analítica no plano e no espaço e duas questionam competências probabilísticas simples e combinatórias. A escolha das respostas não tem escolhos (no sentido de não carecer de cálculos complicados ou "habilidades" especiais) e assentam sobre conceitos e competências matemáticas "enxutas". A resposta pode ser encontrada por via directa ou por via indirecta (eliminação), a partir da análise dos dados de cada uma das situações apresentadas. Sendo verdade que algumas delas podem ser resolvidas pela associação de técnicas "rotineiras", o conjunto das questões não pode ser considerada simples no sentido da aplicação de rotinas treinadas.

A segunda parte, exigindo dez respostas com todos os cálculos e justificações de suporte, apresenta cinco alíneas sobre funções (generalidades, limites, continuidade e derivadas), sendo algumas delas de análise de uma situação matematicamente modelizada e outras de trabalho de interpretação sobre a expressão analítica de uma função. Das outras cinco alíneas, duas exigem interpretação de enunciado e conhecimentos de probabilidades e combinatória e as três restantes referem-se à interpretação de figuras referenciadas e a conhecimentos e técnicas de geometria analítica. Tal como na primeira parte, não é uma preparação baseada na listagem exaustiva de situações e técnicas associadas (sem a produção de interpretações significativas e a decisão consciente da matemática utilizável) que permite a realização da prova com segurança. Não nos parece simples no sentido tradicional do termo, mas não apresenta dificuldades excessivas (e desnecessárias).

3.3.1 A prestação da prova como problema

A prova destina-se a ser realizada em 120 minutos, tendo os examinandos de trabalhar em dois registos completamente diferentes. A gestão do tempo é um problema sério nestas provas e estamos longe de saber a influência desta dificuldade nas classificações. Por outro lado, há 81 pontos em 200 da prova de exame (escolha múltipla) que dependem de um tipo de questionamento não devidamente assimilado e trabalhado na leccionação. Estamos em crer que os professores devem preparar os alunos com vista a encontrar as diversas formas de fazer as escolhas com segurança. Não se trata de uma competência que possa ser apropriada automaticamente.

De um modo mais geral, a prestação de provas de esforço em tempo limitado tem de ser preparada como coisa em si. Não bastará que os alunos aprendam a resolver muitas questões sobre todos os assuntos do programa. É necessário que os alunos sejam confrontados com as provas, de modo a tomar decisões sobre a gestão do tempo tendo em atenção a diversidade das respostas esperadas. Há muitos examinandos que desenvolvem respostas a questões que não carecem de desenvolvimento e não têm tempo para esclarecer em detalhe, respostas que dele necessitam. Em Portugal, raros são os professores sensíveis ao desenvolvimento de competências que não sejam aquelas que dizem respeito à escolha da matemática a mobilizar e à manipulação de técnicas associadas. As artes de escrever respostas em português ou tomar as decisões certas durante uma prova de esforço não são habitualmente consideradas como assunto da leccionação. Têm de se encontrar os momentos certos (e possíveis) para realizar tarefas acompanhadas em que a arte de resolver problemas e a arte de prestar provas seja assunto da preparação para a vida, seja conteúdo e método de trabalho.

4 Notas finais

Análises finas dos resultados e investigação sobre as práticas das organizações escolares e dos docentes, cruzadas com os estudos de extracção social e taxas de escolarização das comunidades de suporte das escolas, podem ajudar a compreender os resultados dos exames nacionais de Matemática. Após a criação do GAVE e o trabalho aturado deste (sistemático e contínuo na adequação das questões ao programa oficial e às interpretações que os manuais aprovados dele fazem) na produção de provas de exame de Matemática, é necessário tomar decisões sobre os exames que não passam só pela alteração das provas a partir da crítica aos instrumentos de questionamento apresentados oficialmente.

Pensamos, no entanto, que podem estar a ser criadas pelo actual sistema de exames (e pelas suas valências de uso posterior) algumas perversões que podem produzir resultados estranhos à aprendizagem da matemática escolar. Particularmente preocupante é o número de exames nacionais a que os estudantes são sujeitos num curto intervalo de tempo.

Os professores e as suas associações científicas e profissionais devem acompanhar todos os estudos que se façam sobre este assunto e devem participar nas decisões que se venham a tomar sobre as questões que os exames levantam. Se os exames deixarem de existir, a pobreza dos resultados não desaparece. As perplexidades e as preocupações, que os resultados dos exames nacionais levantam, não podem ser confessadas para serem absolvidas atrás de qualquer medida de política fácil.

Considerações sobre o $\LaTeX 2_\varepsilon$

António Batel Anjo e *Delfim F. Marado Torres*

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
{batel, delfim}@mat.ua.pt

1 Antes de mais, o que é o TEX?

O TEX é um programa de computador, criado por Donald Knuth em finais dos anos 70, projectado para trabalho tipográfico, nomeadamente para a escrita de documentos com fórmulas matemáticas. Trata-se pois de um programa dirigido aos autores e desde sempre foi muito popular entre os matemáticos, físicos, astrónomos, informáticos e, de um modo geral, entre os cientistas.

O TEX, tal como o usamos hoje, foi tornado público em 1982 e é considerado como uma das ferramentas de software mais estáveis do mundo. Está neste momento na versão 3.14159 e será perfeito quando atingir o valor numérico de π.

O TEX tem-se desenvolvido no mundo académico, graças aos esforços colectivos de centenas de programadores de todo o mundo, e encontra-se disponível, gratuitamente, em quase todas as plataformas e sistemas operativos.

2 Um passo em frente: o LATEX

O LATEX é um acrescento ao TEX, que proporciona um sistema de preparação de documentos com uma excelente qualidade tipográfica, usando minutas profissionais pré-definidas.

Foi criado, originalmente, por Leslie Lamport e usa, tal como dissemos, o TEX como base. A versão mais recente do LATEX é o $\LaTeX 2_\varepsilon$ e será sobre esta versão que nos iremos aqui debruçar.

3 Um pouco de filosofia

Autores pouco experientes, cometem erros de formatação quando assumem que o design, por exemplo de um livro, é principalmente uma questão de estética: "Se um documento tem 'bom aspecto', então está bem concebido". Mas como os documentos devem ser feitos para serem lidos e não para estarem em galerias de arte, a facilidade de leitura e a facilidade de compreensão são factores muito mais importantes do que o facto de serem bonitos.

Nos populares ambientes WYSIWYG — "*What You See Is What You Get*" — normalmente são os autores que tratam de todo o design. O resultado são trabalhos 'muito bonitos' mas com uma estrutura pobre.

O LATEX previne este tipo de erros, forçando o utilizador a declarar as estruturas lógicas do texto. O LATEX encarregar-se-á, depois, do resto.

Falamos então de uma filosofia WYSIWYM — "*What You See Is What You Mean*" — em oposição ao WYSIWYG.

Para escrever em LATEX usamos simples ficheiros ASCII, criados por um qualquer editor, contendo o texto do documento propriamente dito e certos comandos que irão servir para o LaTeX produzir um ficheiro de extensão `.dvi`. As distribuições de LaTeX disponibilizam programas para visualizar e imprimir estes ficheiros, assim como uma série de conversores para outros formatos, como por exemplo o PostScript.

4 Porque devo aprender LaTeX?

As vantagens do LaTeX tornam-se evidentes quando os nossos documentos se tornam grandes. Uma tese, de mestrado ou doutoramento, em LaTeX cabe perfeitamente numa disquete. Uma colega nossa, precisava de 40 disquetes para guardar a sua dissertação de mestrado escrita em Word.

O LaTeX é também muito vantajoso quando mudamos, constantemente, os nossos ficheiros. No LaTeX, índices, citações, colocação de figuras, são tratados automaticamente.

Outra desvantagem do Word é produzir documentos – de extensão `.doc` – não portáveis. Quem ainda não teve problemas em ler um ficheiro de Macintosh em PC ou vice versa? Quem já tentou abrir um documento de Word entre diferentes versões de Word? Vejam o último exemplo: o Word 97 não é capaz de ler os ficheiros do Word 2000. Por outro lado, um documento criado em LaTeX, há dez anos atrás, ainda pode ser publicado, sem qualquer tipo de edição, com os sistemas actuais de LaTeX.

