GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática Ano LXII | Janeiro 2001 nº140

Professor **Elon Lages Lima**
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Rio de Janeiro - Entrevista por F.J. Craveiro de Carvalho

Prémios José Sebastião e Silva
José Anastácio da Cunha

Tardes de Matemática

consideraram importante o contacto dos alunos com a Matemática de modo diferente do habitual em aulas e consideraram mesmo que iniciativas deste tipo, sobretudo se com maior frequência, podem ser um motor para trocas de experiências e de actualização científica.

Como dificuldades, a Presidente salientou o conseguir palestrantes e disponibilidade para deslocações a regiões mais longínquas. Agradeceu a todos os que colaboraram e não se furtaram a dificuldades e até a despesas e prejuízos para as suas vidas pessoais e profissionais.

Terminou a sua intervenção insistindo na necessidade de meios logísticos mais importantes para continuar uma tarefa que despertou muito entusiasmo e não deve acabar.

As Palestras Ano 2000 e o Encontro contaram com o apoio da Fundação para a Ciência e a Tecnologia e do Instituto de Inovação Educacional.

Como referimos, um dos participantes no encontro de 12 de Janeiro foi o Professor Elon Lages Lima. O Professor Elon Lima é um notável investigador do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, sediado no Rio de Janeiro, instituição de grande prestígio internacional onde alguns matemáticos portugueses já fizeram o seu doutoramento.

Deslocou-se a Coimbra propositadamente para participar neste evento e aproveitámos a sua presença para o entrevistar.

Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
CEP 22460-320
Rio de Janeiro, RJ
Brasil

Diálogo em Janeiro com Elon Lages Lima

Entrevista conduzida pelo Professor F. J. Craveiro de Carvalho

Professor Elon Lages Lima

F. J. Craveiro de Carvalho - Professor Lages Lima, leu agora no meu gabinete um poema que despertou a sua atenção, *"A jar in Tennessee"*[1] de Wallace Stevens. Começamos pelo poema? Eu sei que teria gostado de ser escritor. Confessou-me que chegou mesmo a escrever textos que depois abandonou. Que acha do poema?

Elon Lages Lima - Acho muito bonito. Tem aquele tom de melancolia muito característico de alguns poetas de língua

[1] I placed a jar in Tennessee
And round it was, upon a hill.
It made the slovenly wilderness
Surround that hill.

The wilderness rose up to it,
And sprawled around, no longer wild.
The jar was round upon the ground
And tall and of a port in air.

It took dominion everywhere.
The jar was gray and bare.
It did not give of bird or bush,
Like nothing else in Tennessee.

inglesa. Não sei se era inglês...

F.J.C.C. - Americano.

E.L.L. - Deste século?

F.J.C.C. - Morreu na década de 50.

E.L.L. - Teria de lê-lo mais algumas vezes para poder penetrar um pouco mais no espírito, no sentimento que exala logo à primeira leitura. É como um vinho. Tem que se saborear aos pouquinhos.

F.J.C.C. - Acha que o poema se presta a uma interpretação matemática?

E.L.L. - Você mencionou isso mas eu não procuraria interpretá-lo matematicamente. Eu acho que se podem sempre encontrar interpretações matemáticas nas coisas mas não creio que tenha sido a intenção do autor nem

Por acaso descobri numa livraria, um alfarrabista de Fortaleza, o livro *Lições de Álgebra e Análise* de Bento de Jesus Caraça. Nesse livro, após cada capítulo, ele tinha uma lista de referências bibliográficas comentada. Numa dessas listas ele mencionava livros de Hardy, Birkhoff e Mac Lane, que foram os meus professores iniciais.

creio que essa interpretação seja válida. Podem sempre fazer-se interpretações várias em escritos de natureza abstracta como um poema cheio de metáforas que podem ser lidas de uma forma ou outra. A não ser que o poema seja muito explícito eu prefiro sentir o sabor e o seu espírito sem buscar uma interpretação. Absorver simplesmente o sentimento, a emoção da pessoa que escreveu em vez de olhar para o poema como uma coisa lógica e racional. A poesia para mim tem de ser o mais emocional possível. Mas, como crítico literário, eu sou realmente um fracasso...

F.J.C.C. - Vamos à Matemática então. Tanto quanto eu sei, foi basicamente um autodidacta até iniciar estudos de pós-graduação. Pode dar-nos uma ideia de qual foi o seu percurso até esse ponto?

E.L.L. - Eu nasci em Maceió, uma cidade pequena, menor que Coimbra hoje em dia, na época em que eu lá vivi. Depois saí para Fortaleza para estudar na Escola Militar. Percebi rapidamente que aquela não era a minha área e saí. Não voltei mais para casa, a não ser em férias, e comecei a ensinar no curso primário mas não ensinava propriamente Matemática. Ensinava as coisas do curso primário e tornei-me professor de Matemática porque o professor de Matemática do colégio em que eu ensinava...

F.J.C.C. - Em Fortaleza?

E.L.L. - Em Fortaleza, se foi embora. Antes quando era bem garoto, dos meus doze aos quinze anos, tive um professor de Matemática muito bom, muito inspirador, em Maceió. Escrevi até um livro que lhe dediquei chamado *Meu Professor de Matemática e outras histórias*[2]. Em Fortaleza estudei os dois primeiros anos da faculdade, numa faculdade noturna de baixíssimo nível. Por volta do terceiro ano, em circunstâncias fortuitas, consegui uma bolsa de estudos e fui estudar para o Rio de Janeiro. Foi um pouquinho antes da pós-graduação. Nos dois últimos anos da faculdade estive no Rio de Janeiro. Cheguei lá no ano em que o IMPA foi criado.

F.J.C.C. - Mil novecentos e...?

E.L.L. - Cinquenta e dois. Tive a sorte de trabalhar sob a orientação de Leopoldo Nachbin e Maurício Peixoto.

F.J.C.C. - Já lá vamos. Mas antes disso, penso que houve alguns nomes importantes para si: G. H. Hardy, Birkhoff e Mac Lane, Courant, o português Bento de Jesus Caraça...

E.L.L. - Que foi a minha via de acesso para os outros nomes que você acabou de mencionar. Por acaso descobri numa livraria, um alfarrabista de Fortaleza, o livro *Lições de Álgebra e Análise* de Bento de Jesus Caraça. Nesse livro, após cada capítulo, ele tinha uma lista de referências bibliográficas comentada. Numa dessas listas ele

[2] Sociedade Brasileira de Matemática, 1987.

mencionava livros de Hardy, Birkhoff e Mac Lane, que foram os meus professores iniciais. No catálogo da livraria onde eu encomendava livros vi também referências a livros dos matemáticos portugueses do final dos anos 40. Principalmente António Aniceto Monteiro, Alfredo Pereira Gomes e Ruy Luís Gomes. Adquiri esses livros e estudava por eles.

F.J.C.C. - Isso antes de ir para o IMPA?

E.L.L. - Antes de ir para o IMPA.

F.J.C.C. - E no IMPA teve como professores alguns matemáticos brasileiros muito importantes.

E.L.L. - Tive Leopoldo Nachbin e Maurício Peixoto.

F.J.C.C. - Numa entrevista que deu à Matemática Universitária[3], eu li a seguinte afirmação sua:

Eu esperava muito mais! Só não me decepcionei com os professores Leopoldo Nachbin e Maurício Peixoto.

É legítimo concluir que eles são de facto os grandes matemáticos brasileiros da primeira metade do século XX?

E.L.L. - Ah sim, sem dúvida. São duas pessoas completamente diferentes. Devo mencionar que no final dos anos 40 a presença do matemático português António Aniceto Monteiro no Rio de Janeiro foi substancial. Inclusivé para apoiar o trabalho daqueles dois. O que é engraçado, bem, no mínimo curioso, é que António Monteiro, do ponto de vista intelectual, estava muito mais próximo de Leopoldo Nachbin, a quem realmente influenciou no seu trabalho sobre reticulados. No entanto o único trabalho em conjunto que ele fez com matemáticos brasileiros foi feito com Peixoto. Este tinha, e tem ainda, uma atitude perante a matemática muito diferente da de Leopoldo Nachbin e da de Aniceto Monteiro também.

F.J.C.C. - Quanto tempo esteve no IMPA?

E.L.L. - Dois anos.

F.J.C.C. - Após esses dois anos conseguiu uma bolsa para os Estados Unidos segundo creio...

E.L.L. - Um director da Fundação Rockfeller no Rio conversou com Leopoldo Nachbin e ele indicou o meu nome como candidato a uma bolsa. A bolsa foi-me concedida e fui estudar para Chicago.

F.J.C.C. - Porquê Chicago?

E.L.L. - Porque Leopoldo Nachbin e Maurício Peixoto tinham estado em Chicago. Inclusivé a tese de livre docência de Nachbin foi impressa na University of Chicago Press.

F.C.C. - Esteve em Chicago de 54 a 58. Este período, no departamento de Matemática da Universidade de Chicago, é referido por Paul Halmos na sua biografia[4] de uma forma amarga. Tem recordações desse período que possam explicar a amargura de Halmos?

E.L.L. - Ele deixa bem claro nessa autobiografia que a amargura dele era principalmente dirigida a Mac Lane que era o chefe do departamento e que não o considerava um bom matemático. Durante esse período vários dos seus colegas que entraram para a Universidade de Chicago, mais ou menos ao mesmo tempo que ele, foram promovidos enquanto que, sob a direcção de Mac Lane, Halmos jamais chegaria a professor titular.

> Devo mencionar que no final dos anos 40 a presença do matemático português António Aniceto Monteiro no Rio de Janeiro foi substancial.

Depois de ter terminado o meu doutoramento e saído de Chicago houve uma debandada muito grande de matemáticos de Chicago. Por exemplo, Chern, Spanier, Smale foram para Berkeley. Hirsch, que era aluno e acabou comigo, foi para Berkeley também. André Weil foi para Princeton, Schilling para Indiana e Segal para Yale. E outros.

Estou certo que a amargura que você percebeu nos escritos do Halmos era dirigida especificamente a Mac Lane. Mac Lane provavelmente absorveu esse hábito de considerar

---

[3] *"Elon Lages Lima comenta sua vocação de matemático e divulgador da matemática"*, entrevista concedida a José Felipe Voloch e Laura Martignon, Matemática Universitária, 9/10, 1989.

[4] *"I want to be a mathematician"*, Paul Halmos, Springer-Verlag, 1985.

que as pessoas que se preocupam em fazer boas exposições matemáticas são necessariamente maus matemáticos e que o fazem porque não sabem fazer outra coisa, o que certamente não é verdade no caso do Halmos.

Vou contar-lhe uma história passada comigo e que pouca gente conhece. Para obter o doutoramento na Universidade de Chicago era necessário fazer exames de línguas estrangeiras. Para o mestrado bastava uma, eu fiz Francês, e depois mais uma para o doutoramento. Tinha que se escolher entre Russo, Alemão (e Italiano, se o departamento permitisse). Eu estudei Alemão seriamente e, do grupo que ia fazer exame comigo, era o melhor preparado. Contudo sentia-me mais seguro em Italiano. Escrevi então uma pequena carta ao departamento pedindo permissão para fazer exame de Italiano. Mac Lane respondeu com uma carta para o *Dean of Physical Sciences*, dizendo que o departamento estava de acordo dado eu estar interessado em Topologia e Geometria e haver a participação italiana nestes domínios etc., etc. Uma justificação qualquer de que não recordo agora os detalhes. E eu entreguei a carta na Administração...

Por orientação de Nachbin, eu fui para estudar Análise Funcional e ele encaminhou-me para I. Kaplansky que foi o meu orientador para o mestrado.

Passados poucos dias encontrámo-nos e ele disse que queria a carta de volta. Ficou furioso quando respondi que já tinha entregue a carta. Que era um absurdo, que eu não devia ter entregue a carta, nunca entendi porquê, e usou até um tom bastante ofensivo em relação a mim. Fiquei muito ofendido e fui à Administração da Universidade, pedi a carta e cancelei a minha inscrição no exame. Escrevi-lhe depois um bilhete de três linhas, bem seco, dizendo simplesmente que cancelara a minha inscrição no exame. Assinei apenas Elon Lima, nada de *Truly Yours*. Tentei entregar-lhe o bilhete mas ele não me quis receber, pelo que o deixei com a secretária.

Logo a seguir, à hora do chá no departamento, ele procurou-me e perguntou-me se eu estava louco, se ia desistir do exame, que ia ficar sem doutoramento... Eu respondi que sabia disso. Mas você vai abrir mão do seu doutoramento? Não, não vou abrir mão do meu doutoramento. Fiz o que tinha de fazer. Fiz uma tese (a minha tese acho que foi muito boa, fui muito elogiado pelos membros do júri) e quanto ao exame de italiano não vou repetir o que aconteceu. O senhor sabe e eu também sei. Já tenho passagem marcada e estou de regresso ao Brasil. Sem o doutoramento? perguntou ele. Vou sem o doutoramento, o resultado os senhores decidem o que querem fazer. Apanhei o avião e fui-me embora. Como se diz, paguei para ver. Pouco me importava, ou melhor, eu importava-me mas acima de tudo estava o meu amor próprio.

Algum tempo depois, um ou dois meses ou talvez menos, recebi uma carta de Otto Schilling, que era *acting chairman* do departamento e talvez para salvar a face de Mac Lane, dizendo que o departamento na sua reunião do dia tal, considerando a qualidade da minha tese, o meu trabalho e o meu passado como estudante de Chicago, resolvera, excepcionalmente, considerar que inglês era uma língua estrangeira para mim. Portanto o requisito das duas línguas estrangeiras estava satisfeito e que me atribuíam o grau de doutor. Podia mandar buscar o diploma quando quisesse. Uma amiga minha, aluna em Chicago, levantou-o, registou-o no consulado brasileiro e trouxe-mo. E esta é a história do meu doutoramento.

F.J.C.C. - Escreveu a sua tese sob a orientação de Edwin H. Spanier. Como é que isso aconteceu?

E.L.L. - É verdade. Como é que isso aconteceu? Eu estava lá para escrever uma tese. Por orientação de Nachbin, eu fui para estudar Análise Funcional e ele encaminhou-me para I. Kaplansky que foi o meu orientador para o mestrado. Eu não consegui que me dispensassem do mestrado. Fui obrigado a fazê-lo o que me atrasou alguns meses porque eu cheguei em Agosto e o exame de mestrado seguinte era em Maio. Durante esse tempo tive de me preparar para os exames que eram, eu acho, muito pesados. Havia cinco matérias diferentes sobre as quais se tinham de fazer exames escritos e orais. Isso, para mim, representou uma perda de tempo muito grande. Depois comecei a fazer uns cursos a nível de doutoramento mas não me lembro, já faz muito tempo, de ter aprendido nada nesses cursos. Eu aprendi mesmo Matemática conversando com os meus colegas, com os meus professores fora das aulas e, principalmente, assistindo às conferências feitas por grandes matemáticos que passavam por Chicago e participavam no chamado *Senior Math Club* que tinha uma conferência dessas de quinze em quinze dias. Aí tomávamos contacto com o que estava acontecendo matematicamente em todo o mundo e era realmente fantástico.

Como na altura ninguém lá fazia Análise Funcional, os assuntos que me interessavam mais eram Geometria Diferencial e Topologia. Durante algum tempo hesitei entre fazer a tese com Chern, que é realmente um grande homem não só de Chicago mas do mundo, e com Spanier, um matemático extremamente competente embora não fosse considerado como um dos maiores especialistas em Topologia Algébrica. Mas foi sempre extremamente respeitado pelas suas contribuições e era de uma competência extraordinária. Sabia tudo de Topologia. Qualquer área.

F.J.C.C. - O período que está a referir foi anterior ou posterior à escrita do famoso livro "Algebraic Topology"[5]?

