GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO IV **N.º 14** MARÇO - 1943

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 5$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / LARGO DO PÔÇO NOVO / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

FUNDADA POR

B. CARAÇA, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

CORRESPONDÊNCIA PARA: *M. Zaluar,* Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa
COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO: *Soc. Ind. de Tipografia,* Rua Almirante Pessanha, 5 — Lisboa

ANO IV - N.º 14 GAZETA DE MATEMÁTICA MARÇO - 1943

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

DAVID HILBERT

por **Bernardino Machado** *(C. E. M. do Pôrto)*

A Alemanha tem sido um país onde a educação se tem praticado extensamente e em variadas direcções: educação humanística, educação técnica, educação desportiva e pre-militar. É interessando os educandos na actividade particular a que se dedicam, fazendo-os seus colaboradores activos, começando a organizá-los no exercício da sua profissão ou arte, realizando uma unidade entre o período escolar e a actividade do cidadão, como se exerce a influência da sociedade na sua função educadora sôbre o indivíduo.

Hilbert, nesta máquina educadora bem montada, teve por professores homens que tinham chegado a sê-lo pelo jôgo regular da selecção efectuada no decurso das provas que iam prestando no seio da colectividade educadora. Ainda em Königsberg, onde cursou Matemática, foi professor dêle Henrique Weber, que juntamente com Ricardo Dedekind desenvolvera aritmèticamente a «Teoria das Funções Algébricas duma Variável». Com Weber, Hilbert participou num Seminário para o estudo da Teoria dos Invariantes. Estes Seminários eram um dos meios usados nas Universidades para incitar os alunos ao estudo; tornando-os colaboradores uns dos outros e também dos mestres, davam à entusiástica ansiedade científica de muitos um campo mais livre do que as aulas a que serviam de complemento. Neles havia ocasião para exercer uma actividade consciente que é um bom antídoto à passividade receptiva a que se prestam os cursos sem mais nada. Depois de Weber foi seu professor F. Lindemann que em 1882 tinha publicado a demonstração da transcendência do número π. Sob a sua influência Hilbert dedicou-se à Teoria dos Invariantes. Foi por êste tempo que se tomou de amizade com Hermann Minkowskis que em 1883, com 19 anos de idade obtivera o Grande Prémio da Academia de Paris. Os dois colegas e o novo professor Adolfo Hurwitz davam grandes passeios em Königsberg e durante êles mantinham longas conversas sôbre Matemática. Além dos professores nomeados, Hilbert foi influenciado também e de maneira profunda por Leopoldo Kronecker. Esta influência exerceu-se por dois modos: seguindo os trabalhos de Kronecker sôbre a Teoria dos Corpos de Números em que êste fôra o continuador de Gauss; opondo-se à opinião de Kronecker, que, como modernamente Brouwer, considerava ilegítimos certos processos de demonstração, como os que Cantor empregara na Teoria dos Conjuntos.

Em 1885 esteve em Leipzig no Seminário de Felix Klein e daí seguiu a conselho dêste para Paris onde trabalhou com Carlos Hermite. Em 1886 defendeu tese e ficou como assistente em Königsberg. Até 1892 os seus estudos versaram a Teoria dos Invariantes. De 1892 a 1895 foi professor auxiliar em Königsberg donde passou a Göttingen na qualidade de professor ordinário. A época de 1892 a 1899 foi dedicada à Teoria dos Corpos de Números, desenvolvendo e sistematizando os resultados de Kronecker, Dedekind e Kummer. Mas já em 1899 publicou o livro «Grundlagen der Geometrie» (Fundamentos da Geometria) que é o mais conhecido dos seus trabalhos. Nêle as noções da Geometria são introduzidas pelas relações lógicas que estabelecem entre elas certas proposições fundamentais — os axiomas — das quais tôdas as outras devem ser deduzidas. E nada mais se deve ligar com aquelas noções senão as relações formais fixadas pelos axiomas. Assim, qualquer significado particular que elas possam ter é irrelevante. Êste método, chamado axiomático, que visa a investigar apenas relações formais fixadas com exactidão, as quais podem valer entre vários sistemas de seres particulares que são outras tantas realizações da axiomática, foi depois largamente aplicado. Na Geometria prosseguiram neste sentido Veronese e Osvaldo Veblen, que, abandonando os axiomas de Hilbert, os quais correspondiam a proposições evidentes da Geometria, procuraram uma axiomática com um número mínimo de proposições primitivas independentes sem se importar com a evidência ou falta de evidência das suas correspondentes na Geometria intuitiva. Mas o método axiomático teve aplicação em muitos outros domínios da Matemática. E precisamente na Álgebra aritmetizada pelo modo que indicava a Teoria dos Corpos de Números tem êle fornecido belos resultados.

Os anos que se seguiram a 1899 foram dedicados a problemas de Física que o conduziram a resultados valiosos relativos ao Cálculo das Variações. Foi depois que teve conhecimento do trabalho de Fredholm sôbre as equações integrais que Hilbert pôde unificar os frutos das suas investigações numa teoria que dava uma interpretação geral dos métodos de Fredholm. Estes estudos sôbre as equações integrais foram ponto de partida para o estabelecimento de métodos muito fecundos da Matemática e da Física Teórica. Deles nasceram o espaço de Hilbert e, mais tarde, a Teoria dos Operadores de Hermite de von Neumann. Quando publicou a sua monografia «Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen» (Linhas gerais duma Teoria Geral das Equações Integrais Lineares) que dava uma base geral para a resolução de tôda uma série de problemas da Física Teórica até então atacados com métodos especiais, já se estava dedicando à aplicação do método axiomático a vários capítulos da Física Teórica. Assim estudou a Teoria Cinética dos Gases e a Teoria da Radiação. Continuando com estes trabalhos preocupou-se com problemas suscitados pela Teoria da Relatividade e pela Mecânica Quântica.

Neste período de 1901 a 1914 a influência de Hilbert foi enorme. Mais de 40 teses, algumas célebres, foram feitas sob a direcção dêle. Dentre os autores citaremos: Otto Blumenthal, Hermann Weyl, Andreas Speiser, Ricardo Courant, Henrique Behmann, Guilherme Ackermann, Arnold Schmidt. Também J. v. Neumann e P. Bernays colaboraram com êle.

Os problemas de Filosofia da Matemática que os novos métodos axiomáticos tinham criado e já preocupavam Hilbert desde a época dos «Grundlagen» foram o seu domínio de investigação principal a partir de 1917. Dos 23 problemas que propôs ao Congresso Internacional de Matemáticas de Paris em 1900, os dois primeiros eram o problema da potência do contínuo de Cantor e a compatibilidade da axiomática dos números naturais. A formalização da Lógica e da Aritmética facultaram-lhe o meio para estabelecer um esquema formal das regras de dedução empregadas em Matemática, no qual participavam tanto a Aritmética dos Números Inteiros como o Cálculo Lógico. A demonstração da compatibilidade da axiomática dos números inteiros consistiria então em averiguar se das proposições dessa axiomática, pela aplicação das regras de inferência já formuladas exactamente, se poderiam deduzir duas fórmulas contraditórias. Um resultado que depende evidentemente das regras de dedução e da Axiomática dos Números Inteiros que se escolherem. Parece que recentemente G. Gentzen conseguiu dar uma demonstração dêsse facto. Quanto ao problema da potência do contínuo espera ainda que o resolvam.

Não deixe de ficar citado aqui o seu livro «Anschauliche Geometrie» (Geometria Intuïtiva) publicado em 1932, no qual, quási sem provas lógicas, servindo-se de exemplificações com modelos, demonstra uma multidão de factos geométricos próprios para iniciar em estudos mais adiantados. Êste livro e o de Felix Klein — As Matemáticas Elementares dum Ponto de Vista Superior — são excelentes para o ensino das Matemáticas e devem ser recomendados numa terra onde o ensino peca por falta de ser constantemente revivificado.

Nós não queremos exalçar aqui a figura de Hilbert incitando os outros à admiração por êle. Nem sequer fazer nascer nos que nos lerem a impressão de beleza que causa o harmonioso aspecto dalgumas das suas doutrinas. Que, atentando-se neste homem, se veja antes como foi um trabalhador numa colectividade de trabalhadores, como, educado por uns, pôde a seu turno educar outros pelos quais a sua obra se prolonga muito para além donde poderia chegar sòzinho com sua grande fôrça. E realize-se bem como a grande fecundidade da sua acção só foi possível graças à colaboração no interior da escola entre os que aprendem e os que ensinam juntamente com uma forte ligação entre a escola e a sociedade.

A Sociologia da Matemática

por **D. J. Struik** (Massachussets Institute of Technology)

1. Definição do problema

A sociologia da Matemática estuda a influência das formas de organização social sôbre a origem e o desenvolvimento dos conceitos e métodos matemáticos e o papel da Matemática como parte da estrutura social e económica de dada época.

As formas básicas da sociedade — a oriental, a greco-romana, a medievo-feudal, a capitalista primitiva, a capitalista moderna e a socialista — influenciaram tôdas, de modos diferentes, a aquisição do conhecimento matemático e foram, por sua vez, submetidas à sua influência. Há muitos problemas subsidiários, interessando grupos de cada sociedade, levantando todos questões a resolver. ¿Qual tem sido o papel do comerciante, do engenheiro, do topógrafo, do astrónomo, do navegante, do administrador, do artista, do filósofo e do matemático profissional? ¿Qual a razão por que a investigação matemática, por exemplo, floresce sob uma forma da sociedade, permanece estacionária sob outra, e decai ou não surge sob uma terceira?

Até agora, estes problemas só têm merecido ligeira investigação. Poucas pessoas negarão a influência dos factores sociológicos sôbre o desenvolvimento das ciências exactas. A explicação de *Heródoto* da origem da geometria pela necessidade de repartir de novo a terra, no Egipto, depois das inundações anuais, é uma afirmação clássica daquela tese. É costume fazer notar que o raciocínio racionalista grego teve a sua origem, assás compreensìvelmente, nas cidades mercantis jónicas, da Ásia Menor. O interêsse de *Leonardo de Pisa* no estudo da Aritmética e da Álgebra é sempre relacionado com o seu interêsse profissional de comerciante viajado. Ninguém nega, nos dias de hoje, íntima conexão entre a expansão das indústrias eléctricas e do avião, por um lado, e as matemáticas aplicadas, por outro. Compêndios de trigonometria antigos e modernos patenteiam, nos exemplos e nas figuras, a influência decisiva da astronomia, da navegação e da topografia no desenvolvimento da matéria.

Êste tipo de correlação exige uma definição mais precisa antes de ser submetido a qualquer análise específica. Eis um exemplo da forma pela qual a origem da Matemática jónica é habitualmente apresentada:

Cêrca do século VII A. C. eclodiu entre a Grécia e o Egipto um intercâmbio comercial activo. Naturalmente, surgiu a permuta de idéias como a das mercadorias. Os gregos, sedentos de saber, procuraram os sacerdotes egípcios para que os ensinassem. As idéias egípcias foram assim transplantadas, através do mar, e estimularam o pensamento grego, dirigiram-no para novas sendas e forneceram-lhe uma base de trabalho [1].

Isto pode considerar-se como um exame sociológico de certa ordem. Mas, uma observação mais cuidada mostra que está formulado em generalidades vagas que não indicam uma compreensão sociológica real. Houve intercâmbio comercial entre muitas nações e o Egipto. ¿Porque constituiram os gregos uma excepção conseguindo resultados notáveis? Mercadores viajantes prosperaram no Egipto, pelo menos desde cinco mil anos A. C. e o tráfego comercial pode datar-se dos tempos paleolíticos. A única explicação que se oferece é a da *sêde de saber* experimentada pelos gregos. ¿Porquê essa sêde? Nem todos os mercadores a sentem. Os babilónios depois da sua chegada à Suméria, quer como mercadores, quer como conquistadores, tiveram a avidez de saber necessária à absorpção de tôda a ciência dos sumérios, mas não surgiu nenhuma ciência do tipo grego. Continuaram e aprovaram os métodos antigos. A diferença, no caso dos gregos, deve explicar-se por métodos mais penetrantes do que uma referência à actividade comercial e à avidez de conhecimento. O sociólogo pode contribuir mostrando de que maneira a sociedade grega diferia radicalmente de tôdas as formas de estrutura social anteriores e posteriores. Qualquer coisa inteiramente nova deve ter ocorrido e deve fazer-se uma tentativa para defini-la, primeiro em termos sociais e, depois, em termos do pensamento científico.

A ascensão das matemáticas na Grécia antiga apresenta, então, o problema seguinte: ¿Como foi possível que um grupo de gregos, na maioria pertencentes à classe mercantil, se tornasse não só interessado na ciência do antigo Oriente, mas a encarasse dum ponto de vista inteiramente origi-

---

(1) F. CAJORI, *History of Mathematics* (New York, 1930), p. 15.

nal? E, ainda ¿como foi possível que só alguns dos problemas postos por êsses gregos tivessem recebido, embora unilateralmente, tôda a atenção e outros permanecessem na penumbra até aos tempos modernos?

O mercador tem tido influência sôbre a Matemática, mas apenas sôbre algumas das suas partes. Interessa-se pelo cálculo e necessita duma sólida aritmética elementar. Se é um viajante, o seu interêsse vai até à geometria necessária à geografia e ao conhecimento do movimento do sol e das estrêlas. O seu engenho é excitado pela concorrência e pela possibilidade de lucro individual, embora tal não conduza sempre à busca, na Matemática, de verdades mais profundas. Algumas vezes pode auxiliar a ciência convertendo-se em Mecenas. Estabelecer a existência de relações comerciais não é suficiente, por si só, para provar o desenvolvimento seguro da Matemática para além dum nível elementar determinado [2].

A instituição da escravatura põe um problema de causalidade análogo. Há uma teoria, aceite por muitos, de que a natureza da sociedade greco-romana, e com ela a do seu tipo característico de ciência, foi determinada principalmente pelo seu carácter esclavagista. A decadência do sistema da escravatura é, então, considerada um factor decisivo do declínio da ciência. Esta teoria tem uma base razoável, mas deve ser examinada com cuidado. A antiga sociedade oriental conheceu também a escravatura, todavia, a sua ciência possuia características inteiramente diferentes das da ciência da Grécia e Roma. A sua escravatura decaiu ligeiramente e a expansão, a contracção e a estagnação políticas e culturais das formas orientais da sociedade não corresponderam, necessàriamente, aos desenvolvimentos da escravatura ou da ciência. Uma primeira distinção deve fazer-se entre a escravatura greco-romana para a produção e a escravatura oriental de luxo ou para obras públicas [3]. Uma segunda distinção consiste em que a escravatura, na Grécia, encontrava-se na indústria e, em Roma, não só na indústria, mas também na agricultura. Supomos que uma análise ulterior destas formas de escravatura e do seu desenvolvimento pode levar a uma nova compreensão dos progressos e limitações científicos de cada período, e do lugar relativo, na história da ciência, de homens como *Ahmes*, o escriba do papiro egípcio do Rhind; *Euclides*, o alexandrino do período primitivo; *Plotinus*, o neo-platónico; ou *Alkhwarizmi*, o algebrista maometano. Devemos apoiar-nos, aqui, no trabalho já feito, sobretudo nos domínios mencionados, por homens como *Farrington* e *Winspear*, para a antiguidade greco-romana, e *Wittfogel*, para a antiguidade oriental [4].

Por outro lado, não devemos exagerar demasiadamente a nossa análise sociológica e esquecer uma coisa evidentíssima: um processo científico segue, muitas vezes, as vias sugeridas pela sua estrutura construída com os resultados já obtidos. O estudante elabora a sua tese porque o professor pretende que êle esclareça um ponto obscuro do seu próprio trabalho. Podemos encontrar uma tal situação, muitas vezes numa estrutura social e cultural relativamente estável. Constituem um exemplo as matemáticas egípcia, babilónica e chinesa, uma vez o seu padrão bem estabelecido. Aqui encontramos, durante muitos séculos, uma real estagnação, e o progresso, quando se realiza, é alcançado por descobertas directamente dependentes do conhecimento e da técnica pre-existentes. Um outro exemplo consiste no progresso da Álgebra na Itália do século XVI. Depois de *Tartaglia* e *Cardan*, trabalhando como discípulos directos de determinados professores bolonheses, terem resolvido a equação do terceiro grau, o discípulo de *Cardan*, *Ferrari*, mostrou, em 1545, como se resolve uma equação do quarto grau. É um exemplo do descobrimento duma relação objectiva, o parentesco matemático de duas espécies de equações, no esqueleto duma estrutura social particular. A continuïdade desta estrutura permitiu a descoberta posterior de relações matemáticas mais profundas. No trabalho de *Cardan* apareceu um número real como a soma de dois números complexos *(sofisticos)*. Isso levou o professor bolonhês *Bombelli* à publicação, em 1572, duma investigação siste-

[2] Isto decorre de livros que evidenciam a influência do mercador na Matemática, como D. E. SMITH, *History of Mathematics*, 2 vols. (Boston, 1925), onde se toma em consideração, embora num nível elementar, a influência de outros factores, sobretudo a da Astronomia. Veja-se sôbre a influência do mercador D. E. SMITH, *Mathematical Problems in Relation to the History of Economics and Commerce, American Mathematical Monthly*, XXIV (1917), p. 221-225, ou W. SOMBART, *Der Bourgeois* (München-Leipzig, 1920), p. 164-169.

[3] E. MEYER, *Sklaverei im Altertum* (1898), em *Kleine Schriften* (1910), p. 189-190; também K. WITTFOGEL, *Wirtschaft und Gesellschaft Chinas*, I (Leipzig, 1931), p. 395; *Die Theorie der orientalischen Gesellschaft, Zeitschr. für Sozialforschung*, VIII (1930), p. 96.

[4] B. FARRINGTON, *Vesalius on the Ruin of Ancient Medicine, The Modern Quarterly* (1938), p. 23-28; A. WINSPEAR, *The Genesis of Plato Thought* (New York, 1940), p. 348, K. WITTFOGEL, ob. cit.

mática da álgebra dos imaginários. Como é descrita nos nossos compêndios vulgares, a história da Matemática concentra-se, precisamente, sôbre tais descobertas, apresentando o descobrimento de novos resultados, quási exclusivamente, a partir do desenvolvimento lógico interno, com relativo desprêzo pelos factores sociológicos. Todavia, mesmo nos casos em que é dominante o factor matemático puro, existem factores sociológicos. Estes são evidentes no facto puramente social de que homens talentosos duma era, estudam Matemática, são encorajados a ensiná-la, a publicar e a formar discípulos. Noutros períodos, pode haver tantos homens de talento, mas o seu génio é levado por outras vias, algumas das quais são agora consideradas desvios [5].