Por último, a qualidade tipográfica dos documentos produzidos pelo LaTeX é maior do que a que se obtém, por exemplo, com o Word. Claro que pudemos sempre mudar os "templates" no Word, mas então teremos trabalho para mais uns dias ...

Não vos queremos esconder nada: embora o LaTeX seja, em geral, fácil de usar, tem também as suas dificuldades; e exige um tempo de aprendizagem maior que o Word. No entanto, o esforço será compensado.

Se ainda não o conseguimos convencer das vantagens do LaTeX, não continue. Dê primeiro uma vista de olhos em:

```
http://www.cudenver.edu/
      ~hgreenbe/courses/
texinfo/wordvslatex.html
```

5 Generalidades sobre os ficheiros LaTeX

5.1 Espaços

Caracteres de espaço, como sendo o "espaço branco" ou o tab, são tratados todos como "espaço" pelo LaTeX. Vários espaços consecutivos são tratados como *um* "espaço". Um carácter de espaço no início duma frase é ignorado e a mudança de uma linha é tratada como um "espaço". Uma linha vazia entre duas linhas de texto define fim de parágrafo. *Várias* linhas vazias entre duas linhas de texto definem, na mesma, um parágrafo.

5.2 Caracteres Especiais

Os símbolos seguintes são caracteres reservados, que ou têm um significado especial para o LaTeX ou não estão disponíveis em todas as fontes. Se os introduzir directamente no texto, os caracteres não irão aparecer na impressão. São eles:

```
$  &  %  #  _  {  }  \
```

Como poderá constatar, a maioria destes símbolos poderão ser produzidos se antes do símbolo introduzir uma barra (\). No caso de querer introduzir o carácter \ no seu texto, não poderá fazer \\, pois este comando é usado para mudança de linha. Para produzir este carácter terá de recorrer ao comando

```
$\backslash$
```

5.3 Comandos

Os comandos de LaTeX são *"case sensitive"*, isto é, diferem se estiverem com letras maiúsculas ou minúsculas. Podem ter dois formatos possíveis: ou começam com uma barra \ e têm de seguida um nome constituido apenas por letras —aí os comandos terminam com um espaço, um número ou outro carácter 'não-letra'– ou consiste numa barra \ e exactamente um carácter especial.

O LaTeX ignora os espaços depois dos comandos. Se quisermos obter um espaço após um comando, teremos de colocar \ seguido de espaço após o comando, ou então {} seguido também de espaço após o referido comando.

5.4 Comentários

A partir do carácter %, o LaTeX ignora o resto da presente linha, a quebra de linha, e todos os tipos de espaço no início da linha seguinte. Sendo assim, este carácter serve para introduzir no ficheiro comentários que depois na impressão não aparecem.

6 A estrutura dos ficheiros LaTeX

6.1 O preâmbulo

Quando o LaTeX2$_\varepsilon$ processa um ficheiro, ele espera que esse ficheiro siga uma certa estrutura. Todos os ficheiros devem começar com um comando do tipo

```
\documentclass[...]{...}
```

Com efeito, a primeira informação que o LaTeX precisa de saber quando está a processar um ficheiro, é o tipo de documento que o autor quer criar. Alguns tipos de documentos são:

article para artigos em jornais científicos, pequenos relatórios, ...

report para relatórios longos contendo vários capítulos, pequenos livros, teses de Doutoramento e dissertações de Mestrado, ...

book para livros completos

slides para slides e acetatos. Esta classe usa letras grandes *sans serif*.

O LaTeX2$_\varepsilon$ inclui outras classes, por exemplo para escrita de cartas.

Além disso, podemos especificar, entre parêntesis rectos, uma série de opções que nos permitem personalizar o comportamento do documento. Essas opções são separadas por vírgulas. As mais comuns são:

10pt, 11pt, 12pt Indicam o tamanho da fonte principal no documento. Por defeito, os documentos são `10pt`.

a4paper, letterpaper, a5paper, b5paper Definem o tamanho do papel onde o documento será impresso. O tamanho por defeito é o `letterpaper`.

fleqn Coloca as fómulas matemáticas alinhadas à esquerda em vez de centradas.

leqno Coloca a numeração das fórmulas matemáticas à esquerda destas, em vez de estarem à direita.

titlepage, notitlepage Especifica se uma nova página deve ser usada, ou não, após o título do documento. A classe `article` não começa, por defeito, uma nova página enquanto as classes `report` e `book` o fazem.

twocolumn faz o LaTeX produzir o texto em duas colunas.

twoside, oneside Controla as margens da página adequadamente, consoante quisermos imprimir o texto apenas num ou nos dois lados da folha. O `article` e o `report` usam o `oneside` por defeito enquanto o `book` usa o `twoside`. Atenção: o comando `twoside` não indica à impressora que deve imprimir nos dois lados da folha.

openany, openright Faz com que os capítulos comecem em qualquer página ou apenas em página ímpar, do lado direito. Estas opções não funcionam no modo `article`, pois este modo não reconhece capítulos. O modo `report` usa por defeito o `openany` enquanto o modo `book` usa por defeito o `openright`.

Exemplo: um ficheiro em LaTeX pode começar com a linha

```
\documentclass[11pt,twoside,
               a4paper]{article}
```

indicando que pretendemos escrever um artigo com o tamanho da fonte base de *onze pontos* e que pretendemos imprimi-lo dos dois *lados* em páginas *A4*.

De seguida, podemos:

• Incluir comandos que *influenciam o estilo de todo o documento*. Por exemplo:

alterar o espaçamento normal entre linhas com o comando

```
\renewcommand{%
  \baselinestretch}{...}
```

onde ... deverá ser substituído por um valor numérico. Alguns valores constam da tabela seguinte.

Tamanho letra	Espaçamento duplo	Espaçamento 1.5
10pt	1.67	1.25
11pt	1.62	1.21
12pt	1.66	1.24

• *Definir novos comandos.* Por exemplo podemos definir os comandos $\backslash R$ e $\backslash N$ por

```
\def\R{{\rm I\kern-.17em R}}
\def\N{{\rm I\kern-.20em N}}
```

para produzir, respectivamente, os símbolos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$. (Um efeito semelhante pode ser conseguido pela inclusão do *"package"* `amssymb`. Ver comentário à frente.)

• *Carregar "packages"* que acrescentam novas opções ao sistema LaTeX. Para carregar um "package" usa-se o comando

```
\usepackage[...]{...}
```

Um exemplo pode ser

```
\usepackage[portuges]{babel}
```

quando pretendemos escrever documentos em língua portuguesa. Desta maneira iremos ter *Capítulo* em vez de *Chapter*, etc. Podemos também usar o *package* `babel` para escrever documentos multi-língua. Por exemplo

```
\usepackage[portuges,
            english]{babel}
```

Fazemos a comutação da língua, conforme necessário, com o comando

```
\selectlanguage{...}
```

Deste modo podemos ter diferentes regras de hifenização. Um outro *package* útil é o

```
\usepackage{isolatin1}
```

que nos permite introduzir palavras acentuadas, de imediato, sem o uso de quaisquer comandos para o efeito. Para escrita de documentos matemáticos, poderá dar jeito incluir:

```
\usepackage{amssymb}
```

Poderemos então, a título de exemplo, produzir os símbolos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$, respectivamente com os comandos `$\mathbb{R}$` e `$\mathbb{N}$`.

Existem milhares de *packages*: potencialmente para tudo o que precisamos e viremos a precisar. A este respeito, a referência certa é sem dúvida o livro [1]. Se a sua distribuição de LaTeX não disponibilizar um determinado package que pretende usar, poderá sempre encontrá-lo na internet nos servidores CTAN (ver secção 8 mais à frente).

Aqui vamos apenas indicar mais dois packages: um para inclusão de imagens e outro para produzir um índice.

