GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática **Ano LXV** | Janeiro 2004 **nº 146**

A Vida e o Trabalho de Sophie Germain
por N. Hall, M. Jones e G. Jones

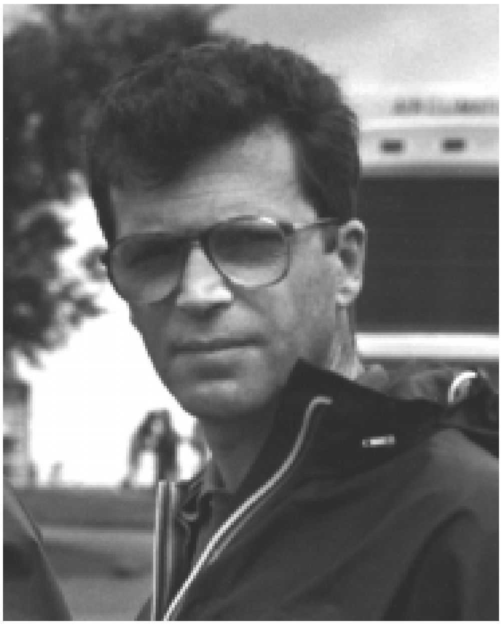
A Matemática na Sérvia
entrevista com A. Mikovič

A perda dos nossos colegas J. Morgado e P. Abrantes
depoimentos

A perda de duas figuras importantes da Matemática: José Morgado e Paulo Abrantes

Recentemente a comunidade matemática portuguesa sofreu a perda de duas ilustres figuras:
José Morgado, Sócio Honorário da Sociedade Portuguesa de Matemática, falecido em 8 de Outubro e
Paulo Abrantes, falecido em 14 de Julho.
Os dois deixaram trabalhos e ideias que merecem ser estudados.
A Gazeta de Matemática apresenta neste número alguns testemunhos
sobre a vida e obra dos nossos colegas desaparecidos.

José Morgado (1921-2003)



Paulo Abrantes (1953-2003)

José Morgado (1921-2003)

O Doutor José Morgado foi um dos matemáticos portugueses mais marcantes da época em que viveu. E tê-lo-ia sido mais se lhe tivessem permitido viver em Portugal tanto quanto ele queria. Foi uma figura da chamada década de 40, muito empenhado politicamente na luta pela democracia. Sofreu as consequências. Foi preso e perseguido e teve de deixar Portugal, vivendo e ensinando durante décadas no Brasil. Regressou em 1974 e, desde então, foi professor na Universidade do Porto. Nasceu em Pegarinhos, Alijó, em 17 de Fevereiro de 1921 e faleceu no Porto no passado dia 8 de Outubro. Licenciou-se na Universidade do Porto em 1944. Depois de ter sido demitido de assistente do Instituto Superior de Agronomia, em Lisboa, tornou-se, em 1960, professor da Universidade Federal de Pernambuco no Brasil. Em 1974 foi nomeado Professor Catedrático do Departamento de Matemática Pura da Universidade do Porto e jubilou-se em 1991.

Era Sócio Honorário da Sociedade Portuguesa de Matemática. Com efeito em Assembleia Geral da Sociedade Portuguesa de Matemática, em Julho de 2000, foi aprovada a seguinte moção, apresentada, conforme os Estatutos, pelo Conselho Geral:

"O Professor José Morgado é um homem da geração de 40 que desempenhou um papel muito activo em prol da Matemática em Portugal. Desde sempre ligado à Sociedade Portuguesa de Matemática, foi Segundo Secretário da Direcção no biénio 1947/48. Teve um papel muito importante na Gazeta de Matemática, colaborando na redacção a partir de 1946 e desempenhando os cargos de Redactor Principal (1948-1950), Redactor Adjunto (1951-53) e, formando a partir de 1953, com J. Gaspar Teixeira e J. Silva Paulo a redacção da Gazeta de Matemática.

O Professor José Morgado é um brilhante e apaixonado expositor, tendo tido enorme influência na formação matemática de sucessivas gerações, nomeadamente no Brasil onde passou muitos anos da sua vida. Depois de 1974 pôde regressar a Portugal e tornou-se Professor Catedrático da Universidade do Porto, mantendo nesta cidade, mesmo depois de jubilado, larga actividade no campo da Matemática, tanto na investigação como no ensino.

O Professor José Morgado colaborou sempre em várias actividades da Sociedade Portuguesa de Matemática, sendo de citar a sua actuação rápida e eficiente como avaliador de artigos submetidos para publicação à Portugaliae Mathematica e ao Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.

É autor de largas dezenas de trabalhos de Matemática entre monografias, artigos de investigação, de divulgação e exposição. Estes trabalhos repartem-se pelas áreas da Teoria dos Reticulados e Estruturas Ordenadas, Teoria dos Grupos, Teoria dos Números e História da Matemática. Alguns dos seus artigos deram origem a trabalhos de outros matemáticos.

Anexa-se o seu curriculum, provavelmente incompleto.

Tendo estes factos em conta, o Conselho Geral da Sociedade Portuguesa de Matemática propõe à Assembleia Geral, nos termos do Artigo 2 do Regulamento Interno, a nomeação do Professor José Morgado como Sócio Honorário da Sociedade Portuguesa de Matemática."

Desde que ouvi o nome de José Morgado até me encontrar com ele mediaram alguns anos. Devo ter ouvido pela primeira vez o nome, se não me falha a memória, quando andava no primeiro ano da Faculdade. Ouvi falar dele e de que estaria, ou teria estado, na cadeia e que, como eu, estudava Matemática. Pouco depois caiu-me nas mãos uma obra de José Morgado intitulada *Reticulados*. Não sabia o que era um reticulado e foi nesse livro que vi, pela primeira vez, a definição e as primeiras propriedades. Nesse livro travei conhecimento com o axioma da escolha que me surpreendeu e deu muito que pensar... Nunca mais esqueci estes factos... Numa época em que a investigação era quase desconhecida em Portugal, fiquei a admirar José Morgado para sempre. Disseram-me que o livro tinha sido escrito na cadeia. Custou-me a acreditar. Na época para mim era tão difícil perceber um Teorema e compreender a sua demonstração (não só na época, ainda hoje...) que não concebia facilmente que se pudesse escrever um livro na condição de preso sem ter à disposição vastos elementos de consulta!

O nosso primeiro encontro teve lugar na cidade francesa de Nice durante o Congresso Internacional de Matemática de 1970.

O Doutor José Morgado viveu grande parte da vida numa época em que os matemáticos ainda não eram unidimensionais. Os seus interesses eram vastos, empenhando-se em questões de ordem política e de cidadania. Na Matemática cedo os seus interesses se dirigiram para a Álgebra. Deixou-nos um grande número de artigos dispersos por várias revistas de Matemática bem como artigos de carácter histórico, nomeadamente monografias em que procurava explicar os acontecimentos no mundo da Matemática nas décadas de 30 e 40 do século XX.

A Sociedade Portuguesa de Matemática e as suas publicações, em particular a Gazeta de Matemática, foram sempre objecto do seu interesse e dedicação.

Voltei a conviver com ele, em 1971, no Recife onde fui seu colega, e do saudoso Ruy Luís Gomes, na Universidade Federal de Pernambuco.

Depois foi 1974 e o regresso. Desde então vimo-nos muitas e diversas vezes nas nossas andanças matemáticas. Com saudade o recordo.

Graciano de Oliveira

●

Antes de conhecer pessoalmente o Prof. José Morgado, já este me causara imensa impressão e admiração, as quais não esmoreceram ao longo dos muitos anos de encontros e raros convívios de curta duração. Ainda estudante da licenciatura em Matemática nos anos sessenta, em Lisboa, adquiri, não me lembro onde, quando nem porquê, o livrinho *Reticulados* de José Morgado. Para quem, como eu, cresceu e viveu os anos intensos da adolescência na ditadura salazarista, participou nas lutas académicas e enfrentou os fantasmas reais e pesadelos da guerra colonial, um livrinho de matemática, sobre um assunto moderno pouco ou nada divulgado em Portugal, escrito na prisão, constituía o supremo exemplo de desafio intelectual à opressão política, superioridade moral e generosidade. Ironia sem par — José Morgado retribuía o encarceramento dando ao seu país um pouco mais de si. A partir daí, fui dolorosamente descobrindo como e porquê toda uma geração de homens e mulheres de craveira superior foi perseguida e impedida de contribuir para o progresso das ciências e a formação de jovens cientistas no nosso país.

O outro intenso momento que desejo aqui recordar, neste breve testemunho pessoal, teve lugar durante o ano lectivo 1990/91, quando José Morgado regeu a primeira parte (cerca de dois terços — a outra parte foi regida pelo Prof. Nuno Costa Pereira) de um curso de Teoria dos Números no Instituto Superior Técnico, e eu orientei as aulas teórico-práticas daquela parte. Ainda me lembro do entusiasmo transbordante e do ritmo alucinante que José Morgado imprimia às suas aulas, e dos suores frios que sentia ao tentar acompanhá-lo nas aulas de problemas. Aprendi muita coisa, nessa altura, e comecei a escrever o curso. Ainda não acabei, estou em falta com o Mestre.

José Morgado serviu os ideais humanistas que abraçou com elevação e sentido de dádiva. E ele tinha muito para dar.

A. J. Franco de Oliveira, Universidade de Évora

O Prof. José Morgado trabalhou na Universidade Federal de Pernambuco durante 14 anos (1960-1974), tendo contribuído de forma decisiva para a consolidação das atividades matemáticas no Recife. O seu esforço para melhorar a qualidade do acervo da biblioteca, na iniciação científica de jovens, na criação do curso de mestrado e como editor de coleção de textos de Matemática, foi inestimável e sempre será lembrado. A sua personalidade e capacidade de convencimento como professor serão sempre admiradas.

Fernando Cardoso,
Professor da Universidade Federal de Pernambuco,
Recife, Brasil.

●

Evocação de José Morgado

Tendo recebido da GAZETA DE MATEMÁTICA o grato convite para participar num número dedicado à memória de José Morgado, tornou-se para mim uma obrigação registar alguns dos momentos que vivemos em comum, solidariamente num vasto ideário – que às vezes tenho a impressão que se vai desvanescendo progressivamente.

Vários laços me ligavam a José Morgado, tanto no sentido geral, como no concreto. No primeiro, sobressai o gosto pela Matemática e a sua disseminação activa, associada a uma decisiva acção social, em proveito de todos os homens e mulheres deste país. Simultaneamente, há que salientar o amor por uma integral e generalizada cidadania, numa concepção pela qual optou muito cedo e à qual se manteve totalmente fiel. Tal nos mobilizou, embora por modalidades diversas, na luta anti-fascista, em particular, anti-salazarista.

Os primeiros contactos pessoais e profissionais datam do final da sua licenciatura, creio que em 1943, tendo ele começado em seguida a colaborar no Centro de Estudos Matemáticos do Porto, anexo à Faculdade de Ciências do Porto, nos Seminários de Análise Geral, que aí estavam sendo promovidos pela Junta de Investigação Matemática (J.I.M.), fundada por António Aniceto Monteiro, Ruy Luis Gomes e Aureliano de Mira Fernandes. Nesse âmbito, redigiu em 1944 os dois primeiros Cadernos de Álgebra Moderna, sob a direcção de António de Almeida Costa.

Pouco tempo depois deslocou-se para Lisboa, a convite de Manuel Zaluar Nunes, que o contratou como assistente do Instituto Superior de Agronomia, da Universidade Técnica de Lisboa.

Os nossos contactos rareavam, mas apraz-me mencionar que esta ligação de José Morgado com A. Almeida Costa permaneceu com simpatia até ao fim da vida deste último, como pude constatar já depois do regresso de José Morgado do Brasil após o 25 de Abril de 1974 – apesar das suas profundas divergências políticas.

Contrariamente ao que pensavam os seguidores da PIDE/DGS, sempre houve no Centro de Estudos Matemáticos do Porto, dirigido por Ruy Luis Gomes, uma grande tolerância ideológica e política; bastará recordar que foram colaboradores, ou receberam apoio científico, membros da Legião Portuguesa de então, nomeadamente A. Almeida Costa (Álgebra Moderna), Manuel Pereira de Barros (Astronomia). Após tantos anos de mentiras seria bom que houvesse historiadores interessados em clarificar o que significava verdadeiramente este surto de investigação científica "dos anos 40" do século XX, que foi esmagado em Portugal pela intriga, a insídia, a ignorância e o "medo da Ciência", com a maior das leviandades.

Gosto de pensar que José Morgado e A. Almeida Costa tinham efectivamente um traço de carácter em comum: aquela propensão a uma actividade perseverante, um trabalho continuado, que numa frase digna de registo Almeida Costa proferiu na sua lição de jubilação, apontando em síntese, como lema da sua vida, tal como um camponês: *"meter o arado à terra e lavrar"*... Frase singular numa hora daquelas, para mim inesquecível. José Morgado era dessa mesma têmpera.

Outros falarão com mais propriedade e documentação acerca da sua valiosa actividade na Direcção da Gazeta de Matemática. Ambos tínhamos feito parte da última direcção eleita da Sociedade Portuguesa de Matemática, para o biénio 1947-1948.

Não posso deixar de lamentar a sua estrita reserva, quando em 1976, e anos seguintes, alguns de nós quisemos relançar de novo uma Sociedade Portuguesa de Matemática que estava fazendo falta a este país, já que aquela que fora fundada em 1940 estava totalmente inoperante e dela havia, quando muito, uma vaga recordação. Tratava-se, como foi dito, de renovar o interesse por essa iniciativa, propondo abertamente os objectivos e modalidades de intervenção, na senda do que se fizera anteriormente e que ficara imobilizado durante um quarto de século.

Creio que mais tarde ele acabou por se convencer.

Sobre o nosso encontro no Brasil em 1960, creio ser oportuno reproduzir as palavras que li no *Encontro Luso-Brasileiro de História* da *Matemática* sobre o tema *"A contribuição de Matemáticos Portugueses para o desenvolvimento da Matemática no Brasil"*, de 23 a 26 de Março de 1997 em São Paulo – onde José Morgado esteve igualmente presente:

«No decorrer de 1957, recebi pelo correio um livro intitulado *Recticulados, vol. 1 (Conceitos Fundamentais),* com uma dedicatória e uma data: *Para o Alfredo Pereira Gomes, em renovação da nossa camaradagem no Centro de Estudos Matemáticos do Porto, ofereço com um grande abraço – José Morgado – Colónia Penal de Santa Cruz do Bispo, 3/5/57.*

Li-o com a atenção que só por si a dedicatória impunha e pensei que se o autor tinha levado a cabo esta obra na prisão, ele seria capaz de fazer melhor ainda se enquadrado devidamente numa instituição de ensino e pesquisa.

Por minha conta e risco tomei a iniciativa de convidar José Morgado para vir ensinar na Universidade Federal de Pernambuco. Da parte da Universidade de Pernambuco não encontrei senão facilidades, mas a qualidade de militante político activo, na oposição ao regime de Salazar, tornou as coisas morosas e difíceis do lado português. Recordo-me de que, em dado momento, escrevi uma carta pedindo cooperação ao Cônsul do Brasil no Porto. E quando enfim, no início de 1960, se anunciou a vinda de José Morgado para o Recife, produziu-se um acontecimento insólito:

Fui chamado ao Consulado de Portugal e o Cônsul pretendia que eu assinasse um compromisso *"de que o Sr. Dr. José Morgado não viria fazer política no Recife"*. Respondi-lhe prazenteiramente: *"Oh, Sr. Cônsul, eu nem a meu respeito assinaria um compromisso desses!… Mas peço-lhe que me diga, sinceramente, se durante estes sete anos a minha actuação e a do Professor Zaluar Nunes melhoraram ou pioraram a imagem de Portugal no Brasil"*. Ele acabou por concordar que era preferível arriscar…

No ano de 1961 convidei para fazer um curso no Recife os nossos amigos Hugo Baptista Ribeiro e Maria do Pilar Ribeiro. Também então o casal José Morgado teve oportunidade de quebrar a solidão do Recife e há fotografias que mostram a grande cordialidade desse convívio. Chegou no ano seguinte Ruy Luis Gomes e José Morgado instalou-o no bloco de apartamentos em que habitava com a família, muito próximo da sede do Instituto de Física e Matemática. Entretanto recebi um convite de professor visitante para a Faculdade de Ciências de Nancy (então sede do grupo "Bourbaki"), por iniciativa de J. Delsartre e de outros notórios matemáticos. Os meus contactos com José Morgado tornaram-se esporádicos e os dois anos do convite, por efeito do golpe militar de 31 de Março de 1964 no Brasil, prolongaram-se por nove, até receber um convite para uma cátedra em Lisboa. Mas o contacto manteve-se por correspondência, via Ruy Luis Gomes, até ao regresso deles após a instauração da democracia em Portugal. Este foi eleito Reitor da Universidade do Porto.

Tenho razões para pensar que foi da maior valia o papel de José Morgado junto de Ruy Luis Gomes nesta função. Mas a sua integração no quadro da Universidade não foi fácil: em 16/03/1977 escreve-me Ruy Luis Gomes uma carta de que me permito transcrever duas passagens essenciais: *"Escrevo-lhe muito preocupado com o andamento do processo de confirmação do Morgado. Calcule que o último despacho do Ministério a um requerimento do Morgado é no sentido de ouvir a Procuradoria Geral da República sobre a legalidade da primeira nomeação por convite (…)."*

"Como tudo isto se arrasta há mais de quatro anos, lembrei-me de lhe escrever para tentarmos um movimento de apoio dos matemáticos de Lisboa, Coimbra e Porto."

Enfim, sabemos que os obstáculos foram vencidos.

E os matemáticos portugueses, por intermédio da Sociedade Portuguesa de Matemática, homologaram depois essa vitória, elegendo-o Sócio Honorário desta Sociedade.

A. Pereira Gomes,
Professor Aposentado da Universidade de Lisboa

José Morgado, recordações de uma vida

Conheci José Morgado em Lisboa, quando participava num seminário de Matemática que se realizava diariamente numa sala da Secção de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Esta sala tinha sido cedida por umas horas diárias, pelo então director da Faculdade, a António Monteiro. Este, recentemente regressado de Paris, após o seu doutoramento na Sorbonne. Sem uma posição oficial e querendo continuar com os seus matemáticos, aí reunia estudantes e licenciados em Matemática, alguns bolseiros do então Instituto para a Alta Cultura. Não sei se Morgado seria também bolseiro.