2. Condições da actuação dos factores sociológicos

Em períodos de profundo soerguimento social, de transição, ou em períodos durante os quais uns povos se instruem à custa de outros de fundo social e cultural muito diverso, o factor sociológico pode fornecer o guia mais importante para a compreensão das modificações do conhecimento matemático. Registe-se que a modificação fundamental da Matemática chinesa, da fase oriental para a técnica e a ciência ocidentais, foi devida aos missionários jesuitas que se introduziram na China, no século XVI, com a onda da expansão capitalista europeia. Encaremos um caso em que os factores sociológicos não estão tão precisamente determinados. O chamado sistema de numeração hindu-árabe, um sistema decimal de posição, com dez símbolos, incluindo um símbolo para o zero, foi introduzido na Mesopotâmia, provàvelmente vindo da Índia, no tempo dos reis Sassanidas, talvez no século VII [6]. No século XIII e seguintes, penetrou na Europa e, assim, se tornou o nosso actual sistema de numeração. A antiga explicação do seu sucesso era demasiado simplista. Supunha-se que a superioridade intrínseca dêste sistema impressionou, só por si, a mentalidade prática, a tal ponto que todos os outros sistemas de numeração foram rejeitados. É certo que o sistema hindu-árabe é muito superior ao romano ou ao ábaco antigo. Menos convincente é o argumento de que era superior ao sistema usado pelos gregos. Êste sistema, com vinte e sete símbolos tirados do alfabeto, não tinha valor de posição, nem símbolo para o zero, e parece-nos à primeira vista, um tanto complicado. Todavia, para quem alguma vez o tenha experimentado, êle perde muito do seu aspecto grosseiro. Depois de curta prática, reconhece-se que êste sistema é tão cómodo na aritmética elementar, incluindo as fracções, como o sistema hindu-árabe [7]. Para um mercador ou um topógrafo do Próximo-Oriente pequena diferença havia entre o uso do sistema hindu e o do sistema grego [8]. Concluímos que devem ter ocorrido razões extra-matemáticas para a vitória de um sistema sôbre o outro. Há vários indícios de que tais razões podem ser encontradas de facto na história dos tempos dos *Sassanidas* e *Abassidas*, quando entre os orientais estava muito espalhado um preconceito, um ódio baseado na diferença de situação económica.

A primeira referência existente aos dez numerais hindus, fora da Índia, encontra-se nos escritos do bispo *Severus Sebokht* (662), que os menciona com o propósito expresso de mostrar que os gregos não possuiam o monopólio da cultura [9]. Existiu em Bagdad, sob o domínio dos califas *Abassidas* primitivos, uma escola matemática que parece ter-se recusado, intencionalmente, a aceitar lições dos gregos e voltado para as fontes judaicas e babilónicas [10]. A esta escola perten-

[5] «Houve talvez tantos homens de génio na Idade Média como há agora; pelo menos a minha investigação dá essa impressão, que seria confirmada, estou disso certo, por um inquérito estatístico. Se êsses cientistas medievais não fizeram uma grande obra, podemos preguntar o que teriam feito homens como GAUSS, FARADAY ou CLAUDE BERNARD se tivessem nascido nos séculos VIII ou IX». G. SARTON, *Introduction to the History of Science*, I (Baltimore, 1927), p. 20.

[6] A data é ainda indeterminada. De acôrdo com alguns investigadores, êste sistema de numeração bem pode ter sido conhecido dos gregos de Alexandria. Vide D. E. SMITH e L. KARPINSKI, *Hindu-Arabic Numerals* (Boston, London, 1911) e CAJORI, ob. cit. p. 88-90. Tornou-se muito usado depois do século VIII sob o domínio dos Árabes.

[7] Tal foi constatado, por exemplo, por J. G. SUNGLY, *The Employment of the Alphabet in Greek Logistics, Recueil offert à J. Nicole* (Genève, 1905), p. 515-530, que defende a sua tese contra o antigo ponto de vista de HANKEL, GOW e CANTOR. Vide também T. L. HEATH, *A Manual of Greek Mathematics* (Oxford, 1931), p. 28 e 31, que chama ao sistema grego para as operações elementares *muito pouco menos conveniente do que o nosso*.

[8] A-fim-de apreciar o valor do sistema grego, não devemos esquecer nunca que o significado aritmético das letras gregas era tão familiar para os gregos como o dos símbolos $0, 1, 2, \cdots$ o é para nós.

[9] Citado em D. E. SMITH, *History of Mathematics*, I, p. 166-167.

[10] Vide S. GANDZ, *The Mishnat ha Middot, the First Hebrew Geometry of about 150 C. E. and the Geometry of Muhammed ibn Musa Al-Khowarizmi, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik* A 2 (1936).

ceu *Alkwarizmi*, o pai da nossa álgebra. Êste ódio pela influência e domínio gregos foi uma das causas principais das fáceis vitórias do Islam nascente, na Síria [11].

Ainda nos parece fácil compreender a vitória que o sistema hindu-árabe alcançou sôbre o ábaco e os numerais romanos entre a classe nascente dos mercadores europeus do século XIII e XVI. Todavia, esquece-se, freqüentemente, que o antigo sistema grego ainda existia, era usado na influente Constantinopla e, certamente, conhecido dos venezianos, que foram senhores de Constantinopla de 1203-1261. ¿Por que razão seleccionaram, então, os mercadores italianos o sistema árabe? A resposta a esta pregunta parece não ter sido dada, mas alguns factos podem sugeri-la. «A civilização árabe era bastante sensível na Sicília e em Espanha, não só na parte moura, mas também em locais, como Toledo, que estavam ainda em poder dos cristãos; os povos de língua árabe rodeavam o Mediterrâneo e dominavam o comércio asiático» [12]. Na Itália, o sistema árabe parece ter surgido primeiro em Florença e em Pisa, que mantinham relações mais íntimas com o mundo árabe do que com o grego e que rivalizavam comercialmente com Veneza [13].

Na sociedade moderna a técnica influencia o desenvolvimento da Matemática, quer directamente, pondo problemas técnicos susceptíveis de tratamento matemático pelo perito, quer indirectamente, através da Física, da Química e de outras ciências naturais. Tem sido tentada uma distinção entre Matemática *pura* e *aplicada*, estando esta directamente relacionada com a técnica e mostrando, mais claramente, portanto, o seu fundo social. Esta distinção, que data apenas do século XIX, torna-se cada vez menos aceite com o descobrimento da lei dialéctica elementar de que tôda a matemática pura pode ser aplicada. Mesmo o tipo *mais puro* de matemática não é isento de mancha sociológica. O projecto do avião moderno, a engenharia das comunicações, os novos trabalhos na plasticidade e muitos outros domínios da engenharia exigem instrumentos matemáticos apurados que são apenas parcialmente tratados nos nossos textos teóricos puros. Domínios como a análise harmónica, o cálculo tensorial, a integração nos campos real e complexo, a teoria dos grupos, desenvolvidos na maior parte sem relação especial com a sua aplicabilidade na técnica, transformaram-se em abstrações de determinadas relações concretas da natureza e em guias úteis para o contrôle da indústria. Creio que os matemáticos modernos descortinam, em geral, o fundo social da sua ciência, mais através destas relações com a técnica, do que por um estudo da história [14].

Todavia, é importante constatar que esta função fundamental da técnica é característica exclusiva da moderna sociedade industrial. Foi quási ignorada no antigo Oriente e na sociedade greco-romana. Teve certa influência indirecta através da navegação e da arquitectura, mas não se ouve falar do cálculo matemático duma estrutura técnica até à era capitalista (com algumas excepções, como as das estruturas de *Arquimedes*). Não está provado que os vastos trabalhos técnicos dos chineses, dos babilónios e dos romanos tenham exigido mais do que o tipo de matemática muito elementar. A técnica teve influência nas ciências exactas, certamente, como o atestam muitos tratadistas de Mecânica, todavia, a aplicação nunca foi além dos fundamentos elementares. Na sua *Arquitectura, Vitruvius* presta elevado tributo à Matemática, mas a teoria e a prática estavam divorciadas. No seu livro oitavo descreve os métodos práticos de condução de água para as casas e as cidades, trata de canos de chumbo, tubos e condutas de barro, e pode ser lido sem qualquer preparação matemática. No seu livro nono ocupa-se dos métodos de duplicação do quadrado, do teorema de *Pitágoras*, da lei da hidroestática de *Arquimedes*, e da duplicação do cubo, mas, parece, sem grande relação com a arquitectura. Os nomes dos inventores e dos técnicos da Antiguidade (*Ctesibios, Philon, Frontinus*) não têm, ou dificilmente alcançam, um lugar na história da Matemática, mesmo pela sua influência indirecta, exceptuado o caso importante de *Arquimedes* e, talvez, o de *Heron*.

---

(11) P. K. HITTI, *History of the Arabs* (London, 1937), p. 153.

(12) G. SARTON, *Introduction to the History of Science*, II (Baltimore, 1931), p. 6.

(13) Havia também em uso outros símbolos numéricos de origens ainda duvidosas. Vide G. FALCO, *Un indovinello paleografico, Bolletino Storico-bibliografico Subalpino*, XXXVII (1935).

(14) Vide T. C. FRY, *Industrial Mathematics*, in *Researche — A National Resource*, II (Dec. 1940), Report of the National Research Council to the National Research Planning Board (Washington, 1941), p. 268-288. O Dr. FRY cita uma nota estimulante do Dr. H. M. EVJEN: «Alta matemática, de-certo, respeita apenas aquêles ramos da ciência que não encontraram ainda um vasto domínio de aplicação e que, portanto, não emergiram ainda, por assim dizer, da obscuridade. É, por conseqüência, um têrmo temporal e subjectivo» (p. 273). A nota tem o interêsse duma hiper-simplificação do ponto de vista sociológico.

Com o advento do capitalismo moderno, a técnica começa a desempenhar um papel importante no progresso da Matemática. O progresso da utensilagem mecânica no Renascimento foi, como *H. Grossmann* analisou, a origem da Mecânica moderna como ciência [15]. A Mecânica então progrediu para além dos apertados limites da Antiguidade e tornou-se fonte inspiradora de matemáticos. Neste primeiro período inspirou os filósofos e levou-os a crer numa estruturação matemática do universo. Muitos matemáticos foram inventores, como *Descartes, Pascal, Newton* e *Leibniz*. Para *Leibniz*, o estudo das ciências exactas fazia parte da sua investigação do método geral da invenção e do descobrimento.

A aplicação dos novos instrumentos aos problemas da técnica só gradualmente se foi fazendo. No século XVIII, *Euler* e os *Bernoulli* aplicaram a Matemática à construção naval e de canais. A maior parte da influência da técnica manteve-se indirecta, mesmo depois da revolução industrial, através da Mecânica e da Física como intermediárias. A actual influência directa da técnica sôbre a Matemática teve início no século XX com tôda a transformação da função industrial da ciência.

Dêste curto bosquejo podemos concluir que seria muito instrutivo um estudo da influência da técnica na Matemática. Uma coisa se destaca: o fundamento técnico duma forma social — as suas edificações, aquedutos, instrumentos, navios, o seu génio inventivo, a sua perícia técnica — não é de si mesmo um índice da extensão e das tendências da Matemática cultivada nessa sociedade. Pode haver influência, duma sôbre a outra, mas essa influência pode variar em quantidade e qualidade. Devemos encarar a estrutura técnica duma sociedade, não como uma coisa isolada, mas na sua relacionação completa com muitos outros aspectos da sociedade, tais como a existência da escravatura, a extensão do intercâmbio comercial, a influência da luta de classes, a estabilidade das formas sociais e o tempo de ócio.

Muito raramente um conjunto surpreendente de novos conceitos é um resultado do progresso de idéias matemáticas em independência total. Os factores sociológicos desempenham determinado papel, é claro. Os novos conceitos científicos, além disso, não necessitam de surgir precisamente no meio das lutas, mas, um pouco mais, na periferia. Os estímulos que levam ao progresso actuam lentamente e exigem, não só uma determinada maturidade, mas também quietação. Há, evidentemente, excepções, como a de *Thales*, o pai lendário da Matemática grega, que se supõe ter sido um membro militante da sua classe. *Descartes* alistou-se no exército holandês, uma das guardas-avançadas da revolução burguesa, e participou na Guerra dos Trinta Anos, mas, cedo descobriu que as maiores idéias nascem na quietação. *Galois*, o jovem génio francês, dois séculos mais tarde, participou activamente na revolução de Julho, e, pouco depois, encontrou a morte. É mais característico o trabalho original realizado em situações pacíficas, não demasiadamente afastadas dos centros de actividade económico-social, como o de *Newton* em Cambridge, *Euler* em Berlim, ou *Poincaré* em Paris. O primeiro instituto de investigação matemática fundou-se, não em Atenas com as suas acesas lutas de classes, mas em Alexandria onde a actividade económica se realizava num ambiente relativamente calmo. Por vezes, a distância geográfica entre a actividade social e a invenção matemática é muito grande; o exemplo mais frisante é o da descoberta das geometrias não-euclideanas na Hungria e na Rússia nas primeiras décadas do século XIX. Ambas as descobertas foram inspiradas pelo génio de *Gauss*, que levou, êle próprio, uma vida calma numa cidade provinciana da Alemanha semi-feudal. Cometeria grave êrro, todavia, quem visse, nestes casos notáveis de semi-divórcio do progresso social e da actividade científica, uma prova da independência da criação matemática. *Gauss* pertence, com *Lessing* anterior a êle e com o seu contemporâneo mais velho *Goethe*, ao grande despertar germânico do final do século XVIII e início do século XIX, do qual *Franz Mehring* delineou as raízes burguesas [16]. A conexão entre a obra de *Gauss* e a dos matemáticos da França revolucionária é tão íntima que *Felix Klein* construiu um longo quadro comparativo dos resultados de *Gauss* com os de *Legendre*, um dos matemáticos franceses em cuja obra podemos estudar a influência da revolução francesa no progresso da Matemática. Em relação a *Legendre*, *Gauss* mergulhava mais fundo, mas Göttingen oferecia mais sossêgo do que Paris [17]. Ao elaborar idéias que dominariam a Matemática moderna, *Gauss* conservou pessoalmente o tipo do século XVIII.

---

[15] H. GROSSMANN, *Die gesellschaftlichen Grundlagen der mechanistischen Philosophie und die Manufaktur Zeitschr. für Sozialforschung*, IV (1935), p. 161-231.

[16] Por exemplo em *Die Lessing-Legende* (4.ª Aufl., Stuttgart, 1913).

[17] FELIX KLEIN, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 1 (Berlim, 1926), p. 60-61.

3. Relações da Matemática com outras disciplinas

Ao comparar grandes matemáticos do século XIX, *Felix Klein* notou que os matemáticos criadores podem encarar a vida de diferentes pontos de vista, mas, da sua posição particular pouco se reflecte nas suas obras [18]. Êle chegou a esta conclusão comparando a obra de católicos, como *Weierstrass* e *Cauchy*, protestantes, como *Riemann*, e judeus, como *Jacobi*, e a sua afirmação não é incorrecta no período, relativamente curto, que foi considerado e no grupo, relativamente pequeno, de credos religiosos. Tal constitui um aviso para nós quando tentemos generalizar. As filosofias e as religiões reflectem determinadas relações sociais objectivas, talvez as do passado, e, como tais, podem fornecer elementos estimulantes ou retardadores do trabalho matemático. Na sociedade grega a Matemática nasceu e medrou no violento chocar de filosofias. Materialistas e idealistas degladiavam-se na interpretação dos conceitos matemáticos. Os primeiros enunciados claros dos problemas do infinito são de *Zenão* de Elea numa tentativa de hostilizar quer os pitagóricos, quer os atomistas. Quando assentou a poeira nos campos de batalha, as posições matemáticas estratégicas estavam na posse dos matemáticos idealistas da escola platónica com a sua ênfase na estrutura lógica e esterilidade da aplicação [19]. *Euclides*, que respeitava a tradição platónica, inclui êsse ponto de vista nos seus Elementos. Na medida em que estes ainda constituem, na essência e no espírito, o esqueleto da nossa geometria ordinária, plana e espacial, a influência de *Platão* faz-se ainda sentir no ensino dos nossos dias. O modêlo ordinário do compêndio americano de geometria conjuga um máximo de estrutura lógica com um mínimo de aplicações à ciência e à vida modernas. Aqui, a persistência obstinada dum certo tipo de Matemática no ensino recua a condições sociais e culturais doutrora.

Um outro exemplo de escola filosófica que influenciou profundamente a criação matemática é o materialismo de *Descartes* e seus discípulos, ao qual nos referimos já. Um dos principais dogmas desta escola era o da natureza matemática do universo e da consideração da Matemática como a chave do controle da natureza. Esta crença era partilhada por muitos que não podiam seguir o cartesianismo no seu materialismo, como *Leibniz*, e a ela cabe a popularidade da Matemática nos núcleos progressivos dos séculos XVII e XVIII. E, para dar um exemplo dos nossos dias, o materialismo dialéctico, muito mais do que as outras filosofias, tem actuado como estimulante do estudo das ciências exactas, num grande país, que floresce sob o impulso da planificação integral.

Há também exemplos de atitudes filosóficas que têm desencorajado o estudo da Matemática. A decadência gradual da sociedade esclavagista romana atraiu a atenção de muitos espíritos, lògicamente treinados, mais para a salvação da alma do que para problemas respeitantes ao controle do número e do espaço. Isto explica por que tôda uma classe devotou a sua atenção, com todos os seus dons intelectuais, a exercícios dialécticos de natureza teológica, desprezando as ciências naturais e a Matemática. Todos os matemáticos, bem conhecidos, dêste período, desde *Ptolomeu* a *Proclus*, eram pagãos e um dêles, *Hipatia*, morreu como mártir anti-cristão. Contribuiram muitíssimo para novos resultados e alguns dêles, como *Proclus*, dedicavam-se também a problemas éticos.

Podemos aproximar-nos do nosso país para observar os efeitos duma filosofia, duma atitude mental, na perseguição dos estudos matemáticos. ¿Qual a razão do orgulho de tantos licenciados por absolutamente nada significar para êles a Matemática? ¿Qual a razão do simultâneo desejo tímido de alguns outros de conhecerem um pouco mais dela, como *Henry Adams* [20]? ¿Como se

[18] *Ibid.*, p. 71: «Esta curta investigação afirma a experiência de todos os estudos do homem, nomeadamente, que em questões de *Weltanschauung* os dons do intelecto não são decisivos. A disposição do coração e da vontade, a influência da educação, as experiências, tôda a acção do mundo exterior e da sua própria natureza são activos na sua formulação». Ainda: «Freqüentemente, prevalece no público a opinião de que os matemáticos e os cultores das ciências naturais devem ser de tendências liberais e mesmo radicais, de acôrdo com a sua maneira de pensar penetrante, lògicamente sem preconceitos. Uma vista de olhos na história mostra que esta opinião não concorda com os factos. A nossa ciência tem representantes notáveis em todos os campos e partidos».

[19] Para a interpretação dos enunciados de ZENÃO veja-se F. CAJORI, *The History of Zeno's Arguments in Motion*, *American Mathematical Monthly*, XXII (1915). Um guia para a compreensão do significado social da Matemática na antiga Grécia é WINSPEAR, op. cit., e M. A. DINNIK, *Outline of the History of Philosophy of Classical Greece* (Moscow, 1936, em russo). Discordamos, contudo, da interpretação de WINSPEAR de que os paradoxos de ZENÃO constituem simples sofismas; são documentos notáveis de filosofia matemática e, como tais, a sua influência construtiva foi enorme.