Para inclusão de gráficos no formato `.eps` pode usar o `graphicx`

```
\usepackage{graphicx}
```

que lhe permite depois incluir as imagens com o comando

```
\includegraphics[Largura,Altura,
     Angulo,Escala]{Imagem.eps}
```

Não se esqueça que tudo o que vem entre parêntesis rectos é sempre opcional.

Para geração de índices deve incluir os comandos

```
\usepackage{makeidx}
\makeindex
```

e depois, no corpo do texto e na altura que desejar, escrever

```
\tableofcontents
```

6.2 O corpo

Estamos nesta altura prontos para começar a trabalhar no texto propriamente dito. Um exemplo:

```
\begin{document}
  Um texto muito curto!
\end{document}
```

Enquanto a área entre o `\documentclass` e o `\begin{document}` é chamada de *preâmbulo*; chamamos *corpo do texto* ao compreendido entre os comandos `\begin{document}` e `\end{document}`.

Tudo o que vier a seguir ao comando `\end{document}` é pura e simplesmente ignorado pelo LaTeX.

6.2.1 Alguns Exemplos de Escrita

O texto que se segue, é um documento independente que se inicia da seguinte forma:

```
\documentclass[11pt]{article}
\usepackage{isolatin1}
\begin{document}
\title{A arte de bem
        excrever \LaTeX}
\author{Delfim e António}
\date{\today}
\maketitle
```

A primeira instrução define o tipo e o tamanho da letra que vamos usar.

```
\documentclass[11pt]{article}
```

A instrução

```
\usepackage{isolatin1}
```

é o exemplo de como chamar um arquivo utilitário: a codificação de sinais diacríticos varia de computador para computador; o arquivo

```
isolatin1.sty
```

efectua a descodifição. Segue-se o título do trabalho, o autor e a data. Aqui acaba o preâmbulo do documento e começa o texto, sempre depois de um

```
\begin{document}
```

Uma expressão matemática é escrita, e destacada, no texto da seguinte forma

```
$$
\sqrt{
  \sqrt{
    \sqrt{
      \sqrt{
        \sqrt{
          \sqrt{
            \sqrt{x}}}}}}}
$$
```

que produz o seguinte resultado

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}}}}$$

Pode no entanto ser conveniente reter essa expressão matemática para referência posterior – ou anterior ...

```
\begin{equation}
 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}
 \label{raiz}
\end{equation}
```

Desta forma podemos referir-nos à expressão (6.1) em qualquer parte do texto,

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}} \tag{6.1}$$

usando o comando do LaTeX

```
\ref{raiz}
```

A escrita de expressões mais elaboradas como por exemplo o teorema 6.1, é conseguida à custa de alguma novas definições.

Teorema 6.1 *Se n é um inteiro positivo, então $D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$.*

Demonstração: Utilizando a definição de x^{-n}, a regra do cociente e a regra da potência,

$$\begin{aligned} D_x(x^{-n}) &= D_x(\frac{1}{x^n}) \\ &= \frac{x^n(0) - 1(nx^{n-1})}{(x^n)^2} \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{(n-1)-2n} \\ &= (-n)x^{-n-1} \end{aligned} \tag{6.2}$$

◇

Vejamos como se produz este texto

```
\begin{teor}
Se $n$ é um inteiro positivo,
então
$D_x(x^{-n}) = -n x^{-n-1}$.
\label{teorema}
\end{teor}

\begin{demo}
Utilizando a definição de
$x^{-n}$, a regra do cociente
e a regra da potência,

\begin{eqnarray}
D_x(x^{-n}) &=&
D_x(\frac{1}{x^n})
\nonumber\\
&=& \frac{x^n(0)
-1(nx^{n-1})}{(x^n)^2}
\nonumber\\
&=& \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=
(-n) x^{(n-1)-2n} \nonumber\\
&=& (-n)x^{-n-1}
\end{eqnarray}

\end{demo}
```

Os ambientes *teorema* e *demonstração*, colocados no preâmbulo do documento, são definidos da seguinte forma:

```
\newtheorem{teor}%
  {Teorema}[section]

\newenvironment{demo}{%
  \endsloppypar\noindent
  \bgroup\small
  {\bf{Demonstração:} }
}{\samepage\null\hfill
$\diamond$\endsloppypar\egroup}
```

No próximo número, continuaremos a tratar de escrita de documentos em LaTeX.

7 Breves pensamentos

Será que nos deveríamos ver obrigados a alinhar na infindável corrida de actualizações de hardware e software — que tão bem caracteriza a indústria informática dos dias de hoje— se o que pretendemos é escrever textos de qualidade profissional?

A manipulação de ficheiros ASCII (e o uso do próprio LaTeX) pode bem ser feito com aquele 'velhinho' 486 que tem para aí num canto ...

Não é verdade que as técnicas de escrita, por exemplo de um curriculum vitæ, pouco ou nada se alteraram nos últimos 10 anos? Então porque será que a produção de documentos tem sido o pretexto de compra de programas e computadores cada vez mais recentes?

Os ficheiros ASCII, por seu lado, garantem também a portabilidade dos documentos entre sistemas operativos e máquinas diferentes!

8 Onde encontrar uma distribuição livre de LaTeX?

O que se segue é a nossa opinião, obviamente limitada aos nossos conhecimentos, de quais as 'melhores' distribuições de LaTeX disponíveis em regime livre, na internet, para a plataforma que usa.

Qualquer uma delas pode ser encontrada num dos servidores CTAN: por exemplo `ftp.tex.ac.uk`, `ftp.dante.de` ou `ctan.tug.org`, a partir da directoria `/tex-archive/systems/`.

Linux: *teTeX*, disponível em `unix/teTeX`. Já vem, por exemplo, com o RedHat Linux.

MS-DOS: *emTeX*, disponível em `msdos/emtex`.

Win32: (Win95, Win98 e NT) *MikTeX*, disponível em `win32/miktex`.

Power PC: *MikTeX*, disponível em `win32/miktexppc`.

Mac: *OzTeX*, disponível em `mac/oztex`. Deve correr em qualquer Macintosh Plus, SE, II, ou modelos mais novos. Não trabalha em Macs com apenas 128K ou 512K.

Existem também versões não comerciais para outras plataformas, tais como *Ataris*, *Amigas*, etc. Não há mesmo desculpa para não produzir documentos de qualidade profissional!

9 Para saber mais

O local ideal de partida, diríamos mesmo um sítio obrigatório para todos os interessados em LaTeX, é a página do "TeXUsers Group":

`http://www.tug.org`

Aí poderá encontrar: respostas às perguntas mais frequentes; informação sobre como instalar o LaTeX no seu computador; livros a ler; tutoriais disponíveis na rede; etc, etc.

Na remota possibilidade de não encontrar a informação que precisa, peça ajuda aos outros utilizadores. A comunidade LaTeXiana é muito prestável. Recomendamos o fórum de notícias e discussão `comp.text.tex`.

Agradecimentos

A escrita deste documento despoletou o interesse de Marcos Daniel, aluno do ensino secundário, para o LaTeX. Queremos agradecer-lhe o facto de nos ter mostrado que mesmo para um jovem de 16 anos, 'educado nas filosofias visuais', a aprendizagem de um sistema como o LaTeX, orientado para o conteúdo e não para o aspecto do texto na página, não é difícil e torna-se mesmo produtiva num abrir e fechar de olhos. Continua!

Referências

[1] M. Goossens , F. Mittelbach and A. Samarin, *The LaTeX Companion*, Addison--Wesley, 1994.

[2] H. J. Greenberg, *A Simplified Introduction to LaTeX*, July 21, 1999, `http://www.cudenver.edu/~hgreenbe/`.

[3] T. Oetiker, H. Partl , I. Hyna and E. Schlegl, *The Not So Short introduction to LaTeX2ε*, Version 3.2, September 21, 1998, `CTAN:/tex-archive/info/lshort`.

Exames nacionais do ensino secundário
1999

Ponto 135 – 12º ano de escolaridade
(Decreto nº 286/89, de 29 de Agosto)

Apresentamos de seguida as *versões 1 do Ponto 135*, para os cursos gerais e os cursos tecnológicos.

