GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática **Ano LXV** | Julho 2004

nº 147

Jornal de Mathematática Elementar: um jornal com mais de cem anos
entrevista com Sérgio Macias Marques

Mais Exames? Sim ou Não?
opiniões

À Volta da Roda
por Paulo Ventura Araújo

Jornal de Mathemática Elementar: Um jornal com mais de cem anos

Entrevista com o seu director Sérgio Macias Marques

Há feitos que, à primeira vista, parecem menores mas que de facto são heróicos. É o caso do trabalho do Dr. Sérgio Macias Marques com o *Jornal de Matemática Elementar*. Praticamente sozinho e com fracos apoios tem assegurado a existência e distribuição desde 1983 de um jornal que viu pela primeira vez a luz do dia em 1883 (não é gralha, é 1883, século XIX).

Reúne os materiais, e sublinhamos a Galeria de Matemáticos, fabrica o jornal e promove a sua distribuição. Talvez pouco conhecido mas tem 1200 assinantes. Já várias vezes foi oferecido como parte do prémio aos estudantes finalistas nas Olimpíadas Portuguesas de Matemática. A sua leitura fez as delícias dos que gostam de Matemática.

O Dr. Macias Marques e o seu trabalho em prol da Matemática merece ser conhecido, reconhecido e encorajado para que o jornal tenha futuro e continue a despertar o interesse dos jovens.

A Gazeta de Matemática foi ouvir o Dr. Macias Marques.

G. M. *Como surgiu a ideia de fundar este "Jornal de Mathemática Elementar"?*

S.M.M. Para responder a esta pergunta tenho de recuar mais de um século! Com efeito, o JME foi fundado em 1 de Novembro de 1883; tratava-se de um jornal totalmente manuscrito tendo apenas problemas dos chamados ramos da matemática elementar (aritmética, geometria, álgebra, trigonometria) uns resolvidos, outros para serem resolvidos pelos leitores; não se sabe quem era(m) o(s) seu(s) auto(res), saía quinzenalmente nos dias 1 e 15 de cada mês, mas teve uma curta existência. Desses recuados tempos existem os exemplares nº 1 de que se apresenta aqui fotocópia reduzida da sua "primeira página" (o tamanho real era o de uma folha A4), nº 5 e nº 9.


Jornal de Mathematica Elementar

O nº 1 do JME (1883)

G.M. *Sendo o jornal tão antigo, como tomou conhecimento dele e como lhe surgiu a ideia da sua continuação?*

S.M.M. Digamos que foi um acaso que me levou ao seu conhecimento. Em 1983/84 encontrava-me destacado como Professor de Matemática na Escola do Magistério Primário de Lisboa; um trabalho sobre "Dimensões em Geometria" levou-me a uma "Gazeta de Matemática" (a nº 17); nesta, um outro artigo prendeu a minha atenção "Um Jornal Português Esquecido" de Aniceto Monteiro. Escrito nos anos 40, este artigo fazia o historial do JME e o autor lançava um desafio, o qual foi por mim aceite. E o primeiro (nº 10) – pois dei continuidade à numeração – saiu precisamente um século depois da interrupção naqueles longínquos tempos e, naturalmente, o jornal teve características diferentes: dactilografado e policopiado, uma secção intitulada "Galeria de Matemáticos" onde figuraria em cada número uma biografia ilustrada de um matemático, problemas saídos em exames oficiais em diversos níveis escolares, artigos de índole pedagógico-didáctica, etc. mas apenas com 4 páginas muita coisa ficava por escrever… todavia, este número de páginas foi gradualmente passando pelas 6, 8, 12, 16, 20 e por vezes 24 páginas, à medida que foram sendo introduzidas novas secções como por exemplo, "Antologia sobre História da Matemática", "Matemática e Filatelia" "Matemática e Poesia", "Consultório", "Passatempos/Concursos", "Notícias sobre Encontros de Professores de Matemática a nível nacional e também regional", "Enunciados e Resoluções de Problemas de Olimpíadas Nacionais, Internacionais, Ibero-Americanas", "Cartas dos Assinantes"; a periodicidade, de início mantida quinzenal, passou algum tempo depois, a mensal durante o ano lectivo (Setembro do ano A a Junho do ano A+1).

G.M. *A secção referida "Galeria de Matemáticos" tem causado admiração. Como é que, trabalhando sozinho, conseguiu reunir os dados?*
S.M.M. Bem, foi um interesse de longa data e vinha já carreando material para esse fim; mas houve por um lado bastante adesão por parte de vários colaboradores que enviaram biografias de Matemáticos e por outro lado muita simpatia pela ideia que me estimulava a manter a secção; a certa altura, por sugestão dos assinantes, dava-se origem à compilação num primeiro volume com os 100 primeiros biografados a que se seguiram mais dois volumes com respectivamente 34 biografados (alguns também por sugestão de assinantes, "aumentados e melhorados" relativamente a alguns já saídos no primeiro volume) e 56 biografados. Espero dar continuidade a este sub-produto do JME.


Jornal de Mathematica Elementar

EDITORIAL

Galeria de Matemáticos

O nº 10 do JME (1984)

G.M. *Qual a divulgação que o jornal tem tido, em termos de leitores e em termos geográficos?*
S.M.M. A princípio julgava poder atingir o professorado do então Ensino Primário e procurei divulgá-lo junto das Escolas do Magistério Primário espalhadas a nível distrital. Todavia, com o andar dos tempos, graças aos encontros de professores organizados pela SPM e pela APM e ao sistema de assinaturas adoptado a partir do JME nº 20, fui mais procurado pelos Professores do Ensino Básico e pelos estudantes do Ensino Superior e Secundário, e geograficamente consegui chegar a muitos recantos de Portugal Continental desde Melgaço a Vila Real de Santo António, aos Açores e à Madeira (teve assinantes em Macau), a alguns países estrangeiros (Brasil, Espanha, Itália, Peru) e permuta-se com algumas publicações estrangeiras do Brasil, Espanha e França. Actualmente, tem cerca de 1200 assinantes; está à venda em apenas algumas casas de revistas e jornais em Lisboa, há dificuldades finan-ceiras para divulgação…

G.M. *Não tem tido apoios financeiros? E outras ajudas?*
S.M.M. Sistematicamente, não. Até o PORTE PAGO tem tido alternância na sua concessão. A primeira vez que foi solicitado, foi-lhe negado por falta de peso…(não chegava aos 50 gramas, é o que se pode chamar

"cultura a peso"…); numa segunda tentativa, o pedido foi indeferido por se tratar de uma publicação sobre "matéria específica", depois foi concedido mas passado pouco tempo retirado novamente e depois novamente concedido numa certa percentagem (é a situação actual).

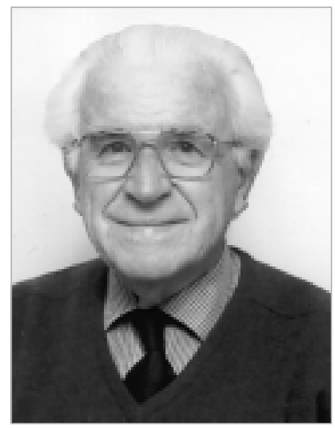
O JME tem vivido, ou melhor sobrevivido, graças aos seus generosos assinantes, aos estimados colaboradores que enviam artigos para publicação, aos tradutores que executam as traduções de muitos dos textos por mim seleccionados, às muitas palavras de apreço e de estímulo dos seus assinantes leitores.

G.M. *Com os problemas que temos em Portugal com a Matemática, acha que o JME poderia desempenhar um papel que ajudasse a sair da situação? Em, particular, que conseguisse despertar o interesse dos jovens para Matemática?*

S.M.M. Como todas as outras actividades que lidam com a Matemática poderá também dar a sua contribuição ainda que modesta dados os meios de que dispõe; a sua existência de já cerca de 20 anos, a sua crescente procura, as opiniões dos assinantes em muitas cartas que são dirigidas (seja-me permitido citar uma, de uma assinante na passagem à aposentação:"gostei muito do Jornal e quero agradecer o quanto ele me ajudou na minha vida profissional e como delegada de Matemática"), parecem mostrar que um JME mais divulgado poderia desempenhar algum papel nesse sentido, em particular para despertar o gosto pela Matemática.

G.M. *Que futuro vê para o jornal?*

S.M.M. Infelizmente um futuro não muito risonho… As novas tecnologias estão hoje facilmente ao alcance de todos, nomeadamente a Internet, e prestam bastante informação sobretudo mais rápida e atempadamente; não é necessário esperar um mês (caso do JME que é mensal) para ter a informação de que se precisa. Este ano tem havido já uma quebra no número de assinaturas sobretudo por parte dos estabelecimentos de ensino que preferem investir os sempre fracos recursos económicos de que dispõem na aquisição de material computacional.
Todavia, luto por que o JME continue…



Sérgio Macias Marques nasceu em 1928 em Loulé.
Licenciado em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, foi professor de Matemática entre 1952 e 1994, tanto no Ensino Liceal como no Ensino Superior.
Em 1984, recriou, em novos moldes, o *Jornal de Mathemática Elementar*, após um interregno de 100 anos, do qual tem sido Proprietário e Director. Nesta 2ª fase, estão publicados 118 números, do número 10 (Março de 1984) ao número 227 (Junho de 2004).

Jornal de Mathemática Elementar
R. António Saúde, 16 4º esq.
1500-149 LISBOA
Tel: 21 7783107
TM: 96 3937659
E-mail: jornal.matematica.elementar@clix.pt

Lição de Indução Matemática*

João Luís Soares
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Introduzimos o princípio de indução matemática e ilustramos a sua utilidade na demonstração de proposições matemáticas recorrendo a diversos exemplos. Terminamos com uma história que bem podia ter acontecido na Escola de Feitiçaria de Hogwarts, local do imaginário de um recente *best-seller* juvenil.

A técnica de demonstração de resultados em matemática denominada *princípio de indução matemática* tem vindo a ser utilizada nos últimos 350 anos. Já era algo familiar a Fermat (1601-1665) mas só surgiu de forma explícita com Pascal (1623-1662) na demonstração de resultados matemáticos relacionados com o conhecido Triângulo de Pascal. Neste artigo explicamos o que é o princípio de indução matemática e ilustramos a sua utilidade.

A formulação geral do princípio é a seguinte. Sejam p_1, p_2, p_3,... proposições matemáticas, cada uma delas podendo ser verdadeira ou falsa. Suponhamos que

(i) p_1 é verdadeira

e que, para todo $n \geq 1$,

(ii) p_n verdadeira implica p_{n+1} verdadeira;

então p_1, p_2, p_3,... são todas verdadeiras.

Vejamos a demonstração de um facto surpreendente usando este princípio. Se somarmos os primeiros n números inteiros ímpares qual é o resultado? Se tentarmos obter a resposta por experimentação obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \end{aligned}$$

É fácil observar que obtemos quadrados; de facto, parece que *a soma dos primeiros n números ímpares é igual a* n^2. Isto é o que se observa para os primeiros cinco valores de n. Poderemos ter a certeza que isso é verdade para todo n? Portanto façamos

$$p_n: \qquad 1+3+\ldots+(2n-3)+(2n-1)=n^2.$$

A proposição p_1 é verdadeira pois reduz-se à igualdade trivial 1=1. Agora, suponhamos que p_n é verdadeira para algum $n \geq 1$ e vejamos se p_{n+1} é verdadeira. Ora,

$$1+3+\ldots+(2n-3)+(2n-1)+\left[2(n+1)-1\right]=$$
$$=n^2+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Mas isto significa que p_{n+1} é verdadeira! Pelo princípio de indução matemática podemos então afirmar que p_n é verdadeira para todo $n \geq 1$.

O próximo exemplo é menos intuitivo e por isso demonstra ainda melhor o poder da técnica que enunciámos:

$$p_n:\ 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Por exemplo $1+4+9+16+25=5\times 6\times 11/6=55$. A proposição p_1 é verdadeira pois reduz-se à igualdade trivial 1=1.

---

* Este texto está disponível on-line em http://www.mat.uc.pt/~jsoares

Agora, suponhamos que p_n é verdadeira para algum $n \geq 1$ e vejamos se p_{n+1} é verdadeira. Ora,

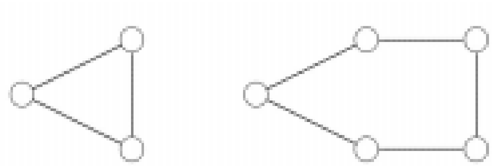
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6}$$

Mas, mais uma vez, isto significa que p_{n+1} é verdadeira! Pelo princípio de indução matemática podemos então afirmar que p_n é verdadeira para todo $n \geq 1$.

Ilustramos agora o princípio de indução matemática com a demonstração de um facto elementar sobre grafos. Grafos são estruturas geométricas constituídas por vértices (imaginem-se pontos do plano) e por arestas (imaginem-se linhas ligando pares de vértices). Dois vértices ligados por uma aresta dizem-se adjacentes. Um circuito de grau ímpar é um grafo muito particular constituído por um número ímpar de vértices e idêntico número de arestas definindo uma linha contínua fechada. Se esse número ímpar for $2n+1$ o circuito denota-se por C_{2n+1}. A próxima figura ilustra circuitos de grau ímpar com três e cinco vértices, respectivamente.

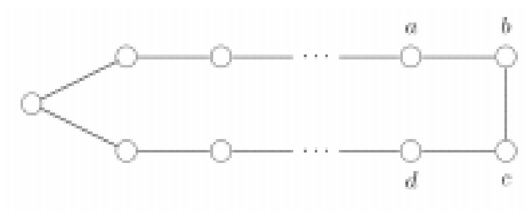


C_3 C_5

Só falta mais um conceito sobre grafos para expor a proposição que pretenderemos demonstrar. O número cromático de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor número de cores a usar na coloração de todos os vértices, cada um com a sua cor, de modo que vértices adjacentes não sejam coloridos com a mesma cor. Como é simples verificar por inspecção, os grafos C_3 e C_5 possuem o mesmo número cromático, três. A nossa proposição é a de que essa observação é a mesma para qualquer circuito de grau ímpar, nomeadamente,

p_n: $\chi(C_{2n+1})=3$.

Que a afirmação é verdadeira para $n = 1$ já tínhamos observado no parágrafo anterior. Agora, suponhamos que p_n é verdadeira para algum $n \geq 1$ e vejamos se p_{n+1} é verdadeira. Consideremos o grafo C_{2n+3} esboçado na figura seguinte:



C_{2n+3}

Nela estão destacados quatro vértices: *a, b, c* e *d*. Que este grafo pode ser colorido com três cores resulta do seguinte facto. O circuito de grau ímpar que resulta da exclusão dos vértices *b* e *c* e inserção de uma aresta ligando os vértices *a* e *d* tem $2n+1$ vértices. Denotemos o grafo assim construído por C'_{2n+1} que, pela hipótese de indução, pode ser colorido com três cores. Mas então podemos colorir C_{2n+3} com três cores também colorindo os vértices em comum com C'_{2n+1} com a mesma cor, e os vértices *b* e *c* com a mesma cor dos vértices *d* e *a*, respectivamente. Para mostrar que $\chi(C_{2n+1})=3$ falta agora mostrar que não é possível colorir C_{2n+3} com apenas duas cores. Um raciocínio por absurdo permite-nos chegar, de facto, a essa conclusão. Se isso fosse possível, como as cores usadas na coloração dos vértices *a* e *d* teriam que ser diferentes, também seria possível colorir C'_{2n+1} com duas cores apenas. Mas, pela hipótese de indução, isso é um absurdo! Concluímos então que não é possível colorir C_{2n+3} com duas cores e, por isso, $\chi(C_{2n+1})=3$, significando que p_{n+1} é verdadeira. Pelo princípio de indução matemática podemos então afirmar que p_n é verdadeira para todo $n \geq 1$.