José Morgado, Maria Helena Morgado, Maria Pilar Ribeiro e Hugo Ribeiro

Com a partida para Zurich de Hugo Baptista Ribeiro como bolseiro e de outros bolseiros para Itália, o seminário em breve se desmantelou. Aniceto Monteiro foi para o Porto e aí trabalhou num Centro de Matemática dirigido pelo professor Ruy Luís Gomes. Em breve Monteiro teve de partir para o Brasil.

De regresso a Portugal em 1946, Hugo Ribeiro quis reatar o seminário de Monteiro. Sem sala de aula na Faculdade reunia numa casa no Murtal, S. Pedro do Estoril, um grupo de interessados em Matemática. Desse grupo fazia parte, além do próprio Hugo Ribeiro, José Morgado, Zaluar Nunes, Pereira Gomes, Silva Paulo e Benvindo Reis.

Em Junho de 1947 numa edição do Notícias de domingo, dava-se conhecimento dum grupo de professores universitários demitidos pelo então actual governo. Por este motivo, A. Pereira Gomes, Zaluar Nunes e Morgado em breve partiam para o Recife, Brasil, onde tinham obtido posições na Universidade. Eu e Hugo Ribeiro, que não tinha conseguido nenhuma posição oficial, partimos para os Estados Unidos da América, onde Hugo tinha uma posição de leitor na Universidade da Califórnia em Berkeley.

O contacto com Morgado dava-se, desde então, por correspondência até que por volta de 1958-59 Hugo Ribeiro recebeu um convite de Pereira Gomes para ir dar umas lições na Universidade do Recife, por um período de 2 meses.

O nosso contacto directo com Morgado e família foi então reatado.

José Morgado permaneceu no Recife até ao 25 de Abril de 1974, data em que regressou a Portugal, e a convite do professor Ruy Luís Gomes, então reitor da Universidade do Porto começou a sua carreira profissional em Portugal como professor na Faculdade de Ciências na secção de Matemática.

Nós regressámos, Hugo Ribeiro em Outubro de 1975, também convidado pelo professor Ruy Luís Gomes, como professor convidado e eu em Dezembro de 1975 como assistente convidada.

Depois da morte do Professor Ruy Luís Gomes, José Morgado, então Vice-Reitor, foi nomeado interinamente reitor da universidade.

Ainda durante a nossa estadia na Universidade do Porto, dados os seus trabalhos publicados, foi nomeado professor catedrático, cargo em que se manteve até à sua reforma.

Não se concluiu aqui a sua ligação à Faculdade, pois que mesmo depois de reformado continuou a dirigir e a orientar estudantes em vários colóquios. Sempre que havia algum acontecimento matemático em Lisboa, Morgado não deixava de comparecer e participar. Faltou à reinauguração da Gazeta de Matemática, por motivo de doença.

Já não voltei a vê-lo. Perdi um amigo, trabalhador incansável e de quem sinto imensas saudades.

Maria Pilar B. Ribeiro

●

O texto que se segue é uma conferência proferida pelo Professor Aron Simis, Professor Titular da Universidade Federal de Pernambuco e membro da Academia Brasileira de Ciências, aquando de uma homenagem a José Morgado e Alfredo Pereira Gomes, no Recife, em 1996. Teve lugar no auditório do Centro de Ciências Exatas e da Natureza e contou com a presença do Reitor da Universidade. Reproduzimo-lo hoje tal como foi lido em 1996, pois é um testemunho importante do trabalho de Morgado no Brasil. Que aliás não foi o único português a desenvolver trabalho notável no Brasil ou noutros países. Perdemos muito com a ausência forçada destes homens.

Homenagem a José Morgado

Por Aron Simis

1. O contexto em Recife

Para compreender o impacto exercido pela presença da escola portuguesa em Recife — Pereira Gomes, José Morgado e os saudosos Zaluar Nunes e Ruy Luis Gomes — é preciso, antes de qualquer coisa, levantar o contexto em volta: a cidade do Recife na década de 50. Mas, que pena! Não sou a pessoa mais indicada para fazê-lo, existindo nessa audiência gente muito mais expedita. De qualquer modo, 40 anos não são suficientes para apagar inteiramente minha memória daqueles tempos — porque não dizer? — heróicos. Assim sendo, rebuscarei uma ou duas reminiscências.

Se aceitamos que a história não se processa de modo insipidamente contínuo, antes se caracteriza por uma sucessão estocástica de eventos contínuos e caóticos, então é fácil entender a marca deixada pelos acontecimentos da década: a derrota da seleção brasileira no Mundial de 1950, no Maracanã, que marcou o fim da nossa fase lúdica de competições mundiais, fez nascer a noção de que pertencíamos a um contexto mais complexo e que seria preciso, doravante, uma competência diferente; o suicídio de Vargas, que, ao menos simbolicamente, assinalou a agonia do romantismo político e da era do caudilhismo latino-americano (seção Brasil), fenômeno magistralmente descrito por Miguel Ángel Astúrias em "El señor presidente"; a queda de Moncada, que representou para a América Latina a fôrça do marxismo revolucionário romântico, reabilitando-nos da sensação de fracasso que foi a presença de Trostsky no México e tornando-nos, de um dia para outro, manchete internacional de periodistas e escritores famosos; a presença ostensiva da espionagem militar norte-americana mal disfarçada — que, no Recife, era representada pelo pouco saudoso *Ponto IV* — filtrando a ameaça da doutrina Monroe, mais tarde efetivada, embora de forma néo-clássica, em 31 de Março de 1964.

Entrementes, éramos avassalados por uma torrente de produtos e inovações, desde a televisão e a coca-cola até os primeiros carros nacionais. Uma fase relativamente democrática, com Kubitschek, partidos políticos com ideologia delineada, uma UNE combativa e respeitada, uma liberdade editorial quase completa que nos permitia o contacto com um largo espectro de obras publicadas em Espanha, França, México e União Soviética, variando de uma literatura refinada a folhetins de baixa qualidade das mais diversas cores políticas.

É difícil imaginar que algum jovem, nessa época, pudesse ser indiferente aos eventos de marcada feição ideológica, senão notadamente maniqueísta. Nos colégios secundários, a vindicação ideológica despertava cedo e sentia-se um clima de acirrado antagonismo entre os de índole "mascate", da nascente classe média de Recife, e os de linhagem terratenente, esses de ascendência pseudo--senhorial (se é que se pode usar tal termo).

Em meio a esta efervescência, prestei exame vestibular ao Curso de Matemática, na antiga Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, da Universidade do Recife, que ocupava um prédio na charmosa Rua Nunes Machado.

Havia um exame escrito e outro, oral. Àquela época, eu devorava toda a literatura européia clássica, sem menosprezar os autores russos e americanos. Gostava de escrever poesia e outras bobagens da idade e era um incorrígivel rato de dicionários. O que quero dizer, enfim, é que me considerava infinitamente mais bem preparado em humanidades do que em exatas, para usar a terminologia das agências de fomento à ciência. Pois bem, para minha surpresa, recebi uma péssima nota na prova de português, preparada por um certo professor do antigo Ginásio Pernambucano (Eládio Ramos? - o Fernando deve lembrar), que exigia análise lógica, léxica ou sintática, sei lá!, por meio de um diagrama de feição astrológica, misterioso e assustador, que ele ensinava (mas, ninguém aprendia, depois soube!) no Pernambucano — e eu, que azar!, havia estudado todo meu ginásio em outros colégios...

Nas provas de Matemática e Física, pelo contrário, saí--me bem, tendo ouvido, na minha vez da prova oral, rasgados elogios de Roberto Ramalho e Jônio Lemos (insignificante evento que os mesmos, e com razão, já devem ter apagado da sua memória — por favor, se estiverem na audiência, ratifiquem). A razão dos elogios era muito simples: a de ter sido eu o único candidato que sabia a definição correta de derivada!

Para que rebuscar estas reminiscências desinteressantes para a maioria da audiência? O propósito é o de explicar o contexto da época, a terrível fôrça da desinformação científica, em meio a uma pretensa cultura local "detachée" dos cânones corretos que se impunham, havia tempo, no campo das ciências exatas.

Um contexto de uma grande massa desinformada, com pontos isolados de treinamento científico semi-amadorístico.

Em meio a esta deliciosa mistura sub-equatorial de pretensão e desinformação, aportou um time português de excelência.

2. José Morgado, o professor

José Morgado foi meu professor de Cálculo I, no primeiro ano do Curso de Matemática. Se bem lembro, a disciplina de Cálculo I era dada em dois semestres, continuamente, sem uma divisão artificial (tal como se faz hoje na ementa da graduação). O Prof. Morgado começou com a construção dos sistemas numéricos, marcando sua primeira aula com os axiomas de Peano. Os de matemática, aqui presentes, podem imaginar a estranheza que causou (a mim, e por "maioria de razão" — expressão que aprendi com o professor — aos colegas de sala) aquela lista de 4 ou 5 decretos (axiomas) se interpondo entre nós e a tão esperada torrente de limites e derivadas que ninguém sabia calcular!

Mas, o respeito que a personalidade do professor impunha e a sua capacidade de convencimento eram tão fortes que, mesmo revolucionários e cultos como nos julgávamos na época, decidimos dar um voto de confiança àquela estranha ideologia nova de axiomas científicos. Ao cabo do primeiro semestre, aprendemos a construir os números inteiros dos naturais, os racionais daqueles e, enfim, aquele mistério quase evaporável da passagem dos racionais aos reais, usando quer fosse a teoria dos cortes de Dedekind ou a técnica de supremos e ínfimos. O grande climax, com a caracterização dos reais como constituíndo o único corpo, a menos de isomorfismos, completo, arquimedeano, etc.

A maioria, hoje, não gosta, não sabe ou não tem tempo de ensinar este edifício maravilhoso da bossa axiomática da matemática. É bem possível que eu não possa me excluir de pertencer a uma dessas categorias. Mas, tive o incomensurável prazer de ser exposto, em tenra idade, à forma correta de pensar os números. Alguns colegas, com menos fibra, abandonaram a arena, aterrorizados que ficaram em calcular com os velhos números, tão familiares antes, agora tão traiçoeiros... Outros dentre nós, seguiram confiantes no timoneiro - e, creio, para não se arrepender. (Interregno: muitos anos decorreram para que eu lesse a obra de Dedekind, numa reedição da Dover, em que ele expõe sua teoria dos cortes. Lembro da inefável sensação do "déja-vu" nos mínimos detalhes!).

A recompensa por ter entendido os conjuntos numéricos veio rápida, num ritmo totalmente absorvente: o contacto com o antigo Instituto de Matemática, quando esse ainda funcionava numa sala do prédio da Escola de Engenharia, à Rua do Hospício; a exposição a seminários em tópicos de matemática extra-curricular; a constatação de que outros alunos mais avançados ou bolsistas se preparavam para tornar-se matemáticos profissionais, alguns deles já prestes a embarcar para o exterior em programa de doutorado. Um mundo nunca dantes imaginado descortinava-se diante dos meus olhos semi-incrédulos.

Nos anos seguintes, aprendi outras coisas, de Álgebra Linear a Geometria Diferencial e Variáveis Complexas. Tive ótimos professores, além do José Morgado, entre os quais o saudoso Ruy Luis Gomes, Manfredo do Carmo e Fernando Cardoso. Estilos diferentes, de cada um absorvi a melhor quintessência. José Morgado, dentre todos, foi quem mais me impressionou, seja pela constância de sua determinação férrea, com uma saúde atormentada pelo nosso ar de umidade permanentemente saturada, seja pela sua preocupação em instilar em nós, alunos, o "veneno" precoce da manipulação de teoremas. Creio que, de todos, foi o que mais entendeu o significado da iniciação científica, no mais exato dos seus sentidos: o estímulo a remexer no dado científico, como se toca um animal desconhecido e mal-adormecido, sem saber como vai reagir.

Ainda havia disciplinas ultrapassadas no currículo, tal como Geometria Descritiva e Mecânica Racional, mas o futuro apontava claramente na nova direção. E esta direção, apesar de ser indicada também por alguns brasileiros competentes, estava indissoluvelmente ligada à pontificação portuguesa em Recife. E diga-se em alto som: era um time, mas não uma corporação! Sua preocupação permanente era de uma didática excelente aliada ao esforço na formação de recursos humanos.

Induziam, sem qualquer egoísmo, a formação de recursos humanos em centros de excelência europeus e norte-americanos. Jamais retiveram contingentes de alunos enrodilhados à sua sombra, sempre deixaram bem claro que Recife não era, ainda, um centro de pesquisa apesar de sua presença. Esta, como eles colocavam candidamente, tinha apenas como objetivo provocar-nos a tornar Recife, com nossas próprias mãos, um centro de excelência em Matemática e Física.

Gostaria de dizer que esta lição de desprendimento científico foi, enfim, após tantas décadas, aprendida por nós, brasileiros, matemáticos ou físicos. Mas, infelizmente...

3. José Morgado, o pesquisador

José Morgado, o professor infatigável. E o pesquisador? Já mencionei sua qualidade de desafiar os teoremas existentes, remexendo hipóteses, testando condições modificadas. Atenção! Isto não deve ser confundido com a fútil atitude da generalização gratuita e desinteressante de conceitos, da qual, fatalmente seguem-se em cascata os mesmos resultados com uma parafernália diferente. Ah, não! José Morgado sabia procurar uma essência melhor. Além disso, pressentia a mudança dos ventos, quando se fazia necessário velejar com velas a todo mastro. Quando os reticulados perderam interesse, soube esquecê-los, sem se agarrar como náufrago; quando a teoria geral dos grupos encontrou seu equilíbrio natural ao longo das suas várias ramificações, soube dar-lhe adeus; quando a teoria geral de semigrupos, grupóides, monóides, etc. cedeu lugar aos desafios da classificação concreta, percebeu claramente; quando a teoria geral dos anéis, fulgurante no início do século, principiou a declinar em favor das álgebras de tipo finito e dos anéis locais, sorriu como um adolescente deleitado ao saber que eu enveredara pela Álgebra Comutativa, disciplina mais estratégica.

Hoje, vejo que nada mudou em sua personalidade. Recentemente, tem trabalhado em tópicos da clássica Teoria dos Números, na fronteira dessa com a Combinatória. Em uma sucessão de belos resultados sobre subsequências de números de Fibonacci e de certas expressões com estas sequências que fornecem quadrados perfeitos, continua a exibir o mesmo vigor de outrora, quando tínhamos uma convivência mais próxima. Sua produção científica segue sendo limpa, precisa e irretocável, na melhor tradição dos clássicos europeus.

4. José Morgado, o ser humano

O Professor Ruy Gomes foi um dos maiores humanistas que conhecemos naquela época. Seu fervor ilimitado pela causa do homem, como ser social, era e será sempre admirado por todos dentre nós que conheceram sua ação humana e política. Era um líder do socialismo humanista, mas nunca precisou dizê-lo explicitamente: seus atos falavam por si mesmo.

Antes de aprender a ver isto com meus próprios olhos, já o havia percebido através do Professor Morgado. Não havia uma só ocasião, qualquer que fosse sua natureza, em que ele perdesse a oportunidade de valorizar a personalidade do Prof. Gomes. Apesar de, já naquela época, ser matematicamente mais produtivo e eficaz do que o saudoso mestre, fosse pela diferença de idade, fosse pela diferença de estilo, Morgado sempre buscava o conselho daquele, inclusive em questões de conteúdo matemático, o qual respeitava e fazia-nos respeitar. Sempre solidário com as causas do mestre, deixou que poucos percebessem o seu próprio lado de humanista e de incansável batalhador pela igualdade de oportunidades do homem.

Em 1976, tive uma das experiências mais enternecedoras da minha vida, quando visitei Portugal. Haviam se passado 2 anos após a Revolução dos Cravos, a qual proporcionara aos dois, José Morgado e Ruy Gomes, ao lado de tantos outros seus compatriotas, retornar a Portugal para concretizar o sonho de tantos anos de exílio. Naqueles dias de tanto sol e sonho, Portugal ardia em febre como um adolescente (daquela época...) em sua primeira noite. Os dois, incansáveis, mostrando-me a beleza singular da terra, a simpatia do seu povo e a extensão de sua "intelligentzia". Os planos de desenvolvimento da ciência, que deveria servir ao cidadão diretamente e não às oligarquias ou corporações. Era um belíssimo sonho, que me convenceu imediatamente, apesar do ceticismo nutrido no Brasil durante todos aqueles anos de autocracia militar.

A situação actual e o passado recente do ensino da Matemática*

Paulo Abrantes

O panorama actual da Matemática escolar

Os níveis de insucesso em Matemática, qualquer que seja o sentido em que se usa a expressão "insucesso", são hoje um factor de grande apreensão. Este fenómeno não é exclusivo da disciplina de Matemática e embora não se disponha, como seria desejável, de dados numéricos muito precisos a respeito da sua extensão, são certamente muito elevadas as percentagens de alunos que têm classificações negativas em Matemática nos vários anos de escolaridade, ou que não têm o mínimo gosto ou interesse pela disciplina. Mas igualmente alarmante, e talvez mais significativo, é o que se passa com muitos daqueles que, apesar de tudo, conseguem concluir o 9º ou o 12º ano: tanto resultados de investigação como a experiência de muitos professores e até de *empregadores* mostram que alunos capazes de ultrapassar as provas escolares e exames são muitas vezes incapazes de resolver os problemas mais simples da vida corrente, ou surgidos no início de estudos posteriores, ou suscitados pela inserção numa actividade de natureza profissional.

Cada vez é mais generalizado o reconhecimento de que o ensino da Matemática, tanto na forma como decorre no dia a dia como nos efeitos que produz, está mergulhado numa profunda crise. Toda a gente tem opiniões sobre as medidas que deveriam ser adoptadas para se ultrapassar essa crise. De acordo com afirmações que se ouvem com frequência, mesmo entre professores de Matemática, um problema vital seria o de que, hoje, muitos alunos não sabem sequer a tabuada, não dominam o cálculo, não adquiriram as bases sem as quais as aprendizagens posteriores se tornam impossíveis. Surgem então, de forma explicita ou implícita, propostas para um regresso aos "bons velhos tempos". Tais propostas assentam quase sempre na ideia de que a reforma que vigorou nos últimos vinte anos, ao sobrevalorizar a compreensão de conceitos e estruturas e os aspectos formais do conhecimento, terá negligenciado o operacional, o saber fazer, a aquisição dos factos e das técnicas fundamentais, quando seriam estas afinal as capacidades básicas – no duplo sentido de que deveriam ser as primeiras a desenvolver, seja como pré-requisito indispensável para outras seja por serem as únicas acessíveis a todos os alunos.