Observações iniciais

Todas as provas têm a duração de 120 minutos.
A primeira parte de todas as provas inicia-se com o seguinte conjunto de observações:
• As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
• Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
• Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
• Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
• Não apresente cálculos.

A cotação desta parte é de 81 pontos em 200. Cada resposta certa vale 9 pontos, cada resposta errada vale -3 pontos e cada questão não respondida ou anulada vale zero pontos.

Um total negativo nesta parte vale zero pontos.

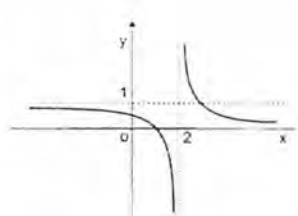
A segunda parte das provas inicia-se com as duas seguintes observações:

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.
Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pretende para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.[15,16]

1ª Fase 1ª Chamada

Primeira Parte

1. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.



[15]**NR:** Esta chamada de atenção não ocorre na prova de época especial.
[16]**NR:** Indicamos as cotações de cada questão desta parte entre parênteses ao lado do número de ordem.

As rectas de equações $x = 2$, $y = 1$ e $y = 0$ são assímptotas do gráfico de f. Seja (x_n) a sucessão de termo geral

$$x_n = 2 - n^2$$

Indique o valor de $\lim f(x_n)$

(A) 0 (B) 1

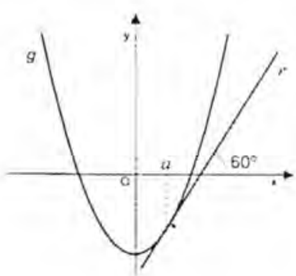
(C) $-\infty$ (D) $+\infty$

2. Na figura estão representadas:

 - Parte do gráfico da função g de domínio $\mathbb{R}$, definida por

 $$g(x) = \sqrt{3}x^2 - 1$$

 - Uma recta r tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa a



A inclinação da recta r é 60°.

Indique o valor de a

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

3. De uma função h de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

 - $h(0) = 0$
 - h é estritamente crescente no intervalo $[0, 2]$
 - h é uma função par

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) h tem um máximo relativo para $x = 0$

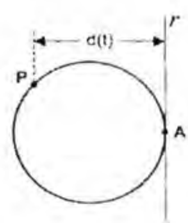
(B) $h(-1) < 0$

(C) h é estritamente crescente no intervalo $[-1, 0]$

(D) $h(-2) + h(2) = 0$

4. Na figura estão representadas:

 - Uma circunferência de raio 1
 - Uma recta r, tangente à circunferência no ponto A

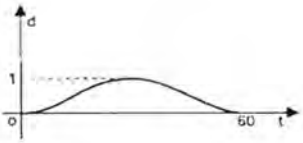


Admita que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre a circunferência, em sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, descrevendo uma única volta em sessenta segundos.

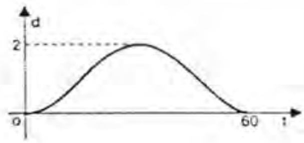
Seja $d(t)$ a distância do ponto P à recta r, t segundos após o início do movimento.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d?

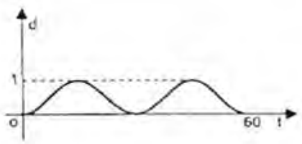
(A)



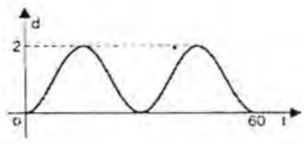
(B)



(C)



(D)



5. Num referencial o.n. xOy, uma parábola P tem vértice $V(3,6)$ e foco $F(-1,6)$. Indique qual das expressões seguintes é uma equação da directriz da parábola P.

(A) $x=-5$ **(B)** $x=1$

(C) $x=3$ **(D)** $x=7$

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α e β, definidos pelas seguintes equações:

$$\alpha:\ x=1 \qquad \text{e} \qquad \beta:\ y=2$$

Seja r a recta de intersecção dos planos α e β.

Indique qual das expressões seguintes é uma equação vectorial da recta r.

(A) $(x,y,z)=(1,2,0)+k(0,0,2),\quad k\in\mathbb{R}$

(B) $(x,y,z)=(1,1,0)+k(1,2,0),\quad k\in\mathbb{R}$

(C) $(x,y,z)=(1,1,0)+k(0,0,2),\quad k\in\mathbb{R}$

(D) $(x,y,z)=(1,2,0)+k(1,2,0),\quad k\in\mathbb{R}$

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano definido pela equação $x+2y+3z=10$

Para um certo número real m, a condição $x=y-2=\frac{z}{m}$ define uma recta paralela ao referido plano.

Indique o valor de m

(A) -2 **(B)** -1

(C) 1 **(D)** 2

8. Lança-se quatro vezes consecutivas um dado com as faces numerads de 1 a 6. No primeiro lançamento sai face 1 e no segundo sai face 2.

Qual é a probabilidade de os número saídos nos quatro lançamentos serem todos diferentes?

(A) $\frac{6\times5\times4\times3}{6^4}$ **(B)** $\frac{6\times5}{6^4}$

(C) $\frac{6\times5}{6^2}$ **(D)** $\frac{4\times3}{6^2}$

9. $\underline{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g}$ representa uma linha completa do Triângulo de Pascal, onde todos os elementos estão substituídos por letras.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $c={}^6C_3$ **(B)** $c={}^6C_2$

(C) $c={}^7C_3$ **(D)** $c={}^7C_2$

Segunda Parte

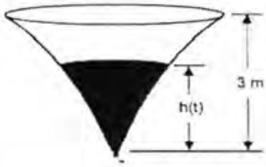
1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 e^{x+1} & se\ x \leq 0 \\ \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} & x > 0 \end{cases}$

   1.1.(12) Estude a função f quanto à continuidade.

   1.2.(15) Mostre que f admite um único máximo no intervalo $]-\infty, 0[$ e determine-o.

   1.3.(11) Seja r a recta de equação $y = 1$. Mostre que existem infinitos pontos de intersecção da recta r com o gráfico de f.

2. A figura representa um reservatório com três metros de altura.



   Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. O reservatório fica vazio ao fim de catorze horas.

   Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por

$$h(t) = \log_2(a - bt), \quad t \in [0, 4],$$

   onde a e b são constantes reais positivas.

   2.1.(12) Mostre que $a = 8$ e que $b = \frac{1}{2}$.

   2.2.(13) Prove que a taxa de variação média de h no intervalo $[6, 11]$ é $-0,2$.

   Interprete este valor no contexto da situação descrita.

3. A Joana tem na estante do seu quarto três livros de José Saramago, quatro de Sofia de Mello Breyner Andresen e cinco de Carl Sagan.

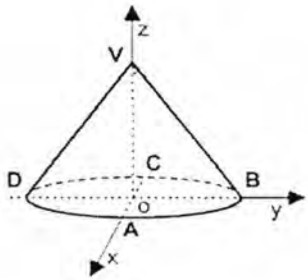
   Quando soube que ia passar as férias a casa da sua avó, decidiu escolher seis desses livros, para ler durante este período de lazer. A Joana pretende levar dois livros de José Saramago, um de Sofia de Mello Breyner Andresen e três de Carl Sagan.

   3.1.(8) De quantas maneiras pode fazer a sua escolha?

   3.2.(12) Admita agora que a Joana **já seleccionou** os seis livros que irá ler em casa da sua avó.

   Supondo aleatória a sequência pela qual estes seis livros vão ser lidos, qual é a probabilidade de os dois livros de José Saramago serem lidos um a seguir ao outro? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.



Sabe-se que:

- A base do cone está contida no plano xOy e tem o seu centro na origem do referencial
- $[AC]$ e $[BD]$ são diâmetros da base
- O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- O ponto B pertence ao semieixo positivo Oy
- O vértice V pertence ao semieixo positivo Oz

4.1.(12) Sabendo que uma equação do plano ABV é $4x + 4y + 3z = 12$, mostre que o comprimento do raio da base é 3 e a altura do cone é 4.