E.L.L. - Bem antes. Ele tinha umas notas mimeografadas, tomadas por alunos nos seus cursos. Primeiro tinha uma introdução à teoria da homologia em que ele fazia homologia simplicial, homologia singular e demonstrava a invariância da homologia simplicial. Depois era o teorema do ponto fixo de Lefschetz, a seguir vinha uma teoria da homotopia em que ele fazia grupos de homotopia, obstrução e acabava com uma coisa que não tinha nada a ver com a homotopia, o estudo das variedades combinatórias levando à dualidade de Poincaré do ponto de vista combinatório e fazendo *cup product* e teoria da intersecção em variedades combinatórias. Eram umas notas extremamente elementares mas de uma clareza incrível. Em minha opinião, muito mais fáceis que o livro dele e que conduzem muito mais rapidamente aos pontos importantes perto da investigação. Essas notas desapareceram. Ainda tenho uma cópia que pus na biblioteca do IMPA, onde têm sido úteis. O livro foi escrito em Berkeley, depois de ter saído de Chicago.

O livro de Spanier é um livro amarrado, subordinado estritamente à linguagem functorial. Tudo tem de ser em termos de functores e categorias. Eu diria que uma leitura sistemática do livro do Spanier é uma tarefa extremamente pesada mas, por outro lado, se você está interessado numa determinada área, pequena, da homologia ou da homotopia e quer refrescar a sua memória, ou aprender mesmo, dificilmente você encontrará uma apresentação mais lúcida, mais completa, mais acabada, mais perfeita do que a dele.

Eu aprendi mesmo Matemática conversando com os meus colegas, com os meus professores fora das aulas e, principalmente, assistindo às conferências feitas por grandes matemáticos que passavam por Chicago e participavam no chamado *Senior Math Club* que tinha uma conferência dessas de quinze em quinze dias. Aí tomávamos contacto com o que estava acontecendo matematicamente em todo o mundo e era realmente fantástico.

Há duas coisas que tornam o livro de leitura pesada para um estudante. Uma é essa aderência estrita à

[5] "*Algebraic Topology*", E. H. Spanier, McGraw-Hill, New York, 1966.

linguagem functorial, a outra é o facto de ele ter relido o livro várias vezes em busca de argumentos repetidos. Quando Spanier encontrava o mesmo tipo de argumento apresentado noutra oportunidade, ele extraía o elemento comum às duas situações, fazia um lema e passava a referir-se a esse lema. Não há repetições, o livro é minimal nesse sentido.

Ainda hoje, quando tenho uma dúvida a respeito de um conceito, quero dar uma demonstração elegante de um facto qualquer de Topologia, tenho a certeza que se ele estiver no livro de Spanier, e a probabilidade de que esteja é muito grande, vai estar melhor apresentado que em qualquer outro lugar. Mas não é o meu livro favorito de Topologia Algébrica.

...não tinha ninguém no Brasil com quem conversar e seria um caminho muito longo se eu quisesse formar jovens para chegarem ao ponto de conversar comigo sobre aquelas coisas. Resolvi então mudar de direcção e estudar Topologia Diferencial que estava a começar naquela época com os trabalhos de Thom, Milnor, Pontryagin. Estes três principalmente. Fiquei quatro anos no Brasil até ganhar uma bolsa Guggenheim e ir para Princeton.

F.J.C.C. - Qual é então?

E.L.L. - É o Seifert e Threlfall[6], escrito em 1934.

F.J.C.C. - Porquê?

E.L.L. - Pela simplicidade, pela ingenuidade, "*naivité*" com que é escrito. Além disso, pela segurança dos autores. São dois dos maiores autores de livros de Matemática. Por sua vez, este livro não é o melhor livro de matemática que eu já li. O melhor livro de Matemática que eu já li também é de Seifert e Threlfall. Nunca foi traduzido para inglês, nem para francês. É um livro chamado *Variationsrechnung im Grossen*[7], cálculo das variações global.

É um livro que tem umas cento e vinte páginas, escrito antes do livro de Topologia, em que eles fazem uma exposição da Teoria de Morse, inclusivé com aplicação às geodésicas de uma variedade riemanniana, numa época em que pouquíssimas pessoas tinham entendido o estilo confuso de Marston Morse. E o livro consegue em poucas páginas, menos de cento e cinquenta, conter um resumo de Topologia Algébrica, um resumo de Geometria Riemanniana, necessários para você entender, e ainda expor a Teoria de Morse, com aplicação às geodésicas. É um livro fabuloso. É difícil encontrar um poder de síntese igual. Para não perder o fio do discurso, quando é necessário um facto adicional de Geometria Riemanniana, o leitor é remetido para o final do livro onde, em letras miúdas, está a demonstração completa desse facto.

Na minha opinião, estes livros são os melhores livros de Topologia que eu já li. É claro que estão desfasados mas não entendo por que é que, por exemplo, o livro de Topologia só recentemente foi traduzido e o de Cálculo das Variações, Teoria de Morse nunca foi traduzido.

F.J.C.C. - Acabou a sua tese em 1958 e voltou para o Brasil. Para onde?

E.L.L. - Para o IMPA novamente. Quando cheguei dei-me conta, eu já sabia isso e essa foi uma das razões pelas quais hesitei em fazer uma tese em Topologia Algébrica, que não tinha ninguém no Brasil com quem conversar e seria um caminho muito longo se eu quisesse formar jovens para chegarem ao ponto de conversar comigo sobre aquelas coisas. Resolvi então mudar de direcção e estudar Topologia Diferencial que estava a começar naquela época com os trabalhos de Thom, Milnor, Pontryagin. Estes três

[6] *Lehrbuch der Topologie*, H. Seifert e W. Threlfall, Teubner 1934; Chelsea Publ. Co., 1947.

[7] *Variationsrechnung im Grossen*, H. Seifert e W. Threlfall, Teubner 1938; Chelsea Publ. Co., 1951.

principalmente. Fiquei quatro anos no Brasil até ganhar uma bolsa Guggenheim e ir para Princeton.

F.J.C.C. - Onde esteve quanto tempo?

E.L.L. - No primeiro ano estive no Institute for Advanced Studies, depois estive um ano na universidade de Columbia.

F.J.C.C. - Teve oportunidade de ficar a trabalhar de forma definitiva nos Estados Unidos?

E.L.L. - Tive. Tive algumas ofertas, uma delas da própria universidade de Columbia. Outra da universidade de Massachusetts, Amherst, e outra da universidade de Maryland. A minha inclinação mais forte era para ficar em Nova Iorque, em Columbia, mas recebi um telefonema do Reitor da universidade de Brasília, isto em 1964, ano em que ocorreu a revolução no Brasil. A universidade de Brasília, que tinha sido fundada recentemente e dirigida por um *leader* de esquerda, foi praticamente destruída. Os professores foram todos demitidos e foi nomeado um novo reitor que pensou que tinha o poder, a autoridade para fazer uma universidade de acordo com o que ele sonhava. Começou a convidar pessoas ilustres de vários ramos da ciência e das artes que estavam espalhados pelo mundo e eu tive a honra de ser uma das pessoas convidadas. Telefonou directamente para mim em Nova Iorque e eu, relutantemente, disse que ia pensar. Ele começou a insistir, dizendo que os militares não interviriam, e eu acabei por aceitar, apesar dos conselhos dos meus colegas americanos.

F.J.C.C. - Esteve quanto tempo em Brasília?

E.L.L. - Ano e meio, mas nesse meio ano final a universidade praticamente não estava a funcionar. A interferência dos militares na vida interna da universidade tornou insustentável o trabalho académico que requer, antes de mais, liberdade. Saí então, numa altura em que oitenta por cento, ou mais, dos professores da universidade se demitiram simultaneamente.

Como não tinha emprego no Brasil voltei para os Estados Unidos. Fiquei meio ano na universidade de Rochester e depois um ano na universidade da Califórnia, em Berkeley. Voltei depois para o IMPA.

F.J.C.C. - Para cujo desenvolvimento teve um papel importante. Creio mesmo que chegou a ser director.

E.L.L. - Ao todo fui director onze anos, não seguidos. Fui director três vezes e em todas pedi para sair. Eu entrava em situações de crise, era convocado para assumir a direcção, mas depois as coisas acalmavam, melhoravam e eu pedia para sair.

Eu nunca gostei de ser director. Gostava sim de ser vice-director. Fui muito mais tempo vice-director do que director. Ser vice-director é óptimo. Você tem oportunidade de dar as suas opiniões mas não tem responsabilidade nenhuma na sua execução. Se der certo você fica contente, se não der, paciência...

F.J.C.C. - Hoje em dia o IMPA é reconhecido, a nível mundial, como um centro de Matemática excelente. É uma singularidade no panorama matemático brasileiro ou há outras instituições cujo nível se possa considerar aproximado?

E.L.L. - Acho que o IMPA é uma singularidade a nível mundial, não no sentido de excepcionalidade. É uma singularidade porque é um instituto de primeiro mundo num país de terceiro mundo. É uma instituição que, por vários motivos, conseguiu manter-se e atingir um nível excelente, apesar de nunca ter tido uma posição excepcional nem privilégio algum dentro do esquema da política científica do Brasil. Durante algum tempo o IMPA

Acho que o IMPA é uma singularidade a nível mundial, não no sentido de excepcionalidade. É uma singularidade porque é um instituto de primeiro mundo num país de terceiro mundo. É uma instituição que, por vários motivos, conseguiu manter-se e atingir um nível excelente, apesar de nunca ter tido uma posição excepcional nem privilégio algum dentro do esquema da política científica do Brasil.

foi mais famoso, mais respeitado fora do que dentro do Brasil. Hoje isso já não é verdade. Contudo o seu prestígio científico não se reflecte, por exemplo, no prestígio dos professores que têm salários muito baixos, mesmo em comparação com os salários das universidades federais brasileiras. Os salários do IMPA são inferiores e alguns privilégios que os professores têm, nós não temos. Nós não somos considerados professores. Muito embora seja uma instituição credenciada pelo Ministério da Educação para dar graus de Mestrado e Doutoramento, os membros não são professores, são investigadores. Por exemplo, um dos privilégios a que eu me refiro diz respeito ao regime de aposentação. Trinta anos para os professores, trinta e cinco anos para os investigadores do IMPA. A situação está a mudar e é natural que a questão da aposentação mude também.

Nós não temos nada como a Biblioteca Joanina aqui em Coimbra mas temos cerca de quinhentas assinaturas de revistas, com colecções, praticamente todas, desde o número um. Ao todo a biblioteca do IMPA tem entre sessenta e setenta mil volumes, livros e revistas.

Em suma, durante muito tempo o IMPA foi uma instituição inteiramente desconhecida das autoridades educacionais. Agora já não. A situação melhorou.

F.J.C.C. - O IMPA faz cinquenta anos em 2002. Que comemorações estão a ser planeadas para assinalar aquela data?

E.L.L. - Não sei dizer exactamente. A única coisa que eu sei é que vai ser publicado um livro contando a história do IMPA. Essa publicação está a ser preparada e fica pronta até 2002. Quase de certeza que haverá um simpósio, um congresso. Algo assim.

F.J.C.C. - Para além do caso mais mediático, o de Steve Smale que diz ter feito algum do seu melhor trabalho nas praias do Rio, que outros grandes matemáticos passaram pelo IMPA?

E.L.L. - É difícil dizer porque a lista é muito extensa. Na área dos Sistemas Dinâmicos, por exemplo, todos os matemáticos destacados já estiveram no IMPA. Russos, americanos, franceses, ingleses. Até por causa dos inúmeros congressos, simpósios, seminários, workshops etc. de Sistemas Dinâmicos que o IMPA organizou nestes anos todos.

Em Geometria Diferencial também. Chern, Blaine Lawson...

F.J.C.C. - Osserman?

E.L.L. - Osserman também. Kuiper, Marcel Berger. O Smale inclusivé passou lá parte do seu ano sabático.

Uma das coisas que atraía e atrai ainda muito os visitantes estrangeiros para o IMPA é a biblioteca.

F.J.C.C. - Como é que foi construída essa biblioteca?

E.L.L. - Aos poucos, através dos anos. A biblioteca surgiu mesmo antes do IMPA. Existia apenas a lei criando o IMPA, a lei não, a portaria do Conselho Nacional de Pesquisa. Não havia corpo docente ainda quando um professor, responsável pela secção de Matemática do Conselho Nacional de Pesquisa, veio à Europa comprar colecções de revistas para formar a biblioteca do IMPA. Num certo sentido a biblioteca antecedeu as actividades científicas do IMPA. Criou-se, desde então, a tradição de, sempre que se assina uma revista, se procurar obter todos os números dessa revista. Uma excepção notável é *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* que existe desde Newton. A biblioteca toda do IMPA não teria espaço suficiente e também não vale a pena.

Nós não temos nada como a Biblioteca Joanina aqui em Coimbra mas temos cerca de quinhentas assinaturas de revistas, com colecções, praticamente todas, desde o número um. Ao todo a biblioteca do IMPA tem entre sessenta e setenta mil volumes, livros e revistas. Um dos divertimentos favoritos do nosso director é, quando da visita de um matemático ilustre, desafiá-lo a dizer o nome de uma revista importante que não esteja lá desde o número um. Ou então a colecção das obras completas de um grande matemático. Uma vez fomos derrotados por Lars Hormander que mencionou Fredholm. Acontece que a obra de Fredholm tem menos de duzentas páginas, sendo muito pouco conhecida. Hormander prometeu mandar-nos um exemplar e mandou.

As colecções de obras completas são uma coisa muito importante pois facilitam o uso da biblioteca pelos matemáticos que estão interessados numa determinada área. Em vez de os procurarem um a um, os trabalhos de um grande matemático estão ali todos juntos.

Desde o primeiro dia que tive uma grande preocupação com a biblioteca e passo, por dia, algumas horas na biblioteca. Acabei por casar com a bibliotecária...

F.J.C.C. - E como é que o IMPA faz face ao aumento constante do preço das revistas?

E.L.L. - É um sacrifício. O aumento brutal, diria até explorador, do preço das revistas matemáticas não tem justificação. É uma atitude injustificada de certas editoras, europeias principalmente, que tem prejudicado muito as universidades brasileiras. Contudo o Ministério da Ciência e Tecnologia convenceu-se que devia haver no Brasil um repositório importante do acervo da produção matemática do mundo e o IMPA foi escolhido para isso.

O IMPA dispende anualmente 400 000 dólares, só com assinaturas de revistas, e temos uma firma europeia que se encarrega das assinaturas. Seria uma tarefa impossível para as duas únicas bibliotecárias do IMPA. Graças a Deus existem as revistas americanas, publicadas por sociedades científicas e universidades, que são mais baratas que as revistas europeias. Tem havido até movimentos no sentido de levar os matemáticos a não escrever artigos para certas revistas. Lembro-me de uma mensagem electrónica de Robion Kirby da Universidade de Berkeley que foi divulgada pelo mundo inteiro. Há revistas cuja assinatura anual custa mais de 20 000 dólares. Essas nós cortamos.

F.J.C.C. - Voltemos ao seu percurso matemático. Embora tenha publicado artigos em revistas de grande categoria, Annals of Mathematics, Commentarii Mathematici Helvetici, American Mathematical Monthly, a sua produção científica é, se é que posso dizê-lo, relativamente pequena. Sobretudo quando penso no número de livros de texto, excelentes, que escreveu. Na entrevista que já mencionei há a seguinte frase sua:
Sempre senti a necessidade de expor as coisas para as pessoas entenderem.
Está aí a explicação?

E.L.L. - É verdade. Você foi até generoso quando disse relativamente pequena. Ao todo escrevi quinze trabalhos de investigação o que é muito pouco, considerando a minha idade e a produção média dos meus colegas. Acontece que eu sinto mais satisfação, mais prazer em escrever para que um número maior de pessoas entendam mas não, naturalmente, a ponto de baixar o nível. Procuro sempre manter o nível dentro de limites razoáveis. Sinto-me muito mais um professor do que um investigador. Até certo ponto, ao fazer trabalho de investigação e ter a satisfação de ver alguns trabalhos mencionados e bem considerados, eu fiz isso mais para mostrar que estava a dedicar-me a escrever livros expositórios por uma opção pessoal, não por incapacidade de fazer investigação. Mostrar-me que o meu trabalho expositório não era uma fuga.

Acontece que eu sinto mais satisfação, mais prazer em escrever para que um número maior de pessoas entendam mas não, naturalmente, a ponto de baixar o nível. Procuro sempre manter o nível dentro de limites razoáveis.

