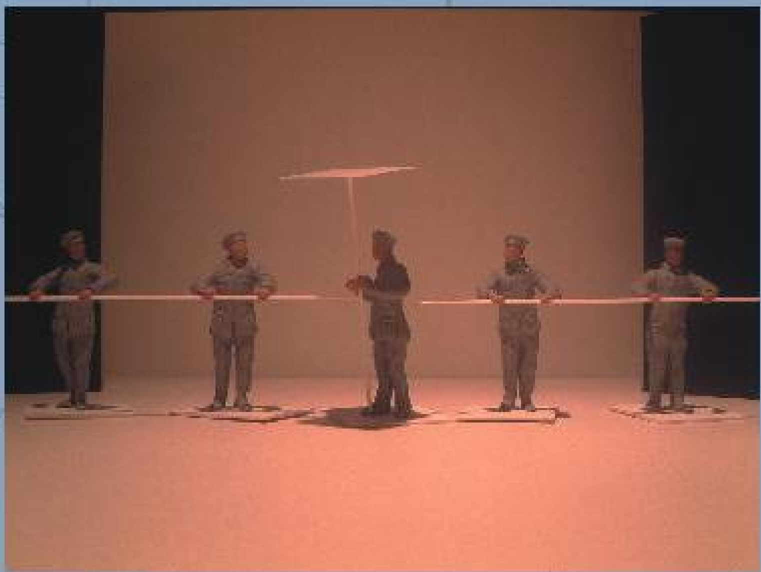
GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática **Ano LXIV** | Julho 2003 **nº 145**



4 Euros

O Teatro e a Ciência

Novos Programas de Matemática
por Jaime Carvalho e Silva
e
por António Pereira Rosa

História de π
por José Carlos de Sousa Oliveira Santos

GAZETA DE MATEMÁTICA
Julho 2003 - nº 145

O Teatro e a Ciência: um namoro recente

Carlota Simões
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Para quem pudesse achar que a Matemática, a Física, a Astronomia ou a Biologia pouca empatia teriam com as artes de palco, nomeadamente com o Teatro, a *Gazeta de Matemática* vem contar a história de diversos grupos de teatro que recentemente se têm dedicado à aproximação do Teatro às diversas áreas da Ciência.

Flatland: uma diversão matemática pelo grupo Camaleão, Coimbra

Durante o passado mês de Junho, em Coimbra, o grupo de teatro Camaleão pôs em cena a peça *Flatland* (Terra Plana), inspirada no romance homónimo de Edwin A. Abbott (1838-1926).

No romance *Flatland* (País Plano), escrito no final do século XIX, conta-se uma aventura vivida por um Quadrado, na última noite de 1999, que para Edwin A. Abbott é tanto a última noite do Século XX como o final do segundo milénio da nossa Era. A poucos minutos da meia-noite, o Quadrado, que é um habitante da Flatland e também a personagem principal, vive uma experiência iniciática: uma Esfera, vinda de um lugar a que ela própria chamou "O Espaço de Três Dimensões", apresenta-se ao Quadrado na forma de um Círculo de tamanho variável. Perante a incredulidade do Quadrado, a Esfera acaba por levar este para fora do seu mundo plano, mostrando-lho a partir de um lugar de tal modo mágico que o Quadrado pode ver até o interior dos seres e dos objectos do seu mundo. Ao regressar ao seu Mundo Plano, o Quadrado acaba por ser condenado a prisão perpétua, por descrever as suas experiências, que, segundo o Conselho dos Círculos, põem em perigo todo o funcionamento social do Mundo Plano.

A questão do início do terceiro milénio

Esta história, contada por E.A. Abbott em 1884, tem lugar na noite de 31 de Dezembro de 1999 para 1 de Janeiro de 2000. Diversas vezes é referido no texto que esta é a noite da passagem do segundo para o terceiro milénio. Esta questão foi deste modo tratada no texto de E.A. Abbott, e assim aparece no palco. Recordemos que, não tendo havido "ano zero" da nossa Era, ou seja, tendo o primeiro milénio começado no dia 1 de Janeiro do ano 1 [d. C.], então o terceiro milénio terá começado no dia 1 de Janeiro de 2001. Sem querer voltar à discussão na qual

todos nós participámos durante os anos 1999 e 2000, o grupo Camaleão deixou o texto tal como Abbott o escreveu, acreditando que talvez os teóricos da Flatland tenham feito bem as contas, e tenham eles, seres planos mas cautelosos, vivido na sua Flatland um ano Zero da sua Era.

Conceitos de Matemática Elementar

Ao longo do texto vão aparecendo conceitos de Matemática Elementar que, através de um método que a Esfera chama de 'Analogia', ajudam o Quadrado a conceber mentalmente, antes de o visitar, "O Espaço de Três Dimensões". Assim, a Esfera ajuda o Quadrado a concluir que o número N_1 de pontos terminais de uma figura parece estar em *Progressão Geométrica* em relação à dimensão D do espaço correspondente, segundo a regra $N_1=2^D$:

$2^0 = 1$: No mundo a zero dimensões, nada existe para além do Ponto, ou "Rei do Mundo Pontual". Segundo a Esfera, ele é "Um e Tudo não sendo realmente Nada". Ele é assim o ponto terminal de si próprio.

$2^1= 2$: No mundo a uma dimensão, existem Pontos e Segmentos de Recta. Os Segmentos de Recta, gerados pelo movimento de um Ponto, têm dois pontos terminais.

$2^2= 4$: No mundo Plano, existem os Quadrados, gerados pelo movimento de um Segmento de Recta, que têm quatro pontos terminais.

$2^3= 8$: A Esfera desafia o Quadrado a imaginar uma figura gerada pelo movimento do Quadrado numa direcção completamente estranha ao Mundo Plano, que, de acordo com a Analogia, terá oito pontos terminais.

Do mesmo modo, o número N_2 de Lados Terminais parece estar em Progressão Aritmética em relação a D, segundo a regra $N_2=2\times D$ (definindo *Lado* de uma figura geométrica como uma figura terminal de uma dimensão a menos que a figura inicial):

2X0=0: No mundo a zero dimensões, o "Rei do Mundo Pontual" não tem Lados, pois não existem figuras de dimensão inferior a zero.

2X1=2: No mundo a uma dimensão, os Segmentos de Recta têm dois pontos terminais, que são os seus Lados.

2X2=4: No mundo Plano, os Quadrados têm quatro Segmentos de Recta como Lados.

2X3=6: A tal figura descrita pela Esfera, gerada pelo movimento do Quadrado segundo uma direcção estranha ao Mundo Plano, terá, de acordo com a Analogia, seis Lados terminais, que neste caso serão Quadrados.

O Quadrado, mostrando-se como um verdadeiro bom aluno que supera o seu professor, escandaliza a Esfera questionando-a acerca do Espaço a Quatro Dimensões. Utilizando a mesma Analogia que a sua Mestre lhe ensinou, o Quadrado insiste que, neste novo Espaço, as criaturas geradas pelo movimento de um Cubo numa direcção nova e estranha às do Espaço a Três Dimensões terão $\mathbf{2^4=16}$ Pontos Terminais e $\mathbf{2\times4=8}$ Lados, que neste Espaço a Quatro Dimensões serão *Cubos* do Espaço a Três Dimensões.

A Hierarquia na Flatland

A sociedade da Flatland, concebida por E. A. Abbott em pleno auge vitoriano, apresenta-nos uma hierarquia rígida e claramente definida. As Mulheres são *Segmentos de Recta*: são seres de uma dimensão a menos que os restantes membros da sociedade. Quando o Quadrado sonha com o Mundo Linear, vê, por analogia com a estrutura social da Flatland, os homens como Segmentos de Recta e as mulheres como Pontos. Os Soldados e os Operários das Classes mais Baixas são Triângulos de dois lados iguais, e com um lado base tão pequeno, que estes seres tão estreitos podem ser confundidos com Mulheres: na Flatland são chamados *Triângulos Isósceles*. A Classe Média é constituída por *Triângulos Equiláteros*. Os Cavalheiros são *Quadrados* ou *Pentágonos*. A Nobreza é constituída por figuras de seis ou mais lados. São chamados *Polígonos*. A Ordem Circular ou Eclesiástica é a classe mais elevada de todas e é constituída por *Círculos*. Quando o número de lados de um Polígono é muito grande, o comprimento de cada um dos lados é tão pequeno que estas figuras deixam de se distinguir do Círculo, mudando de classe hierárquica.

Lei da Natureza na Flatland

Na Flatland, cada criança do sexo masculino que já seja um polígono regular tem um lado mais do que o seu pai, de tal modo que cada geração se eleva um grau mais na escala do progresso e da nobreza. Na nossa história, a personagem principal é o Quadrado, irmão de outro Quadrado; o filho do Quadrado será um Pentágono (que não entra em cena nesta peça), enquanto o seu neto é um Hexágono. As mulheres são sempre Segmentos de Recta, independentemente da classe social a que pertençam.

Esta Lei da Natureza coloca-nos uma questão que a teoria da Analogia apresentada pela Esfera não resolve: enquanto que no Espaço a Duas Dimensões existem Polígonos regulares com qualquer número de Lados, no Espaço a Três Dimensões existem apenas cinco Poliedros Regulares, nomeadamente o *Tetraedro*, o *Cubo*, o *Octaedro*, o *Dodecaedro* e o *Icosaedro*. Perante este facto, será muito difícil encontrar uma regra análoga à Lei da Natureza na Flatland, para o nosso espaço a Três Dimensões.

E se o nosso curioso e perspicaz amigo Quadrado nos perguntar o que acontece em dimensões superiores à Terceira, a Matemática dá-lhe uma resposta completa[1]: enquanto que em dimensão Quatro existem seis *Hiper-Sólidos* ou *Politopos* Regulares, em qualquer dimensão a partir da Quinta a situação regulariza-se, existindo apenas três, aos quais poderemos chamar respectivamente *Hiper-Cubo*, *Hiper-Octaedro* (que é o dual do hiper-cubo por inversão, tal como o octaedro é o dual do cubo) e *Hiper-Tetraedro* (ou *simplexo regular* da respectiva dimensão, que generaliza o tetraedro regular). Em dimensão Quatro, para além dos referidos hiper-cubo, hiper-octaedro e hiper-tetraedro, há ainda os Politopos Regulares: *célula 24*, e *célula 120* e o respectivo dual.[2]

A Matemática e o cidadão comum

[...] parece-me que é necessário nunca partir do princípio de que as pessoas são uma espécie de folha em branco sobre a qual se pode escrever qualquer coisa nova, ou que se pode simplesmente apagar aquilo que são as suas experiências e escrever sobre esse espaço vazio conhecimentos novos. O que é importante é precisamente pôr em relação as suas experiências com esses conhecimentos novos que se pretende que elas adquiram e que elas desenvolvam. Grande parte dos problemas que hoje são referidos como revelando um défice de competência em matemática têm muito a ver com a dificuldade em reconhecer as condições em que é possível construir essa relação, levando a sério as competências e experiências "comuns" das pessoas. Aquilo de que se trata não é propriamente de substituir experiências sem valor por outras experiências com valor, mas sim de reconhecer que, nas suas esferas próprias de utilização e de accionamento, essas outras competências e experiências que as pessoas adquiriram são úteis e válidas e podem ser elas próprias um caminho de acesso à compreensão da linguagem formal da matemática.

João Arriscado Nunes, em entrevista pelo grupo Camaleão

Para mais informações acerca deste espectáculo, contactar por e-mail camaleao-coimbra@mail.pt

Texto de *Camaleão-Associação Cultural* e Carlota Simões

Proof, pelo Teatro da Trindade

O Teatro da Trindade mantém actividades na área a que chama *Arte e Teatro* desde o ano 2000, que foi Ano Mundial da Matemática. Apresentou as peças *Falha de Cálculo* (2000), *Problema? Qual Problema?!* (2001) e *Hipotnozes* (2001) sobre Matemática, e ainda *O homem que via passar as estrelas* (2002) sobre Astronomia.

[1] O leitor interessado pode consultar
Coxeter - *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press, 1974,
S.A. Robertson - *Polytopes and Symmetry*, Cambridge University Press, 1984.

[2] A Gazeta de Matemática agradece esta informação à Professora Maria do Rosário Pinto da Universidade do Porto.

Mais recentemente, o Teatro da Trindade pôs em cena a peça *Proof*, de David Auburn. Até ao final do passado mês de Maio, foi ali contada uma história com quatro personagens: Robert, um génio matemático que sofre de perturbações mentais; Catherine, a filha mais nova de Robert e estudante de matemática, Claire, a irmã sofisticada de Catherine, e Hal, antigo estudante de Robert. Encontra-se um manuscrito com uma demonstração de um teorema de Teoria de Números importantíssimo para a comunidade matemática e resta descobrir quem foi o seu autor: Robert, o génio matemático, ou a sua filha Catherine?

Como afirma José Francisco Rodrigues no programa desta peça, *Proof não é uma peça de teatro sobre matemática, é sim um belíssimo drama sobre o mistério de uma demonstração matemática, sobre a criatividade intelectual e a paixão pela matemática, e, sobretudo, sobre uma história de amor*.

O Teatro da Trindade tem previstas novas peças com temática científica, nomeadamente:

O Último Tango de Fermat, (2004 ou 2005) um musical de Joshua Rosenblum e Joanne S. Lessner, inspirado na demonstração do Último Teorema de Fermat, apenas conseguida em 1994 por Andrew Wiles;

Picasso at Le Lapin Agile, (2004) do comediante Steve Martin, um diálogo entre Picasso e Einstein, duas personagens que simbolizam a arte e a ciência.

Para mais informações acerca das actividades *Arte e Ciência* do Teatro da Trindade, consulte o site http://teatrotrindade.inatel.pt ou contacte por e-mail fragateiro@ca.ua.pt

Copenhaga, no Teatro Aberto

É precisamente a um diálogo entre arte e ciência que se assiste em todas estas peças de teatro. E o fenómeno não se restringe aos palcos. O filme Uma Mente Brilhante*, que mostra o drama do matemático John Nash, teve um grande sucesso em todo o mundo. Estaremos a presenciar um fenómeno novo?*

Nuno Crato (Jornal Expresso, 29.03.2003)

A peça *Copenhaga*, de Michael Frayn esteve em cena no Teatro Aberto, até ao final do passado mês de Junho. Mais do que uma peça de temática científica, *Copenhaga* trata de uma lacuna na História. A visita que o físico alemão Werner Heisenberg (1901-1976) fez ao seu amigo e físico dinamarquês Niels Bohr (1885-1962) em Copenhaga durante o mês de Setembro de 1941 é um facto histórico. Já o não é o que se passou e o que foi dito durante esse encontro. Mas se acrescentarmos que a Dinamarca estava na altura ocupada pelo exército nazi, que Heisenberg tinha grandes responsabilidades na hierarquia científica da Alemanha, que os dois físicos trabalharam juntos nos anos 20 no desenvolvimento da física atómica, somos conduzidos naturalmente a diversas questões: quais os motivos desta visita, em plena guerra? Terá Heisenberg sondado Bohr a propósito da construção da bomba atómica? Que responsabilidade tiveram estes dois físicos na forma como a Segunda Grande Guerra terminou? A peça *Copenhaga* ficciona, a partir de factos reais, as razões que poderão ter estado na origem deste encontro histórico.

Para mais informações acerca da peça Copenhaga, consulte o site http://www.teatroaberto.com/

Revolução dos Corpos Celestes, pelo grupo Marionet, Coimbra

A peça Revolução dos Corpos Celestes esteve em cena em Dezembro de 2001 no Palácio de Sacadura Botte, sede do Museu Nacional da Ciência e da Técnica, em Coimbra.

Revolução dos Corpos Celestes induz-nos uma reflexão sobre a nossa posição no universo. Conta-nos como há alguns séculos atrás nos colocámos no centro do mundo, com todos os outros astros então conhecidos a rodarem à nossa volta.

Uma posição então defendida pela Igreja, interessada no lugar de destaque que essa visão cosmológica nos dava.

Nesta peça, podemos encontrar Ptolomeu, Copérnico e Galileu a atravessar com passos interrogativos os poucos metros da sala de trabalho, revelando-nos a profundidade das suas questões, que extravasam o âmbito científico. São questões filosóficas, religiosas, sociais, políticas e pessoais associadas às pesquisas cosmológicas que empreendem.

Neste espectáculo, Ptolomeu encontra uma justificação matemática para a posição da Terra no centro do universo, tal como indicava Aristóteles, e adormece satisfeito com a sua conquista. É um sono de 14 séculos com a Terra parada no centro do mundo.

A luta entre o espírito conservador e o livre agitam este sono do qual o cientista desperta de madrugada, atormentado, e já na pele de Copérnico. Este trava uma luta interior entre as suas crenças religiosas e as suas crenças científicas: estas últimas parecem exigir o Sol no centro do mundo e a Terra a girar em seu redor. Copérnico acaba por colocar o Sol no centro e adormece exausto da luta.

Desperta Galileu. Começa a amanhecer. E desperta o espírito científico e da experimentação. O telescópio apontado para os céus apresenta provas que começam a deitar por terra as ideias geocêntricas ainda fortemente presentes nesse século XVII e profundamente ligadas às Sagradas Escrituras. A luta do cientista deixa de ser interior para passar a ser exterior. E termina com o seu sacrifício. Galileu é condenado pelo Santo Ofício, acusado de heresia por defender a posição do Sol no centro do universo e a Terra a mover-se em seu redor.