4.2.(12) Determine uma condição que defina a esfera cujo centro é o ponto V e cuja intersecção com o plano xOy é a base do cone.

4.3.(12) Designando por α a amplitude do ângulo BVD, determine o valor de senα.

FIM

1ª Fase 2ª Chamada

Primeira Parte

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & se\ x \leq 1 \\ 2x, & se\ x > 1. \end{cases}$$

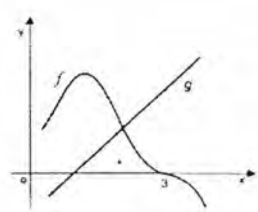
Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = f(1 + \frac{1}{n})$

Indique qual das expressões sseguintes define o termo geral de (u_n)

(A) $1 + \frac{1}{n}$ **(B)** $2 + \frac{2}{n}$

(C) $3 + \frac{3}{n}$ **(D)** $5 + \frac{1}{n}$

2. Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções f e g, contínuas em $\mathbb{R}$.



O gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 3.

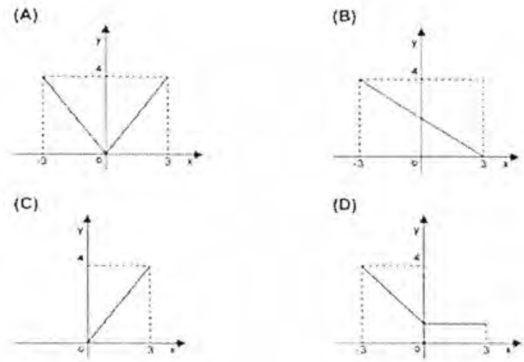
Indique o valor de $\lim_{x \to 3^-} \frac{g(x)}{f(x)}$

(A) 0 **(B)** 1

(C) $-\infty$ **(D)** $+\infty$

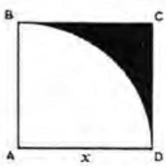
3. De uma certa função f sabe-se que o seu domínio é o intervalo $[-3, 3]$ e que o seu contradomínio é o intervalo $[-4, 4]$.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função $|f|$?



4. Na figura estão representados:

   - Um quadrado $[ABCD]$
   - Um arco de circunferência BD de centro em A



Indique qual das funções seguintes dá a área, em cm^2, da região sombreada, em função do comprimento x, em cm, do lado do quadrado.

(A) $f(x) = \frac{4x-\pi x^2}{2}$

(B) $f(x) = \frac{(1-\pi)x^2}{2}$

(C) $f(x) = \frac{(4-\pi)x^2}{4}$

(D) $f(x) = \frac{\pi-1}{4}x^2$

5. Considere uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2. Seja P um ponto da elipse $\mathcal{E}$ tal que $\overline{PF_1} = 6$ e $\overline{PF_2} = 14$. Seja $[V_1V_2]$ o eixo menor da elipse $\mathcal{E}$.

   Qual é a distância de V_1 a F_1?

   (A) 4 **(B)** 8

   (C) 10 **(D)** 20

6. Sejam α e β dois planos perpendiculares.

   Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

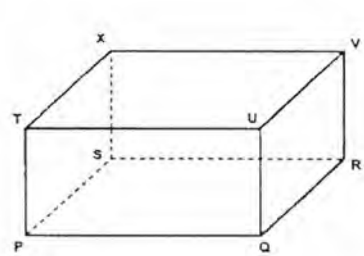
   (A) Qualquer recta paralela a α é paralela a β.

   (B) Qualquer recta paralela à intersecção de α e β é paralela a β.

   (C) Qualquer recta perpendicular a α é perpendicular a β.

   (D) Qualquer recta perpendicular à intersecção de α e β é perpendicular a β.

7. Na figura está representado um paralelepípedo rectângulo $[PQRSTUVX]$.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{QU} = 0$

(B) $\overrightarrow{UQ} \cdot \overrightarrow{TX} = 0$

(C) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{TU} = 0$

(D) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PV} = 0$

8. O João tem no bolso do casaco uma moeda de 50\$00, duas moedas de 100\$00 e três moedas de 200\$00.

Retirando duas moedas ao acaso, qual é a probabilidade de, com elas, perfazer a quantia exacta de 250\$00?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

9. Uma nova marca de gelados oferece, em cada gelado, um de três bonecos: Rato Mickey, Peter Pan ou Astérix. Sete amigos vão comprar um gelado cada um.

Supondo que os três bonecos têm igual probabilidade de sair, qual é a probabilidade de o Rato Mickey sair exactamente a dois dos sete amigos?

(A) ${}^7C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^5$

(B) $\frac{{}^7C_2}{7!}$

(C) ${}^7C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2$

(D) $\frac{{}^7A_2}{7!}$

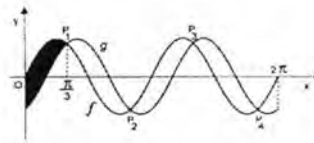
Segunda Parte

1. Na figura estão as representações gráficas de duas funções, f e g, de domínio $[0, 2\pi]$, definidas por:

$$f(x) = \text{sen}(2x)$$

$$g(x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$$

P_1, P_2, P_3 e P_4 são os pontos de intersecção dos gráficos de f e de g. A abcissa de P_1 é $\frac{\pi}{3}$



1.1.(12) Mostre que são perpendiculares as rectas tangentes aos gráficos de f e de g no ponto P_1

1.2.(12) Determine as coordenadas de P_2

1.3.(12) Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

2. Ao ser lançado, um foguetão é impulsionado pela expulsão dos gases resultantes da queima de combustível numa câmara.

Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por

$$v(t) = -3\ln(1 - 0,005t) - 0,01t$$

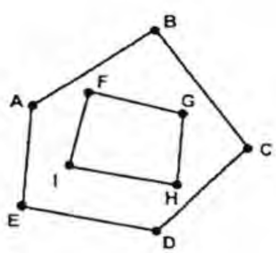
(ln significa logaritmo de base e). A variável t designa o tempo, em segundos, após o arranque.

2.1.(7) A massa inicial do foguetão é de 150 toneladas, das quais 80% correspondem á massa de combustível. Sabendo que o combustível é consumido á taxa de 0,75 toneladas por segundo, justifique que $t \in [0, 160]$

2.2.(18) Verifique que a derivada da função v, no intervalo $[0, 160]$, é positiva e conclua qual é a velocidade máxima que o foguetão atinge neste intervalo. Apresente o resultado em quilómetros por segundo, arredondado às décimas.

3. Na figura estão representados dois polígonos.

   - Um pentágono $[ABCDE]$
   - Um quadrilátero $[FGHI]$

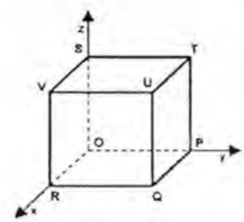


Dos nove vértices representados, não existem três colineares.

3.1.(10) Determine quantos triângulos têm como vértices três dos nove pontos, de tal modo que dois vértices pertençam a um dos polígonos e o terceiro vértice pertença ao outro polígono.

3.2.(12) A Sandra e o Jorge escolheram cada um, e em segredo, um dos nove vértices representados. Qual é a probabilidade de os dois vértices, assim escolhidos, pertencerem ambos ao mesmo polígono? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

4. Na figura está representado um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$.



Sabe-se que:

- A face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- A face $[OSVR]$ está contida no plano xOZ
- A face $[OSTP]$ está contida no plano yOz
- Uma equação do plano VTQ é $x + y + z = 6$

4.1.(12) Mostre que o volume do cubo é 27.

4.2.(12) Determine uma equação da superfície esférica tal que:

- o centro é o simétrico de U, em relação ao plano xOy;
- o ponto Q pertence a essa superfície esférica.

4.3.(12) Seja α o plano que contém o ponto S e é paralelo a VTQ. Prove que a recta RP está contida em α.

FIM

2ª Fase

Primeira Parte

1. Considere a função f, definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\ x \leq 0 \\ x^2-4 & se\ x > 0 \end{cases}$$

Indique o conjunto dos zeros de f.