Há, no entanto, cada vez mais razões para se acreditar que esta apreciação, embora bastante popularizada, é profundamente simplista e enganadora. Em primeiro lugar porque ela se baseia numa deficiente análise do passado: os "bons velhos tempos" podem hoje considerar-se velhos mas estão muito longe de ter sido bons... Em segundo lugar porque ela pressupõe uma concepção conservadora e estática da sociedade e da ciência (e em particular da Matemática) que não tem na devida conta a necessidade de mudança provocada pela evolução social, científica e tecnológica. Em terceiro lugar porque ela assenta numa visão educativa que não é capaz de romper com a ideia de que o essencial da aprendizagem da Matemática se processa por mecanismos de transmissão, absorção e repetição.

A situação actual do Ensino da Matemática, embora admita questões específicas deste ou daquele país, apresenta aspectos gerais que constituem motivos de grande apreensão entre educadores e professores da nossa área em todo o mundo (ICMI, 1986). Essa situação é complexa e envolve factores sociais que não têm a ver apenas com a Matemática mas que afectam a escola como instituição. Porém, tão errado como não reconhecer esta complexidade seria igualmente não admitir que as orientações e práticas correntes no ensino da Matemática desempenham um papel essencial. Por isso, parece importante fazer-se uma caracterização daquilo que é hoje, no fundamental, o panorama do ensino e da aprendizagem da Matemática, procurando identificar as principais lições do passado, designadamente do passado recente. Como recomenda Usiskín (1985), citando George Santayana, tenhamos presente que "aqueles que não conseguem lembrar-se do passado estão condenados a repeti-lo".

Com muito raras excepções, o essencial da aprendizagem da Matemática consiste actualmente em dominar algumas questões formais da linguagem e das estruturas matemáticas e, sobretudo, umas quantas técnicas destinadas a resolver exercícios-tipo. Alguns professores preocupam-se em explicar as origens ou as razões que estão por detrás dos diversos passos dessas técnicas, outros consideram tal preocupação como secundária. Num caso e noutro, porém, o processo de aprendizagem do ponto de vista do aluno, reduz-se basicamente à repetição dos mecanismos transmitidos pelo professor, ou estudados no livro. Até se sentir capaz de produzir o mesmo tipo de comportamento em situações idênticas que lhe surjam no teste de avaliação ou, em última análise, no exame.

De um modo sumário, o panorama actual do ensino da Matemática nas nossas escolas é marcado por um domínio quase absoluto dos objectivos cognitivos de níveis mais baixos (memorização de factos, algoritmos e técnicas de resolução de tipos pré~estabelecidos de exercícios) e de uma avaliação consistindo quase exclusivamente em testes e exames escritos dirigidos para aqueles objectivos. O grau de complexidade e de sofisticação técnica dos exercícios varia enormemente mas os objectivos visados não deixam de referir-se aos níveis cognitivos mais baixos nem de estar associados a conteúdos rigidamente pré-fixados e "puramente" matemáticos, sem qualquer ligação com problemas do mundo actual. Em Portugal, o panorama descrito identifica-se em todos os níveis de escolaridade, desde o ensino primário, mas o exame do 12º ano parece constituir um significativo exemplo desta orientação dominante.

Claramente subestimados ou mesmo ausentes nas aulas e provas de avaliação de Matemática têm estado os objectivos de natureza afectiva e social, bem como as capacidades ligadas a níveis cognitivos elevados. O ensino da Matemática não está orientado para desenvolver e avaliar os processos e estratégias de raciocínio nem as capacidades necessárias para enfrentar e resolver problemas novos, designadamente os hábitos de consultar, cooperar, comunicar, discutir, investigar ou produzir. Ao mesmo tempo, as actividades escolares são desprovidas de qualquer contexto e não admitem margem para dúvidas, apresentando a Matemática como uma disciplina do tipo "certo ou errado" que não se questiona e em que o aluno precisa de saber muito bem "o que é para fazer" e de ter aprendido previamente "como é que se faz".

Breve incursão no passado recente

Quando, há trinta anos, o ensino mecanicista da Matemática começou a ser substituído pela perspectiva estruturalista da chamada "Matemática Moderna", a situação da disciplina era de acentuada crise. A falta de interesse dos alunos, a quebra de rendimento escolar mesmo nas técnicas matemáticas elementares e, sobretudo, a pobre preparação que o ensino proporcionava para os estudos superiores são factores assinalados em numerosos documentos da época. A forma rápida e quase sem luta como a nova reforma se instalou e generalizou, um pouco por todo o mundo, parece ser um convincente indicador de que essa crise existia e era reconhecida como tal. As exigências da Matemática enquanto ciência – cujos progressos poucos reflexos tinham no ensino não superior – e das forças sociais dominantes principalmente nos países mais desenvolvidos – requerendo rapidamente uma mais rápida e mais eficaz preparação de elites nos domínios científico e tecnológico – terão sido os motores das transformações operadas.

No início dos anos 70 ou mesmo antes, começaram a surgir reacções diversas contra a *nova* Matemática escolar, designadamente nos Estados Unidos e na Inglaterra, que rapidamente se foram espalhando. O movimento de opinião habitualmente designado por *back to basics* responsabilizava a reforma pela incapacidade dos alunos em dominarem as técnicas básicas da aritmética e da álgebra e reclamava um retorno à primazia dessas técnicas que haviam sido, durante muito tempo, os grandes pilares da Matemática escolar. Na década passada, correntes pedagógicas então na moda (em especial a chamada *pedagogia por objectivos*) alimentavam afinal esses pontos de vista conciliando-os com um ensino dogmático e formalista de uma Matemática *muito bem definida* e *pré-estabelecida*, em nome do "rendimento escolar", da "individualização" da aprendizagem e da "objectividade" dos métodos de ensino e de avaliação. Ao mesmo tempo, uma comunidade nascente de professores e investigadores, ligados à nova área da *Educação Matemática*, procurava chamar a atenção para a necessidade de se terem em consideração os vários e complexos factores em jogo e começava a apontar novas direcções. Com efeito, a evolução social, científica e tecnológica colocava desafios inteiramente novos e as velhas fórmulas, como a da "preparação para os estudos superiores", já não resolviam todas as dificuldades.

Em Portugal, quer a entrada da Matemática Moderna quer o seu apogeu e queda começaram mais tarde e terão sido mais moderados e mais lentos. Mas o que sucedeu no nosso país não deixa de ser bastante sugestivo. Da experiência das "turmas piloto" do final dos anos 60 passou-se para a adopção dos novos programas em todos os níveis de escolaridade, face a objectivos totalmente distintos, em condições muito diferentes e perante uma conjuntura social e um ritmo de evolução tecnológica inteiramente novos. Para tornar possível tal operação, a reforma foi despida das suas componentes mais ambiciosas (entre as quais as indicações metodológicas associadas ao projecto inicial) que apontavam para um ambiente de formação científica "avançada" mas que constituíam afinal o aspecto mais inovador e mais interessante dessa reforma nas condições para as quais havia sido projectada.

A partir daí, a lógica adoptada para tentar obstar à progressiva degradação do ensino e da aprendizagem da Matemática foi invariavelmente a de ir retirando dos programas, ou relegando para um plano secundário, tópicos e métodos alegadamente mais *difíceis* ou tradicionalmente considerados *menos essenciais*. Foram-se assim abrindo sucessivos buracos num corpo cuja estrutura se mantinha inalterada e que se reduzia cada vez mais a um esqueleto, o que criava condições para que o dogmatismo e o formalismo, contrariamente ao que poderia supor-se, pudessem afinal ganhar ainda mais terreno. O recrudescimento das tendências mecanicistas coexiste sem problemas com uma visão (e uma prática) dogmática e formalista da Matemática e do seu ensino: as duas perspectivas não só não entram em conflito como, pelo contrário, se complementam. Uma abordagem abstracta e formalista traduz-se de facto junto dos alunos em conhecimento livresco e na execução automática de algoritmos sem que os conceitos sejam verdadeiramente compreendidos (Quadling, 1979).

Se bem que ao professor possa parecer, ilusoriamente, que *ensinar* estruturas matemáticas e suas propriedades é muito diferente de *ensinar* simplesmente técnicas e algoritmos de cálculo, para o aluno pode não haver uma distinção essencial se tivermos em consideração quer a natureza das capacidades cognitivas envolvidas quer a visão implícita da Matemática e do papel de quem aprende esta disciplina quer ainda a aptidão para a compreender e utilizar. Para a grande maioria dos alunos de 12 anos de idade, por exemplo, *saber de cor* que uma aplicação se deve chamar "sobrejectiva" ("subjectiva" como se vê frequentemente escrito) quando não há elementos "livres" no diagrama "onde chegam as setas" não é essencialmente diferente, de qualquer daqueles pontos de vista, de *aprender* uma técnica de cálculo aritmético ou algébrico por repetição mecânica de exercícios iguais. Em ambos os casos, o propósito implícito ou explícito é, pelo menos para o aluno, atingir determinado objectivo comportamental ou, de uma forma talvez mais clara, ser capaz de produzir a resposta previamente *aprendida* para um dado tipo de exercício quando este lhe surgir no teste de avaliação ou, em última análise, no exame final.

Nesta perspectiva, as razões para o fracasso da reforma da Matemática Moderna estão muito mais relacionadas com os aspectos essenciais em que ela é idêntica à antiga tendência mecanicista do que com as diferenças que possam existir entre as duas orientações. Aceitando que a aprendizagem se desenvolve por *transmissão* e *absorção*, e não por *construção*, a reforma da Matemática Moderna continha afinal os germes do seu próprio fracasso. E se, há cerca de quinze anos, ela não escondia já os seus pontos fracos, isso devia-se muito mais à sua incapacidade para responder aos novos e complexos problemas – a explosão escolar, a democratização do ensino, a necessidade de promover uma formação matemática para todos – do que a uma alegada inferioridade face à velha perspectiva mecanicista.

As dificuldades actuais e as lições do passado

Tal como sucedeu noutras ocasiões históricas, precisamos de uma nova revolução na Matemática escolar – como diz Usiskin (1985). No entanto, apesar de se reconhecer que a situação actual exige uma mudança profunda, apesar de serem sistematicamente apontadas novas direcções ao longo dos últimos dez anos – vejam-se por exemplo as recomendações do NCTM (1980) ou do relatório Cockcroft (1982) – a tarefa de renovar a Matemática escolar apresenta-se hoje muito complexa. A principal razão para essa extrema complexidade parece residir no facto de ser imperioso considerar como prioritários factores que sempre foram negligenciados.

Os grandes objectivos e as orientações fundamentais para o ensino da Matemática existem quase sempre de uma forma apenas implícita mas não deixam, por esse facto, de exercer uma enorme influência sobre as práticas dominantes (Niss, 1981). Por outro lado, consoante a época e os países que considerarmos, notamos diferenças na primazia atribuída ou ao valor formativo da aprendizagem da Matemática tomada como um veículo educativo ou à importância utilitária dos conhecimentos matemáticos. No entanto, nas anteriores reformas podem identificar-se pontos comuns, de natureza educativa geral, alguns dos quais correspondem a concepções e práticas profunda mente enraizadas no sistema escolar:

a) Os factores determinantes das reformas têm sido sempre as necessidades da sociedade no seu conjunto (ditadas nomeadamente por razões económicas) ou as necessidades da Matemática enquanto ciência, ou uma combinação das duas, mas nunca as necessidades dos alunos enquanto indivíduos (Brown, 1981).
b) Os objectivos e orientações para o ensino da Matemática têm sido definidos essencialmente em função das necessidades dos estudos posteriores (Krygowvska, 1979) e esta perspectiva tem sido dominante não só nos anos terminais do ensino secundário mas, na verdade, desde o ensino elementar.
c) Os currículos e programas, em todos os níveis de ensino, têm sempre apresentado a Matemática como uma disciplina universal, cuja aprendizagem é independente

de motivações e experiências de natureza social e cultural, não admitindo diversificações que não sejam devidas a diferenças no *suposto* destino dos alunos (cursos superiores ou profissões), e ignorando, mesmo no ensino elementar, os conhecimentos *etnomatemáticos* (D'Ambrosio, 1985) com que a criança chega à escola ou que desenvolve fora dela.

d) As alterações ao nível da estrutura e dos conteúdos dos programas tendem a ser mais facilmente compreendidas e, por outro lado, a perdurar multo mais do que as mudanças ao nível da abordagem matemática ou do estilo de ensino (Usiskln, 1985).

e) O aluno tem sido sempre visto como alguém que recebe os conhecimentos matemáticos – sejam factos, algoritmos, métodos ou estruturas – por processos diversos sempre conduzidos pelo professor (geralmente por *transmissão* oral ou escrita, na melhor das hipóteses *por descoberta guiada*) de modo a *adquirir* esses conhecimentos, e esta *aquisição* é tomada como um pré~requisito para que o aluno possa lidar com situações problemáticas em que eles sejam alegadamente necessários.

f) O sucesso ou insucesso dos alunos tem sido avaliado e medido quase exclusivamente através de provas escritas, individuais, sem consulta e com tempo limitado, as quais têm exercido uma considerável influência nas atitudes e práticas de alunos e professores. Generalizando uma afirmação de Freudenthal (1973) a propósito dos exames, o teste torna-se um objectivo, o que vem para o teste um programa, o ensino da matéria para o teste um método.

Outros aspectos também tradicionalmente ligados às reformas do ensino da Matemática, como o papel selectivo que esta disciplina tem sempre desempenhado no sistema escolar e a própria expectativa dos pais dos alunos e da opinião pública em geral, constituem ainda obstáculos à mudança. Se pensarmos em questões mais específicas referentes à natureza da Matemática poderemos igualmente acrescentar alguns pontos à caracterização anterior, designadamente a respeito do papel atribuído às técnicas de cálculo na Aritmética, na Álgebra e na Análise, ou à perspectiva com que a resolução de problemas e as aplicações da Matemática têm sido encaradas. Estes pontos serão objecto de discussão mais pormenorizada nas secções seguintes do presente texto.**

Referências

Brown, M. (1981). Goals as a reflection of the needs of the learner. Em Robert Morris (Ed.). *Studies in Mathematics Education*, vol. 2. Paris: Unesco.

Cockcroft, W (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.

D'Ambrosio, U. (1985). *Socio-cultural bases for Mathematics Education*. Unicamp, Brasil.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

ICMI (1986). *School Mathematics in the 1990's*. London: Cambridge University Press.

Krigowska, A. (1979). L'enseignement mathématique au niveau post-élémentaire (élèves de 10 a 15 ans). Em *Tendances Nouvelles de l'Enseignement des Mathématiques*, vol. IV. Paris: Unesco.

NCTM (1980). *An agenda for action*. USA, Reston: NCTM.

Niss, M. (1981). Goals as a reflection of the needs of society. Em Robert Morris (Ed.). *Studies in Mathematics Education*, vol. 2. Paris: Unesco.

Quadling, D. (1979). L'enseignement des mathématiques dans le second cycle de l'enseignement secondaire. Em *Tendances Nouvelles de l'Enseignement des Mathématiques*, vol. IV. Paris: Unesco.

Usiskin, Z. (1985). We need another revolution in secondary school mathematics. Em *The secondary school mathematics curriculum*. USA, Reston: NCTM.

---

* In APM (1988), *A renovação do currículo de Matemática*, Lisboa: APM.
A publicação deste artigo na Gazeta de Matemática foi gentilmente autorizada pela APM.

** Este período refere-se aos textos incluídos na obra referida na nota anterior.

A Matemática na Sérvia: entrevista a Aleksandar Mikovič

A Sérvia tem uma área e uma população próximas das de Portugal, respectivamente de 102.350 Km^2 e 10,5 milhões de habitantes. O seu PIB é de 2.200 Euros. Além de vários Institutos Politécnicos, existem na Sérvia quatro Universidades públicas e duas privadas. E ainda o Instituto de Matemática onde só se investiga sem que se dêem aulas. Interessados em saber como vai a Matemática naquele país, entrevistámos o Doutor Aleksandar Mikovič.

O Doutor Mikovič nasceu em Belgrado e licenciou-se em Física Teórica, na Universidade da sua cidade natal, vindo a doutorar-se nos Estados Unidos em 1984. Trabalhou mais tarde em Londres e, de 1994 a 1999, foi Professor no Instituto de Física de Belgrado. Depois veio para Portugal, tendo sido cientista visitante na Universidade do Algarve e no Instituto Superior Técnico. O seu trabalho de investigação incide em Teoria das Cordas, Gravitação Quântica, Geometria não Comutativa e Grupos Quânticos, sendo autor de numerosos trabalhos. Desde 2001 é Professor na Universidade Lusófona em Lisboa.

G.M. *Como se tem sentido em Portugal no aspecto profissional?*

A.M. Nesse aspecto, estou bastante satisfeito, porque a área de Física-Matemática se encontra muito desenvolvida em Portugal. Isso reflecte-se no facto de a larga maioria dos departamentos de Matemática de maior relevância terem grupos de Física-Matemática de dimensões apreciáveis ao nível dos recursos humanos. Todos estes grupos têm financiamento por parte da FCT. Ao nosso grupo da Lusófona, que é constituído por quatro doutorados, foi atribuído financiamento para dois projectos de investigação.

G.M. *Com certeza já sabe como a Matemática é encarada pelos estudantes portugueses e mesmo pelos cidadãos em geral. É considerada um assunto terrivelmente difícil e há mesmo quem pense que está somente ao alcance de alguns privilegiados. Este modo de ver parece que desmotiva muitos jovens ainda antes de começarem a estudar. Como é na Sérvia?*

A.M. Penso que, nessa matéria, há diferenças culturais entre a Sérvia e Portugal. Muito embora a Matemática seja, do mesmo modo, vista como um assunto difícil na Sérvia, ela é, na verdade, considerada como uma peça fundamental na educação das crianças e dos jovens. Assim, por um lado, verifica-se da parte dos pais, uma grande pressão para que os seus filhos tenham sucesso nesta área e, por outro lado, os professores de Matemática e os alunos mais talentosos são muito respeitados pela sociedade sérvia.