Apoiada nas vidas destes três homens, esta peça traça a evolução da cosmologia e a evolução da visão do homem sobre o mundo e sobre si próprio.

Revolução dos Corpos Celestes mergulha na evolução do conhecimento sobre a nossa posição no universo. Ancorado nos avanços científicos de três dos homens responsáveis pelo que hoje conhecemos nesse campo, Ptolomeu, Copérnico e Galileu, este trabalho interroga-se sobre as questões pessoais, sociais, políticas, religiosas e científicas que inundaram as suas buscas da verdade. Questões profundamente humanas, logo maravilhosamente teatrais, que não raras vezes tocam a pergunta última e primeira: O que somos nós?

A busca continua hoje e sempre. O que somos nós? Qual o nosso papel? Onde foi o princípio? E como? Será que estamos sozinhos no universo?

Uma resposta temos. Na sala de teatro, não estamos sozinhos. Somos um todo, palco e plateia. Enrolados num ponto de interrogação comum.

E esta resposta traz-nos outras perguntas. Será esse o nosso papel? O de questionar e partilhar essas perguntas com os outros? O de propagar, o perguntar?

Será que rodamos em torno do Sol?

O Nariz, pelo grupo Marionet, Coimbra

Para além da peça *Revolução dos Corpos Celestes*, o grupo Marionet apresentou durante o passado mês de Março, em Coimbra, a peça *O Nariz*, inspirada no conto homónimo de Nicolai Gogol. Trata-se também de uma peça de teatro com temática científica, já que o assunto abordado é o funcionamento e a importância do sentido do olfacto e, em particular, da *anosmia* (ausência total ou parcial deste sentido). A personagem principal, desesperada pela enorme perda que sofreu, procura descobrir as causas para a sua anosmia e, simultaneamente, encontrar uma solução, sendo surpreendido por duas personagens invulgares interessadas em resolver-lhe o problema, cada uma com os seus métodos particulares: a *Ciência* e o *Teatro*.

Para mais informações acerca dos espectáculos *Revolução dos Corpos Celestes* e *O Nariz*, contactar por e-mail: marioneteatro@clix.pt

Texto de *Marionet* adaptado por Carlota Simões

Novos programas de Matemática no Ensino Secundário - 2003/2004

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Em Setembro de 2003 entra em vigor o novo programa de **Matemática A** para o Ensino Secundário e em Setembro de 2004 entram também em vigor os programas das seguintes disciplinas:

- Matemática B

- Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Embora não seja ainda totalmente claro, parece que as escolas poderão propor opções próprias no 12º ano; há duas disciplinas da área da Matemática ou com uma forte componente matemática, cujos programas foram propostos recentemente:

- Temas actuais da Matemática

- Tópicos de História das Ciências

A disciplina **Matemática A** é bastante semelhante à actual disciplina **Matemática** dos Cursos Gerais e Tecnológicos do Ensino Secundário, mas as disciplinas **Matemática B** e **MACS-Matemática Aplicada às Ciências Sociais** são substancialmente diferentes.

O Ajustamento do Programa de Matemática foi elaborado em 1995 na sequência de uma discussão em que pela primeira vez participaram intensamente professores de todos os níveis de ensino assim como professores de outras disciplinas, nomeadamente professores de Físico-Química do Ensino Secundário e professores de Engenharia do Ensino Superior.

O programa ajustado começou a ser aplicado em 1997/1998 no 10º ano (1998/1999 no 11º ano e 1999/2000 no 12º ano) e foi aplicado pela última vez em 2002/2003 no 10º ano. Nos três primeiros anos os programas foram apoiados por um grupo de professores de Matemática, designados por Acompanhantes, o que permitiu suscitar uma considerável reflexão entre os professores de Matemática (a avaliação elaborada pelo IIE-Instituto de Inovação Educacional, infelizmente ainda não editada, mostra que o processo de reflexão foi efectivo e produtivo). Todo este período permitiu também identificar algumas dificuldades na concretização do programa, pelo que, no âmbito da Revisão Curricular do Ensino Secundário, se procedeu a um Reajustamento do programa onde os autores tentaram colmatar essas deficiências. Decorreu novo período de discussão pública em 2000/2001 e os programas reajustados foram homologados superiormente em 2001 e 2002 (Matemática A: 10º ano - 22/2/2001, 11º ano - 1/4/2002, 12º ano -17/5/2002).

Em Portugal, tal como em todos os outros países, há uma saudável controvérsia sobre a orientação dos programas dos diferentes níveis de ensino, desde o ensino primário ao ensino superior. Por exemplo, em Espanha em 2000, houve um debate no "Congreso de los Diputados" onde os oradores se mostraram muito críticos da orientação actual do ensino da Matemática em Espanha, em todos os níveis de ensino. Por exemplo, Miguel de Guzmán afirmou, nesse debate:

"La matemática, como disciplina claramente acumulativa, necesita tiempo suficiente para la adquisición de las herramientas básicas. Sin un dominio satisfactorio de ellas es imposible llegar a apreciar su papel en nuestra cultura actual. Es muy deseable, para aprovechar el papel integrador de la matemática, ir más allá de las meras consideraciones técnicas y rutinarias, pero es claro que sin un mínimo de conocimientos básicos nunca podremos conseguirlo. Aparte de que los elementos meramente rutinarios, en sí mismos, llegan a convertirse con el tiempo en un bagaje inútil."

As duas dificuldades enunciadas são também aspectos relevantes em Portugal: a carga horária da disciplina de Matemática e a necessidade de não limitar o ensino da matemática às técnicas e rotinas. No que diz respeito ao Ensino Secundário, a partir de 2004/2005 a carga horária aumentará, ainda que ligeiramente: das 4 horas por semana até 2003/2004 (na realidade são apenas 4×50 m = 200 m ou seja, 3h 20m efectivas) passamos para 4h 30m (efectivas, porque se trata de 3 aulas de 90 minutos).

No que diz respeito à preocupação de equilíbrio entre conteúdos clássicos e metodologias de trabalho, a organização do programa foi reformulada de modo que se tornasse mais claro que os aspectos metodológicos como a "Comunicação Matemática", as "Aplicações e Modelação Matemática", a "História da Matemática", a "Lógica e Raciocínio Matemático", a "Resolução de Problemas e Actividades Investigativas", a "Tecnologia e Matemática" são elementos intrínsecos e incontornáveis do programa; nesse sentido o programa chama-lhes "Temas Transversais".

A necessidade de insistir nos aspectos metodológicos está a ser realçada de forma muito visível pelo programa de avaliação internacional PISA, promovido pela OCDE. Ao contrário do que mostra a prática do Ensino Básico entre nós, que dá uma importância quase exclusiva à Álgebra e ao Cálculo, relegando para um plano inferior a Geometria, as Aplicações e a Modelação Matemática, a Comunicação e o uso de Tecnologia, os objectivos do PISA incluem, no que diz respeito à Matemática:

1. Pensamento e raciocínio matemático
2. Argumentação matemática
3. Comunicação matemática
4. Modelação
5. Colocação e resolução de problemas
6. Representação
7. Uso da linguagem e de operações simbólicas, formais e técnicas
8. Uso de auxiliares e de instrumentos.

Para se ver como estes itens são exigentes atentemos na explicitação de dois deles:

"3. **Comunicação matemática**, que inclui:
- a expressão de um indivíduo numa variedade de modos, em assuntos com conteúdo matemático, sob forma oral e escrita; e
- a compreensão de afirmações escritas ou orais de outros indivíduos acerca desses assuntos.

4. **Modelação**, que inclui:
- a estruturação do campo ou da situação a serem modelados;
- a tradução da "realidade" em estruturas matemáticas;
- a interpretação de modelos matemáticos em termos da "realidade";
- o trabalho com um modelo matemático;
- a validação do modelo;
- a reflexão, a análise e a crítica de um modelo e dos seus resultados;
- a comunicação acerca do modelo e dos seus resultados (incluindo as limitações destes resultados); e
- a monitorização e o controlo do processo de modelação."

Talvez não seja despropositado assinalar que os alunos do Ensino Secundário obtiveram resultados encorajadores no primeiro PISA; com efeito, os alunos do 10º ano que foram avaliados em 2000, obtiveram uma pontuação largamente superior aos alunos do 9º ano (a diferença entre o 9º ano e o 10º ano é da mesma ordem de grandeza que a diferença entre os resultados médios dos alunos portugueses e os dos países melhor classificados - Japão, Coreia do Sul, Nova Zelândia, Finlândia, Austrália, Canadá, Suíça e Reino Unido).

Um outro aspecto que é fundamental assinalar é o de actualmente os exames nacionais do 12º ano estarem em sintonia clara com os programas (naquilo que um exame final de tempo bastante limitado pode avaliar, obviamente). Com efeito, em 1999/2000 apareceram pela primeira vez de forma sistemática questões que põem em jogo a comunicação matemática (aquilo que se convencionou chamar **composições matemáticas**), as demonstrações (sob a forma de **raciocínios demonstrativos**) e questões que envolvem **calculadora gráfica**. Como exemplo de questões do segundo tipo podemos apontar:

> "2000-1ª fase, 1ª chamada:
> 5. Considere uma função f de domínio $\mathbf{R}^+$. Admita que f é positiva e que o eixo Ox é assímptota do gráfico de f. Mostre que o gráfico da função $1/f$ não tem assímptota horizontal"

Como exemplo de questões combinando o primeiro e o terceiro tipo podemos apontar o seguinte extracto (os detalhes são omitidos):

> "2002-1ª fase, 1ª chamada:
> 3.2 (…)Utilize as capacidades gráficas da calculadora para investigar estas duas questões. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas até às décimas)."

Neste sentido, podemos afirmar que os actuais exames nacionais do 12º ano são mais exigentes do que os antigos exames da Via de Ensino do 12º ano (relativos aos programas anteriores a 1993).

Programa de Matemática A

Apesar de o programa de Matemática A ser bastante semelhante ao actual Programa Ajustado de Matemática, há algumas alterações que convém notar.

Em primeiro lugar aparece um módulo inicial, recomendado para três semanas, com dois objectivos principais:

- dar uma oportunidade de o professor detectar dificuldades nos estudantes, para que, quando possível, se possam delinear estratégias de superação dessas dificuldades (a legislação actual permite que sejam utilizadas horas suplementares para apoio aos estudantes, embora provavelmente fosse adequado dispor de bastante mais horas e de recursos específicos);
- fazer com que "os estudantes tomem consciência clara das responsabilidades que também lhes cabem no desenvolvimento das suas aprendizagens" e tornar claro aos estudantes que "superar dificuldades exige estudo e esforço e os jovens devem entender bem o seu papel neste processo".

Neste módulo inicial propõe-se uma estratégia de resolução de problemas nos temas Números, Geometria e Álgebra que ponha em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação. Para tal são sugeridos cinco problemas (que poderão ser substituídos por outros equivalentes ou ligados ao mundo real e planificados em conjunto com professores de outras disciplinas):

1- Unindo os pontos médios dos lados de um quadrilátero encontramos sempre um paralelogramo?
2- Porque é que há só 5 sólidos platónicos?
3- Estudo da possível semelhança entre garrafas de água de uma dada marca de 33cl, 50cl, 75cl e 1,5l.
4- Como resolveu o matemático Pedro Nunes equações do primeiro e do segundo graus? Podemos identificar, nos seus escritos, o uso da fórmula resolvente ou pelo menos

de alguns casos particulares? Que casos Pedro Nunes não considerou ou considerou impossíveis?

5- Que números racionais são representáveis por dízimas finitas? Qual a dimensão do período de uma dízima infinita periódica?

Em termos gerais, os autores tentaram melhorar a redacção das indicações metodológicas do programa, clarificando e simplificando o que se afigurou necessário. O programa ficou organizado de acordo com o quadro seguinte.

Matemática A - Quadro Resumo
Distribuição dos temas em cada ano

10º ano	11º ano	12º ano
Tema I Geometria no Plano e no Espaço I	Tema I Geometria no Plano e no Espaço II	Tema I Probabilidades e Combinatória
Tema II Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.	Tema II Funções Racionais. Taxa de variação.	Tema II Funções exponenciais e logarítmicas. Limites e Continuidade. Conceito de Derivada e Aplicações.
Tema III Estatística	Tema III Sucessões reais	Tema III Funções trigonométricas. Complexos.

Temas Transversais

• Comunicação Matemática
• História da Matemática
• Resolução de Problemas e Actividades Investigativas
• Aplicações e Modelação Matemática
• Lógica e Raciocínio Matemático
• Tecnologia e Matemática

Por se ter verificado que os alunos transitam do Ensino Básico com inúmeras deficiências na área da resolução de problemas, continua a ser proposto no início do tema de Geometria do 10º ano um bloco (que tipicamente incluirá 9 aulas de 90 minutos) dedicado à "Resolução de problemas de Geometria no plano e no espaço".

No 10º ano, as referências às cónicas (a elipse e a parábola) passaram a ser opcionais. Parece-me que, nas turmas que reajam melhor, estes dois temas podem continuar a ser cobertos, embora o seu estudo não possa ser pretexto para não discutir outras partes do programa, nomeadamente a Estatística. Com efeito, a Estatística nem sempre tem sido bem tratada, mas considero que o estudo deste tema é uma questão fundamental de cidadania no mundo de hoje. Afirmo enfaticamente que um aluno que termine o Ensino Secundário sem o aprofundamento mínimo fornecido pelo Tema de Estatística do 10º ano será um cidadão diminuído na sociedade actual e futura. Observe-se que o tema de Estatística é o único que é exactamente igual em Matemática B (e em MACS é substituído por um tratamento mais alargado do tema).

No 11º ano, no tema de Trigonometria, foi enfatizado o papel fundamental a desempenhar pelo círculo trigonométrico nos seguintes termos:

> "A compreensão do círculo trigonométrico é fundamental. A generalização das noções é intuída e sistematizada a partir de actividades que considerem movimentos circulares, pretendendo-se agora que, ao resolver problemas, os estudantes recordem os conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo e se enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e intuíveis. Pretende-se que os estudantes aprendam os conceitos de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas."

O tema de programação linear no 11º ano era opcional. Neste programa passa a obrigatório pensando-se que a sua discussão possa ajudar a clarificar questões de álgebra e geometria, entreabrindo ao mesmo tempo aos alunos a porta de um mundo importantíssimo hoje em dia, que é o da Investigação Operacional (ajudando também a desmistificar a ideia de que a Matemática é uma área morta e sem aplicações avançadas e actuais).

No 11º ano a referência à hipérbole, às suas principais propriedades e à sua importância histórica, tal como já acontecia com as outras cónicas no 10º ano, passa a ser opcional.

No 11º ano, o programa de Matemática A tenta enfatizar de forma mais clara do que no programa actual o papel do estudo da taxa de variação no tema de Funções. Sugere-se que este tema se inicie com o estudo de problemas envolvendo a taxa de variação, em articulação com as disciplinas de "Economia" e "Física e Química" que os alunos terão em simultâneo; sugere-se ainda a utilização de exemplos concretos dessas disciplinas, podendo mesmo partir-se de um trabalho conjunto dos professores de Matemática e dos outros professores, com explorações simultâneas nas aulas de ambas as disciplinas.

O tema de Sucessões do 11º ano é também palco de várias clarificações, nomeadamente sobre a profundidade do estudo da convergência das sucessões. A lista de temas a tratar passou a ser a seguinte:

> "A convergência das sucessões monótonas e limitadas. Exemplos de sucessões monótonas não convergentes. Exemplos de sucessões limitadas não convergentes. Critério de majoração e teorema das sucessões enquadradas."

Uma última alteração diz respeito à utilização regular de funções relativas a situações concretas. Por exemplo, no caso da função exponencial e logarítmica no 12º ano, pode-se ler:

> "A modelação com funções exponenciais e logarítmicas pode ser feita tanto usando capacidades específicas da calculadora gráfica (por exemplo, usando a regressão estatística a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados), como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor."

Este aspecto reflecte uma maior integração do tema de Estatística com os outros temas, nomeadamente o tema de funções. O tema de Probabilidades do 12º foi também reescrito de modo a que se tornasse mais claro e operacional.

O programa sugere ainda alguns temas opcionais que, mesmo que não se possam tratar com toda a turma por falta de tempo, deverão ser sugeridos como trabalho pessoal aos alunos mais interessados. Estranhamente, alguns manuais escolares têm ignorado totalmente os temas opcionais! No programa de Matemática A, os temas opcionais são os seguintes:

Elipse, parábola (10º ano) e hipérbole (11º ano);
Estudo elementar de polinómios interpoladores (10º ano);
Estudo de casos simples de caos usando sucessões definidas por recorrência (11º ano);
Demonstração de alguns teoremas elementares do cálculo diferencial (12º ano);
Demonstração de propriedades de Geometria usando números complexos (12º ano).

A diversificação dos programas

Já em 1995 muitos professores tinham chamado a atenção do Ministério da Educação para a dificuldade em gerir os interesses e expectativas divergentes dos alunos dos Cursos Gerais, dos Cursos Tecnológicos e do Ensino Recorrente; na altura foi também levantado o problema da adequação do programa da disciplina de Métodos Quantitativos aos alunos dos cursos de Humanidades.