(**A**) $\{-2,2\}$

(**B**) $\{-2,-1,2\}$

(**C**) $\{2\}$

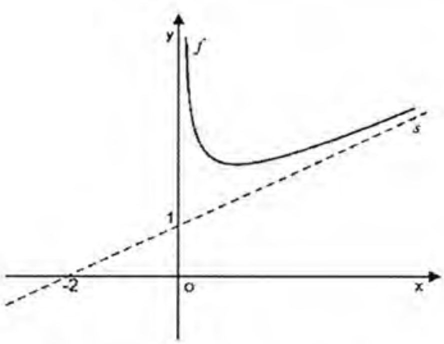
(**D**) $\{-1,2\}$

2. Indique qual das expressões seguintes define uma função **injectiva**, de domínio $\mathbb{R}$.

(**A**) $\cos x$ (**B**) x^2-x

(**C**) $|x|+1$ (**D**) x^3

3. Na figura ao lado está representada graficamente uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$.



A recta s, que contém os pontos $(-2,0)$ e $(0,1)$, é assímptota do gráfico de f.

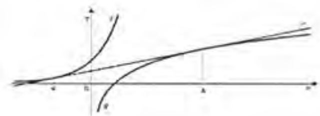
Indique o valor de $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

(**A**) -2 (**B**) 0

(**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) 1

4. Na figura abaixo estão representadas graficamente duas funções:

- a função f, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^x$
- a função g, definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x) = \ln x$ (ln designa logaritmo na base e)



A recta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a e é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa b.

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(**A**) $e^a = \frac{1}{b}$

(**B**) $e^a = \ln b$

(**C**) $e^{a+b} = 1$

(**D**) $\ln(ab) = 1$

5. Num referencial o.n. $Oxyz$, qual das seguintes condições define uma recta paralela ao eixo Oz?

(**A**) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(**B**) $(x,y,z) = (1,2,0) + k(1,1,0), \quad k \in \mathbb{R}$

(**C**) $z = 1$

(**D**) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição

$$\begin{cases} 3x+4y+5z=2 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \end{cases}$$

define

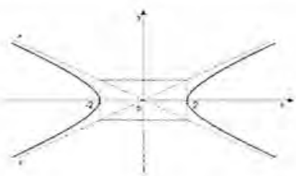
(A) um ponto

(B) o conjunto vazio

(C) uma recta

(D) um plano

7. Na figura abaixo está representada graficamente uma hipérbole.



Os vértices da hipérbole são os pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. As assímptotas da hipérbole são as rectas r e s, de equações $y = -\frac{x}{2}$ e $y = \frac{x}{2}$, respectivamente.

Qual das condições seguintes é uma equação desta hipérbole?

(A) $y^2 - x^2 = 2$

(B) $x^2 - 4y^2 = 4$

(C) $2x^2 - y^2 = 8$

(D) $x^2 - y^2 = 4$

8. De quantas maneiras se podem sentar três raparigas e quatro rapazes, num banco de sete lugares, sabendo que em cada um dos extremos fica uma rapariga?

(A) 120 (B) 240

(C) 720 (D) 5040

9. Acabou o tempo de um jogo de basquetebol, e uma das equipas está a perder por um ponto, mas tem ainda direito a dois lances livres. O Manuel vai tentar encestar.

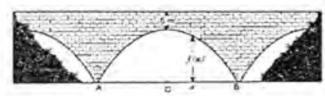
Sabendo que este jogador concretiza, em média, 70% dos lances livres que efectua e que cada lance livre concretizado corresponde a um ponto, qual é a probabilidade de o jogo terminar empatado?

(A) $0,14$ (B) $0,21$

(C) $0,42$ (D) $0,7$

Segunda Parte

1. A figura representa uma ponte sobre um rio.



A distância mínima do **arco central** da ponte ao tabuleiro é 6 metros.

Sejam A e B os pontos de intersecção do **arco central** com o nível da água do rio, e seja O o ponto médio de $[AB]$.

Considere a recta AB como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e onde uma unidade corresponde a um metro.

Para cada ponto situado entre A e B, de abcissa x, a altura do arco, em metros, é dada por

$$f(x) = 36 - 9(e^{0,06x} + e^{-0,06x})$$

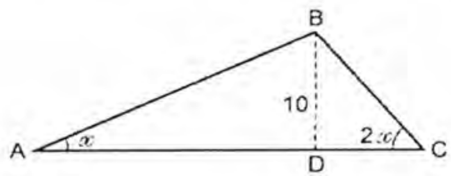
1.1.(12) Recorrendo ao estudo da derivada da função f, mostre que, tal como a figura sugere, é no ponto de abcissa zero que a altura do arco é máxima.

1.2.(10) Uma empresa está a estudar a hipótese de construir uma barragem neste rio. Se tal empreendimento se concretizasse, o nível das águas no local da ponte subiria 27 metros.

Nesse caso, a ponte ficaria totalmente submersa? Justifique a sua resposta.

1.3.(13) Mostre que a distância, em metros, entre A e B é um valor compreenddo entre 43 e 44.

2. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.



Tem-se que:

- x designa a amplitude do ângulo BAC
- a amplitude do ângulo BCA é igual ao dobro da amplitude do ângulo BAC
- a altura $\overline{BD}$ é igual a 10

Seja

$$g(x) = \frac{75 - 25\text{tg}^2 x}{\text{tg} x}$$

2.1.(14) Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $g(x)$, para qualquer $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$

2.2.(12) Considere o triângulo $[ABC]$ quando $x = \frac{\pi}{4}$.

Classifique-o quanto aos ângulos e quanto aos lados e prove que a sua área ainda é dada por $g(x)$.

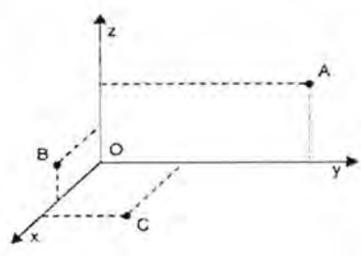
3. Para representar Portugal num campeonato internacional de hóquei em patins foram seleccionados dez jogadores: dois guarda-redes, quatro defesas e quatro avançados.

3.1.(10) Sabendo que o treinador da selecção nacional opta por que Portugal jogue sempre com um guarda-redes, dois defesas e dois avançados, quantas equipas diferentes pode ele constituir?

3.2.(12) Um patrocinador da selecção nacional oferece uma viagem a cinco dos dez jogadores seleccionados, escolhidos ao acaso.

Qual é a probabilidade de os dois guarda-redes serem contemplados com essa viagem? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura estão representados três pontos, em referencial o.n. $Oxyz$



Sabe-se que:

- O ponto A tem coordenadas $(0, 5, 2)$
- O ponto B pertence ao plano xOz
- O ponto C pertence ao plano xOy

- A recta BC tem equação vectorial

$$(x, y, z) = (5, 4, 1) + k(1, 2, -1),\ k \in \mathbb{R}$$

4.1.(12) Mostre que o ponto B tem coordenadas $(3, 0, 1)$ e que o ponto C tem coordenadas $(4, 2, 0)$.

4.2.(12) Mostre que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em C.

4.3.(12) Considere a superfície esférica de centro em A, cuja intersecção com o plano xOy é uma circunferência de raio 3. Determine uma equação dessa superfície esférica.

FIM

Formulário

$$\text{sen}(2x) = 2.\text{sen}x.\cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

$$\text{tg}(2x) = \frac{2\text{tg}x}{1-\text{tg}^2 x}$$

Época especial

Primeira Parte

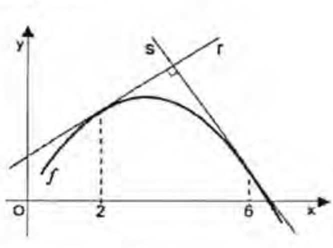
1. Considere a sucessão de termo geral $u_n = log_2\left(\frac{1}{n}\right)$

   Indique o valor de $lim\, u_n$

   (A) $-\infty$ **(B)** 0

   (C) 1 **(D)** $+\infty$

2. Na figura



estão representados:

- O gráfico de uma função f
- A recta r, tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 2 e de equação $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$
- A recta s, tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 6

Sabendo que as rectas r e s são perpendiculares, indique o valor de $f'(6)$, derivada da função f no ponto 6.