Hoje em dia fico muito contente quando chego a um lugar, no Brasil ou fora do Brasil, e as pessoas me dizem que aprenderam pelos meus livros. Aqui em Portugal tive momentos de grande satisfação quando as pessoas me procuraram e me disseram que conhecem os meus livros. Isso foi muito mais do que eu esperava. Uma vez, por exemplo, no Peru, onde estive já várias vezes, alguns estudantes vieram pedir-me que autografasse os seus livros. Mas não eram os livros originais, que eles não tinham dinheiro para comprar, mas fotocópias, por algum motivo mais baratas do que o livro. É uma coisa que eu não consigo entender. Principalmente livros brasileiros que são baratíssimos. Isso dá-me muita alegria.

Por vezes dizem-me *O seu livro é muito bom mas os meus alunos não o entendem*, o que me desaponta. A Matemática é difícil e às vezes os livros são usados de uma maneira que não é a maneira para a qual eles foram escritos. No prefácio do meu livro de Curso de Análise, volume 1, que é muito usado aqui em Portugal, por exemplo, aqui em Coimbra no primeiro ano, está dito que é um livro escrito para alunos que já fizeram, pelo menos, um ano de Cálculo. O ensino da Análise deve ser precedido pelo ensino de Cálculo para que o aluno possa aprender a manipular aquelas coisas, deixando a compreensão conceptual para uma segunda etapa.

> Aqui em Portugal tive momentos de grande satisfação quando as pessoas me procuraram e me disseram que conhecem os meus livros. Isso foi muito mais do que eu esperava. Uma vez, por exemplo, no Peru, onde estive já várias vezes, alguns estudantes vieram pedir--me que autografasse os seus livros. Mas não eram os livros originais, que eles não tinham dinheiro para comprar, mas fotocópias, por algum motivo mais baratas do que o livro.

F.J.C.C. - Já mencionei a entrevista que deu à Matemática Universitária que é muito completa sobre o seu percurso. Tive de facto alguma dificuldade em arranjar perguntas, mais ou menos originais, para lhe colocar. Entretanto passaram já dez anos sobre essa entrevista. Como é que descreve estes últimos dez anos em termos do seu trabalho?

E.L.L. - Nestes últimos dez anos concentrei-me muito, não exclusivamente, na tarefa de oferecer cursos, escrever livros para os professores do ensino secundário. Não foi certamente só isso porque fiz outras coisas. Escrevi o livro *Análise Real, volume 1*, que é um livro diferente de *Curso de Análise, volume 1*, escrevi um livro de Álgebra Linear e escrevi também umas notas de Topologia Diferencial que espero transformar em livro. Por enquanto estão escritas em espanhol porque foi um curso que eu dei em Lima. Mas escrevi e participei bastante na criação de uma literatura para o professor de Matemática.

F.J.C.C. - Professor do ensino secundário?

E.L.L. - Professor do ensino secundário. Essa literatura constitui a *Colecção do Professor de Matemática* da Sociedade Brasileira de Matemática que consta de quinze livros, dos quais escrevi nove e estou a escrever o décimo. Este ano, por exemplo, vão aparecer quatro livros meus. Esses quatro já estão prontos e haverá um quinto sobre Topologia Algébrica, para o qual já tenho as notas e que devo terminar de escrever este ano.

F.J.C.C. - Eu não queria tomar muito mais do seu tempo nesta curta viagem a Portugal mas gostava ainda de lhe fazer uma pergunta.

E.L.L. - Você não está a tomar o meu tempo, eu é que estou tomando o seu.

F.J.C.C. - Gostava de lhe fazer uma pergunta que, no desenrolar de outras funções que tive recentemente, fiz a vários matemáticos. Acabou um século, mais do que isso, um milénio. A maneira como hoje se olha a Matemática é muito diferente da maneira como se olhava em 1900. Por exemplo, uma das alterações que se podem apresentar, em termos de questões geométricas, é a passagem do local ao global. Terá havido, nestes últimos cem anos, momentos que considera marcantes no percurso matemático universal. Era capaz de nos dar um ou dois exemplos?

E.L.L. - Não me sinto com autoridade suficiente para dar uma resposta categórica mas tenho algumas opiniões próprias. Do ponto de vista da atitude matemática às vezes são pequenas coisas que vêm a ter uma repercussão enorme, outras são coisas mesmo grandes. Como princípios gerais destacaria duas coisas.

Um grande surto de progresso matemático nos últimos anos foi a adopção de uma linguagem geométrica na Análise. Falar em espaços de funções, por exemplo, começou com Riemann no século XIX mas teve um grande ímpeto com Ascoli e Arzela na Itália, Fréchet na França, Léray e Schauder na França e na Polónia também. A ideia de olhar para as funções como pontos de um espaço e, consequentemente, adoptar a linguagem geométrica em problemas de Análise é, para mim, a origem de uma tremenda quantidade de coisas bem sucedidas. Principalmente num campo que estava mais ou menos estagnado, as equações diferenciais parciais. Isto sem falar no trabalho auxiliar da Topologia que se desenvolveu paralelamente, motivado por essa abordagem em boa parte, e que veio a calhar pois os analistas precisavam de conhecimentos topológicos que justifiquem essa passagem do local ao global.

Outra coisa, muito mais recente, é o advento do computador que trouxe uma pletora de problemas interessantes, jamais conseguidos antes. Há vários motivos pelos quais o advento do computador influenciou o desenvolvimento de várias áreas da matemática. Um desses motivos é bem conhecido. O computador permite fazer experiências e a partir dessas experiências adquirir a certeza, certeza moral, uma forte desconfiança de que certas coisas são verdadeiras.

Temos um exemplo no IMPA com a superfície mínima do Celso Costa. Ele descobriu uma superfície mínima mas não tinha condições para provar que ela estava realmente mergulhada no espaço, podia ter auto-intersecções. Ele sabia que essas auto-intersecções, se ocorressem, era no infinito ou seja muito longe. Ele é uma pessoa curiosa. Fez a tese de doutoramento, que foi muito boa e causou grande impacto internacional, e depois escondeu-se, desapareceu. Ninguém sabia dele. William Meeks, que foi membro do júri do exame do Celso, pegou no trabalho, levou-o para os Estados Unidos e, com o auxílio de David Hoffman e um outro Hoffman, perito em computação, conseguiu fazer um modelo geométrico da superfície de Costa e descobrir as propriedades de simetria, visíveis apenas no computador. Essas propriedades de simetria permitiram que eles fizessem uma demonstração de que a superfície de Costa estava realmente mergulhada e não simplesmente imersa. Houve até uma briga muito grande porque Meeks e Hoffman começaram a publicar uma série de trabalhos sem nunca mencionar o nome do Celso. Então nós, os professores do IMPA, liderados por Manfredo do Carmo, *leader* da parte de Geometria no IMPA, escrevemos uma carta aos dois dizendo que eles tinham obrigação moral de, ao referirem a superfície, referirem-na não como *Meeks surface* mas *Costa surface*. Realmente é assim que ela hoje é conhecida. Menciono este facto, depois Meeks voltou a ter muito boas relações com o IMPA e está lá actualmente como professor visitante, para ilustrar uma forma pela qual o computador pode ajudar a Matemática. Mas existem outras.

> A ideia de olhar para as funções como pontos de um espaço e, consequentemente, adoptar a linguagem geométrica em problemas de Análise é, para mim, a origem de uma tremenda quantidade de coisas bem sucedidas.

O computador tornou possível a resolução de problemas numéricos, até então inconcebíveis porque representavam um trabalho brutal, e levou ao desenvolvimento em certas áreas, nomeadamente a Álgebra Linear, uma área considerada estagnada desde Cramer... Estou a exagerar, depois de Cramer houve muitas coisas. Começaram a surgir técnicas de decomposição de matrizes, coisas desse tipo, inclusivé em Portugal há especialistas de reputação internacional, que só existem por causa do computador. O computador mostrou que era possível resolver problemas e sistemas de grande porte.

De um ponto de vista geral, estas duas coisas foram de grande importância: a utilização da linguagem geométrica na Análise e os problemas que surgiram com o uso do computador de duas maneiras. Usar o computador como um instrumento para experiências, para depois se conjecturarem resultados matemáticos. É o caso da superfície de Costa e muitos outros. Usar o computador na resolução de problemas numéricos. Mencionei a Álgebra Linear mas há problemas também de equações diferenciais parciais e outros. O uso do computador levou ainda à criação de novas disciplinas. A complexidade computacional, por exemplo.

Estes dois pontos, na minha opinião, são dois pontos salientes da Matemática deste último século.

F.J.C.C. - E mais pontualmente?

E.L.L. - Mais pontualmente, mencionaria o sucesso na solução de uma série de problemas. Só faltam agora a *Hipótese de Riemann* e a *Conjectura de Poincaré*. Esta é um pouco como a história do tipo que pede a outro para ver se o pisca-pisca do carro está a funcionar e recebe como resposta: *está, não está, está, não está*.... Não sei qual é o estatuto actual da *Conjectura de Poincaré*, se está provada ou não. Um dia está, no outro não.

F.J.C.C. - Tendo algum interesse em Topologia Diferencial, pensei que iria mencionar a descoberta das esferas exóticas...

E.L.L. - Ah sem dúvida. A descoberta das esferas exóticas e a participação dos físicos na Matemática. Witten, por exemplo, e outros que revolucionaram certos aspectos da Matemática. É uma espécie de vingança dos físicos relativamente aos matemáticos e à intervenção da Matemática na Física.

Quanto às esferas exóticas, eu fui testemunha ocular do anúncio da sua descoberta, feito pelo Milnor num simpósio de Topologia no México em 1956. Era aluno em Chicago e fui assistir a essa conferência onde ele mostrou a existência de uma estrutura exótica em S^7. Mas acho que mais surpreendente ainda foi a descoberta da estrutura exótica em R^4.

F.J.C.C. - Isso no trabalho de Simon Donaldson e Michael Freedman. Porquê?

E.L.L. - Acreditava-se que em R^n esse tipo de coisa não acontecia. Não tinha homologia, não tinha homotopia, não tinha nada. Foi necessário um novo tipo de atitude em relação à Topologia. O trabalho de Milnor foi extremamente *clever* mas, na verdade, ele não inovou, usou as ferramentas que existiam na época com extrema agudeza de espírito, como é característico dele.

F.J.C.C. - Chegamos ao fim e quero expressar-lhe, mais uma vez, o meu agradecimento pelo tempo que me concedeu e que me permitiu conhecer melhor um dos matemáticos de língua portuguesa por quem tenho mais admiração. Bem haja.

Coimbra, em 12 de Janeiro de 2001

São os Matemáticos Puros particularmente pouco aptos para o Cálculo das Probabilidades?

António Brotas
Departamento de Física, Instituto Superior Técnico, Lisboa

1.Introdução

Peço para o título deste artigo não ser considerado uma falta de respeito. Várias vezes na vida fui professor de Matemática, quase sempre em Escolas de Engenharia ou equivalentes, e ensinei Cálculo das Probabilidades (por exemplo, na cadeira de Métodos Estatísticos do 2º ano, no Instituto Superior Técnico, em 1972-73), mas sempre me considerei um não matemático, no sentido de não ser um investigador em Matemática. A tribo dos Matemáticos puros é uma tribo a que não pertenço. Os seus elementos têm um modo de pensar (sobretudo de descobrir novos terrenos no seu universo abstracto e de fazer demonstrações) que me escapa, respeito e admiro muito (e invejo um bocado).

Este título pode ser olhado como uma provocação - para provocar réplicas e comentários - mas não é uma provocação gratuita e sem fundamento. As informações surpreendentes que me levam a fazer a pergunta encontram-se no capítulo 6 intitulado *"Ficar com a cabra"* do muito interessante livro: *"O homem que só gostava de números"*, de Paul Hoffman, premiado com o Rhône-Poulenc Prize 1999 para o melhor livro de ciência (suponho que de divulgação científica), recentemente editado em português pela Gradiva.

Digo, desde já, de que se trata.

O livro é, no essencial, uma biografia de Paul Erdös, que viveu de 1916 a 1996, e terá sido o matemático que mais textos publicou depois de Gauss e Euler. No entanto, este matemático, um dos maiores e mais influentes do século, perante um mero problema de Cálculo das Probabilidades sugerido no decorrer de um concurso televisivo, errou, teve a maior dificuldade em reconhecer o erro (só se convenceu diante de uma simulação em computador), e continuou a considerar que faltava ainda uma verdadeira demonstração do resultado.

O espantoso é que muitos matemáticos, alguns proeminentes, o acompanharam nestas dificuldades à volta de um problema que considero acessível aos meus antigos alunos de Métodos Estatísticos (talvez algum leia este texto).

2.O problema

O problema, divulgado por uma matemática não muito considerada, mas muito vaidosa (apregoa ter o QI mais alto dos Estados Unidos) e autora de livros com grande aceitação do público, a Srª Marylin vos Savant, é o seguinte:

> Num concurso televisivo, atrás de três portas fechadas, estão um automóvel e duas cabras.
> Os concorrentes são convidados a escolher e indicar uma porta e, depois, a abri-la, ficando com o que está atrás: o automóvel ou a cabra.
> Mas aos concorrentes é dada uma faculdade adicional. O apresentador, que sabe onde está o carro, depois de eles indicarem a porta que escolheram, abre uma das outras duas portas atrás da qual está uma cabra. Os concorrentes, depois de verem esta cabra, podem, caso

o desejem, alterar a opção inicial e, em vez dela, escolher a outra porta que ainda está fechada.

O problema de Cálculo das Probabilidades é o de *saber se os concorrentes têm alguma vantagem em fazer uso desta faculdade adicional.*

A Srª Marylin, muito intuitiva, disse que sim, e afirmou, desde logo, que os concorrentes duplicam as suas possibilidades de ganhar o carro no caso de alterarem a opção inicial. Erdös, e vários outros matemáticos, disseram que não, que os concorrentes não têm qualquer vantagem em mudar.

A Srª Marylin apresentou, então, os quadros seguintes com a indicação das hipóteses de ganho dos concorrentes no caso de manterem a opção inicial e no caso de a alterarem:

Possibilidades de ganho dos concorrentes que escolheram a porta 1 e mantiveram a opção inicial depois de verem a cabra numa das outras duas portas:

	Porta 1	Porta 2	Porta 3	Ganho ou perda
Hip. A:	carro	cabra	cabra	ganham
Hip. B:	cabra	carro	cabra	perdem
Hip. C:	cabra	cabra	carro	perdem

Possibilidades de ganho dos concorrentes que escolheram a porta 1 e alteraram a opção inicial depois de verem a cabra numa das outras duas portas:

	Porta 1	Porta 2	Porta 3	Ganho ou perda
Hip. A:	carro	cabra	cabra	perdem
Hip. B:	cabra	carro	cabra	ganham
Hip. C:	cabra	cabra	carro	ganham

Com estes quadros, a Srª Marylin convenceu muitas pessoas de que tinha razão, entre elas o matemático Vázsonyi, amigo e colaborador de Erdös, mas não o próprio Erdös, que teve de se render face aos resultados de uma simulação feita em computador com o método de Monte Carlo (uma humilhação para um matemático teórico), mas continuou a afirmar faltar uma verdadeira demonstração matemática.

3. Porquê tanta dúvida?

Como explicar estas dificuldades de matemáticos tão eminentes?

Tentemos ver os passos em que se poderão ter enganado.

Designemos por A, B, e C, respectivamente, os acontecimentos: *"o carro está atrás das portas 1, 2 e 3"*.

Uma vez que as portas são iguais aceitamos ser:

$$p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{3} \cdot$$

Quando o concorrente escolhe inicialmente a porta 1, a probabilidade de ganhar o carro é :

$$p(1 - \text{ganhar}) = p(A) = \frac{1}{3} \cdot$$

Designemos por K_{23} o acontecimento: *"depois de o concorrente ter escolhido a porta 1, o apresentador abriu uma das portas, 2 ou 3, e mostrou uma cabra"*.

Este acontecimento K_{23} é um acontecimento certo, dado que o apresentador tem o propósito e a possibilidade de o realizar, depois do concorrente ter escolhido a porta 1. Temos assim

$$p(K_{23}) = 1 \ ,$$

e também

$$p(K_{23} | A) = 1 \ ,$$

pois, no caso de o carro estar em 1, o apresentador pode, perfeitamente, mostrar uma cabra em 2 ou em 3.

Temos ainda $p(K_{23} | B) = 1$ pois, no caso de o carro estar em 2, o apresentador pode mostrar a cabra que está em 3. Idem para, $p(K_{23} | C) = 1$.

As fórmulas correntes:

$$p(A \text{ e } K_{23}) = p(A).p(K_{23}|A) = p(K_{23}).p(A|K_{23})$$

e

$$p(B \text{ e } K_{23}) = p(B).p(K_{23}|B) = p(K_{23}).p(B|K_{23}),$$

permitem-nos calcular:

$$p(A|K_{23}) = p(A) = \frac{1}{3}\ , \quad p(B|K_{23}) = p(B) = \frac{1}{3}\ .$$

Idem, para

$$p(C|K_{23}) = p(C) = \frac{1}{3}\ .$$

Vemos que a verificação de K_{23} em nada altera as probabilidades iniciais de A, B, C. Este resultado era previsível, dado K_{23} ser um acontecimento certo, e a verificação (constatação) de um acontecimento certo não alterar as probabilidades atribuíveis aos diferentes acontecimentos ou, em linguagem da *Teoria da Informação*, não nos trazer qualquer informação adicional.

Penso que terá sido este resultado, previsível desde o início, que terá induzido em erro muitos dos intervenientes. Como o *"ver uma cabra numa das portas 2 ou 3"* em nada altera as probabilidades iniciais, consideraram que a situação *"depois"* era igual à situação *"antes"*, não havendo, em consequência, qualquer razão para alterar uma opção inicial.

Sucede porém que, quando o apresentador mostra uma cabra numa das portas 2 ou 3, mostra-a, efectivamente, *numa das portas* que é vista pelo concorrente.

O acontecimento K_{23} deve assim ser olhado como a reunião de dois acontecimentos aleatórios incompatíveis:

K_2 (*o apresentador mostra uma cabra atrás da porta 2*)

e

K_3 (*idem atrás da porta 3*).

Sendo $p(K_{23}) = p(K_2 \text{ ou } K_3) = p(K_2) + p(K_3)$, sendo as portas iguais e não devendo ter o apresentador qualquer preferência, devemos ter:

$$p(K_2) = p(K_3) = \frac{1}{2}\ .$$

Temos ainda, como é fácil de notar dado o seu significado:

$$p(K_2|A) = \frac{1}{2}\ , \ p(K_2|B) = 0\ , \ \ p(K_2|C) = 0\ .$$

Estes resultados e as fórmulas correntes:

$$p(A \text{ e } K_2) = p(A)\ .\ p(K_2|A) = p(K_2)\ .\ p(A|K_2)\ ,$$

$$p(B \text{ e } K_2) = p(B)\ .\ p(K_2|B) = p(K_2)\ .\ p(B|K_2)\ ,$$

$$p(C \text{ e } K_2) = p(C)\ .\ p(K_2|C) = p(K_2)\ .\ p(C|K_2)$$

permitem-nos calcular:

$$p(A|K_2) = p(A) = \frac{1}{3}, \ p(B|K_2) = 0\ , \ p(C|K_2) = 2p(C) = \frac{2}{3}.$$

Vemos assim que, no caso de se verificar o acontecimento K_2 (o apresentador mostrar uma cabra atrás da porta 2) a probabilidade de A (de o carro estar em 1) se mantém, a probabilidade de B (de o carro estar em 2) desce para zero e a probabilidade de C (de o carro estar em 3) duplica.

O concorrente duplica assim a probabilidade de ganhar o carro, se mudar a sua escolha da porta 1 para a porta 3.

Vale a pena transcrever uma carta de um opositor da Srª Marylin, que quase a insulta, o Sr. Scott Smith, doutorado da Universidade da Florida:

> *"Meteu água e fê-lo em grande! Passo a explicar: depois de o apresentador mostrar a cabra, passa (o concorrente) a ter uma hipótese em duas de acertar. Quer mude a escolha, quer não, as hipóteses são iguais. Existe iliteracia matemática em quantidade suficiente neste país (Estados Unidos) e não precisamos do maior QI do mundo para a propagar mais. Que vergonha!"*

O Sr. Scott Smith notou (e era difícil não notar) que quando, por exemplo, o apresentador mostra uma cabra na porta 2 (isto é, se verifica K_2), a probabilidade de o carro estar em 2 passa a zero. Mas, restando duas hipóteses para a localização do carro, esteve desatento e admitiu de um modo primário que continuavam igualmente prováveis, não sabendo fazer as contas para constatar que, com a verificação de K_2, a probabilidade de uma continuava na mesma e a de outra duplicava.

4. Epílogo

Chegámos aos resultados expostos usando fórmulas correntes e conhecimentos triviais de Cálculo das Probabilidades. Tivemos, simplesmente, um grande cuidado na caracterização dos acontecimentos considerados e das situações (contextos) em que são calculadas as respectivas probabilidades.

Talvez Erdös aceitasse o texto que acabei de expor como uma explicação razoável e, em face dela, dispensasse o ensaio com o computador.

Como explicar as dificuldades de matemáticos ilustres face a um problema tão simples?

A Teoria das Probabilidades (vulgo Cálculo das Probabilidades) é uma disciplina algo à margem das matemáticas, que lida com uns acontecimentos muito delicados, os acontecimentos aleatórios os quais, *nas mesmas circunstâncias*, umas vezes se verificam outras não. A essência da Teoria consiste em atribuir um número, designado por probabilidade, a cada acontecimento aleatório *considerado em determinadas circunstâncias*.

Nos problemas reais como, por exemplo:

Qual é a probabilidade de chover em Lisboa no dia 1 de Janeiro do ano 2010 (ou de ter chovido no mesmo dia do ano 1000),

é-nos impossível calcular a probabilidade do acontecimento indicado. O que podemos é tentar estimá-la o melhor possível usando as informações de que dispomos. A noção de probabilidade ou, talvez mais exactamente, as estimativas que dela podemos fazer, têm assim um carácter altamente subjectivo, pois dependem das informações de que cada um dispõe, e mesmo das suas convicções.

Nestes problemas em que há estimativas a fazer, os matemáticos estão mais ou menos em pé de igualdade com os outros cientistas e técnicos estando, certamente, nos problemas que envolvem o clima, em situação de inferioridade face aos metereologistas que "sentem" muito melhor a chuva.

Nos problemas mais simples, em que nos defrontamos com situações esquematizadas, como é o caso do problema considerado no início deste texto, podemos calcular a probabilidade dos diferentes acontecimentos, desde que sejam muito bem indicadas as *condições em que eles são considerados*, que incluem a informação na posse dos vários intervenientes nos diferentes momentos do processo. A descrição dos acontecimentos e destas condições, que nalguns casos exige muita atenção, é uma questão "exterior" à Matemática.

É possível que os matemáticos, habituados a viver no interior do seu universo abstracto estejam algo destreinados de olhar para fora, e nalguns casos, não o façam com a necessária atenção. É esta a única explicação que encontro para as dificuldades relatadas no livro de Paul Hoffman. É uma suposição que poderá, perfeitamente, ser rebatida.

Os físicos, habituados a olhar para problemas do mundo físico, sentem-se, por vezes, mais à vontade para abordar este tipo de problemas. Penso, assim, ser pena que nas nossas Universidades e nas de quase todo o mundo os físicos tenham sido afastados do ensino elementar (e básico) de Cálculo das Probabilidades e Estatística.

Permito-me terminar com um problema que considero adequado para os estudantes de Estatística e Cálculo das Probabilidades e que é uma generalização do problema anterior.

De um baralho são tiradas 3 cartas que são colocadas nas posições 1, 2 e 3 viradas para baixo. O concorrente deve indicar uma das cartas e ganha um prémio se ela for um rei. O apresentador conhece as três cartas. Ao concorrente, após escolher uma delas, é dada a faculdada adicional de dizer ao apresentador: "Vire uma das cartas, que ainda não foi virada, que não deve ser um rei, a menos que a isso seja obrigado". Em seguida, depois de ver o resultado, pode alterar a opção inicial, optando pela última carta ainda não virada.

Num concurso, o apresentador mostrou uma carta que não era um rei: terá o concorrente vantagem em mudar a opção inicial?

Quádricas: Manipulação e Visualização

Antonio Ruiz Lozano*
Projecto Matemática em Acção (CMAF - UL)

Introdução

É patente, nos vários níveis de ensino da Geometria, a dificuldade em "ver" no espaço. Visualizar superfícies (resultantes de cortes, obtidas por rotação), imaginar um sólido a partir de uma planificação e executar uma planificação de um dado sólido são disso alguns exemplos.

Nos nossos dias as novas tecnologias oferecem ferramentas cada vez mais sofisticadas para melhorar a "visão matemática", que nos chegam em pacotes de uso mais ou menos complicado, mas que se têm imposto pela sua capacidade em estimular professores e alunos. Ocorre perguntar: Como é que se fazia antigamente? Será que a dificuldade em "ver" não existia?

Em 1859 foi criada na Escola Politécnica a cadeira de Geometria Descritiva. No ano lectivo 1860/61 o programa desta cadeira incluía um estudo desenvolvido de superfícies (de revolução, empenadas do segundo grau tais como parabolóides hiperbólicos e hiperbolóides de um ramo) e problemas relacionados (geratrizes, planos tangentes, intersecções). O lente Luiz Porfírio da Mota Pegado, que regeu a cadeira até 1903, terá então encomendado em 1861 uma colecção de cerca de vinte modelos representativos de superfícies regradas e suas intersecções. Essa colecção, fazendo parte do património do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, foi recentemente depositada no Museu de Ciência da Universidade de Lisboa. Na base de alguns destes modelos encontra-se ainda a etiqueta original do construtor, Fabre de Lagrange, que tinha em meados do século XIX oficina em Paris.

O presente artigo[1] resulta de um trabalho executado no âmbito do Projecto III-472 intitulado "Geometria: manipular e visualizar" proposto ao Programa Ciência Viva pelo Colégio São João de Brito em colaboração com o Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências[2] de Lisboa. Baseia-se em três modelos, réplicas adaptadas de três modelos da colecção. Apresenta a tradução matemática da manipulação dos modelos e a visualização das superfícies por eles geradas (cilindro, cone, hiperbolóide, parabolóide hiperbólico) com o programa "Mathematica". As réplicas executadas e o respectivo estudo matemático estiveram patentes no IV Forum Ciência Viva de Maio último.

Do estudo feito podemos concluir que os modelos do século XIX têm algumas vantagens sobre a tecnologia do limiar do século XXI. De facto não nos podemos esquecer de que a imagem no écran de um computador é uma representação bidimensional de objectos tridimensionais, enquanto que ao manipular o modelo de forma a gerar uma certa superfície, é essa superfície que se está a ver.

---

* Docente do Grupo de Matemática do Colégio São João de Brito, Lisboa.

[1] Visite a página http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/superficies_regradas

[2] O autor agradece a colaboração inestimável de Suzana Metello de Nápoles e as sugestões de Margarida Mendes Lopes e António Bivar. Agradece também os dados fornecidos por Vasco Rivotti relativos sobre a colecção de modelos e a disponibilidade do Museu de Ciência.

Descrição da réplica 1 e a sua manipulação

O modelo 1 A é constituído por dois círculos paralelos com o mesmo raio que sustentam uma rede de fios, com pesos nas extremidades, que simulam um cilindro. O círculo superior pode rodar de um ângulo compreendido entre $-\pi$ e π e deslocar-se longitudinalmente. Quando rodamos o círculo superior a rede de fios deixa de simular um cilindro. No entanto a superfície que descreve é gerada pelas rectas simuladas pelos fios, sendo portanto regrada. O modelo 1 B é análogo mas o círculo superior tem raio menor e a rede de fios simula um tronco de cone.

Réplica 1

Modelação e matematização

Pretendemos estudar o que acontece quando manipulamos os modelos. Para isso vamos expressar matematicamente os objectos que o formam e a acção de rodar que realizamos para obter diferentes superfícies.

As figuras seguintes ilustram os referenciais escolhidos para caracterizar parametricamente as superfícies simuladas pelos fios das réplicas.

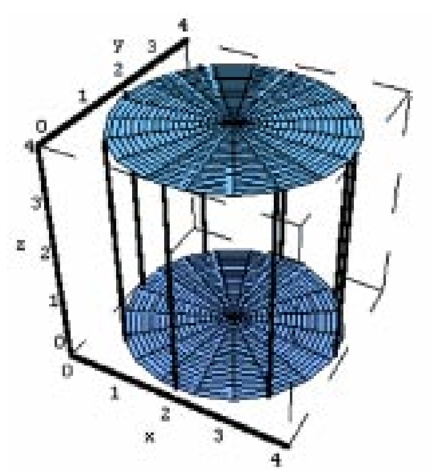


fig 1

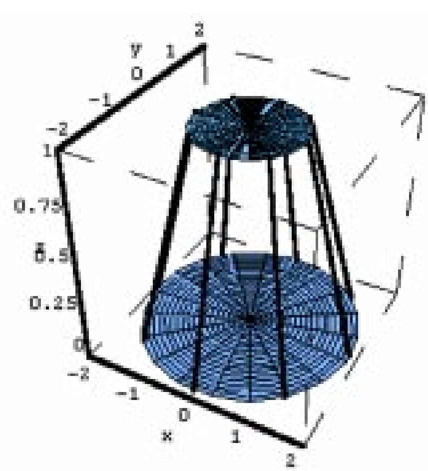


fig.2

A rede

Cada um dos fios une um ponto da circunferência superior com um outro da circunferência inferior. Como estão esticados por pesos, podemos considerar que são segmentos de recta. Apesar de nos modelos os fios serem em número finito (fig. 1 e fig. 2), para o estudo matemático vamos considerar que há infinitos segmentos, um para cada $t \in [0,2\pi]$.

A rede simulada pelos fios (fig.1) no modelo 1 A corresponde à parte de um cilindro definido pelas equações paramétricas:

$(x, y, z) = (2 + 2\text{sen } t\ ,\ 2 + 2\cos t,\ u\ )\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ 0 \leq u \leq 4$

No modelo 1 B a rede simulada pelos fios (fig. 2) corresponde à parte de um cone definido pelas equações paramétricas:

$(x, y, z) = (2\text{sen } t - u \text{ sen } t,\ 2\cos t - u \cos t,\ u),\ 0 \leq t \leq 2\pi\ ,\ 0 \leq u \leq 1$

Rodar o círculo superior móvel

O que acontece quando nos modelos construídos fazemos rodar o círculo superior móvel?

Ao rodarmos o círculo superior os extremos dos fios ligados a ele também rodam. Os extremos do círculo fixo permanecem na mesma posição. Se o círculo roda de α radianos, cada um dos extremos dos fios nesse círculo roda também de α radianos. Permanecendo os fios esticados, a rede simula diferentes superfícies regradas.

No modelo 1 A os extremos dos segmentos para $\alpha \in [-\pi\ ,\ \pi]$ e $t \in [0\ ,\ 2\pi]$ estão definidos por:

$(x, y, z) = (2 + 2\text{sen } t\ ,\ 2 + 2\cos t\ ,\ 0) + k(2\text{sen}(t + \alpha) - 2\text{sen } t\ ,\ 2\cos(t + \alpha) - 2\cos t\ ,\ 4),\ \ 0 \leq k \leq 1$

E no modelo 1 B estes segmentos para $\alpha \in [-\pi\ ,\ \pi]$ e $t \in [0\ ,\ 2\pi]$ estão definidos por:

$(x\ ,\ y\ ,\ z) = (2\text{sen } t\ ,\ 2\cos t\ ,\ 0\ ) + k\ (\ \text{sen}(t + \alpha) - 2\text{sen } t\ ,\ \cos(t + \alpha) - 2\cos t\ ,\ 1),\ \ 0 \leq k \leq 1$

Nas figuras seguintes ilustra-se o que acontece para vários valores de α :

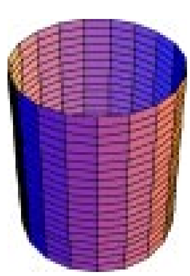


fig 3: Modelo 1 A
Posição inicial ($\alpha = 0$)

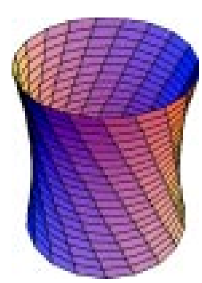


fig 4: Modelo 1 A
($\alpha = \pi/4$)

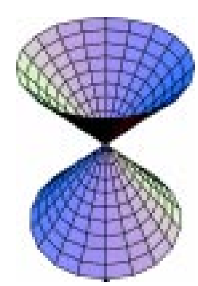


fig 5: Modelo 1 A
($\alpha = \pi$)

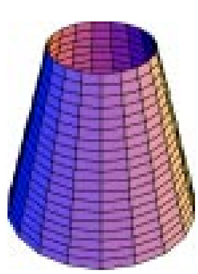


fig 6: Modelo 1 B
Posição inicial ($\alpha = 0$)

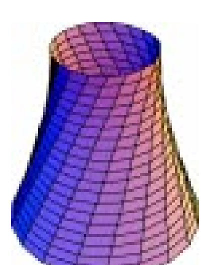


fig 7: Modelo 1 B
($\alpha = \pi/2$)

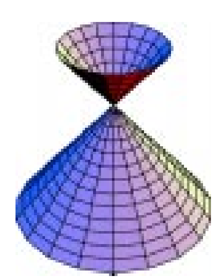


fig 8: Modelo 1 B
($\alpha = \pi$)

Equações paramétricas das superfícies geradas

Quando se roda o círculo móvel de α radianos o modelo 1 A simula uma parte de uma superfície cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\text{sen } t + 2k \text{ sen}(t+\alpha) - 2k \text{ sen } t \\ y = 2 + 2\cos t + 2k\cos(t+\alpha) - 2k\cos t \qquad 0 \le k \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi \qquad \text{para } \alpha \in [-\pi, \pi] \\ z = 4k \end{cases}$$

Fazendo a mudança de variáveis $X = \frac{x-2}{2}$, $Y = \frac{y-2}{2}$ e $Z = \frac{z}{2}$ podemos concluir que se trata de uma quádrica definida pela equação:

$$2X^2 + 2Y^2 - (1 - \cos\alpha)Z^2 + 2(1 - \cos\alpha)Z - 2 = 0$$

Analogamente[3], as equações paramétricas da superfície simulada pelo modelo 1 B, quando se roda o círculo móvel de α radianos, são:

$$\begin{cases} x = 2\text{sen } t + k \text{ sen}(t+\alpha) - 2k \text{ sen } t \\ y = 2\cos t + k\cos(t+\alpha) - 2k\cos t \qquad 0 \le k \le 1,\ 0 \le t \le 2\pi \qquad \text{para } \alpha \in [-\pi, \pi] \\ z = k \end{cases}$$

e podemos concluir que se trata de uma quádrica definida pela equação:

$$x^2 + y^2 - (5 - 4\cos\alpha)z^2 + 4(2 - \cos\alpha)\, z - 4 = 0$$

Estudo da quádrica $2X^2 + 2Y^2 - (1 - \cos\alpha)Z^2 + 2(1 - \cos\alpha)Z - 2 = 0$

Tendo em conta a paridade do coseno, basta estudar a quádrica para $\alpha \in [0, \pi]$

A matriz correspondente a esta quádrica é: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1-\cos\alpha \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1-\cos\alpha & 0 & 0 & -1+\cos\alpha \end{bmatrix}$

Os invariantes métricos são para qualquer $\alpha \in [0, \pi]$:

* $|A| = 4(1 - \cos^2\alpha)$,

* $A_{00} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\cos\alpha \end{vmatrix} = -4 + 4\cos\alpha$,

* $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1+\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1+\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\cos\alpha$

* $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 + \cos\alpha > 0$

[3] Não é necessário neste caso mudar as variáveis tendo em conta o referencial escolhido.

Na tabela seguinte apresenta-se a classificação das superfícies em função do valor de α. Excepto no caso $\alpha = 0$, é preciso ter em conta que o valor absoluto da diferença entre o número de variações de sinal e o número de permanências de sinal da sucessão A_{00}, $\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}$, $a_{11}+a_{22}+a_{33}$ e 1 é igual a 1.

	$\lvert A \rvert$	A_{00}	$\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}$	$a_{11}+a_{22}+a_{33}$	
α	$4(1-\cos^2\alpha)$	$-4+4\cos\alpha$	$4\cos\alpha$	$3+\cos\alpha$	
$\alpha = 0$	0	0	$4>0$	$4>0$	Cilindro elíptico[4]
$0<\alpha<\pi$	+	–	+ ou –	+	Hiperbolóide de uma folha
$\alpha = \pi$	0	$-8<0$	$-4<0$	$2>0$	Cone

Estudo da quádrica $x^2 + y^2 - (5 - 4\cos\alpha)z^2 + 4(2-\cos\alpha)z - 4 = 0$

Como anteriormente, basta estudar a quádrica para $\alpha \in [0, \pi]$

A matriz correspondente a esta quádrica é: $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 4-2\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4-2\cos\alpha & 0 & 0 & -5+4\cos\alpha \end{bmatrix}$

Os invariantes métricos são para qualquer $\alpha \in [0, \pi]$:

* $\lvert A \rvert = 4 - 4\cos^2\alpha$,

* $A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5+4\cos\alpha \end{vmatrix} = -5+4\cos\alpha < 0$

* $\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5+4\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5+4\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -9+8\cos\alpha < 0$

* $a_{11}+a_{22}+a_{33} = -3 + 4\cos\alpha$

Na tabela seguinte apresenta-se a classificação das superfícies em função do valor de α.

É preciso ter em conta que o valor absoluto da diferença entre o número de variações de sinal e o número de permanências de sinal da sucessão A_{00}, $\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}$, $a_{11}+a_{22}+a_{33}$ e 1 é igual a 1.

[4] $A_{11}+A_{22}+A_{33} = -8 < 0$.

	$\lvert A \rvert$	A_{00}	$\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}$	$a_{11}+a_{22}+a_{33}$	
α	$4(1-\cos^2\alpha)$	$-5+4\cos\alpha$	$-9+8\cos\alpha$	$-3+4\cos\alpha$	
$\alpha = 0$	0	$-1<0$	$-1<0$	$1>0$	Cone
$0<\alpha<\pi$	+	−	−	+ ou −	Hiperbolóide de uma folha
$\alpha=\pi$	0	$-9<0$	$-17<0$	$-7<0$	Cone

Conclusões

No modelo 1 A, a rede na posição inicial ($\alpha = 0$) é parte de um **cilindro circular** (fig. 3).

Depois de rodar o círculo móvel de $\alpha = \pi$ ou de $\alpha = -\pi$, a rede é parte de um **cone** (fig. 5).

Para qualquer outra rotação do círculo móvel ($\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \pi \wedge \alpha \neq -\pi$), a rede é parte de um **hiperbolóide de uma folha** (fig. 4).

No modelo 1 B , a rede na posição inicial ($\alpha = 0$) é parte de um **cone** (fig. 6).

Depois de rodar o círculo móvel de $\alpha = \pi$ ou de $\alpha = -\pi$, a rede também é parte de um **cone** (fig. 8).

Para qualquer outra rotação do círculo móvel ($\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \pi \wedge \alpha \neq -\pi$), a rede é parte de um **hiperbolóide de uma folha** (fig.7).

Todas estas superfícies são regradas, isto é, podem ser geradas por rectas. Essas rectas, chamadas geratrizes, são ilustradas nos modelos pelos fios. Nos hiperbolóides de uma folha existem dois sistemas de geratrizes pelo que estas superfícies se dizem duplamente regradas. Por cada ponto de um hiperbolóide de uma folha passa uma geratiz de cada sistema e uma só. Estes dois sistemas visualizam-se pela rotação de ângulos simétricos (veja-se na figura 9 para $\alpha = \pi/4$ e $\alpha = -\pi/4$).

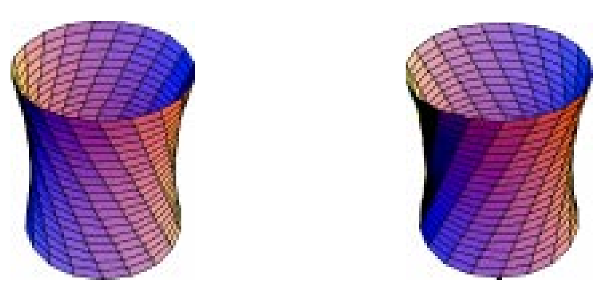
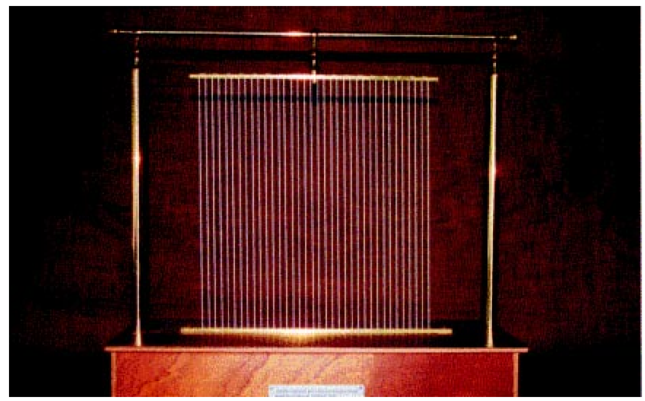


fig. 9

Descrição da réplica 2 e a sua manipulação

Este modelo é constituído por duas barras paralelas que sustentam uma rede de fios, com pesos nas extremidades, que simulam um rectângulo. A barra inferior está fixa. A barra superior pode rodar de um ângulo compreendido entre $-\pi$ e π. Quando manipulamos a barra superior, a rede de fios deixa de simular um rectângulo. No entanto a superfície que descreve é gerada pelas rectas simuladas pelos fios, sendo portanto regrada.



Réplica 2

Modelação e matematização

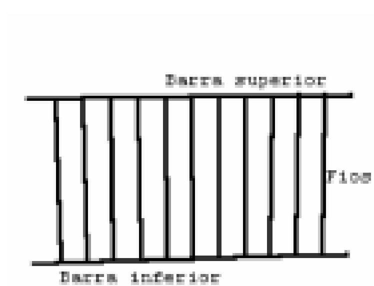


fig. 10

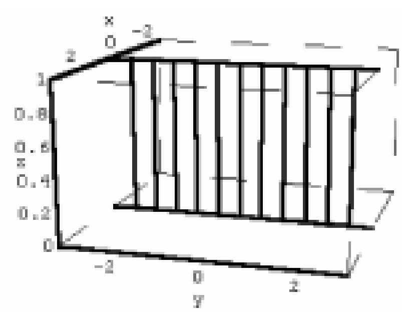


fig. 11

Tal como anteriormente, a figura 11 ilustra o referencial escolhido para caracterizar parametricamente as superfícies simuladas pelos fios desta réplica.

A rede

Cada um dos fios une um ponto da barra inferior com um outro da barra superior. Como estão esticados por pesos, podemos considerar que, na posição inicial, são segmentos de recta paralelos ao eixo Oz. Apesar de no modelo os fios serem em número finito (fig. 10), para o estudo matemático consideramos que há infinitos segmentos, um para cada $t \in [-3,3]$.

A rede de fios simula um rectângulo gerado pelos segmentos. Este rectângulo (fig. 11), assente no plano yOz, está definido pelas equações paramétricas:

$$(x, y, z) = (0, t, u), \quad -3 \leq t \leq 3, \quad 0 \leq u \leq 1$$

Rodar a barra móvel

Ao rodarmos a barra superior os extremos dos fios ligados a ela também rodam. Os extremos da barra fixa permanecem na mesma posição. Se a barra roda de α radianos, cada um dos extremos superiores dos fios roda do mesmo ângulo. Os fios permanecem esticados devido aos pesos. A rede deixa de ser uma superfície plana, gera-se uma nova superfície.

Cada um dos pontos do "segmento móvel" ao rodar descreve uma circunferência no plano de cota 1 com centro no ponto (0,0,1) e raio $|t|$ cuja equação é:

$$(x\ ,\ y\ ,\ z) = (t \text{ sen } \beta\ ,\ t \cos \beta\ ,\ 1\ )\ ,\quad -\pi \leq \beta \leq \pi$$

Quando a barra roda de α radianos a nova superfície está gerada pelos segmentos de extremos $(0, t, 0)$ e $(t\text{sen }\alpha, t\cos \alpha, 1)$. Para $\alpha \in [-\pi\ ,\ \pi]$ e $t \in [-3\ ,\ 3]$ estes segmentos estão definidos por:

$$(x\ ,\ y\ ,\ z) = (0,\ t,\ 0)\ +\ k(t \text{ sen } \alpha\ ,\ t \cos \alpha - t\ ,\ 1)\ ,\quad 0 \leq k \leq 1$$

Na figura 12 e seguintes visualizamos o que acontece para vários valores de α. Nas figuras está representada a circunferência descrita pelos extremos da barra móvel para ilustrar melhor a ideia de movimento.

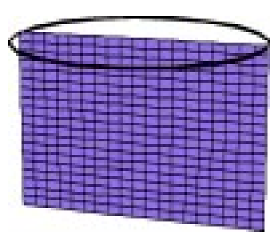


fig. 12: Posição inicial ($\alpha = 0$)

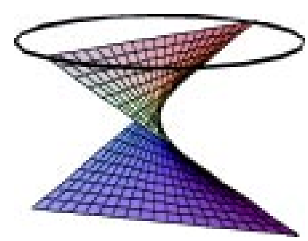


fig.13: $\alpha = 3\pi/4$

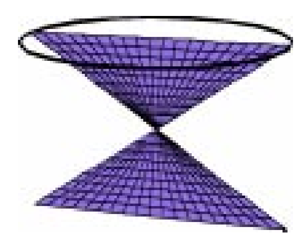


fig. 14: $\alpha = \pi$

Equação da superfície gerada

Pretendemos agora estudar a superfície gerada depois de rodar a barra móvel α radianos. As suas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = kt \text{ sen } \alpha \\ y = t + kt\cos\alpha - kt \quad 0 \leq k \leq 1,\ -3 \leq t \leq 3 \\ z = k \end{cases} \quad \text{para } \alpha \in [-\pi, \pi]$$

Multiplicando a segunda equação por $k \text{ sen } \alpha \neq 0$[5], podemos concluir que esta superfície verifica a condição:

$$\text{sen } \alpha\ yz = x + \cos \alpha\ xz - xz \iff x - (1 - \cos \alpha)\, xz - \text{sen } \alpha\ yz = 0$$

[5] Quando $k \text{ sen } \alpha = 0$, também se verifica a condição indicada. Se $k = 0$, obtemos o "segmento base". Se $\alpha = 0$ obtemos o rectângulo inicial e se $\alpha = \pi$ ou $\alpha = -\pi$, obtemos dois triângulos assentes no rectângulo anterior.

Estudo da quádrica $x - (1 - \cos\alpha)\, xz - \operatorname{sen}\alpha\, yz = 0, \ \alpha \in \,]-\pi, \pi[$ **e** $\alpha \neq 0$

A matriz correspondente a esta quádrica é: $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1-\cos\alpha}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} \\ 0 & -\frac{1-\cos\alpha}{2} & -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Os invariantes métricos são:

$|A| = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{16} > 0$ pois $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, $A_{00} = 0$ e

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{2} \\ \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1-\cos\alpha}{2} \\ -\frac{1-\cos\alpha}{2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2+\cos\alpha}{4} < 0$$

A condição estudada corresponde a um **parabolóide hiperbólico**.

Conclusões

A rede na posição inicial ($\alpha = 0$) é parte de um **plano** (fig.12).

Depois de rodar a barra móvel de $\alpha = \pi$ ou $\alpha = -\pi$, a rede também é parte de um **plano** (fig.14).

Para qualquer outra rotação da barra móvel ($\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \pi \wedge \alpha \neq -\pi$), a rede é parte de um **parabolóide hiperbólico** (fig. 13).

A imagem seguinte ilustra um parabolóide hiperbólico.

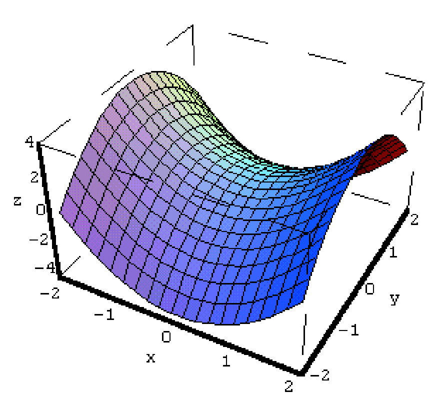


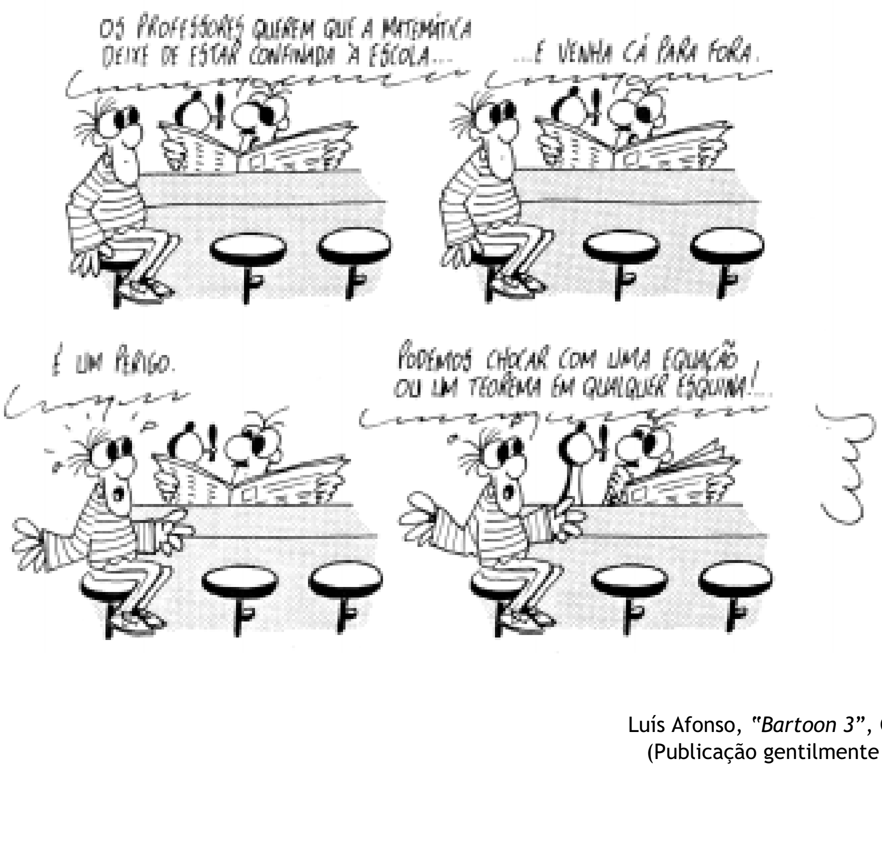
fig. 15

Parece surpreendente que a superfície gerada pelo instrumento seja parte de uma superfície deste tipo. Ajuda a compreendê-lo sabermos que uma das propriedades dos parabolóides hiperbólicos é serem superfícies duplamente regradas. A réplica 2 permite-nos visualizar este modo de gerar uma tal superfície. Os fios fazem parte de uma das famílias de rectas geradoras. Por outro lado, as barras são duas das rectas da outra família.

Bibliografia

ABELLANAS, P., *Geometria Básica,* Madrid, 1969.
ABELLANAS, P., *Elementos de Matemática,* Madrid.
BORSUK, K., *Multidimensional Analytic Geometry*, Varsóvia, 1969.
DIAS AGUDO, F.R., *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica -Vol. II,* Lisboa,1964.
GONÇALVES, J.V., *Curso de Álgebra Superior,* Lisboa, 1953.
LEROY, C.F.A., *Analyse Appliquée a la Geométrie des Trois Dimensions*, Paris, 1854.
LÓPEZ DE LA RICA, A.; DE LA VILLA CUENCA, A., *Geometria diferencial,* Madrid, 1997.
STRUIK, D. J., *Geometria diferencial clásica,* Madrid, 1973.

Bartoon



Luís Afonso, "*Bartoon 3*", Contexto Editora, 2000
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)

O que é um Ponto de Inflexão?

Suzana Metello de Nápoles [1]
Projecto Matemática em Acção (CMAF-UL)

As orientações metodológicas dos programas do ensino secundário actualmente em vigor, ao pretenderem dar um papel preponderante à denominada "investigação" feita pelo aluno com base em situações muito particulares e que conduzem em muitos casos a falsas conjecturas, não podem excluir, muito pelo contrário, obrigam a que, em devido tempo, os conceitos e a compreensão da forma como eles se interligam sejam apresentados como definições e resultados formulados de forma rigorosa e inequívoca, ultrapassando as noções intuitivas e a sua descrição em linguagem corrente.

A formulação precisa dos conceitos é essencial ao desenvolvimento de um raciocínio matemático, por mais elementar que ele seja. Usar simultaneamente diferentes formulações de um mesmo conceito pode dar origem a incoerências que nem sempre são evidentes. O conceito de *ponto de inflexão* constitui um exemplo da necessidade de clarificação da definição adoptada.

Sentido da concavidade

Matematicamente, a designação *inflexão* está usualmente associada a uma mudança do sentido da concavidade do gráfico de uma função.

Assim, a primeira necessidade que surge para formular o conceito de ponto de inflexão do gráfico de uma função é precisar o que se entende por sentido da concavidade do gráfico.

A ideia de sentido da concavidade do gráfico de uma função é geometricamente intuitiva.

Etimologicamente, a palavra concavidade está associada a cavidade, à forma "cavada" ou "escavada" ou "côncava" de um objecto. A utilização matemática do termo concavidade respeita o seu significado etimológico.

Quando se afirma, por exemplo, que a concavidade do gráfico da parábola $x^2=y$ está voltada para cima, está-se a dizer que o conjunto de pontos do plano $\left\{(x,y) \in I\!R^2 : y \le x^2\right\}$ é côncavo (não convexo), isto é que o conjunto $\left\{(x,y) \in I\!R^2 : y \ge x^2\right\}$ é convexo.

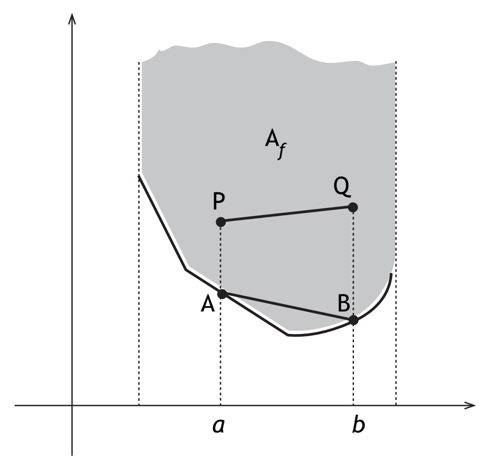
[1] Os comentários e sugestões da Dra. Manuela Ferreira, fruto do seu espírito de rigor aliado à sua experiência como docente universitária e pré-universitária, foram determinantes para a redacção deste artigo.

Genericamente:

Definição 1.

O gráfico de uma função f tem a concavidade voltada para cima num intervalo aberto I de IR se o conjunto $A_f = \left\{ (x,y) \in IR^2 : x \in I,\ y \geq f(x) \right\}$ é convexo, isto é, se dados quaisquer dois pontos em A_f, o segmento de recta que os une está totalmente contido em A_f.
O gráfico de uma função f tem a concavidade voltada para baixo num intervalo aberto I de IR se o gráfico de $-f$ tem a concavidade voltada para cima em I.

Mas dizer que o conjunto A_f é convexo é equivalente a afirmar que para quaisquer pontos a e b pertencentes a I tais que $a < b$, o gráfico de f em [a,b] está abaixo do gráfico do segmento de extremos *(a,f(a))* e *(b,f(b))*, isto é, $f(x) \leq r(x)$, $\forall x \in I$, em que $r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ é a equação da recta que passa pelos pontos *(a,f(a))* e *(b,f(b))*.



Com efeito:

Se A e B são quaisquer dois pontos sobre o gráfico de f com abcissas a e b e se A_f é um conjunto convexo, o segmento com extremos A e B está contido em A_f, e assim qualquer ponto *(x,f(x))* com x ∈ [a,b] está abaixo do segmento de extremos A e B.

Reciprocamente, tomem-se quaisquer dois pontos P e Q em A_f, com abcissas a e b. Se todo o ponto *(x,f(x))* com x∈[a,b] está abaixo do segmento de extremos A e B, o segmento de extremos A e B está totalmente contido em A_f , o mesmo se passando então com o segmento de extremos P e Q, já que este está acima do segmento de extremos A e B.

Assim, a definição 1 é equivalente a:

Definição 1'.

O gráfico de uma função f tem a concavidade voltada para cima num intervalo aberto I de IR se para quaisquer pontos a e b pertencentes a I tais que a<b, o gráfico de f em [a,b] está abaixo do segmento de recta de extremos *(a,f(a))* e *(b,f(b))*.

No Ensino Secundário o estudo do sentido da concavidade do gráfico de uma função faz-se apenas para funções diferenciáveis. Trata-se de um estudo intuitivo que associa a forma do gráfico à variação do declive das tangentes em pontos sucessivos do gráfico: se o declive aumenta quando o ponto de tangência se desloca da esquerda para a direita, o gráfico tem a concavidade voltada para cima e se o declive diminui, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo. Atendendo a que o aumento do declive está associado ao crescimento da função derivada, tem-se:

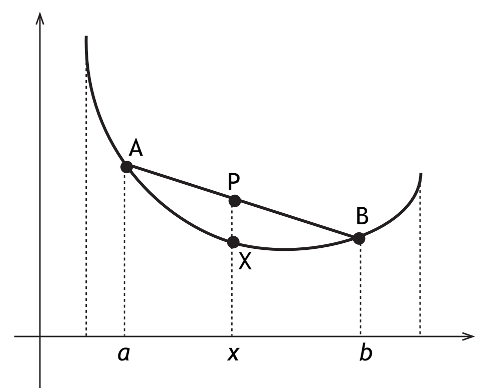
Definição 2.

O gráfico de uma função f , diferenciável num intervalo aberto I de IR, tem a concavidade voltada para cima em I se *f'* é crescente em I.

Se *f* é diferenciável num intervalo aberto *I* de *IR*, as definições 1 e 2 são equivalentes.

Com efeito:

Suponha-se que A_f é convexo em *I* e sejam a, b $\in$ *I* tais que a<b. Considerem-se os pontos A(a,*f*(a)), B(b,*f*(b)) e seja P o ponto sobre o segmento [AB] (de extremos A e B) com abcissa x. Comparem-se os declives dos segmentos [AX], [AP], [PB] e [XB], em que X é o ponto do gráfico de *f* com abcissa x.



Tem-se:

declive de [AX]$\leq$ declive de [AP] = declive de [PB]$\leq$ declive de [XB], isto é,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \ .$$

Como *f* é diferenciável em *a* e em *b*, passando ao limite quando x $\to a^+$ e x $\to b^-$, conclui-se que

$$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b) \quad ,$$

e assim, *f'(a)* $\leq$ *f'(b)*.

Reciprocamente, suponha-se que *f'* é crescente no intervalo aberto *I*, tomem-se dois pontos a, b $\in$ *I* tais que a<b e verifique-se que o gráfico de *f* em [a, b] se encontra abaixo do segmento de extremos A*(a,f(a))* e B*(b,f(b))*, isto é, A_f é convexo (definição 1').

Seja então *r(x)* = *mx* + *p* a equação da recta AB e prove-se que, para todo o *x* em [*a*,*b*] se tem *g(x)*= *r(x)* - *f(x)*≥*0*.

Como *g* é diferenciável em [*a*,*b*] e *g(a)* = *g(b)* = *0*, existe $c \in \,]a,b[$ tal que *g'(c)* = *0* (pelo teorema de Rolle). Como, por hipótese, *f'* é crescente e *I* e *g'(x)* = *m* - *f'(x)*, *g'* é decrescente em *I*.

Assim:

- $x \in \left] a, c \right[\Rightarrow g'(x) \geq g'(c) = 0 \Rightarrow g$ é crescente em [*a*,*c*] $\Rightarrow g(x) \geq g(a) = 0$;
- $x \in \left] c, b \right[\Rightarrow g'(x) \leq g'(c) = 0 \Rightarrow g$ é decrescente em [*c*,*b*] $\Rightarrow g(x) \geq g(b) = 0$.

Então g(x)≥0 , $\forall x \in \left[a, b\right]$ e A_f é convexo.

No caso da função f ser duas vezes diferenciável num intervalo aberto I, resulta da definição 2 a caracterização das concavidades da função à custa do sinal da segunda derivada:

Teorema 1

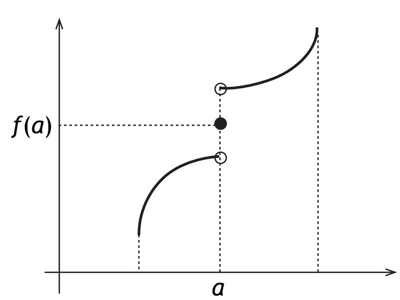
Seja f uma função duas vezes diferenciável num intervalo aberto I. O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I se e só se $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.

A demonstração deste teorema resulta imediatamente da relação bem conhecida entre o crescimento de uma função diferenciável num intervalo e o sinal da sua derivada.

Ponto de inflexão

Tal como se disse anteriormente, a designação de ponto de inflexão está usualmente associada a uma mudança do sentido da concavidade (para cima ou para baixo) do gráfico de uma função à esquerda e à direita desse ponto, isto é, uma função f tem uma inflexão para $x = a$, ou no ponto $(a,f(a))$, se no ponto $(a,f(a))$ se verifica a mudança do sentido de concavidade do seu gráfico.

Assim, a função f representada no gráfico seguinte, tem uma inflexão para $x = a$:



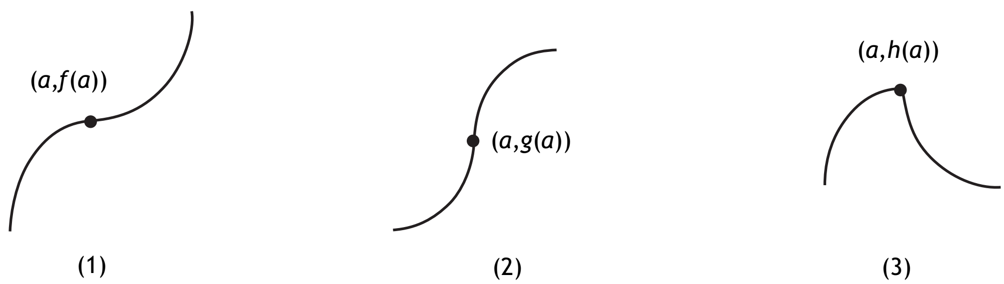
A designação de ponto de inflexão é geralmente reservada para pontos onde a função é contínua.

Mais precisamente:

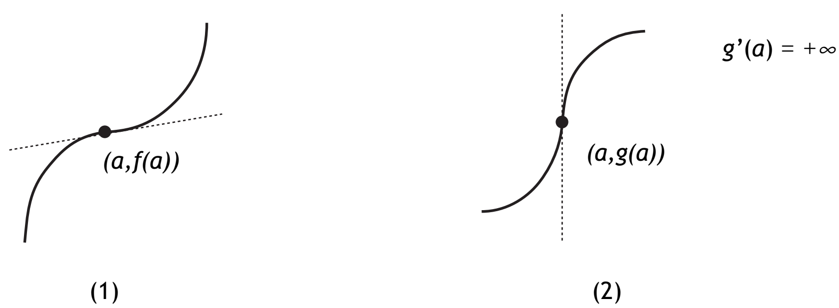
Definição 3:

Seja I intervalo aberto, a um ponto de I, e f uma função contínua em I. A função tem um **ponto de inflexão** para x = a, ou no ponto $(a,f(a))$, se existe $\varepsilon > 0$ tal que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima (para baixo) em $]\, a-\varepsilon, a\,[$ e voltada para baixo (para cima) em $]\, a, a+\varepsilon\,[$.

Nas figuras seguintes ilustram-se pontos de inflexão, de acordo com a definição anterior:



Um grande número de autores (ver, por exemplo, [1], [4], [5], [6]) definem ponto de inflexão apenas para funções com derivada (finita ou infinita) nesse ponto. Assim, não consideram que exista ponto de inflexão no caso (3).
Da observação dos exemplos (1) e (2) parece que a existência de inflexão está associada à posição relativa entre a tangente no ponto (a tracejado na figura) e o gráfico da função, à sua direita e à sua esquerda.



Ponha-se então a seguinte definição:

Definição 4:

Seja I um intervalo aberto de IR, $a \in I$, $f: I \to IR$ uma função com derivada no ponto a. Designe-se por t a tangente em $(a,f(a))$.
(i) Se f tem derivada finita em a, o ponto $(a,f(a))$ é um ponto de inflexão se em $]a-\varepsilon, a[$ o gráfico de f está acima (abaixo) de t e em $]a, a+\varepsilon[$ o gráfico de f está abaixo (acima) de t.
(ii) Se f tem derivada infinita em a, o ponto $(a,f(a))$ é um ponto de inflexão se em $]a-\varepsilon, a[$ o gráfico de f está à direita (à esquerda) de t e em $]a, a+\varepsilon[$ o gráfico de f está à esquerda (à direita) de t.

Comparem-se as definições 3 e 4. A definição 3 parece contemplar mais casos de ponto de inflexão, como o ilustrado em (3). Será que, no caso da função considerada ter derivada num ponto a, é equivalente afirmar que existe mudança de sentido de concavidade do gráfico da função à esquerda e à direita de a e que o gráfico da função "atravessa" a tangente em $(a,f(a))$?

A resposta é negativa.

Com efeito, considere-se a função definida em IR por

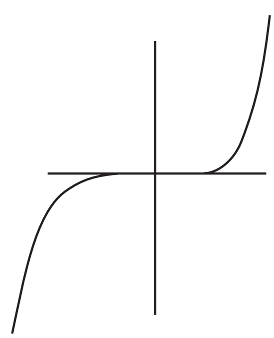
$$f(x) = \begin{cases} x^5\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+2\right) & \text{se } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{se } \ x = 0 \end{cases}$$

Trata-se de uma função duas vezes diferenciável em *IR*, tendo-se

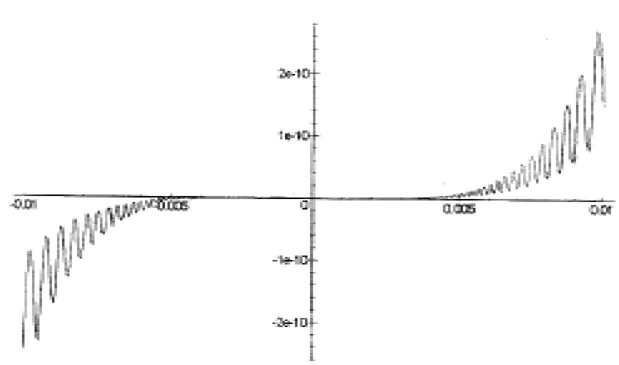
$$f'(x) = \begin{cases} 5x^4\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+2\right) - x^3\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{se } \ x = 0 \end{cases}$$

A equação da tangente ao gráfico de *f* no ponto (0,0) é $t(x) = 0$. Tem-se $f(x) > t(x)$ para $x > 0$ e $f(x) < t(x)$ para $x < 0$. Então, de acordo com a definição 4, (0,0) é um ponto de inflexão.

Uma análise precipitada das características da função a partir de um seu gráfico, como o ilustrado na figura seguinte pode levar a concluir que também existe uma mudança do sentido da concavidade em (0,0).



Mas a imagem seguinte, obtida para $x \in [-0{,}01;\, 0{,}01]$, já alerta para a possibilidade da não conservação do sentido da concavidade em nenhum intervalo $]-\varepsilon, 0[$ ou $]0, \varepsilon[$ para $\varepsilon < 0{,}01$:

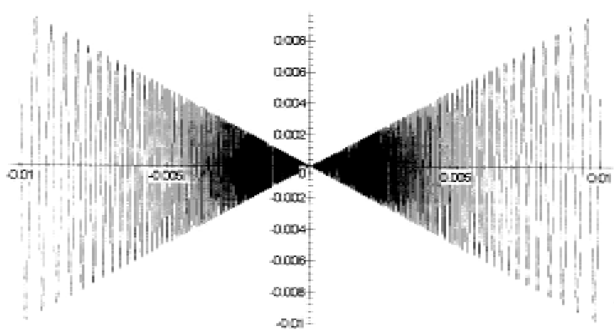


Analise-se a segunda derivada de f:

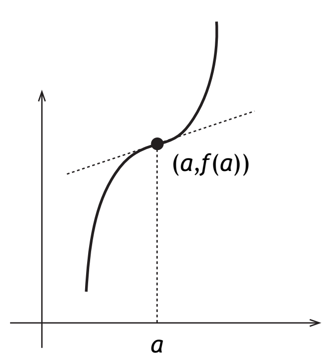
$$f''(x) = \begin{cases} 20x^3\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2\right) - 8x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Observe-se que $f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right) < 0$ e $f''\left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}\right) > 0$, com $n \in IN$, não se podendo portanto dizer que f'' seja positiva ou negativa em algum intervalo $\left]-\varepsilon, 0\right[$ ou $\left]0, \varepsilon\right[$ (para $\varepsilon<1/6$), pelo que, de acordo com a definição 3, não existe inflexão em (0,0).

Representa-se no gráfico seguinte a função f'' no intervalo [-0,01;0,01], que evidencia o facto de f'' não ser positiva ou negativa em nenhum intervalo $\left]-\varepsilon, 0\right[$ ou $\left]0, \varepsilon\right[$, para $\varepsilon<0{,}01$:



Observe-se que, no caso de a função f ser diferenciável em a, a definição 3 implica a definição 4. Com efeito suponha-se que f tem um ponto de inflexão em $(a,f(a))$, de acordo com a definição 3. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que em $\left]a-\varepsilon, a\right[$ e em $\left]a, a+\varepsilon\right[$ o sentido das concavidades é diferente. Considere-se o caso em que em $\left]a-\varepsilon, a\right[$ a concavidade está voltada para baixo e em $\left]a, a+\varepsilon\right[$ a concavidade está voltada para cima (sendo a verificação análoga no caso do sentido das concavidades ser oposto).



Se o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]a,\ a+\varepsilon\right[$, conforme já se observou a propósito da equivalência das definições 1 e 2 de sentido da concavidade, se $b \in \left]a,\ a+\varepsilon\right[$, então $f'(a) = f'_d(a) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e assim $f(b) \geq f(a) + f'(a)(b-a)$, isto é o gráfico de f está, em $\left]a,\ a+\varepsilon\right[$, acima da tangente em (a,f(a)). Analogamente se verifica que o gráfico de f está, em $\left]a-\varepsilon,\ a\right[$, abaixo da tangente em (a,f(a)). Então, o ponto (a,f(a)) é um ponto de inflexão de acordo com a definição 3.

O resultado seguinte dá uma condição necessária para a existência de ponto de inflexão, podendo a inflexão ser entendida no sentido da definição 3 ou da definição 4:

Teorema 2:

Se a função f definida num intervalo aberto I de IR é duas vezes derivável num ponto $a \in I$ e f tem um ponto de inflexão em $(a,f(a))$, no sentido da definição 3 ou da definição 4, então $f''(a) = 0$.

Este resultado é apresentado por vários autores como uma aplicação da fórmula de Taylor (veja-se, por exemplo, [1], [4], [6]).

A condição expressa no teorema 2 não é suficiente para a existência de ponto de inflexão. Com efeito, a função $f: IR \to IR$ definida por $f(x) = x^4$ é tal que $f''(0) = 0$ e f não tem um ponto de inflexão em (0,0).

Conclusão

Para as definições 3 e 4 encontram-se exemplos em que existe ponto de inflexão de acordo com uma delas e não existe ponto de inflexão de acordo com a outra.

Das definições dadas nenhuma é "mais verdadeira" que a outra. Elas coincidem em algumas situações, mas são definições diferentes, pelo que a análise da existência de inflexão, usando uma e outra, pode conduzir a conclusões diferentes. É pois essencial clarificar qual a definição adoptada.

Bibliografia

[1] Campos Ferreira, J., *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (1993)

[2] Choquet, G., *Cours d'Analyse - tome II - Topologie*, Masson et C ie, Paris (1969)

[3] Dixmier, J., *Cours de Mathématique du premier cycle*, Gautier-Villars Éditeur, Paris (1972)

[4] Figueira, M., *Fundamentos de Análise Infinitesimal*, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (1996)

[5] Gonçalves, J. Vicente, *Curso de Álgebra Superior*, Lisboa (1953)

[6] Guerreiro, J. Santos, *Curso de Análise Matemática*, Escolar Editora (1989)

[7] Sebastião e Silva, J. e Silva Paulo, J.D., *Compêndio de Álgebra*, Tomo 1, Braga (1970)

[8] Smirnov, V.I., *A course of Higher Mathematics*, vol. I, Pergamon Student Editons, Londres (1964)

[9] Swokowski, E.W., *Cálculo com Geometria Analítica*, McGraw-Hill, São Paulo, (1983)

Federação de Associações e Sociedades Científicas. Deveria Existir?

Graciano de Oliveira
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Muitos pensam que as sociedades científicas ainda não conseguiram o peso desejável nem a importância que merecem. Apesar do que se tem feito, há dificuldades; um sinal está no facto de, por norma, quando há eleições para as Direcções, surgir uma só lista não proporcionando espaço para confronto de concepções. Podem adiantar-se várias explicações: há falta de hábitos associativos, esperando-se que as iniciativas partam do Estado, os sócios (dirigentes) estão demasiado sobrecarregados com o seu trabalho profissional, não existem leis protectoras de tais associações, há dificuldades financeiras (embora exista uma lei do mecenato, os empresários portugueses, salvo raras excepções, não morrem de amores pela Ciência).

As associações científicas podem e devem desempenhar um papel importante na promoção da investigação e do ensino e opinando junto aos decisores políticos. E cabe-lhes também uma tarefa que no nosso país é essencial: a divulgação da Ciência, tanto o que ela é como o que faz.

A divulgação da Ciência serve também para transmitir a ideia da sua importância. É óbvio que não existe, na sociedade portuguesa, o sentimento generalizado da importância da Ciência. A esfera económica precisa pouco dela, passa bem com a importação de *know how* e o pagamento de salários baixos parece ser mais atraente do que altas cavalarias científicas ou tecnológicas.

Temos um Ministério da Ciência e Tecnologia, mas é significativo que nunca haja crises políticas nem grandes debates na Assembleia da República motivados pelas orientações daquele ministério. Nas campanhas eleitorais fala-se de reforma fiscal ou da política da saúde, a política científica não lembra a ninguém. Discute-se muito se o Estado deve subsidiar a cultura, se, subsidiando-a, não está, de algum modo, a orientá-la. Os mesmos problemas se podem pôr a respeito da Ciência. Só que a Ciência não interessa a ninguém ou, para ser mais optimista, interessa a muito poucos, quase só aos cientistas. O Estado deve ignorar a Ciência, deixando o seu destino entregue à mão invisível do mercado? Deve orientá-la? Deve protegê-la, mas abdicando da sua orientação?

Importância de uma revista dedicada à divulgação da Ciência

Algo se tem feito, reconheça-se, mas muito há ainda a fazer. No que respeita à divulgação, uma ideia desde logo surge: não existe, entre nós, nenhuma revista dedicada à divulgação científica para o grande público. Provavelmente nenhuma das nossas associações científicas terá capacidade para publicar uma revista com a qualidade de outras existentes noutros países. Quando há falta de forças ocorre-nos um ditado: a união faz a força. Note-se ainda que uma tal revista não deveria só dedicar-se a uma Ciência, mas a todas, o que reforça a ideia de reunião de esforços. Podia divulgar a Ciência e, simultaneamente, ser um forum de discussão.

Mas como concretizar essa reunião de esforços?

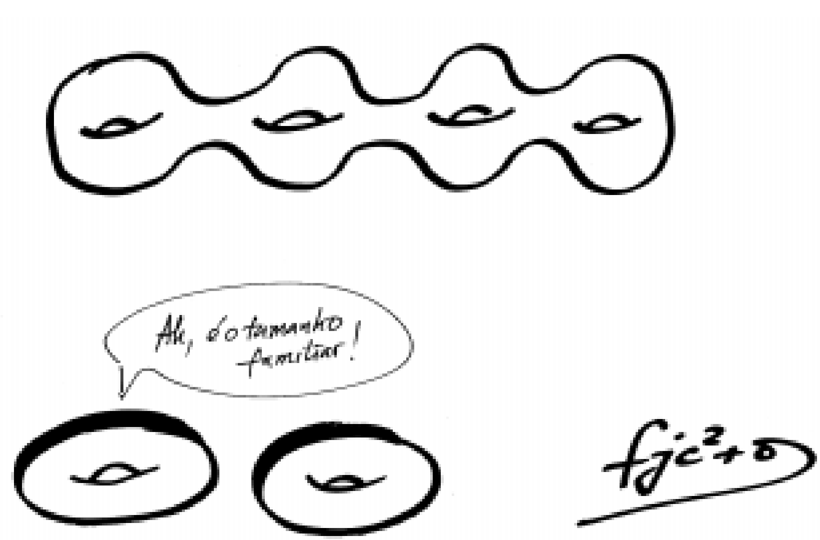
O Ano Mundial da Matemática evidenciou algumas dificuldades e também motivou acções e diligências que convém notar.

Quero referir-me aos vários contactos desenvolvidos pela SPM, bem como reuniões com dirigentes de outras associações que têm interesse na Matemática e com representantes de Escolas e Departamentos de Matemática. Criou-se assim uma dinâmica, talvez incipiente, mas que conviria continuar. Como fui Presidente da Direcção da SPM até Julho de 2000, participei nesses contactos e estou convencido de que se podem recolher mais frutos. Ouvi comentários no sentido de que os contactos e reuniões referidos deviam institucionalizar-se e até a sugestão de que seria vantajoso fundar uma Federação de Associações Científicas. O curioso é que tal federação já existe, só que é pouco conhecida.

A FEPASC tem de mostrar que existe

O seu nome oficial é Federação Portuguesa das Associações e Sociedades Científicas (FEPASC) e funcionou na R. António Maria Cardoso, nº 68, 1º em Lisboa, tendo conseguido uma sede, em fins de 1999, no Jardim Botânico da Faculdade de Ciências. A FEPASC foi constituída em 20 de Março de 1991. A SPM, no tempo em que fui Presidente, teve contactos com a Federação e solicitou-lhe mesmo apoio para as comemorações do Ano Mundial da Matemática. Várias vezes inquiri, em eventos organizados pela SPM, se alguém conhecia a FEPASC, mas, tanto quanto me lembro, obtive sempre resposta negativa. Seria bom que a FEPASC, além de existir, fosse reconhecida como existente pela comunidade científica. Embora todas as associações, FEPASC incluída, lutem com as dificuldades que referi no início, é a FEPASC que tem de mostrar que existe.

A FEPASC bem poderia ser a entidade promotora da revista de que falei, uma vez que um grande número de sociedades, dos mais variados ramos da Ciência, são suas associadas.



Matemática na Internet com o LaTeX

Delfim Fernando Marado Torres
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Resumo

Em [1] vimos as razões porque um matemático, um professor ou estudante de matemática deve usar o LaTeX. Mostramos agora que o LaTeX é também a escolha indicada no mundo da Internet: para publicação de textos matemáticos na Web. Aprenderemos como fazer uso do "Portable Document Format" com o LaTeX; a converter os nossos documentos para HTML; a usar matemática em aplicações Web; a usar o LaTeX para preparar páginas Web.

1. Introdução

A World Wide Web (WWW) invadiu a nossa sociedade e a Matemática não é nenhuma excepção. Os recursos *online* têm permitido a emergência de autênticas comunidades de trabalho e aprendizagem em Matemática, onde o elemento interactividade e comunicação desempenham um papel efectivo.

Neste artigo explicamos como o LaTeX pode ser usado como a componente central para uma estratégia de preparação de documentos electrónicos para a WWW, documentos estes que se têm tornado comuns em Matemática e muitas vezes mesmo necessários. A tese é que o ambiente Web é mais um motivo porque devemos usar o LaTeX em Matemática.

Colocando de lado os tópicos ainda em ebulição de como usar o LaTeX para produzir documentos MATHML e XML (*vide* [4]), abordamos a questão da conversão dos documentos para HTML (a linguagem ubíqua da WWW); apontamos as limitações do HTML e dos actuais *browsers* na representação de objectos matemáticos; e terminamos com o tópico da conversão dos documentos LaTeX para "Portable Document Format" (PDF), que nos permite um casamento harmonioso entre o mundo do hipertexto e o mundo dos documentos impressos.

Ao longo dos últimos anos várias ferramentas foram desenvolvidas. As que aqui apresentamos são as que usamos frequentemente – as que nos são mais familiares e úteis.[1] Estão disponíveis como software livre e podem ser encontradas em qualquer arquivo CTAN (*vide* [1]).

Se ainda não é membro do TeX Users Group (TUG) aconselhamos vivamente a fazê-lo (consulte a página do TUG em `http://www.tug.org`). É uma boa maneira de contribuir para o desenvolvimento do LaTeX e se ir mantendo actualizado das várias ferramentas que vão sendo desenvolvidas. Anualmente receberá um CD-ROM com o TeX Live: uma distribuição livre e muito completa de LaTeX, que poderá usar em diferentes plataformas computacionais e que inclui todas as ferramentas aqui mencionadas. Evitará assim a instalação de tais programas, instalações essas nem sempre triviais e que não serão aqui abordadas.

[1] Mais ferramentas, livres e comerciais, estão descritas em [2].

2. Do texto ao hipertexto

Com o advento da Internet, pelas suas facilidades e massificação, ela passou a ser, também em Matemática, o principal elemento de interactividade. A comunidade LaTeXiana não tem estado alheia a este facto, em particular no que toca ao hipertexto – uma das principais características do ambiente Web.

O hipertexto permite-nos fazer uma leitura mais cómoda de um documento, ao permitir saltar directamente para as equações, secções, tabelas, figuras, referências bibliográficas, etc., a partir do ponto do texto onde elas são referenciadas. Uma aposta recente da *American Mathematical Society* no hipertexto, é o projecto *MR Lookup*. O objectivo é podermos aceder, na medida do nosso interesse, directamente aos resumos, recensões críticas e aos próprios artigos que vão sendo citados ao longo de um documento. A versão hipertexto do presente artigo, disponível em

`http://www.mat.ua.pt/delfim/artigos/texweb.pdf`

permite ilustrar este aspecto ao permitir aceder ao documento [1] com um simples clique do rato.

Um package muito útil, diríamos mesmo obrigatório, na transformação de texto em hipertexto, é o `hyperref`. Ele extende a funcionalidade de todos os comandos de referenciação do LaTeX, incluindo os índices e referências bibliográficas, permitindo a criação de documentos interactivos com hiperlinks. Permite também ao autor de um documento escrever hiperlinks para outros documentos e para endereços em ambiente Web. Podemos usá-lo para produzir hipertexto em vários formatos (e.g. DVI ou PDF). Foi assim que obtivemos a versão hipertexto do presente artigo, onde o leitor poderá apreciar as funcionalidades hipertextuais indicadas.[2]

O package `hyperref` merece um artigo por si só e será objecto da nossa atenção em artigo futuro[3]. Aqui bastará dizer que o seu comportamento implícito já disponibiliza um conjunto de funcionalidades que justificam o seu uso. Basta incluir o comando

```
\usepackage[opçao]{hyperref}
```

no preâmbulo do documento LaTeX, com `opcao` a especificar o método pelo qual o formato hipertexto será obtido. Por exemplo, se quisermos obter um hipertexto em PDF como nas secções §4.1, §4.2 ou §4.3, devemos fazer `opcao` respectivamente igual a `pdftex`, `dvipdfm` ou `dvips`.

3. O HTML e o LaTeX

A WWW é hoje um meio cultural global, cuja essência assenta na comunicação. O HTML é a linguagem universal presente na maioria dos documentos da Web e vários métodos têm sido propostos de modo a converter os documentos matemáticos, escritos em LaTeX, para esta linguagem. Esta conversão permite-nos ver a WWW e os seus documentos electrónicos como mais um veículo para os matemáticos comunicarem os seus resultados e ideias. Tem também vindo a tornar-se prática corrente, nos documentos impressos, a indicação de endereços Web onde o leitor pode encontrar informação suplementar. Em muitos casos, o trabalho em matemática é primeiro disponibilizado na WWW, antes de ser publicado como um artigo numa revista especializada. Basta ver as inúmeras bases de dados de "preprints", que muito contribuem para a rápida disseminação da informação, para ver que assim é. Nós matemáticos, habituados a usar o LaTeX na escrita de documentos, não teremos de optar entre a qualidade tipográfica do LaTeX e conectividade global da WWW. Podemos ter ambas! Quem conhece a linguagem LaTeX e a HTML, rapidamente se apercebe que ambas partilham a mesma filosofia: o paradigma WYSIWYM (*vide* [1]). Este

---

[2] Aconselhamos o leitor a fazer tal apreciação. A leitura de uma versão hipertextual, conjuntamente com uma ligação à Internet, pode ser muito mais enriquecedora do que a leitura da correspondente versão impressa...

[3] O package `hyperref` é simplesmente fenomenal, permitindo-nos, por exemplo, a criação de testes de escolha múltipla, com correcção automática, em PDF ou HTML, a partir do nosso querido LaTeX.

facto torna relativamente fácil a conversão. O grande problema é que o HTML é uma linguagem pobre quando comparada com o LaTeX. Isto é particularmente verdade no que diz respeito a tabelas, fórmulas matemáticas e caracteres não *standard*, como por exemplo os símbolos gregos, tão usados em matemática. A solução adoptada pelas ferramentas que apresentamos, já de seguida, é a conversão de tais elementos problemáticos para imagens *bitmat*.[4] A desvantagem é a perda de qualidade: a informação aparece de modo correcto, mas o tamanho da letra, estilo e outros elementos de visualização usados pelo *browser*, tendem a empobrecer a apresentação do texto.

Na secção §4 veremos outra abordagem que elimina esta desvantagem: o uso do PDF em vez de HTML.

3.1. O LaTeX 2HTML

Este tradutor usa a linguagem de programação Perl para interpretar o código fonte do LaTeX (o ficheiro .tex) e produzir o correspondente código HTML. É um programa bem conhecido dos utilizadores Linux, embora possa ser usado noutros sistemas, como por exemplo no Windows (em princípio pode ser usado em qualquer sistema onde estiver disponível a linguagem Perl). Todas as informações sobre este conversor podem ser encontradas em `http: //saftsack.fs.uni-bayreuth.de/~latex2ht`.

O seu uso requer a presença de outros programas: Perl; LaTeX; dvips; Ghostscript e netpbm. Quando o HTML não é suficiente para representar uma porção de informação presente no ficheiro .tex, o compilador de LaTeX é usado para produzir o .dvi correspondente a essa informação, o `dvips` converte-o para .ps, enquanto o Ghostscript converte o PostScript para um formato *bitmap* compatível com o HTML. Por fim os utilitários do `netpbm` realizam uma série de processamento gráfico: corte, transparência das imagens de modo a não se distinguirem no meio do texto, ajuste de cores, etc. Todo este processo é feito pelo LaTeX2HTML de modo automático. Como já dissemos, a maneira trivial de usar os conversores para .html é possuir uma distribuição de LaTeX que os já disponibilize, configurados com as restantes ferramentas necessárias.

3.2. O TeX4ht

O TeX4ht (`http://www.tug.org/applications/tex4ht/mn.html`) é um sistema que permite criar hipertexto configurável, a partir de documentos LaTeX. Trata-se de um acrescento ao sistema de LaTeX, em que o resultado pode ser configurado para diferentes formatos. Por defeito produz-se HTML, mas também pode ser usado, por exemplo,para produzir XML, MATHML incluído (`http://www.tug.org/applications/tex4ht/mml`) [5].

O MATHML tem por objectivo facilitar o uso de conteúdo matemático e científico na Web e é uma das concretizações do XML. É uma linguagem em pleno desenvolvimento (`http://www.w3.org/Math`); com inúmeras potencialidades; e já com expressão em inúmeras aplicações (veja-se o exemplo dos sistemas de computação algébrica, como por exemplo o *Maple* ou o *Mathematica*, que já suportam informação em MATHML).

Para converter um ficheiro LaTeX em HTML com o TeX4ht, muitos utilizadores acharão suficiente o package `text4ht.sty`. Na sua forma mais simples, basta incluir o comando

```
\usepackage[html]{tex4ht}
```

no preâmbulo do documento .tex.

Com o TeX4ht, a tradução de um ficheiro .tex em hipertexto requer três fases: a compilação em .dvi; manipulação do .dvi pelo `tex4ht`; criação do hipertexto a partir do DVI modificado. No terceiro passo pode ser necessário, como já vimos, a produção de imagens *bitmap*. Para esse fim, o TeX4ht requisita o serviço de outras

[4] Quando os documentos LaTeX incluem apenas texto, sem os elementos problemáticos apontados, o conversor TtH (`http://hutchinson.belmont.ma.us/tth`) é suficiente.

[5] É também possível usar o LaTeX2HTML para gerar MATHML: `http://www.geom.umn.edu/~ross/webtex/webtex`.

ferramentas, tal como o LaTeX 2HTML. Todo este processo é feito de um modo automático.

4. O PDF e o LaTeX

Em alguns casos, a disseminação de informação em HTML não é a mais apropriada. Tudo se prende com o facto de no HTML a formatação das "páginas" ser da reponsabilidade do software que o leitor do texto usa para as visualizar (do *browser* usado) e não da responsabilidade do autor. Os gráficos e imagens aparecem muitas vezes com uma baixa resolução e cores despropositadas. A impressão do texto a partir do *browser* não produz resultados de boa qualidade. O autor não saberá sequer qual o tipo de letra usado...

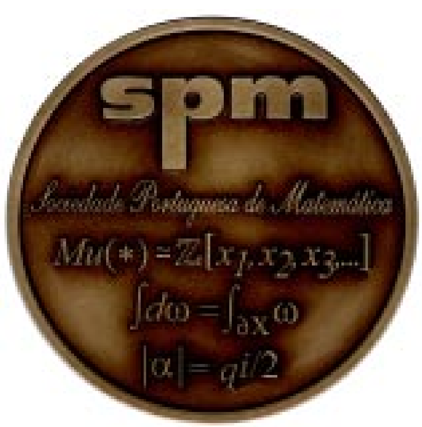
Quando um matemático perde o seu precioso tempo na escolha dos símbolos mais apropriados, a quebrar equações nos sítios certos, a construir tabelas e gráficos de fácil leitura, etc., tal comportamento é inaceitável. Nesta secção descrevemos uma solução – o uso do PDF.

O PDF é um formato descendente da linguagem PostScript, ambas desenvolvidas pela Adobe. Embora seja um formato registado, é um formato aberto: a sua especificação está publicada e bem documentada (*vide, v.g.*, [3]). Entre as suas características salientamos o hipertexto; a preservação do aspecto das páginas, tal como o autor as projectou; portabilidade entre diferentes plataformas computacionais; e qualidade de impressão profissional. Desde o milénio passado (desde 1996), é possível visualizar os documentos PDF com os comuns *browsers*, a par do HTML. Outro aspecto importante é que o PDF inclui mecanismos de compressão de modo a manter o tamanho dos ficheiros tão pequeno quanto possível.

Os utilizadores do LaTeX descobriram o PDF desde o seu nascimento, pelo que a criação de documentos PDF a partir do LaTeX é agora um assunto bem estudado. No mundo do LaTeX são habituais dois procedimentos. Em primeiro lugar a compilação do ficheiro TeX num ficheiro DVI, usado essencialmente para a visualização do texto no ecrã do computador; em segundo lugar a conversão do ficheiro DVI num ficheiro PostScript (ficheiro PS), que usamos para impressão. Cada um destes ficheiros (TeX,

---

Ainda é possível adquirir a medalha comemorativa do Ano Mundial da Matemática



Preço: 2.200\$00 + 500\$00 (portes de correio)
Sócios: 1.650\$00 + 500\$00 (portes de correio)

Em caso de encomenda de 2 a 7 medalhas o porte será de 800\$00.

DVI,PS) pode ser convertido para PDF. Existem assim três abordagens possíveis, cada uma delas com os seus acérrimos defensores. Não pretendemos entrar aqui em guerras religiosas. A experiência do autor tem mostrado que cada uma das abordagens tem os seus trunfos.

4.1. De Tex para PDF

Podemos converter directamente um ficheiro LaTeX para PDF graças ao pdfTeX (`ftp://ftp.muni.cz/pub/tex/local/cstug/thanh/pdftex`). Este programa é uma extensão do usual compilador de LaTeX (é baseado no mesmo código fonte), permitindo a criação do ficheiro DVI ou então um ficheiro PDF idêntico. Para além dos comandos de LaTeX, são também disponibilizados comandos adicionais que permitem ao utilizador aceder às características específicas do formato PDF. As funcionalidades disponibilizadas pelo package `hyperref` deverão ser, no entanto, suficientes para a maioria dos utilizadores.

4.2. De DVI para PDF

Há quem prefira continuar a usar o normal compilador de LaTeX, sem em nada alterar os procedimentos e rotinas que usa na produção de documentos impressos, deixando a criação do documento PDF para uma fase posterior. Uma opção é converter o ficheiro DVI para PDF com o programa `dvipdfm` (`http://gaspra.kettering.edu/dvipdfm`).

Uma outra opção é formar o PDF a partir do ficheiro PostScript.

4.3. De PS para PDF

A maneira mais aprimorada de converter um ficheiro PS para PDF é via "Adobe Acrobat Distiller". Trata-se, no entanto, de um programa comercial. Existem várias soluções em regime livre, disponíveis na Internet. Recomendamos o `Ghostscript` (`http:/www.cs.wisc.edu/~ghost`).

5. Conclusão

O LaTeX, não obstante a sua ênfase na produção de documentos impressos de qualidade sem igual, tem também um importante papel no ciberspaço, especialmente no que toca à Matemática.

O leitor, ao traduzir os seus documentos de LaTeX para PDF ou HTML, com uma das técnicas aqui apresentadas, e tornando-as disponíveis na Web, pode contribuir positivamente para a riqueza da hipercultura matemática. Todos agradecemos.

Referências

[1] A. B. Anjo e D. F. M. Torres. *Considerações sobre o LaTeX2$_\varepsilon$*, Gazeta de Matemática (138), Janeiro 2000, pp. 59-66.

[2] M. Goossens, S. Rahtz, et.al.*The LaTeX Web Companion*, Addison Wesley, 1999.

[3] T. Merz. *Web Publishing with Acrobat/PDF*, Berlin, Springer-Verlag, 1998.

[4] J. C. L. Ramalho. *Anotação Estrutural de Documentos e sua Semântica*, Tese de Doutoramento, Universidade do Minho, Braga, 2000.

Era um vez uma serpente infinita. como era infinita não havia maneira de se saber onde estava a sua cabeça. de cada vez que se lhe tirava uma vértebra não fazia falta nenhuma. podia-se mesmo parti-la deslocá-la emendá-la. ficava sempre infinita. quem quisesse levar-lhe um bocado para casa podia pô-lo na parede e contemplar um fragmento da serpente infinita.

Ana Hatherly, *"351 tisanas"*, Quimera, 1997
(Publicação gentilmente autorizada pela autora)