[20] «Pelo melhor êle nunca teria sido um matemático; pelo pior êle nunca procuraria sê-lo; mas precisava de ler Matemática, como qualquer outra língua universal, e nunca

explica que, mesmo entre homens e mulheres cultos do nosso tempo, exista a crença firme de que a Matemática está imóvel, acabada para sempre, e que o matemático é um repetidor do saber do passado? Esta atitude de espírito é destrutiva de novo progresso da ciência exacta como um instrumento da reconstrução social. Os seus fundamentos devem determinar-se por um estudo do papel da Matemática na sociedade moderna, como um todo, e não apenas nas suas escolas e indústrias.

Estes exemplos muito desconexos bastarão para mostrar que há lugar para uma sociologia da Matemática. Mostram também que é necessária uma análise cuidadosa das estruturas sociais antes de tentar interpretar a sua influência no estado da ciência exacta. A superficialidade só causa desânimo e faz com que o trabalho pareça irrisório. Os progressos formidáveis da história económica, durante as últimas décadas, tornaram a tarefa potencialmente possível. A história da técnica, também um factor importante do aspecto sociológico, como vimos, está ainda num estado pouco satisfatório. A falta pode suprir-se sem grande dificuldade com a abundante documentação de que se dispõe. Afortunadamente, os períodos nos quais o matemático está interessado são, em geral, os mais profundamente estudados por outros — as civilizações da China, Babilónia, Egipto antigo, Grécia clássica, Imperio Romano, Europa sob o feudalismo e depois da sua desintegração, e o capitalismo moderno. Uma excepção parece ser o primitivo mundo islâmico e a Índia antes dos maometanos, a respeito dos quais a informação sociológica é muitíssimo escassa.

Termino com um aviso final. Devemos ter sempre a consciência de que uma descoberta matemática, um estado de espírito respeitando a Matemática, um método de ensino, não são nunca explicados por uma só causa. A realidade é complexa e mesmo o acto mais modesto ou mais subtil reflecte dum modo ou de outro uma infinidade de aspectos do universo real. Não podemos afirmar que um facto particular foi causador duma ocorrência ou estado de espírito particular. Devemos descobrir o modo segundo o qual todos os factores — sociológicos, lógicos, artísticos e pessoais — desempenharam uma função no caso em estudo, não esquecendo nunca, todavia, que o homem é um ser social mesmo quando êle se preocupa com as linhas rectas dum hiper-cone num espaço hepta-dimensional.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

---

atingiu o alfabeto», *The Education of Henry Adams* (Boston: Houghton Mifflin, 1927), p. 60. Vide também p. 449. A ansiedade de HENRI ADAMS tem o sabor dum século distante — de acôrdo com o seu próprio carácter.

Uma função contínua sem derivada

por **Henri Lebesgue**

(Publicado em *L'Enseignement Mathématique*, Vol. 38 (1939-1941), págs. 212-215)

Antes de expor o seu interessante exemplo de função sem derivada, R. Tambs Lyche nota muito justamente que a primeira função desta natureza, devida a Weierstrass, serve mal para o ensino elementar, o que me conduziu a procurar como, sob êste ponto de vista pedagógico, melhorar êste exemplo que, utilizando o desenvolvimento em série de Fourier, tem a grande vantagem de mostrar que as funções não deriváveis podem apresentar-se no decurso dum cálculo normal. Isto é fácil, e por isso a observação que se segue não é certamente nova; pode no entanto ser útil a sua publicação.

Seja, por exemplo, a função evidentemente contínua

$$(1) \qquad f(x)=\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}\operatorname{sen} 2^{n^2} x=\sum_1^\infty u_n(x)$$

tem-se

$$(2) \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_1^\infty \frac{1}{2^n h}\left[\operatorname{sen} 2^{n^2}(x+h)-\operatorname{sen} 2^{n^2} x\right].$$

O limite superior do valor absoluto do n-ésimo têrmo de (2) é também o de $|u'(x)|$, donde se deduz que o valor absoluto da soma dos $m-1$ primeiros termos de (2) é no máximo

$$\sum_1^{m-1} \frac{1}{2^n} 2^{n^2}=\sum_1^{m-1} 2^{n^2-n}<2^{(m-1)^2-(m-1)+1}=2^{m^2-3m+3}.$$

porque cada têrmo 2^{n^2-n} é inferior à metade do seguinte.

Demos a h os quatro valores

$$h_1=\frac{\pi}{2^{m^2+1}}, \quad h_2=\frac{-\pi}{2^{m^2+1}}, \quad h_3=\frac{3\pi}{2^{m^2+1}} \quad \text{e} \quad h_4=\frac{-3\pi}{2^{m^2+1}}.$$

Os arcos $\alpha_n=2^{n^2} x$ sofrem então, para $n>m$, acréscimos, positivos ou negativos, que são múltiplos inteiros de 2π e, por conseqüência, (2) reduz-se aos seus m primeiros termos.

Para $n=m$, o arco α_n sofre um acréscimo

$$\pi/2 \text{ ou } -\pi/2 \text{ ou } 3\pi/2 \text{ ou } -3\pi/2$$

donde, para sen α_m, um acréscimo $(\cos\alpha_m - \operatorname{sen}\alpha_m)$ ou $-(\cos\alpha_m + \operatorname{sen}\alpha_m)$ e a soma dos quadrados destas quantidades sendo igual a 2 uma delas pelo menos não é inferior a 1 em valor absoluto. Assim o valor absoluto do m-ésimo têrmo de (2) é pelo menos

$$\frac{1}{2^m \dfrac{3\pi}{2^{m^2+1}}} = \frac{2^{m^2-m+1}}{3\pi}$$

quer para h_1 e h_4, quer para h_2 e h_3, e além disso êste têrmo terá o sinal que quisermos, pois que h_1 e h_4, h_2 e h_3, dão resultados de sinais contrários. Em resumo ter-se-á

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| > \frac{2^{m^2-m+1}}{3\pi} - 2^{m^2-3m+3};$$

e por isso $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ aumenta indefinidamente em valor absoluto para a sucessão dos valores de h que nós associamos à sucessão dos inteiros m, e isto com o sinal que quisermos.

A função f(x) *não tem pois em nenhum ponto uma derivada determinada, nem finita, nem infinita.*

Se em vez de alunos principiantes se tratasse de alunos ao corrente dos profundos resultados de Denjoy sôbre a indeterminação da relação (2), a função $f(x)$ forneceria um exercício fácil e instrutivo: classificar os diversos valores de x nos quatro tipos previstos por Denjoy.

Tradução de J. DA SILVA PAULO

PEDAGOGIA

Secção a cargo de Bento Caraça

O TRABALHO MANUAL E A INICIAÇÃO MATEMÁTICA

por FERNANDO LOBO D'ÁVILA LIMA

Tive há anos um encontro casual com um distinto professor de matemática que me disse estar embaraçado para classificar as provas de admissão dos alunos à escola onde professava e acrescentou que a-pesar-do seu cuidado em formular preguntas das mais simples, as provas só muito fracamente satisfaziam. Suponho que o ilustre professor terá pensado muitas vezes nas causas que podem determinar uma tal insuficiência de preparação nos alunos ao fim de meia dúzia de anos de trabalho. Eu, por mim, pensei que, pondo de parte a hipótese de uma incapacidade formal do educando para assimilar estas noções, restava considerar o método usado no ensino desta ciência. De facto, estou convencido de que o ensino das matemáticas elementares teria tudo a ganhar se fôsse feito de um modo diverso, quanto possível objectivo.

Tem-se abusado do lápis e do papel ou do giz e da pedra e destarte as noções basilares ou não chegam a formar-se ou ficam mal assentes. Esquece-se muitas vezes que abstrair significa, segundo a expressão feliz de Bergson, extrair da matéria.

Para não citar senão o mais vulgar dos exemplos, preguntamos quantos são os alunos que tenham verificado, coisa facílima, a exactidão do clássico teorema de Pitágoras?

Todos o papagueiam, é certo, mas poucos o viram vivo e a saltar tal como é.

Mas agora reparo que estou aqui de um modo que pode parecer impertinente, eu, um intruso em coisas da matemática pretendendo através da «Gazeta de Matemática» ensinar o Padre Nosso ao Vigário pois que isto e muito mais já o sabem os seus leitores. Não é êste o nosso fim mas antes aproveitar o honroso convite de colaboração para tornar público junto dos que mais particularmente se interessam pelos progressos do ensino, algo que por não ser só nosso nos parece deve ser conhecido.

Encarregado vai para treze anos de dirigir os cursos de Trabalhos Manuais para alunos e de iniciação para professores no Liceu de Pedro Nunes, tenho-me esforçado por contribuir, quanto possível, para uma modificação nos processos de ensinar, tornando o ensino activo de modo a criar no educando um interêsse vivo.

A criança não atinge nem pode compreender senão o que vê. Se a isto acrescentarmos, o que é essencial nessas idades, uma participação activa, a compreensão torna-se fácil.

O Trabalho Manual serve admiràvelmente êste objectivo educativo, porque a criança é, como acertadamente diz W. James: um organismo actuante.

Nesta orientação e no que respeita em especial ao ensino das matemáticas elementares, temos realizado com o auxílio de professores e de alunos uma pequena colecção de modelos que passamos a citar:

Álgebra

1. Verificação experimental da igualdade:
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$
2. Verificação experimental da igualdade:
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$
3. Verificação experimental da igualdade:
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$
4. Verificação experimental da igualdade:
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Geometria

Plana:

Verificação experimental das seguintes proposições:

5. A soma dos ângulos internos dum triângulo é igual a 180º.

6. A soma dos ângulos externos dum polígono convexo é igual a 360º.

7. Dos segmentos que de um ponto se podem conduzir para uma recta, o menor é o segmento perpendicular.

8. O ângulo inscrito numa circunferência tem por medida metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

9. Todo o ângulo inscrito que subtende uma semi-circunferência é recto.

10. Duas figuras homotéticas a uma terceira, são homotéticas entre si.

11. Um triângulo isósceles é equivalente a um rectângulo com a mesma altura e cuja base é metade da base do triângulo.

12. Um paralelogramo é equivalente a um rectângulo da mesma base e da mesma altura.

13. Os ângulos e os lados opostos de um paralelogramo são iguais, respectivamente.

14. A área dum polígono regular é igual ao produto do semi-perímetro pelo apótema.

15. A área do círculo é igual ao produto do raio pelo semi-perímetro da circunferência.

16. A área dum trapézio é igual ao produto da sua mediana pela altura.

17. Modêlo permitindo demonstrar várias proposições:

I — A altura decompõe um triângulo rectângulo em triângulos semelhantes entre si e cada um semelhante ao triângulo dado.

II — Um cateto é mais proporcional entre a hipotenusa e a sua projecção ortogonal sôbre a hipotenusa.

III — A altura é meia proporcional entre os segmentos que determina na hipotenusa.

IV — Teorema de Pitágoras.

18 — O quadrado da hipotenusa de um triângulo rectângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos (Pitágoras).

19. A razão das áreas de duas figuras homotéticas é igual ao quadrado da razão de homotétia.

No Espaço:

20. Dos segmentos que de um ponto se podem conduzir para um plano, o menor é o segmento perpendicular.

21. A condição necessária e suficiente para que uma recta seja perpendicular a um plano é que seja perpendicular a duas rectas concorrentes do plano.

22. As intercepções de um plano com planos paralelos, são rectas paralelas.

23. Um paralelipípedo recto é equivalente a um paralelipípedo rectângulo da mesma altura e base equivalente.

24. Um prisma oblíquo é equivalente a um prisma recto de aresta lateral igual e cuja base seja a secção recta do prisma oblíquo.

25. Um prisma triangular recto é equivalente a três tetraedros da mesma altura e bases equivalentes.

Trigonometria

Modelos para verificar experimentalmente:

26. A variação das funções *seno* e *coseno* dos ângulos de 0 a 90º.

27. A variação das funções *tangente* e *cotangente* dos ângulos de 0 a 90º.

28. A variação das funções *seno, coseno, tangente* e *cotangente* dos ângulos de 0 a 90º.

É pouco, como se vê, o que está feito, e porventura ao professor encarregado do ensino convém fazer executar em classe estes modelos por um processo diverso, de mais fácil realização do que aquêle que temos seguido.

É evidente que assim deve ser, sempre que seja possível, mas de um modo ou de outro aqui fica bem expressa a nossa convicção sôbre a necessidade de variar de processos adoptando-se na forma de ensinar, de preferência, o modo activo e experimental.

Aos doutos da especialidade o fazer aquilo que eu, só modestamente, posso formular.

Nota — Os modelos acima citados encontram-se em exposição na Secção de Trabalhos Manuais do Liceu Pedro Nunes de Lisboa.

N O T A

Parece que os novos métodos de ensino vão enfim penetrando (quão lentamente!) entre nós.

No número 13 da «Gazeta» demos aos leitores um artigo do prof. Cardoso Guerra sôbre o ensino experimental da Geometria que, entre outros interêsses, tinha o de relatar a *sua experiência.*

Hoje o prof. Lobo de Ávila relata-nos uma outra experiência não menos interessante — a que tem vindo a realizar na Secção de Trabalhos Manuais do Liceu de Pedro Nunes.

Bom será que todos os interessados pelo ensino das Matemáticas Elementares dêem a estes trabalhos tôda a atenção que merecem. A «Gazeta» gostaria de recolher depoimentos sôbre o assunto e de instituir sôbre êle um largo debate [1].

B. C.

[1] Publicámos no último número da «Gazeta» um extenso artigo do Dr. Sebastião e Silva sôbre o ensino dos logaritmos no Liceu. Como nêle não vejo nenhum facto novo que permita avançar ou esclarecer a discussão do *problema pedagógico* que aqui debatera, abstenho-me de o comentar.

DOIS PRINCÍPIOS PEDAGÓGICOS GERAIS

por **J. W. A. Young**

(de «Lectures on fundamental concepts of Algebra and Geometry»)

1. *Não deve ser dada a definição* formal *de qualquer têrmo que não possa dar-se por meio de idéias òbviamente mais simples do que o têrmo definido.*

2. *Não deve ser tentada a demonstração* formal *duma proposição que parece evidente ao aluno, sem demonstração.*

A alguns pode parecer um desperdício de tempo quando se insiste no que é evidente. E, contudo, a grande maioria dos nossos compêndios o tornam necessário para assinalar absurdos pedagógicos. É difícil saber porque tantos dos nossos autores de compêndios ainda os incluem nas suas obras. Pode ser que os seus livros lhes pareçam cientìficamente defeituosos se tudo não definirem e demonstrarem formalmente. Mas, pelo contrário, tal atitude é tão absurda científica como pedagògicamente. É por uma necessidade lógica que alguns têrmos ficam por definir e algumas proposições por demonstrar. «Mas», podem dizer, «não é de desejar a redução do número de proposições não demonstradas ao mínimo?» Não! Pedagògicamente, é muito indesejável e, cientìficamente, não é necessário. Para uma mentalidade amadurecida, o problema da redução a um mínimo do número de têrmos definidos e de tornar independentes as proposições não demonstradas dum conjunto é interessante e importante; para a mentalidade do aluno do liceu, o problema não tem sentido. Deixemos que sejam grandes o número de têrmos não definidos formalmente e o número do que podemos chamar proposições preliminares (isto é, proposições formalmente não demonstradas). Lembremo-nos que a nossa primeira finalidade não é ensinar os alunos a *saber* geometria, mas sim levá-los a *pensar* geometria. Tal pode ser conseguido sòmente suscitando o seu interêsse pelas figuras e problemas geométricos e levando-os a pensar nisso *a seu modo*, primeiro. Os raciocínios dos próprios alunos devem ser dirigidos gradualmente para o modo formal. Não é nunca conveniente aprender a pensar geomètricamente sendo obrigado a repetir os raciocínios doutrem sob uma forma que aparecerá, pela natureza do caso, como artificial e anti-natural.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

MOVIMENTO MATEMÁTICO

Secção a cargo de A. Pereira Gomes

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

No dia 20 de Março realizou-se a reünião ordinária da Assembléia Geral da S. P. M.

Aprovou-se por unanimidade o relatório e as contas da Direcção, relativos a 1942.

Procedeu-se à eleição dos corpos gerentes para o biénio de 1943-44, cujos resultados foram os seguintes:

Mesa da Assembléia Geral: *Presidente*, Dr. Luiz Passos; *1.º secretário*, Dr. Francisco Inácio da

Silva; *2.º secretário*, Dr.ª D. Maria Antónia Rêgo Chaves.

Direcção: *Presidente*, Dr. Aureliano de Mira Fernandes; *Vice-Presidente*, Dr. Manuel Peres; *Secretário Geral*, Dr. Bento Caraça; *Tesoureiro*, Dr. Alfredo da Costa Miranda; *1.º Secretário*, Dr. Carlos F. Carvalho; *2.º Secretário*, Eng. F. Carvalho Araújo; *Vogal*, Dr.ª D. Maria Henriqueta Trigo de Sousa Zanatti.

Delegados à Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências: Dr. Bento Caraça, Eng. Francisco Leite Pinto.

Com o relatório da Direcção foi aprovado um voto de agradecimento à Imprensa, com menção especial da *Gazeta de Matemática* pela atenção com que seguiu a actividade da S P. M.

Em 25 de Março, às 21 horas, na Faculdade de Ciências (Secção de Matemática) realiza-se a cerimónia da posse dos novos corpos gerentes.

SEMINÁRIO DE FÍSICA TEÓRICA ANEXO AO C. E. M. DO PÔRTO

No passado mês de Fevereiro o Assistente Fernandes de Sá, da Faculdade de Ciências do Pôrto, efectuou duas comunicações sôbre alguns resultados obtidos no trabalho que vem realizando dentro do Seminário de Física Teórica anexo ao Centro de Estudos Matemáticos daquela Faculdade, que, como já aqui dissemos, tem desenvolvido a sua actividade sob a orientação do Dr. Guido Beck.

Na 1.ª comunicação, *Microestrutura geométrica do espaço-tempo electrónico*, definiu-se uma geometria do espaço métrico que no caso de 4 dimensões permite uma nova interpretação das equações de Dirac da cinemática do electrão. O espaço definido apresenta flutuações próprias, microscópicas e leva a considerar as propriedades do electrão como conseqüências da estrutura geométrica do contínuo espaço-tempo onde êle se move.

Pôsto que não houvesse a intenção de axiomatizar a geometria considerada, iniciou-se o seu estudo no caso $n=3$.

Na 2.ª comunicação, *Transformações relativistas das grandezas quânticas*, estudou-se o comportamento das formas bilineares $\psi^* M \varphi$ e das matrizes $\tilde{\Psi} M \Phi$ em rotações espaciais e em transformações de Lorentz gerais; ψ e φ representam spinores, $\tilde{\Psi}$ e Φ soluções matrizes da equação de Dirac, M é uma matriz do sistema base.

A. PEREIRA GOMES

SÔBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA NA SUÍÇA

por Maria do Pilar Ribeiro

III

2. Pareceu-nos interessante, sobretudo para os Clubes de Matemática, dar uma idéia de uma lição sôbre assunto tão curioso como o problema dos isoperímetros.