(A) $-\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{4}{5}$

(C) $-\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{5}{3}$

3. Seja D o domínio de uma função g tal que $g(x) = \frac{1}{1-tg\,x}$.

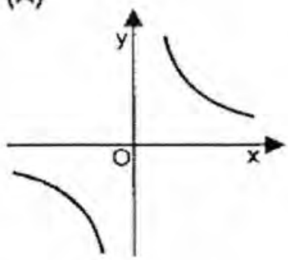
   Indique qual das expressões seguintes **é necessariamnete falsa**

   (A) $0 \in D$ **(B)** $\frac{3\pi}{4} \in D$

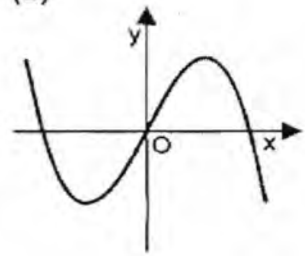
   (C) $\pi \in D$ **(D)** $\frac{5\pi}{4} \in D$

4. Indique qual dos gráficos seguintes pode ser o de uma função ímpar e injectiva.

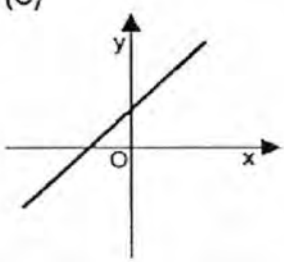
(A)



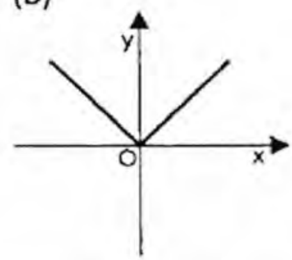
(B)



(C)



(D)



5. Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ cujo gráfico é uma parábola tal que:

- o vértice é o ponto $(0,0)$
- a directriz é a recta de equação $y=-1$.

Indique qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}$

(A) $h(x)=x^2$

(B) $h(x)=2x^2$

(C) $h(x)=\frac{x^2}{4}$

(D) $h(x)=-\frac{x^2}{6}$

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera $\mathcal{E}$ definida pela condição $x^2+(y-7)^2+z^2\leq 9$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) Na esfera $\mathcal{E}$ existem pontos do eixo Ox

(B) Na esfera $\mathcal{E}$ existem pontos do eixo Oy

(C) O ponto $(7,7,0)$ pertence à esfera $\mathcal{E}$

(D) O ponto $(0,0,7)$ pertence à esfera $\mathcal{E}$

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição $\begin{cases} x=0 \\ z=3 \end{cases}$ define

(A) O conjunto vazio

(B) um ponto

(C) uma recta

(D) um plano

8. Escolhem-se aleatoriamente dois vértices de um cubo.

Qual é a probabilidade de o centro do cubo ser o ponto médio do segmento por eles definido?

(A) $\frac{1}{{}^8C_2}$ (B) $\frac{4}{{}^8C_2}$

(C) $\frac{1}{8!}$ (D) $\frac{4}{8!}$

9. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

(A) $(10^{20}+1)^6 = 10^{120} + 6 \times 10^{20} + 1$

(B) $(10^{20}+1)^7 = 10^{140} + 1$

(C) $(10^{20}+1)^8 = 10^{160} + 8 \times 10^{20} + 1$

(D) $(10^{20}+1)^9 < 10^{180} + 1$

Segunda Parte

1. Considere a função $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = ln\,(1+x) - x$

a)(12) Recorrendo à função derivada de g, mostre que g é decrescente.

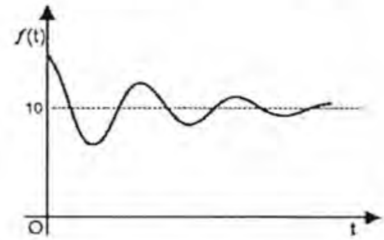
b)(11) Tendo em conta a alínea anterior e o valor de $g(0)$, indique, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação: $g(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$

2. Uma bola suspensa de uma mola oscila verticalmente.

Admita que a distância (em cm) da bola ao solo, t segundos após um certo instante inicial, é dada por

$$f(t) = 10 + 5e^{-0,1t} cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$$

com $t \in [0, +\infty[$. Na figura abaixo, apresenta-se parte da representação gráfica da função f.



a)(10) Indique o valor de $\lim_{t\to+\infty} f(t)$. Interprete esse valor em termos do movimento da bola.

b)(14) Mostre que existe pelo menos um instante, entre o terceiro e o quarto segundos, em que a bola se encontra a sete cemtímetros do solo.

c)(14) Resolva a equação $f(t) = 10$.

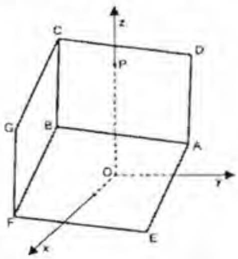
A partir do conjunto solução obtido, indique quantas vezes, nos primeiros quinze segundos, a bola passa a dez centímetros do solo. Justifique a sua resposta.

3. **(20)** Um grupo de jovens, formado por cinco rapazes e cinco raparigas, vai dividir-se em duas equipas, de cinco elementos cada uma, para disputarem um jogo de basquetebol.

Supondo que a divisão dos dez jovens pelas duas equipas é feita ao acaso, determine a probabilidade de as equipas ficarem constituídas por elementos do mesmo sexo, isto é, de uma das equipas ficar só com rapazes e a outra, só com raparigas.

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

4. A figura abaixo representa um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$.



- $[ABCD]$ é uma face do cubo.
- $[EFGH]$ é a face oposta à face $[ABCD]$ (O ponto H não está representado na figura)
- $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ e $[DH]$ são quatro arestas do cubo
- O ponto A tem coordenadas $(3, 5, 3)$
- O ponto D tem coordenadas $(-3, 3, 6)$
- O ponto E tem coordenadas $(1, 2, -3)$

a)**(12)** Determine o volume do cubo.

b)**(12)** Determine as coordenadas do ponto H e comente a seguinte afirmação: o ponto H pertence a um dos eixos coordenados.

c)**(14)** O ponto P é o ponto de intersecção do eixo Oz com a face $[ABCD]$. Determine as coordenadas de P.

FIM

Exames do 1º ano do Ensino Superior

Exame de Análise Infinitesimal 1
11 de Fevereiro de 1999 (Recorrência)
Duração: 3 horas

Luísa Mascarenhas

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa
mascar@lmc.fc.ul.pt

Ponto A

N. B.: Justifique com atenção todos os raciocínios. Uma justificação omissa ou errada pode anular uma afirmação correcta.

I

1. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação:

Toda a função contínua transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados e conjuntos fechados em conjuntos fechados.

2. Dada a sucessão de termo geral $u_n = n^3$, mostre, usando o método de indução, que

$$u_1+u_2+\cdots+u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Considere a sucessão (a_n) definida por

$$a_1 = 1/2\ ; \ \ a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+1}.$$

Mostre que é convergente.

II

4. Determine os seguintes limites, justificando os cálculos:

a) $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{n+1}{na}\right)^n \ (a \in \mathbb{R}^+)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[p]{x}-1}{x-1} \ (p \in \mathbb{N})$.

5. Diga quais os valores de x que tornam a série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(x+a)^n}{a^{n+1}} \ (a \neq 0)$$

simplesmente convergente, absolutamente convergente, divergente.

III

6. Defina ponto fronteiro a um conjunto. Mostre, usando a definição dada, que:

Se $a \in \mathbb{R}$ é fronteiro a X, $X \subseteq \mathbb{R}$, então existe em X uma sucessão (x_n), convergente para a.