Em 2000 surgiu a possibilidade de apresentar programas diversos para diferentes tipos de alunos. Os alunos dos cursos Gerais de Ciências e Economia passaram a ter Matemática A, os alunos dos Cursos Gerais de Ciências Sociais e Humanas passaram a ter MACS, e os alunos de vários cursos tecnológicos passaram a ter Matemática B. Esta diversificação poderia ter sido feita de outra forma ou poderia até ter ido mais longe, mas penso que a grande questão neste momento é a de saber se o sistema educativo consegue responder ao desafio de leccionar Matemática com qualidade a tipos de alunos que finalmente se reconhece oficialmente que esperam coisas muito diferentes do sistema.

No debate espanhol, já citado, esta questão também assume um papel central:

> "La necesidad de cambios profundos en nuestra educación matemática en lo que respecta a los niveles obligatorios, con (...) la necesaria atención a la diversidad de intereses de los alumnos."

Estou convencido que o processo de formação levado a cabo em 2001/2002 pelos Professores Acompanhantes deu um passo em frente enorme para que a diversificação de programas possa ser um sucesso.

Programa de Matemática B

Este programa tem alguns temas semelhantes ao programa de Matemática A, mas a orientação difere bastante (excepto no terceiro tema do 10º ano, que é exactamente igual ao de Matemática A). Como se trata de alunos de Cursos Tecnológicos cujos interesses e expectativas estão numa entrada no mercado de trabalho no fim do Ensino Secundário para exercer uma profissão com alguma especialização, o programa tomou como orientação principal que todo o trabalho fosse...:

"...suportado em actividades propostas a cada estudante e a grupos de estudantes que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas adequadas a cada curso sobre as quais se coloquem questões significativas, resolução de problemas não rotineiros e conexões entre temas matemáticos, aplicações da matemática noutras disciplinas e com relevância para interesses profissionais."

Os temas foram escolhidos de modo a poderem fornecer uma base de trabalho para a generalidade dos Cursos Tecnológicos, com a distribuição que se pode observar no quadro seguinte:

Matemática B - Quadro Resumo
Distribuição dos temas em cada ano

10º ano	**11º ano**	**12º ano**
Tema I Geometria no Plano e no Espaço.	Tema I Movimentos Periódicos. Funções Trigonométricas.	Tema I Modelos de Probabilidade.
Tema II Funções e Gráficos. Generalidades. Funções polinomiais.	Tema II Movimentos não lineares. Taxa de Variação e Funções Racionais.	Tema II Modelos discretos. Sucessões.
Tema III Estatística		Tema III Modelos contínuos não lineares: a exponencial e a logarítmica; a logística.
		Tema IV Problemas de optimização: aplicações das taxas de variação; programação linear, como ferramenta de planeamento e gestão.

Temas Transversais

- Resolução de Problemas e Actividades Investigativas
- Comunicação Matemática
- História da Matemática
- Aplicações e Modelação Matemática
- Tecnologia e Matemática

O programa de Matemática B está ancorado no estudo de modelos matemáticos que possam ser úteis aos futuros técnicos, sem o aprofundamento teórico que é preocupação da Matemática A. Os alunos de Matemática B devem saber manipular com algum à vontade uma variedade de modelos matemáticos, mas não se pode esperar que lidem com os modelos matemáticos em todos os contextos relevantes possíveis; nas reuniões de coordenação entre os autores dos diversos programas ficou assente que outros temas de matemática que fossem de interesse apenas para um certo Curso Tecnológico seriam integrados numa disciplina que mobilizasse esses conhecimentos e seriam leccionados nesse contexto específico.

A ênfase maior na modelação matemática implica que a disciplina de Matemática B recorra muito mais à tecnologia que a Matemática A. Naquela disciplina também existe um módulo inicial, que contudo incide apenas na Geometria. Observe-se que o programa de Matemática B é mais curto por se tratar de uma disciplina de apenas 3h por semana (efectivas); sendo uma disciplina trienal, será também objecto de exame nacional.

Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS)

O programa de MACS é um enorme desafio: como convencer alunos que chegam ao 10º ano de escolaridade a detestar Matemática e descrentes nas suas próprias possibilidades de algum dia entenderem alguma Matemática significativa, que a Matemática é uma ferramenta indispensável para eles, tanto como cidadãos como enquanto futuros profissionais? Para tentar responder a este desafio, o programa de MACS assumiu como orientação:

> "Mais do que pretender que os estudantes dominem questões técnicas e de pormenor, pretende-se que os estudantes tenham experiências matemáticas significativas que lhes permitam saber apreciar devidamente a importância das abordagens matemáticas nas suas futuras actividades."

A disciplina MACS é uma disciplina bienal cuja carga horária é de 4h 30m (também é uma disciplina trienal para um dos Cursos Tecnológicos, ficando aí com uma carga horária equivalente de 3h por ano).

A escolha dos temas revestiu-se de particular delicadeza. Acabaram por ser escolhidos temas predominantemente contemporâneos, cujo campo de utilização natural estivesse relacionado com os potenciais centros de interesse dos jovens destas áreas. A distribuição dos temas por ano é apresentada no quadro seguinte:

MACS - Quadro Resumo
Distribuição dos temas em cada ano

10º ano	11º ano
Tema I	Tema I
Teoria da Decisão	Modelos matemáticos
Teoria matemática das eleições	Modelos populacionais
Teoria da partilha equilibrada	Modelos financeiros
	Modelos de grafos
Tema II	Tema II
Estatística	Introdução à Probabilidade
	Tema III
	Introdução à Inferência Estatística

Parece-me que esta disciplina poderia ser oferecida com proveito (e sucesso) para os restantes alunos de Humanidades e Artes Visuais.

Programa de Temas Actuais da Matemática

A ideia base desta disciplina é a de fornecer uma formação cultural a qualquer estudante do ensino secundário, que o habilite a encarar a Matemática como uma área científica viva, em plena efervescência, sempre a tentar contribuir para resolver alguns dos problemas, enigmas e preocupações do nosso tempo. É por isso que foram escolhidos apenas temas de Matemática com relevância no tempo presente, embora a raiz história de alguns dos temas seja por vezes bastante antiga. Como esta disciplina é optativa, o professor ficará muito mais livre para abordar um número de temas à sua escolha. O programa sugere que sejam abordados dois temas dentre os constantes da lista seguinte:

"Teoria matemática das Eleições
Números inteiros e Códigos
Teoria matemática dos Nós
Fractais e Caos
Teoria de Grafos
O Hotel Infinito
Geometrias não euclidianas"

Qualquer destes temas dará pano para mangas a professores e alunos, tendo um potencial enorme para interessar tanto os alunos com formação matemática reduzida como os alunos mais curiosos que querem alargar os seus conhecimentos matemáticos.

Programa de Tópicos de História das Ciências

Esta disciplina pretende, entre outros objectivos, "perspectivar a natureza da ciência numa dimensão histórica de modo a contribuir para uma visão dinâmica e multifacetada do conhecimento científico". A proposta de programa é da responsabilidade da equipa constituída por Ana Simões, Henrique Leitão, Luís Saraiva e Palmira Fontes da Costa. Este programa tem uma componente matemática explícita, que é consubstanciada no Módulo II intitulado "A matematização do real" que inclui:

"2.1 Sistemas de números
2.2 A matemática dos gregos
2.3 Refinamentos operatórios
2.4 Perspectiva e geometria projectiva
2.5 As geometrias"

No campo da Matemática o programa pretende desenvolver as seguintes competências:

"Mobilizar, rever e adquirir conhecimentos e conceitos da área da matemática tais como noção de demonstração, noções elementares de geometria no plano, em especial as propriedades das rectas paralelas e dos triângulos."

O programa contém ainda bastantes sugestões metodológicas que incluem, por exemplo,

"Análise, interpretação e crítica de fontes primárias, isto é, de textos da autoria de filósofos da natureza que viveram em diferentes períodos históricos, e que são objecto de estudo da disciplina."

Estou convicto que estas cinco disciplinas poderão contribuir grandemente para melhorar a literacia matemática dos portugueses e a competência matemática dos futuros profissionais. Estou convicto que temos condições de as implementar com qualidade. Estou convicto que daqui a uns anos poderemos ser ainda mais exigentes.

Referências

Miguel de Guzmán, *El sentido de la educación matemática y la orientación actual de nuestro sistema educativo*, 21 de Enero de 2000 - Congreso de los Diputados, Jornada dedicada a la Celebración del Año Mundial de las Matemáticas, http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman210100.htm

Miguel de Guzmán, *La educación matemática en riesgo*, 2000, http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/edmatriesgo.html

Miguel de Guzmán, *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*, Ibercima, Madrid, 1993, http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/tendencia/ensen.htm

Matemática 10º ano (Programa Ajustado) e Matemática A 10º ano: que diferenças?

António Pereira Rosa
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho, Lisboa

1. Introdução

No âmbito da reforma do Ensino Secundário, que vai entrar em vigor no ano lectivo de 2004/2005, a disciplina de Matemática actualmente existente será substituída para a grande maioria dos alunos pela chamada Matemática A, cujo programa, por estranho que pareça aos menos habituados às peculiaridades do nosso ensino, começará a ser seguido já no ano lectivo de 2003/2004 no 10º ano de escolaridade. Quando tivemos acesso ao programa de Matemática A ([PA]), constatámos que, a nível de conteúdos, ele é praticamente igual ao programa actualmente em vigor ([P]), semelhança essa que é sublinhada nos pareceres emitidos pelas Associações de Professores e Sociedades científicas (vejam-se [Pa1] ou [Pa2]). No entanto, como muito bem se diz em ([PA]), um programa não se reduz a uma lista de conteúdos, pelo que deve ser feita uma análise mais aprofundada, trabalho esse que procuraremos fazer neste artigo, essencialmente ao nível do 10º ano de escolaridade.

2. O "novo" programa

Tal como o seu antecessor, o programa do 10º ano de Matemática A está dividido em três temas, *Geometria no Plano e no Espaço I, Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função Módulo* e *Estatística* que, ao nível de conteúdos e apresentação correspondem quase exactamente aos temas homónimos de [P]; a semelhança é tão acentuada que o novo texto dá muitas vezes a ideia de resultar do antigo pelo processo de "cut and paste". As poucas diferenças são mais aparentes que reais: assim, por exemplo, o aparente menor desenvolvimento do tema de *Geometria* no quadro-resumo de [PA] em comparação com o quadro correspondente de [P] será porventura um erro de impressão, uma vez que, por leitura do "Desenvolvimento", se constata que os conteúdos são os mesmos. Onde parece já haver alguma diferença é nas "Indicações Metodológicas" que são bastante mais sucintas em [PA] (veja-se por exemplo o que sucede no tema *Estatística*); não se trata no entanto de uma mudança de orientação mas sim de um resumo, pelo que pensamos que o resultado final será essencialmente o mesmo. Assim, por exemplo, no já referido tema de *Estatística*, os professores ao serem confrontados com o novo programa, tenderão provavelmente (e naturalmente, dada a semelhança de conteúdos...) a seguir as detalhadas orientações que sobre este tema são dadas em [P]; a importância que é dada às Brochuras do Departamento do Ensino Secundário (referidas como "de consulta indispensável") acentuará ainda mais este processo. As diferenças fundamentais entre os dois programas são, a nosso ver, três:

- a avaliação
- a proliferação de temas transversais
- o *Módulo Inicial*

A avaliação

O espaço consagrado à avaliação em [PA] é consideravelmente maior que o seu equivalente em [P]; trata-se, no entanto, essencialmente de um desenvolvimento das ideias do programa mais antigo, à excepção da introdução de um novo instrumento de avaliação, aliás já considerado com detalhe em [Po]: o teste em duas fases. Temos muitas reservas quanto à utilização deste tipo de testes pelo trabalho acrescido que irão dar aos professores (numa situação de experimentação de um projecto ou programa, quando se tem apenas uma ou duas turmas, não será muito difícil fazê-los, só que essa não é a realidade que a maioria dos professores enfrenta no dia-a-dia...), já que consomem muito tempo e, sobretudo, se usados com pouco critério, podem degenerar em mais um modo de propagação do facilitismo, ainda mais se se optar pelo modelo holandês descrito na referência citada.

A proliferação de temas transversais

Em [PA] são "promovidos" à categoria de temas transversais uma série de assuntos que no programa antigo eram referidos como "estratégias... que atravessam o programa de forma transversal", como a Modelação Matemática (agora separada, e bem, do antigo tema geral "Lógica e Raciocínio Matemático"), a Tecnologia e Matemática e a História da Matemática. Embora consideremos indiscutível o seu carácter transversal, parece-nos que se lhes está a dar uma "promoção" excessiva. Por outro lado, achamos que se deveria retirar um pouco desta característica ao tema "Lógica e Raciocínio Matemático", pelo menos ao seu primeiro item, "Noções de Lógica": na verdade, passou-se de um excesso de Lógica nos programas do antigo Curso Complementar Diurno para uma situação em que esta é dada de forma tão dispersa que muitos alunos têm grandes dificuldades na correcta aplicação das mais simples noções. Assim, consideramos que seria razoável a introdução de um módulo inicial de Lógica no programa do 10º ano nos moldes, por exemplo, de [MA].

O *Módulo Inicial*

Trata-se, em nossa opinião, da grande novidade deste programa, uma ideia interessante, embora não totalmente original: já há alguns anos, o Ministério da Educação pediu a diversas escolas que se pronunciassem sobre a possível introdução de uma "unidade zero" no programa de Matemática do Ensino Secundário Recorrente, com finalidades algo semelhantes às do *Módulo Inicial*, mas acabou por não dar seguimento à ideia. Receamos, no entanto, que não seja a forma mais adequada de levar a bom cabo o objectivo de proporcionar uma transição adequada do terceiro ciclo para o Ensino Secundário e, sobretudo, de auxiliar a detecção daqueles alunos que vão precisar de apoio na disciplina de Matemática. Na verdade, dever-se-ia, em nosso entender, realizar obrigatoriamente um teste de diagnóstico logo no início do 10º ano, em vez de esperar detectar as lacunas dos alunos através da consideração de uma série de problemas que, embora interessantes, não são triviais e até poderão ser considerados excessivamente difíceis por muitos alunos e, portanto, desmotivantes. Diz-se no programa que os problemas poderão ser substituídos por outros, mas, mesmo assim, temos dúvidas sobre a eficácia desta estratégia.

Quanto aos problemas propostos, alguns deles (os de carácter geométrico) eram já correntemente utilizados no início da leccionação do tema I, pelo que não deverão trazer grandes alterações na planificação das aulas; dos outros, gostámos especialmente do penúltimo (Que números racionais são representáveis por dízimas finitas? R: uma fracção irredutível a/b é representada por uma dízima finita se e só se b não tem outros factores primos para além de 2 e 5), mas o último (Qual a dimensão do período de uma dízima finita periódica?) deixou-nos algo perplexos: não pensamos que aquilo que se pretende seja algo tão trivial como determinar o comprimento do período da fracção a/b através da simples divisão inteira de a por b, mas, por outro lado, duvidamos que exista alguma maneira simples de obter o comprimento do período na forma de um critério semelhante à resposta ao problema anterior. Cremos que o máximo que se pode exigir a este nível é que os alunos compreendam que o período de a/b tem, no máximo, b-1 algarismos. A título de exercício, sugerimos ao leitor que procure explicar porque é que o período de 1/17 tem 16 algarismos e o de 1/13 apenas 6, a partir, digamos, de propriedades aritméticas convenientes dos números 17 e 13 e que procure prever o comprimento do período de 1/91... Por outro lado, parece-nos haver alguma incoerência entre a abordagem imediata de problemas inseridos nos temas *Números* e *Álgebra* e a opção de deixar para outras alturas os que se inserem nos temas *Funções* ou *Estatística*; na verdade, apenas os problemas de geometria terão aplicação mais ou menos imediata, os outros provavelmente só voltarão a ser aflorados dentro de alguns meses. Será, porventura, mais um factor que dificultará o cumprimento dos objectivos deste módulo. Quanto aos trabalhos interdisciplinares, eles parecem-nos ainda mais difíceis de concretizar que actualmente, numa altura em que os professores de Física (só para citar um exemplo) se verão confrontados com a necessidade de acrescentar às suas aulas parte da componente experimental dada nas disciplinas de Técnicas Laboratoriais, que vão ser extintas. Para terminar, não queremos deixar de referir a louvável iniciativa do Departamento do Ensino Secundário em disponibilizar elementos de trabalho utilizáveis neste módulo no site www.mat-no-sec.org: [CM], sobre o "problema das garrafas" e, sobretudo, [GF], resultado de uma Oficina de Formação sobre a temática do *Módulo Inicial*; pensamos que este último corresponde muito aproximadamente às ideias dos autores do programa, pelo que aconselhamos vivamente a sua consulta.

Deixámos propositadamente para o fim uma referência a um dos pontos que mais polémica tem causado, as aulas de 90 minutos. Trata-se de uma medida devidamente salientada em [PA] e que tem apoiantes entusiásticos (veja-se, por exemplo, [PJ]), mas que em nossa opinião, não irá contribuir para a melhoria do ensino da Matemática no Secundário. Dados todos os factores em jogo, o mais provável é que esta medida pouco ou nada altere; de resto, não é verdade que o Ministério da Educação vai impôr no próximo ano lectivo a leccionação em aulas de cinquenta minutos de programas especificamente concebidos para aulas de hora e meia?