G.M. *A Sérvia, mesmo quando integrada na Jugoslávia, tem participado nas Olimpíadas Internacionais de Matemática. Que resultados tem conseguido?*

A.M. Ao longo dos anos, têm sido atribuídas várias medalhas de ouro, prata e bronze a alunos do ensino secundário sérvio. Todos estes alunos frequentaram o Ginásio de Matemática em Belgrado, uma escola secundária de ensino especial para jovens sobredotados fundada nos anos 60.

G.M. *Como se preparam os participantes?*

A.M. A preparação pressupõe duas fases. Na primeira fase, a preparação é individual. O objectivo consiste em seleccionar os elementos que irão compôr a equipa olímpica. Para tal, os concorrentes terão que se submeter a várias competições de nível intermediário, culminando em competições a nível nacional. A preparação é baseada em livros russos e sérvios dedicados a competições de Matemática e é apoiada pela Associação Sérvia de Matemática que promove seminários dedicados a problemas de Matemática próprios deste tipo de competição. Numa competição final, a equipa olímpica é seleccionada entre os vencedores das competições federais. Na segunda fase, a equipa olímpica é preparada colectivamente durante um mês numa estância isolada por uma equipa de professores universitários e alunos universitários com experiência neste tipo de competições. A preparação é feita com base na resolução de problemas de olimpíadas precedentes.

G. M. *Os estudantes sérvios trabalham muito? Há programas especiais para os que gostam de Matemática?*

A.M. Em geral, os estudantes têm que fazer muitos trabalhos de casa. Para os alunos mais interessados, a Associação Sérvia de Matemática organiza aulas suplementares.

G. M. *Que pensa do papel do esforço, da memória e mesmo da repetição no estudo da Matemática?*

A.M. Penso que é a única forma de se aprender Matemática.

G. M. *Sei que tem filhos em escolas portuguesas e que os tem acompanhado. Já fez alguma comparação entre as matérias estudadas em Portugal e no seu país? E no que respeita a métodos de trabalho?*

A.M. Eu tinha muita curiosidade em conhecer os livros de Matemática das minhas filhas, especialmente devido à recente campanha dos *media* em relação aos maus resultados dos estudantes portugueses em Matemática. Constatei que o programa português é basicamente o mesmo que o sérvio. No entanto, há diferenças nos métodos de ensino. Por um lado, os professores sérvios fornecem muito mais exemplos para cada matéria ensinada e, por outro, exigem muito mais trabalhos de casa aos alunos.

G.M. *A Sérvia tem grandes tradições matemáticas? Pode citar alguns matemáticos sérvios do passado e o que fizeram?*

A.M. A Sérvia não tem uma grande tradição na Matemática, especialmente devido ao domínio turco que se estendeu do século XV até meados do século XIX. Apesar de tudo, no século XX apareceram vários matemáticos distintos, nomeadamente Ivo Karamata, com contribuições relevantes na área das sequências Tauberianas e Djuro Kurepa que inventou a árvore de Kurepa na Lógica Matemática.


Belgrado

G. M. *Portugal é conhecido no seu país? Por exemplo, há matemáticos portugueses conhecidos? E outros aspectos da cultura portuguesa, por exemplo, escritores, poetas, navegadores, jogadores de futebol?*

A.M. Para além de jogadores de futebol, como Figo, é conhecido o escritor Saramago e o "Fado". Quanto a figuras históricas, as mais conhecidas são Fernão de Magalhães e Vasco da Gama.

G. M. *Os seus filhos frequentam uma escola portuguesa e, tanto quanto sei, neste momento estão em Belgrado de férias. Provavelmente, quando regressarem saberão mais da cultura portuguesa, se calhar até da língua, do que da Sérvia. Com vê isso?*

A.M. Vejo com naturalidade. Normalmente, os filhos de imigrantes são mais influenciados pela cultura do país de acolhimento. No entanto, eu vejo esta situação como uma oportunidade positiva de as minhas filhas conhecerem com profundidade duas culturas diferentes. Elas irão naturalmente absorver a cultura portuguesa, porque vivem em Portugal, e a cultura sérvia através dos pais e das suas viagens à Sérvia.

PARÁBOLAS E PARABÓLICAS . Nuno Crato

O Trânsito de Vénus

Dia 8 de Junho de 2004 observaremos uma passagem de Vénus em frente ao Sol, aquilo a que os astrónomos chamam *trânsito*. Durante algumas horas, ver-se-á um pequeno ponto negro atravessar o disco da nossa estrela. É um fenómeno a que já se tem chamado eclipse, mas impropriamente, pois a passagem do planeta nem obscurece significativamente o Sol nem é visível a olho nu. Como o diâmetro aparente de Vénus é apenas de 58 segundos de arco, portanto cerca de 33 vezes menor que o do Sol, para ver Vénus é necessário olhar cuidadosamente para o disco solar com óculos especiais ou com binóculos e telescópios munidos de filtros apropriados.

O fenómeno não é espectacular, mas é curioso. O que o transforma num evento especial é a sua raridade. Até hoje apenas foram observados seis trânsitos de Vénus, o último dos quais em Dezembro de 1882. Não há nenhum ser vivo sobre o nosso planeta que alguma vez tenha visto Vénus atravessar-se em frente do Sol. E quem não tenha a sorte de o ver em 2004 terá de deslocar-se ao Oriente para o observar em 2012. Depois disso, o planeta só voltará a interpor-se entre nós e o Sol em 2117. Demasiado tarde para todos nós.

Trânsitos de planetas em frente ao Sol podem observar-se para Vénus e para Mercúrio, e só para estes, pois os restantes planetas nunca se interpõem entre nós e o Sol.

O primeiro astrónomo a prever um destes fenómenos foi Johannes Kepler (1571–1630), que nas suas *Tabelas Rudolfinas* de 1627 anunciou um trânsito de Mercúrio em 7 de Novembro de 1631 e um de Vénus em 6 de Dezembro do mesmo ano. Este último, contudo, não seria visível da Europa, pois ocorreria a horas em que o Sol estava abaixo do horizonte para observadores neste continente.

Antes de Kepler e da sua descoberta das órbitas elípticas dos planetas, não se tinha conseguido atingir precisão suficiente no cálculo das posições dos astros para se poder fazer tais previsões. O grande astrónomo polaco morreu em 1630, mas o francês Pierre Gassendi (1592–1655) seguiu as suas indicações e observou a passagem de um pequeno ponto em frente ao Sol, apenas com algumas horas de diferença em relação às previsões de Kepler. Tratava-se de Mercúrio, e Gassendi tornar-se-ia assim no primeiro ser humano a registar um trânsito planetário.

Passados poucos anos, um jovem inglês com especial talento para a matemática, de nome Jeremiah Horrocks (1619?–1641), refez os cálculos de Kepler, aperfeiçoando as estimativas. Horrocks tomou em consideração as dimensões do nosso planeta, coisa que o astrónomo polaco não tinha feito pois, numa primeira abordagem, bastava considerar a Terra como um ponto material. Horrocks descobriu assim que, em 4 de Dezembro de 1639, Vénus passaria de novo em frente do disco solar. Escreveu a William Crabtree (1610–1644), um jovem amigo com idêntico interesse pela matemática. No dia previsto, Horrocks e Crabtree testemunharam a passagem do planeta. Foram certamente as duas primeiras pessoas a observar o pequeno ponto escuro do planeta Vénus passar pelo Sol.

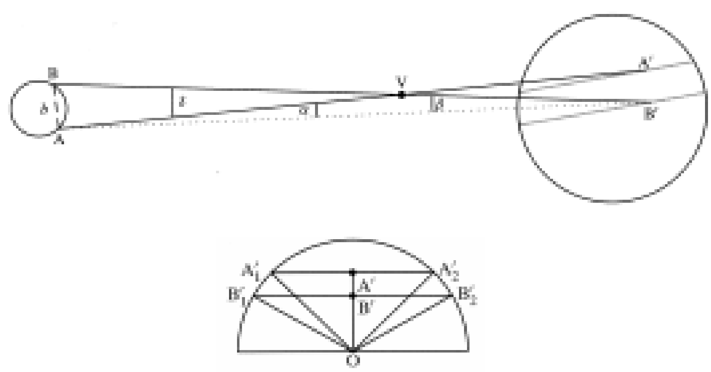
Passaram-se os anos e Edmond Halley (1656–1742) tem uma ideia genial: os trânsitos de Vénus poderiam ser aproveitados para medir a distância da Terra ao Sol, que na altura se conhecia com grande imprecisão. A sua ideia baseava-se numa engenhosa medida de paralaxe, ou seja, de desfasamento da posição do astro quando observado de locais diferentes. Mercúrio também poderia ser aproveitado para o mesmo efeito, mas como se encontrava muito mais perto do Sol, usá-lo era mais difícil.

Foi preciso esperar mais de um século pelo próximo trânsito, que teve lugar em 1761. Na altura, mais de uma centena de cientistas de todo o mundo estavam mais preparados para tomar partido do evento. O esforço internacional foi centralizado em Paris pelo astrónomo Joseph-Nicolas Delisle (1688–1768). Em Portugal, Teodoro de Almeida e Miguel António Ciera fazem e registam observações.

Esta primeiro esforço resultou numa medida de paralaxe de 8,43'', bastante perto dos 8,78'' que hoje se estimam. Oito anos depois, quando se registou o trânsito de 1769, os astrónomos ampliaram o esforço internacional iniciado por Delisle. O célebre Capitão Cook fez nessa altura a sua primeira grande viagem, precisamente para observar o trânsito do Taiti, num local ainda hoje conhecido como Ponto Vénus. Como resultado obteve-se uma medida ainda mais exacta: 8,80''.

Desde esse século heróico na história da astronomia, registaram-se dois outros trânsitos de Vénus, em 1874 e 1882, aperfeiçoando-se a medida de paralaxe para 8,79''. Entretanto desenvolveram-se outros métodos de medida, nomeadamente aproveitando a oposição de Marte. A astronomia de posição obteve resultados tão precisos que o próximo

A medida de paralaxe



trânsito de Vénus não oferece já uma oportunidade para medir o sistema solar. Mas será certamente uma oportunidade histórica que nenhum de nós quererá perder.

Em astronomia, define-se *paralaxe do Sol* como o desfasamento de posição angular desse astro quando observado sobre a Terra em dois pontos que distam entre si de um raio terrestre. Alternativamente, pode ser visto como metade do diâmetro angular da Terra se observada do Sol. Conhecendo a paralaxe solar e o raio terrestre, é possível calcular a distância da Terra ao Sol por simples triangulação.

A ideia de Halley para medir a paralaxe através de um trânsito pode ser visualizada através do gráfico que apresentamos. Acima e à esquerda aparece a Terra; à direita, o Sol. A posição de Vénus, V, observada de dois pontos diferentes, A e B, projecta-se sobre o disco solar em dois pontos diferentes, A' e B'. Ao longo do trânsito, esses dois pontos descrevem dois segmentos de recta, de A'_1 a A'_2 e de B'_1 a B'_2, conforme se vê no semicírculo desenhado mais abaixo. O segredo do método está no conhecimento da razão entre a distância da Terra ao Sol, d_{TS}, e da Terra a Vénus, d_{TV}, ou de Vénus ao Sol, d_{VS}, razão que se pode obter através da Terceira Lei de Kepler (quadrados dos períodos orbitais proporcionais aos cubos das distâncias).

Se a distância entre os pontos A e B sobre a Terra for de um raio terrestre, o ângulo β será precisamente a paralaxe solar, como atrás definida. De qualquer maneira, basta conhecer a distância de A a B e o ângulo β para calcular a distância entre os dois astros, d_{TS}. O método de cálculo que Halley propôs é tão simples quanto engenhoso.

Como os ângulos são muito pequenos, $\sin\theta \approx \theta$, na sua medida em radianos. Assumindo essa igualdade aproximada, vem $d_{TS} = b / \beta$ e $d_{TV} = b / \delta$, de onde $\beta = d_{TV}\,\delta / d_{TS}$. Por outro lado, $\alpha = A'B' / d_{TS} = d_{VS}\,\delta / d_{TS}$, de onde $\beta = \alpha\, d_{TV} / d_{VS}$. Então, usando esta expressão para β na primeira equação de d_{TS}, vem $d_{TS} = (b / \alpha)(d_{VS} / d_{TV})$. Estimando d_{VS} / d_{TV} pela Terceira Lei de Kepler, vem $d_{TS} = 2.611\, b / \alpha$.

Inquérito sobre a avaliação pedagógica dos professores

A proposta de lei de autonomia das instituições de ensino superior foi aprovada em Conselho de Ministros e vai ser discutida na Assembleia da República. Dela consta que os professores podem ser avaliados pelos estudantes quanto às sua qualidades pedagógicas. Segundo o Ministro Pedro Lynce*, é a primeira vez que essa possibilidade fica na lei e diz ainda Lynce que deverá haver um reforço da avaliação pedagógica dos professores para efeito da sua progressão na carreira e que nos últimos tempos tem havido uma clara sobrevalorização da capacidade científica em detrimento da capacidade pedagógica. Recorde-se que o Ministro já manifestou a intenção de rever o Estatuto da Carreira Docente.

A respeito deste tema a Gazeta de Matemática foi ouvir alguns professores a quem pôs as seguintes questões:

Questão 1: *Que pensa da inclusão na lei da possibilidade de avaliação pedagógica dos professores feita pelos estudantes?*
Questão 2: *O resultado dessa avaliação deve contar para a promoção do professor na sua carreira?*
Questão 3: *Os júris que decidem a promoção do professor devem incluir estudantes?*
Questão 4: *Que método sugere para avaliar as qualidades pedagógicas dos professores dos diversos graus de ensino?*
Questão 5: *Concorda com o Ministro quando fala da sobrevalorização da capacidade científica em detrimento da pedagógica?*

As respostas obtidas são agora apresentadas, por ordem alfabética dos nomes dos autores.

Carla Correia,
Escola Secundária de Pinheiro e Rosa, Faro

Questão 1: Na minha modesta opinião (sou professora – estagiária, logo não tenho qualquer experiência sobre o assunto) considero que o professor deve ser avaliado por quem melhor conhece o seu trabalho. Ora, essas pessoas são obviamente aquelas que lidam com ele diariamente: os alunos, os colegas, os órgãos de gestão da escola, ...

Os estudantes são capazes de descrever com bastante objectividade e realismo a forma como cada professor desempenha o seu papel, afinal é do melhor ou pior desempenho do docente que depende também o do discente. No entanto, a opinião do estudante pode ser bastante condicionada, pelo receio de represálias, pela pouca receptividade a determinada disciplina, pelo próprio "implicar com o professor", ou até por aquela nota que achou injusta...

Questão 2: O resultado da opinião dos estudantes deve, sem dúvida, ser tido em conta para a promoção do professor na sua carreira, mas não ser constituído como único meio de avaliação.

Questão 3: Por todos os motivos que referi anteriormente, os estudantes devem fazer parte dos júris, essa é uma forma de o próprio professor ter uma preocupação acrescida na

* Pedro Lynce foi substituído no Ministério depois desta nota ser escrita.

preparação das suas aulas. Contudo, realço que sou professora – estagiária e, por isso, a minha experiência sobre a avaliação e promoção dos professores é nula.

Questão 4: Sinto-me realmente desconfortável ao dar resposta a esta questão, dado que desconheço completamente os métodos para avaliação de professores utilizados actualmente, bem como os seus resultados. Considero, no entanto, que o método a utilizar deve variar consoante os diferentes graus de ensino, pois, cada qual tem os seus objectivos. Parece-me perfeitamente ridículo avaliar um docente do ensino superior utilizando os mesmos métodos que são utilizados para avaliar um docente do ensino básico.

Questão 5: Sim, concordo que, até certo ponto, existe uma sobrevalorização da capacidade científica, ficando quase sempre para segundo plano a capacidade pedagógica, o que não me parece ser razoável. De que serve um professor ter conhecimentos científicos avançadíssimos se depois não consegue transmitir aos alunos os conhecimentos mais básicos?

Apesar de considerar muito importante a capacidade científica, acho que um professor deve ter uma destreza pedagógica suficiente para conseguir alcançar a maior parte dos seus alunos. Para mim, o melhor professor não é certamente aquele que sabe muito, mas aquele que consegue transmitir muito bem aquilo que sabe.

João Filipe Queiró,
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Questão 1: Muitas instituições de ensino superior realizam inquéritos aos estudantes sobre o funcionamento das disciplinas, pelo que é de supor que a actual legislação não os proíbe. Não parece mal que existam tais inquéritos, realizados com equilíbrio e sensatez, devendo ser usados pelas instituições como instrumento de gestão e melhoria das coisas. A "publicidade" de que se ouve falar quanto aos resultados dos inquéritos parece ser concessão à demagogia.

Questão 2: A palavra "contar" sugere algum tipo de fórmula a aplicar pelos júris dos concursos universitários. Ora não existe nem deve existir nenhuma fórmula nesse contexto, para nenhuma das dimensões da actividade de um professor universitário. O actual sistema de provas e concursos (suponho que sem paralelo, na sua exigência, em nenhuma outra carreira em Portugal) contempla já, de várias formas, a dimensão do ensino. Para além disto – que não é pouco, e deve continuar a ser levado muito a sério – toda a informação existente sobre a actividade profissional dos candidatos aos concursos pode e deve ser tomada em consideração pelos membros dos júris.

Questão 3: Ouço dizer que o país anda deprimido. Ainda assim, não convém abusar do humor como terapêutica.

Questão 4: Pronuncio-me apenas sobre o ensino superior. A este nível, o papel dos estudantes e dos professores é diferente do que se observa no ensino básico e secundário. A palavra "pedagogia" remete etimologicamente para o mundo das crianças. O estudante do ensino superior é um adulto que é, deve ser, o primeiro responsável pelo seu estudo e pela sua aprendizagem. Isto não desresponsabiliza as instituições nem os docentes, que devem organizar os trabalhos de forma a que essa autonomia dos estudantes se possa exercer nas melhores condições, num quadro de respeito pelos estudantes como adultos que procuram uma formação superior. O primeiro dever de uma instituição de ensino superior é garantir o nível científico dos seus docentes, e em seguida a sua dedicação à escola, com o objectivo já referido. A dedicação à escola inclui um alto grau de profissionalismo, uma cultura de exigência, de organização e de respeito pelos estudantes. A manutenção dessa cultura é responsabilidade das instituições, que são também elas avaliadas externamente sobre o cumprimento da sua missão.