O curso de «Questões escolhidas de Geometria elementar» dado pelo prof. Hopf, é um curso do 3.º semestre muito freqüentado por professores de Liceu. Ocupa uma lição semanal de 2 tempos de 45 m.

Depois do estudo anteriormente feito dos poliedros de Euler, análise de várias demonstrações do teorema de Euler para os poliedros convexos, aplicações, noções de topologia combinatória, teorema da congruência de Cauchy para os poliedros convexos e de propriedades globais da curvatura em curvas e polígonos, começou nesta lição o estudo do problema dos isoperímetros que pode enunciar-se como segue: Dado um número $L>0$, determinar a curva plana fechada de comprimento L que limita uma área máxima. A solução é, como se sabe, a circunferência de raio $L/2\pi$. A área é então $y^* = L^2/4\pi$.

O problema pode ainda ser pôsto desta 2.ª maneira: Dado um número y exprimindo uma área, determinar a curva plana fechada de comprimento mínimo que limite esta área.

O problema data já da antiqüidade grega (é o problema de Dido) e já então foi indicada a solução. Parece que, depois, o próprio Galileo se teria ocupado dêle. Pela primeira vez Steiner, em 1830, dá duas demonstrações muito interessantes mas incompletas, e é Weierstrass, em 1870, que dêle dá a 1.ª demonstração completa. Analizam-se as duas demonstrações de Steiner e depois duas demonstrações modernas:

Steiner demonstra que: dada uma curva plana de comprimento L, que não seja a circunferência, é sempre possível determinar uma outra curva plana do mesmo comprimento, limitando uma área maior.

1.ª hipótese. A curva não é convexa. Neste caso pode sempre traçar-se uma tangente comum a dois pontos da curva e tomar-se o simétrico dum dos arcos em relação à tangente. A nova curva tem o mesmo comprimento da anterior, mas limita uma área maior. Podemos passar, pois, ao exame da 2.ª hipótese: a curva é convexa. Seja L o seu comprimento e y a área que limita. Tomemos uma corda AB tal que dois arcos determinados por ela tenham o mesmo comprimento. A área y fica decomposta em duas, y_1 e y_2. Seja $y_1 < y_2$. Tomando o simétrico do arco que limita a área y_2 em relação a AB, obtenho uma curva do mesmo comprimento L e limitando uma área $2y_2 > y_1 + y_2$.

Podemos agora limitarmo-nos às curvas convexas tendo um eixo de simetria.

É sempre possível, se a curva não é uma circunferência, determinar um ponto P tal que o triângulo $[ABP]$ não seja rectângulo em P. A sua área será máxima, supondo constante os comprimentos dos lados AP e BP, quando o ângulo $A\hat{P}B$ fôr recto. Então podemos traçar um triângulo rectângulo de catetos iguais a $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ sôbre os quais se podem construir arcos congruentes aos anteriormente determinados pelo ponto P sôbre o arco $\widehat{AB}$. Formando a figura simétrica da assim obtida em relação a AB, ficamos com uma curva de comprimento L, limitando uma área maior.

E Steiner concluia daqui: Como êste processo era válido para tôdas as curvas que não fôssem a circunferência, esta era aquela curva que limitava uma área máxima.

Esta conclusão não é, como fàcilmente se verifica, legítima: Há problemas de extremais que não têm solução; Steiner não deu senão um processo para construir uma nova curva a partir de curvas que não são circunferências, e nada afirmou quanto à existência duma curva limitando uma área máxima.

Um exemplo de problema análogo, sem solução, é o seguinte: Dado um segmento de recta AB e uma recta AC de direcção diferente de AB, determinar uma curva $\widehat{AB}$ tangente em A a AC e cujo comprimento seja mínimo. É fácil ver que dada uma curva de comprimento L é sempre possível determinar uma outra, satisfazendo ambas às condições impostas, e de comprimento menor. A menor distância de A a B é o segmento $\overline{AB}$ que só seria solução quando as direcções de AC e AB coincidissem. E pode esclarecer-se o raciocínio de Steiner estabelecendo o paralelo com o seguinte:

Consideremos a sucessão dos números naturais

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

e seja $\varphi(n)$ um processo que permite dado um número n obter um maior (o seu quadrado, por exemplo). Êste processo aplica-se a todos os números naturais, excepto 1.

Concluir-se-ia com Steiner: Dado um número qualquer natural, diferente de 1, é sempre possível determinar um maior. Então 1 é o maior de todos.

Steiner deu ainda uma 2.ª demonstração do mesmo problema; mas incorreu no mesmo êrro. Ela corresponde à 2.ª maneira de formular o problema e é, como a anterior, interessante e engenhosa.

Êle demonstra que dada uma área y limitada por uma curva de comprimento L, é sempre possível, se a curva não fôr a circunferência, determinar uma curva de comprimento $L^* < L$ limitando a mesma área.

Podemos, como anteriormente, analizar o caso das curvas convexas.

Tomemos uma recta d, de direcção qualquer, mas cuja direcção não é a dum eixo de simetria para a curva, e as cordas perpendiculares a esta recta. Se transportarmos estas cordas, paralelamente a si mesmas, e de modo que os seus meios fiquem sôbre a recta d, obteremos uma nova curva c' simétrica em relação a d. Esta curva limita uma área $y^* = y$ (princípio de Cavalièri) e tem um comprimento $L' < L$ (determinem-se os comprimentos das duas curvas).

Como a circunferência é a única curva para a qual não existe uma direcção a que não corresponda um eixo de simetria, Steiner tirou conclusões análogas às anteriores.

Além de Steiner, preocuparam-se com o problema os irmãos João e Jacob Bernouilli e Euler que deram a condição necessária. O problema estava nos fundamentos do cálculo das variações, mas só, com Weierstrass (1879), a análise atinge o desenvolvimento que lhe permite dar então uma condição suficiente, embora por um processo nada elementar.

Schwarz, em 1884, dá também uma demonstração, mas embora se não sirva de grande aparelhagem matemática, a sua demonstração também não é fácil. Coloca a questão para os polígonos de n lados iguais, não regulares, e demonstra que os polígonos nestas condições que ocupam uma maior área são os regulares. Por considerações para as curvas circunscrítas a polígonos, demonstra ser a circunferência a que limita uma área maior.

Podem consultar-se para êste problema os livros: *Blaschke* — «Kreis und Kugel» e *Bonnesen* — «Les problèmes des isoperimétres et des isépiphanes».

As duas demonstrações modernas aparecem em 1902 com Hurwitz e em 1939 com F. Schmidt.

O professor Hopf desenvolveu estas duas demonstrações na lição seguinte, discutiu-as e mostrou uma conexão inesperada entre a teoria das séries trigonométricas e o problema dos isoperímetros que é posta em relêvo pela demonstração de Hurwitz.

3. O 3.º curso a que nos referimos é o de geometria diferencial regido pelo prof. Plancherel.

Compreende 4 tempos semanais de 45 m sendo um dêles dedicado à correcção de exercícios propostos em lições anteriores.

Foram até agora resolvidos 36 exercícios dos quais transcrevemos alguns que podem dar uma idéia do nível do ensino neste 3.º semestre da Escola.

1) Demonstrar que, se o plano osculador a uma curva torsa C é tangente a uma esfera fixa de centro O: 1.º o plano rectificante passa pelo ponto O; 2.º a razão entre o raio de curvatura $\rho=1/k$ e o raio de torsão $\sigma=1/\tau$ é uma função linear do arco $\rho/\sigma=As+B$ e 3.º estabelecer os recíprocos.

2) Demonstrar que o plano tangente à superfície $xyz=a^3$, limita com os planos de coordenadas um tetaedro de volume constante.

3) Consideremos a família dos planos rectificantes duma curva. Mostrar que a característica do plano rectificante é o eixo instantâneo de rotação do triedro de Frenet.

4) Une-se um ponto fixo O a um ponto variável P que se desloca sôbre uma superfície esférica. Determinar o invólucro dos planos que passam por P perpendiculares a OP.

5) Demonstrar que a superfície $4a^2z^2=(x^2-2a^2)(y^2-2a^2)$ possue uma linha de pontos umbilicais e que esta linha é a intersecção desta superfície com a esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$.

6) Demonstrar a proposição seguinte: Se a curva de intersecção de duas superfícies é uma linha de curvatura para cada uma das duas superfícies, estas cortam-se ao longo desta linha sob um ângulo constante e reciprocamente. (Utilizar a fórmula de O. Rodrigues).

7) Demonstrar que as torsões de duas linhas assintóticas que passam por um ponto duma superfície são iguais e de sinais contrários e que o quadrado da torsão da linha assintótica é igual à curvatura total com o sinal trocado.

ANTOLOGIA

O «DISCRETO» E O «CONTÍNUO»

por E. T. Bell

(de «Men of mathematics», traduzido em francês com o título «Les grands mathématiciens»)

Desde os tempos mais remotos, duas tendências inversas, que por vezes se auxiliam mùtuamente, têm governado o desenvolvimento geral da Matemática: uma refere-se ao «discreto»; a outra, ao «contínuo».

O discreto aplica-se a descrever tôda a Natureza e tôda a Matemática, atòmicamente, por meio de elementos distintos, individualmente identificáveis, como os tijolos duma parede, os números 1, 2, 3, etc. O contínuo procura esquematizar os fenómenos naturais, o curso dum planeta sôbre a sua órbita, a passagem duma corrente eléctrica, os movimentos periódicos das marés e uma multidão de outros fenómenos que nos induzem a crer que conhecemos a Natureza segundo a fórmula mística de Heraclito: «Tudo flue». Hoje, êste «fluir» ou o seu equivalente «a continuïdade» tornou-se uma idéia tão pouco clara que é quási vasia de sentido. Mas deixemos isso por agora.

Intuïtivamente, nós *sentimos* que *sabemos* o que se deva entender por «movimento contínuo» como o duma ave ou duma bala no ar, ou a queda duma gota da chuva. Êste movimento é *doce;* não se faz por *sacadas*, é *ininterrupto*. No movimento contínuo ou, mais geralmente, na própria continuïdade, os números *individualizados* 1, 2, 3, não constituem a imagem matemática adequada. Os pontos dum segmento de recta, por exemplo, não constituem entidades tão separadas como os elementos da sucessão 1, 2, 3, ..., *em que a passagem dum têrmo ao seguinte é sempre a mesma* (dêste modo: $1, 1+1=2, 1+2=3$, e assim sucessivamente): porém, *entre* dois pontos duma recta, por muito próximos que estejam, nós podemos sempre *encontrar*, ou pelo menos *imaginar*, *um outro* ponto: *não há passagem imediata dum ponto ao seguinte*, por isso que não há pontos *consecutivos*.

A concepção da «*continuïdade*» quando aplicada à maneira de Newton, de Leibniz e dos seus sucessores, conduz ao domínio ilimitado do Cálculo Infinitesimal e das suas numerosas aplicações à Ciência e à Técnica; conduz a tudo que se chama hoje a *Análise Matemática*. O outro quadro, o do *discreto*, é o domínio da Álgebra, da Teoria dos Números, da Lógica Matemática. A Geometria participa simultâneamente da natureza do contínuo e do discreto.

Uma das grandes missões dos matemáticos de hoje é harmonizar o contínuo e o discreto, eliminar dêles tôda a obscuridade e encorporá-los numa matemática alargada.

Tradução de J. SEBASTIÃO E SILVA

SÔBRE AS MODERNAS TENDÊNCIAS DA MATEMÁTICA

por ***E. T. Bell***

(de «Men of mathematics», traduzido em francês com o título «Les grands mathématiciens»)

Poincaré foi o último sábio que conseguiu abraçar pràticamente todo o domínio das matemáticas, puras e aplicadas. Crê-se geralmente que seria impossível a um cérebro humano de hoje assimilar mais de duas das quatro divisões principais das matemáticas: aritmética, álgebra, geometria, análise, sem falar da astronomia e da física matemática, e ainda menos de realizar aí qualquer obra criadora de primeira ordem; ora, mesmo em 1880, na época em que se abria a grande carreira de Poincaré, pensava-se ordinàriamente que tinha sido Gauss o último matemático universal; não será, portanto, impossível que algum futuro Poincaré consiga, uma vez mais, cultivar o domínio completo.

À medida que as matemáticas se desenvolvem, contraem-se e dilatam-se alternadamente, um pouco à maneira dum dos modelos do universo de Lemaître. Actualmente, nós atravessamos um período explosivo de expansão, e é absolutamente impossível a um ser humano familiarizar-se com a enorme massa caótica de matemáticas que tem inundado o mundo desde 1900. Mas já, em certos sectores, se vê desenhar uma tendência para a contracção, que nos deve regosijar; acontece isto, por exemplo, com a álgebra, em que a introdução em grande escala, dos métodos axiomáticos torna imediatamente a questão mais abstracta, mais geral e menos desconexa. A maneira moderna de abordar os problemas faz descobrir analogias inesperadas, que em certos casos são mesmo identidades disfarçadas; e pode conceber-se que a próxima geração de algebristas não terá necessidade de conhecer tudo o que é agora considerado importante, porque muitos dos pontos particulares difíceis foram reduzidos, e encorporados em princípios gerais mais simples e de maior alcance.

Tradução de J. SEBASTIÃO E SILVA

OS FILÓSOFOS E A MATEMÁTICA

por E. T. Bell

(de «Men of mathematics», traduzido em francês com o título «Les grands mathématiciens»)

Por um dos veredictos mais irónicos que se têm conhecido no decurso do longo processo da experiência contra a especulação, a descoberta de Ceres coincidiu com a publicação dum ataque sarcástico do famoso filósofo G. W. Hegel (1770-1831) contra a conjectura dos astrónomos, na investigação dum oitavo planeta. Se êles prestassem um pouco de atenção à Filosofia, declarava Hegel, veriam imediatamente que não pode haver senão sete planetas — nem mais um, nem menos um. Tais investigações representavam, portanto, uma estúpida perda de tempo. Sem dúvida, êste ligeiro lapso de Hegel foi explicado, bem ou mal, pelos seus discípulos, mas o que êles não conseguiram foi suprimir as centenas de pequenos planetas que se riem do seu anátema olímpico.

Não é desprovido de interêsse notar, de passagem, o que pensava Gauss a respeito dos filósofos que se ocupam de questões científicas, de que não percebem nada; isto aplica-se, em particular, aos filósofos que esgravatam nos fundamentos da Matemática, sem terem prèviamente aguçado o bico sôbre algum duro edifício matemático. Inversamente, isto explica a razão por que B. Russell (1872), A. Whitehead (1861), David Hilbert (1862), da nossa época, trouxeram contribuïções importantes à filosofia das matemáticas: é que são matemáticos.

Escrevendo ao seu amigo Schumacher, a 1 de Novembro de 1844, Gauss declara: «Vê-se a mesma coisa (a incompetência matemática) entre os filósofos contemporâneos Schelling, Hegel, N. von Essenbeck, e os seus sucessores; não nos fazem êles pôr os cabelos em pé com as suas definições? Leia na história da filosofia antiga o que os grandes homens dessa época, Platão e outros (exceptuo Aristóteles) davam em matéria de explicações. E mesmo com o próprio Kant, as coisas muitas vezes não se passam melhor; a meu ver, a sua distinção entre juízos analíticos e sintéticos é uma daquelas idéias que, ou caem na banalidade, ou são falsas». Quando escrevia estas linhas, em 1844, Gauss estava em plena posse da geometria não euclideana, que era já uma refutação suficiente do que diz Kant sôbre o «espaço»...

Não se vá porém concluir dêste exemplo isolado, relativo a pormenores técnicos puramente matemáticos, que a Filosofia não era apreciada por Gauss; todos os progressos filosóficos tinham para êle grande interêsse, conquanto desaprovasse muitas vezes os meios pelos quais tinham sido alcançados.

Tradução de J. SEBASTIÃO E SILVA

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1942)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 5

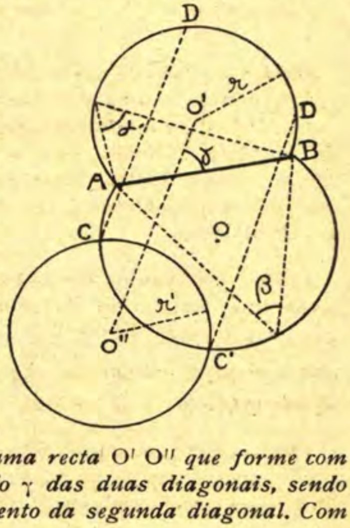
1255 — Resolva a equação $5-(x^2-1/2)^2/2=3x^2$ determinando o valor numérico das raízes reais até à aproximação de uma décima. R: *As raizes da equação são dadas pela expressão* $x=\pm[(-10\pm 256^{1/2}):4]^{1/2}=\pm[(-10\pm 16):4]^{1/2}$ *e as raizes reais são:* $x=\pm(3/2)^{1/2}\sim\pm 1{,}2$.

1256 — Simplifique a expressão $x^{-1/2}y^2\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{y^{-1}}}$ e determine o seu valor numérico para $x=1{,}3273$ e $y=0{,}3456$ utilizando logaritmos. R: *A expressão simplificada é* $x\,.\,y^{7/3}$ *donde* $\log x+7/3\log y=0{,}12297+7/3\times\bar{1}{,}53857=\bar{1}{,}04630$ *e para valor numérico da expressão* $0{,}11125$.

1257 — Sabe-se que a área de um terreno com a forma rectangular é igual a 2,25 hectares. Mediu-se o ângulo que faz uma diagonal com um dos lados, obtendo-se o valor $37^\circ 26' 30''$. Calcule o comprimento e a largura do terreno, dispondo de uma tábua de logaritmos. R: *A área do rectângulo em função da diagonal é dada por* $A=d^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha$ *se fôr* d *a diagonal e* α *o seu ângulo com um dos lados. No caso pôsto é* $225=d^2\,\mathrm{sen}\,37^\circ 26' 30''\cos 37^\circ 26' 30''$ *e por isso* $\log d=1/2(\log 225+\mathrm{colg}\,\mathrm{sen}\,\alpha+\mathrm{colg}\cos\alpha)=1/2(2{,}35218+0{,}21613+0{,}10019)=1{,}33425$. *Por outro lado, se forem* a *e* b *os lados do rectângulo serão* $a=d\,\mathrm{sen}\,\alpha$ *e* $b=d\cos\alpha$; *logo* $\log a=\log d+\log\mathrm{sen}\,\alpha=1{,}33425+\bar{1}{,}78387=1{,}11812$ *e* $a=131$ m; *e* $\log b=\log d+\log\cos\alpha=1{,}33425+\bar{1}{,}89981=1{,}23406$ *e* $b=172$ m.

1258 — Defina superfície de revolução. Indique, sem definir, alguns sólidos limitados, total ou parcialmente, por tais superfícies.