3. Conclusões

Dadas as escassas diferenças entre o programa de Matemática A (10º ano) e o programa em vigor, as diversas e pertinentes críticas que, ao longo de vários anos, têm sido feitas ao actual programa, são aplicáveis quase na íntegra ao "novo" programa, que, na nossa perspectiva, continua a ser insatisfatório. Se, como tudo leva a crer, os programas de Matemática A para o 11º e 12º ano forem elaborados da mesma forma, continuar-se-á a não proporcionar uma preparação matemática adequada aos alunos que pretendam seguir cursos superiores com forte componente desta disciplina (Matemática, Física, Química, Engenharia em geral, alguns ramos de Economia, etc). No entanto, não queremos deixar de dizer que a situação nos parece melhor que a vivida quando da entrada em vigor do programa ajustado, já que actualmente os professores têm à sua disposição em tempo útil toda uma série de elementos de trabalho, como as brochuras editadas pelo Departamento do Ensino Secundário e os elementos *on-line* anteriormente referidos.

Referências

[CM] Costa, M. J. (2001) - Qual a razão de semelhança entre as garrafas de água de 33 cl, 50 cl, 75 cl e 1,5 l ? *Informat nº* 8, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário (também disponível em www.mat-no-sec.org).

[GF] Graziela, F. et. al. (s/d) - *Módulo inicial do programa de Matemática do* 10º *ano do Ensino Secundário a* *implementar em* 2002/2003 (trabalho desenvolvido na Oficina *Matemática em Rede*, disponível em www.mat-no-sec.org/modulo%20inicial.pdf).

[MA] Machado, A. (2001) - *Introdução à Lógica Matemática*, Projecto Reanimat (disponível em ptmat.lmc.fc.ul.pt/~armac/Reanimat/materiais10. htm).

[P] Equipa Técnica (1997) - *Matemática - Programas*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.

[PA] Carvalho e Silva, J. (Coord.) et al. (s/d) - *Matemática A* 10º *ano*, Lisboa, Ministério da Educação-Departamento do Ensino Secundário (disponível em www.mat-no-sec.org).

[Pa1] APM (s/d) - *Comentário Global ao Reajustamento dos Programas de Matemática do Ensino Secundário*, Associação de Professores de Matemática (disponível em www.apm.pt/apm/textos/ProgA+B2000.rtf).

[Pa2] GEEPU (2001) - *Parecer da Sociedade Portuguesa de Matemática sobre as propostas de programas de Matemática A e Matemática B para o* 11º *ano de Escolaridade dos Cursos Gerais e Tecnológicos*, GEEPU (disponível em www.spm.pt/~geepu/parecer2.html).

[PJ] Pinto, J. A. (2001) - Aulas de noventa minutos, *Informat nº* 7, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.

[Po] Ponte, J. P. (cord.), Boavida, A.M., Graça, M. e Abrantes, P. (1997) - *Didáctica: Matemática - ensino secundário*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.

Bartoon

Luís Afonso, *Público*, *30-08*-2002
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)

Ensino da Matemática: um sintoma, várias causas

Jorge Buescu
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Lisboa

É hoje em dia quase lugar-comum referir-se o enorme insucesso global do ensino da Matemática em Portugal a nível Básico e Secundário. Este insucesso global é, infelizmente para nós, bem real e está documentado quer a nível nacional quer internacional, por exemplo nos estudos TIMMS e PISA.

Este artigo pretende divulgar junto da comunidade matemática os resultados de um estudo conduzido no IST no ano de 2002/3 que revela sintomas significativos. Apresenta-se de seguida algumas causas que se consideram determinantes para os factos descritos, embora sem a pretensão de exaustão, impossível num fenómeno tão complexo como este.

1. Um sintoma: aferição no IST

O Instituto Superior Técnico organizou no início do ano lectivo de 2002/2003 uma prova de aferição de conhecimentos fundamentais de matemática para todos os alunos – cerca de 1300 – que entraram pela primeira vez no IST[1]. Esta Prova, embora não estritamente obrigatória, tinha consequências sobre a nota da disciplina de Análise Matemática I, pelo que a taxa de comparência foi superior a 95%.

Por razões logísticas, realizaram-se 3 provas distintas: uma no campus da Alameda[2], outra no campus do Taguspark[3], e uma terceira para alunos colocados em 2ª fase. As provas podem encontrar-se em http://wwwcp.ist.utl.pt/2001-2002/. As análises estatísticas [1], da responsabilidade do DM, foram realizadas independentemente para cada população, tendo sido apresentados pelo Conselho Pedagógico relatórios descritivos [2], que agrupam todos os alunos ingressados em 1ª fase, independentemente do campus em que se realizaram. Apresenta-se seguidamente um resumo dos resultados, que não dispensa, para uma análise mais detalhada, a consulta dos relatórios [1], [2].

Começamos por salientar os seguintes factos relativamente ao universo de estudantes em observação: o IST é uma escola de Ciência e Engenharia, com condições de admissão particularmente exigentes no panorama nacional: para qualquer Licenciatura exige-se uma classificação mínima de 100 pontos (10.0 valores) nas Provas de Ingresso (em particular na prova de Matemática (PIM)), e cumulativamente 120 pontos na Nota de Seriação de candidatura à respectiva Licenciatura (em certos casos, como para a LMAC[4] e a LCI[5], as exigências são mesmo mais elevadas: 120 pontos na PIM e 140 pontos na Nota de Seriação). Em termos da população estudantil pré-universitária, o uni-

[1] Excepto para os alunos que ingressaram na Licenciatura em Arquitectura.
[2] Dividida em dois enunciados diferentes.
[3] Idem.
[4] Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação.
[5] Licenciatura em Ciências Informáticas.
[6] Exemplos retirados dos enunciados do *campus* da Alameda, pelo que as percentagens correspondentes se referem em cada caso a um universo de cerca de meio milhar de alunos.

verso sob observação através da Prova de Aferição é pois uma população que pode ser caracterizada como de elite em termos de preparação matemática. Concretamente [3]:

- 80% destes estudantes encontram-se acima da mediana (percentil 50) daqueles que, a nível nacional, tiveram classificação superior ou igual a 10 na PIM;
- 60% destes estudantes encontram-se acima do percentil 75 daqueles que, a nível nacional, tiveram classificação superior ou igual a 10 na PIM;
- 23% destes estudantes encontram-se acima do percentil 90 daqueles que, a nível nacional, tiveram classificação superior ou igual a 10 na PIM.

A prova teve como principal objectivo avaliar pontos fortes e fracos em toda a formação dos alunos ao longo do 3º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário – ou seja, entre o 7º e o 12º ano, inclusive. O formato foi de escolha múltipla num teste com 20 perguntas sem descontos para respostas erradas. As perguntas encontravam-se divididas por grupos, relativos às matérias a que diziam respeito:

Grupo	Tópico Matemático	Ano em que é leccionado	Número de perguntas	Média de respostas certas
1	Regras operatórias com fracções e expoentes	3º ciclo (7º, 8º, 9º)	5	76%
2	Equações e inequações	10º	4	71%
3	Funções exponencial, logarítmica e trigonométricas	12º	3	55%
4	Funções: gráfico, domínio, contradomínio, extremos	11º, 12º	3	87%
5	Funções: derivadas	11º, 12º	3	78%
6	Funções: composição	até ao 11º	1	48%
7	Raciocínio lógico	transversal	1	23%

Tabela 1: Descrição dos tópicos aferidos, grau de ensino em que são leccionados e média de respostas certas obtidas.

Os dois primeiros grupos continham perguntas extraordinariamente elementares, nomeadamente operações sobre fracções, a regra dos expoentes, ou factos elementares de cálculo algébrico. Citando [2],

> "...a existência de respostas erradas é, só por si, algo de preocupante. Verificou-se que 34% dos alunos erraram pelo menos duas perguntas do grupo 1 e 65% erraram pelo menos duas perguntas no conjunto dos grupos 1 e 2."

Muito preocupante é também o facto de estes estudantes de elite atingirem o ensino universitário numa das melhores Escolas de Portugal revelando carências difíceis de imaginar e cometendo erros inaceitáveis em operações elementares de aritmética ou cálculo algébrico. Para citar apenas alguns exemplos[6]:

$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ (7% dos alunos);

$$\frac{x+2}{x+3}=\frac{2}{3}$$ (10% dos alunos);

$$\sqrt{a+b}-\sqrt{b}=\sqrt{a}$$ (8% dos alunos);

$$\frac{a^2+b^2}{a^4+b^4}=\frac{1}{a^2+b^2}$$ (16% dos alunos);

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b}}=\sqrt[5]{ab}$$ (14% dos alunos);

Sendo a real arbitrário, $\sqrt{a^2}=a$ (35% dos alunos).

Trata-se de erros difíceis de conceber em matérias tão elementares. Como se refere em [2],

> "É importante que a matéria leccionada no 3º Ciclo, e que corresponde a competências básicas que os alunos devem possuir, seja fortalecida no percurso do 10º ao 12º anos. É possível que o facto de o ensino ser obrigatório até ao 9º ano e os sistemas anti-insucesso que são utilizados nos primeiros ciclos de ensino sejam responsáveis pela falta de solidez da formação nos grupos 1 e 2 das perguntas da Prova de Aferição."

Além disso, segundo o mesmo relatório, a baixa taxa de sucesso no grupo de perguntas respeitantes a funções exponencial, logaritmo e trigonométricas também revela potenciais problemas para o desempenho no IST, o baixo resultado na composição de funções terá certamente um impacto negativo e o fraquíssimo resultado na pergunta sobre lógica matemática corresponde a uma séria lacuna que é necessário colmatar.

A análise estatística pormenorizada dos resultados permite, contudo, extrair conclusões mais profundas[7] (cf. [3]). Em primeiro lugar, a grandeza com a qual a classificação da Prova de Aferição revela maior correlação estatística (cerca de 57%) é a Nota de Seriação do aluno. Citando [1],

> "Existe uma relação relativamente forte entre os resultados da Prova de Aferição e a Nota de Seriação dos alunos, sendo que (em média) quanto maior for a Nota de Seriação melhores são os resultados na Prova de Aferição".

A curva de resultados indica um pico entre o 14 e o 15 (sendo a média aritmética das notas de 14.2). Essa distribuição não é simétrica; para notas abaixo do pico a distribuição tem uma cauda alongada, tomando valores no intervalo [4,14]. Veja-se a Figura 1, onde se apresenta o histograma respectivo acompanhado da curva de melhor ajustamento. As explicações estatísticas para este facto são de três tipos: (1) a existência de um limite superior à direita (20 valores); (2) a não-homogeneidade da população (alunos fortes não têm a mesma probabilidade de responder certo a uma pergunta ao acaso que alunos fracos); (3) a não-independência estatística das respostas (existe uma correlação positiva entre diferentes respostas de um mesmo aluno).

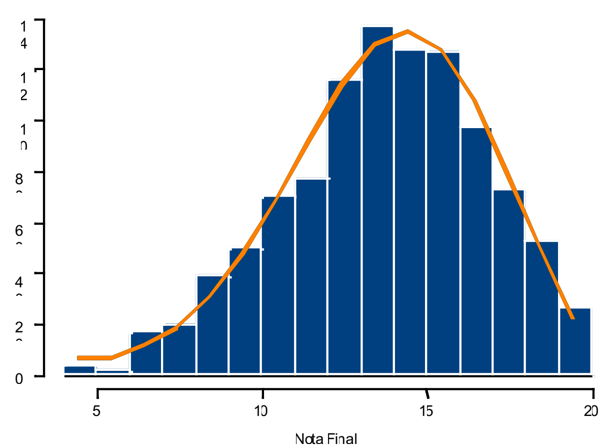


Figura 1: Histograma de notas finais e curva de melhor ajustamento (*Campus* da Alameda, 1ª fase).

De entre vários modelos estatísticos testados, o que revelou melhor ajustamento aos dados foi o de uma mistura de 4 distribuições, de tipo $20-X_i$, com X_i binomial negativa, $i=1,...,4$, cada uma delas caracterizada pelo intervalo de Nota de Seriação. Apresentam-se na Figura 2 os histogramas de Nota Final para cada uma das subpopulações conside-

[7] Os parágrafos seguintes referem-se ao Relatório I (cf. [1]), relativo ao *campus* da Alameda (1021 alunos).

[8] Relativos ao *campus* da Alameda.

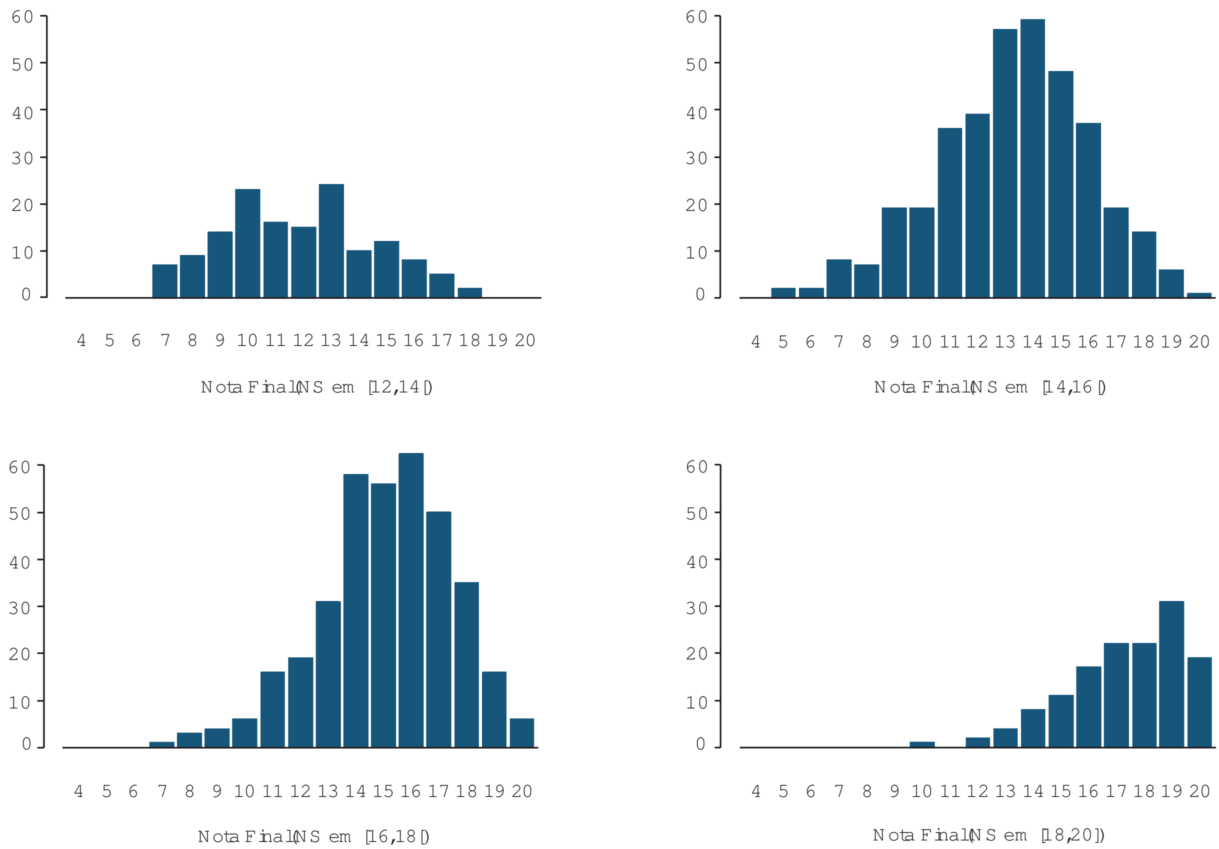


Figura 2: Histogramas de nota na Prova de Aferição para diferentes intervalos de Nota de Seriação (*Campus* da Alameda, 1ª Fase).

radas: Nota de Seriação respectivamente nos intervalos [12,14[, [14,16[, [16,18[, [18,20].

Destes gráficos torna-se evidente, em primeiro lugar, o deslocamento para a direita das notas na Prova de Aferição à medida que a nota de Seriação aumenta. As médias das notas da Prova de Aferição nas quatro categorias das Notas de Seriação consideradas são, respectivamente, 11.8, 13.3, 15.1 e 17.3 [1]. É ainda claro que alunos com nota de seriação muito elevada, no intervalo [18,20], obtêm esmagadoramente classificação também muito elevada (entre 16 e 20) na Prova de Aferição. Para alunos médios (com nota de seriação nos intervalos [16,18[e [14,16[), existe uma dispersão de notas na Prova de Aferição significativamente maior: elas variam já, com frequência não-trivial, entre 8 e 20 valores no primeiro caso e entre 7 e 19 no segundo. A grande concentração das notas é em ambos os casos na zona central do gráfico, e a distribuição revela maior grau de normalidade – o que indica que a subpopulação analisada é mais homogénea. Finalmente, para alunos com nota de seriação no intervalo [12, 14[, a dispersão é enorme: não existem, ao contrário dos outros intervalos analisados, concentrações significativas que indiquem elevada correlação entre Prova de Aferição e Nota de Seriação.

É ainda interessante neste contexto analisar os resultados relativos à frequência relativa dos erros cometidos pelos alunos em função do grupo de questões e do nível de ensino em que são leccionadas. Os resultados[8] apresentam-se na Tabela 2. Citando de novo [1]:

"O número de alunos que erra 3 ou mais questões elementares (i.e. dos Grupos 1, 2, 3) é considerado preocupante: 64.9% do total."