Questão 5: Não conheço essas declarações. Os professores universitários em geral têm preocupações de eficácia da sua actividade como docentes. Circula muita informação e discussão, a nível nacional e internacional, sobre o contexto em que essa actividade se desenvolve. Um professor universitário consciente não se desinteressa de nenhuma das dimensões da sua actividade. Por outro lado, é um *cliché* lamentável pensar que há oposição entre a competência científica de um professor universitário e a sua competência como docente. Isto dito, considero muito negativo qualquer discurso, ministerial ou não, que desvalorize a competência científica dos professores universitários.

José Manuel Pais Martins,
Escola Secundária Felismina Alcântara, Mangualde

Questão 1: Dependerá da forma concreta encontrada. Não me repugna de forma alguma a possibilidade de os alunos manifestarem a sua opinião sobre os professores. No entanto, isto pode trazer efeitos perversos, podendo alguns professores sentir-se reféns dos alunos e dos seus resultados contribuindo assim para uma certa cultura de facilidade que por motivos diversos, tem vindo a aumentar. Existem já neste momento em muitos estabelecimentos de ensino pressões directas e indirectas (até pela diminuição do número de alunos, a "caça" ao aluno), que conduzem a alguma diminuição da qualidade do processo de ensino. Não se devem introduzir novas pressões nesse sentido. Isso não invalida que devam ser encontradas formas que possibilitem o "feedback" dos alunos às condições de aprendizagem. Os alunos devem avaliar a disciplina e o processo de aprendizagem, mas os seus resultados devem ser fundamentalmente um instrumento de trabalho para o professor e para os órgãos de gestão.

Questão 2: O ensino superior não pode esquecer que o tipo de alunos que recebe, à semelhança do que aconteceu no passado com o ensino secundário, é diferente. De um carácter "elitista" que possuia, tem vindo a transformar-se num ensino massificado. Logo, as condições que devem ser dadas aos alunos têm que ser diferentes. As preocupações pedagógicas, o conhecimento das teorias de ensino aprendizagem e a criação de condições propícias à aprendizagem, não podem ser vistas pelos docentes como algo de somenos importância. São professores, logo devem conhecer e deve fazer parte do seu processo de investigação o estudo da componente pedagógica. Não bastam os conhecimentos científicos. Mas, sem descambar para o excesso do "folclore" pedagógico que infelizmente invadiu outros níveis de ensino. As características do ensino superior como ensino de referência devem manter-se. Assim sendo, para a promoção do professor a sua capacidade pedagógica deve contar. No entanto, essa capacidade pedagógica não pode ser aferida unicamente pela opinião dos alunos, mas esta deve estar incluída num processo transparente de avaliação de professores.

Questão 3: Tendo esse júri dados, devidamente tratados e enquadrados, dos resultados obtidos e da opinião dos estudantes, não vejo necessidade de incluir alunos. Os alunos têm outras preocupações que não se coadunam com o rigor e a especificidade deste processo.

Questão 4:

1- A obrigatoriedade de, no seu processo normal de investigação e formação, o professor frequentar módulos ou cursos com disciplinas de natureza pedagógica.

2- Um processo de recolha de informação durante e após a conclusão da leccionação da disciplina. Processo que se pode traduzir por inquéritos finais de avaliação, mas sobretudo por um sistema informatizado e instantâneo de recolha de informação.

3- Um contacto permanente entre órgãos de gestão, professores e organizações de estudantes.

4- A criação de verdadeiras equipas disciplinares de professores que trabalhem em conjunto e que assim consigam encontrar estratégias que melhorem os resultados e o processo de ensino aprendizagem.

No entanto, saliento de novo que, se por parte do professor deva existir a abertura de espírito para aceitar críticas e capacidade de alteração de procedimentos se necessário, em caso algum esta recolha de informação se pode traduzir numa pressão sobre o docente. Este trabalho deve ser feito com o docente e não contra o docente.

Questão 5: A questão não tem uma resposta única. Em termos gerais, e correndo algum risco nesta generalização, é verdade que as grandes faculdades clássicas valorizam a capacidade científica em detrimento da pedagógica. (Embora não se possa estabelecer aqui uma oposição directa entre as duas. Sem capacidade científica não se tem capacidade pedagógica). Em contrapartida outros estabelecimentos de ensino, talvez por valorizarem em demasia uma pseudo-capacidade pedagógica e por darem demasiada importância a conteúdos não científicos no percurso de aprendizagem dos alunos, conduziram a um claro facilitismo do seu processo de aprendizagem. E aqui não posso deixar de referir que muitas escolas de formação de professores têm de facto formado gerações de docentes dos ensinos básico e secundário com conhecimentos científicos progressivamente inferiores ao longo dos anos.

Luís Manuel da Silva Correia,
Escola Secundária António Aleixo, Portimão

Questão 1: A nível do Ensino Superior penso que a avaliação pedagógica dos professores poderá, em parte, ser feita pelos estudantes, uma vez que são eles os observadores mais directos dessa prática pedagógica.

Questão 2: Sim, embora com peso relativo. Este aspecto poderá funcionar como um estímulo para que os professores modernizem as metodologias utilizadas.

Questão 3: Não. Penso que os júris deverão ser constituídos unicamente por professores que deverão ter em conta a avaliação realizada pelos alunos.

Questão 4: Observação directa e resultados obtidos pelos alunos (os resultados obtidos deverão ter em conta os resultados da avaliação realizada pelos professores e os resultados obtidos pelos alunos em exames nacionais).

Questão 5: Concordo. A nível do Ensino Superior constata-se uma sobreavaliação da capacidade científica em detrimento da pedagógica na esmagadora maioria dos cursos/disciplinas.

Marília Pires,
Universidade do Algarve

Questão 1: Essa possibilidade já existe actualmente na Universidade do Algarve. Todos os anos os alunos são convidados a responder a inquéritos sobre a qualidade do ensino ministrado o que inclui, necessariamente, o desempenho pedagógico dos docentes. Infelizmente a adesão dos estudantes a este processo não é muito significativa, sendo comum haver disciplinas com menos de 20% de inquéritos preenchidos.

Questão 2: Os júris dos concursos para associado e catedrático devem também ter em conta o que os alunos pensam do docente na sua avaliação dos candidatos. Um bom cientista que não sabe comunicar não deveria ser professor, pelo menos nos cursos de formação inicial. É claro que não se deve ter a tentação de sobrevalorizar a componente pedagógica de tal modo que alguém que não faz investigação seja preferido só porque dá "boas" aulas.

Questão 3: Decididamente não. Uma coisa é a opinião dos estudantes ser tida em conta, outra é incluir estudantes nesses júris. Até porque há factores de ordem científica a ter em conta que os estudantes não têm preparação para julgar.

Questão 4: Não tenho qualquer receita. Penso que o professor, seja qual for o grau, deve possuir uma sólida formação científica e gostar de ensinar. A entrada de estudantes em cursos de formação de professores deveria estar sujeita a testes de vocação profissional.

Muitos docentes do básico e secundário só são docentes por acidente de percurso e muitos docentes do superior consideram a docência a factura que têm a pagar para poderem fazer investigação.

A nível do básico e secundário penso que deveriam ser reintroduzidos os exames nacionais de fim de ciclo. As diferenças entre as classificações obtidas pelos alunos nesses exames e as obtidas durante o ano poderiam ser um dos factores de avaliação do desempenho do docente.

Questão 5: Concordo a 100%. Basta ler o actual ECDU para verificar que o que se preconiza como base para concursos é a produção científica, esquecendo completamente as outras vertentes da vida do docente universitário. É claro que não se pode cair no extremo oposto de proporcionar uma óptima formação pedagógica sobre quase nada de ciência (como alguns preconizam) formando óptimos professores de bolas de sabão.

A Comunicação Social e a Seriação das Escolas

Graciano de Oliveira

Há diferença entre o que as coisas são e o que as pessoas pensam que as coisas são. O que as pessoas pensam que é, mesmo que não seja, é muito importante porque leva as pessoas a agirem de um certo modo.

A comunicação social tem muita importância no que as pessoas pensam que as coisas são. Esta afirmação é mais ou menos óbvia. Se algo é divulgado e tido como verdadeiro, muitos acreditam e os que não acreditam (mesmo que muito numerosos) facilmente se convencem de que são parte duma pequeníssima minoria que não acredita. O que tem efeitos práticos.

É, portanto, de grande importância que a comunicação social trate os assuntos com rigor. Porém, o rigor é frequentemente incompatível com o espectáculo e a pressa. A título ilustrativo, veja-se a confusão que recentemente se fez entre antraz e carbúnculo que levou à invenção de uma nova palavra (anthrax) só porque os homens da comunicação social não têm dicionários à mão. Para não falar do trato que dão ao verbo "haver" só porque não têm uma gramática à mão.

Bem, agora interessa-nos mais o que se passou com a seriação (mais modernamente (?), "ranking") das Escolas.

Os matemáticos estão habituados a lidar com ordens de vários tipos, desde totais a parciais e todos sabem que há conjuntos que não são ordenáveis de maneira "satisfatória". Num certo sentido, o corpo dos números complexos não pode ordenar-se de maneira "satisfatória" mas pode ordenar-se. Exemplo: por definição $a+bi \leq a'+b'i$ se e só se $a<a'$ ou ($a=a'$ e $b \leq b'$). É uma ordem mas, para certos fins, não é satisfatória e não é preciso saber muita Álgebra para o perceber. O conjunto das *n* Escolas existentes em Portugal pode ordenar-se de *n*! maneiras distintas, o problema reside em saber qual delas interessa e porquê. Podem ordenar-se por ordem alfabética ou por sorteio. Queríamos que em primeiro lugar figurasse a "melhor" escola, em segundo a "melhor" das restantes, etc. O problema está em saber o que é a "melhor" e, depois de definido este conceito, qual o algoritmo a seguir.

É claro que só a primeira questão – definir "melhor" – dá pano para mangas.

Bem, o Ministério da Educação decidiu encomendar um estudo e quem executou a encomenda teve de adoptar uma certa resposta às perguntas acima.

Primeira pergunta: que legitimidade tem o Ministério da Educação para decidir encomendar ou não encomendar? Ao contrário do que às vezes se diz, não encomendar também é uma decisão. É perfeitamente aceitável que seja o Ministério a decidir, uma vez que o governo, goste-se ou não dele, resultou de eleições.

Quanto ao "ranking". O Ministério podia publicar os dados sem ordenação (como no início do corrente ano lectivo), limitando-se a fornecer elementos para que os cidadãos tirassem as suas conclusões. Preferiu ordenar, e isso tem importância porque uma ordenação com o beneplácito do Ministério assume aos olhos de muito cidadão uma certa credibilidade. A Escola que ficou em primeiro lugar vai comportar-se e sentir-se de um certo modo e a que ficou em último também tirará, decerto, as suas conclusões. O modo como os cidadãos encaram essas escolas também será alterado. Houve quem dissesse (e se calhar seria melhor que estivesse calado) que a publicação da seriação foi um acontecimento histórico.

A comunicação social tratou o acontecimento como se histórico fosse e como se as conclusões fossem definitivas.

A priori parece impossível uma ordenação linear de maneira satisfatória.

A Gazeta de Matemática resolveu actuar com mais rigor do que a comunicação social em geral e pediu a opinião ao Professor Dinis Pestana que foi publicada no volume 144. A opinião do Professor (que é de peso em todos os sentidos) leva a admitir que todo o barulho feito pela comunicação social foi mesmo só barulho. Obviamente o Professor Pestana pode estar enganado mas, em qualquer caso, isso devia ser discutido. Depois de ler o artigo de Dinis Pestana pode pensar-se se não teria sido preferível ordenar as Escolas por ordem alfabética ou à sorte para permitir variações de ano para ano o que traria mais emoção ao campeonato. Dá que pensar. E é para o leitor pensar que damos conta das nossas diligências.

Bem, o artigo do Professor Pestana é de tal modo impressionante que a Gazeta resolveu chamar para ele a atenção da comunicação social. Para isso enviou a carta abaixo a directores de jornais, canais de TV, estações de rádio, etc.

Que saibamos, nenhum lhe deu a menor importância, o assunto foi pura e simplesmente ignorado. A mesma comunicação social que fez com o "ranking" um grande alarido ignorou um estudo sério.

Compreende-se. Suponha o leitor que lhe competia escolher as notícias para um canal de TV. Admitindo que o seu objectivo era evitar a falência (um objectivo nobre, portanto), entre a notícia que propus e um desastre, que escolhia?

Eis a carta:

Lisboa, 7 de Janeiro de 2003

Exmo Senhor Director:

Assunto: Seriação das Escolas

Recentemente a comunicação social deu grande ênfase a um estudo que o Ministério da Educação encomendou à Universidade Nova de Lisboa para seriação das Escolas Secundárias. Esse estudo originou grande polémica e se muitos o puseram em dúvida, ficou, por outro lado, a pairar a ideia de ser quase indiscutível uma vez que fazia uso da Estatística a qual se fundamenta na Matemática, a Ciência Exacta por excelência. Assim, mais ou menos vagamente, ficou no ar a dúvida: os resultados obtidos serão, no mínimo, tão exactos como certas leis da Física, ou, não o sendo, darão uma ideia aproximada do que se passa nas Escolas ou ainda, poder-se-á dizer que não significam nada e o lugar que uma Escola ocupou na escala é arbitrário, como se resultasse de um sorteio, e deve ser esquecido?

A Gazeta de Matemática convidou um matemático, especialista de renome internacional em Estatística, o Professor Dinis Pestana, do Departamento de Estatística e Investigação Operacional da Universidade de Lisboa, para escrever um artigo sobre este assunto.

A opinião do Professor Dinis Pestana é discutível como qualquer outra mas é útil estudá-la. A sua compreensão na íntegra necessita de alguns conhecimentos de Estatística embora contenha partes que não precisam de tais conhecimentos. Intitula-se *Apologia da Estatística (A Pretexto da Seriação das Escolas Secundárias)* e sairá no volume 144 (Janeiro de 2003) da Gazeta de Matemática, merecendo chegar ao conhecimento de todos os interessados em manter uma opinião bem fundamentada.

Diz o Professor Dinis Pestana, referindo-se ao estudo encomendado pelo Ministério, que as conclusões dificilmente poderiam gerar consenso e que, no seu entender, o critério de seriação das Escolas é inadequado bem como os modelos utilizados; acrescenta que a seriação padece de confundimento e questiona os modelos de regressão múltipla usados, uma vez que a percentagem da variância que fica por explicar é sempre superior a 75%, chegando a exceder 98% — e para que servirá um modelo em que uma percentagem tão elevada da informação fica por explicar?

Segundo Dinis Pestana, "... em Ciências Humanas, a tentação de propor modelos simples para fenómenos complexos tem levado a polémicas ..." e " As Ciências Exactas têm a tendência a ser mais prudentes, e a incorrer menos no fascínio que as Ciências Humanas parecem ter pelos números ..." E cita, como exemplo, um raciocínio inspirado num conto de Graham Greene, que conclui que se 100% das pessoas que morrem com um cancro praticaram relações sexuais ou são filhas de pessoas que praticaram relações sexuais, então aquela prática explica a preocupante prevalência da doença. Poderia também citar-se a afirmação, muito em voga, de que se uma altíssima percentagem de condutores vítimas de acidentes de viação tem muito álcool no sangue, então o álcool é perigoso para a condução. O raciocínio é completamente errado (note-se que se podia substituir álcool no sangue por ter os cabelos escuros) o que obviamente também não significa que a ingestão de álcool não tenha influência nos acidentes.

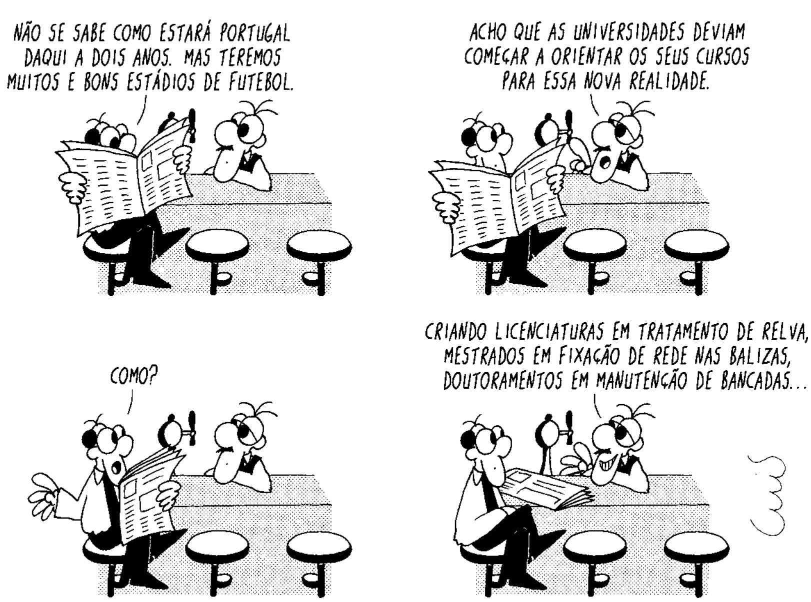
Várias personalidades, de matemáticos a políticos, como Nuno Crato e Marcelo Rebelo de Sousa já se pronunciaram sobre o estudo do Ministério da Educação mas a controvérsia subsiste. A profundidade e o ponto de vista adoptados no estudo de Dinis Pestana tornam este estudo imprescindível para um boa interpretação dos resultados apresentados pelo Ministério da Educação.

Tendo em conta o interesse estratégico das questões do ensino, permito-me chamar a atenção de V. Exa para o assunto.

O Director da Gazeta de Matemática
(Professor Doutor Graciano de Oliveira)

Nota. O texto acima foi escrito a propósito do que aconteceu no ano lectivo 2002/2003. Estava o texto pronto quando se soube que o Ministério alterou o modo de proceder e, no ano lectivo 2003/2004, preferiu limitar-se a publicar os dados, deixando as conclusões a cargo dos cidadãos.

Bartoon



Luís Afonso, *Público, 19-10-*2002
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)

A Vida e o Trabalho de Sophie Germain

Natascha Hall, Mary Jones e Gareth Jones
Mathematics Department, University of Southampton, United Kingdom

Uma das maiores dificuldades em persuadir uma mulher a tornar-se matemática é a falta de exemplos: a Matemática é apresentada aos estudantes como uma sequência de proezas conseguidas quase exclusivamente por homens e é necessária muita confiança para uma jovem estudante com talento se imaginar a fazer contribuições significativas para o seu desenvolvimento. É, pois, importante chamar a atenção para aquelas mulheres como Hypatia, Agnesi, Kovalevskaya e Noether cujos nomes se tornaram parte da História da Matemática e mostrar como, em muitos casos, precisaram de vencer fortes obstáculos para se tornarem matemáticas de sucesso.