1259 — Diga como construia um quadrilátero, dados dois ângulos opostos, as diagonais e o ângulo que estas fazem entre si. R: *Seja* AB *uma das diagonais que é vista dos vértices* D *e* C *sob os ângulos* α *e* β, *dados, (ângulos opostos). Construem-se os lugares dos pontos sob os quais é visto o segmento* AB *segundo aquêles ângulos. Sejam* O *e* O' *os centros dos arcos que constituem tais lugares. Por um dêles* O' *(por exemplo) centro do arco de raio* r, *tracemos uma recta* O' O'' *que forme com* AB *o ângulo dado* γ *das duas diagonais, sendo* O' O'' *o comprimento da segunda diagonal. Com*



centro em O'' *e raio* r, *traça-se uma circunferência que cortará ou não o arco de centro* O. *Se houver pontos de encontro, seja* C *um dêles. Por* C *traço uma paralela a* O' O'' *que encontrará o arco de centro* O' *em* D. ACBD *é um um dos quadriláteros que se podem construir, e o outro* $AC'BD'$. *É fácil notar que pode haver* 2, 1 *ou* 0 *soluções.*

1260 — Determine as soluções inteiras e positivas da equação $x-(2y+5):5=100/6-3y$. R: *A equação proposta é equivalente a* $30x+78y=530$, *equação que não tem soluções inteiras, o mesmo sucedendo à proposta.*

Soluções dos n.os 1255 a 1260 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 4

1261 — Determine o parâmetro m de modo que a equação $5x^2+(2m+1)x+m-2=0$ tenha duas raízes x' e x'' que satisfaçam a relação $2x'+5x''-1=0$. R: *As equações que resolvem o problema são* $2x'+5x''=1$; $x'+x''=-(2m+1):5$ *e* $x'x''=(m-2):5$. *A resolução do sistema dá para* m *os valores* $m'=-4$ *e* $m''=1/8$.

1262 — Escreva e simplifique o têrmo médio do desenvolvimento de $\left(\sqrt{2a}-\sqrt{1/2a}\right)^6$. R: $T_4=-20$.

1263 — Escreva o têrmo geral da sucessão $\frac{3}{-3}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{12}{9}\cdots$ e calcule o seu limite quando o número de termos cresce indefinidamente. R: *O têrmo geral é* $u_n=\frac{3n}{4n-7}$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=3/4$.

1264 — A altura de um trapézio rectângulo mede 198,15 metros e uma das suas bases é dupla da outra. Calcule a medida do *menor* ângulo interno do trapézio, sabendo que a base maior mede 426,38 metros. Utilize logaritmos. R: *A equação que resolve o problema é* $198{,}15=213{,}19\ \mathrm{tg}\,\alpha$ *donde* $\alpha=42^\circ\,54'\,20''$.

1265 — Os ângulos α e β são dois ângulos positivos que satisfazem às relações: $\alpha+\beta<\pi/2$; $\mathrm{sen}\,\alpha=\sqrt{2}/2$; $\cos\beta=1/2$. Calcule $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$. R: *Dos dados do problema conclue-se que* $\mathrm{tg}\,\alpha=1$ *e* $\mathrm{tg}\,\beta=\sqrt{3}$ *donde* $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=-(2+\sqrt{3})$.

1266 — Em que quadrantes são simultâneamente crescentes as funções: tangente e secante. Justifique a sua resposta.

1267 — Demonstre que tôda a recta conduzida pelo ponto de intercepção das diagonais de um paralelogramo é dividida por êste ponto e pelos dois lados opostos em duas partes iguais. R: *É fácil ver que com a recta, uma diagonal e os dois lados opostos cortados pela recta, se formam dois triângulos iguais de que dois lados são os segmentos em que fica dividida a recta; opondo-se êsses dois lados a ângulos iguais êles são, por isso, iguais.*

1268 — A secção feita num cone de revolução por um plano que passa pelo eixo é um triângulo eqüilátero cuja área é $\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$. Calcule a área total do cone. R; *A área do triângulo eqüilátero em função do lado (geratriz do cone) é* $\sqrt{3}=g^2\sqrt{3}/4$, *donde* $g=2$ cm. *O raio da base do cone é* $g/2=1$ cm *e a área total* $A=\pi r(g+r)=3{,}14\times1(2+1)=9{,}42\ \mathrm{cm}^2$.

Soluções dos n.os 1261 a 1268 de J. Calado.

I. S. C. E. F. — Exame de Aptidão, 1-8-1942

1269 — *a)* Diga que propriedades conhece das equações do 2.º grau. *b)* Resolva a desigualdade $\frac{(x+3)\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x-1)}<0$. R: *A desigualdade dada implica um dos dois sistemas:*

$$\text{a)}\ \begin{cases}(x+3)(x-2)>0\\(x+1)(x-1)<0\end{cases}\quad\begin{cases}x<-3\ \textit{ou}\ x>2\\-1<x<1\end{cases}\quad \textit{impossivel;}$$

$$\text{b)}\ \begin{cases}(x+3)(x-2)<0\\(x+1)(x-1)>0\end{cases}\quad\begin{cases}-3<x<2\\x<-1\ \textit{ou}\ x>1\end{cases}$$

$$-3<x<-1\ \textit{ou}\ 1<x<2.$$

1270 — Calcule o valor numérico da expressão $A=\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}\right)^{1/3}$ para $a=141{,}43$ $b=20{,}04$.

$$\text{R:}\quad A=\left(\frac{ab\,(b-a)}{b^2-a^2}\right)^{1/3}=\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{1/3},$$

$$\log A=\frac{1}{3}(\log 141{,}43+\log 20{,}04+\mathrm{colog}\ 161{,}47)=$$

$$=\frac{1}{3}(2{,}1505415+1{,}3018977+\bar{3}{,}7919082)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 1{,}2443474=0{,}4147825,$$

donde $A=2{,}59885$.

1271 — *a)* Enuncie as propriedades que relacionam a medida de um ângulo cujos lados intersectam arcos de circunferência com as medidas dêsses arcos. *b)* Dadas duas circunferências concêntricas, calcule a área do segmento determinado no círculo de raio maior por uma tangente à circunferência de raio menor. Caso particular: $R=2r$.

R: *Seja* O *o centro das duas circunferências de raios* R *e* r $(r < R)$, $\overline{AB}$ *a corda da circunferência de raio* R *tangente à de raio* r, *e* 2α *a medida em radianos do ângulo* AOB. *Tem-se:* $A = \pi R^2 \cdot 2\alpha/2\pi -$ *área* $[AOB] = \alpha R^2 - r\sqrt{R^2-r^2} = R^2 \arccos\frac{r}{R} - r\sqrt{R^2-r^2}$. *Para* $R = 2r$, *vem*

$$A = 4r^2 . \arccos\frac{1}{2} - r\sqrt{3r^2} = (4\pi/3 - \sqrt{3})\, r^2 .$$

1272 — *a)* Defina poliedro regular e descreva os poliedros regulares que conhece. *b)* Dado um cubo de lado L, inscreve-se nêle uma esfera e nela um cubo de lado l. Calcule a razão dos volumes dos dois cubos. R: *O diâmetro da esfera é igual ao lado do cubo circunscrito e igual à diagonal do cubo inscrito. Logo* $D^2 = L^2 = 3l^2$ *donde* $L^2/l^2 = 3$. *A razão dos volumes é* $V/v = L^3/l^3 = 3\sqrt{3}$.

1273 — Calcule o perímetro e a área de um trapézio rectângulo conhecendo a altura: $h = 7{,}45$ metros, a base menor: $b = 25{,}14$ metros e o ângulo obtuso que lhe é adjacente: $\alpha = 108^\circ 37' 43''$. R: *Designando por* B *a base maior, tem-se* $B - b = h \times \operatorname{tg}(\alpha - \pi/2) = 7{,}45 \times \operatorname{tg} 18^\circ 37' 43''$ *e* $l = h/\cos(\alpha - \pi/2) = 7{,}45/\cos 18^\circ 37' 43''$, *donde* $\log B - b = 0{,}3999062$ *ou* $B - b = 2{,}5113$ *e* $\log l = 0{,}8955229$ *donde* $l = 7{,}8618$. *Perímetro:* $P = B + b + h + l = 68{,}1$ m.

Área: $S = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{52{,}79}{2} \cdot 7{,}45 = 196{,}6\ m^2$.

1274 — Mostre que, se x, y e z são três números em progressão geométrica, é válida a igualdade $(x+y+z)(x-y+z) = x^2 + y^2 + z^2$. R: *A igualdade a verificar reduz-se a* $(x+z)^2 - y^2 = x^2 + y^2 + z^2$ *ou, finalmente, a* $xz = y^2$. *Se* $y = xr$ *e* $z = xr^2$, *tem-se imediatamente* $xz = x^2 r^2 = y^2$.

Soluções dos n.os 1269 a 1274 de A. Sá da Costa.

Instituto Superior Técnico

Ponto n.º 4

1275 — Três proprietários têm de participar nas despesas de um canal de irrigação proporcionalmente à extensão das suas propriedades e na razão inversa das distâncias das mesmas propriedades ao canal. Tendo as despesas do canal importado em 200 contos, calcular a parte a pagar por cada proprietário, sabendo que as propriedades têm de extensão 65 hectares, 96,2 hectares e 70 hectares, e que as suas distâncias ao canal são respectivamente 250 metros, 100 metros e 200 metros. R: *Sejam* x, y *e* z *as partes a pagar pelos proprietários. As equações que resolvem o problema são* $x + y + z = 200$ *e* $\frac{250x}{65} = \frac{100y}{96{,}2} = \frac{200z}{70}$ *o que dá os valores* x=33.078$88, y=122.391$86 *e* z=44.529$26.

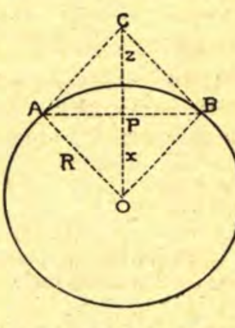
1276 — Determinar k de modo que $2x(x+2) - k^2 > 1$ seja verificada para todos os valores de x. R: *Deveria ser negativo o descriminante do trinómio, isto é,* $2 + 2(k^2+1) < 0$, *desigualdade que é impossível, logo o problema não tem solução.*

1277 — Mostre que num triângulo rectângulo de hipotenusa a é $\frac{\operatorname{tg} B}{1 + \sec B} = \frac{b}{a+c}$. R: *Se forem* b *e* c *os catetos opostos aos ângulos* B *e* C *será* $\operatorname{tg} B = b/c$ *e portanto* $\frac{\operatorname{tg} B}{1+\sec B} = \frac{b}{a+c}$.

1278 — Determine a área do losango circunscrito a uma circunferência de raio 3 centímetros, sabendo que um dos ângulos do losango mede 60º. R: *Se forem* d_1 *e* d_2 *as diagonais do losango, será* $\frac{d_1}{2} = \frac{3}{\operatorname{sen} 30}$ *e* $\frac{d_2}{2} = \frac{3}{\operatorname{sen} 60}$ *logo* $d_2 = 12$ *e* $d_1 = 4\sqrt{3}$, *logo a área mede* $24\sqrt{3}\ cm^2$.

1279 — Determinar a área de um trapézio isósceles inscrito numa circunferência de raio R, sendo uma das bases igual ao diâmetro e um dos lados não paralelos igual a a. R: *As equações que resolvem o problema são:* $a^2 = x^2 + (R-y)^2$ *e* $R^2 = x^2 + y^2$; *sendo* x *a altura do trapézio e* y *metade da base menor. Então será* $x = \frac{a}{2R}\sqrt{4R^2 - a^2}$ *e* $y = R - \frac{a^2}{2R}$ *e a área é* $A = \left(2R - \frac{a^2}{2R}\right)\left(\frac{a}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}\right)$.

1280 — Dada uma esfera de raio R, determinar a distancia do centro a que se deve tirar um plano secante para que seja igual ao volume da esfera a soma dos volumes do cone circunscrito à esfera com base na secção dêsse plano e do cone com a mesma base e vértice no centro da esfera. R: *Seja* y *o raio de secção produzido na esfera pelo plano,* x *a distância do centro da esfera ao plano secante e* z *a altura do cone circunscrito. A igualdade dos volumes dá-nos a equação* $4R^3 = y^2(x+z)$. *Do triângulo rectângulo* [ACO], *tira-se a relação* $y^2 = xz$; *e do triângulo rectângulo* [APO] *deduz-se a equação* $y^2 + x^2 = R^2$. *Estas três equações permitem determinar o valor pedido que é* $x = R(\sqrt{5} - 2)$. *Note-se que para a eliminição basta substituir* y^2 *tirado da* 2.ª *equação na* 1.ª *e na* 3.ª, *dividindo membro a membro as igualdades obtidas.*



Soluções dos n.os 1275 a 1280 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS GERAIS - ÁLGEBRA SUPERIOR - COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — Álgebra Superior — **2.º exame de freqüência, 1942**

1281 — Discuta o sistema $9x+my-z=4$, $4mx-2y+(m-1)z=m$ e $5x+(2m-1)y-3z=3\,(m+2)$ onde m é um número real. R: *Determinado para* $m\neq-1\,,\ 35/9$. *Indeterminado para* $m=-1$. *Incompatível para* $m=35/9$.

1282 — Determine a equação do lugar geométrico dos pontos cujas distâncias às duas rectas de equações $ay+bx+c=0$ e $a'y+b'x+c'=0$ estão numa relação k conhecida.

R: $\dfrac{ay+bx+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm k\dfrac{a'y+b'x+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$.

1283 — Deduza a equação dum plano que passe pela recta $x=3z+2$, $y=-z+3$ e diste $\sqrt{3}$ do ponto $(1,2,-3)$. R: $x+3{,}675y+0{,}675z-10{,}025=0$ *e* $x+0{,}925y-2{,}075z-4{,}775=0$.

1284 — Prove, sem desenvolver o determinante, que a equação $\begin{vmatrix} x & c & 1 \\ b & x & 1 \\ 1 & c & 1\end{vmatrix}=0$ admite as raízes 1 e c.

R: *Para* $x=1$ *a* 1.ª *e a* 3.ª *linhas são iguais. Para* $x=c$ *a* 2.ª *e a* 3.ª *colunas são proporcionais.*

1285 — Dada a recta $r=Ax+By+C=0$ e um ponto $M(x_0 y_0)$ efectue uma rotação dos eixos supostos rectangulares em tôrno da origem de modo que a recta fique paralela ao novo eixo dos XX. Deduza da operação a fórmula da distância dum ponto a uma recta. R: *Efectuar a rotação, calcular a distância nesse novo sistema e, em seguida, desfazer a rotação.*

1286 — Deduza a equação do plano que passa pelo ponto $M(2,-3,8)$ é paralelo à recta r_1 e perpendicular ao plano Π_1,

$$r_1\equiv x=\frac{y}{4}=\frac{z}{8} \quad e \quad \Pi_1\equiv x-2y+3z-8=0\,.$$

R: $28\,(x-2)+5\,(y+3)-6\,(z-8)=0$.

Soluções dos n.ºs 1282, 1284 e 1286 de A. Sá da Costa, e dos n.ºs 1281, 1283 e 1285 de J. Pais Morais.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — **1.º exame de freqüência, 20-2-1942**

1287 — Calcular $[1+i+i^2+\cdots+i^{n-1}]^n$. Discussão ($n$ inteiro e positivo). R: $S=\left[\dfrac{1-i^n}{1-i}\right]^n$. *Se* $n=4p$ *é* $i^n=1$ *e* $S=0$; *se* $n=4p+1$ *é* $i^n=i$ *e* $S=1^n=1$; *se* $n=4p+2$ *é* $i^n=-1$ *e* $S=\left(\dfrac{2}{1-i}\right)^n=2^{2p+1}\times\left[\cos\left(p\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(p\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=(-1)^p\,2^{2p+1}\,i$; *se* $n=4p+3$ *é* $i^n=-i$ *e* $S=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=\cos\left(2p\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(2p\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-i$.

1288 — Verificar que os três planos de eqs. $4x-y-z=0$, $2x-2y-3z=0$, $2x-3y+2z=1$ definem uma superfície prismática e determinar os parâmetros directores das arestas. Calcular o volume do prisma que se obtém cortando essa superfície prismática por dois planos perpendiculares às arestas, um passando pela origem e outro pelo ponto $(2,3,3)$. R: *Consideremos o sistema constituído pelas equações dos três planos. A característica da matriz dos coeficientes das variáveis é* 2, *por ser nulo o único determinante de 3.ª ordem que nela pode formar-se e haver determinantes de 2.ª ordem não nulos. Notemos que não são nulos os determinantes* $\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=10$, $\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-10$, $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & -8\end{vmatrix}=-10$ *e que, tomado para principal o sistema constituído por duas quaisquer das três equações e para incógnitas principais* x *e* y, *o característico é, à parte o sinal, o determinante* $\begin{vmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=10$. *Por conseqüência, os três planos intersectam-se dois a dois e definem uma superfície prismática.*

Para determinar os parâmetros directores das arestas, consideremos, por exemplo, a aresta definida pelos dois primeiros planos $\begin{cases}4x-y-z=0\\ 2x+2y+3z=0\end{cases}$ *cujos parâmetros directores são* $\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=5$, $\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -3 & 2\end{vmatrix}=10$, $\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=10$ *ou* $(1,2,2)$.

O plano π *que passa por* O *e é perpendicular às arestas tem por equação* $x+2y+2z=0$ *e o plano* π' *que passa por* $(2,3,3)$ *e é perpendicular às arestas* $x+2y+2z=14$. *Os pontos de encontro de* π *com as as três arestas são dados por*

$$\begin{cases}x+2y+2z=0\\ 4x-y-z=0\\ 2x+2y-3z=0\,,\end{cases} \quad \begin{cases}x+2y+2z=0\\ 4x-y-z=0\\ 2x-3y+2z=1\,,\end{cases} \quad \begin{cases}x+2y+2z=0\\ 2x+2y-3z=0\\ 2x-3y+2z=0\end{cases}$$

e são $(0,0,0)$ $(0,-1/5,1/5)$ $(2/9,-7/45,2/45)$ *e o ponto de encontro de* π' *com a aresta definida pelos dois primeiros planos é a solução do sistema*
$\begin{cases} x+2y+2z=14 \\ 4x-y-z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \end{cases}$ *isto é* $(14/9, 28/9, 28/9)$. *O volume do prisma é igual a metade do volume do paralelipipedo cujas arestas concorrentes num vértice são determinadas pelos quatro pontos encontrados. Então, o volume do prisma tem por medida*

$$V=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/5 & 1/5 & 1 \\ 2/9 & -7/45 & 2/45 & 1 \\ 14/9 & 28/9 & 28/9 & 1 \end{vmatrix}=\frac{49}{405}.$$

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — **2.º exame de freqüência, 16-6-1942**

1289 — Calcular os três primeiros termos do desenvolvimento em série da função $y=\frac{1}{\cos^3 x}$.

R: *Notemos que* $\cos^3 x=\cos x\cdot\cos^2 x=\frac{1}{2}\cos x\cdot$ $\cdot(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}(\cos x+\cos x\cdot\cos 2x)=\frac{1}{2}(\cos x+$ $+\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x)=\frac{3}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos 3x$.