O teorema das quatro cores é um conhecido resultado sobre a possibilidade de colorir um qualquer mapa geo-político usando no máximo quatro cores de modo a que países que partilhem uma mesma fronteira não sejam coloridos com a mesma cor (um número finito de pontos em comum não é considerado fronteira). Demonstramos aqui um resultado aparentado - veja-se a figura seguinte:

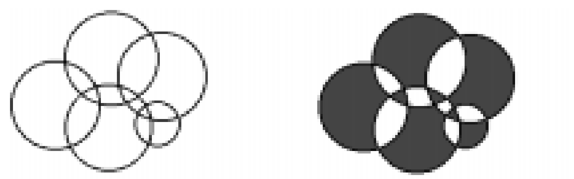


Fig. 1- Um conjunto de círculos coloridos com duas cores

Nomeadamente, se sobrepusermos no plano um número finito de círculos então é possível colorir o mapa resultante usando no máximo duas cores. Vamos demonstrar pelo princípio de indução matemática que a proposição seguinte é verdadeira para todo n ≥1:

$$p_n: \begin{cases} \textit{Qualquer mapa definido pela sobreposição} \\ \textit{de } n \textit{ círculos pode ser colorido com duas cores.} \end{cases}$$

Se $n = 1$, o mapa é constituído por um círculo apenas que é simples de colorir com uma cor. Suponhamos que p_n é verdadeira, para algum n≥1, e provemos a veracidade de p_{n+1}. Consideremos um qualquer mapa definido pela sobreposição de $n + 1$ círculos. Deste mapa destaque-se e exclua-se um qualquer círculo escolhido ao acaso. O mapa resultante é definido pela sobreposição de n círculos que, pela hipótese de indução, pode ser colorido com duas cores. Voltemos a colocar o círculo excluído e efectuem-se as seguintes correcções à coloração do mapa:

1. Cada região exterior ao círculo recolocado mantém a sua cor;
2. Cada região interior ao círculo recolocado troca de cor.

Veja-se a figura seguinte como ilustração:

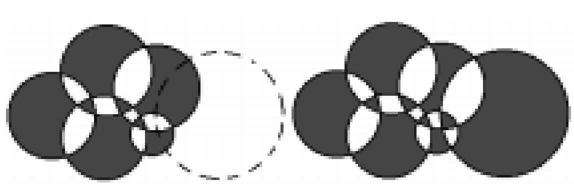


Fig. 2- Ilustração da redefinição de cores

Suponhamos, por absurdo, que após esta redistribuição das cores, existem duas regiões partilhando uma mesma fronteira e coloridas com a mesma cor. Se essa fronteira já existia antes da inserção do círculo excluído então as duas regiões em causa são ambas interiores ou ambas exteriores ao círculo. Em qualquer dos casos, e atendendo à hipótese de indução e às regras de redistribuição das cores é absurdo supor que as duas regiões possuam a mesma cor. Se a fronteira resultou da inserção do círculo excluído com a consequente partição de uma região em duas então o facto de uma região ser interior e a outra exterior juntamente com as regras de redistribuição das cores obriga a que as duas regiões fiquem coloridas com cores diferentes. Também neste caso é absurdo supôr que as duas regiões possuam a mesma cor. Fica assim provado que p_{n+1} também é verdadeira. Pelo princípio de indução matemática podemos então afirmar que p_n é verdadeira para todo n ≥1.

Finalizamos este artigo com uma história, em jeito de desafio, ilustrando alguma precaução necessária na utilização dos argumentos matemáticos que acabámos de descrever. Numa festa de aniversário de Hogwarts, Draco Malfoy conta que consegue demonstrar pela via matemática que todos naquela festa têm os olhos da mesma cor. Draco estava convencido ser capaz de colocar um problema que nenhum feitiço ajudaria a resolver – em Hogwarts esses eram os maiores desafios! Todos quiseram saber como era possível demonstrar algo que eles sabiam bem não ser verdade.

Os argumentos de Draco baseavam-se no princípio de indução matemática que todos eles tinham aprendido nessa semana nas aulas da professora Maria Glasserman, a professora de matemática. "Vejamos", começou, "se nessa festa existisse apenas uma pessoa, a afirmação seria certamente verdadeira." Todos acenaram que sim e pediram que se despachasse. "Suponhamos agora que, para algum n ≥1, a afirmação é verdadeira em qualquer festa com n pessoas e vejamos se se pode dizer o mesmo para qualquer festa com $n + 1$ pessoas". Aqui fez uma pausa para saber se estavam todos a acompanhar. Como aqueles acenaram que sim, continuou: "A estes $n + 1$ indivíduos atribuímos n convites para uma festa A_1 que se vai realizar no dia seguinte e outros n convites para uma festa A_2, que se vai realizar dois dias depois. A distribuição é feita de modo que todos recebam pelo menos um convite. Assim, pelo menos uma dessas pessoas, chamemos-lhe Zé, receberá convites para as duas festas A_1 e A_2. Pela hipótese de indução, todas as pessoas na festa A_1 têm os olhos da mesma cor de Zé e também todas as pessoas na festa A_2 têm os olhos da mesma cor de Zé. Por isso, na festa com $n + 1$ pessoas todos têm os olhos da mesma cor, a cor dos olhos de Zé. Pelo princípio de indução matemática aprendido nas aulas, em qualquer festa todos têm os olhos da mesma cor".

Dito isto, o Malfoy fez um sorriso maléfico e preparava-se para se afastar quando a Hermione Granger lhe tocou no ombro e disse: "Não vás tão depressa Malfoy, há um argumento na tua dedução que está incorrecto e é melhor saberes já."

Algumas proposições matemáticas que se descrevem em poucas palavras e que se demonstram através do princípio de indução matemática são as seguintes:

1. Para todo o inteiro $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$.
2. Para todo o inteiro $n \geq 0$, o resultado de $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ é um múltiplo de 13.
3. Para todo o inteiro $n \geq 1$, existe um e um só par de números inteiros não negativos (a, b) tal que $n = 2^a(2b + 1)$.
4. O termo de ordem n da sucessão de Fibonacci ($a_0=0$, $a_1=1$, $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$) é igual a

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Teste a sua compreensão do princípio de indução matemática.

Os grafos foram desenhados com auxílio do pacote *dcpic*, da autoria de Pedro Quaresma, que pode ser obtido em `http://www.tex.ac.uk/tex-archive/help/Catalogue/catalogue.html` nos arquivos CTAN.

Bartoon

Luís Afonso, *Público, 12-10-*2003
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)

O que vem à rede...

António Machiavelo
Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

ENIGMA: uma história que devia ser melhor conhecida

Iniciamos esta nova rubrica da Gazeta, onde se pretende sugerir viagens a páginas da internet de algum modo relacionadas com matemática, e que pensamos serem interessantes e úteis, com um tópico que é um bom exemplo para utilizar como uma de entre muitas possíveis respostas à pergunta tantas vezes disparada contra quem ensina a Rainha das Ciências: para que serve a Matemática?

A mansão de Bletchley Park

É infelizmente ainda relativamente pouco conhecido que a arma mais secreta, e provavelmente a mais eficaz, utilizada pelos ingleses durante a Segunda Guerra Mundial consistia num grupo de cripto-analistas, que incluia vários matemáticos, reunidos numa mansão com o nome de Bletchley Park, a uns 90Km a noroeste de Londres. Foi aí que foi eventualmente decifrado o código secreto, ou cifra, utilizada pelas tropas nazis para enviar mensagens confidenciais, contendo informações militares cruciais, via rádio, cifra essa conhecida pelo nome de Enigma. Estima--se que o trabalho desenvolvido em Bletchley Park, e no qual desempenhou um papel fundamental a Matemática, evitou, pelo menos, mais dois anos de guerra, salvando assim centenas de milhares de vidas! Uma das armas matemáticas usadas para quebrar a cifra Enigma é um resultado básico sobre grupos de permutações, que duas permutações conjugadas têm decomposições semelhantes em ciclos disjuntos, resultado este que foi descrito pelo criptólogo C. A. Deavours como "*o teorema que ganhou a Segunda Guerra Mundial*"!

A história do trabalho desenvolvido em Bletchley Park está contada em vários documentos acessíveis através da página *Decoding Nazi Secrets (NOVA Online)* da cadeia de televisão pública[1] norte-americana, cuja visita vivamente recomendamos:

http://www.pbs.org/wgbh/nova/decoding/

Aconselhamos começar pela transcrição do correspondente programa televisivo (disponível via um ponteiro colocado no fim da página), embora certamente tal não seja tão interessante como ver o próprio documentário, e depois consultar as páginas intituladas *How the Enigma Works* e *Mind of a Codebreaker*. Há ainda uma série de páginas contendo várias ideias, sugestões de actividades e alguns materiais para professores que queiram incluir algo sobre o assunto nas suas aulas, acessíveis através do "link": *Teacher's Guide*.

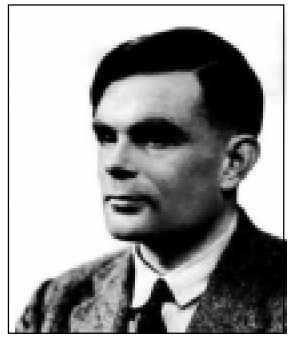
Bletchley Park, que durante a guerra era conhecida por "Station X", é agora um museu, com várias páginas sobre a sua história em:

http://www.bletchleypark.org.uk/

A descrição detalhada da cifra Enigma, e das máquinas com o mesmo nome que eram usadas para codificar e descodificar as mensagens com essa cifra, pode ser lida numa série de páginas escritas por aquele que foi o primeiro curador do museu de Bletchley Park, em:

http://www.codesandciphers.org.uk/enigma/index.htm

Nestas páginas pode-se ainda ler sobre o papel crucial desempenhado em Bletchley por Alan Turing (1912—1954), um dos grandes nomes da Matemática do século XX e um dos pioneiros da Ciência dos Computadores, assim como da Inteligência Artificial.


Alan Turing

A história da cripto-análise da cifra Enigma tem de facto início ainda antes da guerra, em 1932, quando os serviços secretos polacos enlistam os esforços de uma equipa de jovens matemáticos. Com o aumento do poderio militar alemão na década de 1920-30, os polacos tinham boas razões para se sentir ameaçados e começaram a escutar atentamente as comunicações militares do país vizinho de tendências bélicas. Eventualmente perceberam que estas eram codificadas com máquinas Enigma, mas que as tropas alemãs usavam uma versão modificada da versão comercial, em uso desde 1923, da máquina Enigma inventada em 1918 por Arthur Scherbius. A equipa de matemáticos, que incluia Marian Rejewski (1905-80), estava encarregue de quebrar a cifra que os alemães estavam a utilizar.

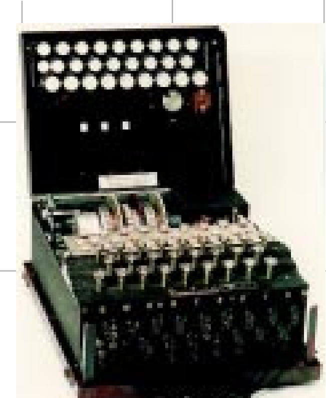
Rejewski rapidamente se apercebeu que podia usar resultados de Teoria dos Grupos para cripto-analisar a cifra Enigma. Os leitores que conhecerem os resultados básicos sobre grupos de permutações podem ler como Rejewski os usou para quebrar a cifra Enigma utilizada antes da guerra (os alemães introduziram posteriormente várias complicações que tornaram a cripto-análise substancialmente mais difícil) no seu artigo intitulado *An Application of the Theory of Permutations in Breaking the Enigma Cipher*, que está disponível no endereço:

http://frode.home.cern.ch/frode/crypto

que contém muitas outras coisas interessantíssimas.

O papel desempenhado no esforço de guerra por Bletchley Park foi mantido secreto durante cerca de 30 anos, e as pessoas que lá trabalharam nunca receberam qualquer reconhecimento oficial pelo seu papel, que foi decisivo na vitória dos aliados. Conhecer e divulgar esta história é assim honrar a memória desses heróis anónimos, além de ser uma história verdadeiramente fascinante! Fica pois o leitor convidado a um passeio pelas páginas atrás indicadas, e possivelmente outras que encontrará pelo caminho. É necessário no entanto não esquecer que muitas páginas na internet são escritas por pessoas com conhecimentos muito superficiais dos assuntos sobre os quais se decidem a dissertar ou simplesmente sumariar, e o resultado é por vezes de uma fraca, ou mesmo verdadeiramente má qualidade. Também na internet, nem tudo o que

vem à rede é peixe...


Uma máquina Enigma

[1] no sentido de ser financiada directamente pelo público, e não pelo governo, e por ser não-comercial.

Como vai a Ciência entre nós

Graciano de Oliveira
Universidade Lusófona, Lisboa

Sim, como vai a Ciência entre nós, portugueses?

A Ciência é um assunto muito falado e pode dizer-se que, em certos meios, anda nas bocas do mundo. Muitos falam de Ciência (e de Tecnologia) e dão-lhe importância com a justificação de que fornece um meio para aumentar a produção. É claro que, muitas vezes, aumentar a produção significa delapidar o planeta: com a tecnologia da pedra lascada ou da pedra polida era muito mais difícil destruir, matar e poluir do que com a tecnologia nuclear. Numa guerrinha à pedrada ou mesmo à espadeirada era uma trabalheira, e das perigosas, para matar um adversário ou dar cabo de um riacho enquanto que com uma bomba nuclear faz-se desaparecer uma cidade ou conspurca-se um rio enquanto o diabo esfrega um olho e, mais, quem decidiu não corre riscos imediatos, pode verificar o resultado das suas decisões sentado num sofá, avaliando em tempo real o seu efeito. Há também quem pense, hoje poucos, que a Ciência procura pura e simplesmente responder a um impulso fundamental do Homem que é compreender o Universo, impulso que vacas, macacos e paramécias não sentem, da mesma maneira que são indiferentes à música ou à poesia. Provavelmente foi este impulso que levou Gauss a investigar se era possível construir um polígono de 17 lados com régua e compasso ou Benjamin Franklin a procurar compreender o que se passava com papagaios voando por entre raios e coriscos. E há ainda quem pense que a Ciência (ou a Tecnologia, ou os derivados da Ciência) pode, se bem utilizada, melhorar o bem estar das pessoas. Dão como exemplo a descoberta da penicilina, as brincadeiras, aparentemente inócuas, de Luigi Galvani com as pernas das rãs que levaram ao domínio da electricidade ou o brinquedo conhecido por aparelho de Faraday que foi nem mais nem menos que o primeiro motor eléctrico. Imaginariam eles, Franklin e Galvani em pleno século XIII e Faraday no século XIX, que hoje não haveria praticamente nada sem electricidade (telemóveis, aviões, telefone, televisão, tomografia computarizada, ressonância magnética, guitarra eléctrica, batedeiras de sumos, torradeiras, etc., etc.)?

Há também quem pense, hoje poucos, que a Ciência procura pura e simplesmente responder a um impulso fundamental do Homem que é compreender o Universo, impulso que vacas, macacos e paramécias não sentem, da mesma maneira que são indiferentes à música ou à poesia.

Pessoalmente, impressiona-me muito o argumento de que os homens se distinguem das vacas, paramécias e macacos: querem saber tudo e gostam muito do que é inútil. Cultivam coisas como a Ciência, música, poesia a que aqueles bichos, tanto quanto se sabe (e saber-se-á tudo a este respeito?), não dão a menor importância. Parece que, faltando-lhes a curiosidade, só dão importância às aplicações e utilidades pois, fundamentalmente, só se preocupam com o que serve para a conservação do indivíduo ou da espécie. Os seus parceiros e colegas do género humano esbanjam energias em inutilidades e diversões embora não faltem os seguidores de vacas, paramécias e macacos que só querem produzir.

Fala-se, em certos meios, muito em Ciência, por alguma ou outra das razões acima apontadas ou porque se considera bonito e chique. Se calhar dá-se-lhe muito pouco valor, a sociedade portuguesa parece ter pouca sensibilidade para a Ciência.

Vou relatar algumas histórias verdadeiras que ilustram o que se passa. Convenci-me (erradamente?) de que merecem reflexão. Cada um que tire as conclusões que entender.

O Saber e a Escola

Tenho participado em reuniões de professores de vários tipos, desde reuniões organizadas por sindicatos, até reuniões promovidas por associações ou escolas para debate de problemas dos professores de Matemática. Ao contrário de muitos dos meus amigos, adoro reuniões e discussões acaloradas. Tenho visto discorrer sobre as qualidades que um professor deve possuir ou requisitos que deve satisfazer, como, por exemplo, ter boa capacidade de comunicação, qualidades histriónicas, gostar de crianças, ter sempre disposição para negociar as decisões com os alunos, etc.

Há um requisito que raramente aparece, ou que aparece em último lugar: saber a matéria que ensina. Tenho para mim que é, de longe, o mais importante e, quando digo "saber a matéria" pressuponho que isso inclui saber muito mais do que o que ensina e gostar do assunto. Quem não satisfaça estas condições poderá ser bom professor por mais comunicativo que seja e por muita habilidade que tenha para organizar e animar festinhas? Há quem considere que pelo lado do estudante, que ele saiba é secundário, o que interessa é que adquira competências! Se não souber, dizem, o problema não é grande, pode sempre informar-se na biblioteca ou, de preferência, na Internet uma vez que é mais moderno e mais fácil. Lá, está tudo! Ocorre-me logo aquela história do cirurgião que, depois de abrir a barriga ao doente, interrompe para ir à Internet tentar descobrir o que é aquela coisinha de cor esquisita que saltou do ventre do pobre. Quem se deixaria operar por um cirurgião que tivesse adquirido competências mas que, para distinguir o baço do pâncreas, tivesse de ir à Internet (foi treinado a não sobrecarregar a memória) comparar as cores? Duvido que mesmo os defensores destas ideias pedagógicas fossem na onda ... se fossem, acabar-se-iam rapidamente os pedagogos desta corrente.

Fui Presidente da SPM de 1996 a 2000. Tive um enorme prazer no desempenho do cargo e só não tento repetir porque já me falta energia. Durante o mandato visitei numerosas escolas, de norte a sul do país, no que alguns amigos meus, a título de brincadeira, chamavam Presidências abertas. Diziam isso com ar galhofeiro mas nunca me impressionei. Contactei com muitos professores e esse foi, entre outros, um aspecto que me deu muito gosto. Colhi a impressão, não sei se estou enganado, de que a vasta maioria discordava das orientações pedagógicas do Ministério. Mas nem todos! Conto um episódio que me parece significativo. Uma vez eu tinha planeado uma visita a uma Escola acompanhado de uma colega que faria uma palestra sobre um tema muito importante, parte dos programas do Ensino Secundário e sobre o qual os mal entendidos abundam. Dois ou três dias antes, recebemos um telefonema da Escola a anular a visita porque na referida Escola só havia Básico, logo temas que tivessem a ver com o Secundário não interessavam a ninguém!

A palavra de ordem parece ser "tudo menos conhecimento" imitando ideias em voga nos Estados Unidos da América. Entre nós há muito quem goste de imitar!

As Duas Culturas: Pinturas Rupestres e Dinossauros

Há não muitos anos, personalidades importantes da cultura portuguesa (J. Pacheco Pereira, Miguel Sousa Tavares, Vasco Graça Moura e outros) pronunciaram-se contra a preservação das pinturas rupestres e das pegadas dos dinossauros, ou, no máximo, admitiam-na desde que não originasse prejuízos nem grandes despesas. A razão era que não tinham qualquer interesse artístico. Às pinturas rupestres chamaram gatafunhos e rabiscos. Mas nunca ocorreu àquelas mentes iluminadas que poderiam ter não interesse artístico, mas interesse científico. Que me recorde ninguém tentou pôr as pinturas rupestres em pé de igualdade com a Pietà de Miguel Ângelo. Mas que saberíamos hoje da evolução das espécies ou do que foi e é o *homo sapiens* com literatos desta estirpe? Interesse científico interessa a alguém? Não foi Vasco Graça Moura que afirmou que os linguistas odiavam a literatura? Alguns ofenderam-se. Ora esta não dá para ofender mas sim para se tirarem conclusões ou, pelo menos, tentar entender o que se passa na mente do ilustre (não estou a ironizar, ele é de facto ilustre e isso é que aflige) autor. Talvez haja aqui uma lógica. A linguística é a Ciência da linguagem, os linguistas estão, ou parecem estar, mais do lado dos cientistas do que dos humanistas, não são bem intelectuais, logo não só não apreciam a literatura (eles não apreciam o que é bom) como a odeiam. Isto é interpretação minha, mas provavelmente não ocorreu a Vasco Graça Moura que há uma coisa chamada Ciência. Não é verdade que os cientistas tenham pelos no coração. Há muito cientista que adora música, pintura, teatro,... O contrário tem mais probabilidade de ser verdadeiro: os literatos com frequência detestam (não digo odeiam) a Ciência, no mínimo orgulham-se e dizem alto e bom som, com manifesto prazer e volúpia, que de Ciência (de Matemática) não entendem nada. É estranho que tenham prazer em publicitar a sua ignorância. Recordam-se de um artigo de Filomena Mónica, no Público, exibindo as suas dificuldades em utilizar a Internet e deduzindo que, se não conseguia encontrar a informação que pretendia através de uma sucessão de cliques, a culpa era do Ministério da Educação que não lha proporcionava na forma em que ela gostava? As razões pelas quais os cientistas têm muitas vezes fraca cultura humanística compreendem-se: investem muito tempo e esforço na Ciência que, por acaso, é matéria exigente. Mas qual o cientista que se orgulharia disso e viria a público afirmar, com prazer arrogante, que, de Fernando Pessoa ou Botticelli, mal ouvira ou não ouvira simplesmente falar?

Eu admito, envergonhado e desgostoso, que Graça Moura sabe infinitamente mais do que eu de poetas renascentistas italianos. Mas que saberá ele de anéis satisfazendo a condição de cadeia descendente sobre ideais à esquerda (explicação aos literatos: aqui "esquerda" não tem nada a ver com política)? Talvez eu ainda venha a perceber mais de Petrarca do que sei hoje, mas duvido que ele algum dia venha a saber o que é um anel, quanto mais satisfazendo à tal de condição de cadeia descendente! Qual das duas coisas é mais bela? Eis a questão irrespondível.

Os literatos dominam a cena largamente. Eles escrevem nos jornais, os cientistas permanecem na obscuridade.

A Ciência e a Indústria

Durante a preparação e durante o primeiro semestre do Ano Mundial da Matemática eu era Presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática. Como tal e para efeito das comemorações, tive oportunidade de trabalhar com jornalistas a quem eu solicitava certas entrevistas para determinados fins que agora não interessa especificar. Numa ocasião, solicitei a uma jornalista que entrevistasse um capitão da indústria, homem que estava à frente de uma organização de peso, era de formação tecnológica e aparecia na TV com alguma frequência e, obviamente, defendia que o desenvolvimento da economia portuguesa devia ser baseado nas tecnologias modernas e na Ciência e não em salários de miséria ou na exploração dos imigrantes, etc.

A jornalista teve muita dificuldade em o contactar. O senhor tinha uma secretária que respondia sistematicamente que estava ausente ou ocupado. Mas veio um dia em que conseguiu o contacto. Só que, ao pedir a entrevista e informar do tema (relações ciência-indústria, Matemática, Ano Mundial da dita) o homem respondeu desabridamente, eu acho que mesmo com falta de cortesia, no género "por favor não me mace, a Ciência e essas coisas não me interessam para nada. Pensa que não tenho mais que fazer?" e, claro, não houve entrevista. Quando a jornalista me contou o resultado das suas diligências, perguntei-lhe por que não respondeu na mesma moeda com um "mas que raio de empresário é o senhor?". Na realidade eu não sugeri "que raio", utilizei outra expressão muito mais vernácula e adaptada à circunstância que não reproduzo aqui por me parecer pouco compatível com o estatuto da Gazeta de Matemática apesar de aceitável em conversa particular. Mas é assim o Portugal que temos.

Nunca percebi se é a Universidade que está de costas voltadas para a indústria ou se é esta que prefere a mão de obra escrava do imigrante-infelizmente-doutor que era melhor que fosse analfabeto. Até pode ser que aconteçam as duas coisas em simultâneo: cada um, Universidade e Indústria, trata da sua vidinha.

Revistas Científicas

Seriam úteis publicações periódicas dedicadas à Ciência e dirigidas ao grande público? Estou a pensar em algumas que existem noutras paragens como a *Science et Vie* ou a *Scientific American*, esta agora disponível em português do Brasil. Ou revistas que, além da divulgação científica, fossem também um forum de discussão das políticas de Ciência e Ensino prosseguidas no nosso país?

No Manifesto para a Ciência em Portugal, dizia Mariano Gago que "nas últimas duas décadas apenas, as actividades de divulgação científica significativas no país foram poucas e, em regra, pouco continuadas. À ausência de uma tradição de um jornalismo científico soma-se a vacuidade crónica da televisão nesta matéria [...]. Nos jornais ou nas agências, até há poucos anos, raros profissionais vocacionados para os problemas científicos existiam minimamente informados e despertos para entender e transmitir notícias da ciência". Acrescenta o autor que "Esta situação tem melhorado a olhos vistos" mas que é "notória a carência de museus de ciência", etc. O Manifesto foi escrito em 1990 e, de então para cá, é verdade que se progrediu. Isso deve reconhecer-se e deve evitar-se o discurso do estilo "isto nunca esteve tão mal como agora" que só serve para que os adversários da mudança possam replicar que queremos o regresso ao antigamente. Mas também é verdade que estamos ainda muito longe de conseguir que a Ciência tenha o estatuto, quer a nível social quer político, que seria desejável.

Nunca percebi se é a Universidade que está de costas voltadas para a indústria ou se é esta que prefere a mão de obra escrava do imigrante-infelizmente-doutor que era melhor que fosse analfabeto.

As revistas científicas dirigidas ao grande público desempenhariam um papel útil na sensibilização dos portugueses para a Ciência, mas falta quem as publique. Já defendi que uma entidade possível seria a Federação Portuguesa de Associações e Sociedades Científicas (FEPASC). Criou-se há anos mas morreu à nascença, nunca teve dirigentes à altura nem se sabe o que faz, grande parte da nossa comunidade científica não sabe sequer que existiu (será que ainda existe?). É outra pecha nossa: gostamos muito de siglas (às vezes são úteis para se ser Presidente de qualquer coisa), fazem-se aparecer e esquecem-se rapidamente. A página da FEPASC na Internet (www.otc.pt/fepasc.htm) é pouco mais que inexistente.

Caldo Cultural

O caldo cultural em que vivemos é adverso à Ciência ou, pelo menos, não lhe é propício. Os intelectuais que valem e merecem respeito são os humanistas. Aliás quando se diz intelectual, pressupõe-se que se trata de um humanista. Eduardo Lourenço é um intelectual, mas não vejo nenhum homem que se tenha notabilizado nas Ciências que se pudesse chamar intelectual sem provocar risos.

Recentemente faleceu José Morgado, um ilustre matemático que, no tempo da ditadura, deixou obra no Brasil. Não mereceu uma linha da imprensa o que surpreende porque, além de matemático, foi, antes da revolução de Abril, homem de grande militância em favor da democracia e ensinou na Universidade do Porto nos últimos vinte e tal anos.

Se o Presidente da República faz uma visita, a luzidia comitiva que o acompanha é constituída por negociantes, patrões, empresários, desportistas, homens da cultura (humanistas), artistas, políticos, etc. Homens de ciência não lembram ao diabo.

Os Prémios são (quase) sempre Prémios literários. Escrevo a palavra quase entre parêntesis porque nos últimos anos, valha a verdade, apareceram alguns contemplando actividades científicas.

Que países ibero-americanos não foram ainda capazes de organizar Olimpíadas de Matemática ibero-americanas? Não falo das internacionais que seria mais complicado embora não tanto como o campeonato de Futebol de 2004 (não seria necessário sequer construir novas salas para se realizarem as provas). Começa a ser embaraçosa a situação de Portugal. Está reservado o ano de 2007 para as Olimpíadas ibero-americanas de Matemática terem lugar em Portugal. Até agora que se fez? Dois anos antes, teremos de confirmar se as queremos ou não. Quem se dispõe a trabalhar?

Na Assembleia da República pouco lugar há para a discussão das políticas científicas. Alguma vez houve alguma crise política com base na política para a Ciência? Mariano Gago, considerado um bom Ministro por muitos sectores, tinha peso na vida política ou era visto como o chefe de um simpático ministeriozinho parecido com o famoso Ministério da Igualdade? Algum partido alguma vez olhou para a Ciência ou desta se ouviu falar nalguma campanha eleitoral?

Conclusões a Tirar

Os portugueses olham assim a Ciência. Os estudantes convenceram-se de que a Matemática é um assunto tão seco, árido e difícil que nem vale a pena tentar e os pais compreendem e aceitam ou mesmo apoiam acompanhados por literatos famosos. Depois convenceram-se de que é possível pensar sem ter nada em que pensar. Este é o problema. Penso que para reduzir o insucesso escolar (particularmente em Matemática) não bastam Comissões Ministeriais, nem melhores livros, nem recomendações aos professores sobre como se devem comportar nas aulas, se devem distrair a pequenada, contar anedotas, serem comunicativos, dar conta de episódios divertidos da História da Matemática ou aplicações curiosas da Ciência como faz parte do receituário de alguns pedagogos. Há uma questão cultural. Há muita gente que acredita que fazer esforço para compreender a Matemática, ou qualquer Ciência, não vale a pena do mesmo modo que há povos que acreditam que a amputação do clítoris às criancinhas as torna puras. Mudar leva anos. Há-de erradicar-se do mundo a prática da amputação do clítoris mais depressa do que os portugueses hão-de acreditar na Ciência.

O Caso Especial da Matemática

O que é isso de Matemática? É fácil ou difícil? Por que é que tantos embirram com a Matemática?

O porquê da birra e a sua origem é difícil de descobrir. Em todas as culturas há ideias feitas, crenças e superstições que parecem não ter razão de ser e até são prejudiciais. Desaparecem quando todos deixam de acreditar (assim diria

La Palisse). Aqui está o segredo. A Matemática é difícil, como tudo. Necessita de esforço e estudo. Basta que se acredite nisto.

Dizia Whitehead que a Matemática Pura, nos seus desenvolvimentos modernos, tem o direito a ser considerada como a criação mais original do espírito humano.

Eu sempre apreciei a Matemática principalmente do ponto de vista estético, sendo para mim secundário (o que não significa que não seja importante) a questão das aplicações. Há necessidades básicas de curiosidade a satisfazer e provavelmente outras que não sei explicar. A melhor comparação para mim sempre foi entre a Matemática e a Arquitectura. Depois de estudar e compreender certos assuntos eu olhava-os mentalmente e sentia a impressão de grandeza e esmagamento que se sente quando se olha uma catedral imóvel e grandiosa ou um edifício imponente e arrasadoramente belo. Contempla-se e é tudo! E, no fundo, que aplicações terá a catedral? Para quê tanto espaço e tanta pedra, tanto ouro nos altares só para eu flectir os joelhos no genuflexório? Há outras razões que vacas, macacos e paramécias não alcançam.

Na minha juventude costumava dizer que a Matemática era um presente dos deuses, parecia-me que era a única área em que se tocava a verdade, uma verdade que parecia absoluta. Mais tarde, depois de algum contacto com o trabalho de Gödel, alterei a minha opinião e talvez, depois disso, tenho passado a ver a Matemática como algo de ainda mais aliciante, parecendo que nunca saberemos se todo o edifíco não cairá um dia por terra.

Cedo me fascinou, nos últimos anos do Liceu, a capacidade que a Matemática proporcionava para descobrir propriedades do mundo material fazendo rabiscos numa folha de papel sem ter de fazer observações. Que mistério! Por que é que, depois de admitir certos princípios, e enchendo de rabiscos umas folhas de papel, se chega às leis de Kepler? E, surpresa das surpresas, se depois se fizerem observações, verifica-se que os astros cumprem caninamente o que os rabiscos predizem!!

Voltemos à primeira pergunta: que é isso de Matemática? Eu penso que só se pode saber o que é Matemática, estudando Matemática. É mesmo difícil, apetece-me dizer impossível, dar uma pálida ideia do que é ou fazer propaganda do que é junto aos jovens. Pelo menos até hoje ninguém descobriu como. Noutros assuntos é mais fácil. Já vi livros ou programas de televisão sobre Biologia, Química, Astronomia, Física que dão uma ideia e podem despertar a curiosidade e interesse de jovens e velhos. De Matemática, nunca vi nada. Brincar com pirâmides de plástico e enchê-las de água não é Matemática. Corre actualmente um programa (na data em que este artigo foi escrito) no canal 2 da Televisão que pretende tratar de Matemática. Não trata. Vi 2 ou 3 episódios, não têm nada a ver com Matemática e deixei de ver. Não quero dizer que não tenha piada: o sotaque e os trejeitos da menina que lá aparece são engraçados. A minha conclusão foi, mais ou menos, esta: quem gostou que não vá para Matemática, vai ter desilusões quando vir uma demonstração a sério sem nenhuma menina a falar brasileiro; quem não achou graça (ressalvados os trejeitos da menina) tem muito mais hipóteses de vir a gostar de Matemática.

Voltemos à primeira pergunta: que é isso de Matemática? Eu penso que só se pode saber o que é Matemática, estudando Matemática.

Recordo-me (vagamente) de outros programas na Televisão, um em que contracenavam Paulo Almeida e João Caraça, mas, não conseguiram dizer, nem pouco mais ou menos, o que é a Matemática. Paulo Almeida afirmou que havia beleza mas, de todo, não a mostrou.

O que se faz quando se pretende divulgar a Matemática é substituí-la por motivações, aplicações, histórias de figuras simpáticas (com Galois à cabeça, digo Galois, não a Teoria de Galois). Não digo que não se deva fazer, cada qual faz o que pode e muita gente gosta, legitimamente, de se divertir. Um exemplo muito em moda e que me irrita de modo particular é o dos fractais. Projectam-se numa parede umas manchas coloridas parecidas com as que se obtêm quando se espalha um pingo de tinta numa folha de papel ... declara-se solenemente que é um fractal e aí está a Matemática! Se em vez de fractal se utilizasse a palavra mancha ou outra mais plebeia, lá se ia toda a graça. Penso que muitos dos palestrantes deste estilo gostam muito de acetatos e do *power point* mas não sabem, eles próprios, o que é um fractal. Os fractais não existem, imaginam-se! Mas a ignorância não impede que se fale, antes pelo contrário, facilita.

Humor

Se olharmos do ângulo adequado, é sempre possível sorrir. Que "as coisas nunca estiveram tão más como agora" é uma afirmação do tempo dos avós dos nossos avós cansada e gasta de tão repetida a propósito da Escola, Ciência, Economia, Cultura, Justiça, Saúde,..., de tudo quanto é português. O certo é que já é possível ver entre nós "O Último Tango de Fermat", "Flatland" e "Aquele Espermatozóide é Meu". E, mal ou bem, já todos vão para a Escola embora saiam de lá sem gostar de ler os jornais uns, outros incapazes de os entenderem (dizem as estatísticas).

Em jeito de graça, termino com três perguntas dedicadas a literatos e a todos os que abominam a Matemática. A graça é para ser saboreada também por filósofos e sociólogos sobretudo os que não cessam de falar no Teorema de Gödel ou na Teoria dos Quanta. E, claro, ninguém os proíbe de achar piada nem de rirem como fazem todos os que entenderam.

Pergunta. Quando se aplicou pela primeira vez o Teorema de Banach-Tarski?
Resposta. Há cerca de 2.000 anos no milagre da multiplicação dos pães. Se dúvidas havia, ficou definitivamente demonstrado que os ramos mais abstractos da Matemática têm aplicações (úteis e pacíficas) de fazer luzir o olho aos empresários obcecados com a produtividade.

Pergunta. Quantas carreiras de autocarros há em Telavive?
Resposta. Um amigo meu, matemático, que visitou Telavive disse-me que viu, para seu espanto, um autocarro com as letras hebraicas $\aleph_0$ (alefa e zero) no local onde se costuma pôr o número da carreira. Nunca pensara que a cidade estivesse tão bem servida em matéria de transportes públicos que os inteiros não bastassem para numerar os veículos!

No regresso da viagem, deu conta, como exemplo a seguir, ao Presidente da autarquia. Nunca recebeu resposta mas todos os vereadores, numa reunião dedicada aos transportes, riram a bom rir.

Pergunta. Quem teve pela primeira vez a percepção do conceito de segunda derivada?
Resposta. Luís de Camões quando escreveu (atente-se no último verso):

Mudam-se os tempos, mudam-se as vontades,
Muda-se o ser, muda-se a confiança;
Todo o mundo é composto de mudança,
Tomando sempre novas qualidades.

Continuamente vemos novidades,
Diferentes em tudo da esperança;
Do mal ficam as mágoas na lembrança,
E do bem, se algum houve, as saudades.

O tempo cobre o chão de verde manto,
Que já coberto foi de neve fria,
E em mim converte em choro o doce canto.

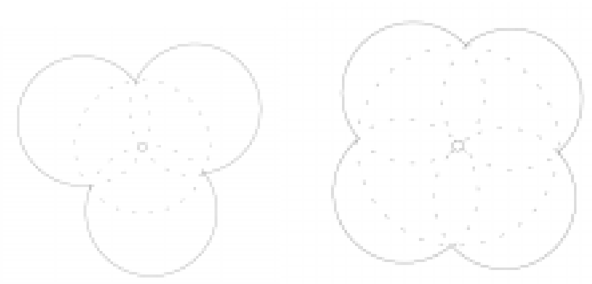
E, afora este mudar-se cada dia,
Outra mudança faz de mor espanto:
Que não se muda já como soía.

À Volta da Roda

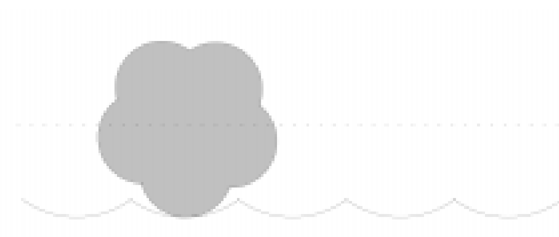
Paulo Ventura Araújo
Centro de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

1. Introdução

Neste artigo discutimos alternativas para a tradicional roda circular. O princípio que nos guia é que, por mais estranhas que sejam as rodas do nosso veículo, não é impossível que ele circule sem solavancos: basta que o faça em pista especialmente adaptada para o efeito. Restringimos a nossa discussão aos *trevos* de três ou mais *folhas*: tratam-se de rodas constituídas por três ou mais arcos de circunferência com o mesmo raio e amplitude, dispostos de modo a que as extremidades desses arcos (que são também os pontos comuns a dois arcos contíguos) fiquem todos situados sobre a mesma circunferência, e o centro desta última circunferência pertença a cada uma das circunferências que contêm os arcos. Na figura abaixo representam-se os trevos de três e quatro folhas.



Uma pista ajustada a estas rodas é uma que permita que o centro da roda tenha movimento rectilíneo; no caso dos trevos, veremos que essa pista é também ela constituída por arcos de circunferência, mas de raio igual ao dobro do das folhas do trevo. A figura abaixo mostra o trevo de cinco folhas apoiado na respectiva pista, sendo a trajectória do centro dada pela recta a tracejado.



Apresentamos na próxima secção uma prova elementar de que estas pistas proporcionam ao centro do trevo um movimento rectilíneo. Uma outra consideração, não menos importante para o conforto dos passageiros, é que não haja oscilações abruptas de velocidade; e nisto os trevos são francamente desaconselháveis: um motor convencional transmitiria ao eixo do veículo, e portanto à roda, uma velocidade de rotação sem variações bruscas; mas uma velocidade angular uniforme do trevo comunica uma velocidade altamente não uniforme ao seu centro. No caso do trevo de três folhas, por exemplo, a velocidade máxima é o dobro da mínima; e, por cada rotação completa da roda, a velocidade do centro oscila três vezes entre a máxima e a mínima.[1] Este resultado, que por certo

1 Para que um carro com rodas em trevo de três folhas, cada uma delas com 1,5 m de perímetro, se desloque a uma velocidade média de 100 km/h, estas têm que completar cerca de 22,4 voltas por segundo; isto resulta em mais de 67 oscilações de velocidade por segundo, entre um máximo de 120 km/h e um mínimo de 60 km/h, o que é sem dúvida mortífero.

desencoraja o fabrico em série destes veículos, é demonstrado no final da próxima secção.

Uma pergunta a que respondemos na nossa terceira secção é a de saber em que condições um ponto, ligado rigidamente a um círculo que roda sem escorregar em torno de outro círculo, tem movimento rectilíneo. Mostramos, usando métodos analíticos, que o único caso em que há tal movimento é quando o círculo móvel tem metade do diâmetro do círculo fixo e roda no interior deste; além disso, o ponto deve pertencer à circunferência do círculo móvel. Assim, os trevos que aqui consideramos são, num certo sentido, as únicas rodas *razoáveis* que são limitadas por arcos de circunferência e rodam sem solavancos em pistas também formadas por arcos de circunferência.

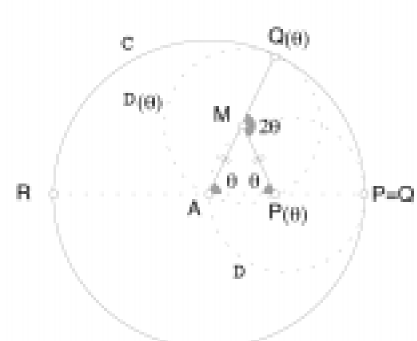
As curvas geradas pelo movimento de círculos móveis em torno de círculos fixos recebem o nome de *trocóides*, e foram objecto de uma classificação exaustiva. Exibimos alguns exemplos de trocóides na nossa última secção, onde fazemos uma breve descrição das *hipociclóides* e *epiciclóides*, que são as trocóides geradas por pontos no perímetro do círculo móvel. Para mais exemplos remetemos o leitor ao recente livro [R] ou ao clássico [T], em especial ao capítulo X deste último.

2. Um molho de trevos

Procedemos nesta secção ao estudo dos trevos de n folhas (onde $n \geq 3$) e à construção da respectiva pista. Como dizemos na introdução, os arcos (ou folhas) que constituem os trevos prolongam-se a circunferências que passam pelo centro do trevo, e rodam sobre arcos de circunferência de raio duas vezes maior. Assim sendo, o resultado seguinte é a chave para justificar o movimento rectilíneo do centro.

Proposição. *Suponhamos que* C *e* D *são circunferências no plano, a primeira fixa e a segunda rodando interiormente, sem escorregar, em torno da primeira. Se o raio de* D *for metade do de* C, *então a trajectória de cada ponto de* D *é um diâmetro de* C .

Demonstração. Na figura em baixo, C e D estão inicialmente em contacto no ponto Q de C, e A é o centro de C. Queremos mostrar que a trajectória do ponto P de D que no instante inicial está em Q é o diâmetro $\overline{RQ}$ de C. Dado $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$, seja $Q(\theta)$ o ponto de C tal que o arco (orientado) de Q para $Q(\theta)$ tem amplitude θ. Se rodarmos D até contactar com C em $Q(\theta)$, o novo ponto de D em contacto com C limita, com o ponto de contacto inicial P, um arco em D de comprimento igual ao arco $\widehat{QQ}(\theta)$ em C; e, como o raio de D é metade do de C, a amplitude do arco em D é o dobro do arco em C, ou seja 2θ. Assim, quandoD ocupa a posição D(θ) (ver figura), a posição $P(\theta)$ de P é dada pela condição de o arco orientado de $P(\theta)$ para $Q(\theta)$ ter amplitude 2θ. Daqui resulta que $P(\frac{\pi}{2}) = A$ e $P(\pi)=R$; e assim, para mostrar que $P(\theta)$ percorre o diâmetro $\overline{RQ}$, basta, por simetria, considerar o caso em que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.



Já mostrámos que $P(\theta)$ está na semi-recta com origem no ponto médio M do segmento $\overline{AQ(\theta)}$ e que faz um ângulo -2θ com o vector $\overrightarrow{MQ(\theta)}$. Seja T a intersecção dessa semi-recta com a recta RQ, e consideremos o triângulo MTA: o seu ângulo externo em M mede 2θ, e é igual à soma dos seus ângulos internos em T e A; logo $\angle T = \angle A = \theta$, MTA é isósceles de base $\overline{TA}$, e T pertence a D (θ). Temos então $P(\theta)=T$, o que conclui a demonstração. ◊

Interessa-nos ainda relacionar a *velocidade angular* da circunferência D com a *velocidade escalar* do ponto *P*. Para isso, observamos que, quando D se desloca da posição inicial para D(θ), o raio vector do ponto *P*, que inicialmente é horizontal, vai ocupar a posição $\overrightarrow{MP}(\theta)$, o que significa que D sofre uma rotação de $-\theta$. Além disso, a recta $P(\theta)Q(\theta)$ é ortogonal a RQ (o triângulo $MP(\theta)Q(\theta)$ da figura é isósceles, e portanto $\angle MP(\theta)Q(\theta)=\frac{\pi}{2}-\theta$); e daí vemos que, se $0<\theta<\pi$, o ponto *P* sofre, desde a posição inicial, um deslocamento $l(\theta)=r-r\cos\theta$, onde r é o raio de C. Suponhamos agora que o movimento de D em torno de C é dado por uma função $\theta=\theta(t)$ do tempo t. Da fórmula anterior obtemos então, para a velocidade do ponto *P*,

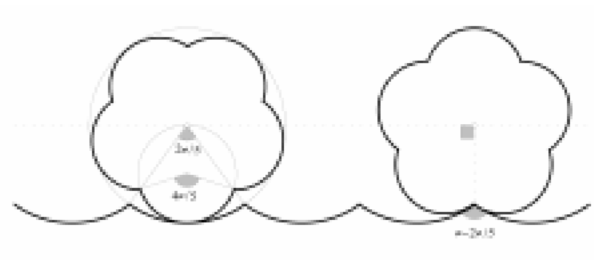
$$\frac{dl}{dt}=\frac{dl}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=r(\mathit{sen}\,\theta)\frac{d\theta}{dt}.$$

Esta fórmula pode ser reescrita de forma mais conveniente se tomarmos o valor absoluto de ambos os seus membros. Assim, chamando $\omega=\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$ à *velocidade angular* de D, $\upsilon=\left|\frac{dl}{dt}\right|$ à velocidade escalar de *P*, e $\alpha\in\left[0,\pi/2\right]$ ao ângulo (não orientado) entre as rectas *AQ* e *AQ*(θ), temos

$$\upsilon=r\omega\,\mathit{sen}\,\alpha, \qquad (1)$$

fórmula esta que é válida sem quaisquer restrições em θ. Logo, mesmo que ω seja constante, a velocidade escalar de *P* é variável, oscilando entre 0 e $r\omega$.

Vamos agora aos trevos, começando por calcular a amplitude angular de cada uma das suas folhas. Os *vértices* (ou seja, as extremidades dos arcos) de um trevo de n folhas dividem a circunferência que os contém em n partes iguais, e portanto cada par de vértices consecutivos define, com o centro do trevo, um ângulo de $2\pi/n$; e, como o centro pertence à circunferência de cada arco, esse arco tem uma amplitude de $4\pi/n$. Além disso, vê-se sem dificuldade que o ângulo (externo) em cada vértice do trevo é $\pi-2\pi/n$.



Quanto à pista, ela é constituída por uma infinidade de arcos de raio duplo do das folhas do trevo, dispostos lado a lado horizontalmente; cada arco da pista deve ter comprimento igual ao de uma folha do trevo, e portanto amplitude de $2\pi/n$. Tomamos, como posição inicial do trevo na pista, aquela em que o ponto médio de uma das folhas se apoia no ponto médio de um dos arcos da pista, e portanto o centro do trevo coincide com o centro da circunferência do arco. Nessas condições, a trajectória do centro do trevo é a recta (horizontal) que contém os centros das circunferências dos arcos. De facto, quando o trevo rola até se apoiar num vértice da pista, o ponto de apoio é um vértice do trevo; e, pelo que vimos atrás, a posição do centro do trevo nesse instante é a intersecção da vertical pelo ponto de apoio (ou seja, pelo vértice) com a dita recta horizontal. Além disso, o ângulo entre sucessivos arcos da pista é $\pi-2\pi/n$, igual àquele entre as folhas do trevo, de modo que, ao rolar, a transição de um arco para o seguinte se faz suavemente.[2]

Finalmente, relacionamos a velocidade angular do trevo com a velocidade escalar do seu centro (ou, dito de outro modo, com a velocidade a que se desloca o veículo equipado com tais rodas). Chamamos ω à velocidade angular do trevo, que supomos constante, e $r/2$ ao raio das suas folhas; o raio dos arcos da pista é então igual a r. O ângulo α que

2 Para sermos francos, há um problema com o trevo de três folhas, pois os ângulos do trevo e da pista são agudos, iguais a $\pi/3$; e, pouco antes de o trevo atingir cada vértice da pista, esse vértice toca e até perfura ligeiramente a folha do trevo em que este se apoiaria quando ultrapassado o vértice. Em rigor, assim, esse trevo não pode ser usado na prática. Mas esse problema não se põe com trevos de quatro ou mais folhas, pois os ângulos em causa são então rectos ou obtusos.

aparece na fórmula (1) é mínimo, igual a $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$, quando o trevo se apoia num dos vértices, e é máximo, igual a $\frac{\pi}{2}$, quando se apoia no ponto médio de um dos arcos. Assim, por cada arco percorrido, a velocidade υ do veículo oscila entre um máximo e mínimo respectivamente iguais a $r\omega$ e $r\omega\, sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)$.

No caso do trevo de três folhas (n=3) o primeiro valor é duplo do segundo; para n=4, essa razão baixa para $\sqrt{2}$; quanto maior for n menor será a razão, e o enjoo do passageiro diminuirá proporcionalmente.

3. Trocóides rectilíneas

Uma *trocóide* é a curva descrita por um ponto rigidamente ligado a um círculo móvel que roda sem escorregar em torno de um círculo fixo. O objectivo desta secção é mostrar que as únicas trocóides que são segmentos de recta correspondem ao caso estudado na secção anterior: o ponto gerador pertence ao perímetro do círculo móvel, que roda interiormente no círculo fixo e tem metade do diâmetro deste último.

Chamamos m à razão entre o raio da circunferência móvel D e o da circunferência fixa C. Convencionamos que m é positivo quando C e D são tangentes interiormente, e negativo no caso de serem exteriores uma à outra; assim, m pode tomar qualquer valor em $IR \setminus \{0,1\}$. Na figura A encontra-se representado o caso em que $0<m<1$: A é o centro de C, B o ponto de tangência inicial, e P o centro de D na sua posição inicial. Vejamos de seguida qual a rotação sofrida por D quando rola até ao novo ponto de tangência D definido pelo ângulo (orientado) θ na figura. O ponto C é tal que o arco orientado $\widehat{BC}$ tem amplitude θ/m; logo, o comprimento deste arco é igual ao de $\widehat{BD}$, e C é ponto de D que vai contactar com C em D. Assim, e como ilustra a figura (onde C', P', B' são as imagens de C, P, B por uma mesma translação), D sofre, entre as duas posições, uma rotação de $\theta-\theta/m$; e é fácil de ver que a mesma fórmula se mantém válida quando $m>1$ ou $m<0$.

Para prosseguir, supomos que a circunferência fixa C tem raio 1, e fixamos um sistema ortonormal de eixos com origem em A e no qual B tem coordenadas (1, 0). Introduzimos ainda os vectores

$$\vec{u}(\theta)=(cos\theta, sen\theta) \text{ e } \vec{v}(\theta)=(-sen\theta, cos\theta).$$

Quando o ponto de tangência completa um arco (orientado) de amplitude θ em C, o centro de D ocupa a posição $P(\theta)=(1-m)\,\vec{u}(\theta)$.

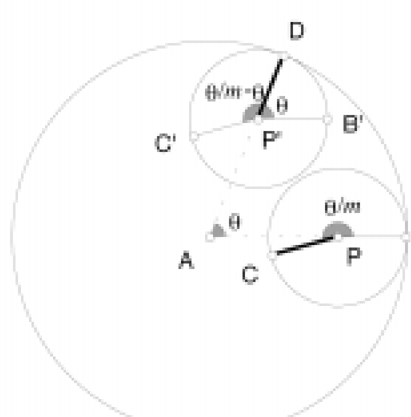


Figura A

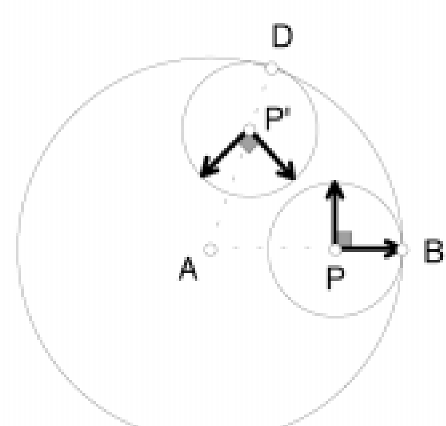


Figura B

Para descrever o movimento de um ponto Q rigidamente ligado à circunferência D, é conveniente tomar um *referencial móvel*; ou seja, um par de vectores ortonormais, aplicados em $P(\theta)$, que acompanhem o movimento rotativo de D (ver figura B). Uma escolha possível, pelo que vimos dois parágrafos atrás, é o par $\vec{u}(\theta-\frac{\theta}{m})$, $\vec{v}(\theta-\frac{\theta}{m})$. Assim, a equação do movimento de um ponto Q que, no referencial $(P;\vec{u}(0),\vec{v}(0))$, tenha, na posição inicial (θ=0), coordenadas polares ρ, θ_0 (onde $\rho \geq 0$ e $\theta_0 \in \left]-\pi,\pi\right]$) é

$$Q(\theta)=P(\theta)+\rho\, cos\theta_0 \vec{u}\left(\theta-\frac{\theta}{m}\right)+\rho\, sen\theta_0 \vec{v}\left(\theta-\frac{\theta}{m}\right)$$
$$=(1-m)\vec{u}(\theta)+\rho\, cos\theta_0 \vec{u}\left(\theta-\frac{\theta}{m}\right)+\rho\, sen\theta_0 \vec{v}\left(\theta-\frac{\theta}{m}\right). \quad (2)$$

Podemos dar outro aspecto a esta fórmula se exprimirmos $\vec{u}(\theta-\frac{\theta}{m})$ e $\vec{v}(\theta-\frac{\theta}{m})$ à custa de $\vec{u}(\theta)$ e $\vec{v}(\theta)$; mais geralmente, temos

$$\vec{u}(\theta+\varphi)=cos\ \varphi\, \vec{u}(\theta)+sen\ \varphi\, \vec{v}(\theta),$$
$$\vec{v}(\theta+\varphi)=-sen\ \varphi\, \vec{u}(\theta)+cos\ \varphi\, \vec{v}(\theta),$$

de onde, tomando $\varphi=-\frac{\theta}{m}$ e substituindo em (2), obtemos

$$Q(\theta)=\left[1-m+\rho cos\left(\frac{\theta}{m}-\theta_0\right)\right]\vec{u}(\theta)-\rho\, sen\left(\frac{\theta}{m}-\theta_0\right)\vec{v}(\theta). \quad (3)$$

Com esta notação, podemos enunciar o nosso resultado do seguinte modo:

Teorema. *Se o traço da curva* $Q(\theta)$ *for um segmento de recta então* $\rho=m=\frac{1}{2}$.

A condição $m=\frac{1}{2}$ exprime não só que o raio de D é metade do de C, mas ainda que D rola no interior de C; a igualdade $\rho=|m|$ é equivalente a que o ponto Q pertença a D. Além de serem necessárias, estas duas condições são, como vimos na secção anterior, suficientes para que Q tenha movimento rectilíneo. Ressalvamos que a prova do teorema fornece de facto um resultado mais forte: *se falhar alguma das condições enunciadas, então a curva descrita por Q não contém segmentos de recta*.

A demonstração do teorema depende de um lema que fornece uma condição necessária para que o traço de uma curva paramétrica seja um segmento de recta:

Lema. *Sejam* $I\subset I\!R$ *um intervalo não degenerado e* $\alpha: I\rightarrow I\!R^2$ *uma curva duas vezes derivável. Se o traço* $\alpha(I)$ *for um segmento de recta, então os vectores velocidade e aceleração da curva são linearmente dependentes em cada instante* $t\in I$.[3]

Demonstração. Seja R um ponto da recta que contém $\alpha(I)$, e $\vec{\omega}$ um versor da mesma recta. Podemos então escrever $\alpha(t)=R+\lambda(t)\vec{\omega}$, onde, uma vez que se tem $\lambda(t)=\left\langle \alpha(t)-R,\vec{\omega}\right\rangle$, a função escalar $\lambda(t)$ é também ela duas vezes derivável. Da expressão de $\alpha(t)$ obtemos $\alpha'(t)=\lambda'(t)\vec{\omega}$ e $\alpha''(t)=\lambda''(t)\vec{\omega}$, igualdades estas que mostram que $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ são linearmente dependentes.◊

Para aplicarmos o lema, temos que calcular as duas primeiras derivadas de $Q(\theta)$. No intuito de facilitar os cálculos, fazemos uso das igualdades

$$\vec{u}'(\theta)=\vec{v}(\theta) \text{ e } \vec{v}'(\theta)=-\vec{u}(\theta),$$

que relacionam os vectores $\vec{u}(\theta)$ e $\vec{v}(\theta)$ com as suas derivadas. Derivando (3), obtemos então

$$Q'(\theta)=\frac{m-1}{m}\left[\rho sen\left(\frac{\theta}{m}-\theta_0\right)\vec{u}(\theta)+\left(-m+\rho cos\left(\frac{\theta}{m}-\theta_0\right)\right)\vec{v}(\theta)\right],$$

$$Q''(\theta)=\left(\frac{m-1}{m}\right)^2\left[\left(\frac{m^2}{m-1}-\rho\cos\left(\frac{\theta}{m}-\theta_0\right)\right)\vec{u}(\theta)+\rho sen\left(\frac{\theta}{m}-\theta_0\right)\vec{v}(\theta)\right].$$

3 O mesmo enunciado é válido não só no plano, mas para curvas no espaço euclidiano de qualquer dimensão. Se a curva α for regular (ou seja, se $\alpha'(t)$ nunca for nulo), então a condição descrita é também suficiente para que o traço de α seja rectilíneo; mas não faremos aqui uso desse facto.

Uma vez que $\vec{u}(\theta)$ e $\vec{v}(\theta)$ são linearmente independentes, os vectores $Q'(\theta)$ e $Q''(\theta)$ são linearmente dependentes se e só se a matriz 2x2 formada pelos coeficientes de $\vec{u}(\theta)$ e $\vec{v}(\theta)$ nas fórmulas anteriores tiver determinante zero. O valor desse determinante é

$$d(\theta) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^3 \left[\left(\rho^2 + \frac{m^3}{m-1}\right) - \rho\frac{m(2m-1)}{m-1}\cos\left(\frac{\theta}{m} - \theta_0\right)\right]. \tag{4}$$

Ora, uma expressão do tipo $a+b\cos\varphi$, onde a e b são constantes, só é constante e igual a zero num certo intervalo $\varphi_0<\varphi<\varphi_1$ se for $a=b=0$. Se supusermos que a curva $Q(\theta)$ contém algum segmento de recta, então, pelo lema, $d(\theta)$ anula-se ao longo de algum intervalo não trivial; e, igualando a zero o termo constante e o coeficiente de $\cos\left(\frac{\theta}{m} - \theta_0\right)$ em (4), obtemos (atendendo a que $0\neq m\neq 1$) $\rho = m = \frac{1}{2}$. Isto completa a demonstração do teorema. ◊

4. Hipociclóides e epiciclóides

Retomando a notação e terminologia da secção anterior, as trocóides geradas por pontos no perímetro do círculo móvel D dizem-se *hipociclóides* se C e D forem tangentes interiormente um ao outro, e *epiciclóides* se o forem exteriormente. De facto, esta nomenclatura (empregue em [T] e em [R]) não é muito feliz na distinção que estabelece, pois, como veremos adiante, as epiciclóides são também hipociclóides (esta observação aparece em [T] mas escapou ao autor de [R]).

Começamos por fixar uma *parametrização* canónica destas curvas. Supomos, como anteriormente, que C tem raio 1 e que $m \in I\!R \setminus \{0, 1\}$ é a razão (com sinal) entre o raio de D e o de C , de modo que o raio de D é $|m|$. Se escolhermos um sistema de eixos em que o ponto gerador tenha, na posição inicial, coordenadas (1,0), então a *m-ciclóide* (hipociclóide se $m>0$, epiciclóide se $m<0$) é dada por

$$F_m(\theta) = (1-m)\,\vec{u}(\theta) + m\,\vec{u}\left(\theta - \frac{\theta}{m}\right). \tag{5}$$

Esta equação corresponde ao caso $\rho=|m|$ da fórmula (2) e à escolha, na mesma fórmula, do ângulo $\theta_0=0$ se $m>0$, e do ângulo $\theta_0=\pi$ se $m<0$. De seguida estudamos algumas propriedades das *m*-ciclóides.

Afirmamos que F_m é periódica se e só se m for racional. De facto, F_m é periódica se e só se existir $\theta_0>0$ tal que $F_m(\theta_0)=F_m(0)=(1,0)$, e esta igualdade é equivalente a que os ângulos θ_0 e $\theta_0 - \frac{\theta_0}{m}$ sejam ambos múltiplos de 2π. Supondo que é esse o caso, e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \theta_0 = 2k\pi \\ \theta_0 - \dfrac{\theta_0}{m} = 2k'\pi, \end{cases}$$

obtemos $m = \frac{k}{k-k'}$, e portanto m é racional. Reciprocamente, se m for racional, escolhemos um inteiro positivo k tal que k/m seja inteiro; e, tomando $k' = k - \frac{k}{m}$, verificamos que $\theta_0=2k\pi$ satisfaz ambas as equações do sistema, o que significa que F_m é periódica de período $2k\pi$. Está assim demonstrada a nossa afirmação.

Supomos agora que m é racional, e escrevemos $m=p/q$ na forma irredutível, sendo $p\in \mathbb{Z}$ e $q \in I\!N$. Pelo que acabámos de ver, o menor período positivo de F_m é $2k\pi$, onde k é o menor natural tal que $\frac{k}{m}$ é inteiro; e, como $\frac{k}{m} = \frac{qk}{p}$, daqui vemos que $k=|p|$. Isso significa que é necessário que D complete $|p|$ voltas a C para que o ponto gerador de F_m volte ao local de partida (1,0), e que a imagem da restrição de F_m a qualquer intervalo fechado de comprimento $2|p|\pi$ é toda a curva. Tratamos em seguida de contar o número de *cúspides*[4] de F_m, ou seja, o número de pontos distintos que a curva tem em comum com C . Por (5), vemos que $F_m(\theta)$ pertence a C se e só se for $\vec{u}(\theta)=\vec{u}\left(\theta-\frac{\theta}{m}\right)$, o que é equivalente a $\frac{\theta}{m}=2k\pi$, $k\in Z$ ou ainda $\theta=\frac{2kp}{q}\pi$. Vemos assim que há q cúspides distintas, correspondentes aos ângulos

$$0,\frac{2p}{q}\pi,\frac{4p}{q}\pi,\ldots,\frac{2(q-1)p}{q}\pi. \qquad (6)$$

Cada par de cúspides consecutivas (no sentido de distarem um ângulo $\frac{2p}{q}\pi$ uma da outra) limita um arco em F_m, que é portanto constituída por q arcos.

Um fenómeno curioso ocorre se substituirmos em (6) o inteiro p por $p'=q-p$: ignorando a parcela 2π, obtemos a lista

$$0,\frac{-2p}{q}\pi,\frac{-4p}{q}\pi,\ldots,\frac{-2(q-1)p}{q}\pi, \qquad (7)$$

que corresponde exactamente aos mesmos pontos de (6), uma vez que, para cada $j=1,\ldots,q-1$, se tem

$$\frac{2jp}{q}\pi+\frac{2(q-j)p}{q}\pi=2\pi, \text{ e portanto}$$

$$\frac{-2jp}{q}\pi\equiv\frac{2(q-j)p}{q}\pi \ (\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

A conclusão que tiramos é que, se os parâmetros m e $m'(\neq 0,1)$ forem *complementares* (ou seja, tais que $m+m'=1$) e racionais, *então* F_m *e* $F_{m'}$ *têm exactamente as mesmas cúspides*. O que de facto se passa é ainda mais inesperado: F_m e $F_{m'}$ coincidem pontualmente uma com a outra, e isso acontece com qualquer par m, m' de parâmetros complementares, sejam ou não racionais.

Teorema. *Se m e m' forem complementares então F_m e $F_{m'}$ têm o mesmo traço.*[5]

A ideia da prova é fazer uma mudança de variável na parametrização (5) de F_m para a transformar numa expressão semelhante, mas com m' no lugar de m. Essa mudança é de fácil descrição, mas convém motivá-la um pouco. Para esse efeito, restringimo-nos por agora ao caso em que m, m' são racionais e ambos positivos. Nesse caso, temos $m=\frac{p}{q}$ e $m'=\frac{p'}{q'}$, onde $p+p'=q$ e $p,p'\geq 1$; e podemos tomar, como *domínios fundamentais* de F_m e $F_{m'}$ (ou seja, que cubram o traço da curva exactamente uma vez), os intervalos $[0,2p\pi[$ e $[0,2p'\pi[$, respectivamente. Para estabelecer uma correspondência bijectiva entre os dois, basta-nos multiplicar a variável θ no primeiro intervalo por $p'/p=m'/m$. Finalmente, comparando (6) e (7), vemos que as mesmas cúspides são percorridas por F_m e $F_{m'}$ por ordens inversas uma da outra, e convém por isso que a mudança de parâmetro reflicta a troca do sentido em que a curva é percorrida. Somos assim levados a considerar a nova variável $\theta'=\frac{-m'}{m}\theta$.

De facto, esta mudança funciona sem qualquer restrição em m, m': usando a igualdade $m'=1-m$, obtemos

$$\theta=\theta'-\frac{\theta'}{m'} \text{ e } \theta-\frac{\theta}{m}=\theta',$$

de onde, substituindo em (5), tiramos

$$F_m(\theta)=F_{m'}(\theta'),$$

o que conclui a prova do teorema.

Nas figuras mostramos algumas m-ciclóides para valores racionais de m; a curva correspondente a $m=-1$ (ou $m=2$) é a *cardióide*. Para mais exemplos consultem-se [R] ou o

4 Cúspide é um vértice (ou singularidade) onde dois arcos de uma mesma curva são tangentes um ao outro. Mostra-se sem dificuldade que é esse o caso dos pontos da m-ciclóide que pertencem à circunferência fixa C.

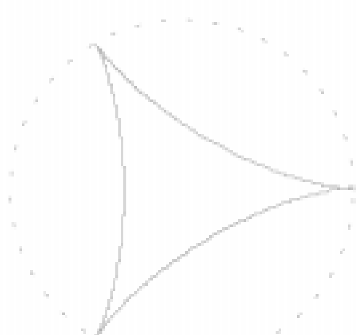
5 Deste teorema resulta em particular que as epiciclóides, que correspondem a parâmetros $m<0$, são também as hipociclóides com parâmetro $1-m>1$ (que se obtêm quando a circunferência móvel tem raio maior que o da fixa).

capítulo X de [T]; a segunda destas referências contém ainda detalhes históricos e um estudo destas curvas abrangendo muitos aspectos não mencionados no presente artigo, e por isso se recomenda especialmente.[6]

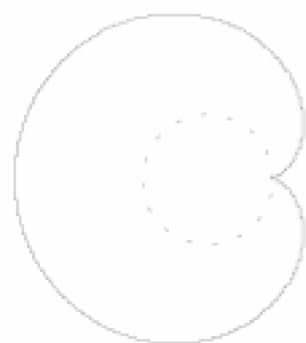
5. Referências

[R] John W. Rutter, *Geometry of curves*, CRC Press, 2000.

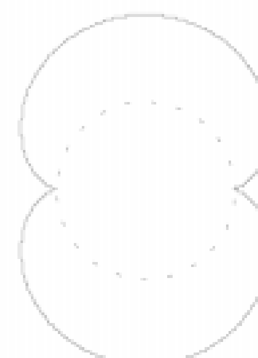
[T] Francisco Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables - Tome II*, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1909 (reedição Jacques Gabay, Paris, 1995).



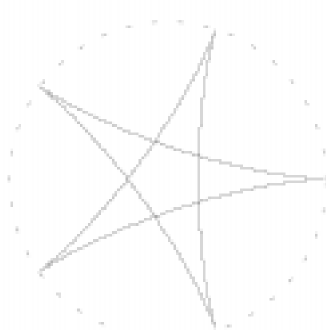
m = 1/3 ou m = 2/3



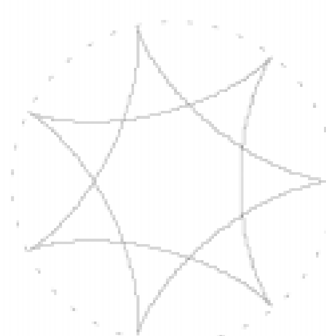
m = 2 ou m = -1



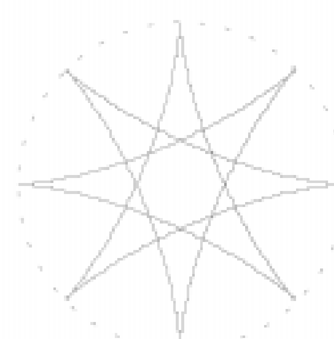
m = 3/2 ou m = -1/2



m = 2/5 ou m = 3/5



m = 2/7 ou m = 5/7



m = 3/8 ou m = 5/8

6 O autor deste artigo construiu uma animação no Geometer's Sketchpad que gera todas as *m*-ciclóides para valores racionais $m=p/q$ com $p,q\in\{1,2,...11\}$, e dispõe ainda de uma outra animação com um trevo de *n* folhas ($3\leq n\leq 8$) a rolar na sua pista. Quem quiser estas animações é convidado a pedi-las ao autor por correio electrónico (paraujo@fc.up.pt).

A Constância de Pi

Os matemáticos nem sempre lêem o que os sociólogos e filósofos sobre eles escrevem. Mas por vezes vale a pena estar atento. Quanto mais não seja, para que os disparates não se espalhem.

O número Pi (π) é uma das constantes mais ubíquas e mais interessantes da matemática. Conhece-se hoje com mais de um milhão de milhões de algarismos, mas houve uma altura em que era representado apenas com um dígito. Nessa primeira aproximação para π, que é a implícita na *Bíblia*, no *Livro dos Reis*, escrito cerca do século VI a.C., π é simplesmente o número 3.

Ainda antes disso, os Babilónios tinham uma aproximação melhor, 3,125, e os Egípcios usavam o quadrado de 16/9, que é 3,16049... No século III a.C., Arquimedes descobriu um método para calcular π delimitando uma circunferência com polígonos interiores e exteriores. Os perímetros dos polígonos são fáceis de calcular e o da circunferência fica enquadrado entre estes. É um método engenhoso. E um método que permite obter a aproximação que se queira.

Quando os trabalhos de Arquimedes foram redescobertos pelos Árabes e, depois, pelos Europeus, iniciou-se uma corrida ao cálculo de π. No século IX, Al-Khuarizmi obteve quatro casas decimais. Nos fins do século XVI, conseguiram-se 20 casas decimais; nos fins do XVIII, 140. Em princípios do século XX, estava-se em mais de 500. Pouco depois, apareceram os computadores e conseguiram-se milhares de dígitos, depois milhões, depois milhares de milhões... O recorde de cálculo cabe hoje ao japonês Yasumasa Kanada, que em fins de 2002 conseguiu obter mais de um milhão de milhões de algarismos.

DEFINIÇÕES DE π INDEPENDENTES DA GEOMETRIA

O método de Arquimedes foi pioneiro também por mostrar que o cálculo de π pode ser independente da geometria. De facto, ao escrever as expressões dos perímetros dos polígonos, as fórmulas autonomizam-se. Pi aparece como um simples número. Seguindo esse mesmo caminho, François Viète (1540–1603) obteve a primeira fórmula infinita para π:

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \ldots .$$

No século XVII, com o nascimento da análise, vários matemáticos, entre os quais Wallis, Leibniz e Newton, encontraram fórmulas mais eficientes para o cálculo de π e veio a verificar-se que este número surge nas circunstâncias mais inesperadas. Conhece-se a célebre fórmula de Euler $e^{i\pi}+1=0$, conhece-se a distribuição normal e conhecem-se muitas outras situações onde o número π surpreendentemente aparece.

Dada essa ubiquidade de π, é natural que apareçam hoje definições dessa constante independentes da geometria. J.-M. Arnaudiès e H. Fraisse escrevem na sua *Analyse* (Dunod, Paris, 1988, p. 217): «Chama-se Pi e denota-se π o dobro da única raiz da equação $\cos x = 0$, compreendida entre 0 e 2». Páginas antes, a função coseno é também definida sem recurso à geometria: $\cos z=(e^{iz}+e^{-iz})/2$ (p. 210), sendo a função exponencial dada pela série

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ (p. 209).}$$

No célebre tratado de Bourbaki (FVR III.4§1) aparece uma definição ainda menos directa: o número π é o real que aparece na fórmula $2\pi e(x)$ da derivada da função $e(x)$, que é o homomorfismo contínuo do grupo aditivo **R** sobre o grupo multiplicativo **U** dos números complexos de módulo unitário...

Este tipo de definições é hoje perfeitamente normal em matemática. A constante Pi, apesar de originada num problema geométrico, surge em contextos muito mais vastos do que os da geometria euclidiana.

CONSTANTE OU VARIÁVEL?

O que os matemáticos compreendem pode não ser compreendido por leigos e disso não vem qualquer mal ao mundo. O que é perigoso é que se pretenda desenvolver uma filosofia crítica da matemática e da ciência com base em conceitos que não se entendem. É o que se passa, conforme foi apontado pelo professor Jorge Nuno Silva num artigo publicado no *Jornal de Letras* («Duas culturas», 21 de Janeiro de 2004), no novo livro de Boaventura Sousa Santos *Conhecimento Prudente para uma Vida Decente* (Porto, Afrontamento, 2003). Nesse livro, que se apresenta como uma defesa das teses pós-modernas desse autor, apresentadas em 1987 em *Um Discurso sobre as Ciências* (Porto, Afrontamento), Joan H. Fujimura escreve «Enquanto parte da revolução na geometria, o valor do perímetro do círculo unitário (ou Pi) mudou». Citemos o texto:

> Até essa altura [década de 1820], a geometria euclidiana dominara o mundo da matemática ao longo de 2000 anos. Até que, na década de 1820, três matemáticos — Carl Friedrich Gauss, na Alemanha, János Bolyai, na Hungria, e Nikolai Ivanovich Lobachewsky, na Rússia — criaram, independentemente uns dos outros, novas formas de actividade matemática que punham em causa o quinto postulado de Euclides, no qual assenta a geometria plana euclidiana. (p. 155).

O que aqui se encontra é uma tentativa de apresentar o desenvolvimento da matemática como uma série de choques contraditórios em que todas as verdades são históricas e relativas. Gauss, Bolyai e Lobatchevski investigaram a coerência de geometrias mais gerais que não incluíssem o postulado das paralelas. Verificou-se que isso era possível, o que constituiu uma revolução em geometria — não no sentido de colocar em causa Euclides e sim para generalizar a geometria de que este foi iniciador. É esse o sentido da axiomática, sentido que em matemática se entende perfeitamente: diferentes conjuntos de axiomas dão origem a diferentes construções geométricas. Não tem qualquer sentido dizer que umas refutam ou contradizem as outras.

A pretensão de apresentar o desenvolvimento da matemática como uma pura construção social sem critérios objectivos de validade, portanto com uma evolução em rupturas sucessivas com o passado, leva a várias interpretações abusivas. Prossigamos a leitura:

> A visão de um valor 'constante e universal' do perímetro de um círculo unitário (π) foi refutada há 170 anos pela geometria não-euclidiana, como está bem documentado na história da matemática. Na matemática e na física do século XX, o valor do π não-euclidiano passa a depender do movimento, do espaço-tempo e da gravidade (p. 154).

Segundo se lê um pouco à frente, isto constitui «um dos mais interessantes temas de estudo da geometria pós-euclidiana» (p. 157). Os matemáticos e físicos ficam assim surpreendidos por saber que a procura de valores variáveis de π é um dos seus interessantes temas de estudo...

Na realidade, o «constante e universal» valor de π surge na geometria euclidiana como a razão constante entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro e não pode ter o mesmo significado geométrico noutras geometrias. Numa superfície esférica, por exemplo, não há uma razão constante entre uma circunferência e o seu diâmetro, entendendo este como a linha sobre a superfície curva. Não é verdade que a constante π mude. A realidade é que esta constante surge num contexto e não noutro.

Continuemos a leitura, que se está a revelar elucidativa.

> A partir da revolução pós-euclidiana, porém, os matemáticos construíram uma infinidade de distâncias, muitas das quais são usadas no dia-a-dia da investigação e das aplicações científicas. Para cada uma dessas distâncias haverá um π diferente. (p. 158)

Fala-se aqui de distâncias não-euclidianas e introduz-se pois um outro tipo de generalização. Trata-se de novo de um quadro no qual o cálculo de π não tem sentido. As «circunferências» não são já circunferências e os «raios» não são já raios.

O HORROR ÀS CERTEZAS

*D*urante séculos, os matemáticos construíram o seu edifício acumulando com esforço pedra sobre pedra. Entre as histórias mais heróicas dessa batalha destaca-se a de π. Primeiro, descobre-se este facto improvável: a existência de um rácio constante entre o perímetro de uma circunferência e o comprimento do seu diâmetro. Depois, inventam-se métodos mais aperfeiçoados para o cálculo de π, métodos tão perfeitos que essa constante é hoje conhecida com mais de um milhão de milhões de dígitos. A análise autonomiza-se da geometria e, nesse movimento, π revela-se como uma constante definida independentemente de considerações geométricas. Ao generalizar-se a geometria de Euclides, π mantém-se como constante de uma geometria particular e como constante ubíqua na análise e em variados outros ramos da matemática. Curiosamente, mesmo em geometria não euclidiana a constante π aparece nas fórmulas de áreas de polígonos e nas áreas e perímetros de círculos padrão. Tudo isto é intolerável para a filosofia pós-moderna, que se compraz na tentativa de desconstruir a razão e o conhecimento. Num dos passos mais tristes do texto que temos vindo a citar, afirma-se que «Os matemáticos e os cientistas mudaram o mundo ao desafiar os cânones universais e as constantes» (p. 164). Nós diremos, pelo contrário, que os matemáticos e os cientistas mudaram o mundo ao descobrir regularidades universais e constantes matemáticas. Bem hajam!

Inquérito: Mais exames no sistema de ensino?!

É do conhecimento geral que o Ministério da Educação pretende introduzir mais exames no sistema de ensino. Há quem defenda que tal medida poderá levar a um maior empenho por parte dos alunos e a uma maior responsabilização por parte dos professores. No entanto, há quem defenda que a existência de um exame final pode deformar negativamente a forma como o aluno estuda, ou a forma como o professor ensina. Há mesmo quem afirme que os exames são psicologicamente prejudiciais para os alunos, nomeadamente como fonte de stress ou de depressão.

A respeito deste tema, a Gazeta de Matemática foi ouvir a opinião de alguns professores e alunos a quem colocou as seguintes questões.

Questão 1*: O Ministério da Educação pretende introduzir mais exames no sistema de ensino. Que pensa disso?*
Questão 2: *Diz-se que os alunos passam a estudar como se se preparassem para o exame e os professores passam a ensinar com o mesmo objectivo. Em resumo, os exames têm uma carga muito negativa, diz-se até que* stressam *os alunos. Devem, apesar disso, manter-se ou vê alguma alternativa?*
Questão 3: *Segundo estatísticas recentes temos 60% de cidadãos com habilitações que não ultrapassam o 6º ano de escolaridade. E 80% dos empresários não ultrapassam o 9º. Qual é o problema? E no caso particular da Matemática, qual o interesse em estudar esta disciplina? Já se viu algum cidadão, mesmo que seja empresário, com dificuldades na vida por não saber calcular as raízes de uma equação do segundo grau? Mas há algum tópico que tenha, de facto, aplicações frequentes no dia a dia ou o interesse da Matemática é mera invenção? Ou a questão das habilitações deve encarar-se doutra maneira? Quer comentar com base na sua experiência de professor/aluno?*
Questão 4: *Dizem as mesmas estatísticas que mais de metade dos portugueses acha que, uma vez terminados os estudos escolares, não precisa mais de aprender. Que acha desta atitude? Que pode fazer a Escola para a alterar? Pensa que simplificar as matérias a leccionar pode ajudar?*

As respostas obtidas são apresentadas a seguir, por ordem alfabética dos nomes dos seus autores.

Cláudia Costa de Albuquerque Pinto
Escola E. B. 2, 3/S de Penalva do Castelo

Questão 1: Acredito que a introdução de mais exames no sistema de ensino leva a um maior empenho dos alunos e a uma maior responsabilização dos professores. Permitem uma regulação do sistema educativo se os resultados forem divulgados não para catalogar as escolas em "as melhores" ou "as piores" do ranking, mas sim para avaliação de todo o trabalho desenvolvido. Os exames têm também um papel social e selectivo. De alguma forma os resultados dos exames devem ser também um instrumento de trabalho para os professores e para os órgãos de gestão da Escola, tendo em consideração o contexto, sabendo o ponto de partida, o percurso decorrido e o resultado final. Assim, caminha-se para encontrar o que a Escola trabalhou e o que pode ou deve vir a trabalhar.

Por outro lado, os exames permitem que os alunos se comecem a habituar a situações de uma avaliação "mais formal". Ao longo da vida eles terão de passar por diversas situações de "exame" (para obter a carta de condução, na seriação dos candidatos na procura de um emprego, …).

Mas que peso terão os exames na avaliação sumativa?

Terão pesos diferentes para cada ciclo?

Que tipo de prova?

Não poderá ser uma prova que valorize a memorização e mecanização de procedimentos pois isto acarretaria um rol de aspectos negativos, como um aumento do abandono escolar, actividades lectivas preparadas em função do exame provocando a redução das actividades de investigação/ práticas, fuga da actual ideia de ensino individualizado e diferenciado. Poderíamos cair numa situação de selecção precoce dos alunos no seu percurso escolar.

Outro aspecto a ter em conta com a realização de exames é que os alunos não estão em igualdade de circunstâncias. Há diferenças muito significativas ao nível da base sócio-cultural dos alunos, do tempo passado na Escola, na ocupação dos tempos livres, no desgaste diário nos transportes.

Os exames são apenas uma gota de água na complexidade do sistema educativo, bem mais importante do que os pesos que eles possam ter, deverão ser sempre a interiorização de boas práticas docentes.

Questão 2: Ainda existe muito enraizada em alguns professores e fundamentalmente nos alunos e nas famílias a ideia que o processo de aprendizagem se reduz basicamente à reprodução dos mecanismos transmitidos pelo professor ou aprendidos nos livros. A ideia interiorizada é que o essencial da aprendizagem se processa por mecanismos de transmissão, absorção e repetição. Além disso, os professores são revistos nos resultados obtidos pelos seus alunos nos exames.

Não creio que os exames *stressem* os alunos, desde que os alunos estejam devidamente preparados. Desde que os alunos reconheçam nos exames o que habitualmente trabalham no dia a dia escolar. Os problemas associados ao nosso ensino não se resolvem por haver ou não exames.Com as actuais provas de aferição já se começa a notar um equilíbrio entre questões que envolvem os conhecimentos de conceitos e procedimentos, raciocínio, comunicação e resolução de problemas. O problema é que mudar mentalidades e hábitos de trabalho é um processo árduo e moroso, e ainda são muitos os professores que acabam por insistir nas suas aulas e nos momentos de avaliação em questões que envolvem a memorização e mecanização de procedimentos.

Eu posso saber muito de literatura e nem por isso tenho de ser escritora. Posso saber muito de flores e nem por isso tenho de ser jardineira.

Questão 3: Em Portugal há a ideia de que as habilitações literárias de um indivíduo estão sempre associadas ao seu desempenho profissional. Isto acarreta um efeito muito redutor.

Um cidadão que possua *n* mestrados não significa que tenha de mudar de profissão. Um professor do ensino básico/secundário que possua um ou mais mestrados não significa que tenha de ser assistente numa universidade, pode e deve continuar com a sua profissão. O saber mais e o querer saber mais num determinado domínio não implica que se tenha de trabalhar nessa área.

Eu posso saber muito de literatura e nem por isso tenho de ser escritora. Posso saber muito de flores e nem por isso tenho de ser jardineira. Como se costuma dizer: "O saber não ocupa lugar!". A Escola não pode ficar descontextualizada da vida.

A Escola deve dar aos indivíduos uma autonomia para que quando lhes surja um determinado problema, mesmo que nesse momento não o consigam resolver, tenham capacidade de procurar, consultar, investigar, descobrir, relacionar, discutir, produzir, etc…

> Que "empresa" tem mais licenciados por metro quadrado do que uma ESCOLA?

Questão 4: Não temos a cultura de que aprender é dinâmico, é todos os dias. Associamos o aprender, ao tempo passado na Escola. Aprender é comunicar!

A aprendizagem é feita ao longo de toda a vida. É certo que a melhor idade para estruturar bases sólidas nos cidadãos e torná-los seres aprendentes activos corresponde ao tempo passado na Escola. Mas isto é um ciclo vicioso! Se os alunos não observarem, não assistirem ao querer saber mais por parte dos seus pais e professores, não terão vontade de o fazer. Não se sentirão atraídos pela pesquisa, pelo ir mais além.

A Escola deve assumir-se como um campo de intervenção educativa para além dos alunos. Deve haver mais trabalho colaborativo, mais investigação, mais promoção de discussões. Que "empresa" tem mais licenciados por metro quadrado do que uma ESCOLA?

Simplificar as matérias não será solução. Como os alunos não conseguem aprender determinados assuntos, facilitamos? Nos dias que correm, com tantas atracções exteriores à Escola é complicado manter um jovem atento, durante muito tempo. É importante conseguirmos tornar os alunos agentes activos em todo o processo de aprendizagem. Devemos atrair, motivar os alunos nas actividades, trabalhar com um nível de qualidade e rigor que os cative, que os leve, mesmo que pouco a pouco, a formular, testar, provar conjecturas, argumentar, enfim que leve ao envolvimento e criatividade dos alunos.

Fernando Duarte
Escola Superior Tecnologia de Viseu - Dep Matemática

Questão 1: Sempre fui a favor de avaliações externas credíveis. Neste caso nada posso adiantar já que tudo dependerá da forma como se processará a realização dos eventuais exames. Os exames não poderão aparecer desgarrados de todo um processo de avaliação e deverão ser graduados de acordo com o nível etário dos alunos a que se destinarem.

Questão 2: Parte da resposta a esta questão está na resposta anterior. No entanto vale a pena reforçar a ideia que os exames não deverão ser vistos como decisivos. Os exames deverão fazer, com relevo significativo, parte integrante de todo um processo, coerente e honesto, de avaliação. Há questões, conteúdos e atitudes que não são susceptíveis de avaliação por um exame. Logo os exames, como componente externa do processo de avaliação, têm de ser bem planeados e os objectivos bem divulgados. Além disso, na minha opinião, parece-me ser um erro fazer uma avaliação das escolas com base apenas nos resultados dos seus alunos nos exames.

> Nos trinta anos de **revolução** tem havido muito pouca **evolução** na mentalidade social sobre as questões da educação em geral, onde a Matemática tem papel relevante, e na educação científica onde a Matemática é, novamente, fundamental.

Questão 3: Em relação à questão colocada penso que estamos perante um problema de sociedade. Nos trinta anos de **revolução** tem havido muito pouca **evolução** na mentalidade social sobre as questões da educação em geral, onde a Matemática tem papel relevante, e na educação científica onde a Matemática é, novamente, fundamental.

O sistema de ensino tem-se preocupado em cumprir os valores percentuais das "metas" impostas pelas entidades que vão financiando a educação, não se tendo preocupado com um trabalho de base, esse sim um trabalho educativo que está por fazer.

Questão 4: Também esta questão se prende com um grande *déficit* de educação e não só. Talvez a questão se possa ancorar à situação económica da maior parte dos portugueses. Como é sabido, quando comparamos o nosso nível de vida à média europeia vemos que realmente estamos muito mal.

Ora, enquanto a população não tiver resolvido umas quantas questões económicas e sociais (saúde e justiça) a educação correrá o risco de não ser uma prioridade. Além do mais, em alguns casos, não é compensador nem relevante o fazer um grande esforço no que respeita à aprendizagem ao longo da vida para se estar bem connosco mesmos. A sociedade em geral não valoriza o esforço feito na valorização pessoal ao longo da vida (veja-se o caso dos chamados a ter intervenção política, em especial no poder local).

A Escola pouco poderá fazer para chamar o cidadão adulto ao seu seio. Talvez abrindo as portas com programas de formação adequados, sérios, atractivos e flexíveis seja a forma mais poderosa que, para já, a escola terá, mas nunca simplificando o que não é simplificável.

Joana Pinto
Aluna do 1º ano da Licenciatura em Medicina, Universidade de Coimbra

Questão 1: Acho bem que sejam introduzidos exames nacionais. Para os alunos é penoso ter que estudar para os exames, no entanto os exames nacionais permitem homogeneizar o sistema de ensino e confirmar com critérios mais objectivos o mérito dos estudantes. Além disso, os professores sabendo que os seus alunos serão sujeitos a exames nacionais, também são mais cuidadosos a prepará-los e a dar as notas.

Questão 2: Isso é verdade, em parte. Mas também não me parece que esteja mal. Penso que isso não é pretexto para que os exames não se realizem.

Questão 3: Não sou professora. De qualquer modo, acho que probabilidades e estatística são muito importantes. Qualquer empresário precisa de saber ler quadros de dados, entre outras coisas.

Questão 4: Acho que isso revela comodismo. Há sempre algo novo a aprender, mesmo que a utilidade disso não seja imediata. A escola talvez possa contribuir para despertar a curiosidade dos alunos, o espírito crítico e a autonomia. À partida, aceito que se pense que simplificar pode ajudar a entender melhor os assuntos, porque a curiosidade mantém-se mais facilmente se os alunos forem percebendo a matéria. Por outro lado, não me parece que esse seja o melhor caminho. As matérias não são assim tão difíceis e, além disso, as coisas difíceis mais tarde ou mais cedo acabam por aparecer. Se as coisas são difíceis não há maneira de as simplificar!

Maria da Conceição Leal
Escola Secundária de Paços de Ferreira

Questão 1: Considero que a introdução de um exame a Matemática no final de cada ciclo tem vantagens:
- pode fomentar o equilíbrio no grau de exigência a nível nacional;
- pode criar uma maior homogeneidade na leccionação de conteúdos essenciais para o ciclo seguinte;
- pode melhorar a qualidade do processo de ensino/aprendizagem.

Questão 2: Penso que a carga negativa que têm os exames, nomeadamente a Matemática, tem mais a ver com a extensão dos programas do que com a existência do exame no final do 12º ano.

Pela minha experiência sei a dificuldade que existe em cumprir o programa do ensino secundário e conheço bem a necessidade de me preocupar constantemente com o seu cumprimento, por causa do exame. Mas sei também que se houvesse mais tempo ou o programa fosse mais reduzido não teria essa angústia e portanto não teria que "ensinar para o exame", apenas teria que ensinar Matemática, tendo como meta o cumprimento do programa. É minha convicção que a carga negativa dos exames seria substancialmente reduzida.

Questão 3: Penso que os empresários portugueses ainda não tiveram grandes problemas por terem poucas habilitações, por Portugal ter uma taxa de analfabetismo muito elevada até há pouco tempo e portanto não havia concorrência nem as exigências de mercado eram as mesmas.

A globalização, o alargamento da Comunidade Europeia, as exigências do avanço tecnológico, a concorrência de países com uma massa humana com formação muito superior, faz com que hoje em dia a formação seja um factor de sucesso ou insucesso.

A importância da Matemática não se deve medir pela aplicação imediata dos seus conteúdos mas pelas suas potencialidades no desenvolvimento de competências fundamentais, como sejam a capacidade de raciocínio, de argumentação, de persistência, de procura de soluções, etc. Para além das competências específicas necessárias em diversos ramos do saber.

Questão 4: Não concordo de todo com a afirmação de que terminados os estudos não se precisa aprender mais. Isso será "deixar passar o comboio" do desenvolvimento e do progresso.

Hoje em dia precisamos de uma constante actualização de conhecimento.

Enquanto a sociedade e em particular os pais não reconhecerem a importância da formação, a importância da Escola na promoção do saber, é muito difícil a Escola poder alterar alguma coisa.

Mas não concordo de forma alguma que a solução a encontrar pela Escola seja a de simplificar as matérias a leccionar. Estaremos assim a promover o analfabetismo, disfarçado por um sucesso obtido pelo *facilitismo*.

Aliás, penso que é o que já acontece hoje em dia na escolaridade obrigatória.

Paula Arruda
Escola Secundária Eça de Queirós, Olivais, Lisboa

Questão 1: Acho positivo. Sou a favor de avaliações externas com objectivos bem definidos. Os exames têm de fazer parte da avaliação dos alunos.

Nos finais de ciclo os exames são importantes pois tornam a avaliação mais rigorosa, mais exigente e, por outro lado, responsabilizam os alunos. Com a introdução dos exames é provável que os alunos tenham mais sentido de responsabilidade e melhorem a aprendizagem.

Pressupõe-se que os alunos apenas transitem de ciclo quando aquiriram um conjunto de conceitos que constituirão os pré-requisitos do ciclo seguinte. Penso que com os exames esta avaliação sairá reforçada, pois a avaliação contínua não é suficiente, é subjectiva e não uniformiza os critérios de avaliação.

O problema é fundamentalmente o insuficiente grau de desenvolvimento do país que faz com que muitos Encarregados de Educação não tenham meios, quer económicos quer culturais, para fomentar o estudo até um grau mais elevado.

Questão 2: Devem manter-se os exames, porque apesar dos aspectos negativos, os alunos tornam-se mais responsáveis e adquirem mais conhecimentos. A avaliação contínua é importante mas não me parece suficiente sobretudo nos finais de ciclo, pois é uma avaliação que envolve também uma série de aspectos negativos, nomeadamente a subjectividade e a falta de uniformização de critérios.

Questão 3: O problema é fundamentalmente o insuficiente grau de desenvolvimento do país que faz com que muitos Encarregados de Educação não tenham meios, quer económicos quer culturais, para fomentar o estudo até um grau mais elevado. O Estado devia desenvolver políticas para fomentar a Educação com mais eficácia.

Criar um programa de recuperação de alunos definindo objectivos muito claros e especificando os conceitos a saber num ano, de modo a que os alunos tenham sucesso no ano seguinte.

A questão da educação e das habilitações é extremamente importante, ainda mais no mundo global e globalizado em que hoje estamos inseridos, no qual a sobrevivência a prazo passa muito por factores como a produtividade e a competitividade. Estes factores estão intimamente relacionados, entre outros aspectos, com o grau de Educação do país, dos seus cidadãos e dos seus empresários. Este nível de desenvolvimento cultural é resultado, entre outros factores, de capacidades que se adquirem no processo de Aprendizagem escolar (Capacidades de Análise, de Crítica, de Síntese, de Raciocínio) onde a Matemática tem um contributo importante com conceitos como a Lógica, o Cálculo Elementar, a Estatística, etc.

Questão 4: Independentemente da forma como forem leccionadas as matérias, a aprendizagem é sempre um processo inacabado. Com efeito, sem prejuízo da escola poder incentivar hábitos e métodos de estudo e capacidade de pesquisa e investigação, há que criar uma consciência nos alunos de que a cultura e o conhecimento fazem parte de um processo em evolução que necessita de ser acompanhado de modo a nos mantermos permanentemente actualizados e em contínuo desenvolvimento intelectual.

Livros Contados

Paulo Ventura Araújo

O ritmo das formas,

Itinerário matemático (e não só) no mundo da simetria

recensão por Eduardo Rêgo, Universidade do Porto

A edição portuguesa do livro *O Ritmo das Formas, itinerário matemático (e não só) no mundo da simetria*, originalmente em italiano, editado por Paolo Bellingeri, Maria Dedò, Simonetta Di Sieno e Cristina Turrini, é da Associação Atractor, com tradução de Maria Pires de Carvalho. O livro, que reúne contribuições de 19 autores, *...propõe-se como roteiro no mundo da simetria. Narra uma viagem guiada pela matemática, que (...) pode oferecer-nos uma acuidade de visão suficiente para detectarmos a harmonia oculta em formas aparentemente distintas e ajudar-nos a descobrir uma chave de leitura significativa*, e, como é explicado pelos editores, que na apresentação evocam a experiência da exposição "Simetria, jogos de espelhos" que prepararam no Departamento de Matemática da Università degli Studi de Milão, pretende dirigir-se a um público vasto, exterior à matemática. Como é dito no texto da contracapa, *...a simetria [é] um instrumento que permite a cada um ter experiência directa de factos matemáticos não triviais*: quem já teve a oportunidade de ver a citada exposição, cuja versão portuguesa é da responsabilidade do *Atractor* confirmará com certeza esta afirmação - o livro, aliás, reproduz em fotografia vários modelos da exposição.

Começo por dizer que o livro é muito bonito: tem belas imagens e fotografias, com um bom tratamento gráfico e impressão cuidada e folheá-lo foi, logo de início, um prazer.

O livro está dividido em quatro partes: a primeira, *Simetria: galeria de imagens*, contém três dezenas de imagens, apenas acompanhadas de títulos descritivos; são, na quase totalidade, fotografias de simetrias do mundo real, motivos ornamentais, reflexos em espelhos e alguns cristais. Esta parte não tem apenas um interesse estético, uma vez que nas partes seguintes há múltiplas referências às imagens desta *Galeria* para ilustrar factos ou conceitos.

A segunda parte, com o mesmo título da exposição, *Simetria: jogos de espelhos*, contém o núcleo matemático do livro, e é nela que é feita a *viagem guiada pela matemática* referida na citação, em cima. Supõe-se, pela não indicação dos autores desta parte, que a sua autoria seja dos quatro editores. Numa primeira secção, *Como nasce uma figura simétrica*, com uma análise comparada de várias figuras simétricas no plano, e do modo como podem ser geradas, são introduzidos, numa linguagem não técnica mas precisa e clara, os conceitos de reflexão, rotação, rotação como produto de duas reflexões, simetrias de uma figura; nestes primeiros exemplos, que têm as simetrias de polígonos regulares é ainda introduzida a ideia de modelo gerador da figura simétrica, e que corresponde essencialmente à noção de região fundamental da acção do grupo das simetrias. Em seguida são vistos, numa introdução aos padrões de frisos e de papéis de parede, os casos de figuras que têm nas suas simetrias translações, numa ou duas direcções independentes: é vista a translação como produto de duas reflexões em rectas paralelas e introduzida a ideia de rede de paralelogramos com o modelo gerador, para o caso dos papéis de parede. Com a simulação da reflexão em rectas feita por espelhos, é elaborada a ideia de modelo gerador, através de jogos de espelhos, com referências várias a exemplos ilustrados na *Galeria*. De forma análoga são sugeridas dobragens e recortes em papel como forma de gerar figuras com simetrias. Na secção seguinte, *Rosáceas, frisos e padrões*, é dado um enquadramento conceptual ao experimentalismo seguido na primeira secção, com a explicação das noções matemáticas associadas: grupo, grupo de transformações, grupos discretos de isometrias do plano e sua classificação: os grupos finitos (de *rosáceas*) e os grupos que contêm translações numa só direcção (grupos de *frisos*) ou em duas (grupos de simetria de pavimentações do plano – os grupos de papéis de parede – a que o livro chama simplesmente grupos de *padrões*); são ainda introduzidas as noções de grupos cíclicos e diedrais, e mencionado o teorema de Leonardo – que afirma que os grupos finitos de isometrias do plano são apenas os destes dois tipos – bem como a classificação dos *frisos* e *padrões* em sete e dezassete tipos, respectivamente. Na terceira e última secção, *Do plano ao espaço*, após referência à classificação por E.S. Fedorov, dos 230 grupos cristalográficos (os análogos tridimensionais dos grupos de *padrões* do plano), são apresentados *alguns dos análogos tridimensionais dos grupos de rosáceas*: começando com o cubo e considerando os seus vários planos de simetria por reflexão, que o dividem em 48 pirâmides congruentes, é visto que uma qualquer dessas pirâmides pode ser tomada como modelo gerador do cubo, constituindo assim a base para um caleidoscópio de espelhos onde não só o sólido pode ser reconstruído como exibidas outras estruturas com o mesmo tipo de simetria, por exemplo o octaedro. É finalmente indicado que apenas outros dois caleidoscópios se podem obter de forma análoga, correspondentes aos outros poliedros regulares, a saber o tetraedro e o par dodecaedro-icosaedro.

Após esta rápida e necessariamente incompleta descrição da segunda parte, devo dizer que esta *viagem* é guiada pelos autores num ritmo suficientemente lento e detalhado, com explicações cuidadas e numerosos exemplos, apoiados em meia centena de ilustrações, para permitir pensar que será acessível a muitas pessoas exteriores à matemática.

Terminada a leitura desta parte do livro, senti alguma pena de que alguns factos não tivessem sido destacados ou tornados mais explícitos, o que poderia ser feito sem grande esforço e sem um aumento significativo da extensão da exposição: a classificação das isometrias do plano nos quatro tipos: reflexões, rotações, translações e reflexões deslizantes; a par da nota, na página 50, sobre o grupo cíclico C(1) corresponder a uma figura sem qualquer simetria, seria desejável dizer também algo sobre o grupo diedral D(2) (que é isomorfo ao grupo de Klein e não aparece como grupo de simetria de um polígono regular, mas sim de um rectângulo); na descrição, páginas 52-53, dos possíveis quartos de espelhos geradores dos *padrões* em apenas quatro tipos, poderia ser mencionada a chamada *restrição cristalográfica* sobre as ordens possíveis para as rotações que preservam um reticulado de paralelogramos, pela importância que tem também no caso tridimensional e nas possíveis formas dos cristais; a propósito dos poliedros regulares poderia ter sido exibida a dualidade cubo-octaedro e dodecaedro-icosaedro como outra explicação

para terem o mesmo modelo de simetria; finalmente podiam ter sido mencionados os prismas e antiprismas como exemplos tridimensionais de objectos com grupos de simetria cíclicos ou diedrais - e que também podem ser gerados por jogos de espelhos -para evitar alguma confusão que pode decorrer da leitura da página 54, segundo parágrafo, quando comparando com a situação do plano em que, como grupos finitos, ocorrem apenas grupos cíclicos e diedrais, é afirmado que no espaço as possibilidades são na realidade até menos – penso que os autores estariam a pensar nos grupos de simetria dos polígonos regulares do plano em comparação com os dos seus análogos tridimensionais, os sólidos platónicos, mas a redacção não torna isso claro.

Lamento também que esta viagem tão bem preparada e cuidada, não tenha sido acompanhada da oferta de roteiros para os interessados em a prosseguir: há apenas uma indicação bibliográfica, na página 53, de um texto de um dos editores, mas que por ser em italiano não é o mais adequado aos leitores portugueses. Referências bem conhecidas, em inglês, são [1] e [2]; a segunda obra é a bíblia matemática da simetria.

Na terceira e mais curta parte do livro, *Simetria: como construí-la*, da autoria de duas matemáticas, é mostrado como se podem construir artesanalmente caleidoscópios de espelhos e outros mecanismos para realizar experiências com simetrias. O destaque, na minha opinião, vai para os modelos fornecidos de dobragens e recortes de tiras de papel para a realização de exemplos dos sete tipos de *frisos*.

A quarta parte, *Simetria à volta do mundo*, reúne doze contribuições de autores não matemáticos (com uma excepção), especialistas de outras ciências e artes, sobre o tema da simetria; à fisiologia e medicina, psicologia, música, cinema, literatura, química, física, arquitectura, botânica e dança estão ligados estes autores. Na edição portuguesa do livro um dos textos da edição original italiana foi substituído por um texto de Fernando Pinto do Amaral sobre os *efeitos de simetria na literatura*. Embora tenha achado alguns destes textos muito interessantes, tal como os editores afirmam na introdução a esta última parte do livro, também *da [minha] parte, não [arrisco] comentar os diversos contributos*.

Em conclusão, acredito que o livro *O Ritmo das Formas* cumpre muito bem aquilo a que se propõe, dirigindo-se a um público vasto e exterior à matemática; em particular, considero a segunda parte do livro, apoiada na *Galeria de imagens*, admirável do ponto de vista pedagógico e não hesitarei em a incluir como referência em cursos futuros sobre grupos de simetria que vier a leccionar aos meus alunos da universidade: se a simplicidade quase mágica das regiões fundamentais e dos caleidoscópios associados, não dispensa outros processos mais eficazes de analisar e identificar os grupos finitos de simetria no espaço com os grupos simétricos e alternos, é sempre fascinante ver um dodecaedro ou um icosaedro nascer, num jogo de espelhos, quase do nada.

[1] - Martin, George E., *Transformation Geometry - An Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag (1982)
[2] - Grünbaum and Shephard, *Tilings and Patterns*, Freeman (1987)

Esta secção propõe-se publicar recensões aprofundadas de livros de Matemática editados recentemente em português, dando preferência a livros que interessem a um público alargado. Agradecemos aos leitores da Gazeta de Matemática o envio de sugestões de livros que julguem merecedores da nossa atenção. Contacto do editor da secção: Paulo Ventura Araújo (FCUP); email: paraujo@fc.up.pt

XXII Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Ercília Sousa
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática são organizadas anualmente pela Sociedade Portuguesa de Matemática. A Final Nacional é organizada em parceria com um estabelecimento de ensino do país, tendo sido este ano organizada com a Escola Secundária Santa Maria do Olival, em Tomar.

A primeira eliminatória deste concurso decorreu em Novembro de 2003 englobando as 840 escolas que manifestaram interesse em participar, o que envolveu aproximadamente 15000 alunos. Para a segunda fase foram seleccionados 1400 alunos e para a Final Nacional, que decorreu de 1 a 4 de Abril de 2004, foram apurados apenas 60 alunos de todo o país.

A Final Nacional das Olimpíadas de Matemática consistiu em muitas outras coisas para além de duas manhãs de resolução de problemas.

Na sexta-feira, dia 2, após a primeira prova e para libertarem a irritação do desafio que constituiu resolver o denominado "problema das galinhas", que consistia em adivinhar quantas semanas foi de férias o Sr. Manuel deixando ao abandono as suas galinhas, os estudantes viajaram ao longo dos rios Nabão, Zêzere e Tejo, com paragem no Castelo de Almourol debaixo de ávidas rajadas de chuva.

No sábado de manhã voltaram à resolução de problemas e desta vez tiveram como um dos desafios determinar a razão entre dois raios de circunferência.

Enquanto os alunos para descontrair visitavam à tarde o Convento de Cristo, os matemáticos da Universidade de Coimbra e um do Instituto Superior Técnico estavam a corrigir as provas no Hotel dos Templários para assim tomar a difícil decisão de quem arrebataria as medalhas.

À noite foram todos ao teatro assistir à peça T. de Lempika, encenada pelo grupo Fatias de Cá, que os deixou exaustos fisicamente, uma vez que passaram horas atrás de personagens que subiam e desciam escadas. Claro que depois do teatro, os alunos já na Residencial Trovador, continuaram com interessantes conversas, até serem vergados pelo sono.

No Domingo, depois de uma emocionante palestra sobre os planetas e o trânsito de Vénus, proferida pelo matemático de Coimbra, Professor Marques de Sá, e após alguns discursos das figuras ilustres presentes, de entre as quais o Ministro da Educação David Justino, chegara a hora da atribuição das cobiçadas medalhas.

Assim, os medalhados deste ano da categoria A, alunos do 8º e 9º ano e da categoria B, alunos do 10º ao 12º ano, foram os seguintes:

Medalha de Ouro, Categoria A

Joana Clemente da Costa Venâncio,
Esc. E. B. 3 Quinta das Palmeiras, Covilhã
Luís Filipe Carpinteiro Abreu,
Esc. Sec. Alcaides de Faria, Barcelos
Vasco Correia Moreira,
Esc. E. B. 2,3 de Gondomar, Gondomar

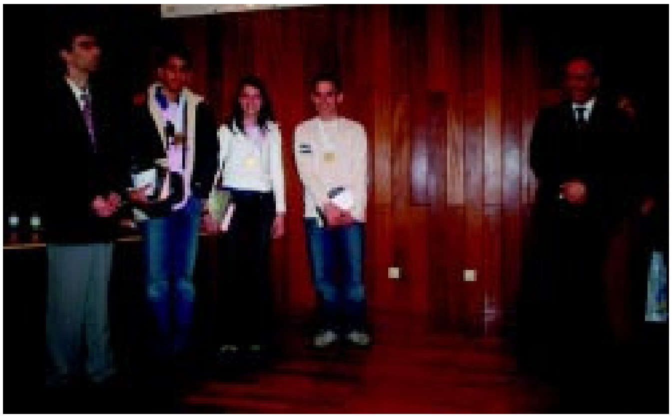
Medalha de Prata, Categoria A

Carina Alves Lopes,
Esc. E.B. 2,3 António Sérgio, Cacém
José Ramalhão F. Leça Ramada,
Colégio Salesiano Oficinas de São José, Lisboa
Pedro Manuel Melo Martins da Silva,
St. Peter School, Palmela

Medalha de Bronze, Categoria A

André Gil Soares Campos,
Esc. E .B. 2, 3 de Leça da Palmeira, Leça da Palmeira
Filipe Manuel F. Valeriano,
Esc. E .B. 2, 3 Dr. João de Brito Camacho, Almodovar
João Leitão Guerreiro,
Colégio Valsassina, Lisboa
Maria Margarida Ventura S. Silva,
Esc. E. B. 2, 3 S. Bernardo, Aveiro
Pedro Filipe Vieira Fernandes,
Externato Pena Firme, Póvoa de Pena Firme
Rui R. Catarino,
Esc. E. B. 2, 3 Pedro Jacques de Magalhães,
Alverca do Ribatejo

Medalha de Ouro, Categoria B



João Eduardo Casalta Lopes,
Esc. Sec. José Falcão, Coimbra
Paulo Guilherme dos Santos,
Esc. Sec. Acácio Calazans Duarte, Marinha Grande
Rita Serrano dos Anjos,
Externato Marista de Lisboa, Lisboa

Medalha de Prata, Categoria B

João Nuno Mestra Fernandes da Silva,
Esc. Sec. da Maia, Maia
Sebastian Kohler,
Esc. Sec. Gil Eanes, Lagos
Sofia Homem de Melo Marques,
Esc. Sec. Aurélia de Sousa, Porto

Medalha de Bronze, Categoria B

Frederico Bernardes Silva Tavares Cadete,
Esc. Sec. Quinta do Marquês, Oeiras
José Diogo Magalhães Rio Fernandes,
Esc. Sec. de Gondomar, Gondomar
Pedro Daniel Oliveira Rocha e Costa,
Esc. Sec. de Gondomar, Gondomar
Pedro Luís Gonçalves Cavaleiro,
Esc. Sec. Bernardino Machado, Figueira da Foz
Tiago Docílio Santos Nabais Caldeira,
Esc. Sec. Afonso Albuquerque, Guarda
Vasco Manuel Ferreira de Brito,
Esc. Sec. Padre António Vieira, Lisboa

Após a Final Nacional decorre ainda a selecção dos estudantes que formam as equipas portuguesas que representam o nosso país nas duas competições internacionais em que temos vindo a participar. As Olimpíadas Internacionais, que decorrem em Julho, e as Olimpíadas Ibero-Americanas, que decorrem em Setembro. Esta selecção é feita de entre alguns dos estudantes medalhados em olimpíadas e com base no resultado da resolução de um novo conjunto de problemas. De notar ainda que os estudantes seleccionados para constituirem as equipas portuguesas têm uma formação matemática adicional leccionada pelo Projecto Delfos no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Todos estes eventos associados às Olimpíadas Portuguesas de Matemática não seriam possíveis sem o apoio dos patrocinadores Acitofeba, BPI, CM Constância, CM Tomar, CGD, Convento de Cristo, CP-Caminhos de Ferro Portugueses, EP, Escola de Futebol de Tomar, Escola Prática de Engenharia de Tancos, Porto Editora, Ramos e Ramos Lda., Texas Instruments, Texto Editora e ainda das habituais entidades nacionais Ministério da Educação, Ciência Viva e Fundação Calouste Gulbenkian.

Relembramos que todas as escolas que queiram participar com os seus alunos nas próximas Olimpíadas Nacionais, cuja final se espera que decorra na Madeira, podem obter informações no site: http://www.spm.pt/~opm.

Sete passos em Topolo(ma)gia, I

A distância de zero
a qualquer real
será sempre menor
que a distância
que separa
ou une
dois pontos
perplexos
eu ou tu

Teresa Maio