Um exemplo clássico é a vida de Sophie Germain que, apesar da resistência familiar inicial e duma sociedade estruturada de modo a ser quase impossível a uma mulher manter uma carreira, fez, mesmo assim, contribuições fundamentais tanto em Matemática Pura como Aplicada.

Nasceu em Paris a 1 de Abril de 1776 e, através do seu pai, um negociante de seda rico e deputado eleito, teve contacto, desde cedo, com a filosofia e a política. Aos 13 anos a Revolução Francesa começara e as ruas de Paris não eram o lugar para uma jovem. Obrigada a estar em casa, meteu-se na biblioteca do pai aprendendo por si Latim e Grego para ler os livros mais antigos. Um livro que a fascinava, em especial, era *Essais Historiques sur la Mathématique* de Montucla, principalmente a secção onde se descrevia como Arquimedes fora morto por um soldado romano invasor, por estar demasiado absorvido por um diagrama geométrico para obedecer às ordens do soldado. Obviamente, pensava, tem de haver alguma coisa especial num assunto que pode levar a uma tal obsessão fatal.

Nesse tempo, em França, de uma mulher instruída esperava-se que falasse educadamente sobre ideias filosóficas, científicas e matemáticas, mas não era considerada capaz de perceber aqueles assuntos com profundidade. Esta atitude condescendente é ilustrada por *Sir Isaac Newton's Philosophy Explained for the Use of the Ladies* de Algarotti, no qual uma jovem aristocrata e o seu preceptor discutem a lei do inverso do quadrado comparando a diminuição do amor com o aumentar da separação. No início, a família de Sophie Germain desencorajou o seu entusiasmo pela Matemática, embaraçoso e nada próprio de uma senhora, e ela foi forçada a estudar à noite, em segredo, lendo à luz de velas roubadas e embrulhada em cobertores para se proteger do frio que gelava os tinteiros. Perante tal determinação, a família tornou-se menos rígida e, na verdade, o seu pai apoiou-a financeiramente durante o resto da vida.

Em 1794 a *École Polytechnique* abriu em Paris. Claro que não aceitava mulheres e, assim, Sophie Germain aproveitou os seus métodos de ensino, sob outros aspectos "abertos", assumindo a identidade de um antigo aluno, Antoine-Auguste Le Blanc, para obter cópias das notas das aulas e submeter trabalho para ser classificado. Não tardou que Lagrange, que ensinava Análise, notasse, surpreendido, uma melhoria espectacular no trabalho, habitualmente vulgar, de Le Blanc e chamasse o estudante. Mostrando uma falta de preconceitos extraordinária para a época, ficou não só agradavelmente surpreendido ao descobrir a sua identidade como se tornou seu amigo e conselheiro académico. Deu-lhe a conhecer áreas específicas da Matemática, Teoria de Números em particular, tendo ela lido os trabalhos de Fermat, Legendre e, mais tarde, do novo génio Gauss. Contudo, apesar deste encorajamento, tanto as convenções sociais como a sua natureza reservada impediram-na de ter a instrução matemática completa que ela claramente desejava. Para um jovem ambicioso de uma família pobre, como Poisson, havia o novo sistema de educação de Napoleão e os salões intelectuais ter-se-iam aberto a uma mulher com antecedentes mais aristocráticos mas, para a filha de um negociante, essas portas estavam fechadas.

Um problema que ela estudou foi o último Teorema de Fermat (UTF), a sua famosa afirmação de que a equação $x^n + y^n = z^n$, $n>2$, não tem soluções nos inteiros positivos, escrita sem demonstração na margem do seu exemplar da *Arithmetica* de Diophantus por volta de 1630. Prová-la foi um dos maiores desafios em Matemática. Tendo Fermat resolvido o caso $n = 4$, bastava prová-la nos casos em que n é um primo ímpar. Euler provou-a (aproximadamente) para $n = 3$ em 1753 mas, como há infinitos primos, tratar um de cada vez era, claramente, inadequado. Era necessária uma abordagem diferente, uma em que se considerassem conjuntos de expoentes em vez de valores individuais.

Em 1804 Sophie Germain resolveu o UTF no caso em que $n = p - 1$, onde p é primo e $p \equiv 7 \bmod 8$. Mandou este resultado a Gauss, que publicara as suas *Disquisitiones Arithmeticae* em 1801, mas, receando que ele não levasse a sério uma mulher matemática, adoptou de novo o pseudónimo Le Blanc. A resposta de Gauss foi favorável e ela continuou a corresponder-se com ele, mantendo o disfarce até 1806, altura em que, preocupada com a possibilidade do destino de Gauss às mãos do exército de Napoleão vir a ser o de Arquimedes, usou a sua amizade com o General Pernety para o proteger. Ao saber a identidade do seu correspondente e anjo da guarda, Gauss (alheio, como Lagrange, aos preconceitos do seu tempo) respondeu, felicitando-a efusivamente pelo seu talento matemático e pela coragem em vencer os obstáculos que a sociedade punha no caminho das mulheres.

Quando se tenta provar o UTF, pode supor-se que x, y e z são, dois a dois, primos entre si. Quando n é primo tal implica que nenhum deles ou um apenas é divisível por n e estes são, tradicionalmente, chamados Casos I e II do UTF. Esta distinção é importante pois os métodos envolvidos nos dois casos são geralmente diferentes, sendo o Caso I bastante mais fácil. Em 1808 Germain mandou a Gauss a sua demonstração do Caso I para n=5 mas, desta vez, não teve resposta: nomeado havia pouco tempo Professor de Astronomia em Göttingen, Gauss estava a perder o seu entusiasmo pela Teoria de Números e, sem o seu encorajamento, os interesses dela começaram a virar-se para a Matemática Aplicada.

Nesse ano, o físico Chladni visitou Paris e apresentou em público aquilo a que hoje chamamos *figuras de Chladni*, padrões simétricos em placas vibrantes, revelados quando nelas se espalha areia. Apoiado por Napoleão, o Institut de France anunciou uma competição tendo por prémio um quilograma de ouro para um trabalho que explicasse estes fenómenos. Sophie Germain começou a estudar elasticidade, lendo a *Mécanique Analytique* de Lagrange e o trabalho de Euler sobre as vibrações de varetas elásticas. Em 1811 apresentou a sua solução que, embora fosse a única submetida a concurso, estava cheia de erros e omissões, causados pela sua inexperiência em técnicas como o Cálculo das Variações; nenhum prémio foi atribuído e o prazo foi alargado por mais dois anos. Lagrange, um dos membros do júri, corrigiu alguns dos erros e sugeriu que pequenos desvios w satisfazem

$$k\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

onde x, y são coordenadas euclidianas locais na placa, t é o tempo e k é uma constante. Na sua segunda tentativa, em 1813, ela mostrou que a equação de Lagrange explicava os padrões de Chladni em alguns casos simples, mas foi incapaz de a obter a partir de princípios físicos e, assim, foi-lhe atribuída apenas uma menção honrosa. O prazo foi de novo dilatado e, em 1816, os membros do júri, Legendre, Laplace e Poisson, atribuíram-lhe o prémio finalmente. Contudo, sentindo que não tinham tomado a sério o seu trabalho, não foi à entrega daquele. Poisson, um rival mais jovem que havia publicado o seu próprio artigo sobre elasticidade em 1814, certamente que levou a mal a nova abordagem que contradizia a sua teoria molecular e foi muito desencorajante no seu relatório sobre o trabalho dela. Esta relutância em admitir o que ela conseguiu nesta área continuou ao longo da vida e durante muito tempo após a sua morte: por exemplo, quando a Torre Eiffel foi construída em 1889, o seu nome foi omitido na lista dos 72 matemáticos, cientistas e engenheiros eminentes que nela foi colocada, apesar das contribuições importantes que fez para a nossa compreensão das propriedades dos metais. Fez ainda progressos relevantes na geometria diferencial das superfícies: Euler mostrara que a força elástica em qualquer ponto de uma vareta vibrante é proporcional à curvatura da vareta nesse ponto; para estender o resultado a placas vibrantes bidimensionais, ela precisou de introduzir um conceito análogo de curvatura para superfícies, que obteve somando as duas curvaturas principais em cada ponto ou, equivalentemente, integrando todas as curvaturas nesse ponto, de modo a ficar-se com a curvatura média.

Encorajada por Fourier, que não era amigo de Poisson, começou a participar mais na vida científica parisiense. Foi a primeira mulher, descontando as esposas dos membros, a assistir a conferências na Academia. Nos anos 20 publicou os seus resultados sobre elasticidade e voltou à Teoria de Números, colaborando com o muito respeitado Legendre.

Neste período provou o agora conhecido por *Teorema de Sophie Germain*, que generaliza o seu resultado anterior sobre o caso de expoente 5 do UTF. Diz que o UTF é verdadeiro no Caso I para um expoente n, primo e ímpar, se existir um primo auxiliar p tal que

(a) $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \bmod p$ implica $x\, y\, z \equiv 0 \bmod p$
e
(b) n não é uma potência de expoente n mod p.[1]

Em particular, prova o Caso I do UTF se $2n+1$ é um primo p, pois as condições (a) e (b) seguem-se facilmente do facto de todas as potências de expoente n serem congruentes com ± 1 ou 0 mod p; tais primos n são agora conhecidos por *primos de Sophie Germain*. Legendre fez a extensão aos casos em que $k\,n+1$ é primo, para $k = 4, 8, 10, 14$ ou 16, o que lhe permitiu estabelecer o Caso I do UTF para todos os primos $n < 197$. Não se sabe se há infinitos primos de Sophie Germain, mas há 26 569 515 menores que 10^{10}. Em 1985 Adleman, Heath-Brown e Fouvry, combinando métodos analíticos modernos com os de Germain e Legendre, mostraram (de modo não construtivo) que há infinitos primos n para os quais o Caso I é verdadeiro. Claro, a maioria destes resultados foi suplantada pela demonstração completa do UTF de Wiles, publicada em 1995. Mesmo assim, o Teorema de Sophie Germain tem um lugar de relevo na história deste problema, como passo importante na passagem de casos individuais para uma abordagem mais sistemática.

Sophie Germain não publicou o seu teorema. Foi, em vez disso, simpaticamente citado por Legendre num artigo de 1823, reimpresso como suplemento da segunda edição da sua *Théorie des Nombres* em 1825 (esta continha também a sua demonstração do UTF para $n = 5$, simultânea com a de Dirichlet). Talvez por modéstia, as suas contribuições para a Teoria de Números permaneceram praticamente desconhecidas durante muitos anos. Na realidade, nos cento e cinquenta anos seguintes, alguns matemáticos publicaram resultados sobre o UTF que, posteriormente, se veio a verificar serem casos particulares do seu teorema (ver o agradável livro de Ribenboim [R] para mais detalhes). Em anos recentes o interesse na demonstração do UTF levou a um reconhecimento maior do seu trabalho mas, exceptuando a admiração por parte

[1] Isto é, n não é congruente mod p com um inteiro da forma k^n.

de grandes figuras como Lagrange, Legendre e Gauss, tal reconhecimento foi pequeno durante a sua vida. Morreu de cancro no seio em 27 de Junho de 1831 e, em 1837, quando a Universidade de Göttingen celebrou o seu centenário atribuindo graus honorários, Gauss teve muita pena que ela já não estivesse viva para receber um. Dunnington [Du, p.68] cita a sua opinião: "Mostrou ao mundo que mesmo uma mulher pode fazer coisas que valem a pena na mais rigorosa e abstracta das ciências e, por essa razão, bem teria merecido um grau honorário". As suas *Œuvres Philosophiques*, incluindo um ensaio filosófico inacabado e algumas das suas cartas, foram publicadas em 1879 [Ge2].

Em Paris há uma rua, um hotel e uma escola com o nome de Sophie Germain. No pátio da escola existe uma estátua sua muito elegante, usada por Dalmédico [Da] para ilustrar um curto artigo biográfico que, curiosamente, omite o Teorema de Sophie Germain. Este, e muitos outros resultados relacionados, aparece no tratamento, muito acessível, de Ribenboim do UTF [R]; para uma introdução, leve e para o público em geral, à história deste problema (antiga e moderna) ver Singh [S] e, para um tratamento enciclopédico (pré-Wiles), Edwards [E]. Bucciarelli e Dworsky [BD] discutem as contribuições de Sophie Germain para a elasticidade, brevemente cobertas também (com as de Poisson e outros desse período) na história do assunto de Timoshenko [T]. A biografia de Laplace por Gillispie [G] dá um bom retrato do mundo científico francês e das suas personagens mais notáveis na época, enquanto Dunnington [Du] narra pormenorizadamente a vida e o trabalho de Gauss. No *website* de Caldwell[2] encontra-se informação actualizada sobre os primos de Sophie Germain e, quanto aos 72 *sábios*, visite-se a Torre Eiffel[3].

Principais Personagens Relacionadas

Ernst Florens Friedrich Chladni, 1756-1827.
Leonhard Euler, 1707—1783.
Pierre de Fermat, 1601—1965.
Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1768—1830.
Carl Friedrich Gauss, 1777—1855.
Joseph-Louis Lagrange, 1736—1813.
Pierre-Simon Laplace, 1749—1827.
Adrien-Marie Legendre, 1752—1833.
Siméon-Denis Poisson, 1781—1840.

Referências

[BD] L. L. Bucciarelli and N.Dworsky, *Sophie Germain: An Essay in the History of Elasticity,* Reidel, Boston and Dordrecht, 1980.

[Da] A. D. Dalmédico, Sophie Germain, *Scientific American*, December 1991, 117-122.

[Du] G. W. Dunnington, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, Hafner, New York, 1955.

[E] H. M. Edwards, *Fermat's Last Theorem*, Springer, New York, 1977.

[Ge1] S. Germain, *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques,* Paris, 1821.

[Ge2] S. Germain, *Œuvres Philosophiques* (ed. Stupuy), Paris, 1879.

[Gi] C. C. Gillispie, *Pierre-Simon Laplace*, Princeton University Press, Princeton, 1997.

[R] P. Ribenboim, *Fermat's Last Theorem for Amateurs*, Springer, New York, 1979.

[S] S. Singh, *Fermat's Last Theorem*, Fourth Estate, London, 1997.

[T] S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York, 1953; reedição Dover, New York, 1983.

(Tradução de F. J. Craveiro de Carvalho)

[2] http://www.utm.edu/research/primes/lists/top20/SophieGermain.html

[3] http://www.tour-eiffel.fr/teiffel/fr/documentation/dossiers/page/savants.html

O Problema 3X+1

Vítor Araújo
Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Dado um inteiro positivo n, se n for par, dividamo-lo por 2, se n for ímpar, consideremos (3n+1)/2. Se $T: IN \to IN$ for a função definida desta maneira, verifica-se numericamente que, se aplicarmos repetidamente T a qualquer inteiro positivo n, acabamos por obter o número 1.

Será possível explicar a razão deste comportamento simples? Ninguém conseguiu ainda...

A origem deste problema é obscura. Na literatura é atribuída a Lother Collatz (ver [4, 10]), estudante da Universidade de Hamburgo nos anos 30 do século XX, que parece ter sido a primeira pessoa a escrever sobre o assunto e a divulgá-lo junto dos seus colegas. Desde então o problema tem sido estudado por uma variedade de pessoas de diferentes campos da Matemática e das Ciências da Computação.

Os (poucos) resultados conhecidos acerca deste problema podem ser expressos mais elegantemente em termos das iterações da função seguinte.

Definição 1. Seja $T : IN \to IN$ dada por

$$T(N) = \begin{cases} (3N+1)/2 & se \quad N \text{ é ímpar} \\ N/2 & se \quad N \text{ é par.} \end{cases}$$

Então escrevemos $T^2(N)=T(T(N))$ e $T^3(N)=T(T(T(N)))$ *etc. e dizemos que a sucessão* $(T^k(N))_{k\in IN}$, *obtida por* iteração *da função T aplicada a N, é a* órbita *do número N.*

Vamo-nos restringir ao caso de iteração de inteiros positivos, embora esta definição da função T possa ser estendida facilmente aos inteiros negativos.

1. Formalização do problema

Dado um inteiro N ≥1 consideremos

$$Mx(N) = \lim_{k\to\infty} max\left\{T(N), T^2(N), \dots, T^k(N)\right\}$$

e

$$Mn(N) = \lim_{k\to\infty} min\left\{T(N), T^2(N), \dots, T^k(N)\right\}$$

que são os maior e menor valores assumidos pela órbita de n, quando os limites existem e são finitos. Notemos que a sucessão

$$M_k = max\left\{T(N), T^2(N), \dots, T^k(N)\right\}, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

é crescente, e a sucessão

$$m_k = min\left\{T(N), T^2(N), \dots, T^k(N)\right\}, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

é decrescente. Assim, $Mn(N)$ existe sempre, pois $(m_k)_{k\geq 1}$ decresce e é sempre maior ou igual a 1. Quanto a $Mx(N)$, existirá sempre que $(M_k)_{k\geq 1}$ for limitada (consideramos que o limite não existe se não for finito).

Assim podemos classificar qualquer inteiro positivo N em três categorias:

Convergente: se $Mn(N)=1$;

Divergente: se $Mx(N)$ não existe;

Cíclico: nos restantes casos.

Notemos que qualquer $N \geq 1$ está sempre numa das categorias acima, e apenas numa. De facto, $(M_k)_{k \geq 1}$ pode ser limitada, ou não limitada: neste último caso, N é divergente. No primeiro caso, $Mx(N)$ existe e, como temos sempre $Mn(N) \geq 1$, há duas possibilidades: ou temos igualdade, e N é convergente; ou, caso contrário, N é cíclico.

Desconhece-se qualquer inteiro positivo que seja divergente, e portanto temos a seguinte conjectura, amplamente aceite mas ainda não demonstrada.

Conjectura 1. *Nenhum inteiro positivo N é divergente.*

1.1. Ciclos e a principal conjectura

É claro que há um ciclo na iteração de T,

$T(1)=2, \qquad T(2)=1.$

Até hoje, efectuaram-se numerosos cálculos para muitos valores de N e nunca se encontrou outro ciclo, pelo que se supõe que este seja o único.