Então, $y=\frac{1}{\cos^3 x}=\frac{4}{3\cos x+\cos 3x}$. *E, porque*

$$3\cos x=3\left(1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)$$ *e*

$$\cos 3x=1-\frac{3^2x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$ *será*

$$y=\frac{4}{(3-3x^2/2!+3x^4/4!+\cdots)+(1-3^2x^2/2!+3^4x^4/4!+\cdots)}=$$

$$=\frac{4}{4-6x^2+7x^4/2+\cdots}=1+3x^2/2+11x^4/8+\cdots.$$

1290 — Determinar um polinómio do 4.º grau que tome os mesmos valores que a função $y=x^x$ para $x=-2,-1,0,1,2$. R: *Tem-se o seguinte quadro de valores:*

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{2}$	-1	1	1	4.

Note-se que $y(0)=\lim_{x\to 0}x^x=e^{\lim_{x\to 0}x\log x}=e^0=1$. *Seja* $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ *o polinómio pedido. Deverá ser*

$$\begin{cases} 16a-8b+4c-2d+e=\frac{1}{2} \\ a-b+c-d+e=-1 \\ e=1 \\ a+b+c+d+e=1 \\ 16a+8b+4c+2d+e=4 \end{cases}$$

a resolução dêste sistema de equações lineares conduz a $7x^4/16-x^3/24-23x^2/16+25x/24+1$.

1291 — Resolver a equação $2x^4-2x^3-5=0$. A primeira aproximação das raízes irracionais será determinada gràficamente; pedem-se essas raízes aproximadas às décimas. R: *A aplicação do teorema de Descartes à equação e à sua transformada em* $y=-x$, $2y^4+2y^3-5=0$, *mostra-nos que a equação proposta tem apenas duas raízes reais, uma positiva e outra negativa. As outras duas são complexas conjugadas. A raiz positiva é inferior a* 4 *e a negativa é superior a* -4 *(método de Mac-Laurin). A equação não admite raízes inteiras porque o seu 1.º membro toma os valores* -5, -5, 1 *para* $x=0,1,-1$, *dos quais nenhum é divisível por* 3. *A transformada da equação em* $z=2x$ *é* $z^4-2z^3-40=0$ *que não admite raízes inteiras, visto que o seu 1.º membro, para* $z=0,1,-1$, *toma os valores* -40, -41, -37 *nenhum dêles divisível por* 3. *A equação proposta não admite, portanto, raízes racionais. As suas duas raízes reais são irracionais.*

Notemos que a equação proposta pode escrever-se sob a forma $2x^4=2x^3+5$ *e que, portanto, as suas raízes reais serão as abscissas dos pontos de intersecção das curvas de equações* $y=2x^3+5$ *e* $y=2x^4$.

O gráfico destas curvas mostrar-nos-ia que a raiz negativa pertence ao intervalo $(-2,-1)$ *e a positiva ao intervalo* $(1,2)$.

Com o auxílio duma tábua de potências e duma máquina de calcular, constroem-se fàcilmente as linhas preenchidas dos quadros seguintes pela ordem indicada à esquerda:

	x	x^4	x^3	$2x^4-2x^3-5$
1)	-2	16	-8	43
	$-1,9$			
	$-1,8$			
	$-1,7$			
	$-1,6$			
3)	$-1,5$	5,0625	$-3,375$	11,875
	$-1,4$			
	$-1,3$			
4)	$-1,2$	2,0736	$-1,728$	2,6032
5)	$-1,1$	1,4641	$-1,331$	0,5902
2)	$-1,$	1	-1	-1

donde $-1,1<x_1<-1$

	x	x^4	x^3	$2x^4-2x^3-5$
1)	1	1	1	-5
	1,1			
	1,2			
	1,3			
	1,4			
3)	1,5	5,0625	3,375	$-1,625$
5)	1,6	6,5536	4,096	$-0,0848$
4)	1,7	8,3521	4,913	1,8782
	1,8			
	1,9			
2)	2	16	8	11

donde $1,6 < x_2 < 1,7$.

Soluções dos n.os 1287 a 1291 de A. Sá da Costa.

GEOMETRIA PROJECTIVA

F. C. P. — GEOMETRIA PROJECTIVA — **Exame de freqüência, 1942-43**

Introdução :

1292 — Considerar um triângulo ABC. Dizendo-se interior qualquer ponto I que pertença a um segmento que tenha para extremos o vértice A e um ponto do lado BC. *a*) Demonstrar que a recta BI intersecta o lado AC num ponto X e, depois, que o ponto I está entre B e X. *b*) Demonstrar, também, que o segmento que une dois pontos interiores não intersecta nem o lado BC nem o lado AB.

1293 — Sejam A, B, X e Y quatro pontos duma recta. Se B estiver entre A e X e A entre Y e X, demonstrar que A está entre Y e B.

1294 — Demonstrar que as diagonais dum losango são perpendiculares.

1295 — Poder-se-á afirmar ou negar, sem que seja feita qualquer hipótese sôbre paralelismo, que, num triângulo rectângulo, a recta que une o ponto médio da hipotenusa ao ponto médio dum dos catetos seja perpendicular a êste cateto? ¿ Poder-se-á, igualmente, afirmar ou negar que a mesma recta intersectará o outro cateto?

Geometria Projectiva :

1296 — Seja: ABC, um triângulo; l, uma recta; A_1, B_1 e C_1, os pontos de intersecção da recta l com os lados BC, CA e AB; A'_1, o conjugado harmónico de A_1, relativamente aos vértices B e C; B'_1, o conjugado harmónico de B_1, relativamente aos vértices C e A; C'_1, o conjugado harmónico de C_1, relativamente aos vértices A e B. Demonstrar que as três rectas AA'_1, BB'_1 e CC'_1 concorrem num mesmo ponto.

1297 — Demonstrar que se C separa harmònicamente o ponto D dos pontos A e B, também A separa harmònicamente o ponto B dos pontos C e D.

1298 — Determinar, analìticamente, evidentemente, as abscissas dos pontos que separam harmònicamente tanto os pontos de abscissas -1 e 1, comos os pontos de abscissas $a-1$ e $a+1$.

Construções :

1299 — Desenhar um triângulo equilátero XYZ inscrito numa circunferência de 3 cm de diâmetro. Designar por A o ponto da circunferência dimaetralmente oposto ao vértice Z. Determinar os vértices B, C e D do quadrângulo com o 4.º vértice em A e que tenha, para triângulo diagonal, o triângulo XYZ.

1300 — Desenhar um rectângulo $ABCD$, sendo $AB=5$ cm e $BC=3$ cm. Marcar sôbre AB e para o lado de B o ponto X tal que $BX=3$ cm. Unir X com D. Tirar, só com a régua, pelo ponto C a paralela a XD.

CÁLCULO INFINITESIMAL E ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — CÁLCULO — **2.º exame de freqüência, 1941-42**

1301 — Integrar a equação

$$z' + \frac{z}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{1}{2} z^3 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 0 .$$

R: *Tem-se* $z^{-3} z' + \dfrac{z^{-2}}{\operatorname{sen} 2x} = -\dfrac{1}{2} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x$ *e fazendo* $z^{-2}=y$ *vem* $\dfrac{y'}{2} - \dfrac{y}{\operatorname{sen} 2x} = \dfrac{1}{2} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x$. *O integral geral da equação sem 2.º membro é* $y = C \operatorname{tg} x$. *Variando constantes vem* $C = \int \operatorname{tg} 2x \, dx$, *logo* $z^{-2} = C_1 \operatorname{tg} x \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \log \cos 2x$.

1302 — Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}}$. O domínio D é limitado pelas linhas $y^2=4x$ e $x=1$.

R: $\displaystyle \int_0\!\!\int^{1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^{2\sqrt{x}} dy = 4\,.$

1303 — Determinar o raio de curvatura da linha $x^2-2xy+2y^2-1=0$ no ponto $(1\,,1)$.

1304 — Determinar o sentido da concavidade da linha $\rho=\pi/4\theta$ no ponto $(1\,,\pi/4)$.

1305 — Determinar as assíntotas da linha

$$x=\frac{t}{t^2-1}\;;\; y=\frac{t^3}{t^2-1}\,.$$

1306 — Determinar uma relação entre a e b de modo que a envolvente das rectas $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=1$ seja a hipérbole $xy=1$.

1307 — Determinar os novos limites dos integrais $\int_0^1 dx \int_0^x dy$ quando se inverte a ordem de integração.

1308 — Determinar um integral particular de $y''-y=xe^x$.

Soluções dos n.os 1301 e 1302 de J. Rios de Sousa.

I. S. C. E. F. — 2.ª CADEIRA **— 2.º exame de freqüência — 17-6-1942**

1309 — Determine os pontos múltiplos da curva $y^3-x^3=x^2y^2$ e as tangentes na origem dos eixos coordenados. R: *Os pontos múltiplos da curva dada são as soluções reais do sistema*

$$\left\{\begin{aligned} & f \equiv y^3-x^3-x^2y^2=0 \\ & \frac{\partial f}{\partial x} \equiv -3x^2-2xy^2=0 \\ & \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 3y^2-2x^2y=0\,. \end{aligned}\right.$$

Êste admite a solução única $x=y=0$. *Para* $x=y=0$ *tem-se* $r=s=t=0$ *e* $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}=-6\,,\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}=0$ *e* $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}=6$. *A origem é portanto um ponto triplo. A equação complexiva das tangentes é* $-6X^3+$ $+6Y^3=0$ *ou* $(X-Y)(X^2+XY+Y^2)=0$ *e só uma é real* $X=Y$.

1310 — Mudar as variáveis independentes na equação $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ fazendo

$$\left\{\begin{aligned} & 2x=uv \\ & y=2/v\,. \end{aligned}\right.$$

1311 — Calcular a área da superfície cilíndrica $y^2=3x$ limitada pelos planos $z=0\,,\ z=3\,,\ x=0\,,$ $x=4$. R: *A área da superficie cilíndrica* $y=f(x)$ *limitada pelos planos* $x=x_0\,,\ x=x_1\,,\ z=z_0\,,\ z=z_1$ *é* $A=\left|(z_1-z_0)\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx\right|$. *Portanto, para o nosso caso, tem-se sucessivamente*

$$A=3\left|\int_0^4\sqrt{1+3/4x}\,dx\right|=3\left|\int_{\infty}^{\sqrt{19}/4}\frac{t^2\,dt}{(t^2-1)^2}\right|=3\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2-1}+\right.$$

$$\left.+\log\sqrt[4]{\frac{t+1}{t-1}}\,\right]_{\infty}^{\frac{\sqrt{19}}{4}}=\frac{2\sqrt{19}}{3}+\frac{1}{4}\log\frac{35+8\sqrt{19}}{3}\,.$$

1312 — Integrar a equação $y(2px+y)=\sqrt{x}$. R: *Resolvendo a equação em ordem a* p *vem* $p=-\dfrac{y}{2x}+\dfrac{6}{2y\sqrt{x}}$ *que se reconhece como uma equação de Bernoulli. Multiplicando ambos os membros por* $2y$ *obtém-se* $2yp=-\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *e substituindo* y^2 *por* z *e, portanto,* $2yp$ *por* z' *encontra-se a equação linear* $z'=-\dfrac{z}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *cujo integral geral é*

$$z=e^{\int\frac{dx}{x}}\left[\int\frac{e^{-\int\frac{dx}{x}}}{\sqrt{x}}\,dx+c\right]=x\left[\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}+c\right]=$$

$$=x\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}+c\right]=-2\sqrt{x}+cx\,.$$

O integral geral da equação proposta é $y^2=-2\sqrt{x}+cx$.

Soluções dos n.os 1309 a 1312 de A. Sá da Costa.

I. S. T. — CÁLCULO — **2.º Exame de freqüência, 1942**

1313 — Determinar a envolvente duma família de rectas tal que é constante e igual a 3 o comprimento do segmento em cada uma delas intersectado pelos eixos coordenados (rectangulares) R: *A equação da envolvente obtém-se eliminando* p *entre as equações*

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{x}{p}+\frac{y}{\sqrt{9-p^2}}-1=0 \\ & \frac{x}{p^2}-\frac{py}{(9-p^2)^{3/2}}=0\,. \end{aligned}\right.$$

A primeira é a equação geral das rectas nas condições do enunciado e a segunda obteve-se igualando a zero a derivada parcial em ordem a p *do primeiro membro da equação anterior.*

1314 — Calcular o volume limitado pelo plano xy, pelo paraboloide $xy=2z$ e pela superfície cilíndrica $(x^2+y^2)^2=2xy$.

1315 — Integrar a equação

$$(x-x^2)\,y'' + \frac{1}{2}(3-4x)\,y' = y/4$$

sabendo que $y_1 = x^n$ é integral particular. Determinar n. R: *A transformação* $y = y_1 t$ *permite baixar duma unidade a ordem da equação proposta, mantendo-a homogénea. Assim, vem* $u'(2x-2x^2) = u(2x-1)$ *que se integra por separação das variáveis, sendo* $u = t'$ *e* $y_1 = x^{-1/2}$.

1316 — Determinar uma curva tal que a sua ordenada, em cada ponto, é metade da ordenada da sua evoluta, no respectivo centro de curvatura. R: *Tudo se reduz à integração da equação diferencial* $yy'' = 1 + y'^2$ *incompleta em* x *e convertivel, mediante a mudança* $y' = z$, *na equação de 1.ª ordem* $yz' = 1 + z^2$ *de variáveis separáveis.*

Soluções dos n.os 1315 a 1316 de A. Sá da Costa.

F. C. P. — Análise Superior — I.º Exercício de revisão, 1942-43

1317 — Integrar a equação $2zq - pq^2 - 4p = 0$ e determinar a superfície integral que contém a linha: $y=0$ e $z = x^2/2$. R: *Vamos usar o método de Lagrange-Charpit. Do sistema tiramos:* $\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$ *ou* $p = cq$, *donde* $q = \sqrt{\frac{2z-4c}{c}}$ *e* $p = \sqrt{c(2z-4c)}$. *Temos:* $dz = \sqrt{c(2z-4c)}\,dx + \sqrt{\frac{2z-4c}{c}}\,dy$. *Integrando vem o integral completo:* $c(2z-4c) = (cx+y+kc)^2$. *As superficies integrais pedidas são:* a) $y=0$ *e* b) *a que se obtêm eliminando* c *entre:* $c(2z-4c) = (cx+y+2c\sqrt{c-1})^2$ *e*

$$2z-8c = 2(cx+y+2c\sqrt{c-1})\left(x+2\sqrt{c-1}+\frac{c}{\sqrt{c-1}}\right).$$

1318 — Integrar a equação $p^2+q=z$ pelo método de Cauchy, determinando a superfície integral que contém a linha $\begin{cases} y=1 \\ z=x^2. \end{cases}$ R: *Temos:* $\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2p^2+q} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \frac{du}{u}$. *Façamos* $u_0 = 1$. *Temos:* $q = q_0 u$, $p = p_0 u$; $y = y_0 + \log u$, $x = x_0 + 2p(u-1)$ *e* $z = z_0 + p_0^2(u^2-1) + q_0(u-1)$. *Fazendo* $y=u$ *vem* $y_0 = 1$, $x_0 = v$ *e* $z_0 = v^2$. H_0: $\frac{\partial z_0}{\partial v} - p_0\frac{\partial x_0}{\partial v} - q_0\frac{\partial y_0}{\partial v} = 0$ *ou* $2v - p_0 = 0$; $p_0 = 2v$ *e* $q_0 = -3v^2$. *Portanto:* $x = v(4u-3)$, $y = 1 + \log u$, $z = v^2 u(4u-3)$ *ou* $x^2 = z(4-3e^{1-y})$.

1319 — O plano tangente em M duma superfície corta o eixo dos zz num ponto P. $\overline{PM}$ corta o plano xOy em Q. Determinar as superfícies S tais que Q tenha de abscissa a. Determinar a superfície que contém a circunferencia $x^2+y^2=ax$ e $z=a$. R: *Plano tangente:* $Z - z = p(X-x) + q(Y-y)$. *Equações de* PM: $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z-z+px+qy}{px+qy}$.

Coordenadas de Q: $\begin{cases} X = a = \dfrac{-z+px+qy}{px+qy}\,x \\ Y = y_2 = \dfrac{-z+px+qy}{px+qy}\,y. \end{cases}$

Donde a equação $px+qy = -\frac{zx}{a-x}$. *Integrando vem:* $z = (x-a)\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ *e a superficie pedida é:*

$$z = -(x-a)\frac{x^2+y^2}{y^2}.$$

Soluções dos n.os 1317 a 1319 de Jaime Rios de Sousa.

MECÂNICA RACIONAL—FÍSICA MATEMÁTICA

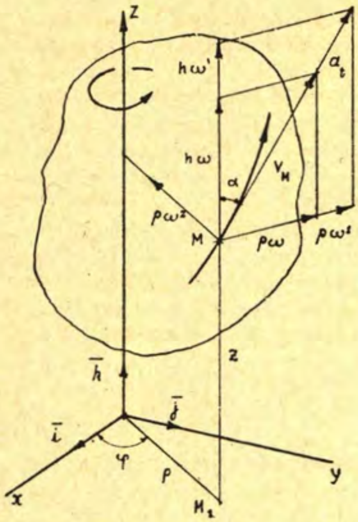
F. C. P. — Mecânica Racional — Exame de freqüência, 2.º sem., I.ª ch., 1941-42

1320 — Um sólido está animado dum movimento helicoidal dextrorsum uniformemente variado em volta dum eixo fixo com respeito ao referencial do movimento. Sabe-se que um dos seus pontos M, à distância de 60 cm do eixo, possue uma velocidade igual a 2 m/s no instante definido por $t=10$ s e que o vector velocidade de M faz com o eixo do movimento um ângulo de 30°. A aceleração de M vale 2 m/s². Determinar no instante considerado: *a)* a velocidade angular do movimento (em voltas p/min.); *b)* a velocidade de escorregamento do sólido ao longo do eixo (em dm/min.); *c)* o passo do movimento (em metros); *d)* o valor da aceleração angular do movimento; *e)* calcular o valor da velocidade dum ponto à distância de 1 metro do eixo no instante definido por $t=20$ s. R: a), b) e c) $\rho = 0{,}60$ m, $v_M^1 = 2$ m/s *e* $t_1 = 10$ s; $\alpha = 30°$;

$$h\omega_1 = v_M^1 \cdot \cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 1{,}73 \text{ m/s}, \quad \rho\omega_1 = v_M^1 \cdot \text{sen } 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ m/s} \ e \ \omega_1 = \frac{1}{0{,}6} \text{ rad./s}, \textit{ donde:}$$

velocidade de escorregamento: 1038 dm/min; *velo-*

cidade angular: $\frac{50}{\pi} \approx 15{,}9$ v/min. ; *passo do movimento:* 6,5 m; d) $a_M^2 = \rho^2\omega^4 + h^2\omega'^2 + \rho^2\omega'^2 \to 4 = \frac{1}{0{,}6^2} + 0{,}6^2 \cdot \omega'^2 \cdot 2^2$, *donde* $\omega' = \pm \frac{10}{36 \times 2}\sqrt{44} = \pm 0{,}92$ rad./s² *e êste valor de* ω' *é independente do tempo, visto o movimento ser uniformemente variado. Tomaremos* $\bar{\omega}' = 0{,}92 \cdot \bar{k}$; e) $\omega = \omega' t + \omega_0 = 0{,}92 \cdot t + \omega_0$. *Para* $t = 10$ s , $\omega_1 = 1{,}66$ rad./s , *logo* $1{,}66 = 0{,}92 \times 10 + \omega_0$, *donde* $\omega_0 = -7{,}54$ *e por conseguinte* $\omega = 0{,}92\,t - 7{,}54$. *Para* $t = 20$ *vem* $\omega_2 = 10{,}86$ *e* $v_M = \sqrt{\rho^2 + h^2} \cdot \omega = \sqrt{1 + 1{,}038^2} \times 10{,}86$, *donde* $v_M = 15{,}64$ m/s .