7. Seja $p(x)$ um polinómio de grau ímpar.

a) Mostre que $p(x)$ tem uma raiz real.

b) Sendo f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{2 + [p(x)]^2},$$

determine $f(\mathbb{R})$.

Ponto B

N. B.: Justifique com atenção todos os raciocínios. Uma justificação omissa ou errada pode anular uma afirmação correcta.

I

1. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação:

Toda a função contínua transforma sucessões de Cauchy em sucessões de Cauchy.

2. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a, a+b \in \mathbb{R}^+$, mostre, usando o método de indução, que

$$(a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Considere a série absolutamente convergente

$$\sum a_n.$$

Estude a natureza de

$$\sum \frac{a_n}{1 - a_n}$$

II

4. Determine os seguintes limites, justificando os cálculos:

a) $\displaystyle\lim_n \left(a - \frac{1}{n}\right)^n \quad (a \in \mathbb{R}^+);$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^p - 1)}{x - 1} \ (p \in \mathbb{N}).$

5. Determine $a \in \mathbb{R}$ de forma a que a série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a^{n+1}}{n+1}\, x^n$$

seja convergente no ponto $x = -3$ e divergente no ponto $x = 3$.

III

6. Defina ponto de acumulação de um conjunto. Mostre, usando a definição dada, que:

Um conjunto finito não tem pontos de acumulação.

7. Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e (a_n) uma sucessão em $[0,1]$, tal que $g(a_n) \to 0$.

a) Mostre que (a_n) tem um sublimite em $[0,1]$.

b) Mostre que g tem um zero em $[0,1]$.

Resolução de algumas questões[17]

Exercício 3A. Da definição de (a_n) obtém-se:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}+1} \end{aligned}$$

A série

$$\sum_{k\geq 1} (-1)^k/(\sqrt{k}+1)$$

é convergente. Com efeito, trata-se de uma série alternada cujo termo geral, em módulo, tende para zero a decrescer: pelo critério de Leibniz a série converge e, portanto, a sucessão (a_n) é também convergente.

Exercício 4A b). Fazendo a mudança de variável $x = y^p$, obtém-se

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[p]{x}-1}{x-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^p-1}.$$

Como

$$\frac{y^p-1}{y-1} = y^{p-1} + y^{p-2} + \cdots + y + 1$$

então

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^p-1}{y-1} = p$$

donde se conclui que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[p]{x}-1}{x-1} = \frac{1}{p}.$$

Exercício 5A.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(x+a)^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x+a}{a}\right)^n$$

Como

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{x+a}{a}\right)^n$$

é uma série geométrica de razão $\frac{x+a}{a}$, ela converge absolutamente se

$$\left|\frac{x+a}{a}\right| < 1$$

e diverge se

$$\left|\frac{x+a}{a}\right| \geq 1$$

A primeira condição equivale a $|x+a| < |a|$ e, portanto, se $a > 0$ equivale a $x \in]-2a, 0[$ e se $a < 0$ equivale a $x \in]0, -2a[$.

Conclusão: se $a > 0$ a série em questão converge absolutamente no intervalo $]-2a, 0[$ e diverge no seu complementar; se $a < 0$ a série converge absolutamente em $]0, -2a[$ e diverge no complementar.

Exercício 7A a). Seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$. Suponhamos $a_0 > 0$ (se $a_0 < 0$ o raciocínio é análogo). Como n é ímpar e $\forall x \neq 0\ p(x)$
$= x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right)$
tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$$

Como consequência das definições de limite em $\overline{\mathbb{R}}$, existem $x_0 < x_1$ tais que $p(x_0) < 0$ e $p(x_1) > 0$. Como p é uma função contínua, o Teorema de Bolzano garante a existência de um zero de p em $]x_0, x_1[$.

Exercício 1B. A afirmação é falsa. Existem funções contínuas que transformam sucessões de Cauchy em sucessões

[17]NR: A autora dos exames apresentou resoluções para todos os problemas. A escolha das resoluções publicadas de seguida é da inteira responsabilidade dos editores.

que não são sucessões de Cauchy. Por exemplo, a função $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/x$, é contínua em $]0,1]$; a sucessão $x_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ é uma sucessão de Cauchy pois converge para zero.[18] No entanto, a sucessão $f(x_n) = n$, $n = 1, 2, \ldots$ não é de Cauchy pois não é convergente em $\mathbb{R}$.

Exercício 2B. Seja $S = \{n \in \mathbb{N} : (a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b\}$. O conjunto S é indutivo:

i) $1 \in S : (a+b)^1 \geq a^1 + 1a^0 b = a+b$;

ii) $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$:

Se $n \in S$ então $(a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b$. Como $a+b > 0$

$$(a+b)^n(a+b) \geq (a^n + na^{n-1}b)(a+b)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &\geq a^{n+1} + na^n b + a^n b + \\ &\quad + na^{n-1}b^2 \\ &= a^{n+1} + (n+1)a^n b + \\ &\quad + na^{n-1}b^2\end{aligned}$$

Como $a > 0$, $na^{n-1}b^2 \geq 0$, de onde

$$(a+b)^{n+1} \geq a^{n+1} + (n+1)a^n b.$$

Como S é indutivo e $S \subseteq \mathbb{N}$, tem-se $S = \mathbb{N}$.

Exercício 6B. Dado $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ diz-se ponto de acumulação de X se

$$\forall_{\delta>0}\ I(a,\delta) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

Seja $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto finito: $X \neq \emptyset$ e $X \neq \{a\}$.[19] Uma vez que todo o conjunto finito, não vazio, tem mínimo, seja $\varepsilon = \min\{|a_i - a| : a_i \neq a, 1 \leq i \leq n\}$.

Vejamos que $I(a,\varepsilon) \cap (X \setminus \{a\}) = \emptyset$: se $x \in I(a,\varepsilon) \cap (X \setminus \{a\})$ então ter-se-ia $|x - a| < \varepsilon$, $x \neq a$, $x = a_k$, para certo $a_k \in X$ $(1 \leq k \leq n)$, ou seja $|a_k - a| < \varepsilon \leq |a_k - a|$ o que é absurdo.

Do que foi dito deduz-se que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $I(a,\varepsilon) \cap (X \setminus \{a\}) = \emptyset$, ou seja, X não tem pontos de acumulação.

[18] Uma sucessão real é de Cauchy em $\mathbb{R}$ se e só se é convergente em $\mathbb{R}$.

[19] Se $X = \emptyset$ ou $X = \{a\}$ então $X \setminus \{a\} = \emptyset$ e a conclusão é imediata.

INFORMAÇÃO PARA OS AUTORES

A *Gazeta de Matemática* não publica artigos de investigação especializada.

Artigos que fomentem o gosto pela Matemática enquanto parte do conhecimento universal — puro ou aplicado — são especialmente benvindos.

Os textos propostos devem incluir um resumo com um máximo de 150 palavras ou uma parte introdutória onde se descreva o tema do trabalho apresentado, e ser acompanhados de um resumo em inglês ou francês com um máximo de 200 palavras.

Os textos podem ser propostos para publicação quer por escrito quer electronicamente. Se forem submetidos por escrito devem sê-lo em duplicado, dactilografados em folhas A4, em caracteres de pelo menos 11pt, com espaçamento duplo entre linhas, com margens amplas, perfazendo um total máximo de 15 páginas. As figuras devem ser bem referenciadas no texto, mas enviadas à parte, prontas para reprodução.

Os editores agradecem que os artigos sejam submetidos em ficheiros .rtf ou .tex, em disquete ou por correio electrónico para gazeta@mat.ua.pt.

No caso de envio em *disquete*, esta deve ser acompanhada de texto dactilografado de acordo com as instruções acima. Por razões de composição tipográfica, as figuras devem ser bem referenciadas no texto, mas enviadas em ficheiros independentes.

Opiniões expressas em artigos assinados são da inteira responsabilidade dos autores e não reflectem necessariamente posições do Conselho Editorial.

Endereços para correspondência

Gazeta de Matemática
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 37 – 4.º
1050 – 187 Lisboa

Gazeta de Matemática
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
3810 – 193 Aveiro