De facto já se conseguiu mostrar que qualquer outro ciclo deve ter pelo menos 275.000 elementos, contrastando com os 2 elementos deste ciclo simples. E então temos a principal conjectura relativa ao comportamento da iteração da transformação T.

Conjectura 2. *Todos os inteiros positivos N são convergentes.*

1.2. Conjectura com grafos dirigidos

Com o fim de tentar compreender melhor o comportamento desta função T, podemos pensar neste problema por intermédio de um *grafo dirigido*: um conjunto de pontos, chamados *vértices*, associados a números inteiros N e com *arestas* dirigidas de N para $T(N)$, representadas por setas unindo os dois vértices N e $T(N)$ no plano. Por este grafo podemos observar como a estrutura das iterações da função T é bastante complexa.

Notemos que o pedaço do grafo apresentado é o "mais próximo" de 1, mas que 7 não se encontra, embora encontremos todos os inteiros de 1 a 6 nos vértices... Para $N = 7$ a órbita é

7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1 ...

e o vértice correspondente a 7 teria que ficar mais acima no grafo.

Reparemos na irregularidade dos valores dos elementos das órbitas. Para $N = 26$, a órbita lê-se facilmente do grafo

26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1 ...

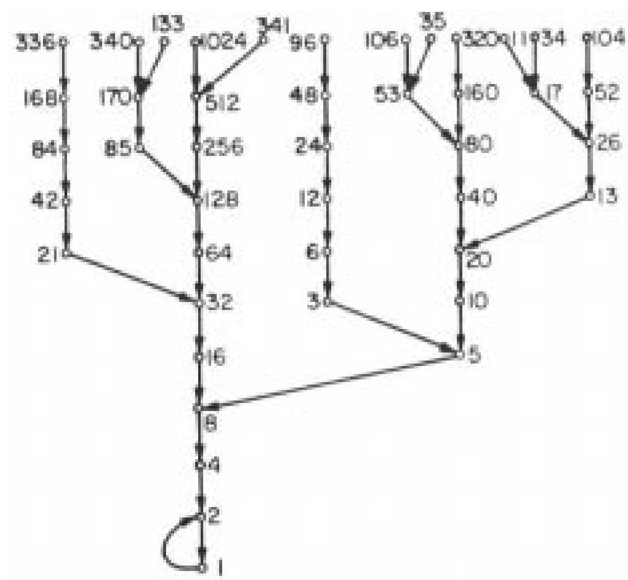


Figura 1 - Uma porção do grafo dirigido correspondente às iterações da função T.

Mas, se tomarmos $N = 27$, então teremos uma órbita que demora 67 iterações até chegar ao número 1 e, entretanto, os valores na órbita sobem até 4616, quando na porção apresentada do grafo o maior valor é 1024.

Dizer que a órbita de todo o inteiro positivo N "passa" por 1 para algum iterado, é o mesmo que dizer que, partindo de qualquer vértice do grafo anterior, há um caminho desse vértice até ao vértice 1 seguindo as arestas do grafo.

Então podemos enunciar a principal conjectura noutro formato.

Conjectura 3. *O grafo correspondente a* T *é conexo.*

Ser *conexo* significa aqui que podemos ir de um vértice qualquer do grafo para qualquer outro seguindo um caminho ao longo de arestas do grafo, mas respeitando o sentido das setas - um caminho "bem orientado". Então dizer que toda a órbita finalmente "passa" pelo número 1 é dizer que qualquer vértice pode ser ligado ao número 1 por um caminho de arestas bem orientado. E dizer que o grafo acima é conexo, já que 1 pertence ao grafo, significa que qualquer outro ponto do grafo tem uma órbita que assume o valor 1 após um número finito de iterados. Portanto esta conjectura é equivalente à Conjectura 2.

2. Tempos de paragem

É óbvio que antes que a órbita "caia" no ciclo 1-2, isto é, que $T^k(N)=1$ para algum $k>1$, devemos ter $T^j(Nq)<N$ para algum $j<k$.

Definição 2. *Dado um inteiro positivo N*, o tempo de paragem $\sigma(N)$ *é o menor inteiro* $k\geq 1$ *tal que* $T^k(N)<N$, ou $\sigma(N)=\infty$ *se não existir tal inteiro.*

É claro que se a conjectura for verdadeira, então todos os inteiros positivos N têm tempo de paragem finito. O recíproco também se verifica, como mostramos a seguir, isto é, *se todos os inteiros positivos tiverem tempo de paragem finito, então a conjectura é verdadeira.*

Teremos então outra forma para a conjectura principal.

Conjectura 4. *Todos os inteiros positivos têm tempo de paragem finito.*

De facto, suponhamos que todos os inteiros positivos N têm tempo de paragem finito, $\sigma(N)<\infty$. Então fixando um $N\geq 1$ qualquer, teremos sucessivamente

$N_1=T^{\sigma(N)}(N)<N$,

$N_2=T^{\sigma(N_1)}(N_1)<N_1$,

$N_3=T^{\sigma(N_2)}(N_2)<N_2$

...

e esta *sucessão decrescente de inteiros positivos* tem de parar no inteiro 1, ou seja, para algum $j\geq 1$ vale $N_j=1$. Como

$1=N_j=T^{\alpha(N)+\alpha(N_1)+\ldots\alpha(N_{j-1})}(N)$,

então N foi enviado para 1 por um iterado de T. Deste iterado em diante, a órbita reduz-se ao ciclo 1-2, tal como a conjectura principal diz acontecer.

Surpreendentemente, parece ser mais fácil estudar os tempos de paragem do que directamente as órbitas da função T! Isto apesar de os tempos de paragem serem bastante irregulares.

Definição 3. O tempo de paragem total $\sigma_\infty(N)$ *associado ao inteiro N é o menor* $K\geq 1$ *tal que* $T^k(N)=1$.

Podemos observar a irregularidade das funções *tempo de paragem* e *tempo de paragem total* na seguinte tabela.

n	$\sigma(n)$	$\sigma_\infty(n)$
1	∞	2
7	7	11
27	59	70
$2^{50}-1$	143	383
2^{50}	1	50
$2^{50}+1$	2	223
$2^{500}-1$	1828	4331
$2^{500}+1$	2	2204

As próximas tabelas parecem indicar que quem quer que tente achar alguma regularidade para os *tempos de paragem total* deve acabar por ficar bastante desesperado...

Alguém consegue discernir um padrão nestes tempos de paragem total? Dá vontade de dizer que eles são aleatórios.

	1000 –1009	1010 –1019	1020 –1029	1030 –1039	1040 –1049	1050 –1059	1060 –1069	1070 –1079	1080 –1089	1090 –1099
0	72	42	34	88	23	23	80	18	31	31
1	91	42	34	26	80	61	80	107	88	31
2	72	33	42	88	80	53	80	23	31	23
3	29	72	42	99	80	53	50	18	88	23
4	40	26	10	88	23	53	23	18	31	23
5	40	26	26	88	23	107	50	18	31	50
6	40	34	26	88	80	23	23	23	88	61
7	61	99	26	88	80	53	42	23	88	88
8	72	94	80	42	23	23	18	34	15	61
9	72	42	80	42	41	23	18	34	31	23

Figura 2 - Listagem dos tempos de paragem para *N* entre 1000 e 1099.

$\sigma_\infty(n)$	freq.	$\sigma_\infty(n)$	freq.	$\sigma_\infty(n)$	freq.	$\sigma_\infty(n)$	freq.
10	1	29	1	50	3	88	5
15	1	31	7	53	4	91	1
18	6	34	6	61	4	99	2
23	17	42	9	72	6	107	2
26	6	45	3	80	16		

Figura 3 - Listagem da contagem das repetições de valores na tabela anterior.

2.1. Tempos de paragem arbitrariamente grandes

Pode não ser imediatamente óbvio da definição que *têm de existir tempos de paragem arbitrariamente grandes*.

Porém, se tomarmos $N = 2^p-1$ com p>1 vamos obter

$T(N)=3.2^{p-1}-1$,

$T^2(N)=3.2^{p-2}-1$,

$T^3(N)=3^3.2^{p-3}-1$

…

e assim sucessivamente até

$T^p(N)=3^p-1$,

que é o primeiro elemento par da órbita de N.

Portanto, o tempo de paragem de $N = 2^p-1$ é maior ou igual a p, para qualquer p >1.

Depois de observarmos tanta irregularidade, é espantoso que os tempos de paragem se comportem, afinal, muito bem quando olhamos para inteiros N muito grandes, como veremos adiante.

3. Comportamento assimptótico dos tempos de paragem

Em 1976, Riho Terras [4, 11, 12] mostrou que se pode dizer algo sobre o comportamento da função "*tempo de paragem*" para N muito grande - o que se chama habitualmente de *comportamento assimptótico*.

Teorema 1. *Para cada p≥1, dado o conjunto*

$$S_p(m) = \{N \geq 1: \quad N \leq m \quad e \quad \sigma(N) \leq p\}$$

então o limite seguinte

$$F(p) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \# S_p(m)$$

existe e ainda

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = 1.$$

Como $\#S_p(m)$ simboliza o número de elementos do conjunto $S_p(m)$, então $\frac{1}{m}\# S_p(m)$ é a *frequência de inteiros entre* 1 *e m cujo tempo de paragem não ultrapassa p*.

O resultado diz então que esta frequência tem um limite $F(p)$ quando m tende a infinito (*frequência assimptótica*). Além disso, se fizermos o limite superior p dos tempos de paragem tender também a infinito, então a frequência assimptótica converge para 1.

Intuitivamente, *para m muito grande e para p muito grande, a frequência de inteiros entre* 1 *e m com tempos de paragem inferiores a p é muito próxima de* 1.

Faz então sentido dizer que *quase todos os números têm tempo de paragem finito*, e portanto também que a conjec*tura principal é quase verdadeira*!

Observemos que este resultado tem um sabor probabilístico, já que estamos a considerar a *frequência de inteiros entre* 1 *e m com tempos de paragem inferiores a p* no seu enunciado - isto apesar de o Teorema dizer respeito ao comportamento duma função definida por uma regra perfeitamente clara e muito simples!

A prova deste resultado é bastante longa e recheada de "truques" que não se prestam facilmente a generalizações - falaremos de uma delas já a seguir - embora seja "elementar", no sentido em que um licenciado em Matemática está em condições de entender a demonstração.

4. Generalizações deste resultado

Alguns autores investigaram até que ponto este resultado assimptótico pode ser estendido para outras funções. Um dos resultados mais gerais obtidos diz respeito às funções $U = U_{m,d}$ definidas por

$$U(N) = \begin{cases} \dfrac{N}{d} & se \quad N \equiv 0 \bmod d \\ \dfrac{mN - r}{d} & se \quad N \not\equiv 0 \bmod d \end{cases}$$

em que, no segundo caso, $r \in R$ é tal que $mN \equiv r$ mod d. Neste contexto, m e d são inteiros positivos primos entre si, isto é, $(m,d) = 1$ e R é um conjunto de representantes das classes não congruentes com *0* módulo d.

Notemos que a função T pertence a esta classe de funções, com $m = 3$, $d = 2$ e $R = \{-1\}$ (logo $r = -1$).

H. Möler, em 1978 [8, 4], caracterizou completamente quais as funções U deste tipo que admitem tempo de paragem finito para quase todos os inteiros, mostrando que essas são precisamente as funções com $m<d^{\,d/(d-1)}$.

4.1. Relação com a parte fraccionária de $(3/2)^k$

O estudo da distribuição, no intervalo [0,1], da parte fraccionária da sucessão $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k\right)_{k\geq 1}$ revelou conexões inesperadas com uma generalização do problema $3X + 1$.

A *parte fraccionária* de qualquer número racional ou real $x > 0$ define-se como a diferença $x-[x]$, em que $[x]$ é o maior inteiro positivo que não ultrapassa x.

Conjectura-se (mais uma conjectura!) que *as partes fraccionárias desta sucessão formam um conjunto denso em* [0,1], isto é, seja qual for o intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$, por mais pequeno que seja, existe pelo menos um inteiro k tal que a parte fraccionária de $\left(\frac{3}{2}\right)^k$ está em $[a, b]$.

Uma forma de atacar o problema pode ser determinar quais os possíveis comportamentos de sucessões do tipo $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k.\xi\right)_{k\geq 1}$, em que $\xi > 0$ é um número real fixado.

Em 1968 (ver novamente [4]), K. Mahler considerou o problema de determinar se existem ou não números reais $\xi > 0$ com a propriedade

$$0 \leq \text{parte fraccionária de } \left(\left(\frac{3}{2}\right)^k . \xi \right) \leq \frac{1}{2},$$

para todos os $k = 1, 2, 3, \ldots$.

A existência de tais números reais seria uma indicação da *possível falsidade* da conjectura da densidade, uma vez que se tivermos as desigualdades anteriores para $\xi = 1$, então seria impossível existir um elemento da sucessão $(3/2)^k$ cuja parte fraccionária estivesse em $[1/2, 1]$!

Mahler [7] mostrou que o conjunto de tais reais ξ é *numerável* provando que *existe no máximo um tal* ξ *em cada intervalo* $[N,N+1]$, para $N = 1, 2, 3, \ldots$ Mais ainda, para existir um tal número no intervalo $[N,N+1]$, a órbita $(N,W(N),W^2(N),\ldots)$ de N gerada pela função

$$W(N) = \begin{cases} 3N/2 & \text{se } N \text{ é par,} \\ (3N+1)/2 & \text{se } N \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

teria que satisfazer a condição

$Wk(N) \not\equiv 3 \bmod 4$ *para todos os* $k \geq 1$.

Ora, esta função tem certas semelhanças na forma e no comportamento com a função T, e ainda hoje se pensa que é pouco provável que exista algum número ξ como acima.

Mas a estrutura da distribuição das partes fraccionárias de $\left(\frac{3}{2}\right)^k . \xi$ é realmente intrincada... G. Choquet [1, 2, 3] e A. Pollington [9], em 1980 e 1981, mostraram que *existe uma infinidade (não numerável) de reais* $\xi > 0$ *para os quais*

$$\frac{1}{25} \leq \text{parte fraccionária de } \left(\left(\frac{3}{2}\right)^k . \xi \right) \leq \frac{24}{25}$$

para todos os inteiros positivos k - em completo contraste com a quantidade, *no máximo*, *numerável* de soluções para o problema anterior!

5. Nota final

O problema 3*X*+1, e outros relacionados, levam os matemáticos ao seguinte *dilema*.

Por um lado, na medida em que a função tem alguma *estrutura*, pois podemos calcular *T(N)* a partir de *N* por uma regra muito simples, temos a possibilidade de estudar muito bem o seu comportamento "local": podemos calcular explicitamente e fazer muitas experiências com a função para vários valores iniciais - este aspecto da Matemática foi enormemente potenciado com a vulgarização dos computadores pessoais. Porém obtemos indícios de comportamento *aleatório* quando tentamos extrapolar as nossas experiências numéricas - basta algum tempo a observar as tabelas de tempos de paragem, por exemplo.

Por outro lado, se pensarmos como se estivéssemos a lidar com uma variável *aleatória*, e levarmos em conta *médias* ou *frequências* de certos eventos, conseguimos ver alguma *estrutura* no comportamento assimptótico da função.

Esta *dicotomia* torna-se difícil de resolver num contexto como o das funções inteiras, mas foi possível *conciliar* estes dois aspectos em certos casos de funções reais de uma ou várias variáveis, usando os instrumentos da Análise Infinitesimal e da Topologia Diferencial, indisponíveis no cenário dos números inteiros - mas isso são assuntos que nos levariam ao estudo de *Sistemas Dinâmicos* e *Teoria Ergódica*.

5.1. É possível encontrar a resposta?

Este problema, em especial a conjectura principal, parece intratável com os conhecimentos matemáticos actualmente disponíveis.

Chegou a ser feita uma piada quando este problema estava na moda nas universidades de Yale e Chicago nos anos 50 e 60 do século XX, que dizia que este problema fazia parte duma conspiração para travar o desenvolvimento da Matemática nos E.U.A.

A situação parece tão difícil que, em 1983, Richard Guy [6] publicou uma lista de problemas intitulada

Não tente resolver estes problemas

e o problema 3*X*+1 estava lá, ao lado de muitos outros...

Recentemente, em Março de 2001 [5], foi anunciado que há um número infinito de inteiros *N* com tempo de paragem total finito e que satisfaz $\sigma_\infty(N) \geq 6{,}14316 \log N$. Afinal, alguém não seguiu o conselho de Richard Guy...

Referências

[1] G. Choquet, *Répartition des nombres $k(3/2)^n$; mesures et ensembles associés*, C.R. Acad. Sci. Paris, 290 (1980), 575-580.

[2] idem, *Algorithmes adaptés aux suites $k\theta^n$ et aux chaînes associées*, ibidem, 290 (1980) 719-724.

[3] idem, *Construction effective de suites $k(3/2)^n$. Étude des mesures (3/2)-stables*, ibidem, 291 (1980), 69-74.

[4] Jeffrey Lagarias, *The 3x+1 problem and its generalizations*, American Mathematical Monthly **92** (1985), 3-21.

[5] idem, *Lower bounds for the total stopping time of 3x+1 iterates*, preprint, 2001: `http://arXiv.math.nt/0103054`.

[6] Richard Guy, *Don't try to solve these problem!*, American Mathematical Monthly **90** (1983), 35-41.

[7] K. Mahler, *An unsolved problem on the powers of 3/2*, J. Austral. Math. Soc., 8 (1968), 313-321.

[8] H. Möller, *Über Hasses Verallgemeinerung des Syracuse-Algorithmus (Kakutani's problem)*, Acta Arith., 34 (1978), 219-226.

[9] A.D. Pollington, *Progressions arithmétiques géneralisées et le problème des* $(3/2)^n$, C.R. Acad. Sci. Paris, 292 (1981), 383-384.

[10] Eric Roosendaal, *On the 3x+1 problem*, página html, `http://personal.computrain.nl/eric/wondrous`

[11] Riho Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. 30 (1976), 241-252.

[12] idem, *On the existence of a densitity*, Acta Arith., 35 (1979), 101-102.

Competições Internacionais de Matemática

Margarida Camarinha e Ercília Sousa
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Foi em 1989 que Portugal enviou pela primeira vez uma equipa portuguesa às Olimpíadas Internacionais de Matemática. No ano seguinte foi também enviada, pela primeira vez, uma equipa às Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, apesar de desde então esta participação não ter tido a mesma regularidade que teve a participação nas Olimpíadas Internacionais. Estes dois eventos, de reconhecido prestígio internacional, são sem dúvida um contributo para promover o princípio de excelência no estudo da Matemática.