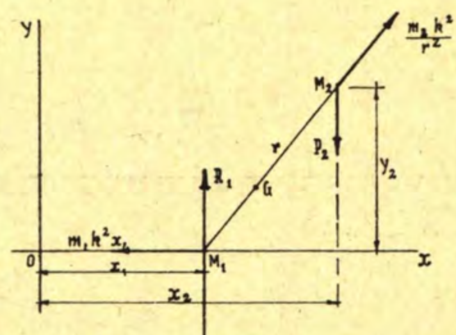
1321 — Um sistema é constituído por dois pontos materiais pesados M_1 e M_2 de massas respectivamente iguais a m_1 e m_2. O ponto M_1 é obrigado a uma horizontal Ox perfeitamente polida (O fixo) e o ponto M_2 move-se livremente no plano vertical que contém Ox. Além dos pesos, actuam sôbre os pontos mais as seguintes fôrças: sôbre M_1 uma atracção proporcional à sua distância x a O (factor de proporcionalidade $m_1 k^2$), sôbre M_2 uma fôrça repulsiva proveniente de M_1 inversamente proporcional ao quadrado da distância de M_1 a M_2 (factor de proporc. $m_2 k^2$). Notar que se supõe M_1 *não* actuado por M_2. *a)* parametrar o sistema e classificar as fôrças que intervêm no estudo do seu movimento de dois modos diferentes; *b)* exprimir em função dos parâmetros e das suas primeiras derivadas: a resultante cinética, a fôrça viva e o momento cinético do sistema em M_1 (no movim. absoluto); *c)* id., id., do momento cinético em O no movimento relativo em volta de G; *d)* escrever as equações independentes das reacções que permitem estudar o movimento do sistema; *e)* escrever as equações que completamente determinam as fôrças de ligação. R: a) *Parâmetros:* x_1, x_2, y_2. *Classificação das fôrças — Exteriores:* $p_1, p_2, m_1 k^2 x_1, \frac{m_2 k^2}{r^2}, R_1$; *Interiores: não há; Dadas:* $p_1, p_2, m_1 k^2 x_1^2, \frac{m_2 k^2}{r^2}$; *Ligação:* R_1; b) $\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2$ *donde* $\begin{cases} Q_x = m_1 x_1' + m_2 x_2' \\ Q_y = m_2 y_2', \end{cases}$

$2T = m_1 x_1'^2 + m_2 (x_2'^2 + y_2'^2)$,

$$\bar{K}_{M_1} = \overline{M_2 - M_1} \wedge \overline{m_2 v_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 & 0 \\ m_2 x_2' & m_2 y_2' & 0 \end{vmatrix} = $$

$$= m_2 [(x_2 - x_1) y_2' - y_2 x_2'] \cdot \bar{k};$$

c) *No movimento relativo em volta de* G *o momento cinético é independente do polo (quantidade de movimento relativa nula) e portanto* $\bar{K}_O^r = \bar{K}_G^r = \bar{K}_G$.



$\bar{K}_G = m_2 [(x_2 - x_1) y_2' - y_2 x_2'] \cdot \bar{k} + Q_x \eta - Q_y (\xi - x_1)$ *onde* $\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$, $\eta = \frac{m_2 y_2}{m_1 + m_2}$; d) $m_1 x_1'' = -m_1 k^2 x_1$, $m_2 x_2'' = \frac{m_2 k^2}{r^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{r}$, $m_2 y_2'' = -p_2 + \frac{m_2 k^2}{r^2} \cdot \frac{y_2}{r}$;

e) $m_1 y_1'' = 0 = R_1 - p_1 \to R_1 = p_1$.

Soluções dos n.os 1320 e 1321 de R. Sarmento de Beires.

I. S. T. — Mecânica Racional — **2.º exame de freqüência, 1942**

1322 — Um ponto material P é obrigado a mover-se, sem atrito, sôbre um elipsoide de revolução, e atraído, pelos dois focos F e F', com fôrças respectivamente proporcionais a $\overline{PF}^2$ e $\overline{PF'}^3$. Achar as posições de equilíbrio.

1323 — Um ponto material livre descreve uma parábola, sob a acção duma fôrça central, sendo o centro de fôrças o ponto de intersecção da directriz com o eixo da parábola. Achar a lei de fôrças.

1324 — Um ponto move-se, com movimento uniforme, sôbre uma curva plana fixa. ¿Qual deve ser a curva para que a projecção da aceleração, sôbre uma recta fixa do plano da curva, seja constante?

1325 — Um fio pesado homogéneo está em equilíbrio, suspenso pelas suas extremidades em dois pontos A e B, situados à mesma altura. Conhecido o comprimento do fio, ¿qual deve ser a distância $\overline{AB}$ para que a tensão seja mínima em A e B?

F. C. P. — Física Matemática — **Exame final, Julho de 1942**

1326 — Seja $\cdots \lambda_{-n} < \cdots < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 \cdots < \lambda_n \cdots$ uma sucessão tal que $R_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} I_n$, $I_n = [\lambda_n \leq \lambda \leq \lambda_{n+1}]$ e representemos por $E(\lambda)$ uma decomposição da unidade.

Qual é o domínio do operador $B = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda'_n E(I_n)$ em quê $\{\lambda'_n\}$ é uma sucessão de números quaisquer, reais ou complexos? Será indiferente a ordem pela qual se escrevem os termos $\lambda'_n E(I_n)$?

Que operador se obtém no caso particular $\lambda'_n = 1$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$?

Determinado êste operador, calcular os valores próprios e os espaços próprios de B.

Haverá uma base de vectores próprios?

B pode representar uma grandeza física?

Caracterizá-la, dando o espectro, a probabilidade de um valor do intervalo J $\lambda' < \lambda \leq \lambda''$.

A circunstância de $\{\lambda'_n\}$ ser uma sucessão discreta ou não, terá alguma influência sôbre o conjunto dos resultados possíveis de uma medida de B (o espectro da grandeza B)?

1327 — Seja A uma grandeza física e $E(\lambda)$ o seu operador de projecção.

Se fizermos $U(I) = \| E(I)\varphi \|^2$, a cada conjunto $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}_1$ corresponde uma medida exterior $\overset{*}{U}(\mathfrak{M})$:

Nestas condições, discutir a seguinte definição.

$\overset{*}{U}(\mathfrak{M})$ é a probabilidade de que, ao medir A, no estado físico φ, se encontre como resultado um ponto do conjunto $\mathfrak{M}$ mensurável-$\overset{*}{U}$.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — Cálculo das Probabilidades — **13-2-1942**

1328 — Tiram-se 7 cartas de um baralho de 52. Calcular a probabilidade de saída de 4 figuras e do mesmo naipe (o ás é considerado figura).

1329 — São dadas 4 urnas com as composições seguintes: U_1, 2 esferas brancas e 3 esferas pretas; U_2, 2 esf. br. e 8 esf. pr.; U_3, 6 esf. br. e 4 esf. pr.; e U_4, 4 esf. br. e 1 esf. pr. Extraem-se 4 esferas, uma de cada urna. Pede-se a probabilidade de que pelo menos 2 das esferas extraídas sejam brancas. R: *Seja* p_i *a probabilidade de saída de uma esfera branca da urna* U_i *e* $q_i = 1 - p_i$ *a probabilidade relativa à esfera preta. Tem-se:* $p_1 = 2/5$, $p_2 = 1/5$, $p_3 = 3/5$ *e* $p_4 = 4/5$. *Designando por* P_k $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ *a probabilidade de saida de* k *esferas brancas na extracção indicada, a probabilidade pedida* P *é:* $P = P_2 + P_3 + P_4 = 1 - P_0 - P_1$, *atendendo a que* $\sum_{k=0}^{4} P_k = 1$. *Como é sabido,* P_k *é o coeficiente de* t^k *no produto* $\Pi(p_i t + q_i)$. *Temos pois:* $P_0 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 = 24/5^4$, $P_1 = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 154/5^4$, *e portanto* $P = 447/625 \sim 0{,}715$.

Solução de Manuel Zaluar

F. C. L. — Cálculo das Probabilidades — **2.º exame de freqüência, Maio, 1942**

Enuncie o paradoxo de Bertrand e explique porque há várias soluções.

Noção de pêso das observações.

Explique como no problema de compensação de observações indirectas pode reduzir as equações de observações não lineares à forma linear.

1330 — Calcule o valor médio da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sendo $\frac{dx\,dy}{k}$ a probabilidade elementar e sendo o domínio de definição de $f(x, y)$ limitado por $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 4$.

1331 — Dum ângulo α obtiveram-se as seguintes determinações:

$$30^\circ\,20' \pm 0{,}2'\,,\quad 30^\circ\,22' \pm 0{,}4'\,,\quad 30^\circ\,19' \pm 0{,}2'\,.$$

Calcule o valor mais provável e um aferidor.

F. C. P. — Cálculo das Probabilidades — 2.º exame de freqüência, 1942

1332 — Três séries de medições de uma grandeza conduziram aos seguintes resultados (l_i): $120{,}43 \pm 0{,}15$, $120{,}38 \pm 0{,}20$ e $120{,}50 \pm 0{,}20$. Calcular a média pesada e o seu êrro mediano. R: *Pondo* $l_i = 120{,}30 + \frac{z_i}{100}$ *teremos* $z_1 = 13$, $z_2 = 8$ *e* $z_3 = 20$. *Tomando iguais à unidade os pesos das duas últimas determinações* $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, *virá* $p_1 = \frac{0{,}20^2}{0{,}15^2} = 1{,}8$.

1333 — Medições de dois lados e do ângulo compreendido dum triângulo plano conduziram às médias $a = 3{,}000 \pm 0{,}004$, $b = 4{,}000 \pm 0{,}005$ *e* $C = 90^\circ \pm 10''$. Calcular o valor mais provável do lado c e o seu êrro. R: *De* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ *resulta para valor mais aproximado* $c_0 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. *O desenvolvimento linear aproximado* $c - c_0 = \left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)_0 (a - a_0) + \left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)_0 (b - b_0) + \left(\frac{\partial c}{\partial C}\right) (C - C_0) = \frac{3}{5}(a - a_0) + \frac{4}{5}(b - b_0) + \frac{12}{5}(C - C_0)$ *conduz ao êrro mediano (medições independentes de* a, b *e* C)

$$m_c^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 m_C^2\,,$$

sendo $m_a = 0{,}004$, $m_b = 0{,}005$ *e* $m_C \approx \operatorname{sen} 10''$.

1334 — Medições das distâncias de três pontos colineares A, B e C conduziram aos valores $\overline{AB} = 1504{,}12$, $\overline{BC} = 948{,}15$ e $\overline{AC} = 2452{,}20$. Determinar os valores mais prováveis dessas distâncias e os seus erros, *a)* supondo igualmente precisos os valores dados; *b)* atribuindo às três medições de distâncias pesos a elas inversamente proporcionais. R: *Pondo*

$$\overline{AB} = 1504{,}12 + \frac{l_1}{100}\,,\quad \overline{BC} = 948{,}15 + \frac{l_2}{100} \quad e$$

$$\overline{AC} = 2452{,}20 - \frac{l_3}{100}\,,$$

os resultados das medições são $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ *e a equação de condição* $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ *escreve-se* $l_1 + l_2 + l_3 + 7 = 0$. *O problema poderá ser resolvido por compensação.*

Soluções dos n.ºs 1332 a 1334 de Gonçalves Miranda.

PROBLEMAS

Secção a cargo de A. Ferreira de Macedo e Mário de Alenquer

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Matemáticas Elementares

1335 — Seja $\overline{OA_0}$ um segmento rectilíneo de comprimento igual ao dôbro do diâmetro de uma circunferência dada. Marque-se, a partir de $\overline{OA_0}$, o ângulo $A_0\hat{O}A_1 = 45^\circ$, e outro $O\hat{A}_0A_1 = 90^\circ$; a partir de $\overline{OA_1}$, o ângulo $A_1\hat{O}A_2 = \frac{1}{2}\cdot 45^\circ$, e outro $O\hat{A}_1A_2 = 90^\circ$; a partir de $\overline{OA_2}$, o ângulo $A_2\hat{O}A_3 = \frac{1}{2^2}\cdot 45^\circ$, e outro $O\hat{A}_2A_3 = 90^\circ$; e assim sucessivamente, de modo que seja sempre $A_{n-1}\hat{O}A_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot 45^\circ$ e $O\hat{A}_{n-1}A_n = 90^\circ$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{OA_n}$, e verificar que é perpendicular a $\overline{OA_0}$ e igual ao perímetro da circunferência dada.

1336 — Mostrar que, sendo $2^x \cdot 3^y = 3^x \cdot 4^y = 6$, é também $x^2 - 2y^2 = 2x - 3y$.

1337 — Demonstrar a identidade
$$8 \operatorname{sen} 10^\circ \cdot \operatorname{sen} 50^\circ \cdot \operatorname{sen} 70^\circ = 1 .$$

1338 — Resolver a equação
$$\operatorname{sen} 5x \cdot \cos 3x = \operatorname{sen} 9x \cdot \cos 7x .$$

1339 — Três números x, y e z estão em progressão aritmética, estando $x+y$, y e $y+z$ em progressão geométrica. Calcular êsses números sabendo ainda que a soma dos quadrados dos extremos x e z é 8. Calcular as razões das duas progressões.

Problemas propostos por A. A. Ferreira de Macedo.

1340 — São dadas as circunferências $C_1, C_2 \cdots C_n$ tais que: *a)* os centros estão alinhados; *b)* a circunferência C_i $(i=2, \cdots, n-1)$ é tangente à circunferência C_{i-1} e à circunferência C_{i+1}; *c)* as circunferências são tangentes às rectas a e b. Conhecendo o ângulo 2α das rectas a e b e o raio R_1 de C_1, calcular a soma dos raios das n circunferências. [Considerar os dois casos: $R_j < R_{j+1}$ e $R_j > R_{j+1}$, $(j=1, \cdots, n-1)$].

1341 — Calcular o valor da soma
$$S = 1!\,1 + 2!\,2 + \cdots + n!\,n .$$

1342 — Desenhar três circunferências de raios proporcionais a h, k e l, de modo que cada circunferência seja tangente às outras duas e a dois lados de um triângulo de que é dada a área, S.

Problemas n.os 1340 a 1342 propostos por José Morgado (Pôrto).

1343 — Consideremos um diedro de rectilíneo 2α e um plano que secciona o diedro perpendicularmente ao plano bissector. Sendo β o ângulo formado pela aresta e por aquêle plano, determinar, em função de α e β, o ângulo de secção do diedro.

Problema proposto por Álvaro Simões (Sangalhos).

SOLUÇÕES RECEBIDAS

Matemáticas Elementares

1082 — Mostrar que $1000!$, escrito no sistema decimal, termina em 249 zeros. R: *O número de zeros dum factorial é determinado pelo número de factores* 2 *e* 5 *que a sua decomposição comporta; mas como o factor* 2 *entra em* $1000!$ *mais vezes que o factor* 5, *basta ver o número de vezes que êste último factor entra para se saber o número de* zeros *com que termina; e assim em* $1000!$ *há:*

$$\begin{array}{r l} 200 & \text{——} \ \dot{5} \\ 40 & \text{——} \ \dot{5}^2 \\ 8 & \text{——} \ \dot{5}^3 \\ 1 & \text{——} \ \dot{5}^4 = 625 \\ \hline 249 & \end{array}$$

$\therefore$ *O factorial* 1000 *termina em* 249 *zeros.*

Solução de J. S. Faria de Abreu (Penafiel).

1180 — Calcular os coeficientes a, b e c, na identidade: $a + b\cos 2x + c\cos 4x = \operatorname{sen}^4 x$. R: *Tratando-se duma identidade, basta atribuir a* x *três valores distintos que não difiram de* $2k\pi$ (k *inteiro*), *por exemplo* $x=0$, $\pi/4$, $\pi/2$, *para obter um sistema, neste caso* $a+b+c=0$, $a-c=1/4$, $a-b+c=1$, *que determina os coeficientes* $a=3/8$, $b=-1/2$, $c=1/8$.

Solução de José Morgado.
Enviaram também soluções exactas: Álvaro Simões (Sangalhos), A. da Fonseca Faia (Lisboa), Rui Verdial (Pôrto) e J. S. Faria de Abreu (Penafiel).

1184 — Mostrar que, se a, b e c são as medidas dos 3 lados de um triângulo, por ordem crescente de grandeza, se verifica a desigualdade:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > (a^2 + bc)(a+b+c) .$$

R: *A desigualdade pode apresentar-se da seguinte maneira:* $a(a^2+bc) + b(b^2+ac) + c(c^2+ab) > a(a^2+bc) + b(a^2+bc) + c(a^2+bc)$ *ou* $b(b^2+ac) + c(c^2+ab) > b(a^2+bc) + c(a^2+bc)$. *De* $a+b>c$, $a+c>b$, $b>a$ *e* $c>a$ *resulta que é* $b^2+ac > a^2+bc$ *e* $c^2+ab > a^2+bc$ *o que demonstra a desigualdade proposta.*

Solução de M. C. Guerra dos Santos (Lisboa).
Enviou também solução exacta: José Morgado.

1185 — Sendo a área da esfera circunscrita a um tronco de cone circular de bases paralelas seis vezes maior do que a área da esfera inscrita no mesmo tronco, calcular a relação entre os raios das bases do tronco. R: *Sejam* R_c *e* R_i *os raios das esferas circunscrita e inscrita,* R *e* r *os raios das bases maior e menor do tronco. Por hipótese é* $4\pi R_c^2 = 24\pi R_i^2$ *logo será* $R_c^2 = 6R_i^2$. *A geratriz do cone é* $R+r$ *e tem-se* $4R_i^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$, *donde* $R_i^2 = Rr$. *Se fôr* d *a distância do centro da esfera circunscrita ao plano da base menor do tronco, tem-se* $d^2 + r^2 = R_c^2$ *e* $(2R_i - d)^2 + R^2 = R_c^2$ *donde* $d = (4R_i^2 - r^2 + R^2)/4R_i$ *ou* $d = (4Rr - r^2 + R^2)/4\sqrt{Rr}$ *e* $R_c^2 = r^2 + (4Rr - r^2 + R^2)^2/16Rr$. *Subs-*

tituindo em $R_c^2=6R_i^2$ *vem, finalmente,* $r^2+(4Rr-r^2+R^2)^2/16Rr=6Rr$.