Grupo	Questões	Anos em que são leccionados	Categoria	Frequência (%)
1	1-5	3º ciclo (7º, 8º, 9º)	2 ou mais questões erradas	30.3
2	6-9	10º	2 ou mais questões erradas	30.6
3	10-12	12º	1 ou mais questões erradas	78.1
			2 ou mais questões erradas	41.7
4	13-15	11º e 12º	1 ou mais questões erradas	33.7
			2 ou mais questões erradas	5.3
5	16-18	11º e 12º	1 ou mais questões erradas	46.2
			2 ou mais questões erradas	13.3
6	19	até ao 11º	Esta questão errada	51.6
7	20	transversal	Esta questão errada	75.9

Tabela 2: Alguns resultados relativos aos grupos de questões.

É relevante o facto de, em face da já referida correlação estatística significativa entre Prova de Aferição e Nota de Seriação, esta distribuição estar muito longe de uniforme. Na Tabela 3 resumem-se os dados, já para todos os cerca de 1300 estudantes abrangidos pela Prova de Aferição, do cruzamento entre o número total de respostas certas nos grupos 1, 2 e 3 – os mais elementares, que, recorde-se, cobrem respectivamente matérias leccionadas no 3º Ciclo do Ensino Básico, no 10º e no 12º anos – e a Nota de Seriação.

	Nota de Seriação				**GLOBAL**
	[120,140]	]140,160]	]160,180]	]180,200]	
Relatório I	90.3%	80.2%	56.0%	20.4%	64.9%
Relatório II	93.5%	81.6%	42.9%	25.0%	81.5%
Relatório III	96.6%	60.0%	40.0%	-	73.4%
TODOS	**92.2%**	**79.2%**	**54.7%**	**20.6%**	**67.8%**

Tabela 3: Percentagem de alunos que erra 3 ou mais questões elementares (Grupos 1 a 3) em função da Nota de Seriação.

Estes dados quase falam por si. Correspondem de facto à experiência quotidiana vivida no IST e, estamos certos, na maioria das Universidades portuguesas. Algumas conclusões claras podem extrair-se:

- Alunos considerados pelo sistema educativo pré-universitário como "muito bons" ou "excelentes" têm de facto uma boa preparação matemática.
- Alunos considerados pelo sistema educativo pré-universitário como "médios" podem ser médios ou, muito frequentemente, fracos ou mesmo muito fracos.

- As fraquezas destes alunos revelam-se frequentemente na falta de domínio de matérias absolutamente elementares; é surpreendente a frequência com que são expostas graves carências em matérias leccionadas ao nível do Ensino Básico e de todo o Secundário.

Embora estas conclusões sejam em si relevantes, podem ser apontadas naturalmente algumas direcções interessantes para extensão deste estudo. Por exemplo, está em curso um estudo de correlação entre o resultado na Prova de Aferição e o desempenho académico nas disciplinas de Matemática do 1º ano. Embora ainda não existam resultados definitivos, os dados disponíveis parecem confirmar as conclusões acima. Por outro lado, estes resultados parecem revelar conclusões que seria muito útil validar a nível nacional.

2. Algumas causas

2.1 Formação de professores

Um professor de Matemática, independentemente do nível que lecciona, *não pode* limitar-se a conhecer razoavelmente a Matemática que vai ensinar; pelo contrário, deve saber muito mais Matemática do que aquela que ensina. Uma medida deste facto é dada no relatório *The Mathematical Education of Teachers*, publicado em Agosto de 2001 pelo *Conference Board for the Mathematical Sciences* dos E.U.A.. Este documento termina com 11 recomendações. Em relação à formação inicial, e citando uma constatação da matemática Amy Cohen [4]:

> "*Recomendações 2, 3 e 4.* Estas recomendações especificam a quantidade de formação em Matemática que os futuros candidatos a professores devem receber na licenciatura: 9 horas-semestre para professores de 1º ao 4º ano, 21 horas- semestre para professores do 5º ao 8º ano e pelo menos o equivalente a um grau de licenciatura *major* em Matemática para professores do 9º ao 12º anos."

Adaptando ao sistema português, a formação matemática mínima recomendada para o exercício da profissão de professor é de 3 disciplinas de nível universitário para ensinar o 1º Ciclo do Ensino Básico; 7 disciplinas de nível universitário para ensinar entre o 5º e o 8º anos; e o equivalente a 3 anos de uma Licenciatura em Matemática para ensinar entre o 9º e o 12º anos.

Em Portugal, constata-se infelizmente que a componente matemática *strictu sensu* em cursos de formação de professores de Matemática está muitíssimo abaixo destas recomendações. Certas escolas formam professores para o Ensino Básico por vezes com duas, três ou quatro disciplinas semestrais de Matemática com conteúdos matematicamente muito pobres ao longo de um curso de 4 ou 5 anos. Por outro lado, não é raro que professores com esta formação, sobretudo em zonas mais carenciadas, possam ser requisitados para ensinar Matemática até ao 9º ano.

Observa-se um fenómeno análogo ao nível superior, em certas Licenciaturas que formam professores para o Ensino Secundário. Em muitos casos assiste-se ao esvaziamento dos conteúdos e exigências matemáticas dessas Licenciaturas, quer através da substituição de disciplinas de carácter científico por disciplinas de outras naturezas, quer através da diminuição drástica do grau de exigência científica, em disciplinas com o mesmo nome, de Escola para Escola.

A autonomia universitária, a lei de financiamento e o aumento por decreto dos professores habilitados a leccionar Matemática contribuíram para acelerar este processo. De forma a assegurar preenchimento de vagas, Escolas e Universidades mais fracas – em princípio as primeiras a ser afectadas com a rarefacção de alunos – optaram por vias menos claras para atrair alunos, introduzindo distorções no sistema. Uma delas foi a progressiva diminuição da exigência e esvaziamento de conteúdos científicos. Outra foi a hiperinflação de classificações. Num concurso para professor no Estado, a ordenação de um candidato é feita pelo Ministério exclusivamente em função da nota final; se uma Escola dá aos seus alunos por sistema classificações extremamente elevadas, estes têm quase assegurado emprego no final do curso independentemente da qualidade da sua preparação científica.

Esta situação de clara injustiça é reconhecida pelos próprios alunos: no Relatório-Síntese de Avaliação Externa de Cursos de Matemática, a Comissão refere a este propósito que "nesta segunda avaliação foram muitos os alunos das Licenciaturas em Ensino da Matemática (ou dos Ramos Educacionais) que não esconderam a sua revolta por esta situação".

2.2 Programas

Entre 1995 e 1997 foram introduzidos em Portugal novos Programas de Matemática para o Ensino Secundário (10º-12º anos). Esta reforma foi particularmente infeliz porque não apenas foi realizada praticamente sem a intervenção da comunidade matemática como prosseguiu sem levar em consideração as críticas correspondentes e a vontade efectiva de intervenção por parte da comunidade matemática no sentido de evitar erros desnecessários.

Eis algumas das críticas mais frequentes. Em primeiro lugar, os Programas são do ponto de vista científico não-normativos. Os tópicos a tratar são definidos por simples enumeração de tópicos. Este facto torna-os por vezes muito vagos; aliado à falta de preparação científica sólida de muitos professores, faz com que muitas vezes objectivos mínimos de aprendizagem pelos alunos não sejam atingidos. Em termos metodológicos, pelo contrário, os programas destacam-se pelo carácter normativo, em particular a utilização da calculadora não como ferramenta de cálculo mas como *substituto para os conceitos, eliminando as definições formais*. Esta situação faz com que os Programas transmitam uma enorme pobreza conceptual, ao ignorar o método axiomático-dedutivo ao longo de toda a Análise Matemática.

Embora a situação relativamente ao Ensino Secundário seja mais discutida ela é, em bastantes pontos, comum à dos Programas do Ensino Básico, orientados pela mesma filosofia. Por outro lado, a discussão sobre "Novos Programas de Matemática" não é paroquial. Pelo contrário: é uma transposição de debates que ocorrem pelo menos desde os anos 70 em comunidades educativas mais avançadas, como os nossos parceiros europeus e os E.U.A.. Quando esta reforma curricular foi imposta entre nós muitas das suas propostas tinham já sido experimentadas, avaliadas e abandonadas, por ineficazes, noutros países da Europa. Por exemplo, em 1995 as calculadoras foram no Reino Unido "banidas dos exames de Matemática para alunos de 11 anos, pois a Comissão de Acompanhamento Curricular identificou preocupantes faltas de capacidade matemática nos exames deste Verão (...) como confusão generalizada sobre casas decimais e falta de competências em cálculo com fracções. A divisão também é uma fraqueza particular. (...) Os métodos de ensino que encorajam as crianças a descobrir regras matemáticas por si próprias foram criticadas por permitir que as crianças desperdicem tempo tentando construir as coisas ineficientemente".

Por último, os Novos Programas implementados em todo o País incorrem numa anomalia difícil de compreender: não prevêem mecanismos externos de avaliação do seu sucesso, tornando assim inviável uma identificação objectiva das suas virtudes e defeitos com vista a uma futura correcção. Mas os sinais de alerta externos parecem agora difíceis de ignorar.

2.3 Manuais escolares

O papel dos manuais escolares no processo da aprendizagem pré-universitária da Matemática é frequentemente subvalorizado. Em muitas escolas, sobretudo de meios sócio-culturais mais baixos e geograficamente mais isoladas, o manual adoptado pela Escola é por vezes o *único* recurso disponível para o professor se guiar. Num número provavelmente significativo de casos, o professor não se guia no seu trabalho lectivo pelo programa oficial, mas sim pelo manual adoptado.

Infelizmente, a situação portuguesa relativamente à qualidade dos manuais escolares é, em média, confrangedora. Num estudo comparativo promovido pelo I.I.E. que originou o relatório [5] sobre manuais de Matemática para escolaridades entre o 7º e o 12º anos, conclui-se que os melhores manuais escolares são, no seu conjunto, os da nossa vizinha Espanha. Quanto aos manuais portugueses, os mais adoptados nas nossa escolas "(...) têm muitos erros, em quantidade e gravidade substanciais, incluídos os de linguagem.". Outros há que, sendo menos maus, "apresentam alguns erros e deficiências. No cômputo geral, sob o aspecto da correcção científica, os nossos manuais ficam muito aquém dos seus pares estrangeiros".

De acordo com o relatório citado, a principal explicação deste bizarro fenómeno decorre do quadro legal que em Portugal regulamenta o controlo de qualidade dos manuais escolares. Essa disfuncionalidade reside acima de tudo no facto de não haver qualquer controlo de qualidade sobre os materiais didácticos antes da sua publicação, existindo apenas possibilidade de um eventual controlo a jusante, após publicação dos manuais, e em condições relativamente gravosas. Tanto quanto sabemos nunca, até hoje, esse mecanismo foi desencadeado e mecanismo de fiscalização de qualidade dos materiais pedagógicos.

No sistema espanhol, o mecanismo de controlo de qualidade oficial está *a montante* do processo produtivo. Apenas no caso de o projecto editorial, do qual é submetida uma "amostra significativa" para avaliação pelo Ministério, ser aprovado, pode o livro ser publicado e enviado para o mercado. Mas nesse caso fá-lo-á com um "selo" de qualidade oficial: a aprovação ministerial. Consequentemente, apenas existem no mercado manuais oficialmente aprovados. Este facto explica provavelmente grande parte da diferença de qualidade entre manuais escolares portugueses e espanhóis.

2.4. Testes e exames

A Matemática é uma ciência de integração vertical. Esta verticalidade revela-se de forma notável na progressão entre níveis. É impossível factorizar polinómios sem conhecer o cálculo algébrico e o algoritmo da divisão, que por sua vez depende da aritmética básica. Ou seja, em

Matemática – de forma porventura muito mais sensível que noutros campos do saber – é contraproducente *para o próprio aluno* aceder a um nível superior sem dominar o precedente. Fazê-lo pode significar não mais ser possível, daí para o futuro, acompanhar o que se passa na sala de aula. No entanto, o processo de transição de níveis sem domínio das matérias parece ser encarado como normal no Ensino Básico, o que é contraproducente para o aluno, criando as condições para o seu posterior abandono.

Como evitar este efeito perverso do sistema? No Reino Unido, a resposta é dada através de exames nacionais nas disciplinas estruturantes (Língua materna, Matemática e Ciências) em estádios-chave do percurso escolar: 7, 11, 14 e 16 anos. Os objectivos a atingir em cada fase de cada estádio-chave são bem divulgados, em particular através da Web [20]. As famílias são encorajadas a acompanhar a progressão do seu filho. Os exames de anos anteriores encontram-se disponíveis na Web.

Este é um papel essencial dos testes escritos a um aluno de Matemática, e por maioria de razão dos exames nacionais a intervalos regulares: a detecção em tempo útil de dificuldades que, se passassem despercebidas, poderiam ter consequências gravosas a prazo. Exames nacionais periódicos permitem uma validação externa da evolução do aluno e eventual correcção de deficiências sempre que necessário. O aluno, o professor, e mesmo a família, ficam com o conhecimento de que existe um problema por resolver (ou, pelo contrário, que tudo vai bem). Por outro lado, essa monitorização pode também servir para detectar eventuais deficiências regionais ou locais no sistema de ensino, permitindo a correcção de problemas. Conhecer a existência de um problema é condição necessária para o resolver.

Para além da monitorização, os testes escritos na sala de aula podem ter um outro papel frequentemente subvalorizado ou ignorado: se forem bem concebidos, podem ser um excelente auxiliar de aprendizagem. Os testes bem concebidos podem, como qualquer professor dedicado sabe por experiência, ser utilizados com sucesso para motivar os alunos a despender mais esforço. A Matemática exige esforço, a aprendizagem exige esforço, e os testes com consequências elevadas podem agir, desde que bem concebidos, como incentivos para o esforço.

Referências

[1] Análise dos resultados da Prova de Aferição. I: Alameda; II: Taguspark; III: Alameda e Taguspark (2ª fase). Ana Pires Parente, Secção de Estatística e Aplicações do Departamento de Matemática do IST, 2002. http://wwwcp.ist.utl.pt/2001-2002/

[2] Prova de Aferição de conhecimentos básicos de Matemática aos alunos admitidos no ano lectivo de 2002/3. Relatório Público. Conselho Pedagógico, IST, 2002. http://wwwcp.ist.utl.pt/2001-2002/

[3] Sintomas, diagnósticos, terapêuticas: o olhar de um matemático. Jorge Buescu, a publicar nas Actas do Seminário "O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas", Conselho Nacional de Educação, 28 de Novembro de 2002.

[4] Cohen, A., e Krantz, S. *Two reactions to* The Mathematical Education of Teachers. Notices of the A.M.S. **48** (9), 2001, 985-991.

[5] E. Marques de Sá, I. Seruca dos Reis, Miguel Ramos, Jorge Pato, Critérios de elaboração de manuais escolares e guiões para professores de Matemática do 7º ao 12º anos. IIE/SPM, Março de 1999.

[6] http://www.nc.uk.net/servlets/Subjects?Subject=Ma

Calculadoras Gráficas: algumas limitações*

Maria Madalena Correia Consciência
Esc. Sec. Dr. Ginestal Machado, Santarém

" As calculadoras gráficas que cada vez mais se utilizarão correntemente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa. O seu uso é obrigatório neste programa."

(Ministério da Educação, 1997, p.11)

Introdução

Muito se tem reflectido e escrito sobre o uso de novas tecnologias nas aulas de Matemática, nomeadamente no que diz respeito às calculadoras gráficas. Existem defensores incontestáveis ao seu uso considerando que a utilização da calculadora permite uma aprendizagem mais significativa e mais profunda dos conceitos bem como o facto de favorecer uma abordagem indutiva e experimental da Matemática. Por outro lado, existem opositores que consideram que o uso e abuso das novas tecnologias está a prejudicar fortemente a capacidade de abstracção dos jovens. Passando a citar: "[…] seria interessante medir quanto a exagerada utilização e as concessões que se fazem às máquinas pelas suas limitações e resultados aproximados, no decorrer de uma aula, estão formando espíritos menos rigorosos, menos exigentes e mais preguiçosos, tanto da parte dos alunos como dos professores"(Rui Pedro Albuquerque, Opinião – Cartas ao Director, Boletim da SPM, nº 38, Abril de 1998, p. 140).

Em minha opinião não faria sentido, num mundo que cada vez mais tem acesso às mais diversas tecnologias, continuar a ensinar Matemática (e outras disciplinas) como há vários anos atrás. Se podemos ter acesso em tempo quase imediato a um resultado que de outra forma conduziria a muitos cálculos, com as consequentes hipótese de erro e perda de tempo, porque não aproveitar essa vantagem que a tecnologia nos dá?

É claro, no entanto, que o uso da calculadora deve ser feito criteriosamente e com os devidos cuidados; de facto, sendo uma máquina, tem limitações que importa ter em conta.

Ao utilizar uma calculadora gráfica podem surgir vários problemas que têm a ver, por exemplo, com:

1- precisão numérica
2- resolução do écran
3- construção do gráfico de uma função
4- métodos utilizados no cálculo de derivadas, integrais, zeros, extremos, …
5- etc.

Neste artigo são abordados apenas os três primeiros casos. A máquina utilizada nos vários exemplos foi a TI 83. É claro que diferentes máquinas podem conduzir a resultados diferentes, mas os tipos de erro são basicamente os mesmos.

* Este artigo é baseado num seminário realizado no âmbito do Mestrado em Matemática, na área de Matemática para o Ensino na FCUL, no ano lectivo 1999/2000, sob a orientação do Prof. Dr. Nikolai Chemetov.

1 - Precisão Numérica

A calculadora pode ser uma ferramenta preciosa para os alunos intuírem resultados, nomeadamente no que diz respeito ao limite de sucessões, no entanto, é necessário alertá-los para o facto de que a calculadora trabalha com um número de dígitos finito e que, portanto, ao efectuar cálculos faz arredondamentos que podem influenciar fortemente o resultado.

Vejamos um exemplo: estudo do limite de uma sucessão do tipo

$$k_n = \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} \text{ quando } u_n \to +\infty.$$

Num dos manuais do 11º ano (Matemática 11º - Sucessões, Edições Contraponto) encontra-se o seguinte exercício (figura 1):

> ***135**. Considera as sucessões:*
>
> $$a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}, \quad c_n = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$$
>
> ***a**. Utilizando a calculadora, investiga qual é o limite de cada uma das sucessões.*
>
> ***b**. Que podes concluir quanto ao limite de uma sucessão do tipo* $K_n = \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n}$ *quando* $u_n \to +\infty$*?*

Fig.1

Um aluno que não esteja familiarizado com aquele tipo de sucessões e que não conheça bem a calculadora pode ser induzido em erro. Seria de esperar que quanto maior fosse o valor considerado para *n* melhor fosse a aproximação relativa ao limite de uma sucessão daquele tipo, no entanto, os valores apresentados pela calculadora a partir de certa altura, afastam-se bastante do número *e*.

A tabela 1 mostra as aproximações dos termos da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, obtidos pela calculadora, para alguns valores de *n*. Como podemos verificar, a partir de certo valor de *n* o resultado obtido utilizando a calculadora é sempre 1.

Tabela 1

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	2.59374246
10^2	2.704813829
10^3	2.716923932
...	...
10^{10}	2.718281828
10^{11}	2.718281828
10^{12}	2.718281828
10^{13}	2.760577856
...	...
10^{14}	1
10^{15}	1
10^{16}	1
...	...

Porque é que isto sucede?

A calculadora tem precisão finita. O conjunto de números com que a calculadora trabalha não é o conjunto dos números reais nem tão pouco o dos racionais. No modo **Normal** (com dígitos à direita e à esquerda do decimal) as respostas numéricas podem ser visualizadas com um número de dígitos até 10 mais o sinal e o ponto decimal. Caso a resposta não consiga exibir 10 dígitos ou se o valor absoluto for inferior a 0,001 a TI 83 exprime a resposta em notação científica utilizando até 10 dígitos e um expoente de 2 dígitos. Sempre que a resposta ultrapasse o número de dígitos permitidos para a visualização, o valor visualizado é arredondado (figura 2).

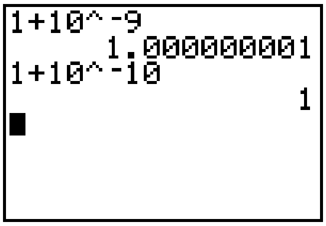


Fig.2

Surge então a questão: Porque é que a calculadora não dá o valor 1 quando se calcula $\left(1+\frac{1}{10^{10}}\right)^{10^{10}}$?

Para maximizar a exactidão a TI 83 tem internamente mais dígitos do que os que exibe. Os valores são armazenados na memória, utilizando até 14 dígitos com expoente de 2 dígitos e portanto a calculadora ainda devolve um resultado diferente de 1 para aquele cálculo (figura 3).

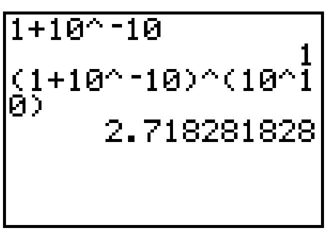


Fig. 3

Quando calcula $1+10^{-14}$ o resultado apresentado é 1 e o valor armazenado na memória é também 1, uma vez que ultrapassa os 14 dígitos de capacidade da memória e o valor é, portanto, arredondado. Para valores de n até 10^{12} a calculadora devolve uma boa aproximação do número de Neper, a partir daí o resultado apresentado contém já um erro elevado.

Embora a calculadora permita fazer intuições relativas ao infinito, o facto de trabalhar com um número de dígitos finito pode conduzir a resultados errados e os alunos devem ser consciencializados para esse facto, de modo que, não aceitem qualquer resultado apresentado pela calculadora como uma verdade inquestionável!

É também de salientar que o facto de um resultado ser visualizado com um certo número de dígitos e armazenado na memória com outro número dígitos conduz a situações "caricatas", como a que podemos ver na figura 4.

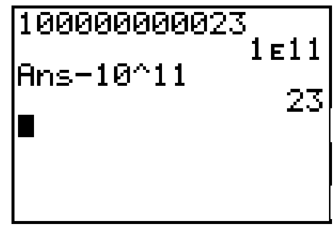


Fig. 4

Ainda dentro da precisão numérica, outro aspecto interessante que podemos constatar é que se excedermos o maior valor que a calculadora suporta obtemos mensagem de erro (**overflow**), no entanto, no caso de "ultrapassarmos" o limite inferior o valor é automaticamente substituído por zero sem que qualquer mensagem de erro ocorra (ver figuras 5, 6 e 7).

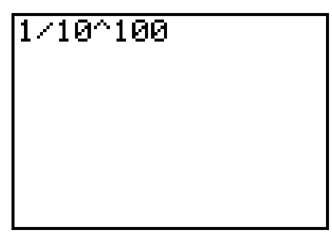


Fig. 5

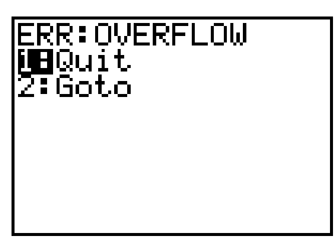


Fig. 6

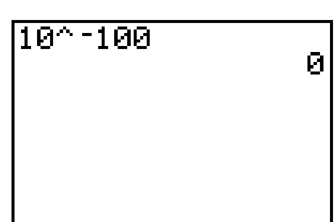


Fig. 7

2 - Resolução do Écran

O écran das calculadoras gráficas é uma espécie de tabuleiro de xadrez formado por minúsculos quadradinhos; cada quadradinho denomina-se **pixel** (contracção das palavras **Picture Element**, ou seja, elemento de imagem). Quanto mais **pixels** tiver o écran, melhor será a sua resolução e apresentação gráfica.

O écran da TI 83 é formado por 95 **pixels** horizontais e 63 verticais. Cada **pixel** pode estar em dois estados: aceso ou apagado.

De um modo geral quando se pretende visualizar a representação do gráfico de uma função é introduzida a expressão analítica e definida a janela de visualização. A calculadora já tem algumas janelas pré-definidas, nomeadamente as correspondentes aos **zooms ZStandard**, **ZDecimal** e **ZTrig.** A calculadora faz então a conversão do rectângulo de $R^2([x_{min},x_{máx}]\times[y_{min},y_{máx}])$ fornecido para o seu "tabuleiro de xadrez", formado pelos respectivos **pixels,** do seguinte modo:

a) Calcula a distância entre os centros de dois **pixels** adjacentes através das fórmulas:

$$\Delta_x = \frac{x_{máx} - x_{\min}}{94} \quad , \quad \Delta_y = \frac{y_{máx} - y_{\min}}{62}$$

b) A cada **pixel** *i* horizontal faz corresponder um valor $x_i \in [x_{min},x_{máx}]$ tal que $x_i = x_{\min} + i\Delta_x$, com *i*= 0, 1,..., 94.

E de igual modo a cada **pixel** *j* vertical faz corresponder um valor $y_j \in [y_{min},y_{máx}]$ tal que $y_j = x_{\min} + j\Delta_y$, onde *j* = 0, 1, ..., 62.

Esta conversão é uma das principais limitações da calculadora gráfica, uma vez que, o que irá ser visualizado no écran fica condicionado pela janela de visualização que é definida. Assim, o que seria uma das grandes vantagens da calculadora gráfica – <u>fornecer em pouco tempo uma ideia global do comportamento de uma função</u> - nem sempre se consegue. O que vemos no écran é baseado numa "aritmética discreta" e está intimamente ligado com a janela de visualização que se define.

Exemplos:

1. Consideremos a função cuja expressão analítica é $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$. Ao pedirmos a representação do gráfico esperaríamos obter uma semicircunferência com centro na origem e raio 7. Contudo, a representação gráfica obtida no écran com **zoom ZStandard** ($x_{min}=y_{min}=-10$ e $x_{máx}=y_{máx}=10$) é a que podemos ver na figura seguinte.

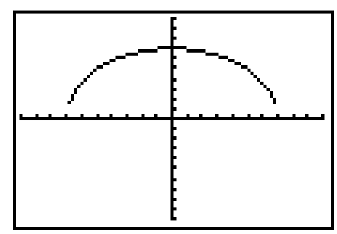


Fig. 8

Devido à capacidade de resolução do écran a representação do gráfico obtida não é a que seria esperada. O que salta imediatamente à vista é o facto da representação do gráfico não intersectar o eixo das abcissas, o que acontece porque os zeros da função não correspondem a nenhum dos valores atribuídos aos **pixels** do écran. Se alterarmos a janela de visualização para $x_{min}=-9.4$ e $x_{máx}=9.4$, por exemplo, teremos $\Delta_x=0.2$ e, portanto, a representação gráfica já nos mostra os zeros (figura 9).

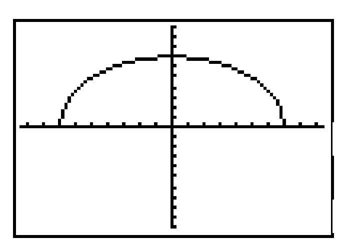


Fig. 9

Podemos também reparar que a forma que a representação gráfica nos sugere é a de uma semi-elipse, tal deve-se ao facto de $\Delta_x \neq \Delta_y$, o que pode ser facilmente corrigido utilizando o **zoom ZSquare**. Este tipo de **zoom** define, com base na janela de visualização, uma nova janela (ajustando somente numa direcção) de tal modo que $\Delta_x = \Delta_y$, o que faz com que a representação de uma circunferência, dada pela máquina, pareça de facto uma circunferência (figura 10).

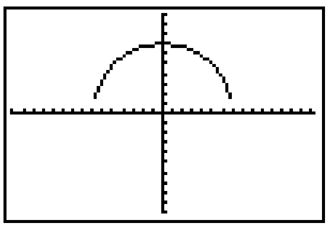
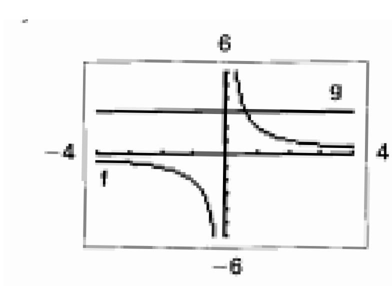


Fig. 10

O facto de se obter uma espécie de "linha poligonal" depende também da resolução do écran. Ao acender os **pixels** a calculadora procura a melhor aproximação e portanto podem surgir segmentos de recta horizontais sem que a função seja constante.

2. Num dos manuais escolares do 12º ano (Matemática 12 – Funções, Edições Contraponto) encontra-se o seguinte exercício:

***84**. Observa o gráfico das funções.*



Indica, se existir:

***a**.*	***b**.*	***c**.*
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)+g(x)\right]$	$\lim\limits_{x\to 0} \left[f(x)+g(x)\right]$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x)+g(x)\right]$

Fig. 11

Para além da representação gráfica não é dada qualquer informação sobre as funções em questão. Será que a representação do gráfico, numa dada janela de visualização, permite ter uma noção do comportamento global de uma função?

Consideremos a função de expressão analítica $h(x) = \dfrac{1}{xe^{\frac{.001}{|x|}}}$. A representação do gráfico, na mesma janela de visualização, é semelhante à da função f do referido exercício (figura 12).

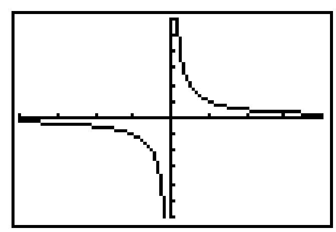


Fig. 12

Poderemos então concluir (como era objectivo do exercício) que não existe limite da função h quando $x \to 0$? Recorrendo ao cálculo podemos concluir que, embora a função h não esteja definida para $x=0$, o limite quando $x \to 0$ existe e é igual a zero. Escolhendo outra janela de visualização podemos ver melhor o comportamento da função h próximo de zero (figuras 13 e 14).

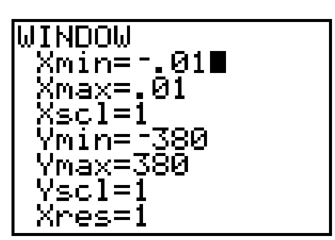


Fig. 13

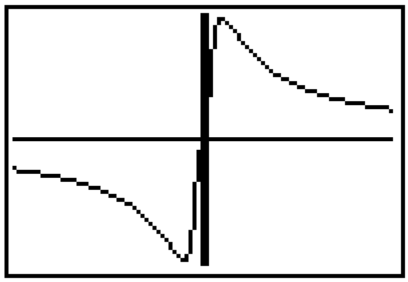


Fig. 14

O que se vê no écran está limitado ao "tabuleiro de xadrez" que depende fortemente da janela de visualização não permitindo, muitas das vezes, que o utilizador tenha uma ideia imediata do comportamento global da função, sendo necessário procurar a "janela adequada". É , pois, muito importante que o utilizador tenha consciência de tal facto para que não tire conclusões precipitadas.

3 - Construção do gráfico de uma função

Quando é pedida a representação do gráfico de uma função a calculadora faz, tal como foi referido atrás, a conversão do rectângulo do plano cartesiano para o seu sistema de **pixels**, ficando a cada **pixel** *i* horizontal a corresponder um valor x_i e a cada **pixel** *j* vertical a corresponder um valor y_j. Em seguida, para cada valor x_i calcula a imagem correspondente através da expressão que define a função, obtendo um valor, digamos, y_i. Os pontos (x_i, y_i), com i=0, 1, …, 94 são então "marcados" no écran, ou seja, são acesos os **pixels** correspondentes. No caso do valor y_i não corresponder a nenhum dos valores y_j, a calculadora escolhe o valor mais aproximado (o que faz, como já foi visto, que algumas zonas da representação do gráfico sejam visualizadas como segmentos de recta horizontais). Se a calculadora estiver a trabalhar em **mode dot** apenas os **pixels** correspondentes aos pontos (x_i, y_i) são acesos; se estiver a trabalhar em **mode connected** a calculadora faz a ligação dos pontos através de segmentos de recta e nesse caso acende mais **pixels** para fazer essa ligação (o que pode fazer com que algumas zonas do gráfico sejam visualizadas como segmentos de recta verticais). Assim, quando visualizamos a representação do gráfico numa calculadora gráfica não estamos propriamente a ver a representação do gráfico da função mas sim uma aproximação que, muitas das vezes, não é muito fiável.

Exemplos:

1. A figura 15 mostra a representação do gráfico da função $f(x)=tgx$ obtida com **ZTrig** e em **mode connected**:

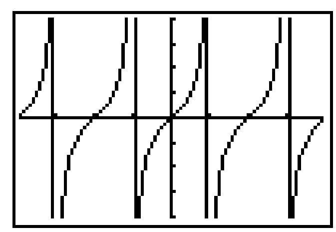


Fig. 15

Como podemos ver a representação visualizada inclui segmentos de recta verticais. Isto acontece porque a calculadora está a unir os pontos calculados através de segmentos de recta. Como a função tem assimptotas verticais, próximo das assimptotas calcula uma imagem muito "alta" e outra muito "baixa" e ao fazer a ligação surgem aqueles segmentos de recta verticais. Se utilizarmos o **mode dot** passamos a ter acesos no écran apenas os **pixels** correspondentes aos pares (x_i, y_i) (figura 16).

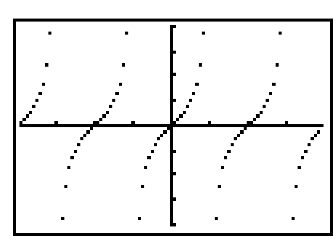


Fig. 16

Claro que se a calculadora estiver em **mode connected** e se os valores de *x* correspondentes às assimptotas ficarem sobre pixels já conseguimos ter a noção das assimptotas (embora seja difícil escolher a janela de visualização de modo a conseguir que os valores x_i correspondam exactamente aos valores de *x* onde a tangente não está definida).

2. Com as funções trigonométricas que são funções periódicas, podemos obter as mais variadas representações gráficas, mudando apenas a janela de visualização. Podemos, por exemplo, fazer a representação do gráfico da função co-seno ser vista como uma recta (ver figuras 17 e 18).

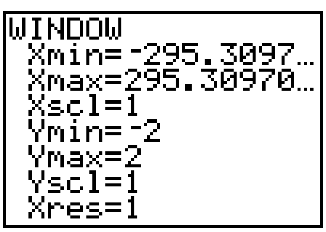


Fig. 17

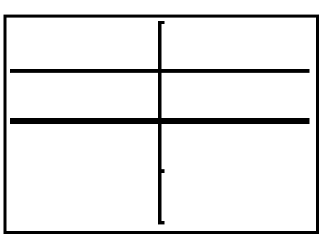


Fig. 18

Ou como vários segmentos de recta verticais (figuras 19 e 20)

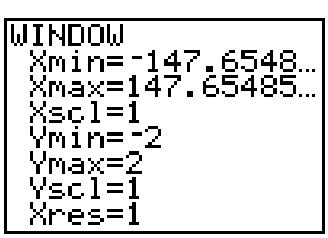


Fig. 19

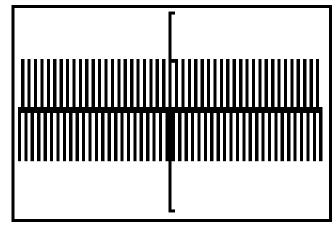


Fig. 20

Podemos também fazer com que a representação do gráfico da função co-seno num intervalo "bastante grande" seja "igual" à representação do gráfico no intervalo de -2π a 2π (figuras 21 e 22).

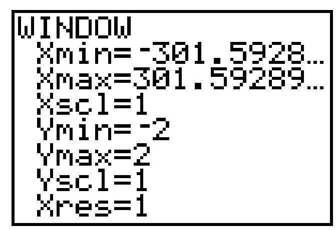


Fig. 21

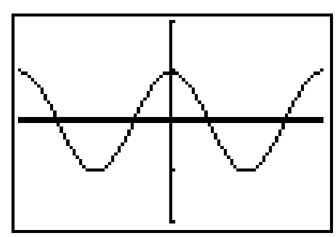


Fig. 22

Mantendo os mesmos valores para $[x_{min}, x_{máx}] \times [y_{min}, y_{máx}]$, podemos obter, na TI 83, representações gráficas bastante distintas para a mesma função se utilizarmos diferentes valores para x_{res}. A construção descrita acima é feita quando x_{res}=1, obtendo-se, nesse caso, a máxima precisão. A TI 83 aceita valores inteiros para x_{res} entre 1 e 8; no caso de x_{res}=2 os pontos são calculados de 2 em 2 **pixels**, se x_{res}=3 o cálculo é feito de 3 em 3 **pixels** e assim sucessivamente. Quando x_{res}=8 apenas são calculados 12 pontos pertencentes ao gráfico e portanto a precisão é muito menor.

Exemplos:

1. As figuras 23, 24 e 25 mostram 3 representações do gráfico da função de expressão analítica $f(x)=\dfrac{2x^2-x-6}{x-2}$ para x_{res}=1, 3, 8 respectivamente, em **mode connected**, e com x_{min}=-1.2, $x_{máx}$=8.2, y_{min}=-2 e $y_{máx}$=15.

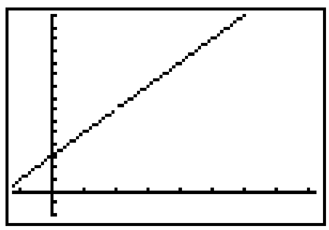


Fig. 23

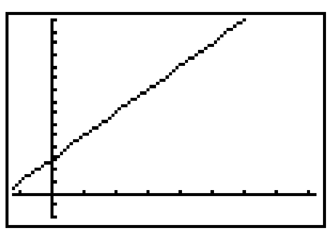


Fig. 24

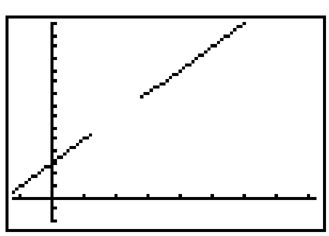


Fig. 25

A função não está definida para x=2, o que se nota na figura 23 uma vez que o **pixel** i=32 corresponde exactamente ao valor 2 não sendo, portanto, possível calcular a sua imagem e consequentemente esse **pixel** não é aceso. Já na figura 24 não se dá conta desse facto, uma vez que os pontos são calculados de 3 em 3 **pixels** e portanto o **pixel** i=32 não entra no cálculo; como a calculadora está a trabalhar em **mode connected** faz a ligação dos pontos calculados e o que vemos é uma linha contínua. Na figura 25 como os pontos são calculados de 8 em 8 **pixels** e o **pixel** correspondente ao valor 2 entra no cálculo, ao fazer a ligação dos pontos calculados a representação do gráfico apresenta aquela interrupção.

2. Nas figuras 26, 27, 28 e 29 podemos observar várias representações do gráfico da função de expressão analítica $g(x)=sen(23\pi x)$, obtidas com **Ztrig** e x_{res}=1, 2, 3 e 7 respectivamente:

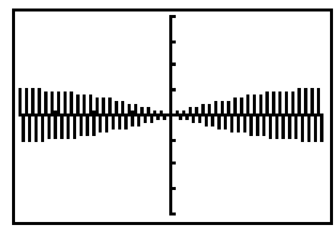


Fig. 26

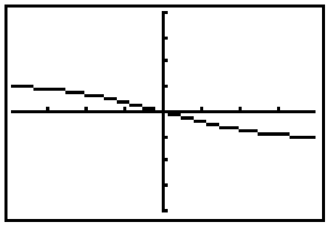


Fig. 27

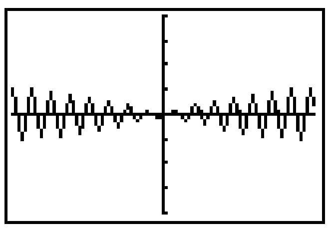


Fig. 28

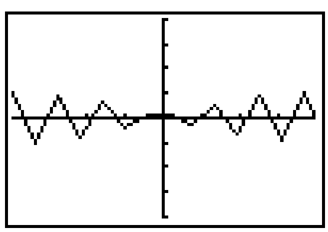


Fig. 29

Em resumo, a principal limitação da calculadora ao construir a representação do gráfico de uma função prende-se com a resolução do écran, uma vez que se passa de uma "aritmética contínua" para uma "aritmética discreta" e, portanto, não se sabe qual o comportamento da função para os valores de x entre dois **pixels** consecutivos. Esta limitação faz com que se possam visualizar representações do gráfico bastante distintas para uma mesma função.

Ao terminar este artigo gostaria de referir que na minha opinião estas e outras limitações das calculadoras gráficas podem ser usadas pedagogicamente. Penso que é importante confrontar os alunos com as limitações da máquina e explorar as situações que daí possam advir.

Bibliografia

[1] Albuquerque, C. (1996). Calculadoras gráficas – alguns contra-exemplos. *Boletim da SPM, nº 34, 3-13.*

[2] Fernandes, J. A. & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de Matemática? *Boletim da SPM*, nº 39, 43-55.

[3] Albuquerque, R. P. (1998). Opinião – Cartas ao Director. *Boletim da SPM*, nº 38, 139-144.

[4] Palis, G. de La R. (1997). Gráficos de funções em calculadoras e com lápis e papel. *Educação e Matemática*, nº 45, 37-40.

[5] Fernandes, J. A. (1998). Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções. *Educação e Matemática*, nº 46, 33-36.

[6] Texas Instruments, TI 83, Manual de Utilização.

[7] Ministério da Educação, (1997). *Programas de Matemática de 10º, 11º e 12º anos.*

[8] Ministério da Educação, (1997). Brochuras – *Funções 10º, 11º e 12º anos.*

[9] Electronic Proceeding of the Seventh Annual International Conference of Technology in Collegiate Mathematics (ICTCM-7), Página WWW (Internet): http:// archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-7.html.

[10] McClure, M. , Página WWW (Internet): http://liberty.uc.wlu.edu/~mmcclure/graphing/.

[11] Texas Instruments, Página WWW (Internet): http://ti.com/calc/portugal.

[12] Texas Instruments, Página WWW (Internet): http://ti.com/calc/docs/graph.htm.

[13] Lopes, A. V. & Bernardes, A. & Loureiro, C. & Varandas, J. M. & Viana, J. P. & Bastos R. (1998). *Matemática 11º - Sucessões*, Edições Contraponto.

[14] Lopes, A. V. & Bernardes, A. & Loureiro, C. & Varandas, J. M. & Viana, J. P. & Bastos R. (1999). *Matemática 12 – Funções*, Edições Contraponto.

Uma breve história de π

José Carlos de Sousa Oliveira Santos
Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Neste texto conta-se a história do número π, desde o Egipto e da Babilónia da Antiguidade às mais recentes descobertas.

A educação matemática que se recebe no Ensino Secundário deixa demasiadas vezes a impressão de que a Matemática é um assunto «morto», isto é, que a Matemática é obra de alguns grandes matemáticos do passado (Euclides, Arquimedes, Lagrange, Cauchy, …) e que estudar Matemática consiste unicamente em reaprender o que esses autores nos deixaram. Este artigo pretende mostrar com um exemplo concreto como a Matemática é um assunto dinâmico onde o passado, longe de ser um objecto estático feito para ser admirado ou, quando muito, imitado, é uma fonte de inspiração para novos avanços. O exemplo em questão é o número π.

É difícil conceber algum tema matemático que seja mais popular junto de não matemáticos do que o estudo das propriedades do número π. De facto, citando [2, p. v], π «é um dos poucos conceitos matemáticos cuja menção provoca uma reacção de reconhecimento e de interesse por parte de quem não está profissionalmente ligado ao assunto». Quase qualquer pessoa minimamente culta sabe que π é o número que, multiplicado pelo diâmetro de uma circunferência, dá o seu perímetro e que o seu valor é, aproximadamente, 3,14. É também sabido que a área de um círculo pode ser obtida multiplicando π pelo quadrado do raio.

Que o perímetro de um círculo pode ser obtido multiplicando o seu diâmetro por uma constante é um conhecimento antigo; já há cerca de 4000 anos os babilónios afirmavam que aquela constante é $3+\frac{1}{8}$ (=3,125) e os egípcios que o seu valor é $4.\left(\frac{8}{9}\right)^2$ ($\cong$3,16). Que uma tal constante deveria existir é algo que não é difícil de conjecturar, isto é, é normal que se pense que se se tiver dois círculos e se o diâmetro do primeiro é k vezes o diâmetro do segundo (para algum número positivo k), então o perímetro do primeiro também é igual a k vezes o perímetro do segundo. Por outras palavras, o quociente entre o perímetro e o diâmetro é o mesmo para todos os círculos. O problema está então em determinar o valor daquele quociente. Analogamente, basta alguma prática de cálculo de áreas para que se torne natural pensar que, ao multiplicarmos o raio de um círculo por um número positivo k, estamos a multiplicar a sua área por k^2; consequentemente, o quociente entre a área de um círculo e o quadrado do raio é o mesmo para todos os círculos. Uma questão que se levanta é a seguinte: dado um círculo de raio r, perímetro p e área A, porque é que os quocientes acima mencionados,

$$\frac{p}{2r} \text{ e } \frac{A}{r^2},$$

são iguais? Há várias maneiras de o justificar. A mais simples consiste talvez em observar que se se dividir o círculo num número elevado (e par) de bocados iguais, como na figura 1, então é possível reordenar esses bocados de modo a obter-se algo muito próximo de um rectângulo com altura r e largura igual a metade do perímetro da circunferência, ou seja, igual πr. Logo, a sua área é igual a πr^2.

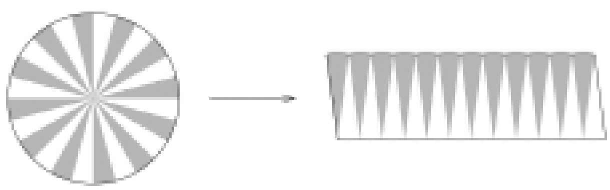


Figura 1

Como se irá ver, os matemáticos ocuparam-se não apenas com o cálculo do *valor* de π mas também com a tentativa de determinar a *natureza* de π.

Naturalmente, as primeiras tentativas de determinar o valor de π devem ter tomado a seguinte forma: alguém enrolava uma corda em torno de um objecto circular (uma roda, por exemplo), marcava o ponto onde a corda tocava novamente na sua origem e em seguida via quantas vezes é que esse pedaço de corda (o que ia da origem até ao ponto marcado) era maior do que o diâmetro da roda, eventualmente pegando num pau do tamanho do diâmetro e observando quantos paus daquele tamanho eram precisos para que a soma dos seus comprimentos fosse igual ao comprimento da porção de corda. Facilmente se conclui por este processo que π é ligeiramente superior a 3. Infelizmente, muitos povos antigos não deixaram documentos a explicar como chegaram aos resultados matemáticos que obtiveram, mas por vezes é possível conjecturar quais foram os métodos empregues. Por exemplo (veja-se [4, p. 25] para uma explicação detalhada) é razoável supor que o valor aproximado de π obtido pelos antigos egípcios que foi acima mencionado ($\pi \cong 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$) seja proveniente da seguinte observação: considera-se uma circunferência inscrita num quadrado que está dividido em nove quadrados iguais, como na figura 2. É natural supor que as áreas do círculo e do octógono (irregular) que aí podem ser observados são semelhantes. A área do octógono é igual à área de 7 quadrados pequenos (ou seja, 5 quadrados pequenos mais quatro metades de quadrados). Se cada quadrado pequeno tiver 3 unidades do comprimento, a área do octógono será igual a $7 \times 9 = 63$. Então, a área da circunferência de raio $\frac{9}{2}$ é aproximadamente igual a 63, que, por sua vez, é aproximadamente $64 = 8^2$. Então um valor aproximado para π é

$$\pi \cong \frac{8^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = 4.\left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

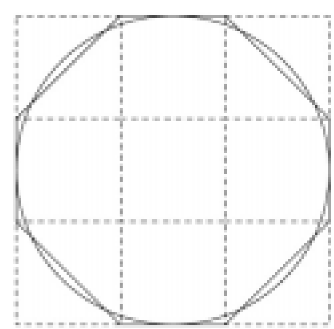


Figura 2

Um grande progresso no que se refere à determinação do valor de π teve lugar simultaneamente (e independentemente) na China e na Grécia no século III a. C. A ideia que surgiu então foi a de considerar dois polígonos regulares com o mesmo número de lados, dos quais um estava dentro do outro de modo que o círculo cuja área se queria determinar estivesse situado entre os dois. Além disso, tal como na figura 3, o polígono mais pequeno deveria estar inscrito na circunferência (ou seja, os vértices deveriam ser pontos da circunferência), enquanto que o polígono maior deveria estar circunscrito (ou seja, os lados deveriam ser tangentes à circunferência). Então a área do círculo seria um valor intermédio entre as áreas dos dois polígonos e, além disso, quanto maior fosse o número de lados mais a área dos polígonos estaria próxima da do círculo.

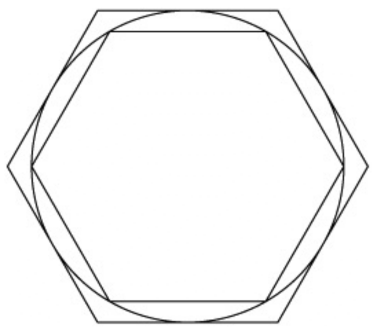


Figura 3

Arquimedes de Siracusa (*ca.* 287–212 a. C.) foi o matemático grego que criou este método de obter valores aproximados de π. Se Arquimedes se tivesse limitado aos hexágonos da figura 3, teria apenas podido chegar à conclusão de que $3<\pi<4$, mas foi duplicando sucessivamente o número de lados dos polígonos envolvidos até chegar a 96 ($=2^4\times 6$), o que lhe permitiu concluir que

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}, \text{ ou seja, } 3{,}14084<\pi<3{,}142858.$$

Na China, Liu Hiu empregou o mesmo método em 264 a. C. mas levou os cálculos mais longe e, recorrendo a um polígono com 192 lados (ou seja, o dobro do número de lados do polígono usado por Arquimedes), concluiu que $3{,}141024<\pi<3{,}142704$.

É preciso ter em mente que todos estes cálculos foram feitos sem computadores nem trigonometria! Durante quase vinte séculos, este foi o método usado tanto na China como no Ocidente para obter valores aproximados de π. Recorrendo a este método e levando em consideração um polígono com 15×2^{31} lados, o matemático holandês Ludolph van Ceulen (1539–1610) calculou os 20 primeiros dígitos de π em 1596. No entanto, não ficou por aqui e continuou a determinar dígitos de π até ao fim da sua vida, tendo chegado aos 35 dígitos. É necessário deixar claro que isto foi o resultado de uma quantidade monumental de cálculos mas não envolveu nenhuma ideia radicalmente nova relativamente ao trabalho de Arquimedes (a matemática chinesa só se tornaria conhecida no Ocidente vários séculos mais tarde).

O grande avanço que se seguiu veio de uma direcção totalmente nova e resultou do uso de Análise e não de Geometria. Lentamente, a partir do século XVI, os matemáticos começaram a manipular somas e produtos com um número infinito de factores. Um exemplo disto é uma fórmula descoberta pelo matemático francês François Viète (1540–1603). Ele observou que a área de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 1 é igual a 2. Em seguida, observou que se se substituísse o quadrado por um octógono regular, a área deste seria igual a

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

se se tivesse um polígono regular de 16 lados a sua área seria

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

e assim sucessivamente. Sendo assim, concluiu Viète, uma vez que à medida que se aumenta o número de lados mais a área do polígono se aproxima da do círculo, que é igual a π, tem-se

$$\pi=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\times\cdots}.$$

Esta fórmula, embora de origem geométrica, envolve um produto com uma infinidade de factores, que é um conceito tipicamente retirado da Análise. Uma fórmula do mesmo género mas que não envolve raízes quadradas foi descoberta pelo matemático inglês John Wallis (1616–1703):

$$\pi=2\times\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots$$

Poucas décadas mais tarde, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) descobriu a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Antes de prosseguir, é preciso deixar claro que nenhuma destas fórmulas tornou obsoleto o método de Arquimedes de determinar o valor de π, pois este acaba por exigir menos cálculos ao tentar-se determinar π com um certo número de casas decimais do que se se recorrer a qualquer das três fórmulas anteriores; o próprio Viète determinou π com nove casas decimais recorrendo ao método de Arquimedes e não à sua própria fórmula.

Foi Isaac Newton (1642–1727) quem descobriu uma maneira de escrever π como soma de uma infinidade de números através de uma fórmula que também permitia calcular um grande número de casas decimais de π. A fórmula em questão foi

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{28.2^7} - \frac{1}{72.2^9} - \cdots\right)$$

(neste caso, a regra sobre como passar de cada termo para o seguinte é um pouco complicada; pode-se ver qual é, descrita pelo próprio Newton, em [2, p. 110] e em [4, p. 143]). Esta fórmula permitiu a Newton determinar as primeiras 16 casas decimais de π com apenas 24 anos de idade! Bastou-lhe somar as 22 primeiras parcelas da sua fórmula; por contraste, somando as 22 primeiras parcelas na fórmula de Leibniz obtém-se apenas 3,096…, ou seja, nem mesmo o primeiro dígito após a vírgula está correcto.

É conveniente neste ponto introduzir alguma terminologia. Uma soma $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ com uma infinidade de parcelas é aquilo que em Matemática se designa por *série*. As séries que nos interessam aqui são as *séries convergentes*, isto é, aquelas para as quais existe um número s (a soma da série) tal que a distância entre s e a soma $a_1+a_2+\ldots+a_n$ das n primeiras parcelas da série se torna tão pequena quanto se queira à medida que n cresce. O problema com a série de Leibniz, comparativamente com a de Newton, reside no facto de a primeira convergir lentamente (isto é, é preciso somar muitas parcelas para se obter uma boa aproximação da soma da série) enquanto que a segunda converge rapidamente.

Após a descoberta de Newton, outros matemáticos encontraram séries que convergem rapidamente para π. Para se compreender o que se vai seguir, é conveniente conhecer a função tangente; o seu gráfico (ou, mais correctamente, o gráfico da restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$) está representado na figura 4.1, enquanto que a figura 4.2 representa o gráfico da função inversa da função tangente, ou seja, da função que a um número real x faz corresponder o ângulo θ tal que $\tan(\theta)=x$; esta função designa-se por *arco tangente*. Uma vez que $\tan(\frac{\pi}{4})=1$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, onde arctan é uma abreviatura de arco tangente.

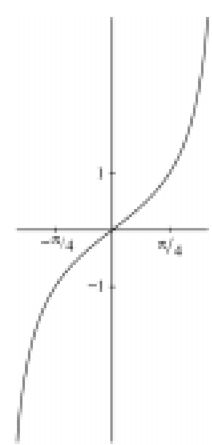


Figura 4.1

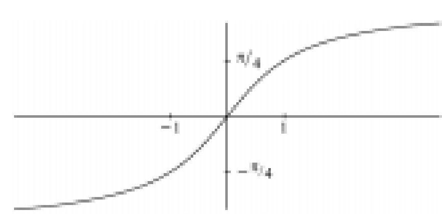


Figura 4.2

O matemático escocês James Gregory (1638–1675) descobriu que, para números reais no intervalo [-1,1], se tem

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Se se substituir x por 1 nesta fórmula obtém-se novamente a fórmula de Leibniz para $\pi/4$ que, como já foi visto, converge lentamente. No entanto, a série que aparece na fórmula de Gregory converge cada vez mais rapidamente à medida que x se aproxima de 0. Esta constatação, juntamente com a igualdade

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6},$$

fez com que o astrónomo Abraham Sharp (1651–1742) conseguisse calcular π com 72 casas decimais. Outro astrónomo, James Machin (1680–1752), obteve π com 100 casas decimais recorrendo à fórmula de Gregory e à igualdade

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Antes de se prosseguir, é preciso que fique claro que, nesta fase, já se ultrapassou há muito o grau de precisão com que é preciso conhecer π de modo a podê-lo empregar na prática. Basta ver que que para determinar o perímetro de uma circunferência cujo raio seja igual a 150 milhões de quilómetros (aproximadamente a distância da Terra ao Sol) com um erro inferior a 1 milímetro, basta conhecer o valor de com 16 casas decimais!

Foi afirmado no início deste artigo que os matemáticos também se ocuparam com o estudo da natureza de π. Um resultado importante nesse sentido foi publicado em 1768 pelo matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1721-1777): π é irracional.

Que há números irracionais (isto é, não fraccionários) é algo que já se sabia desde o tempo de Pitágoras (séc. VI a. C.)[1]. Para certos números ($\sqrt{2}$, por exemplo) é fácil demonstrar a irracionalidade, mas por vezes é extraordinariamente difícil fazê-lo. Por exemplo, só em 1978 foi demonstrado que o número

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

é irracional (veja-se [2, p. 434–447]) e ainda não se sabe se a «constante de Euler», isto é, o limite da sucessão

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)\right)_{n \in IN}$$

é ou não racional. A demonstração de Lambert foi um feito notável, seguida pouco tempo depois pela demonstração de que nem mesmo π^2 é racional, da autoria de Adrien-Marie Legendre (1752–1833).

Convém agora examinar o significado da expressão «número racional». Dizer que o número real r é racional é o mesmo que dizer que é possível escrever $r = \frac{m}{n}$ para dois inteiros m e n, com $n \neq 0$. Outra maneira de pôr isto é dizer que r é raíz da equação $nx - m = 0$. Sendo assim, afirmar que um número é racional é o mesmo que afirmar que é solução de alguma equação do primeiro grau com coeficientes inteiros. Postas assim as coisas, vê-se que a irracionalidade de $\sqrt{2}$ acaba por não ser um «defeito» muito grave; afinal, embora $\sqrt{2}$ não seja raíz de nenhuma equação do primeiro grau com coeficientes inteiros, é raíz de uma do segundo, nomeadamente $x^2 = 2$. Isto leva naturalmente à seguinte pergunta: haverá números reais que não são raízes de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros? Um tal número diz-se *transcendente*; caso contrário, diz-se que se trata de um número *algébrico*. Acontece que efectivamente há números transcendentes (aliás, por razões que vão além do âmbito deste texto, um número real escolhido aleatoriamente tem incomparavelmente mais probabilidades de ser um número transcen-

[1] É preciso ter em conta que Pitágoras foi, acima de tudo, o fundador de uma religião na qual os números tinham um lugar de destaque. Como sempre nestes casos, os adeptos nunca admitem posteriormente que tenha sido introduzida no seu conjunto de crenças qualquer ideia nova relativamente às expostas pelo fundador e, consequentemente, qualquer inovação acaba por lhe ser atribuída. Assim sendo, atribuir um resultado matemático a Pitágoras significa apenas que este resultado circulava entre os pitagóricos.

dente do que de não o ser). Em 1873, o matemático francês Charles Hermite (1822–1901) demonstrou que o número de Neper *e* é transcendente e, 9 anos mais tarde, o matemático alemão Ferdinand Lindmann (1852–1939) demonstrou a transcendência de π. Só por curiosidade, refira-se que isto permitiu resolver um problema com mais de 2000 anos de existência. Este problema, o da quadratura do círculo, surgiu na Grécia antiga e era posto assim: dado um círculo, desenhar, usando apenas régua e compasso, um quadrado com a mesma área. Embora não seja possível explicar aqui a relação entre os dois problemas, já se sabia desde a primeira metade do século XIX que se uma tal construção geométrica existisse, então π seria algébrico. Logo, o resultado demonstrado por Lindmann permitiu concluir que o problema da quadratura do círculo não tem solução.

Como se pode imaginar, os computadores permitiram calcular π com um enorme número de casas decimais. Em 1949 o computador ENIAC calculou π com 2037 casas decimais, recorrendo à fórmula de James Machin (e a 70 horas de cálculos!). Em Setembro de 1999 já se tinha calculado π com 206 158 430 000 casas decimais.

Há mais alguma coisa a descobrir relativamente a π? Certamente! Uma descoberta recente e inesperada foi publicada em 1997 ([3]). Trata-se da seguinte fórmula:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right).$$

Esta fórmula converge muito rapidamente; a soma dos 10 primeiros termos já coincide com π até à décima quarta casa decimal! Outras fórmulas surgiram baseadas nesta, das quais a mais simples talvez seja:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3}\right)$$

(veja-se [1] para mais detalhes). Surgirão no futuro fórmulas ainda mais simples? Seria desejável que se descobrisse uma com o factor 10^{-n} antes do parêntesis, mas é muito pouco provável que uma tal fórmula exista.

E quanto à natureza de π? O grande problema que resta por resolver nesta área é o seguinte: π é normal? Diz-se que um número real *x* é *normal* se, na sua expansão decimal, cada um dos algarismos surge, em média, uma vez em cada dez, se cada sequência formada por dois algarismos (51, por exemplo) surge, em média, uma vez em cada cem, cada sequência de três algarismos surge, em média, uma vez em cada mil e assim sucessivamente.[2] Posto de uma maneira mais vaga, um número é normal se os seus dígitos estiverem distribuídos aleatoriamente. Embora, em termos probabilísticos, quase todos os números sejam normais, o facto é que não se conhece nenhum exemplo de um número que surja «naturalmente» e que seja normal. Podem-se encontrar mais informações sobre este problema em [5].

Bibliografia:

[1] V. Adamchik e S. Wagon, *A simple formula for π*, American Mathematical Monthly **104** (1997), p. 852–855

[2] L. Berggren, J. Borwein e P. Borwein, *Pi: A Source Book*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1997

[3] D. Bailey, P. Borwein e S. Plouffe, *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*, Mathematics of Computation **66** (1997), 903–913 (reproduzido em [2, p. 663–674])

[4] P. Beckmann, *A History of π*, St. Martin's Griffin, Nova Iorque, 1971

[5] S. Wagon, *Is π normal?*, The Mathematical Inteligencer, **7** (1985), 65–67 (reproduzido em [2, p. 557–559])

[2] De facto, esta é a definição de *número normal na base* 10; a definição geral de número normal envolve saber trabalhar com outras bases.

XXI Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Daniel Peralta Pinto
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

De todas as iniciativas que têm a matemática como motivação principal, as Olimpíadas são certamente o evento que, no nosso país, mais participantes envolve. Este ano a competição nacional terminou na Escola Secundária S. João do Estoril, onde se juntaram os alunos com melhor pontuação nas fases anteriores da prova. Esteve também presente o Ministro da Educação, Dr. David Justino, que jantou e conversou com os alunos e com os professores responsáveis pelo evento.

Como habitualmente, para além das manhãs reservadas à resolução de problemas, os participantes tiveram oportunidade de viajar e assistir a conferências e espectáculos. A programação deste ano, elaborada pela organização local em colaboração com a SPM, contemplou, entre outras actividades, exibições de capoeira, espectáculos de música e dança.

Os participantes assistiram também, no Pavilhão do Conhecimento, à conferência do Prof. Nuno Crato sobre "Os mínimos quadrados e a descoberta dos planetas" (actividade inserida nas "Tardes de Matemática" que têm vindo a acontecer em Lisboa).

No final, o Auditório do Parque Palmela em Cascais foi pequeno para acolher todos os participantes, familiares e amigos que quiseram estar presentes na cerimónia de encerramento (onde puderam assistir à palestra do Prof. António Manuel Baptista e aplaudir os vencedores). Juntamente com os prémios das XXI Olimpíadas de Matemática foram também atribuídos prémios aos portugueses mais bem classificados nas Olimpíadas Paulistas de Matemática (Brasil) e nas Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática Universitária.

A Porto Editora ofereceu os prémios correspondentes à Categoria A (medalhas de ouro, prata e bronze): dicionários ilustrados de língua portuguesa, dicionários de verbos, dicionários da língua portuguesa e diciopédias 2003-versão de luxo.

A Timberlake ofereceu dois pacotes de software, *Maple* e *Mathematica*, que foram oferecidos à escola anfitriã da final das Olimpíadas Portuguesas de Matemática, a Escola Secundária de S. João do Estoril.

Todas as escolas que queiram participar com os seus alunos nas próximas Olimpíadas Nacionais (cuja final irá decorrer em Tomar) podem obter informações no site:

http://www.spm.pt/~opm/.

Vencedores das XXI Olimpíadas Portuguesas de Matemática (2003: S. João do Estoril, Escola Secundária S. João do Estoril)

Categoria A

medalha de ouro

Maria Margarida Videira Lopes Metelo Coimbra, 9º ano
E. B. 2,3 do Viso, Viseu
Rui Jorge Nunes Sequeira, 9º ano
E. B. 2,3 Gomes Teixeira, Porto
Víctor Mihali, 9º ano
E. B. 2,3 de Armação de Pêra, Armação de Pêra

medalha de prata

João Manuel Gonçalves Caldeira, 9º ano
Escola Secundária Emídio Navarro, Almada
Joel Pedro de Oliveira Moreira, 9º ano
E. B. 2,3 de Mafra, Mafra
Marina Teixeira, 9º ano
E. B. 2,3 Dr. Correia Mateus, Leiria

medalha de bronze

Célia Mariana Rabaçal Borlido, 9º ano
E. B. 2,3 Frei Manuel de Santa Inês, Baguim do Monte
Eloísa Rebelo Grifo Pires, 8º ano
Colégio Conciliar Maria Imaculada, Leiria
Hugo Leitão Cardoso D'Almeida Gouveia, 9º ano
Colégio Manuel Bernardes, Lisboa
Mário André Barbosa Eiras, 9º ano
E. B. 2,3 Abel Varzim, Vila Seca
Paulo Alcino Machado Macedo, 9º ano
E. B. 2,3 de Castelo da Maia, Castelo da Maia
Ricardo Fernando Pinto Amaral, 9º ano
Escola Secundária Infante D. Henrique, Porto

Categoria B

medalha de ouro

João Diogo Silva Ferreira, 11º ano
Escola Secundária Pedro Alexandrino, Póvoa de Santo Adrião
João Eduardo Casalta Lopes, 11º ano
Escola Secundária José Falcão, Coimbra
Luís Alexandre Fernandes Alves Pereira, 12º ano
Escola Secundária José Gomes Ferreira, Lisboa

medalha de prata

Bruno José Conchinha Montalto, 12º ano
Escola Secundária Manuel Cargaleiro, Fogueteiro
Carlos Filipe Magalhães dos Santos, 10º ano
Escola Secundária de Castêlo da Maia, Castêlo da Maia
João Guilherme Pereira Rodrigues, 11º ano
Escola Secundária Ferreira de Castro, Oliveira de Azeméis

medalha de bronze

António Ramos Andrade, 12º ano
Colégio Oficinas S. José, Lisboa
César Filipe da Costa Vidal, 12º ano
Escola Secundária de Valongo, Valongo
Nuno José Almeida Garcia, 12º ano
Escola Secundária com 3º C. E. B. de Gouveia, Gouveia
Ruben Coelho, 12º ano
Escola Secundária com 3º C. E. B. Arquitecto Oliveira Ferreira, Arcozelo, Vila Nova de Gaia
Susana Pereira Bulas Cruz, 10º ano
Escola Secundária de Ermesinde, Ermesinde
Tomás Barato Goucha, 11º ano
Escola Secundária Dr. Ginestal Machado, Santarém

Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática Universitária

As Olimpíadas Paulistas de Matemática tiveram, pela segunda vez, participação portuguesa: em Novembro de 2002, diversos alunos do ensino secundário realizaram a prova em Coimbra (que decorreu em simultâneo no Brasil).

Os medalhados portugueses foram:

Ana Rita Pires: medalha de prata
Ricardo Joel Abrantes Andrade: medalha de prata
Jorge Eduardo Pinto da Silva e Conceição Santos: medalha de bronze
Luís Filipe Pinto Tavares de Almeida Matos: medalha de bronze
Ricardo da Conceição Inglês: medalha de bronze

Olimpíadas Paulistas de Matemática

Pela primeira vez, Portugal participou também nas Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática Universitária. A prova decorreu em Novembro de 2002, no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e no Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico. Esta prova foi realizada em simultâneo em diversos países de expressão latina.

Os medalhados portugueses foram:

Categoria beta (9º e 10º anos)

Carlos Miguel Silva Pinto da Costa: medalha de prata
Eduardo Manuel Dias: medalha de bronze
Gustavo Martins Pereira Pires: medalha de bronze
Tiago Costa Gonçalves: medalha de bronze
Jorge Miguel Rodrigues Morais: medalha de bronze
Vasco Manuel Ferreira de Brito: medalha de bronze

Categoria gama (11º e 12º anos)

Luís Alexandre Meira F. Pereira: medalha de ouro
João Diogo Silva Ferreira: medalha de prata
Domingos José Ramos Lopes: medalha de prata
João Eduardo Casalta Lopes: medalha de bronze
Francisco Costa Santos D. Pereira: medalha de bronze

há uma certa ingenuidade em tentar ser feliz
(esta falta de sítios onde) era noite de S. João
quando falei o teorema daquele rapaz grego
desenha três deuses: eu tu e o destino tenta

agora o triângulo. soubesses pelo menos da
verdade (o quadrado da união é igual à soma
dos quadrados das intenções ou algo assim
como) um tabuleiro de jogo em cada aldeia

em cada amor então agora tenta tu: quatro.
Um dois três quatro sorte: é assim como quem
verde traz sua voz e cedo perde o silêncio

(saem da sombra para outra sombra: os sinais)
se levam o sol eu escondo a lua se trazem
vozes eu: peço mais

João Luís Barreto Guimarães
in "3", Gótica, Lisboa 2001.
(publicação gentilmente autorizada pelo autor)