A selecção dos estudantes que representam Portugal nestas competições baseia-se essencialmente na classificação obtida nas Olimpíadas Portuguesas de Matemática. No ano lectivo de 2002/2003 estiveram envolvidas 840 escolas de todo o país, num total de 12000 alunos. Os medalhados da Final Nacional, que decorre em meados de Abril, e aqueles que em anos anteriores participaram em competições internacionais são convidados a fazer um estágio de preparação, no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, que culmina numa prova de selecção. O que se aprende na escola é cada vez mais insuficiente para se obter um bom resultado neste tipo de competições internacionais, daí a cada vez maior necessidade de uma preparação adicional, para os representantes portugueses nestes eventos.

No ano de 2003 os resultados obtidos pelas equipas portuguesas foram os melhores dos últimos anos e passamos a descrever com detalhe cada um dos eventos.

Olimpíadas Internacionais de Matemática 2003

As Olimpíadas Internacionais de Matemática decorreram este ano no Japão de 7 a 19 de Julho. Esta competição envolveu 457 estudantes de todo o mundo, seleccionados por 82 países - são de facto as "Olimpíadas" da Matemática.

As primeiras Olimpíadas Internacionais de Matemática decorreram na Roménia em 1959 e contaram apenas com a participação de 7 países. Desde então este evento realizou-se todos os anos excepto no ano de 1980. Nos primeiros anos da sua existência os únicos participantes foram alguns países da Europa de Leste e a então União Soviética. Recentemente, a adesão aumentou de tal forma que no ano transacto participaram 82 países. Para o ano teremos a participação de um novo país que fala português, Moçambique, uma participação importante, dado que os únicos países do continente africano que participaram até hoje foram a África do Sul e Marrocos.

Embora todo o evento decorra durante quase duas semanas, a competição propriamente dita preenche duas manhãs. Em cada manhã os estudantes têm quatro horas e meia para resolver três fascinantes problemas de matemática. Os almoços durante estes dois dias nunca sabem a muito, pois os estômagos ainda estão a digerir os problemas que acabaram de ser ou não resolvidos.

Os restantes dias são preenchidos com outros divertimentos, que envolvem actividades relacionadas com a cultura do país. No Japão não faltaram as artes marciais e o Origami, a arte da dobragem de papel.

A equipa portuguesa que viajou para o Japão era formada pelos estudantes António Ramos Andrade do Colégio Oficinas S. José em Lisboa, Bruno José Conchinha Montalto da Escola Secundária Manuel Cargaleiro no Fogueteiro, Domingos José Ramos Lopes da Escola Secundária da Gafanha da Nazaré na Gafanha da Nazaré, João Diogo Silva Ferreira da Escola Secundária Pedro Alexandrino na Póvoa de Santo Adrião, João Eduardo Casalta Lopes da Escola Secundária José Falcão em Coimbra e Luís Alexandre Alves Pereira da Escola Secundária José Gomes Ferreira em Lisboa e por dois docentes do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Joana Teles e Ercília Sousa.

O melhor resultado da equipa foi conseguido por Domingos José Ramos Lopes, que ficou a três pontos da medalha de bronze, tendo-lhe sido atribuída uma **Menção Honrosa** pelo seu desempenho numa das questões de Geometria.

Mas as aventuras matemáticas não se ficaram por aqui para alguns destes jovens brilhantes. Este ano os três portugueses com melhor desempenho nestas Olimpíadas Internacionais de Matemática foram seleccionados para participarem nas Olimpíadas Ibero-Americanas, que decorreram em Setembro, na Argentina, aos quais se juntou um quarto elemento, também já previamente seleccionado, Tomás Barato Goucha da Escola Secundária Dr. Ginestal Machado em Santarém.

Equipa das Olimpíadas Internacionais de Matemática
Da esquerda para a direita: Bruno Montalto, Shinya (guia da equipa), Domingos Lopes, Ercília Sousa, Luís Pereira, Joana Teles, António Andrade, João Casalta, João Diogo Ferreira.

Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática 2003

As Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática decorreram este ano, de 13 a 20 de Setembro, em Mar del Plata, na Argentina, sob os auspícios da Organização de Estados Ibero-Americanos para a Educação, a Ciência e a Cultura.

Esta organização, conjuntamente com o Ministério da Educação da Colômbia, convocou em 1985 as primeiras Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, em que participaram 10 países. Nas competições que se seguiram o número de países participantes foi aumentando consideravelmente, ao mesmo tempo que foram sendo desenvolvidas acções — nomeadamente o Simpósio Ibero-Americano sobre o Ensino da Matemática — que permitiram que o nível das citadas competições fosse crescendo de forma significativa. Actualmente as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática estão integradas no Programa para a Difusão e Divulgação da Ciência no âmbito dos Sistemas Educativos da Organização de Estados Ibero-Americanos e gozam de um reconhecido prestígio.

Este ano estiveram presentes nas Olimpíadas Ibero-Americanas 19 dos 22 países convidados: Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Costa Rica, Cuba, Equador, El Salvador, Espanha, Guatemala, México, Paraguai, Perú, Portugal, Porto Rico, República Dominicana, Uruguai e Venezuela, representados por um total de 75 alunos.

Equipa das Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática
Da esquerda para a direita: Sebastian (guia da equipa), Luís Pereira, Tomás Goucha, Domingos Lopes, João Casalta, Sílvia Barbeiro e Júlio Neves.

O Acto Académico de Apresentação desta competição teve lugar no dia 12 de Setembro, em Buenos Aires, onde foi proferida a conferência "Três razões para estudar Matemática", pelo Professor Rafael Pérez Gómez. As provas realizaram-se nas manhãs de 16 e 17 de Setembro. Em cada um destes dias, os participantes tiveram de resolver 3 problemas durante o período de quatro horas e meia. Em simultâneo com as Olimpíadas Ibero-Americanas, decorreu o XV Simpósio Ibero-Americano sobre o Ensino da Matemática, que contou com a participação de 100 docentes.

Nos dias livres os concorrentes tiveram oportunidade de participar em diversas actividades e em visitas preparadas pela organização. Integrado nestas actividades esteve o Torneio por Equipas, mais um desafio matemático em que os participantes se agruparam de forma a que não houvesse elementos do mesmo país na mesma equipa. Foram estes os momentos apropriados para o intercâmbio de experiências, criação de laços de amizade e convívio entre os países participantes.

A equipa portuguesa foi constituída pelos alunos Domingos José Ramos Lopes, João Eduardo Casalta Lopes, Luís Alexandre Alves Pereira e Tomás Barato Goucha e por dois docentes do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Sílvia Barbeiro e Júlio Neves. Os resultados obtidos pela equipa foram excelentes, tendo ficado classificada em nono lugar por países, e em segundo lugar na "Copa Porto Rico", que premeia a maior progressão em termos de resultados relativamente às últimas participações de cada país nas Olimpíadas Ibero-Americanas. Individualmente, Luís Alexandre Alves Pereira conquistou uma **Medalha de Prata**, Domingos José Ramos Lopes, uma **Medalha de Bronze** e João Eduardo Casalta Lopes, uma **Menção Honrosa**.

Em 2004 as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática realizar-se-ão na cidade de Castellón, em Espanha, de 15 a 26 de Setembro. Estão ainda em proposta e sujeitas a confirmação oficial as sedes para os cinco anos seguintes. Na última reunião do Júri Internacional recordaram-se as propostas já apresentadas para esses anos, nomeadamente, o compromisso assumido pela Sociedade Portuguesa de Matemática para o ano de 2007.

A organização deste evento poderá, se encarada com seriedade e empenho, contribuir de forma significativa para o desenvolvimento de actividades que motivem e melhorem a aprendizagem dos alunos e que propiciem a formação de docentes. Será certamente uma óptima oportunidade para a Matemática em Portugal!

A Opinião dos Leitores da Gazeta de Matemática

Graciano de Oliveira

A Gazeta de Matemática pertence aos seus leitores e é função da Redacção materializar o projecto editorial da revista. A Gazeta de Matemática (tal como a SPM, sua proprietária) não tem fins lucrativos; visa somente ser um veículo de difusão da cultura matemática e do que acontece no mundo da Matemática. Pretende, numa palavra, ser útil a todos os que utilizam ou gostam da Matemática. Para conseguir os objectivos assinalados, não basta a Redacção estar convencida de que está a proceder bem, é indispensável saber o que pensam os leitores. Com esse fim, cria-se uma secção de *cartas do leitor* e fez-se um *inquérito* cujos resultados vamos apresentar e comentar, acompanhando-os de algumas especulações.

Neste número, anuncia-se a abertura de uma secção de *cartas do leitor*. Nela, os leitores poderão pronunciar-se sobre quaisquer assuntos de relevância para a Gazeta de Matemática e para a Matemática em geral.

Uma ideia muito espalhada entre nós é a de que os portugueses tendem a ser pouco participativos, delegando com alguma facilidade capacidades de decisão, atitude que muitos pensadores têm relacionado com o sebastianismo ou o messianismo, isto é, a esperança que os cidadãos depositam na aparição de um messias, ou dirigente, que lhes resolva os problemas em vez de os resolverem eles próprios. Haverá uma certa dose de verdade nisto e experiências anteriores (por exemplo, a escassez de cartas em secção idêntica no Boletim da SPM, a fraca participação em Assembleias Gerais, o fracasso de um debate nacional, em tempos proposto, sobre a preparação científica versus pedagógica dos professores) parecem confirmar a teoria. Esperamos um desmentido urgente e categórico dos leitores da Gazeta de Matemática na secção de cartas que agora se abre. Todas as opiniões serão bem-vindas e escusado será dizer que as discordantes serão objecto de especial estudo e atenção. E redijo esta crónica em estilo um tanto provocatório, exactamente para provocar respostas! E aproveitarei para tocar temas capazes de despertar discordâncias.

Na mesma linha de pensamento, pôs-se, há muito, um inquérito na página da Gazeta na Internet (http://www.spm.pt) através do qual se procurava auscultar a opinião dos leitores. O número de respostas foi pouco mais que zero apesar de o número de visitas à página ser bastante elevado. É difícil interpretar a discrepância: muitos visitavam a página mas poucos opinavam, e, não se encontrando outra explicação razoável e fundamentada, é de admitir que corrobora o que no início se disse (e esperamos seja desmentido em breve com as cartas dos leitores...). Resolveu insistir-se e com o Volume 144 (Janeiro de 2002), enviou-se o mesmo inquérito em papel acompanhado de um envelope de resposta paga. O número de respostas aumentou substancialmente. Uma conclusão parece impor-se: os leitores preferem o papel à internet, sendo de pôr a hipótese de a preferência se dever a muitos não terem acesso fácil à internet. Pode mesmo ir-se mais longe especulando sobre o valor que os leitores dão às novas tecnologias (problema actual e candente...) pois é provável que grande parte, não todo, do barulho que se faz à volta das novas tecnologias na Matemática venha mais de uma vontade de vender um produto do que de reais vantagens. Sobre este ponto vale a pena pensar e vale a pena divagar. Por exemplo, é bem sabido que o velhíssimo ábaco é muito mais rápido para as 4 operações (há outras acções em que o ábaco perde) do que qualquer calculadora. Nunca o ábaco, no mundo ocidental, foi objecto da propaganda dedicada às calculadoras. Provavelmente porque nunca apareceu ninguém interessado em o vender. Recordo, com frequência, que no meu tempo da escola primária existia uma tabuada constituída por diversas folhinhas de papel do formato de uma pequena agenda que se podia guardar em qualquer algibeira, por pequena que fosse, o seu peso era quase zero, não se partia se submetida a choques violentos nos recreios nem dependia de pilhas para ser eficaz (poluição zero), o tempo de consulta era inferior ao de uma calculadora de hoje, porém isso nunca levou ninguém a advogar que decorar a tabuada era inútil. Eu sei que uma das respostas a que estou sujeito é a clássica: trata-se de um sujeito antiquado, avesso à inovação, com nítida incapacidade para aprender... Mas é completamente falso. Ou melhor é parcialmente falso pois é verdade que tenho dificuldade em aprender, mas não é de agora, sempre a tive incluindo no tempo em que estas tecnologias não existiam. Nem tenho aversão às coisas novas, pelo contrário. Considero os computadores utilíssimos e aprendi, sem instrutor regular, a utilizá-los o que, aliás, é facílimo. Estudar Matemática (no que investi muito) é bem mais difícil e até desconfio de que há muitos que preferem o manuseamento dos computadores por isso mesmo. Continuo a crer que devemos dar preferência ao que é melhor, seja novo ou velho, esteja na moda ou não.

Toda esta divagação veio a pretexto de tentar compreender por que é que os leitores da Gazeta parecem preferir responder com papel e esferográfica (em envelope de resposta paga), em vez de utilizarem a internet e divagámos sem esquecer o intuito provocatório atrás anunciado. Mas regressemos ao Inquérito sobre a Gazeta.

Até ao presente, graças principalmente às velhas tecnologias, obtivemos 81 respostas, 68 pelo correio e 13 pela internet. Como a tiragem tem sido de 3.000, um pouco mais em números recentes (já houve um número de que se tiraram 5.000 exemplares), aquele número de respostas já tem algum significado.

Vamos fazer uma análise breve das respostas ao inquérito.

O resultado é bastante melhor do que se esperava.

Assim à pergunta a respeito da impressão geral causada pela parte noticiosa da Gazeta, 65% respondem que foi "positiva" e 29% que foi "muito positiva". Conclui-se que 94% dos leitores considera a parte noticiosa satisfatória.

Devo observar que a minha própria opinião estava longe de ser tão positiva.

O mundo da Matemática não está parado, acontecem coisas e há mudança. Há congressos e encontros, há descobertas, há Olimpíadas de Matemática em vários países (bem como internacionais ou por áreas geográficas), há medalhas Fields e outros prémios, etc. O profissional da Matemática deve estar a par. Em particular o professor. Pode este ignorar quem ganhou a medalha Fields, que não há Prémio Nobel da Matemática (por que razões?) e que existe um Prémio Abel? Que responder aos seus alunos se estes o interrogam sobre matérias fora do que é estritamente do programa? Há alunos que se lembram de perguntar coisas estranhas como se há matemáticas (isto é, mulheres) importantes? Se sim, quem? Que fizeram, que descobriram? Dê um só exemplo de um teorema importante descoberto por uma mulher. Refiro este exemplo porque já assisti à pergunta e ao embaraço de quem devia responder. É claro que para se estar informado, tem de existir um veículo que difunda as informações. Este objectivo não é fácil de conseguir. Para reunir informações, seleccioná-las e apresentá-las de forma adequada são necessários meios de que a Gazeta, por enquanto, dificilmente pode dispor. Por isso estávamos e estamos insatisfeitos com o que se fez até agora. Acresce que a comunidade matemática portuguesa não sente ainda a Gazeta como possível veículo para noticiar e registar para o futuro o que acontece, o que faz e o que organiza. Ou seja, é muito escassa a matéria noticiosa que nos é enviada espontaneamente e a Gazeta não tem (por enquanto) equipas de reportagem.

Quanto ao aspecto gráfico, a soma das respostas que o consideram "muito bom" e "bom" dá 94% (59% bom, 35% muito bom).

O preço da Gazeta de Matemática é considerado aceitável por 86% e barato por 11%. Ou seja, só 3% acham a Gazeta cara.

Não me surpreendem as respostas sobre o aspecto gráfico e quanto ao preço considero-o aceitável talvez mesmo barato. Um problema grave e de peso são as despesas de correio.

Quantas vezes deve sair a Gazeta por ano? Duas ou mais?

Pessoalmente acho que devia sair mais. Não temos falta de material, as razões por que sai só duas vezes são outras e têm a ver com problemas financeiros. A propósito, registe-se que não tem sido fácil captar publicidade mesmo de instituições de Ensino Superior das quais era de esperar maior apoio nesse aspecto. Ora 75% dizem que deve sair mais vezes, 25% que se deve manter a frequência actual.

Quanto à actividade profissional de quem responde ao nosso inquérito, a grande maioria, como era de esperar, são professores. Não sabemos que percentagem de assinantes ou leitores são professores em cada um dos graus de ensino. Mas sabemos dos que responderam ao inquérito. Destes, 30% ensinam no Ensino Superior, 19% no Básico, 36% no Secundário e só 15% assinalaram outras profissões. Alguns são estudantes, muito provavelmente com a intenção de serem professores. Nem todos de entre estes 15% se dizem estudantes pelo que parece poder concluir-se que a Gazeta é lida por poucos estudantes. Em contraste, 59% acha que a Gazeta teria muito interesse para estudantes, 36% que talvez tenha interesse, os restantes 5% consideram que não tem interesse nenhum.

Tendo em conta a profissão que exercem, 14% consideram que a Gazeta lhes é "muito útil", directamente ou indirectamente. Depois, 46% consideram que lhes é "útil" e 30% consideram que "mais ou menos" ("pouco" e "muito pouco" somam 10%). Como quase todos são professores, poderá concluir-se que da Gazeta é possível extrair-se matéria que facilite a preparação de aulas ou leve a aulas mais interessantes. De facto esta é uma das esperanças da Gazeta.

Dos que responderam, 92% dizem ser assinantes, o que não surpreende. Um pequeno número, 8%, não assina a Gazeta e tê-la-á visto porque comprou números isolados ou porque lhe foi emprestada. A grande maioria, 93%, dizem-se sócios da SPM. Um dos nossos objectivos, praticamente não realizado, era precisamente conseguir muitos leitores de entre os que não são sócios da SPM. A Gazeta de Matemática não é o órgão oficial da SPM, não reflecte as opiniões da SPM, nem se destina só aos sócios. Pelo contrário é concebida de modo a interessar uma vastíssima audiência de entre os que (como se disse no início) utilizem ou gostem da Matemática e de modo a pôr em confronto uma grande pluralidade de opiniões. Esta é a intenção; os inquéritos e pedidos de opinião ao leitor destinam-se a avaliar em que medida se realizou a intenção.

De todas as respostas ao inquérito, mais de 30 contêm observações e sugestões. Não cairam no esquecimento, estão a ser atentamente estudadas pela Redacção.

Nova secção de **Cartas dos Leitores** a partir do próximo número.

Mande-nos a sua opinião por correio electrónico para spmat@mat.uc.pt ou por correio normal para a sede da SPM ao cuidado do Director da Gazeta de Matemática.