Solução de Álvaro Simões (Sangalhos).
Enviou também solução exacta: José Morgado.

1186 — Num quadrilátero $ABCD$ inscrito numa circunferência de raio $r=5$ os lados medem respectivamente $\overline{AB}=5\sqrt{3}$, $\overline{BC}=5$ e $\overline{CD}=8$. ¿Qual é o comprimento da diagonal $\overline{BD}$? R: *Se fôr* O *o centro da circunferência, tem-se*

$$\operatorname{sen}\frac{B\hat{O}C}{2}=\frac{\overline{BC}}{2r}=\frac{1}{2} \quad e \quad \operatorname{sen}\frac{C\hat{O}D}{2}=\frac{\overline{CD}}{2r}=\frac{4}{5} \quad donde$$

$$\overline{BD}=2r\left|\operatorname{sen}\frac{B\hat{O}D}{2}\right|=10\left|\operatorname{sen}\left(\frac{B\hat{O}C}{2}+\frac{C\hat{O}D}{2}\right)\right|=$$

$$=10\left|\operatorname{sen}\frac{B\hat{O}C}{2}\cos\frac{C\hat{O}D}{2}+\cos\frac{B\hat{O}C}{2}\operatorname{sen}\frac{C\hat{O}D}{2}\right|=$$

$$=10(3/10+2\sqrt{3}/5)=3+4\sqrt{3}.$$

Solução de A. Reis (Lisboa).
Enviaram também soluções exactas: A. da Fonseca Faia (Lisboa), José Morgado, Rui Verdial (Pôrto), Álvaro Simões (Sangalhos), J. S. Faria Abreu (Penafiel).

1187 — Consideremos num bilhar circular uma bola num ponto A. ¿Em que direcção se deve lançar a bola para que torne a passar pelo ponto A após duas reflexões sucessivas? R: *Como o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão e as normais a circunferência passam pelo centro, a bola no seu movimento descreve um triângulo isósceles de vértice* A. *Designando por* d *a distância de* A *ao centro, por* α *o ângulo da direcção pedida com o diâmetro que passa por* A *e por* β *o ângulo de incidência, tem-se* $\frac{R}{d}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{1-2\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}\beta}$ *por ser* $\alpha+2\beta=\pi/2$. *Portanto é*

$$\operatorname{sen}\beta=(-R\pm\sqrt{R^2+8d^2})/4d$$

$$e \qquad \alpha=\pi/2-2\operatorname{arc\,sen}(-R\pm\sqrt{R^2+8d^2})/4d.$$

Solução de José Morgado.

1248 — Determinar o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos que têm um lado dado e o vértice oposto sôbre uma recta dada. R: *Seja* M *o ponto médio do lado dado e* P *um ponto da recta* r *dada. Marque-se sôbre* MP *o ponto* Q *tal que* $\overline{MQ}/\overline{MP}=1/3$. *O lugar procurado é a recta* $s/\!/r$ *e passando por* Q. *Demonstração:* Q *é o centro de gravidade do triângulo com a base dada e o vértice em* P. *Por outro lado, seja* C *um ponto qualquer de* r, *distinto de* P. *Designe-se por* G *a intersecção de* s *com* CM. *De* $\overset{\triangle}{MPC}\sim\overset{\triangle}{MQG}$, *resulta* $\overline{MG}/\overline{MC}=\overline{MQ}/\overline{MP}=1/3$. *Logo,* G *é o c. de g. do triângulo com a base dada e o vértice em* C.

Solução de PEME.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Secção a cargo de J. da Silva Paulo

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

12—LEROY, E. — **Cours d'Algèbre et d'Analyse.** Mathématiques Spéciales. Élèves ingénieurs. Étudiants des Facultés. Agrégation. Essai d'enseignement concret et intuitif. Tome II, Analyse. 1 vol. in-8.º de X-352 pags. preço 70 frs.; Vuibert, Paris, 1940.

O Tomo I, (Álgebra) desta obra apareceu em 1935. No presente tomo (Análise) a maneira concreta e intuitiva do autor parece ter-se complicado. As fórmulas carregadas de índices são muito numerosas. Pelo contrário os gráficos continuam a ser excelentes.

A obra completa é comparável a um Curso de Matemáticas Gerais, e que tem esta espécie de rigor intuitivo de M. Leroy mas sente-se ainda a influência dos programas, mais que o espírito liberal de um Paul Appell.

(De A. Buhl (Toulouse) em «L'Enseignement Mathématique», vol. 38 — Trad. J. S. P.)

13 — AGOSTINI, Amedo — **Lezioni di Analisi Matematica** — R. Accademia Navale, 1936, 8+336 págs.

Êste livro representa um excelente curso de introdução à análise, que tem sido dado desde há alguns anos na Academia Naval Italiana. É seu fim, em primeiro lugar, preparar os estudantes para as matemáticas aplicadas. O modo de tratar as questões é claro e rigoroso, como é para desejar dum livro de tal carácter, sendo os exemplos bem escolhidos e os problemas instrutivos. As referências históricas neste trabalho, são, contudo, freqüentemente desvirtuadas. Assim, na pág. 323, ao tratar da história da resolução algébrica das equações, o autor fala de Dal Ferro, Ferrari, Rufini, mas não se refere a Abel e Galois. Além disso, os nomes de Newton e Leibniz aparecem ligados com vários pormenores, mas o seu papel geral no desenvolvimento do cálculo não é indicado, enquanto Cavalieri e Torricelli recebem bastos elogios a êsse respeito.

(De W. Seidel, em «The American Mathematical Monthly», vol. 45 — Trad. J. S. P.)

14 — PLUMMER, H. C. — **Probability and Frequence** — Vol. de 277 págs. — Macmillan and C.º Limited, Londres.

O livro «Probabilidade e Freqüência», do professor H. C. Plummer é uma exposição clara e elegante de alguns dos mais importantes capítulos das Probabilidades e da Estatística. Os conceitos apresentados são introduzidos de maneira simples, mas sob forma rigorosa, e esclarecidos por meio de problemas, alguns dos quais clássicos mas que ao aluno importa conhecer.

Supõe o autor que o leitor possue conhecimentos de análise combinatória e infinitesimal que são completados no livro (fórmula de Stirling, funções de Euler, etc.). Os assuntos tratados são os seguintes: probabilidades descontínuas e finitas; princípios e teoremas fundamentais da teoria; problema das provas repetidas e probabilidades *à posteriori*; probabilidades contínuas, aplicações à geometria; lei normal duma distribuïção linear; teoria dos erros e mínimos quadrados; distribuïções estatísticas; estudo das leis mais gerais que a lei normal imposta pela estatística; método dos momentos; correlação, breve resumo. O volume termina com algumas tábuas numéricas.

Os que se dedicarem ao estudo da estatística e os alunos dos cursos superiores que estudam a física e a biologia lerão êste livro com proveito.

Manuel Zaluar

15 — FERIGNAC, P. ET MORICE, E. — **Pour comprendre le Calcul des Probabilités** — (Bibliothèque d'Education Scientifique) — Préface de l'Abbé Moreux — 1 vol. in-16, 258 pág. — Librairie Octave Doin, Paris, 1936.

O livrinho de Ferignac e Morice, de agradável leitura, e utilizando conhecimentos elementares de matemática, está ao alcance de todo o aluno que fêz o curso liceal. É uma iniciação às leis principais do cálculo das probabilidades. Os autores tiveram o cuidado de apresentar com muita clareza os diferentes assuntos, tornando-os ainda mais acessíveis por meio de bastantes exercícios de aplicação, gráficos e tábuas numéricas. Só é tratada a teoria clássica. Consagra duas lições à importante lei de Laplace-Gauss. As oito últimas informam das aplicações aos jogos de azar, a alguns problemas financeiros, aos seguros de vida, ao tiro de artilharia e à teoria dos erros. Conseguiram os autores dar uma vista de conjunto sôbre a grande importância que o cálculo das probabilidades tomou, hoje, em todos os domínios da ciência. Na conclusão, não se esqueceram de citar muito ràpidamente as principais teorias físicas que, nos nossos dias, tiveram novo desenvolvimento graças à aplicação das leis estatísticas.

Manuel Zaluar

16 — SAN GIL, RAMON DE PEDRO Y — **Resumen de Matemáticas Elementales** — 460 págs., 24 pesetas. Libreria General, Zaragoza, 1942.

Êste livro, destinado aos que conhecem já as matemáticas elementares, está escrito com um carácter essencialmente prático, pelo que é de extraordinário valor como guia para o professor e como obra de estudo e aperfeiçoamento para o aluno.

. . . .

A obra está dividida em duas partes principais. A primeira trata a Aritmética e a Geometria. Na aritmética estuda o autor, com uma clareza verdadeiramente notável o sistema métrico decimal, divisão da circunferência, cálculo de fracções concretas, teoria da divisibilidade, máximo divisor comum, menor múltiplo comum, números primos, etc. Na geometria expõe um resumo das propriedades mais importantes das figuras geométricas planas e áreas das figuras poligonais. Esta primeira parte termina com uma interessantíssima secção sôbre problemas e exercícios. A segunda parte compõe-se de uma continuação da Aritmética e outra da Geometria, assim como do estudo da Álgebra, Geometria no espaço, Trigonometria e umas noções de Geometria Analítica. No fim desta segunda parte inclue-se outra colecção de exercícios e problemas escrupulosamente seleccionados.

. . . .

Dificilmente se encontram outras obras que, consagradas ao ensino da matemática elementar, reünam as condições desta, que soube aliar a simplicidade da exposição ao mais puro rigor científico.

(De G. M. G., em «Euclides», n.º 21—Trad. J. S. P.)

17 — GALLEGO-DIAZ, JOSÉ — **Formulario de Matemáticas Generales**, Ediciones Rialto, Madrid, 1943 — 256 págs.

Acaba de aparecer em língua espanhola um útil formulário de Matemáticas Gerais, de que é autor o Prof. J. Gallego-Diaz, e para que escreveu um pequeno prefácio o Prof. Barinaga, da Universidade Central de Madrid. Abre com um conjunto de tábuas numéricas usuais, quadrados, cubos, raízes quadradas e cúbicas, inversos, logaritmos vulgares, perímetros de circunferências e áreas de círculos; seguem-se tabelas (a 4 decimais) de valores das funções seno e coseno hiperbólicos e seus logaritmos na base 10 (mais adiante a pág. 110 e seguintes encontra-se fórmulas importantes relativas a estas mesmas funções), tábuas dos valores das funções circulares (em grados, valores equidistantes de 10`), uma pequena tabela de valores da função Γ de Euler, etc. Seguem-se detalhadas copilações de definições, fórmulas e regras de cálculo de Trigonometria Esférica e suas Aplicações (págs. 39 a 78), das principais propriedades das equações algébricas e métodos de cálculo das suas raízes. Mais adiante encontram-se tábuas de derivadas e diferenciais dos tipos usuais de funções, algumas fórmulas importantes e aplicações de Cálculo Diferencial das funções reais de variáveis reais, tábuas de primitivas, etc. Não é esquecido também o Cálculo das Probabilidades e a Teoria dos Erros que ocupa uma parte dêste formulário, o que justifica bem a crescente utilização dêste ramo da Matemática.

Vêm depois fórmulas de álgebra e análise vectoriais.

Termina pela Geometria Analítica e Infinitesimal com uma detalhada copilação de fórmulas e equações de lugares geométricos em vários sistemas de coordenadas.

Têm agora os nossos estudiosos e os alunos dos cursos superiores um auxiliar precioso em espanhol a juntar a alguns bons formulários que comummente utilizavam em línguas francesa e italiana.

Manuel Zaluar

18 — COURANT, Richard and ROBBINS, Herbert. — **What is Mathematics?**, Oxford University Press. New-York. 1941-XIX+521 págs.

Trata-se duma contribuïção muito importante à literatura de educação matemática. Deve ser lida por todo o professor de matemática do ensino secundário que deseje ter uma base sólida para o seu trabalho pedagógico nas escolas.

Depois de uma interessante introdução, os autores apresentam 8 capítulos e um apêndice. Alguns dos capítulos têm suplementos e apêndices.

A ordem dos principais capítulos é a seguinte:

1 — Números naturais.
2 — O sistema de números.
3 — Construções geométricas. A Álgebra dos corpos de números.
4 — Geometria Projectiva. Axiomáticas, Geometrias não-euclideanas.
5 — Topologia.
6 — Funções e limites.
7 — Máximos e mínimos.
8 — O cálculo.

O livro é escrito duma forma atraente, bem ilustrado e contém bem escolhida matéria para os que desejam conhecer um pouco mais do que são obrigados a ensinar aos seus alunos. Escrita muito claramente a obra é de fácil leitura para os professores de matemática do ensino secundário.

(De W. D. R., em «The Mathematics Teacher», vol. XXV, n.º 4 — Trad. M. Z.).

19 — Publicações do Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Pôrto.

O Centro de Estudos de Matemática, criado pelo Instituto para a Alta Cultura, na Universidade do Pôrto e dirigido pelo Professor Ruy Luís Gomes está publicando parte dos cursos aí realizados. Trata-se de uma louvável iniciativa no nosso meio vindo beneficiar a massa dos estudiosos que não pode de perto seguir as actividades do Centro que mais lhe interessam.

Tinham já aparecido três números das Publicações da autoria de Almeida Costa sôbre grupos, grupos abelianos, anéis e ideais. Pena é que o Centro não tivesse previsto o interêsse do público por estes assuntos e que a tiragem dos «Elementos da Teoria dos Grupos» tivesse sido tão pequena que a edição já se encontre esgotada. Tratando-se justamente do mais acessível dos três trabalhos referidos, e do que prepara a leitura dos outros dois, esperamos que o C. E. M. P. tenha meios que lhe permitam uma rápida reedição. A Álgebra Moderna adquire dia a dia maior importância, que entre nós é já reconhecida, como o atestam as referidas publicações e a actividade, em parte noticiada pela «Gazeta de Matemática», do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa em anos anteriores. Em breve, estamos certos, elementos de Álgebra Moderna farão parte dos programas pelo menos das cadeiras especiais da licenciatura em Ciências Matemáticas.

Acaba de aparecer mais uma publicação. É autor Manuel Gonçalves Miranda e intitula-se Cálculo Tensorial. Trata-se de um pequeno livro de 54 páginas. Uma nota inicial esclarece: «Êste trabalho constitui o que há de essencial num curso promovido pelo Centro de Estudos de Matemática anexo à Faculdade de Ciências do Pôrto». Cremos que houve como propósito habilitar convenientemente o público interessado em seguir certos cursos que fazem parte do plano de trabalhos do Centro no corrente ano, como os dos Professores Guido Beck e A. de Mira Fernandes.

Não se trata, evidentemente, de uma obra de iniciação e a leitura é proveitosa sobretudo para os que já lidaram com êste potente instrumento de cálculo ao estudarem alguns capítulos de Geometria Diferencial ou de Física Matemática.

Estão anunciados para breve mais dois números das publicações do C. E. M. P.:

«Sur la possibilité d'une Cinématique générale» de Guido Beck, e o curso que António Monteiro realizou no Centro em fins de 1942: «Introdução ao Estudo da Noção de Função Contínua», de que A. Pereira Gomes está fazendo a redacção e de que já informou os leitores da «Gazeta de Matemática», no primeiro número dêste ano.

Manuel Zaluar

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Boletin Matematico — (Buenos Aires). Revista argentina de Matemática. — Ano XV, n.os 8-10.

Cálculo Tensorial — Manuel Gonçalves Miranda — Publicação n.º 2 do Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Pôrto, 1943.

Euclides — (Madrid). Revista de Ciências Exactas, Fisico-Quimicas y Naturales. Ano III (1943), n.os 23 e 24.

Formulario de Matemáticas Generales — José Gallego-Diaz — Ediciones Rialto, Madrid, 1943.

Gazeta de Filosofia — Ano I, n.º 1, Janeiro, 1943.

Portugaliae Mathematica — Vol. 3 (1942), Fasc. 4 — J. Vicente Gonçalves. *Sur une formule de récurrence* — P. de Varennes e Mendonça. *Orthogonality and analysis of variance* — J. Vicente Gonçalves. *Contours de Jordan et intégrale de Cauchy* — J. Albuquerque. *La notion de mesure de carathéodory.*

Sôbre os Grupos Abelianos — Almeida Costa — Publicação n.º 4 do Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Pôrto, 1942.

Seguros — Ano V, n.º 26, Fevereiro de 1943, Lisboa e Pôrto.

Técnica — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T., n.º 134 (Janeiro, 1943), n.º 135 (Fevereiro, 1943).

A situação financeira da «Gazeta de Matemática»

CONTA DO N.º 13 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Receita

Receita da venda avulso e por assinatura de 800 números	3.150$00
Existência de 288 números ao preço de custo	684$40
27-II-1943, *Deficit*	521$20
	4.355$60

Despesa

Composição, impressão, papel e brochura	3.857$00
Sua quota parte nas despezas gerais realizadas até 27 de Fevereiro de 1943	498$60
	4.355$60

A. S. C. e O. M. R.

A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

publicará em 1943 cinco números no dia 15 de cada um dos meses seguintes:
Janeiro, Março, Maio, Julho, Novembro

Cada número terá um mínimo de 32 páginas e o preço de Esc. 5$00

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exame de freqüência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuïção normal dêstes pontos, pelos diferentes números da *Gazeta de Matemática* é a seguinte:

Exames de aptidão — N.os de Março, Maio e Julho.
1.º exame de freqüência — N.os de Novembro e Janeiro.
2.º exame de freqüência — N.os de Março e Maio.
Exames finais — N.os de Maio e Julho.

Cada um dêstes números poderá publicar e publicará, em geral, outros pontos além dos indicados.

A *Gazeta de Matemática* não é um mero arquivo de pontos, mas um jornal de cultura matemática.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A Administração da *Gazeta de Matemática* aceita assinaturas anuais de cinco números, ao preço de Esc. 20$00, para o que basta dar a indicação do nome, morada, local da cobrança e do número em que deve ter início. A assinatura será renovada, automàticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário.

Para simplificar o trabalho da cobrança, tôdas as assinaturas serão acertadas de modo tal que passem a ter início com o número de Janeiro de cada ano, pelo que a primeira cobrança das assinaturas, com início em qualquer outro número, será de Esc. 4$00, Esc. 8$00, Esc. 12$00 e Esc. 16$00, correspondendo a 1, 2, 3 ou 4 números.

NÚMEROS ATRAZADOS

Encontram-se completamente esgotados os N.os 1, 2, 5, 9 e 10. Os restantes são ainda vendidos avulsamente ao preço de capa: N.º 3 Esc. 6$50, N.º 4 Esc. 3$00, N.º 6 Esc. 4$00, N.º 7 Esc. 6$00, N.º 8 Esc. 4$00, N.º 11 e seguintes, Esc. 5$00.

COLECÇÕES COMPLETAS

Com excepção duma pequena reserva que a Administração da *Gazeta de Matemática* retirou do comércio, estão inteiramente esgotadas as colecções completas. Encontram-se ainda à venda algumas colecções dos N.os 2 a 8, Esc. 35$00.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial