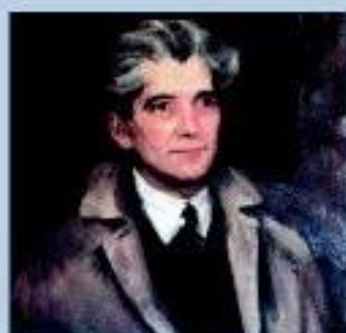


GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática Ano LXII | Julho 2001

nº141



Centenário de Bento Caraça

Prémio Bento de Jesus Caraça

2007 - Olimpíadas Ibero-Americanas em Portugal?

por Graciano de Oliveira

19^{as} Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Bento de Jesus Caraça: Cem anos pela fraternidade¹

João Caraça

Serviço de Ciência da Fundação Calouste Gulbenkian

Faz hoje cem anos que nasceu Bento de Jesus Caraça, cidadão pleno, plenamente confiante na inteligência dos outros, que tive a felicidade de ter como Pai.

A vida de Bento de Jesus Caraça percorre a primeira metade do século XX, com o seu cortejo de horrores e esperanças, de guerras e lutas libertadoras. E, nessas lutas, na avaliação sistemática das esperanças, na procura de racionalidade nas escolhas colectivas, na afirmação da dignidade da pessoa humana, não mostrou fraquezas, não sofreu desfalecimentos.

Alentejano dos quatro costados, nunca se esqueceu nem questionou as suas raízes, antes nelas se remoçando continuamente.

O olhar da mais antiga fotografia conhecida de meu Pai, com talvez três ou quatro anos de idade (não há a certeza da data), sempre me enterneceu. Naquela pose singela, algo formal, numa herdade do concelho do Redondo (a Casa Branca) despontava, sem que o soubesse ainda, uma das almas mais vivas da emancipação das nossas gentes.

Despontava também o século, tão cheio de promessas e de novidades. A câmara fotográfica seria certamente uma delas, por aqueles lados. E, assim, o olhar de Bento de Jesus Caraça, entre o sério e o interrogador, algo tímido, mas diligente, perscruta com curiosidade o futuro.

O futuro que lhe aparecia sob as vestes de uma nova arte, a fotografia, que sabemos ser a primeira a resultar directamente do esforço de criação científica que acompanhou a construção da modernidade. Significativamente, viria mais tarde Bento de Jesus Caraça a ser também um

apaixonado fotógrafo do mundo e dos seus registos.

Mas a imagem do futuro que ele ali adivinhava implicava um corte definitivo com a realidade existente. Uma ruptura nos comportamentos, nos valores, nas representações sociais, nas mentalidades. Uma transformação e reorganização violenta dos interesses e dos poderes societais.

O *como fazê-lo*, foi a questão a que Bento de Jesus Caraça dedicou toda a sua vida de militante e de professor. Porque se pressente que ele nunca duvidou do *porquê*, da razão de ser dessa tarefa central colocada à geração do seu tempo – o despertar a alma colectiva das massas.

É que o passado é o que se vê naquele retrato, à sua volta.

Bento de Jesus Caraça sabe-o já, naquele começo de século. Sabe igualmente que só aprendendo, só pela instrução, só pela ciência, se conseguirá entrar no futuro que o fixa, a ele e ao seu mundo de então, por meio do olho mecânico da câmara.

Esta noção nunca mais o abandonou. Lutou até ao fim pela educação, pelo conhecimento e pela cultura para todos, sem quaisquer limitações impostas.

Deu lições a colegas e a estudantes. Tornou-se professor de matemática na universidade. Participou activa e entusiasticamente no funcionamento das universidades populares. Escreveu artigos nos jornais. Lançou novas revistas culturais. Realizou uma empenhada série de grandes conferências públicas onde traçou todo um programa de

¹ Este artigo foi publicado no Jornal de Letras, no dia 18 de Abril de 2001.

A sua publicação na Gazeta de Matemática foi gentilmente autorizada pelo director José Carlos Vasconcelos.

intervenção cívica, científica e pedagógica. Criou a Biblioteca Cosmos, uma extraordinária iniciativa de construção de uma cultura integral. Participou no movimento científico da época e fundou um centro universitário de investigação. Impulsionou os movimentos contra a guerra e o fascismo e foi um interveniente responsável nos movimentos de unidade antifascista e de unidade democrática a seguir à segunda grande guerra.

Antes do meio do século, em 1948, abandona a nossa companhia aquele olhar vivo que nos questiona, ainda hoje, como que buscando refúgio e solidariedade no futuro situado ali mesmo à sua frente.

Esse futuro, que tão bem definiu no prefácio do primeiro livro publicado na Biblioteca Cosmos como «toda uma vida nova a construir, dominada por um humanismo novo».

E, nesse texto admirável, acrescenta:

«Essa tarefa grandiosa exige uma tensão ao máximo das capacidades e das energias, um apetrechamento intelectual sem o qual não se pode ser, em nada, um bom obreiro. A primeira condição para que isso seja possível é que o homem tenha confiança em si próprio, no seu poder de trabalhar, construir e organizar; que, olhando para trás e fazendo o balanço das coisas adquiridas, possa, no exame desses resultados, colher elementos que lhe permitam entrar com ardor novo na tarefa nova.

Há, em suma, que dar ao homem um visão optimista de si próprio; o homem desiludido e pessimista é um ser



Bento de Jesus Caraça com seu filho, João Caraça

inerte, sujeito a todas as renúncias, a todas as derrotas – e derrotas só existem aquelas que se aceitam».

Esta devoção à causa colectiva, à libertação das capacidades próprias, ao convívio fraterno com os outros, ao entendimento das grandes questões da nossa vida, constituem a mensagem central que Bento de Jesus Caraça difundiu através da acção, rumo a esse futuro.

Futuro que, ao olhar atentamente a fotografia, descobrimos, maravilhosos, que está aqui, que somos nós. Somos nós, que, no espelho do

registo fotográfico, ele interroga docemente, sobre a pertinência da sua visão do mundo.

E que lhe poderemos nós assegurar, neste outro começo, mas de outro século?

Que, se o mundo não é mais justo, nem mais solidário, não é porque ele não se tenha batido desassombadamente contra a arbitrariedade e contra a opressão.

Que, se o mundo não é mais belo, nem mais amigo, não é porque o seu esforço em busca da verdade, valorizando a verdade dos outros, tenha sido em vão.

Que, se é ao mesmo tempo melhor e pior, o mundo, felizmente, mudou. E que, enquanto formos vivos, pela nossa acção, o mundo irá sempre mudar.

Penso que lhe poderemos dizer que *confiamos*, porque contamos connosco e com todos os que entram de frente no futuro.

Com todos aqueles que olham fraternalmente as gerações que se seguem.

Se não receio o erro é porque estou sempre disposto a corrigi-lo.

Bento Caraça

Bento de Jesus Caraça: o Homem e o seu Tempo¹

Ulpiano Nascimento

Economista

Não vamos falar de Bento de Jesus Caraça matemático, já suficientemente conhecido.

Vamos falar do Homem que o Professor Bento Caraça foi, o qual logo à nascença, em 1901, luta pela sobrevivência e só por milagre se salva.

Uma vida que apenas durou 47 anos, mas o suficiente para enriquecer a sua época e nos deixar um legado cultural e ético de alto e singular valor.

Das grandes personalidades que marcaram a vida nacional do último século, Bento Caraça distingue-se pela grandeza e universalidade das suas mensagens e pela coragem, até ao sacrifício, que pôs em sua defesa.

Por essa ousadia, tão respeitável, pagou caro. Bento Caraça foi impiedosamente perseguido pela polícia da ditadura, esteve preso no Aljube, perdeu a cátedra onde ensinava como ninguém e sofreu grandes privações de ordem económica, ao mesmo tempo que a sua saúde perigava.

Mas o que mais abalou o Professor, foi a sua expulsão da docência universitária, em 1946, onde era professor catedrático do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, instituição que ele tanto amou e que aquela tanto lhe deveu.

Por mérito próprio e a título excepcional, Bento Caraça foi, ainda estudante, com 19 anos de idade, 2º assistente do 1º Grupo de Cadeiras de matemática daquele Instituto, e com 23 anos, foi nomeado professor extraordinário. Cinco anos depois, em 1929, professor catedrático.

Virado, por formação, para questões económicas,

introduziu no país os métodos de Econometria. Em 1938, fundou com os professores Mira Fernandes e Beirão da Veiga o Centro de Estudos da Matemática Aplicados à Economia, de que foi seu Presidente e logo a seguir, com outros matemáticos, lançou a "Gazeta de Matemática".

E na sequência de esforços anteriores para equipar e inovar os conhecimentos económicos do país, Bento Caraça, já na fase terminal de sua vida, motiva um grupo de jovens economistas, todos seus ex-alunos, para lançar uma publicação da especialidade, cuja informação e conhecimentos no país eram notoriamente escassos e maltratados.

Assim apareceu a "Revista de Economia", em 1948, em que o artigo de abertura do seu primeiro número "Sobre o Espaço de Capitalização", é da sua autoria.

Homem culto e muito sensível, autor da tão actual e inspirada obra "A Cultura Integral do Indivíduo", vivia os problemas que afectavam a sociedade portuguesa como se fossem seus. É que essa sociedade que cultivava o obscurantismo e ideários anti-democráticos, que ele deplorava, era a mesma que esteve na base da sua humilde origem, filho de pobres trabalhadores rurais alentejanos.

Actividade febril - parecendo que adivinhava o seu próximo fim - confrontava-se com todo o género de adversidades e desencantos, sem nunca todavia recuar,

¹ Uma versão em inglês deste artigo foi publicada no Boletim do CIM nº 9, de Dezembro de 2000.

porque do seu lado estavam a razão e o amor e a satisfação do dever cumprido.

Esta postura de cidadão, de mestre e amigo, amante da Natureza e do belo, em que o racional e o coração se combinaram de forma superior, foi uma constante na vida do Professor.

Na sua vida modesta mas rica em preocupações morais e culturais, o ensino e a investigação matemática ocupavam um lugar especial. Através das suas aulas, de estilo próprio, revolucionárias na vertente pedagógica, encantava os seus alunos pelo fascínio da sua exposição. Bem depressa, assim, o Professor Caraça se transformou em grande Ídolo, amado não só por aqueles mas pela Academia inteira.

Este aspecto e sentir geral, pode observar-se através do comentário, por exemplo, do Professor Sebastião e Silva, também grande matemático, sobre o seu livro "Lições de Álgebra e Análise": "Pela primeira vez a matemática é apresentada por alguém que vive a profissão com alma de apóstolo e de artista".

Como escritor, publicista e polemista, privilegiou as biografias dos grandes nomes universais, contagiantes nos seus exemplos e realizações, como R. Rolland, R. Tagore, E. Galois, L. da Vinci, G. Galilei e outros.

Notável foi ainda a polémica tida com António Sérgio, outro grande nome do século, na revista "Vértice", conduzida por ambos com superior elegância.

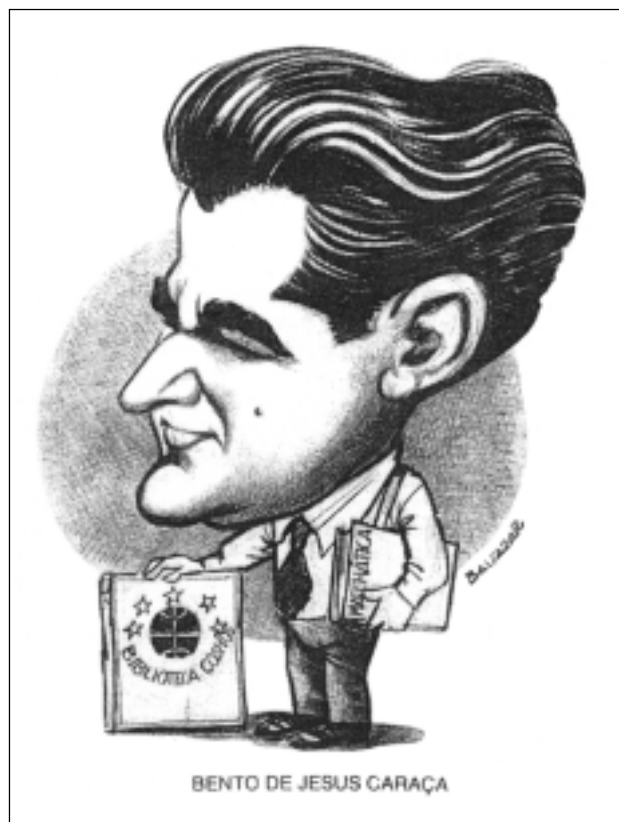
Noutro plano da sua actividade, envolvendo instituições e empreendimentos culturais, cívicos e políticos, Bento Caraça, frente às condições sócio-políticas existentes, marcadas por odiosa ditadura, não podia ficar indiferente.

A política visível do Professor neste contexto, centrava-se, principalmente, como vimos, na culturização do indivíduo, no ensino e na defesa dos grandes valores democráticos.

A potenciar todo este processo político-cultural, estavam as reuniões de convívio social e artísticas, conferências e debates, que a maior parte das vezes se realizavam na "Voz do Operário" e, em particular, na "Universidade Popular Portuguesa", então lugar de

encontro de toda a "intelligentzia" citadina, da qual Bento Caraça foi seu Presidente durante anos seguidos.

Ainda dentro deste quadro, pela grande responsabilidade que exigia, sobressai o seu empenhamento pela vida do projecto "Biblioteca Cosmos", sem dúvida alguma, a mais bela e conseqüente realização cultural do século no país, cuja concepção e funcionamento a ele se deve.



Em menos de oito anos, esta editora publicou mais de 114 títulos, de elevado interesse cultural, única no género no país, que agitou e mobilizou o melhor da colaboração nacional.

Bento de Jesus Caraça morreu em 18 de Junho de 1948. E foi surpreendente ver, como nenhum outro funeral, o mar de gente que juntou nessas ruas de Lisboa, de todas as classes sociais, espontânea e saudosamente, para dar o derradeiro adeus ao Mestre, ao cidadão, ao grande Amigo.

Bento de Jesus Caraça: Esboço Biográfico

Natália Bebiano

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

1901: Bento de Jesus Caraça nasce em Vila Viçosa a 18 de Abril, numa dependência do Convento das Chagas, onde a Casa de Bragança alojava alguns dos seus servos. É filho de João António Caraça e Domingas da Conceição Espadinha, trabalhadores rurais.

1902: A família instala-se na herdade da Casa Branca, na aldeia de Montoito, da qual seu pai era feitor.

Segundo testemunho de um condiscípulo de escola, aprendeu as primeiras letras por volta dos cinco anos com José Percheiro, trabalhador sazonal que lhe ofereceu a *Cartilha Maternal* de João de Deus.

1911: Caraça termina a escola primária com distinção.

1911-1913: Os proprietários da herdade da Casa Branca, Raul Albuquerque e mulher – sensíveis aos dotes intelectuais de Caraça – decidem pagar-lhe os estudos secundários, mandando-o para o Liceu de Santarém.

1913-1918: Frequenta o Liceu Normal Pedro Nunes, em Lisboa, onde conclui com brilho o curso liceal aos dezassete anos. Ingressa no Instituto Superior do Comércio, posteriormente, Instituto Superior de Ciências Económicas e Finanças (ISCEF) (actual ISEG).

1919: Bento Caraça contrai doença reumática, que lhe provoca lesões cardíacas irreversíveis.

A enfermidade não lhe afecta o sucesso escolar, e o conceituado matemático Mira Fernandes, reconhecedor do seu talento, convida-o para 2º assistente.

Aos dezoito anos, Caraça inicia a sua fulgurante carreira universitária. A 1 de Novembro de 1919, é nomeado 2º assistente do 1º grupo de cadeiras do ISCEF (Matemáticas Superiores - Álgebra Superior, Princípios da Análise Infinitesimal, Geometria Analítica).

1923: Conclui a Licenciatura com distinção.

1924-1925: É nomeado 1º assistente a 13 de Dezembro de 1924. No ano lectivo de 1924-1925, Caraça rege no ISCEF a 2ª cadeira (Matemáticas Superiores, Análise Infinitesimal, Cálculo das Probabilidades e suas Aplicações).

1927-1928: É promovido a professor extraordinário (1927).

1929: Caraça é nomeado professor catedrático de Matemáticas Superiores (da 1ª cadeira), “função de que, quatro anos mais tarde, quiseram afastá-lo, com o protesto de todos os alunos, mas que exerceu, rodeado de prestígio e da admiração mesmo de muitos dos adversários, até 1946” (Mário Dionísio, [V], p. 503).

1930-1932: Em 1930, Primo de Rivera é demitido e os nazis vencem as eleições gerais na Alemanha. No nosso Ensino Superior, as Faculdades de Letras (Porto), Farmácia (Coimbra), Direito (Lisboa) são suprimidas.

Caraça inicia em Março de 1931 com “As Universidades Populares e a Cultura” o chamado *ciclo das grandes conferências*, contendo a súmula do seu ideário sócio-político.

1933-1934: Em 1933, Caraça profere a célebre conferência “A Cultura Integral do Indivíduo”, onde expressa a sua filosofia de cultura e desenvolve as suas teses sobre “sociedade solidária e igualitária, que parte da necessidade para a liberdade” ([SN], p.33).

Publica “Integração Numérica e Interpolação Polinomial” (192 páginas), obra editada pelo Núcleo de Estudos de Matemática, Física e Química, Lisboa.

Dirige e funda o jornal “O Globo” (com José Rodrigues Miguéis e do qual só foram editados dois números).

Bento Caraça, conferencista de grande prestígio, divulgador reputado, político interveniente, desenvolve acção pre-

paratória para a candidatura do general Norton de Matos à Presidência da República.

1935: Caraça publica as “Lições de Álgebra e Análise”, cerca de um quinquénio volvido sobre a publicação das “Lições de Cálculo e Geometria” de Vicente Gonçalves. Na literatura científica portuguesa, é nesta obra que, pela primeira vez, se expõe com rigor *a teoria analítica dos números*, um dos grandes sucessos matemáticos dos finais de oitocentos. Esta publicação é acontecimento relevante na história do ensino da matemática em Portugal, vivenciado por Sebastião e Silva nos seguintes termos: *A leitura das “Lições de Álgebra e Análise” foi para mim uma revelação. Pela primeira vez a matemática surgia aos meus olhos como edifício inteiramente racional, ao mesmo tempo harmonioso e cristalino. [...] A linguagem nova que o livro utilizava - viva, clara, incisiva, cativante - apresentava a matemática como se fosse uma obra de arte.*

1937: Caraça dá à estampa o volume “Cálculo Vectorial”, editado pelas Publicações do Núcleo de Matemática, Física e Química, Lisboa.

1938: Caraça propõe com Mira Fernandes e Beirão da Veiga ao Conselho Escolar da ISCEF a fundação do *Centro de Estudos Matemáticos Aplicados à Economia*.

É seu director até 1946, data em que o Centro é extinto, aquando da sua expulsão política do ensino.

1940: Caraça funda com António Monteiro, Hugo Ribeiro, José da Silva Paulo e Manuel Zaluar, a *Gazeta de Matemática*, cuja Secção Pedagógica dirige a partir de 1942. É a primeira revista de divulgação matemática em Portugal.

1941: Funda a Biblioteca Cosmos, da qual é director até morrer. A Biblioteca Cosmos editou 145 números correspondendo a 114 títulos, distribuídos por sete secções, com uma tiragem global de 793 500 exemplares [SN]. Constituiu, e citamos João Caraça em [BJC2], *a maior iniciativa de divulgação da ciência realizada em Portugal neste século.*

É nomeado Presidente da Direcção da Universidade Popular

Portuguesa.

1943: Bento Caraça é eleito Presidente da Direcção da Sociedade Portuguesa de Matemática para o biénio de 1943-1944. é também eleito Delegado da Sociedade aos Congressos da Associação Luso-Espanhola para o Progresso das Ciências de 1942 a 1944.

1944: Caraça participa na reunião fundadora do MUNAF (Movimento de Unidade Anti-Fascista), sendo eleito para o conselho nacional presidido por Norton de Matos.

1945: Em Outubro é criado o MUD (Movimento de Unidade Democrática), do qual Caraça é um dos principais vultos.

1946: Salazar apresenta a candidatura de Portugal a membro das Nações Unidas.

Em Agosto é enviado ao Presidente da República o documento “Sobre a admissão de Portugal na ONU”, reclamando a democratização do regime como condição de admissibilidade e de respeito pela Carta da ONU, abaixo-assinado cujos primeiros subscritores são Azevedo Gomes e Bento Caraça (entre centena e meia de outros).

1948: É preso pela PIDE com os demais membros da Comissão Central do Movimento de Unidade Democrática (MUD) e encarcerado no Aljube.

O mestre por excelência, proibido da função docente, função na sua essência vivencial, deixa-se trair pela debilidade cardíaca. Morre a 25 de Junho, “...tão pouco tempo...” – disse. Tinha 48 anos.

As autoridades circunscrevem o percurso do seu funeral a uma zona restrita de Lisboa, mas milhares e milhares de pessoas acorrem numa homenagem impressionante. A ditadura não lhe concede direito a Requiem, nem a elogio fúnebre – o féretro é aberto e o elogio que Ilídio Sardoeira

iria proferir no cemitério é, por silêncio imposto pela polícia, depositado na urna juntamente com o corpo.

A voz de Bento de Jesus Caraça ressoa. Em escritos, livros, conferências, para lá do espaço físico e da imaginação ...Contra um monumento vivo, a *cultura do silêncio* nada podia.



A casa onde nasceu Bento de Jesus Caraça

Bento Caraça e a Matemática, aquela Difusa Substância

Natália Bebiano

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Caraça etnomatemático

Aquela por vezes cristalina [...] e por vezes difusa substância [...] que é [...] a matemática.

Imre Lakatos, 1922-1974

O homem desiludido e pessimista é um ser inerte, sujeito a todas as renúncias, a todas as derrotas – e derrotas só existem aquelas que se aceitam.

Bento de Jesus Caraça

Há séculos que a cultura ocidental é dominada pela visão platónica da matemática. Essa visão centra-se essencialmente nas verdades matemáticas em si e na coerência interna do edifício conceptual matemático. Filósofos, historiadores, matemáticos, divulgadores apresentam a realidade matemática segundo essa visão, concedendo insuficiente ênfase à atmosfera sociológica e cultural na qual as ideias matemáticas de determinado período floresceram - ou foram asfixiadas.

Para o desenvolvimento da matemática têm concorrido diversos factores de diferentes domínios. A matemática sofre influências do meio, inspirando-se directamente nos problemas que a realidade suscita, respondendo a questões colocadas pela agricultura e comércio, pela guerra e

engenharia, pela física, astronomia ou pela filosofia. As influências da agrimensura e do Kantismo na geometria, da escolástica no cálculo, do electromagnetismo nas equações diferenciais, do cartesianismo na mecânica foram determinantes na evolução histórica dos conceitos. A compreensão profunda da matemática requer que todos estes factores sejam tomados em consideração.

A cultura ocidental definiu a matemática de acordo com certos paradigmas, declarando que os contributos de outras civilizações não são “verdadeira matemática.” As tradições matemáticas não europeias são descritas como empíricas; tendo motivações utilitárias, não são “realmente” matemática - falta-lhes o carácter especulativo que caracteriza esta ciência desde a Antiguidade.

Na sua capacidade de lidar com a quantidade, o espaço, o padrão, a estrutura, a lógica, a matemática é elemento unificador de um mundo racionalizado, cumprindo o ideal de Descartes.

A partir do segundo quartel do século XX novos e prementes desafios vieram colocar-se às ciências matemáticas. A investigação matemática sobre os “fundamentos” veio destruir as tradicionais “certezas” do pensamento matemático. Os teoremas de Goedel de 1931, em resposta aos *Principia Mathematica* de Russell (1910-13) e à obra de A. Whitehead (1861-1947), apontavam limites ao ideal da matemática como edifício de verdades logicamente



Bento Caraça com 33 anos, em 1934

encadeadas e rigorosamente provadas. As descobertas do famoso lógico, a par da Teoria da Relatividade de Einstein e do Princípio da Incerteza de Eisenberg, desferiam um rude golpe na ideia de certeza científica. O célebre teorema de Goedel estabelece que, em qualquer sistema matemático consistente, podem construir-se declarações que não podem ser provadas ou refutadas dentro do sistema (*indecidibilidade*). Além disso, garante não poder provar-se a consistência de sistema matemático algum sem recurso a axiomas para lá desse sistema (*incompletude*).

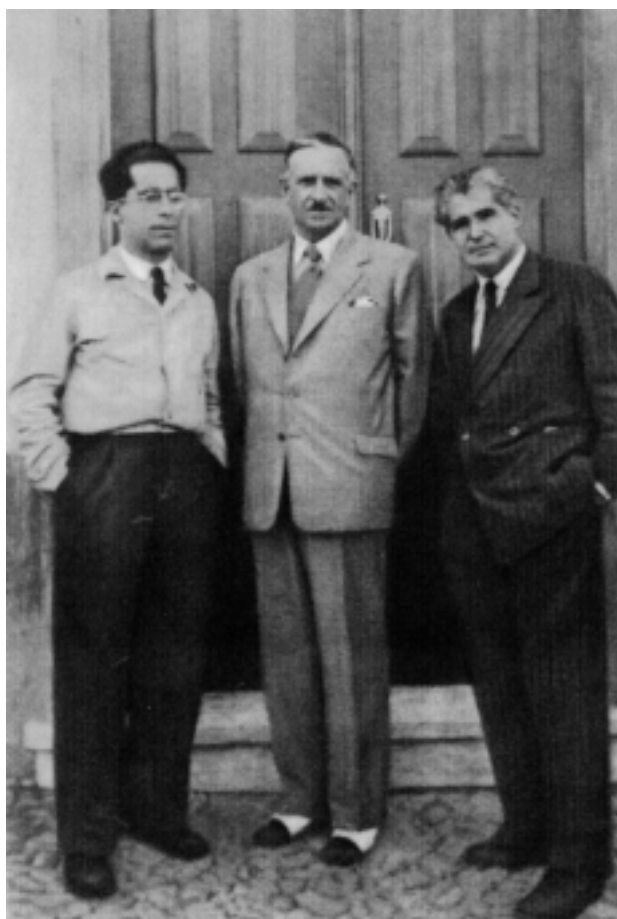
Se era impossível salvar a certeza da matemática e suas verdades genuínas, também o seu carácter eminentemente especulativo era questionável. A ascensão do computador trouxe para a ribalta a matemática computacional, de natureza empírica. Na década de 70, a demonstração com o “auxílio do computador” do célebre *problema das quatro cores*, problema sobre a coloração de mapas usando um número mínimo de cores e observando certas regras, levantava com especial acuidade o problema filosófico do que se entende por *demonstração*. O computador determinou a reconsideração da natureza da demonstração e, portanto, da verdade.

No século XX, o fracasso da matemática (e da ciência) perante o *caos*, a *incerteza*, as *catástrofes*, a *imprevisibilidade*, obrigava ao repensar de todo o conhecimento e ao modo de o atingir. Em simultâneo, a extensão da matemática a campos cada vez mais alargados exigia inovação nas práticas científicas e recurso crescente à interdisciplinaridade e transdisciplinaridade. Resolver os inúmeros problemas em aberto (Hipótese de Riemann, Conjectura de Goldbach, ...), compreender os problemas do cérebro, da consciência, o código genético, as questões da inteligência artificial, a fractalidade dos fenómenos naturais, requeria toda uma complexa parafernália conceptual.

Com o seu estatuto de linguagem da ciência, da tecnologia e da engenharia, essencial na arquitectura, *design*, economia e medicina, a matemática penetrara no quotidiano das pessoas, requerendo destas a capacidade de com ela lidar. Todavia, a par da literacia conquistada

pela sociedade contemporânea, a “numeracia” continuava restrita a uma elite sócio-cultural.

No século XIX Pierce definira matemática como “a ciência de inferir conclusões necessárias”. Conclusões acerca de que conteúdos? A matemática podia ser *sobre qualquer coisa*, qualquer coisa do tipo “hipótese-dedução-conclusão” era matemática. Na primeira linha do volume I dos *Éléments de Mathématiques* (Paris, 1939), Bourbaki reza: “Desde os gregos, quem diz matemática diz



Fernando Lopes Graça, Luís de Freitas Branco e Bento de Jesus Caraça

demonstração”. O crescente realce dado ao carácter dedutivo nos diferentes ramos da matemática levou à ideia, ainda hoje muito difundida, de que a matemática consiste em “provar teoremas”. É uma visão ingénua. Alguém aceitaria que se dissesse que a literatura consiste em “escrever frases”, a poesia em “arrumar rimas”, ou a pintura em “semear pinceladas”?

A concepção prevalecte desde Euclides (300 a.C.) de que a matemática é uma ciência dedutiva que, partindo de ideias elementares básicas (axiomas) e de regras lógicas bem definidas, desenvolve um elenco de deduções de crescente complexidade é questionável. A negação da matemática como ciência formal e a sua assunção como instrumento lógico na estruturação das construções teóricas da ciência também suscitava reservas. Afinal, o que é a matemática? Como se cria? Como se aplica? O que é um teorema, uma demonstração? O que é um número? Qual a natureza dos entes matemáticos? O que é o “rigor matemático”? E a “intuição” matemática?

Os mais antigos registos matemáticos conhecidos datam de 2.400 a.C. Ao longo de quatro ou cinco milénios gerou-se um diversificado *corpus* de práticas e conceitos *matemáticos* que têm sido utilizados na vida quotidiana. A matemática é fruto da actividade humana. Inexoravelmente, a necessidade de criar matemática e de a utilizar é comum a todas as civilizações e espaços geográficos. Para além do recurso à logística no seu estudo, importa a compreensão da história da construção das suas ideias e teorias.

A Etnomatemática como sùmula dos saberes matemáticos de todos os que foram “excluídos” do processo do conhecimento e da produção cultural (incluindo as tradições matemáticas das civilizações não ocidentais, como a chinesa, a indiana ou a islâmica, a matemática “vernácula” de tradições antigas, de que é exemplo a cestaria das mulheres africanas, ou a matemática “popular” dos indígenas da América Latina) apresenta-se como um novo programa. Para além de problematizar a visão eurocêntrica e os estudos teóricos abstractos de tradição platónica, aponta para a relação estreita entre a cultura, a matemática e a sociedade, preconiza a visão histórica para entendimento da razão científica, dando relevo à criatividade e engenho dos diferentes povos nas suas práticas matemáticas.

Bento Caraça, integrando a ciência num contexto de natureza social, mística, religiosa, assume papel pioneiro de etnocientista, carregando de ideologia e

problematização os factos. Na sua obra, a actividade científica surge inserida num contexto social, a actividade matemática integrada em várias actividades, fazendo parte do quotidiano do homem comum e fruto (activo) da humanidade em construção. Nos seus escritos, é manifesta a necessidade de entender a razão histórica para construção do conhecimento científico.

A Ciência, nas suas palavras, é um *organismo vivo impregnado de condição humana, com forças e fraquezas, subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação*. A ciência é um ideário fundamental para a formação do homem cultural e civicamente liberto.

No Prefácio dos *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Caraça afirma que há duas atitudes em face da Ciência. Uma, usualmente utilizada nos manuais, consiste em apresentá-la como coisa criada, um todo harmonioso, encadeamento lógico de conceitos, desligados da vida real, em auto-funcionamento. Outra atitude consiste em fornecer a génese progressiva da trama conceptual, hesitações, contradições, lutas que subjazem à teorização, influência da vida social nessa génese, etc. É, justamente, esta segunda perspectiva que Caraça adopta. Matemática (ou ciência, em geral) e vida real constituem um binómio explorado com grande mestria ao longo da obra. O livro não apresenta uma discussão sistemática de um *corpus* matemático específico, inevitavelmente circunscreve-se a alguns dos domínios conquistados pelo Pensamento Matemático ao longo da História da Humanidade. Mostra a inesgotável diversidade da *experiência matemática*. As grandes linhas da narrativa prendem-se com a essência da matemática, a sua história e filosofia, o processo de descoberta do conhecimento.

A exposição leva o leitor para um mundo estranho e, em simultâneo, familiar. Problemas famosos, ideias, história, descoberta, personalidades de matemáticos e filósofos, *flashes* biográficos e sócio-culturais, pontuados por fecundas discussões “Autor-Leitor”, apresentam-nos o luxuriante mundo da matemática. É uma visão brilhante. Uma obra de arte única.

Um marco miliar da cultura portuguesa

“A cultura tem que reivindicar-se para a colectividade inteira, porque só com ela pode a humanidade tomar consciência de si própria.”

Bento Caraça, in *Cultura Integral do Indivíduo*

Os Conceitos Fundamentais da Matemática foram publicados em primeira edição na Biblioteca Cosmos em dois volumes (um, relativo à primeira parte, e outro, à segunda) em 1941/1942. O mundo está em guerra e a matemática debate-se com a crise dos fundamentos. Portugal, “em neutralidade colaborante”, está à margem do conflito mundial, todavia, em confronto com a fome, o analfabetismo, a repressão do regime.

A obra tem tido sucessivas reedições (primeiro volume: 1942, 1942, 1944, 1946; segundo volume: 1944), num só volume (incluindo as três partes) em edições da Tipografia de Matemática e da Livraria Sá da Costa (1951, 1952, 1958, 1963, 1970, 1975, 1978, 1984 e 1989) e da Editora Gradiva (segunda edição em 1998, terceira em Setembro de 2000). É um marco miliar da História da Ciência - e da Cultura - em Portugal, que permanece num desafio ao correr do Tempo e aos notáveis avanços da ciência contemporânea.

Importa salientar que os “Conceitos Fundamentais da Matemática” antecipam a célebre obra de índole divulgadora “What is Mathematics” de R. Courant e Robbins, publicada em 1948 em Nova Iorque, pela Oxford University Press, e são coevos de outra obra de referência no campo da divulgação - “Mathematics and the Imagination” de E. Kasner e J. Newman, Simon e Schuster, 1940. Este acerto cronológico de Portugal com o mundo avançado no campo da popularização matemática é, por si só, digno de registo e leva a problematizar a tese recorrente do *nosso atraso científico*.

Bento Caraça tinha fortes motivações para perspectivar a sua acção no campo da popularização científica. A *promoção das massas à cultura* era linha orientadora do

seu ideário de cientista e de homem culto politicamente empenhado. É sua concepção que o Homem, para caminhar no sentido do aperfeiçoamento, tem que conhecer o mundo e conhecer-se a si próprio. O conhecimento é uma arma contra a opressão. A transformação da sociedade passa pelo conhecimento. A ciência é património da Humanidade inteira. O papel cultural que confere à Matemática “na cultura integral do indivíduo”, é o de disciplina central da Cultura Humana.

Desde os pitagóricos, e a sua ideia da relação entre Matemática e Música, que aquela é vista como instrumento privilegiado para compreensão do universo (o “número” pitagórico é elemento explicativo primordial de tudo o que existe).

A matemática, numa perspectiva cultural, é um instrumento de entendimento e libertação. Importava, pois, colocar ao alcance de *todos* os mistérios da matemática, ciência com as mais impressionantes aplicações práticas.



Passeio no Tejo

É raro, na ciência portuguesa, em particular no domínio da matemática, um especialista devotar-se à divulgação da ciência que cultiva a extractos amplos.

Tornar a matemática acessível ao leigo, mantendo elevados padrões de rigor científico, sempre foi considerada navegação traiçoeira. Que virtuoso logra “explicar” por critérios objectivos os seus desempenhos musicais? Que poeta alcança descrever a fruição estética, o fascínio, das suas composições? A Beleza explicar-se-á? *Por que são belas as coisas belas? E belas para quê?*

A problemática da vulgarização científica sem iludir a real dificuldade dos conteúdos, sem trair a essência e alcance dos temas é uma questão tantalizante. Leonardo Coimbra defendia que, em vez de fazer descer a Ciência ao vulgo, importaria elevar o vulgo à altura do homem de Ciência.

António Sérgio, ciente do alcance dos “Conceitos”, envolveu-se com Caraça numa viva polémica que animou as páginas da *Vértice* em meados da década de 40 e marcou a época. No número de Novembro de 1945 da revista, aparece uma nota crítica de Sérgio confrontando as concepções de Caraça sobre a natureza da Ciência e o conceito de número. A argumentação espalha-se por 8 números, contestando Caraça a afirmação sergiana de a matemática ser uma ciência de carácter essencialmente platónico.

Sérgio, céptico da viabilidade de “divulgar” Ciência, via na obra “um incitamento à incultura filosófica, à incompreensão da genialidade, à barbarização dos leitores”. Citemos Sérgio no extracto de uma contenda com Abel Salazar cujo eixo de discussão é a vulgarização das ideias filosóficas a não especialistas:

Em filosofia (se não digo asneira) não há resumos nem vulgarizações possíveis. Ou se estuda com verdadeiros filósofos ou não se estuda. O que torna interessante os seus problemas é a sua dificuldade. Facilitar tais problemas é deixar de vê-los e deixar de vê-los é deixar por isso de ser filósofo. O vulgarizador, quase sempre, assemelha-se a um professor de equitação que para facilitar as coisas suprimisse o cavalo.

Nos “Conceitos”, Caraça cumpre duas exigências, às quais explicitamente se propõe: *simplicidade máxima na forma de exprimir, rigor máximo na forma de expor*. De modo a trazer ao nível do *homem comum o património cultural comum*. Não se trata de literatice, mas sim de cumprir um programa fundamental para formação do indivíduo culto e liberto.

Citemos Caraça:

António Sérgio proclama que “a minha atitude ao discutir Platão é um exemplo pernicioso para a educação dos jovens”. Por causa da minha atitude intelectual, das minhas ideias,

já fui várias vezes acusado de ser “pernicioso para a educação dos jovens”. Não posso esconder o meu espanto ao ver agora juntar-se a esse coro a voz de António Sérgio. Mas neste momento, terminada esta infeliz discussão, à qual não voltarei mais, sinto-me já como desligado dela, na situação dum espectador que assiste à representação de um episódio substancial da Comédia da Vida.

Na polémica entre Sérgio e Caraça confrontam-se as diferenças de doutrina que perfilham sobre a explicação da realidade e verdade científica (na geometria analítica em particular e na ciência em geral); Sérgio baseia-se no uso sistemático de um princípio *espiritualista*, Caraça persevera nas tentativas de explicação *materialista*. Não se trata de uma oposição entre conceitos matemáticos específicos, mas de uma disputa sobre visões divergentes de filosofia da matemática e da ciência. Sérgio, seguindo a matriz platónica, procura a verdade pelo pensamento puro no mundo das Ideias ou Formas, Caraça busca-a no universo exterior sensível. Filosoficamente, Caraça tem uma posição vincadamente materialista e anti-metafísica, perspectiva em que se aproxima do ideário da Escola de Viena, afastando-se, contudo, desse ideário ao usar a história para compreensão da ciência. É uma contenda no campo das ideias da história e da filosofia da ciência.

O pensamento matemático sempre se desenrolou num cenário filosófico de fundo mais ou menos explícito. A condição filosófica do matemático encontra-se profundamente enraizada no seu ser - é seu destino inelutável. Existem três dogmas padrão sobre a problemática da existência de verdades matemáticas absolutas, bem como a busca de fundamentos axiomáticos.

De acordo com o platonismo, os objectos matemáticos são reais - a sua existência é objectiva e independente do conhecimento que deles temos. Não se trata de objectos físicos, mas de entes que existem fora do tempo e do espaço, inerentes ao universo, não criados e imutáveis. O matemático platonista é um cientista empírico que apenas descobre o que já existe e nada cria. Segundo o formalismo, não há objectos matemáticos. A matemática é um mero jogo formal; consiste em axiomas, definições, teoremas.

Formalistas e platonistas opõem-se nas questões da existência e da realidade, mas concordam no que toca a princípios de raciocínio legítimos na *praxis* matemática. Os construtivistas opõem-se a ambos e apenas consideram matemática o que pode ser *construído* num processo finito.

Nesta problemática, a visão de Davis e Hersh não andará longe da verdade: um matemático é tanto um formalista como um platonista, “um platonista secreto que põe uma máscara de formalista quando é caso disso. Os construtivistas são uma espécie rara, cujo estatuto no mundo matemático por vezes se assemelha ao de heréticos tolerados e rodeados por membros ortodoxos de uma religião.”

Ao invés do que muitos pensam, a filosofia da matemática não foi um campo activo apenas no período da “crise dos fundamentos”. Como é bem conhecido, a partir de finais do século XIX, fruto de paradoxos (ou antinomias) na teoria dos conjuntos e da necessidade de encontrar fundamentos sólidos e fidedignos para a matemática, as três escolas filosóficas *logicista*, *formalista*, e *construtivista* passaram cerca de 40 anos a digladiar-se sobre a questão dos fundamentos. A “crise dos fundamentos” incendiou especialistas e leigos durante cerca de 40 anos, transbordando a polémica dos fóruns científicos para as tertúlias de café. Teve um epílogo impressionante - os teoremas de Goedel comprometeram o formalismo de Hilbert e o carácter da matemática como “jogo sem significado”, o logicismo, a escola de Russell e Whitehead, reconheceu o fracasso do seu ideal de igualização da matemática à lógica, ou antes, da inclusão da matemática num capítulo da lógica, enquanto os construtivistas foram votados a um certo descrédito.

Extraordinariamente, a criatividade matemática, em vez de perder fôlego, sentiu-se estimulada. A vida dos matemáticos ganhou uma dimensão mais pragmática centrada no labor da criação, um tanto alheada dos enredos filosóficos.

A problemática entre Sérgio e Caraça não girava em torno dos fundamentos, tema escaldante da época. Tão-só girava em torno do *espiritualismo* de um e do

materialismo de outro na explicação da “coisa” científica.

Perfilando-se complexamente numa interface da matemática, filosofia e história, os “Conceitos Fundamentais da Matemática” constituem uma espécie bibliográfica singular no nosso universo. O autor renega as atitudes de passividade, mecanização, treino de artifícios (nas suas palavras: “a tirania dos manipulansos”), valorizando a génese conceptual em contraposição com a visão tecnicista usual. A matemática desenrola-se num campo polifónico pautado pelo pulsar humano, os conceitos têm ressonâncias das contradições sociais em que foram gestados, da luta do homem que se transcende no acto de fazer a ciência e a história.

Caraça explora, nos “Conceitos”, certas veredas da floresta matemática, possivelmente reservando outras para momentos posteriores. A obra proporciona uma visão palpitante das temáticas, desafios, realizações, malogros, situações de confronto envolvendo dificuldades operatórias, metodológicas, conceptuais, seus diferentes desfechos - soluções fruto de novos métodos e conceitos ou descobertas de demonstrações de *impossibilidade* (geralmente encontrados muitos anos mais tarde). A exposição desperta no leitor o sentido crítico e incita à autonomia mental; suscita reflexão, curiosidade e fruição expectante.

Após a sua leitura, poder-se-á dizer, ao jeito de Russell, que *a matemática é a ciência onde não se sabe de que se fala e se o que se diz é verdadeiro?* Definitivamente não. Esta obra introduz uma ruptura fundamental no quadro tradicional, estrutura-se segundo um novo paradigma, no qual *praxis* matemática e social se cruzam dialecticamente.

As directrizes historicistas e o método dialéctico na interpretação do devir científico subjazem à concepção da narrativa. O pensamento materialista dialéctico e a filosofia da matemática definem um entretecido segundo o qual toda a obra se orienta. Dificilmente poderemos entendê-la em profundidade sem definir as redes conceptuais e epocais em que se configura. Segundo Sebastião e Silva, estas ideias encontravam-se “fundamente radicadas, sob diversas formas, nos meios culturais italianos”. Caraça teria sido “induzido” a interessar-se pela referida escola pelo seu mestre e amigo

Mira Fernandes - colaborador de Levi-Civita e com ligações à *Accademia dei Lincei*.

Sebastião e Silva observa os efeitos nefastos da *febre intuicionista* na Escola Italiana na primeira metade do século XX, considerando-a responsável pelo declínio de importantes disciplinas nascidas em Itália, como a Análise Funcional e a Geometria Algébrica, por falta de técnicas adequadas de demonstração. Nota ainda o peso negativo de Croce e Gentile, filósofos de pendor hegeliano, no pensamento dos matemáticos italianos daquele período. Croce, que gozava de considerável prestígio, depreciava o método das ciências físico-matemáticas. E Enriques, matemático hebreu de origem provavelmente portuguesa que contestara as suas ideias “numa polémica memorável”, não teria “escapado à sua influência”.



Caraça defende o papel central da intuição na criatividade. Na sua perspectiva, “a intuição, que se adquire e afina no contacto com os problemas reais, é cruel para quem a despreza: o seu castigo é a esterilidade. ”

A corrente intuicionista de Brouwer atribuía papel primacial à intuição na criatividade matemática e menosprezava o papel da lógica dedutiva, opondo-se ao positivismo lógico da escola de Viena. Os ecos desta corrente ressoaram, não só na comunidade matemática italiana, como a nível de toda a comunidade matemática internacional. Exemplo paradigmático é o do célebre matemático francês Henri Poincaré que, na viragem do século XIX para o século XX, num dos seus livros sobre filosofia da ciência, cometeu o “grave pecado de ridicularizar” a lógi-

ca matemática e os fundamentos da teoria dos conjuntos.

Na década de 40 é factual a influência da “Escola Italiana” em Portugal (directamente em Mira Fernandes, Sebastião e Silva), bem como no Brasil por influência directa de Luigi Fantappiè, criador da teoria das funcionais analíticas, e do geómetra algébrico Albanese (envolvidos na criação e docência de cursos de matemática no Brasil).

A inspiração de Caraça em Enriques (citado nas “Lições de Álgebra e Análise” e nas “Conferências”) autor de várias obras sobre História e Filosofia da Ciência, Lógica, Pedagogia, para além de outras directamente ligadas ao seu campo de investigação, não tem contornos bem delineados.

Na perspectiva de vários historiadores da ciência (Ubiratan d’Ambrósio, Circe Silva ...), Caraça é o matemático da história da matemática em Portugal mais conhecido no Brasil, superando o próprio Pedro Nunes. Nalguns cursos de “História da Matemática” nas universidades brasileiras, os “Conceitos Fundamentais” são livro de referência. Na década de 60, num evento no Nordeste Brasileiro sobre “Ensino da Matemática”, os “Conceitos” figuraram na lista de livros recomendados aos profissionais de ensino.

Desconhece-se, com rigor, o impacto internacional da obra matemática de Caraça, nomeadamente, no Brasil e na comunidade lusófona. Ainda actualmente os “Conceitos” (e as “Lições de Álgebra e Análise”) constituem referência, como provam as várias edições, não se restringindo o seu interesse ao campo da investigação histórica.

Combate cultural e divulgação científica

“...há na cidade e na alma de cada indivíduo as mesmas partes, e em número igual.”

Platão, A República

A acção de Bento de Jesus Caraça na vulgarização científica, traduzida em múltiplas vertentes, na Biblioteca Cosmos, na Universidade Popular, na Secção Pedagógica da

Gazeta de Matemática, nos seus escritos e conferências, visava a democratização da ciência, a sua socialização em termos de acesso a todos, atenuando deste modo a diferença entre os que sabem cada vez mais e os que sabem cada vez menos. Tal como na riqueza material, na distribuição da riqueza do espírito, os ricos, cada vez mais ricos, monopolizam a cultura e os pobres são cada vez mais pobres.

No prefácio da primeira publicação da Biblioteca Cosmos resume os seus intuitos de divulgador: dar ao maior número de pessoas o máximo possível de cultura geral, tornar acessível a todos uma visão geral do mundo físico e social, a sua vida, os seus problemas. A ciência é património da Humanidade inteira, “de direito não pertence a nenhuma classe social e muito menos à burguesia” (J. Jourdan, in *La Recherche*, 6, 141-155, 1975). Como tal, deve ser reivindicada para todos, retirando a *uma classe* - a dominante - o controlo da actividade científica. A marcha da civilização e o progresso da cultura não são obra exclusiva das élites, mas produto da acção de todos os homens e há uma corrente em que todos participam.

Até 1948, ano da morte de Caraça, a Cosmos publicou 145 volumes, correspondendo a 114 títulos, com uma tiragem global de 793.500 exemplares. É considerada a primeira enciclopédia portuguesa, anterior à francesa “Que sais-je?”. Na Universidade Popular imprimiu um movimento de ideias transdisciplinar, conferindo-lhe um lugar de vanguarda de divulgação literária, artística e científica.

Bento de Jesus Caraça enuncia quais os requisitos que um bom livro de divulgação científica deve satisfazer, a saber:

“a) deve ser escrito por quem domine completamente o assunto;

b) o autor, realizando a condição anterior, deve, no entanto, ter inclinação filosófica;

c) deve além disso, ter sempre em vista, ao escrever o seu livro, a natureza do público a quem se dirige - público não especialista, mas com grau de cultura geral que permita um tratamento elevado do assunto”.

Vulgarização no sentido alto do termo - “sem abaixar nem deturpar”, trazendo ao *nível do homem comum o património cultural comum*, procurando realizar a síntese

entre *simplicidade máxima na forma de exprimir, rigor máximo na forma de expor*, requer domínio profundo da área, saber de natureza histórico-filosófico, rigor temático, linguagem clara e simples.

Na perspectiva de Caraça, o grande objectivo da divulgação científica é de natureza cultural, a fim de desenvolver ao máximo as capacidades humanas e promover “o despertar das almas”. No combate cultural que protagoniza, filosofia, ciência, cultura estão comprometidas na mudança do mundo. O seu desiderato de uma sociedade ideal - a dos artistas e cientistas - a sociedade da imaginação criadora, mais justa e elevada, é finalidade. Finalidade a atingir em paralelo com uma sociedade mais equitativa sob o ponto de vista económico e de justiça social. Para a alcançar, Caraça coloca-se ao lado dos *explorados e oprimidos*, para quem reclama cultura e saber. Mas vai mais longe: passa ao campo da acção e oferece-lhes a sua obra, obra que é uma arma de combate. A divulgação científica e cultural perspectivase, assim, como uma *praxis* revolucionária. Passada a crise aguda da *convulsão em que o mundo se debate*, há que recorrer a todas as energias do Homem para fazer a “reconstrução da sociedade [...] é toda uma vida nova a construir, dominada por um humanismo novo”. Essa tarefa grandiosa requer adequado “apetrechamento intelectual.” Dotado de saber, fortalecido e valorizado culturalmente, o Homem devotar-se-á com ardor novo à tarefa nova que levará à *criação da Cidade Nova*.

Matemática, Arte, Cultura

Conseguirá a Humanidade, num grande estremecimento de todo o seu imenso corpo, tomar finalmente consciência de si mesma, revelar a si própria a sua alma colectiva, feita do desenvolvimento ao máximo, pela cultura, da personalidade de todos os seus membros?

Bento Caraça

A obra de Newton, contemporâneo de Bach, tem, na

física, o mesmo carácter de majestade, de segurança, de universalidade da obra de Bach em música.

Bento Caraça

Um trabalho matemático, é, para quem o sabe ler, o mesmo que um trecho musical para quem o sabe ouvir, um quadro para quem o sabe ver, uma ode para quem o sabe sentir.

Gomes Teixeira



Homem culto é, segundo a definição de Caraça, “aquele que satisfaz os seguintes requisitos:

1. tem consciência da sua posição no cosmos e, em particular, na sociedade a que pertence;
2. tem consciência da sua personalidade e da dignidade que é inerente à existência como ser humano;
3. faz do aperfeiçoamento do seu ser interior a preocupação máxima e fim último da vida.”

E quais os requisitos para o homem poder aceder à cultura? Eis a resposta, transcrita da “Cultura Integral do Indivíduo”:

“Condição indispensável para que o homem possa trilhar a senda da cultura - que ele seja economicamente independente. Consequência - o problema económico é, de todos os problemas sociais, aquele que tem de ser resolvido em primeiro lugar. Tudo aquilo que for empreendido sem a resolução prévia, radical e séria, desse problema, não passará, ou duma tentativa ingénua, com vaga tinta filantrópica, destinada a perder-se na

impotência, ou de uma mão-cheia de pó, atirada aos olhos dos incautos.”

Satisfeito o requisito indispensável de *independência económica*, estará o *saber* ao alcance de qualquer um? Na conferência “As Universidades Populares e a Cultura”, Caraça afirma que a cultura “não é inacessível à massa; o ser humano é indefinidamente aperfeiçoável”, enquanto que em “A Arte e a Cultura Popular” adverte: “reservem-se aos cientistas a especialidade, o domínio da particularidade em cada compartimento da actividade humana, pertencem àquele que a cultiva habitualmente, e é estultícia o pretender dar leis onde uma vida inteira de trabalho por vezes não chega para proporcionar uma posse completa do já formulado”. Caraça crê, por um acto de razão e não de fé, que há um *património cultural comum*, um *luminoso* núcleo central, científico, artístico, que é pertença de todos. A *extensão progressiva do património cultural comum* às massas, *castradas* na sua incultura, ignorância, para além de limitadas pelas contingências económico-sociais, prefigurava-se como meio para atingir a sociedade planetária da justiça e paz.

Que *cultura* procurou Caraça promover, a cultura artística ou a científica, a que encerra elevada carga estética e subjectividade ou a que detém forte sentido objectivo? Ou rejeita esta dicotomização de campos e considera a Cultura como um corpo único?

Cultura é *síntese* de arte e ciência e há uma analogia de fundo entre os dois campos - ambos os géneros são *jogo*. É difícil distinguir os dois empreendimentos pelas dicotomias clássicas, do tipo, o mundo dos valores e o mundo dos factos, o subjectivo e o objectivo, ou o intuitivo e o indutivo. Não há incompatibilidade entre o espírito literário, o espírito artístico e o espírito científico, não há oposição entre as tendências poéticas, artísticas ou científicas. Como Caraça expressa na conferência “Algumas Reflexões sobre a Arte”, *a criação intelectual e artística têm o mesmo fundamento e, se assim é, estranho seria que elas fossem independentes uma da outra. Mas é essa independência que se vê muitas vezes reclamar com vigor procurando-se circunscrever a criação artística ao domínio*

da intuição, da inspiração, e afastar tudo quanto seja suspeito de racionalismo.

Na interpretação unívoca da criatividade, a Matemática, na sua qualidade simultânea de *arte e ciência* - "arte-ciência" consagrada - desempenha papel privilegiado.

Na génese da actividade criadora, subjectividade e objectividade coadjuvam-se numa intercomplementaridade fecunda. Existe uma espécie de fertilização cruzada entre os campos artístico e científico, manifesta, por exemplo, no desenvolvimento da perspectiva matemática pelos pintores da Renascença, nomeadamente, Dürer e Leonardo da Vinci, ou nas questões colocadas pela arte de Escher à Matemática. A criatividade musical do compositor Alexander Borodine (1833-1887), convivia em equilíbrio harmonioso com a profundidade do seu pensamento de cientista.

A Matemática é um *corpus* em interacção com outros saberes, como a Música, as Artes Plásticas, a Arquitectura, a Poesia ou a Literatura. Os temas matemáticos estão presentes na poesia (de Pessoa, Jorge Luís Borges, Melo e Castro...) e na ficção (e.g. *Flatland* de E.Abbott, *Irmãos Karamavoz* de Dostoievski ...), na decoração da cerâmica das várias civilizações, na arte islâmica do Palácio de Alhambra, Granada (século XIV), na pintura de Pozzo, nos modelos algébricos que subjazem à música erudita do século XX, na arte contemporânea influenciada pela geometria fractal ... O problema da auto-referência em lógica está presente na litografia *mãos desenhando* de M.C. Escher.

Existem relações entre arte e ciência, relações intrínsecas, de adjunção, de correlação nas fontes de inspiração ... A ideia fundamental de desvendar a "natureza" - a primeira obra de arte - ou seja, o próprio sentido da vida, é a pulsão de todo o artista, seja ele escultor, pintor ou matemático.

Caraça revela empenhamento em visitar os campos científicos e artístico. Sendo um homem de raiz "cultural científica", é sublinhável que o seu pensamento aponte para uma harmonização dos campos científicos, artísticos, literários, reconhecendo que "a literatura e a arte eram cruciais na "grande luta pelo *entendimento* e pela *libertação* dos homens! Que não eram parentes pobres ao

pé da Ciência ou da Técnica. Que eram indispensáveis, insubstituíveis." Porque não há oposição entre a estética como domínio dos sentidos e o "conceptual" inerente às formas intelectuais do conhecimento científico. Em consonância contribuem para o *equilíbrio* (supostamente) existente na sociedade ideal, a atingir após "o despertar da alma colectiva das massas", a sociedade dos artistas e cientistas, das massas cultas, da criatividade e imaginação. Sociedade para a qual as forças antagónicas deveriam convergir, sob a égide da arte e da ciência.

Defendem alguns a existência de antagonismo entre as áreas ditas artísticas e científicas. O poeta Goethe dedicou entusiástico empenho ao estudo da física, tendo publicado em 1772 as *Contribuições à óptica* e em 1810 *A Teoria das Cores*, à qual dizia atribuir mais valor que a toda a sua poesia.

Há mais de meio século que sou conhecido como poeta no meu país e no estrangeiro. Mas o que geralmente se não sabe é que também me tenho ocupado dos fenómenos físicos e fisiológicos da natureza com aquela perseverança que só a paixão pode dar.

Mário Silva entendia Goethe como um caso paradigmático da oposição entre os campos científico e literário. Na sua perspectiva, enquanto a obra poética requer expressividade, emotividade, espontaneidade, a actividade científica exige faculdades de espírito que *se não compadecem com devaneios poéticos*, sobretudo no domínio das ciências exactas. *A Matemática exige faculdades de pensamento abstracto que estão em oposição com as que deve possuir o artista.* O reduzido valor da obra científica do fervoroso cultor da ciência Goethe, dever-se-ia, assim, à insuperável incompatibilidade entre espírito científico e espírito artístico.

Os temas da arte e da literatura ocupavam o matemático Caraça (e.g., as conferências "Rabindranath Tagore (1939)", "A arte e a cultura popular" (1936), etc...).

Eram sobretudo as incidências sócio-políticas das obras versadas (de ciência e arte) - e não as obras em si - o principal alvo (assumido) de Caraça. Como o próprio concede, por

exemplo, ao afirmar: “Não é do Romain Rolland artista que quero falar nestas linhas [...] Outros dirão do seu valor como romancista, como dramaturgo, como musicólogo”.

Não estando no centro das preocupações de Caraça a *compreensão da coisa artística*, na conferência sobre Tagore, Caraça ousa prever o papel da poesia numa sociedade futura, quando “os corações, fundindo-se na harmonia do todo, poderão brilhar na luz e cantar na alegria da liberdade”.

São eixos do pensamento cultural de Caraça *o conhecer, o sentimento do belo, os objectivos de ordem moral*. A sensibilidade que proclama é a emoção, a emotividade, pois que *o grande papel* que cabe à arte é: “fazer-nos viver, pelo lado da emoção estética, esta grande *unidade* da corrente que nos arrasta a todos, fazer que não sintamos a solidão de que nos fala Bourdelle, de exilados na própria terra [...] é o sentirmo-nos unidos, caminhando ombro a ombro, bem cerrados, para a linha das construções que se vêem no horizonte, é o avançarmos para a recuperação, em moldes novos, daquela *unidade* perdida de que vos falei acima, é isso que constitui ou deve constituir, para todos nós, a mais forte razão de viver”.

Conforme expressa em “As Universidades Populares e a Cultura”, seduzia-o “o sentimento do belo, origem de todas as manifestações artísticas” (sem excluir as de pendor científico), o “sentimento do belo introduzido nas relações sociais, dando ao homem objectivos de ordem moral”.

Todavia, na Matemática, como nas Artes, a beleza/estética não deve ser um fim em si. O gozo e o juízo estético podem propiciar *um adormecimento, uma evasão do real*. A arte desempenha papel de *união de grupos humanos à volta de sentimentos ou de ideias*, a função da arte é *ser agente de comunhão humana*. O homem em comunhão com os outros *acha-se melhor, mais forte, mais digno, irradia e recebe calor; na massa circulam, mais francas, mais activas, aquelas grandes correntes de simpatia e fraternidade humanas, criadoras de possibilidades e actuatoras dos grandes empreendimentos*.

Caraça não tinha como objectivo pensar *a coisa artística* em si, dilucidar as relações entre estética e ética, entre

estética e mercado ou entre estética e antropologia, mas antes as implicações ético-sociológicas da Arte. Como Mário Dionísio reconhece (SN), Bento de Jesus Caraça não foi um crítico ou teorizador de arte. “Ou um estudioso de estética. Qualquer especialista desses domínios mostrará sem dificuldade que foi pequena a contribuição dos seus escritos para o fenómeno da criação estética ou da própria história da arte. Nem ele próprio alguma vez pretendeu o contrário.” Escreve ainda: “à fórmula simplista da arte ao serviço do social, Bento Caraça substituiu o conceito de comunhão humana.” Com efeito, na sua “teorização” de arte, transparece uma concepção alternativa ao contexto dominante da época e do seu grupo de referência. Embora a sua concepção artística estivesse ideologicamente enraizada no neo-realismo, ultrapassa-o, como prova a *inclinação* por António Pedro, pintor em cujos escritos de 1931 emerge o movimento surrealista português.

A conferência “Algumas Reflexões sobre a Arte”, proferida em 1943, foi de abertura a uma série de sessões de divulgação musical. A segunda destas sessões foi interrompida “por um bando de arruaceiros e pelas polícias da época”, quando Lopes Graça usava da palavra. Por que razão era crime *falar de arte*? Por que era o abordar das relações da arte com a vida social e a significação sociológica da arte *coisa* a silenciar? A cultura pode ser subversiva - o regime sabia-o.

Na perspectiva de Marx, a “cultura compreende o máximo desenvolvimento das capacidades intelectuais, artísticas e materiais encerradas no homem.” A cultura é via decisiva para a libertação, meio para atingir *uma sociedade mais livre, mais justa e mais fraterna*. Ou, como Caraça escreve na “Cultura Integral do Indivíduo”:

“A aquisição da cultura significa uma elevação constante, servida por um florescimento do que há de melhor no homem e por um desenvolvimento sempre crescente de todas as suas qualidades potenciais, consideradas do quádruplo ponto de vista físico, intelectual, moral e artístico, significa, numa palavra, a *conquista da liberdade*”.

O papel cultural da história

“... as ilusões nunca são perdidas. Elas significam o que há de melhor na vida dos homens e dos povos [...] Benditas as ilusões, a adesão firme e total a qualquer coisa de grande, que nos ultrapassa e nos requer. Sem ilusão, nada de sublime teria sido realizado, nem a catedral de Estrasburgo, nem as sinfonias de Beethoven. Nem a obra imortal de Galileo.”

Bento de Jesus Caraça

A obra de Caraça expressa o grande valor que atribui à história na génese do quadro cultural, nomeadamente, à história da ciência e seus “heróis”, figuras em que se revê e que são modelos ideais a atingir. Como os físicos Galileo-Galilei (1564-1642), Newton (1642-1727) ou Einstein (1879-1955); ou os matemáticos Abel (1802-1829) e Galois (1811-1832). Na “Gazeta de Matemática”, em Abril de 1940, escreve a propósito destes dois génios:

“Que visão emocionante é para nós, hoje, o caminho destes dois jovens irmanados no génio e na desgraça, separados em tudo o resto, trilhando a vida por sendas opostas, arrancando a sua obra como bocados de si mesmo, torturados ante a indiferença dos outros. Abel não viu realizado o seu sonho, quando a Universidade de Berlim ia abrir-lhe as suas portas, a tuberculose matou-o. Galois não viu realizado o seu sonho revolucionário - dois meses depois de sair da prisão, foi morto num duelo.”

Em Galois, prezava o ideal revolucionário, em Galileo, a vítima do obscurantismo, da reacção. Rever-se-ia nos seus heróis? Caraça aderira à filosofia marxista, abraçara um ideal político, enfileirara numa luta incondicional contra o poder estabelecido. Teria o sentido premonitório do seu malogro, do afastamento compulsivo da cátedra, da morte prematura?

Qual a natureza da função que conferia à história da matemática na formação do edifício conceptual matemático (função, entenda-se, da criação à difusão)? Designadamente, uma função metodológica, epistemológica, pedagógica,

utilitária, motivadora de investigação, de aprendizagem?

O grande valor que Caraça atribui à história da ciência provém do seu estatuto de potenciadora de conhecimento do futuro, ou seja, o conhecimento do futuro a partir do conhecimento do passado, o olhar para a frente fazendo o balanço do saber adquirido. A história da ciência, como memória individual e colectiva, fornece meios para a percepção futura dos fenómenos e seus encadeamentos, partindo do testemunho do passado. Esse saber é um meio de despertar.



A história da ciência e, em particular, da matemática, é resposta às grandes pulsões do Mundo, *sobrevivência e transcendência*, fonte inesgotável de surpresa e maravilha. Caraça perspectiva a relação da produtividade científica com o Poder, a perifericidade dos países intervenientes, os contextos sócio-ideológicos ... Situa devidamente os eventos no movimento das ideias da época, analisando os aspectos de modernidade e os anacronismos, tomando como princípio que o espaço e o tempo são categorias fundamentais de análise. E afirma:

... é errónea a opinião, infelizmente muito generalizada ainda hoje, de que a história da ciência é qualquer coisa de seco, que só aos profissionais interessa. A culpa, bem sei, é dos próprios profissionais que, na sua

maioria, a não sabem viver e não têm olhos para ver, ou alma para sentir, esta verdade elementar: que a história da ciência, mesmo a do mais abstracto dos seus ramos, é uma história essencialmente, profundamente humana.

Bento Caraça, anti-fatalista e fervoroso no seu ideal de “homem-fazedor-da-história”, desenvolveu múltiplas iniciativas no sentido da superação do atraso e isolamento científico de Portugal - integrando o *movimento matemático* dos anos 40, fundando a Gazeta de Matemática, o Centro de Estudos de Economia, dinamizando a Sociedade Portuguesa de Matemática ... Abstraindo das aspirações do cientista puro que dilata os horizontes do saber com as suas descobertas, foi divulgador de ciência, teve papel pioneiro de etnocientista, criou um “estilo novo” de ensinar matemática e condições para o desenvolvimento de uma verdadeira tradição científica em Portugal. Numa perspectiva mais ampla, gizou a sua acção no sentido da promoção da cultura a extractos sucessivamente mais amplos de uma população onde a taxa de iletrados reais apontava para a casa dos 86%. Porque, nas suas palavras: “O que o mundo for amanhã, é o esforço de todos nós que o determinará”.

Agradecimentos

Devo um agradecimento muito especial ao Professor João Caraça. Ao Dr. Alberto Vilaça agradeço a disponibilidade, os testemunhos e os documentos que teve a gentileza de facultar.

Bibliografia

- [NB1] Natália Bebiano, *Contributo para o estudo da obra matemática de Bento de Jesus Caraça*, Análise, 13, pp. 161-173, 1990.
- [NB2] Natália Bebiano, Bento de Jesus Caraça, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 17, pp. 7-16, 1990.

[BJC1] Bento de Jesus Caraça, *Lições de álgebra e Análise*, Lisboa, 1936.

[BJC2] Bento de Jesus Caraça, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Lisboa, 1951.

[BJC3] Bento de Jesus Caraça, *Conferências e Outros Escritos*, Lisboa, 1978.

[BJC4] Bento de Jesus Caraça, *A Cultura Integral do Indivíduo*, Edição do Pelouro da Educação e da Juventude da Câmara Municipal de Lisboa, Lisboa, 1995.

[RLG1] Ruy Luís Gomes, *Crítica de livros: Lições de Álgebra e Análise, Vol.II Fasc. I*, Gazeta de Matemática, no.4, Lisboa, Outubro, 1940;

[RLG2] Ruy Luís Gomes, *Bento Caraça educador*, Gazeta de Matemática, no.37-38, Lisboa, Agosto-Dezembro, 1948;

[AM1] António Monteiro, *Movimento Matemático. Origem e Objectivo desta secção*, Gazeta de Matemática, 10, pp.25-26, 1942.

[AM2] António Monteiro, *O Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira*, Gazeta de Matemática, 15, pp.8-9, 1943.

[LNR] Luís Neves Real, *Subsídio para o estudo da acção de Bento de Jesus Caraça no ensino e na investigação matemática em Portugal*; *Vértice* 38, pp. 736-775, 1978.

[JR1] Jorge Rezende, *Os 50 anos da demissão de Bento de Jesus Caraça*, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 34, pp. 67-76, 1996.

[HR] Hugo Ribeiro, *Actuação de António Aniceto Monteiro em Lisboa, entre 1939 e 1942*, *Port. Math.*, 39, p.V-VII, 1980.

[JSS1] J. Sebastião e Silva, *Bento Caraça e o ensino da matemática em Portugal*, *Diário de Lisboa*, no.16 349, Lisboa, 25 de Junho, 1968.

[JSS2] J. Sebastião e Silva, *Pela primeira vez a matemática surgia a meus olhos como edifício inteiramente racional*, *Seara Nova*, no.1 492, Lisboa, Junho, 1968 e *O Jornal da Educação*, no.14, Lisboa, Julho, 1978.

[MS] Mário Silva, *Elogio da Ciência*, Coimbra, Coimbra Editora, 1971. *Vértice* -412/413/414 de Setembro/Outubro/ Novembro de 1978, *Homenagem a Bento de Jesus Caraça*.

[SN] Seara Nova - 1472, Junho, 1968, *Bento de Jesus Caraça no 20º aniversário da sua morte presença e actualidade*.

Importância da Observação em Matemática

José Morgado

Centro de Matemática, Faculdade de Ciências do Porto

Pessoas não familiarizadas com a Matemática ficam por vezes surpreendidas, quando ouvem dizer que a Matemática também é uma ciência de observação.

1. Gauss

Vem a propósito lembrar um caso que se conta acerca de Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), quando era aluno da instrução primária. O seu professor, J. G. Büttner, deu como exercício para ser resolvido na aula, *calcular a soma dos 100 inteiros*, 1, 2, 3, ..., 100. Mal o professor acabara de enunciar o exercício, o jovem Gauss levantou-se e pousou a sua lousa na secretária do professor, dizendo: *aqui está*. Tinha escrito um único número na lousa: o número 5050.

O professor ficou muito admirado e quis naturalmente saber como é que Gauss tinha encontrado tão rapidamente aquele resultado. Gauss disse-lhe ter observado que

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 50 + 51 = 101.$$

Assim, o conjunto dos números dados poderia considerar-se formado por 50 grupos de dois números cuja soma é 101. Por consequência, a soma dos 100 números considerados é igual a 101×50 ou seja 5050, "resultado que obtive por simples cálculo mental." Gauss teria então 10 anos, segundo uns autores, e teria apenas 8, segundo outros.

Na verdade, o que interessa destacar é a observação do jovem aluno Gauss ter permitido transformar aquela soma de 100 parcelas num simples produto de dois factores, 101×50 .

Gauss, como se sabe, foi um dos maiores Matemáticos de todos os tempos. Como pode ler-se na *Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura*, ele mesmo dizia que "aprendeu a calcular antes de aprender a falar".

Aos 19 anos, Gauss estava ainda hesitante entre seguir Matemática e seguir Filosofia, uma vez que gostava muito de Matemática e gostava também muito de Latim e de Grego. Mas, em 30 de Março de 1796, exactamente um mês antes de atingir a idade de 20 anos, conseguiu resolver um problema formulado, mas não resolvido, cerca de 2000 anos antes: conseguiu construir, com régua e compasso, um polígono regular de 17 lados; por outras palavras, conseguiu dividir a circunferência em 17 partes iguais. Diz-se ter sido esta descoberta que o decidiu a seguir Matemática.

Começou então a organizar o seu diário científico onde tomava notas das descobertas que ia fazendo. Por ele se pôde concluir que Gauss elaborou trabalhos de investigação nos vários ramos da Matemática, especialmente em *Teoria dos Números*.

É de Gauss a seguinte frase:

A Matemática é a rainha das ciências e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática.

Na escrita do seu diário científico, usou uma criptografia especial. Por exemplo, para registar, em 10 de Julho de 1796, a sua descoberta de que *todo o inteiro maior que 1 pode ser escrito como soma de, quando muito, três parcelas, cada uma das quais é um número triangular*¹, Gauss escreveu o seguinte:

$$E Y P H K A ! \text{ num} = \Delta + \Delta + \Delta.$$

A palavra E Y P H K A ! significa *Eureka!* (grito de triunfo a uma descoberta, por exemplo: Achei!).

O enunciado da proposição escrita por Gauss tinha sido dado (mas não demonstrado) por Pierre de Fermat (1601(?) - 1665).

Howard Eves, no seu livro *An Introduction to the History of Mathematics*², p.521 da edição de 1995, lembra que Gauss foi descrito como

o gigante matemático que, do alto da sua magnitude, abarca num relance as estrelas e os abismos.

2. Sylvester

Outro grande matemático a chamar a atenção para a importância da observação foi James Joseph Sylvester (1814 - 1897). No seu artigo intitulado *The Study That Knows Nothing of Observation* e publicado no 3º vol. da colecção *The World of Mathematics*, pp.1729-1736, Sylvester declara:

A maior parte, se não a totalidade, das grandes ideias dos matemáticos modernos tem tido a sua origem na observação.

No mesmo artigo, Sylvester afirma o seguinte a respeito de Joseph Louis Lagrange (1736-1813): "Lagrange, e nenhuma autoridade maior que a sua podia ser citada, exprimia enfaticamente a sua crença na importância da faculdade de observação para a matemática."

Karl Weierstrass (1815-1897), um dos maiores matemáticos de todos os tempos, tinha afirmado: "Um matemático que não é um tanto poeta, nunca será um matemático completo."³

Ora, Sylvester não foi apenas um matemático; foi também um poeta⁴. Como Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), Sylvester foi um dos maiores criadores de termos da História da Matemática⁵.

De 1855 a 1869, ensinou na *Real Academia Militar, de Woolwich*. Esteve duas vezes na América: como professor da *Universidade de John Hopkins* em Baltimore (1876 - 1833), e na *Universidade de Oxford*. Era membro da *Royal*

Society desde 1839 e fundou a revista *American Journal of Mathematics*, em 1878. No tempo decorrido entre as duas estadias na América, trabalhou em Londres como actuário para uma companhia de seguros.

Durante a segunda estadia na América, Sylvester foi dos primeiros a firmar trabalho matemático avançado nas Universidades americanas. Pode dizer-se que, com o ensino de Sylvester, começaram a florescer as Matemáticas nos Estados Unidos.

Sylvester aceitou um lugar de Professor em Oxford, em 1885 e ocupou esse lugar até à sua morte, em 15 de Março de 1897⁶.

3. Weierstrass

Karl Weierstrass, durante grande parte da sua vida, ensinou numa escola não universitária; a sua carreira como professor universitário foi iniciada quando ele tinha 49 anos, idade em que muitos matemáticos já deixaram de fazer investigação. Era um professor pontual, no entanto, não compareceu uma manhã em que devia começar sua aula às 8 horas.

O Director foi à sua residência saber o motivo da sua

¹ Isto é, cada uma é um número da forma $\frac{n(n+1)}{2}$, com n inteiro positivo.

² Traduzido para a nossa língua por Hygino Domingues.

³ *A first Undergraduate Course*, by Abraham Hillman & Gerald Alexanderson (1973), p.71.

⁴ Sylvester, além do opúsculo intitulado *The Laws of Verse*, escreveu um poema, Rosalind, que consiste em 400 versos, cada um dos quais rima com Rosalind (*A History of Mathematics*, de Florian Cajori, 3ª ed. (1980), Chelsea Publishing Company, New York).

⁵ Por exemplo, *invariante, contra-variante, covariante, Hessiano, Jacobiano*.

⁶ Como Professor, Weierstrass alcançou grande prestígio; como escreveu Howard Eves, no seu livro *Introdução à História da Matemática*, edição de 1995, suas aulas eram meticulosamente preparadas e foram um exemplo para futuros matemáticos. Como declara Howard Eves, Weierstrass "foi a consciência matemática por excelência".

falta, agravada pelo tumulto que os estudantes faziam. Ficou surpreendido ao encontrar Weierstrass num quarto escuro onde tinha passado toda a noite, ainda a trabalhar, sem dar conta de que já era dia claro! Quando o Director lhe disse que os estudantes estavam à sua espera, fazendo muito barulho, Weierstrass pediu-lhe que o desculpassem, pois estava à beira de conseguir uma importante descoberta matemática que, em sua opinião, iria surpreender o mundo científico.

Weierstrass foi, em 1856, nomeado *Professor do Instituto Industrial de Berlim* e, depois *Professor Associado da Universidade de Berlim*. Foi membro da *Academia das Ciências de Berlim*.

4. Que observar?

Além dos matemáticos que citámos - Gauss, Sylvester, Lagrange, Weierstrass, Fermat - muitos outros podiam ser citados como defensores da *grande importância que a observação tem nas descobertas matemáticas*.

Vejamos alguns casos.

1) *Suponhamos que a sucessão*

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

é uma progressão aritmética e que p e q são inteiros distintos tais que

$$a_p = q \text{ e } a_q = p. \quad (2)$$

Calcule a_m .

Em virtude de em (1) estar uma progressão aritmética tem-se, por um lado

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots = r,$$

onde r é a razão da progressão; por outro lado

$$a_m = a_p + (m-p)r \text{ e } a_m = a_q + (m-q)r$$

de onde se conclui, atendendo a (2), que:

$$a_m = q + (m-p)r = p + (m-q)r;$$

segue-se $q - pr = p - qr$, ou seja $q - p = (p - q)r$,

o que significa $r = -1$, uma vez que $p \neq q$.

Como $a_m = q + (m-p)r$, tem-se $a_m = p + q - m$.

2) *Suponhamos que os números positivos*

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (n \geq 2)$$

estão em progressão aritmética. Mostre que:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

Observe-se que, para $n = 2$, o primeiro membro da igualdade anterior se reduz precisamente ao 2º membro

$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}$. Esta observação sugere que utilizemos o

método de indução matemática na forma: *Se a igualdade considerada é válida para $n = 2$ e se a sua validade para n implica a validade para $n + 1$, então a igualdade é válida para todo inteiro $n \geq 2$.*

Suponhamos então que a equação (3) é válida para o inteiro n : é claro que em tal caso se tem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \\ & = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} \right) + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \\ & = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \\ & = \frac{(n-1)(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})}{a_n - a_1} + \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n+1} - a_n} \\ & = \frac{(n-1)(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})}{(n-1)r} + \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{r} \\ & = \frac{a_1 + nr - a_1}{r(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}})} = \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}, \end{aligned}$$

o que prova a validade de (3) para $n+1$, como pretendíamos.

Outro processo de resolução

É claro que foi útil a observação inicial: a igualdade (3) é trivialmente válida para $n=2$; pois esta observação sugeriu que utilizássemos o método de indução matemática. Mas não será possível utilizar alguma outra observação que conduza mais rapidamente ao resultado desejado?

Ora, vejamos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} \\
 &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{r} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{r} \\
 &= \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{r} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})}{r(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} \\
 &= \frac{a_n - a_1}{r(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{(n-1)r}{r(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} \\
 &= \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}} \qquad \text{c.p.d.}
 \end{aligned}$$

3) Calcular a soma $1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + 111\dots 1$ em função do número n de parcelas.

Designando por S a soma procurada tem-se

$$\begin{aligned}
 S &= n + (n-1)10 + (n-2)10^2 + \dots + [n - (n-1)]10^{n-1} \\
 &= n(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) - [10 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^3 + \dots + (n-1)10^{n-1}] \\
 &= s_1 - 10s_2,
 \end{aligned}$$

onde $s_1 = n(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) = \frac{n(1 - 10^n)}{1 - 10} = \frac{(10^n - 1)n}{9}$

e $s_2 = 1 + 2 \times 10 + 3 \times 10^2 + \dots + (n-1)10^{n-2}$.

Observemos que a soma s_2 é da forma

$$\sum_{j=1}^{n-1} jx^{j-1}, \text{ com } x=10.$$

Ora, jx^{j-1} é a derivada de x^j com respeito a x .

Logo, tem-se

$$s_2 = \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{n-1} x^j \Big|_{x=10} = \frac{d}{dx} (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}) \Big|_{x=10}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left. \frac{d}{dx} \frac{x-x^n}{1-x} \right|_{x=10} \\
 &= \left. \frac{[1-nx^{n-1}](1-x) + (x-x^n)}{(1-x)^2} \right|_{x=10} \\
 &= \left. \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2} \right|_{x=10} \\
 &= \frac{(n-1)10^n - n \cdot 10^{n-1} + 1}{9^2}
 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
 S &= s_1 - 10s_2 \\
 &= \frac{n10^n - n}{9} - \frac{(n-1)10^{n+1} - n \cdot 10^n + 10}{81} \\
 &= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}.
 \end{aligned}$$

Outro processo de resolução

A soma procurada pode escrever-se

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \dots + \frac{10^n-1}{9} \\
 &= \frac{10+10^2+10^3+\dots+10^n}{9} - \frac{n}{9} \\
 &= \frac{10^{n+1}-10}{9^2} - \frac{n}{9} \\
 &= \frac{10^{n+1}-9n-10}{81}.
 \end{aligned}$$

Este é um processo bem mais rápido.

4) *Determinar as raízes reais do sistema de equações*

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x^4+y^4=641 \end{cases} \quad (4)$$

Atendendo a que $y=x-3$, a 2ª equação do sistema pode ser escrita como

$$x^4 + (x-3)^4 = 641,$$

ou seja,

$$2x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81 = 641,$$

o que equivale a

$$x^4 - 6x^3 + 27x^2 - 54x - 280 = 0.$$

Como $(x^2-3x)^2 = x^4 - 6x^3 + 9x^2$, a equação anterior pode ser escrita como

$$(x^2-3x)^2 + 18(x^2-3x) - 280 = 0. \quad (5)$$

Pondo $x^2-3x=z$, vem $z^2+18z-280=0$, donde

$$z = -9 \pm \sqrt{81+280} = -9 \pm \sqrt{361} = -9 \pm 19,$$

tendo-se portanto $z=10$ ou $z=-28$; $z=10$ significa que $x^2-3x=10$, donde $x=5$ ou $x=-2$; $z=-28$ significa que $x^2-3x=-28$, esta é uma equação do 2º grau com discriminante -103 , portanto não tem raízes reais; assim não há mais soluções além das já encontradas.

Ora, para $x=5$, tem-se $y=2$ e, para $x=-2$, tem-se $y=-5$. O sistema tem apenas duas soluções, (x,y) a saber, $(5,2)$ e $(-2,-5)$.

Outro processo de resolução

Da 1ª equação do sistema (4), resulta

$$(x-y)^4 = 3^4,$$

isto é, $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 = 81$.

Atendendo a que $x^4 + y^4 = 641$, tem-se

$$2x^3y - 3x^2y^2 + 2xy^3 = 280,$$

isto é, $xy(2x^2 - 3xy + 2y^2) = 280$,

o que equivale a

$$xy[2(x-y)^2 + xy] = 280.$$

Como $x-y=3$, resulta

$$xy(18+xy) = 280, \text{ ou seja, } (xy)^2 + 18(xy) = 280;$$

pondo $xy=t$ e resolvendo a equação

$$t^2 + 18t - 280 = 0,$$

obtem-se $t_1=10$ e $t_2=-28$, etc.

O leitor pode completar facilmente a resolução.

Um Caso de Geometria Agrária

Claudio Arconcher

Jundiaí - SP (Brasil)

Civilizações muito antigas como a Egípcia, a Babilónica, a Chinesa e a Indiana defrontaram-se nos seus primórdios com a necessidade de determinar a área de uma gleba produtiva e de conhecer o volume de um celeiro onde guardavam cereais como a cevada e o trigo. Citemos dois exemplos clássicos:

Exemplo 1: Babilónios, Egípcios e Chineses avaliavam a área de uma gleba em forma de quadrilátero convexo tomando o produto das médias aritméticas dos lados opostos do quadrilátero. Assim, se a , b , c e d são, ciclicamente, as medidas dos lados de um quadrilátero convexo, a área era dada por $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$.

Nenhuma informação era dada sobre o facto de que essa avaliação, em geral, conduz a uma sobre-estimação do valor real da área [1], [2].

Exemplo 2: Em *O que aconteceu na História*, de Gordon Childe [3], no capítulo V intitulado *A revolução urbana da Mesopotâmia*, podemos ler sobre o conhecimento dos agricultores da antiga Suméria, pequena região sobre o delta do Tigre e do Eufrates: "... documentos datados de 2.500 a.C. indicam que o rendimento médio de um campo de cevada equivalia a oitenta e seis vezes a sementeira."

Além de conhecermos a excepcional produtividade

da região naquela época, constatamos também que os sumérios sabiam avaliar volumes.

O volume de um tronco de pirâmide de base quadrada já era do conhecimento dos egípcios há 4.000 anos. É o problema número 14 descrito no documento conhecido por Papiro de Moscou [1]. É curioso notar que o volume de um tronco de pirâmide foi conhecido muito antes do volume da própria pirâmide.

Num livro recente *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o séc. XXI* [4] dos autores Romulo Campos Lins e Joaquim Gimenez podemos ler que, em nosso país, agricultores do Movimento Sem-Terra avaliam a área de uma gleba quadrangular elevando ao quadrado a média aritmética das medidas dos lados do quadrilátero. Também aqui, conforme veremos, temos uma sobre-estimação da área.

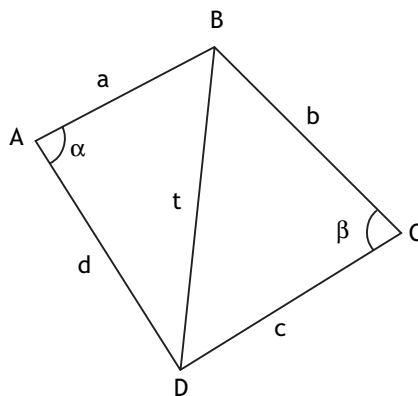
Nossa curiosidade sobre esse caso começou quando consideramos as possíveis implicações que essa avaliação poderia ter. Não é difícil imaginar, levando-se em conta os insumos da produção agrícola, quão fundamental deve ser uma boa avaliação da área de uma gleba para a optimização da produção, mesmo que pensemos em pequena escala.

No que segue vamos procurar entender melhor essas avaliações. Notemos, desde já, que a fórmula usada pelos antigos é certa se o quadrilátero for um retângulo e a fórmula usada pelos Sem-Terra é certa para um quadrado.

Consideremos um quadrilátero convexo cujos lados medem, ciclicamente, a , b , c e d . É claro que um quadri-

látero convexo não fica determinado apenas pelas medidas de seus lados. Para defini-lo precisamos conhecer, além dos lados, a medida de um dos ângulos internos ou a medida de uma de suas diagonais.

Vejamos, primeiramente, a questão da sobre-estimação da área. Seja **ABCD** um quadrilátero convexo:



α e β são as medidas dos ângulos opostos \widehat{BAD} e \widehat{BCD} , respectivamente, e t é a medida da diagonal **BD**.

A área do quadrilátero **ABCD** é dada por:

$$A = \frac{1}{2} a.d. \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} b.c. \operatorname{sen} \beta.$$

Vamos multiplicar essa expressão, membro a membro, por 4 e elevar ao quadrado ambos os termos da igualdade (a seguir ficará justificado esse procedimento).

$$16A^2 = 4a^2d^2\operatorname{sen}^2\alpha + 4b^2c^2\operatorname{sen}^2\beta + 8abcd \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta \quad (1)$$

O teorema dos cosenos aplicado aos triângulos ABD e BCD nos fornece:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta, \text{ daqui temos}$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos\alpha - 2bc\cos\beta, \text{ elevando ao quadrado os dois termos:}$$

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2d^2\cos^2\alpha + 4b^2c^2\cos^2\beta - 8abcd \cos\alpha.\cos\beta \quad (2)$$

Somando membro a membro (1) e (2) vem:

$$16A^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd\cos(\alpha + \beta), \text{ ou}$$

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2d^2 + 4b^2c^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd\cos(\alpha + \beta)} \quad (3)$$

fórmula essa que explicita a dependência da área com as medidas dos lados do quadrilátero e com os ângulos opostos α e β . Fica claro que o valor máximo para a área ocorre quando $\alpha + \beta = 180^\circ$, isto é, quando o quadrilátero é inscrito numa circunferência. Nesse caso, pondo-se $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ e com mais trabalho algébrico obtemos a expressão

$A_{\max} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, a qual é a famosa fórmula devida ao matemático indiano do século VII d.C. Brahmagupta [5].

Com esse resultado estamos em condições de provar nossas afirmações anteriores.

(1) Vamos provar que: $A \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$.

De facto, podemos escrever:

$$\begin{aligned} A_{\text{máx}} &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\ &= \sqrt{(p-a)(p-c)} \cdot \sqrt{(p-b)(p-d)} \\ &\leq \frac{(p-a)+(p-c)}{2} \cdot \frac{(p-b)+(p-d)}{2} \\ &= \frac{b+d}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \\ &= \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}. \end{aligned}$$

Como $A \leq A_{\text{máx}}$, está provado o pretendido.

Teremos igualdade se, e somente se, $p-a=p-c$ e $p-b=p-d$ ou seja $a=c$ e $b=d$, isto é, para um rectângulo, já que deve ser um paralelogramo inscrito. Além disso fica estabelecido que o rectângulo é o único quadrilátero convexo cuja área é dada pelo produto das médias aritméticas dos lados opostos. Em todos os outros casos temos uma sobre-estimação da área.

(2) Vamos provar agora que $A \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$.

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} &\sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\ &\leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4} \end{aligned}$$

elevando ao quadrado membro a membro resulta:

$$A_{\text{máx}} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2.$$

Está provado.

Teremos igualdade se, e somente se, $p-a=p-b=p-c=p-d$ ou $a=b=c=d$, ou seja, um quadrilátero inscritível com os quatro lados congruentes, isto é, um quadrado.

A esta altura é interessante indagar qual das duas sobre-estimações é mais próxima do valor real da área. Veremos que a avaliação dos povos antigos é mais precisa.

De facto estudemos a diferença entre elas:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 - \frac{(a+c)}{2} \cdot \frac{(b+d)}{2}.$$

Poupando o leitor de acompanhar o desenvolvimento algébrico, essa diferença é igual a:

$$\frac{[(a+c)-(b+d)]^2}{16}.$$

Denotando a primeira parcela por $A_{\text{sem-terra}}$ e a segunda por $A_{\text{egípcios}}$ podemos escrever:

$$A_{\text{sem-terra}} - A_{\text{egípcios}} = \frac{[(a+c)-(b+d)]^2}{16} \geq 0,$$

ocorrendo igualdade se, e somente se, $a+c=b+d$. Muito curioso. Para um quadrilátero circunscrito as duas sobre-estimações coincidem.

Vejamos num exemplo os resultados da sobre-estimação dada pela fórmula usada pelos Sem-Terra. Consideremos uma gleba quadrangular de dimensões: 300m, 400m, 500m e 600 m, ciclicamente. Aplicando a fórmula $A_{\text{sem-terra}}$ obtemos para a área da gleba o valor 202.500m². A área máxima dada pela fórmula de Brahmagupta é 189.736,65m². Assim a diferença entre o valor máximo possível e a sobre-estimação é 12.763,35m².

Admitindo que as dimensões da gleba do exemplo são pertinentes para um grupo de pequenos agricultores, nos parece que o resultado da sobre-estimação é inadmissível. Na prática isso traria problemas económicos bastante relevantes. Primeiro o sobre-dimensionamento dos insumos gerando eventuais desperdícios. Em segundo lugar teríamos uma falsa previsão da produção também por sobre-estimação. A situação se agrava ainda mais se considerarmos que, na maioria das vezes, a produção agrícola é financiada em Bancos que cobram juros de seus empréstimos.

Chegamos assim a um impasse interessante gerado por uma simples fórmula matemática para a área de um quadrilátero.

Conjecturar como esse impasse é resolvido na prática não nos parece a melhor orientação a seguir. O melhor a fazer é planejar uma pesquisa de campo mais abrangente junto aos Sem-Terra e procurar entender em detalhe todo o processo produtivo, desde o planejamento inicial onde a referida fórmula de área deve ser usada até o resultado final com a comercialização dos produtos agrícolas.

Nosso propósito presente é apenas levantar a impropriedade dessa forma de calcular a área de uma gleba. Aliás impropriedade essa com profundas raízes históricas. Babilônios, Egípcios e Chineses calculavam a área de qualquer quadrilátero como se fosse um retângulo. Os Sem-Terra de nossos dias calculam como se fosse um quadrado.

Bibliografia:

- [1] *História da Matemática*
Carl B. Boyer; Editora Edgard Blücher Ltda.(1974).
- [2] *A History of Chinese Mathematics*
Jean - Claude Martzloff, Springer-Verlag (1997).
- [3] *O que aconteceu na História*
Gordon Childe, Círculo do Livro.
- [4] *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*
Romulo Campos Lins e Joaquim Gimenez,
Editora Papirus, 3ª Edição.
- [5] *Geometry Revisited*
H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer,
The Mathematical Association of America (1967).

Bartoon



Luis Afonso, "Bartoon 2", Contexto Editora, 2000
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)

Erdős e o seu Número

F. J. Craveiro de Carvalho

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

*I wrote a paper once
about the Collaboration Graph that filled, I claimed,
a much-needed gap in the mathematical literature.*

Ronald Graham

1. Paul Erdős é uma das figuras carismáticas, sob mais do que um ponto de vista, na Matemática do século XX. Esta é a minha opinião mas, apesar dos 492 co-autores e das cerca de 1500 publicações, confesso que o seu trabalho não acorda em mim o mesmo respeito que as grandiosas construções matemáticas de Alexander Grothendieck, Sir Michael Atiyah ou, em regiões mais vizinhas do meu próprio trabalho, John Willard Milnor.

O facto dos resultados, alguns pelo menos, de Erdős serem de enunciado acessível a quem tenha tido algum contacto com a Matemática contribuirá para aquilo que será, aceito-o sem grandes reservas, um preconceito, à falta de melhor termo. Por exemplo, enunciados como

Entre um inteiro maior que 1 e o respectivo dobro existe sempre um número primo.

ou

Um conjunto infinito de pontos no plano cujas distâncias são inteiros faz parte de uma recta.

possibilitam que se façam apressadamente juízos de grande ligeireza. Um bom conselho será prestar atenção aos enunciados dos teoremas mas, fundamentalmente, pres-

tar atenção às demonstrações. Afinal toda a gente percebe o enunciado do Último Teorema de Fermat...

O próprio Erdős tinha consciência de que trabalhava em assuntos algo marginais. Cito, da entrevista que surge em [1], a passagem seguinte

... Sometimes the (Fields Medal) committee just doesn't like a field. ... The people who decide are not that interested in combinatorics.

Mesmo o pequeno poema, que um colega seu compôs, será tão inocente como parece?

A conjecture both deep and profound

Is whether a circle is round

In a paper of Erdős

Written in Kurdish

A counterexample is found.¹

Talvez as coisas estejam a mudar. Uma das Medalhas Fields, no último Congresso Internacional de Matemática, em Berlim, em Agosto de 1998, foi atribuída a William Timothy Gowers, Cambridge University, pelas suas contribui-

¹ Trata-se de um *limerick*, pequeno poema humorístico de 5 versos, dos quais os dois primeiros rimam com o último. Em tradução literal teríamos: Uma conjectura funda e profunda // É se uma circunferência é redonda // Num artigo de Erdős // Escrito em curdo // Há um contra-exemplo.

ções nos domínios da Análise Funcional e da Combinatória. A tese de doutoramento de Gowers foi orientada por Béla Bollobás e este, aos dezassete anos, escreveu o seu primeiro artigo, com Erdős precisamente.

Tendo sido tão activo matematicamente durante toda a sua vida e tendo colaborado com tantos matemáticos por esse mundo fora, o impacto de Paul Erdős é indissociável. O *Número de Erdős* dá conta desse impacto.

A primeira vez que vi uma referência a tal número foi na entrevista de [1]. Parece, no entanto, que a primeira referência escrita surge na nota de meia página "And what is your Erdős number?", [3], de 1969. Nessa altura o próprio Erdős desconheceria a existência do seu número.

Um matemático tem número de Erdős 1 se foi co-autor com Paul Erdős e, indutivamente, número de Erdős $n+1$ se não tiver número de Erdős menor que ou igual a n e tiver sido co-autor com alguém de número de Erdős n .

Por exemplo, Einstein tem número de Erdős 2 bem como o matemático português J. Tiago de Oliveira [6]. Richard Borcherds, Cambridge University, a quem também foi atribuída uma Medalha Fields no Congresso de Berlim, tem número de Erdős 2.

2. A noção de número de Erdős pode ser apresentada da maneira mais sofisticada e assim abrir caminho para questões que a formulação dada atrás não deixa antever.

Um *Grafo* $G = (V, A)$ consiste num conjunto finito de *vértices* e num conjunto A de *arcos*, formado por partes de V com apenas dois elementos.

Dois vértices x, y são *adjacentes* se $\{x, y\}$ for um arco. Um *caminho de comprimento* $K-1$ do vértice x para o vértice y é uma seqüência de vértices $x=v_1, \dots, v_k=y$ em que vértices consecutivos são adjacentes.

A noção de caminho permite introduzir uma relação de equivalência no conjunto V dos vértices. Escreva-se $x \sim y$ se existir um caminho de x para y . As classes de equivalência que aquela relação origina são as *componentes* do grafo G .

Uma qualquer componente do grafo G pode tornar-se um espaço métrico se se definir $d(x, y)$ como o menor dos

comprimentos dos caminhos que ligam x a y .

Considere-se agora o grafo $G = (V, A)$, em que V é o conjunto dos matemáticos, vivos ou mortos, num dado momento e $\{x, y\} \in A$ se x, y foram co-autores de um artigo (este é o *Collaboration Graph* a que se refere a epígrafe inicial). Considere-se ainda a componente de G a que Erdős pertence. O *número de Erdős* do matemático x é precisamente a sua distância a Paul Erdős. No caso de x não estar na mesma componente de Erdős então o número de Erdős é ∞ o que, segundo [5],

... is a sign of either independence or nonentity.

Exemplos de questões que se podem formular surgem na secção final de [2], artigo este que desencadeou a presente colaboração. Recomenda-se vivamente a sua leitura bem como a visita à página

<http://www.oakland.edu/grossman/erdoshp.html>

3. Tida como uma boa maneira para iniciar uma conversa numa reunião de matemáticos que se não conhecem bem [5], a pergunta *E o seu número de Erdős qual é?* desperta, penso eu, alguma curiosidade inevitável. Como uma pequena brincadeira indico a seguir alguma coisa sobre números de Erdős no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Para além de J. Tiago de Oliveira, há, pelo menos, um outro matemático português com número de Erdős 2. Trata-se de J. A. Dias da Silva, da Faculdade de Ciências de Lisboa e Presidente do CIM - Centro Internacional de Matemática² e um caminho que o liga a Erdős é

J. A. Dias da Silva \rightarrow *Leroy Beasley* \rightarrow *Paul Erdős*.

Como J. A. Dias da Silva colaborou com vários colegas meus, números de Erdős menores que ou iguais a 3 são relativamente vulgares no Departamento de Matemática

²na altura em que este texto foi escrito, Verão de 1999.

da Universidade de Coimbra. Por exemplo, Eduardo Marques de Sá, Cristina Caldeira, Ana Paula Santana, Graciano de Oliveira estão todos nessas condições.

Por outras vias,

M. Sobral → *Jan Reiterman* → *Vojtech Rodl* → *Paul Erdős*
e

J. M. Simões Pereira → *Christina Zamfirescu* → *Zsolt Tuza* → *Paul Erdős*,

Manuela Sobral e J. M. S. Simões Pereira, este um pouco surpreendentemente já que é um especialista em Combinatória, têm também número de Erdős menor que ou igual a 3.

A minha colega Maria Manuel Clementino,

M. M. Clementino → *Walter Tholen* → *Jan Reiterman*
→ *Vojtech Rodl* → *Paul Erdős*,

tem também número de Erdős menor que ou igual a 4.

Já o meu número, embora preze muito a companhia, parece ser desconsoladoramente alto, menor que ou igual a 6, tanto mais que não se conhecem números de Erdős, finitos, superiores a 7 [4]. Um caminho possível é

F. J. Craveiro de Carvalho → *S. A. Robertson*
→ *D. R. J. Chillingworth* → *Jerrold Marsden*
→ *Martin Golubitsky* → *Bruce Rothschild* → *Paul Erdős*.

4. Como já se refere em [5], os matemáticos podem

ser substituídos por actores, atletas etc. Seria curioso saber se Carlos Lopes possui um número de Carl Lewis (ou Jesse Owens) finito mas, se derem uma espreitadela a

<http://www.cs.virginia.edu/oracle/>,

podem ver logo que o número de Pamela Anderson de Greta Garbo é 3 e que Woody Allen tem número 2 de Groucho Marx, por exemplo.

5. Obrigado aos colegas citados por terem lido, comentado, apanhado gralhas e contribuído com alguns caminhos.

REFERÊNCIAS:

- [1] - Donald J. Albers and G. L. Alexander, *Mathematical people*, Birkhauser, 1985.
- [2] - Rodrigo de Castro and Jerrold W. Grossman, *Famous trails to Paul Erdős*, *Math. Intelligencer*, volume 21, number 3, 1999.
- [3] - Casper Goffman, *And what is your Erdős number?*, *Amer. Math. Monthly*, volume 76, 1969.
- [4] - Paul Hoffman, *The man who loved only numbers*, Fourth Estate Limited, 1998.
- [5] - Bruce Schechter, *My brain is open*, Oxford University Press, 1998.
- [6] - Jorge Nuno Silva, *Paul Erdős (1913 - 1996)*, *Boletim da S. P. M.*, número 35, 1996.

A criação do mundo

O ponto não tem dimensões, disse-o o grego, assim descobrindo a geometria que havia antes que houvesse criação: por isso, cego, mas rigoroso, já tudo se construía.

Olimpíadas Internacionais de Matemática em Portugal? Quando?

Graciano de Oliveira

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Portugal organiza Olimpíadas de Matemática desde há muitos anos, participa com uma equipa nas internacionais desde 1989 e iniciou-se, pouco depois, nas ibero-americanas.

Começou-se nos princípios da década de oitenta com as mini-olimpíadas, assim designadas por serem organizadas pela Delegação Regional do Centro da SPM sediada em Coimbra e, conseqüentemente, não abrangerem todo o país. O êxito conseguido levou rapidamente a que a SPM tomasse em mãos a organização, estendendo-se o concurso a todo o território com o nome de Olimpíadas Nacionais de Matemática. Recentemente adoptou-se o nome de Olimpíadas Portuguesas de Matemática. Deve notar-se que, com a colaboração da SPM, Macau participou pela primeira vez nas Olimpíadas internacionais em 1990 e, a partir de então, passou a organizar Olimpíadas no seu território anualmente.

As Olimpíadas internacionais têm lugar num país anfitrião que varia de ano para ano. As ibero-americanas restringem-se, como o nome indica, aos dois países ibéricos e aos da América Latina, mudando também o país organizador todos os anos. Quer numa quer noutras, a organização muda de país mas, estranhamente, nunca passou por Portugal. Este facto não nos deixa bem colocados e merece a nossa atenção.

O desempenho das nossas equipas além fronteiras tem sido, em geral, modesto espelhando o que vai no nosso ensino o que não quer dizer que, sobretudo nas ibero-

americanas, não se tenham já obtido resultados relativamente interessantes. Podem ver-se pormenores no *site* da SPM.

A organização das Olimpíadas Portuguesas de Matemática é uma tarefa razoavelmente complicada do ponto de vista logístico e, além das dificuldades logísticas, existe outro problema de maior magnitude: o de coligir as perguntas adequadas. As perguntas devem apelar mais à imaginação do que ao conhecimento de teoremas; não devem ser muito difíceis para não desanimar os nossos estudantes; também não podem ser muito simples porque, depois, a surpresa, e até o choque, será grande quando a nossa equipa se apresentar nas internacionais ou nas ibero-americanas. Este é um ponto delicado e quem faz parte da Comissão de Problemas (cuja missão, como o nome indica, é seleccionar os problemas) tem de possuir experiência e conhecimento do que se tem feito cá e lá fora.

A organização das nossas Olimpíadas tem sempre girado à volta de um número diminuto de pessoas que dedicadamente têm dado o melhor do seu esforço e do seu tempo. O núcleo essencial de toda a organização localiza-se na zona centro do país com um pequeno número de abnegados colaboradores noutros pontos. Ao longo dos anos tem-se feito o possível e o impossível para alargar o número de colaboradores, infelizmente sem grandes resultados. As maiores dificuldades residem na Comissão de Problemas, como já foi referido, e também na Comissão de Preparação (estas tem por finalidade treinar as equipas

que vão às internacionais e ibero-americanas). Para se fazer parte destas comissões é necessário um período de aprendizagem e como alguns dos seus membros, sobretudo na Comissão de Problemas, já desempenham funções desde há muito, conviria juntar elementos mais jovens que adquirissem a experiência indispensável para poderem substituir os mais velhos.

A importância da Comissão de Preparação é indiscutível. Se quisermos melhorar os nossos resultados nas Olimpíadas internacionais e fazer alguma figura na América latina, temos de fornecer algum treino à nossa equipa. Nalguns países o treino é feito no estilo do desporto de alta competição. Não advogamos isso, preferimos o espírito de confraternização responsável, com emulação mas sem dramatismo exagerado. O gosto de bem fazer e melhorar devem estar presentes, a preparação e o estudo devem preceder a participação que não se pode reduzir a mera brincadeira. Naturalmente surge a pergunta: quantas pessoas temos em Portugal capazes de ministrar treino à equipa? Muito poucas, pelo que se tem aplicado a tradicional receita de recorrer à importação de conhecimentos para complementar o treino que ministramos. Assim têm-se deslocado a Coimbra, onde normalmente o treino decorre orientado por professores do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, professores estrangeiros com grande experiência na matéria. O treino costuma durar cerca de 15 dias e nunca se procurou dar-lhe o aspecto, que reputamos de negativo, de alta competição. Os estudantes que constituem a equipa deslocam-se a Coimbra, em geral aos fins de semana, tomam conhecimento de alguns problemas saídos em edições anteriores das Olimpíadas e de como os abordar, mantendo-se o ambiente de confraternização sem descuidar o estudo, a concentração e o esforço.

Resumindo: seria do maior interesse conseguir um maior número de pessoas interessadas nestas actividades e de várias zonas do país. As diligências até agora feitas nesse sentido tiveram um resultado pouco animador. A importação de conhecimentos não é um mal, só nos falta a

correspondente capacidade de também exportar para passarmos de eternos aprendizes a parceiros.

Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática de 2007 em Portugal

Até hoje nunca Portugal organizou as Olimpíadas Internacionais de Matemática nem tão pouco as ibero-americanas. Vários países ibero-americanos organizaram já a competição e alguns deles (Cuba, México e Venezuela) fizeram-no por duas vezes. A organização em 2001 estava a cargo de El Salvador que, devido aos terremotos de fins de 2000, teve de desistir. Obviamente a situação portuguesa começa a ser embaraçosa. É verdade que a tarefa não é simples, mas o nosso atraso não é justificável. É preciso dinheiro pois o costume manda que o país organizador suporte todas as despesas de estada de todas as equipas, só os transportes internacionais ficando a cargo das equipas participantes. Nas internacionais as equipas são constituídas por 6 estudantes e 2 acompanhantes. Supondo que participam 85 países, é necessário garantir alojamento e alimentação para 680 pessoas durante cerca de 15 dias, sem contar com eventuais excursões ou actividades de entretenimento. Há ainda que garantir a separação, em cidades diferentes, dos participantes e dos acompanhantes que virão a seleccionar problemas e a avaliar as suas dificuldades. Estes não podem ter contactos com os estudantes. É preciso arranjar quem vá ao aeroporto esperar cada uma das equipas, etc. Mas há dificuldades que não se resolvem só com dinheiro. Para cada pergunta posta aos participantes, tem de haver um júri! Necessitamos de mais pessoas com experiência das Olimpíadas.

Bem, apesar de termos organizado a Expo 98 com sucesso, não parece que estejamos em condições de organizar as Olimpíadas Internacionais de Matemática que dificilmente levantarão os ânimos como o Europa 2004. Se formos ver a lista de países que já o fizeram, não podemos deixar de pensar que connosco algo de estranho se passa.

Podemos então encarar a organização das Olimpíadas ibero-americanas. Que não sejamos os tristes de entre os ibero-americanos! Há menos participantes, as equipas são de 4 estudantes e 2 acompanhantes, em princípio é mais fácil e mais barato. Em edições anteriores já foi sugerido pelos nossos parceiros que Portugal metesse ombros à tarefa. A prudência tem aconselhado cautela com os compromissos. Mas se tantos países da América Latina e a Espanha já o fizeram, e com uma organização primorosa, por que não nós? Finalmente decidimo-nos: a Sociedade Portuguesa de Matemática comprometeu-se a organizar as Olimpíadas ibero-americanas, no ano 2007, em Portugal. Os anos anteriores já estão reservados por outros países, existindo contudo a possibilidade de nos vir a ser atribuído o ano de

2006 (devido à possível desistência de outra candidatura). É tempo de se pensar no assunto. Provavelmente o apoio financeiro consegue-se, mas há outros aspectos acima referidos, mais preocupantes e que necessitam de uma preparação a mais longo prazo. Por isso o alerta. Dois anos antes do ano que nos foi atribuído, temos de confirmar que desejamos a organização ou ... desistir.

Tem de se começar a encarar desde já o compromisso com seriedade e empenho. Se tivermos de desistir, há quem fique com amargos de boca e os nossos amigos da América Latina e espanhóis não deixarão de ficar espantados. Ou talvez não ... talvez já tenham percebido como as coisas vão por cá.

PROGRAMA GULBENKIAN

NOVOS TALENTOS EM MATEMÁTICA



Bolsas

para estudantes
que frequentem
uma licenciatura em
Matemática
no 1º, 2º ou 3º ano
no ano lectivo 2001-2002

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

<http://www.gulbenkian.pt/ciencia>

Data limite para apresentação de candidaturas

8 de Outubro 2001

Comissão Científica Coordenadora

Ana Cannas da Silva [Instituto Superior Técnico]

José Ferreira Alves [Universidade do Porto]

Orlando Neto [Universidade de Lisboa]

José Miguel Urbano [Universidade de Coimbra]

INFORMAÇÕES: Serviço de Ciência da Fundação Calouste Gulbenkian • Av. de Berna, 45-A - 5º 1067-001 Lisboa

Tel. 21 782 35 23 / 21 782 35 25 • Fax 21 782 30 19 • Email: dmota@Gulbenkian.pt • randrade@Gulbenkian.pt

Construções Geométricas

Owen Brison

Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

1. Introdução

Os matemáticos da Antiga Grécia procuraram exaustivamente construções geométricas, apenas com régua não graduada e compasso, para a **trisseção do ângulo**, a **duplicação do cubo**¹ e a **quadratura do círculo**². Não as encontraram, apesar de terem descoberto outras maneiras de as realizar. Ao longo de dois mil anos sucederam-se tentativas infrutíferas de muitos matemáticos e, finalmente no século XIX, foi demonstrado que nenhuma dessas três construções é possível; a demonstração é um exemplo muito bem sucedido de “transferência de tecnologia”: os problemas são transformados, através da Geometria Analítica, em problemas sobre números reais ou números complexos, sendo estes problemas resolvidos recorrendo à Álgebra e à Análise Matemática.

O facto de um problema ter resistido durante tanto tempo e vir a ser resolvido com instrumentos de uma área aparentemente fora do contexto em que foi posto parece-nos uma lição importante sobre a maneira como a Matemática funciona.

Não é nosso propósito tratar aqui a Geometria Euclidiana ou a história destes problemas com todo o rigor, mas tão só sublinhar a maneira como a Álgebra “abstracta” do Século XIX, ajudou a resolver problemas que tinham ficado em aberto desde os dias de Euclides. Assim, no que respeita a demonstrações, remetemos o leitor para a bibliografia excepto em alguns casos que nos parecem menos técnicos e facil-

mente acessíveis a eventuais leitores pré-universitários.

Na secção 2 esboçamos a parte principal do que convencionámos designar por “transferência de tecnologia”; nas secções 3 e 4 tratamos os dois primeiros problemas: os teoremas 3.1 e 4.1 são frequentemente atribuídos a P.L. Wantzel; na secção 6 esboçamos o estudo da construtibilidade de polígonos regulares destacando a do heptadecágono; para esta secção pressupomos que o leitor está familiarizado com a notação exponencial para a forma polar dos números complexos.

Um tratamento completo e cuidado do tema deste artigo pode encontrar-se no elegante livro de Hadlock [HC], no qual nos inspirámos fortemente.

2. Algebrização

Como Conway e Guy observam no Capítulo 7 de [CG], a Geometria Euclidiana pode ser encarada como um passatempo com regras fixas; passemos a identificar as que nos interessam. A tese [FR] dá uma visão muito interessante de vários sistemas alternativos de regras.

Supomos conhecidos os termos da geometria euclidiana elementar, como “ponto”, “recta”, “circunferência”, “ân-

¹ i.e., a construção da aresta de um cubo com volume duplo de um cubo dado.

² i.e., a construção da aresta de um quadrado com área igual à de um círculo dado.

gulo”, etc. referentes a entidades do plano euclidiano, designado por \mathbb{E} .

2.1 Construções primitivas

Qualquer construção se inicia com, pelo menos, dois pontos distintos, a uma distância que se fixa como unidade.

Seja P um conjunto com pelo menos dois pontos distintos em \mathbb{E} . Consideremos as construções seguintes:

Construção R. (Régua) Dados pontos distintos A e B em P , construir uma recta que passe por A e B .

Construção C. (Compasso) Dados pontos distintos C e A em P , construir uma circunferência com centro C que passe por A .

Qualquer recta fica construída quando construimos dois quaisquer pontos distintos que lhe pertençam. O ponto P está construído quando construimos duas rectas distintas cuja intersecção é P , ou uma recta e uma circunferência ou duas circunferências distintas cuja intersecção contém P .

Resulta das Proposições 2 e 3, do Livro I dos Elementos de Euclides, que a construção seguinte pode ser realizada utilizando as Operações R e C:

Construção C´. (Compasso) Construir uma circunferência com centro em P cujo raio seja igual à distância entre dois pontos distintos de P .

Essencialmente, a construção $C´$ permite a utilização do compasso para “transferir” uma distância já definida.

Daqui em diante, suporemos que as construções primitivas são R e $C´$.

2.2 Outras construções

Como se sabe, seqüências convenientes das construções primitivas permitem realizar as seguintes:

(1) Dada uma recta l e um ponto P de l , construir uma recta perpendicular a l que passe por P ; em particular, construir ângulos rectos.

(2) Dada uma recta l e um ponto P fora de l , construir uma paralela e outra perpendicular a l que passem por P .

(3) Construir um segmento de recta com n unidades inteiras de comprimento.

(4) Dados segmentos de recta com a e b unidades de comprimento, construir segmentos de recta com comprimento $a+b$ ou, se $a \geq b$, $a-b$ unidades.

(5) Dados segmentos de recta com a e b unidades de comprimento e sendo $b \neq 0$, construir segmentos de recta com comprimentos ab e a/b unidades.

(6) Dado um segmento de recta com $a (>0)$ unidades de comprimento, construir um segmento de recta com comprimento \sqrt{a} unidades.

(7) Construir ângulos de 60° e 72° ; em particular, construir triângulos equiláteros bem como pentágonos regulares.

(8) Dado um ângulo de medida α e números naturais k e n , construir ângulos de medidas $\alpha/2^k, 2\alpha, \dots, n\alpha$; em particular, construir ângulos de medida 45° .

Em geral, uma construção será uma seqüência conveniente de repetições das construções primitivas R e $C´$. A definição seguinte formaliza esta ideia.

Definição 2.1. *Seja S um conjunto de pontos do plano \mathbb{E} .*

1. *Se duas rectas distintas ou duas circunferências distintas ou uma recta e uma circunferência são construtíveis por R ou $C´$ a partir de pontos de S , as intersecções correspondentes (quando não vazias) dizem-se **construtíveis numa etapa a partir de S** .*

2. *Se S tiver mais que um ponto, diz-se que um ponto $Q \in \mathbb{E}$ é **construtível a partir de S** quando existe um número natural n e uma seqüência Q_1, \dots, Q_n de pontos de \mathbb{E} tais que*

$$Q_n = Q$$

e, se para cada $i=1, \dots, n$, definindo

$$P_0 = S,$$

$$P_{i-1} = P_0 \cup \{Q_1, \dots, Q_{i-1}\},$$

o ponto Q_i é construtível numa etapa a partir de P_{i-1} .

Podemos iniciar a “transferência de tecnologia”.

2.3 O plano Cartesiano

Começamos por identificar o plano \mathbf{E} com o quadrado cartesiano do conjunto dos números reais, \mathbb{R}^2 , mediante a fixação de um sistema de dois eixos ortonormais.

Sabemos da geometria elementar que, dados pontos $(a,0)$, $(b,0)$, é possível construir cada um dos pontos $(a+b, 0)$ e $(a-b,0)$, numa etapa, e $(ab,0)$ (ou $(a/b,0)$ se $b \neq 0$) em mais etapas, recorrendo ao teorema de Thales. Em suma,

Seja qual for o número racional q , é possível construir o ponto $(q,0)$, a partir de $\{(0,0), (1,0)\}$.

É também possível construir certos pontos cujas coordenadas não são racionais; por exemplo, o ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é um dos pontos de intersecção da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ com a recta de equação $x = y$, sendo a circunferência e a recta ambas construtíveis a partir de $\{(0,0), (1,0)\}$; em seguida, podemos construir $(\sqrt{2}, 0)$. Em geral,

Dado um ponto $(a,0)$, sendo a real e positivo, podemos construir o ponto $(\sqrt{a}, 0)$.

Passamos à segunda fase de “transferência”.

2.4 Extensões do corpo dos números racionais

A identificação de \mathbf{E} com \mathbb{R}^2 permite então traduzir os problemas geométricos de que nos estamos a ocupar em termos de números reais³.

Representamos respectivamente por \mathbb{Q} e \mathbb{R} os corpos dos números racionais e dos números reais. Um **subcorpo** de \mathbb{R} será um seu subconjunto K , diferente de $\{0\}$ e fecha-

do para a soma, a diferença e o quociente por números não-nulos; escreveremos $K \mathbb{D} L$ para abreviar K é *subcorpo* do *subcorpo* L , i.e., K e L são subcorpos de \mathbb{R} e $K \subseteq L$. Observe-se que, não só \mathbb{Q} é subcorpo de \mathbb{R} como também, se $K \mathbb{D} L$, necessariamente $1 \in K$ e, conseqüentemente, $2 = 1+1 \in K$, $3 \in K$, ...; daí também $-2, -3, \dots \in K$ e $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots \in K$ e finalmente, $\frac{m}{n} \in K$ sempre que m, n são números inteiros e $n \neq 0$. Assim

$$\mathbb{Q} \subseteq K \text{ sempre que } K \mathbb{D} \mathbb{R}.$$

Se $K \mathbb{D} L \mathbb{D} \mathbb{R}$, diremos que L é uma **extensão** de K .

Uma forma bastante simples de obter extensões próprias de um subcorpo K é tomar um número real r que não esteja em K e formar o corpo mínimo que contém $K \cup \{r\}$; por exemplo, tal corpo no caso $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$ é $\{p + q\sqrt{2}, p, q \in \mathbb{Q}\}$.

De um modo geral, se $C \subseteq \mathbb{R}$, o **subcorpo gerado por C** é por definição, um subcorpo de \mathbb{R} designado por $\langle C \rangle$ tal que $C \subseteq \langle C \rangle$ e, se $K \mathbb{D} \mathbb{R}$ e $C \subseteq K$, então $\langle C \rangle \subseteq K$. Para cada $r \in \mathbb{R}$ e cada $K \mathbb{D} \mathbb{R}$ põe-se

$$K(r) := \langle K \cup \{r\} \rangle$$

e, se $r = \sqrt{k}$ para algum $k \in K$, diz-se que $K(r)$, ou seja $K(\sqrt{k})$ é **extensão quadrática** de K .

Se $K \mathbb{D} L$, então L é espaço vectorial sobre K sendo fácil provar o seguinte.

Lema 2.1: *Se $K \mathbb{D} L$ e $k \in K$ mas $\sqrt{k} \notin K$, então*

$$K(\sqrt{k}) = \{u + v\sqrt{k} : u, v \in K\},$$

$\{1, \sqrt{k}\}$ é uma base de $K(\sqrt{k})$ sobre K , pelo que a dimensão de $K(\sqrt{k})$ sobre K é 2.

Recorde-se agora que as construções primitivas se tra-

³ Veremos na secção 6 que, em alguns casos, pode ser preferível utilizar o corpo dos números complexos.

duzem no presente contexto por resoluções de sucessivos sistemas de equações lineares ou polinómios do segundo grau com coeficientes reais e, assim sendo, o mesmo se passa com as outras construções. Interessa-nos um caso particular de extensões:

Definição 2.2. Se $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L \subseteq \mathbb{R}$, L diz-se uma extensão *multi-quadrática* de K se, para algum número natural n existe uma cadeia de subcorpos

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \dots \subseteq K_n = L$$

tal que $K_{i+1} = K_i(\sqrt{k_i})$ e $k_i \in K_i$, para cada i relevante.

Não exigimos que $\sqrt{k_i} \notin K_i$; por exemplo, segundo a definição, K é uma extensão multi-quadrática de K ; interessa também observar que, quando $k^2 \in K$, \sqrt{k} é raiz de um polinómio numa variável t , com coeficientes em K , a saber: $t^2 - k^2$.

O teorema seguinte apresenta uma condição necessária e suficiente para a construtibilidade de um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}$ a partir de um conjunto dado de pontos.

Teorema 2.1. O ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é construtível a partir do subconjunto S de \mathbb{R}^2 se e apenas se x e y pertencem a uma extensão multi-quadrática do subcorpo de \mathbb{R} gerado pelo conjunto das coordenadas dos pontos em S .

Juntando os resultados seguintes, ficamos na posse de instrumentos muito importantes para resolver os problemas referidos na introdução.

Se $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$, defina-se a seguinte notação

$$|L:K| = \text{dimensão de } L \text{ como espaço vectorial sobre } K.$$

Teorema 2.2 (da Torre) Se $K \subseteq L \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$, então

$$|M:K| = |M:L| \cdot |L:K|.$$

Este teorema permite estender o lema 2.1 ao caso de uma extensão multi-quadrática e está demonstrado em

quase todos os livros que tratam da teoria dos corpos, por exemplo em [BO].

Finalmente, combinando com o lema 2.1 e o teorema 2.1

Corolário 2.1 Se L for uma extensão multi-quadrática de K , então $|L:K|$ é uma potência de 2. Em particular, as coordenadas dos pontos de \mathbb{R}^2 construtíveis a partir de $\{(0,0), (0,1)\}$ estão numa extensão cuja dimensão sobre \mathbb{Q} é uma potência de 2.

3. A trissecção do ângulo

Tal como anunciámos no início, o problema de trissecção do ângulo tem resposta negativa. Esta secção é dedicada a uma demonstração do seguinte teorema:

Teorema 3.1 É impossível trissectar o ângulo 60° com régua e compasso; mais geralmente, não existe construção para trissectar um ângulo arbitrário.

A demonstração que vamos apresentar envolve o comportamento de polinómios de grau 3 e utiliza os dois lemas seguintes.

Lema 3.1 Sejam K um subcorpo de \mathbb{R} e $f(t) = t^3 + bt + c$ um polinómio de coeficientes em K ($b, c \in K$). Suponha que $f(t)$ tem uma raiz $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Se existe $k \in K$ tal que $\alpha \in K(\sqrt{k})$, então $f(t)$ tem uma raiz em K .

2. Se α está em alguma extensão multi-quadrática K , então $f(t)$ tem uma raiz em K .

Demonstração. (1) Se $\sqrt{k} \in K$ então $K(\sqrt{k}) = K$ e $\alpha \in K$ é raiz de $f(t)$. Logo, podemos supor que $\sqrt{k} \notin K$, pelo que $\{1, \sqrt{k}\}$ é base de $K(\sqrt{k})$ sobre K (lema 2.1). Existem assim $u, v \in K$ tais que $\alpha = u + v\sqrt{k}$. Se $v = 0$, então $\alpha \in K$; logo, podemos supor que $v \neq 0$. Temos

$$f(\alpha) = (u^3 + 3uv^2k + bu + c) \times 1 + (3u^2v + v^3k + bv) \times \sqrt{k} = 0.$$

Como $\{1, \sqrt{k}\}$ é conjunto linearmente independente sobre K , e $v \neq 0$, segue-se que

$$u^3 + 3uv^2k + bu + c = 0$$

e $3u^2 + v^2k + b = 0.$

Eliminando o termo v^2k concluímos que

$$-8u^3 - 2ub + c = 0.$$

Logo, $-2u \in K$ é raiz de $f(t)$.

(2) Segue-se de (1) por indução.

Com o fim de aplicarmos o lema anterior, convém recordar o

Lema 3.2 *Se o polinómio $f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ tem coeficientes inteiros, u e v são números inteiros primos entre si e $\frac{u}{v}$ é raiz de $f(t)$, então u divide a_0 e v divide a_n .*

Passemos então à demonstração do teorema 3.1. Recordem-se também as definições 2.1 e 2.2.

Demonstração (do teorema 3.1) Defina-se $O := (0,0)$, $X := (1,0)$, $P_0 := \{O, X\}$, $K_0 = \mathbb{Q}$. É fácil construir um triângulo equilátero sobre a base OX a partir de P_0 , pelo que podemos construir um ponto A tal que $\angle XO A = 60^\circ$ e $|OA| = 1$.

Se fosse possível trissectar ângulo $X\hat{O}A$, seria possível construir, a partir de P_0 , um ponto B tal que $\angle XOB = 20^\circ$ e $|OB| = 1$; logo, também se poderia construir, a partir de P_0 , o ponto $D := (\cos(20^\circ), 0)$ de OX . Assim, $\cos(20^\circ)$ pertenceria a uma extensão multi-quadrática, K , de \mathbb{Q} , pelo que também $2\cos(20^\circ)$ estaria em K . Seja $r = 2\cos(20^\circ)$.

Como $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$, tem-se

$$4\cos^3(20^\circ) - 3\cos(20^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2};$$

mas então, $r^3 - 3r - 1 = 0$, ou seja r seria raiz do polinómio de coeficientes racionais $f(t) := t^3 - 3t - 1$. Uma vez que estamos a supor que r estaria numa extensão multi-quadrática de \mathbb{Q} , segue-se do lema 3.1 que $f(t)$ teria uma

raiz racional. Ora, pelo lema 3.2, se u e v são números inteiros primos entre si e $\frac{u}{v}$ é raiz de $f(t)$, acontece que u e v dividem 1, i.e., $u = \pm v = \pm 1$; como $f(1) \neq 0 \neq f(-1)$, $f(t)$ não tem raízes racionais, uma contradição. Não é portanto possível trissectar $X\hat{O}A$ com régua e compasso.

4. Duplicação do cubo

Em seguida, resolvemos o problema da duplicação do cubo. O problema consistia de facto em construir um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado. Ora as nossas construções referem-se a figuras planas e é lícito observar que um cubo é tridimensional, mais precisamente, as diagonais das faces bem como as diagonais não estão todas no mesmo plano. Mas se o cubo tiver arestas de comprimento uma unidade, as diagonais têm comprimentos respectivamente $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ unidades, e segmentos de recta de $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ unidades são construtíveis (em \mathbb{E}) a partir do segmento de recta com uma unidade de comprimento. Por outras palavras, as diagonais do cubo inicial não trazem segmentos de recta cujos comprimentos não podiam ter sido construídos a partir da aresta do cubo. Logo, e “como manda a tradição” (que temos vindo a estabelecer...), interpretamos este problema como sendo a construção de um segmento de recta de comprimento $\sqrt[3]{2}$ unidades sendo dado um segmento de recta de 1 unidade.

Teorema 4.1 *É impossível duplicar o cubo com régua e compasso.*

Demonstração. Se o ponto $(\sqrt[3]{2}, 0)$ fosse construtível a partir de $\{(0,0), (1,0)\}$, $\sqrt[3]{2}$ pertenceria a uma extensão multi-quadrática de \mathbb{Q} . Mas $\sqrt[3]{2}$ é raiz de $g(t) = t^3 - 2$. Logo, pelo lema 3.1, $t^3 - 2$ tem uma raiz racional. Como, pelo lema 3.2, qualquer raiz racional de $g(t)$ admite a forma $\frac{u}{v}$, onde u e v são números inteiros primos entre si, u

divide 2 e v divide 1; mas nenhum dos números ± 1 , ± 2 é raiz de $g(t)$; segue-se que $\sqrt[3]{2}$ não está em qualquer extensão multi-quadrática de \mathbb{Q} e o cubo não pode ser duplicado com régua e compasso.

5. A quadratura do círculo

Vimos como se podem resolver, pela negativa, dois dos problemas clássicos. O problema da quadratura do círculo, i.e., de construir com régua e compasso (o lado de) um quadrado com área igual à de um círculo dado com raio não nulo, é bastante mais difícil do que os outros dois por assentar numa distinção mais fina de tipos de números e resultados de Análise Matemática.

Quanto a distinção de números: um número real diz-se **algébrico** se for raiz de um polinómio de coeficientes racionais; caso contrário diz-se **transcendente**. E vale o teorema seguinte:

Teorema 5.1 *Um número real r é algébrico se e apenas se $|\mathbb{Q}(r):\mathbb{Q}|$ for finita. Se r é um número algébrico, $|\mathbb{Q}(r):\mathbb{Q}|$ é o grau de qualquer polinómio não nulo $f(t)$ de coeficientes racionais e grau mínimo tal que $f(r)=0$.*

Em 1882, Lindemann demonstrou o

Teorema 5.2 (de Lindemann) *O número π é transcendente.*

Uma demonstração deste teorema - que utiliza Análise Matemática - pode encontrar-se em [HC] e [SI]. E mais uma vez ficamos perante uma resposta negativa:

Teorema 5.3 *É impossível quadrar o círculo.*

Demonstração. Dada uma circunferência de raio 1, a construção requerida é a de um quadrado com lado de

comprimento $\sqrt{\pi}$ unidades. Se $\sqrt{\pi}$ fosse construtível, pelo teorema 2.1 e corolário 2.1, $|\mathbb{Q}(r):\mathbb{Q}| = 2^m$, para algum número natural m . Como $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\pi) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$, então $|\mathbb{Q}(\pi):\mathbb{Q}|$ divide 2^m pelo Teorema da Torre (2.2), sendo portanto finita; tal não pode acontecer, pelo teorema 5.1 e o teorema de Lindemann (5.2), portanto $\sqrt{\pi}$ não é construtível e o círculo não é quadrável.

6. Polígonos Regulares

6.1 Preliminares

Um triângulo equilátero admite uma construção (com régua e compasso) fácil e bem conhecida. Um pentágono regular é também construtível: *vide*, por exemplo, [AA]. Gauss, ainda jovem em 1796, descobriu uma construção de um polígono regular de 17 lados, e uma condição suficiente para que um polígono regular de n lados seja construtível. Gauss afirmou que o critério era também necessário, embora o artigo de Wantzel [WP] seja o primeiro a publicar uma demonstração deste facto. Para os efeitos da construção de polígonos regulares, convém encarar as construções como sendo feitas no plano complexo, \mathbb{C} (com o eixo real em vez do eixo dos xx e o eixo imaginário em vez do eixo dos yy).

Concretamente, seja n um número natural, maior que 3 para evitar trivialidades. O polinómio $t^n - 1$ tem n raízes distintas da forma $e^{k2\pi i/n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) ou, tomando $\zeta = e^{2\pi i/n}$, da forma ζ^k ($k = 0, 1, \dots, n-1$); mais: estas n raízes são os vértices no plano complexo de um polígono regular inscrito na circunferência de centro 0 e raio 1, com vértice em 1. Temos

$$t^n - 1 = (t - 1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1).$$

Os pontos 0 e 1 ($= \zeta^n$) são dados e interessa construir os pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0.$$

Por exemplo, no caso do pentágono regular ($n = 5$) há que construir os pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Como um tal z é não-nulo, podemos dividir ambos os membros por z^2 e fazer a substituição $y = z + 1/z$ para obter $y^2 + y - 1 = 0$ ou seja

$$y = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2 \text{ com } z^2 - yz + 1 = 0.$$

Segue-se

$$z = \frac{(-1 \pm \sqrt{5})}{4} \pm \frac{j\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4},$$

onde os sinais \pm se correspondem, sendo o sinal \pm^* independente, pelo que temos 4 soluções para z (como deveria acontecer). Basta agora construir o ponto $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ no eixo real, bem como a circunferência de raio 1, de seguida construir o vértice

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{j\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

e completar o pentágono.

Citamos o critério de Gauss e Wantzel:

Teorema 6.1 (Gauss-Wantzel). *O polígono regular de n lados é construtível se e só se*

$$n = 2^\alpha p_1 \dots p_s,$$

para certos números inteiros $\alpha \geq 0$ e p_i ($i = 1, \dots, s$), sendo os p_i primos ímpares distintos da forma

$$p_i = 2^{(2^{r_i})} + 1 \text{ com cada } r_i \text{ inteiro positivo.}$$

Para a demonstração deste resultado consulte-se [HC] ou [BO].

Os números $F_r := 2^{(2^r)} + 1$, são designados por **números de Fermat**, um **primo de Fermat** é um número F_r que seja primo. Os cinco primeiros números de Fermat, $3 = F_0$, $5 = F_1$, $17 = F_2$, $257 = F_3$, $65537 = F_4$ são primos. Fermat

conjecturou que F_r é sempre primo, mas Euler mostrou que $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$. Até hoje, não é conhecido qualquer primo de Fermat além dos que descrevemos.

Dado o resultado de Gauss-Wantzel, é de evidente interesse encontrar construções dos polígonos regulares com F_r lados quando $r \leq 4$. Existem vários livros que incluem uma construção do heptadecágono regular (17 lados); *vide*, por exemplo, [BB], [HW], [RS] e [SI]. Outros livros descrevem um algoritmo para o heptadecágono regular sem incluir uma construção concreta; *vide*, por exemplo, [HC] e [GL]. Para informação sobre o polígono regular de 257 lados, *vide* os artigos [BW], [GH] e [TD]; em [TD] constam observações sobre a construção do polígono regular de 65537 lados.

6.2 O Heptadecágono regular

Limitamo-nos a um esboço. Temos $n = 17$ e basta construir os pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1 = 0.$$

Seja $\zeta = e^{2\pi i/17}$. Tem-se

$$\zeta^{16} + \dots + \zeta + 1 = 0.$$

Sejam

$$y_1 = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \frac{1}{\zeta^8} + \frac{1}{\zeta^4} + \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta},$$

e

$$y_2 = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6 + \zeta^7 + \frac{1}{\zeta^7} + \frac{1}{\zeta^6} + \frac{1}{\zeta^5} + \frac{1}{\zeta^3}.$$

Como $\zeta^{17} = 1$, temos $1/\zeta^m = \zeta^{17-m}$, logo

$$y_1 + y_2 = \zeta^{16} + \dots + \zeta = -1.$$

Feitas áduas contas, podemos também concluir

$$y_1 y_2 = -4.$$

Os números y_1 e y_2 são assim as raízes de $t^2 + t - 4$, ou seja

$$\{y_1, y_2\} = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \right\}.$$

Portanto, y_1 e y_2 são ambos construtíveis. Subsiste no entanto o problema aqui de identificar cada um dos y_1 e y_2 por si mesmos. Ora, se repararmos que $1/\zeta^m$ é o conjugado complexo de ζ^m , podemos concluir

$$y_1 = 2(\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(8\theta)),$$

e

$$y_2 = 2(\cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(6\theta) + \cos(7\theta)),$$

sendo $\theta = 2\pi/17$. Mais alguns cálculos mostram que $y_1 > y_2$, logo

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

e

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2},$$

onde relembremos que \sqrt{r} designa a raiz quadrada *positiva* do número real positivo r . Isto é, y_1 e y_2 são de facto construtíveis um de cada vez.

Em seguida, definem-se

$$y_{1,1} = \zeta + \zeta^4 + \frac{1}{\zeta^4} + \frac{1}{\zeta}$$

$$y_{1,2} = \zeta^2 + \zeta^8 + \frac{1}{\zeta^8} + \frac{1}{\zeta^2}$$

$$y_{2,1} = \zeta^3 + \zeta^5 + \frac{1}{\zeta^5} + \frac{1}{\zeta^3}$$

$$y_{2,2} = \zeta^6 + \zeta^7 + \frac{1}{\zeta^7} + \frac{1}{\zeta^6}.$$

Obtemos facilmente $y_{1,1} + y_{1,2} = y_1$ e, com mais trabalho, $y_{1,1}y_{1,2} = -1$. Segue-se que $y_{1,1}$ e $y_{1,2}$ são as raízes do polinómio $t^2 - y_1t - 1$ com coeficientes em $\mathbb{Q}(y_1)$. Mais uma vez, cálculos com cosenos mostram que $y_{1,1} > y_{1,2}$. Tam-

bém $y_{2,1}$ e $y_{2,2}$ são as raízes de $t^2 - y_2t - 1$ e $y_{2,1} > y_{2,2}$. E conseguimos

$$y_{1,1} = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4}}{2}$$

$$y_{2,1} = \frac{y_2 + \sqrt{y_2^2 + 4}}{2}.$$

Logo, $y_{1,1}$ e $y_{2,1}$ são construtíveis a partir de y_1 e y_2 , e daí, construtíveis a partir de \mathbb{Q} .

Defina-se

$$y_{1,1,1} = \zeta + \frac{1}{\zeta}$$

$$y_{1,1,2} = \zeta^4 + \frac{1}{\zeta^4}.$$

Analogamente $y_{1,1,1}$ e $y_{1,1,2}$ são raízes de $t^2 - y_{1,1,1}t + y_{2,1}$ e $y_{1,1,1} > y_{1,1,2}$, pelo que

$$y_{1,1,1} = \frac{y_{1,1} + \sqrt{y_{1,1}^2 - 4y_{2,1}}}{2}.$$

Mais uma vez, $y_{1,1,1}$ é construtível a partir de $y_{1,1}$ e $y_{2,1}$, logo é construtível a partir de \mathbb{Q} .

Finalmente, $\zeta + 1/\zeta = y_{1,1,1}$ enquanto $(\zeta)(1/\zeta) = 1$. Logo, ζ e $1/\zeta$ são as raízes de $t^2 - y_{1,1,1}t + 1$, ou seja

$$\{\zeta, 1/\zeta\} = \left\{ \frac{y_{1,1,1} + \sqrt{y_{1,1,1}^2 - 4}}{2}, \frac{y_{1,1,1} - \sqrt{y_{1,1,1}^2 - 4}}{2} \right\}.$$

Sabemos que ζ é não-real e está no primeiro quadrante do plano complexo, pelo que

$$\zeta = \frac{y_{1,1,1} + i\sqrt{4 - y_{1,1,1}^2}}{2},$$

e ζ , por sua vez, é construtível a partir de $y_{1,1,1}$ e logo a partir de \mathbb{Q} . Já temos os pontos $0, 1$ e ζ no plano complexo, e podemos completar o polígono de 17 lados.

As definições dos números $y_{a,b,c}$ parecem resultar de actos de magia... De facto, são sugeridas (*vide* [GL]) pela estrutura de um certo grupo (o Grupo de Galois da exten-

são $\mathcal{Q}(\zeta)$ de \mathcal{Q}) que é um grupo cíclico de ordem 16: a última transferência de tecnologia da nossa história.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Prof. Doutor Vítor Neves uma revisão profunda deste artigo, e ao Prof. Doutor Jason Gallas as referências [GH] [TD].

Bibliografia

- [AA] Antunes, A.J.: *Pentágono inscrito numa circunferência*, Gazeta de Matemática nº 138, 47-49, 2000.
- [BB] Bold, Benjamin: *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover, New York, 1982.
- [BC] Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley, New York, 1968.
- [BO] Brison, Owen J.: *Teoria de Galois*, Dep. de Matemática da Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa, Lisboa, 3ª edição, 1999.
- [BW] Bishop, Wayne: *How to construct a regular polygon*, Amer. Math. Monthly, vol. 85, 186-188, 1978.
- [CG] Conway, John H. & Richard Guy: *O Livro dos Números*, Univ. de Aveiro, Gradiva, 1999.
- [E] Euclid: *The Thirteen Books of the Elements*, ~ 300a.C. Tradução com introdução e comentário de Sir Thomas Heath, CUP, 1908. Reimpressão Dover Inc., New York. Vols. I, II, III, 1956.
- [FR] Ferreira, Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás: *Geometria Origami*, Tese de Mestrado, Deptº de Matª Pura, Fac. de Ciências da Univ. do Porto, 2000.
- [GC] Gauss, C.F.: *Disquisitiones Arithmeticae*, Göttingen, 1801.
- [GH] Gottlieb, Christian: *The Simple and Straightforward Construction of the Regular 257-gon*, Math. Intelligencer, vol. 21, No. 1, 31-37, 1999.
- [GL] Gaal, Lisl: *Classical Galois Theory with Examples*, Markham Publishing Company, Chicago, 1971.
- [HC] Hadlock, Charles Robert: *Field Theory and its Classical Problems*, The Math. Assoc. of Amer., 1978.
- [HW] Hardy, G.H. & E.M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*, OUP, 5ª edição, 1979.
- [RS] Row, T. Sundara: *Geometric Exercises in Paper Folding*, Dover, New York, 1966.
- [SI] Stewart, Ian: *Galois Theory*, Chapman & Hall, London, 2ª edição, 1989.
- [TD] De Temple, D.: *Carlisle Circles and the Lemoine Simplicity of Polynomial Construction*, Amer. Math. Monthly, vol. 98, 97-108, 1991.
- [WP] Wantzel, P.L.: *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, J. Math. Pures Appl., vol. 2, 77-83, 1837.

Poema de geometria e de silêncio

Ângulos agudos e lisos

Entre duas linhas vive o branco

Sophia de Mello Breyner Andersen, *Coral*, Livraria Simões Lopes, Porto, 1950.

(publicação gentilmente autorizada pela autora)