GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática **Ano LXVIII** | Julho 2007

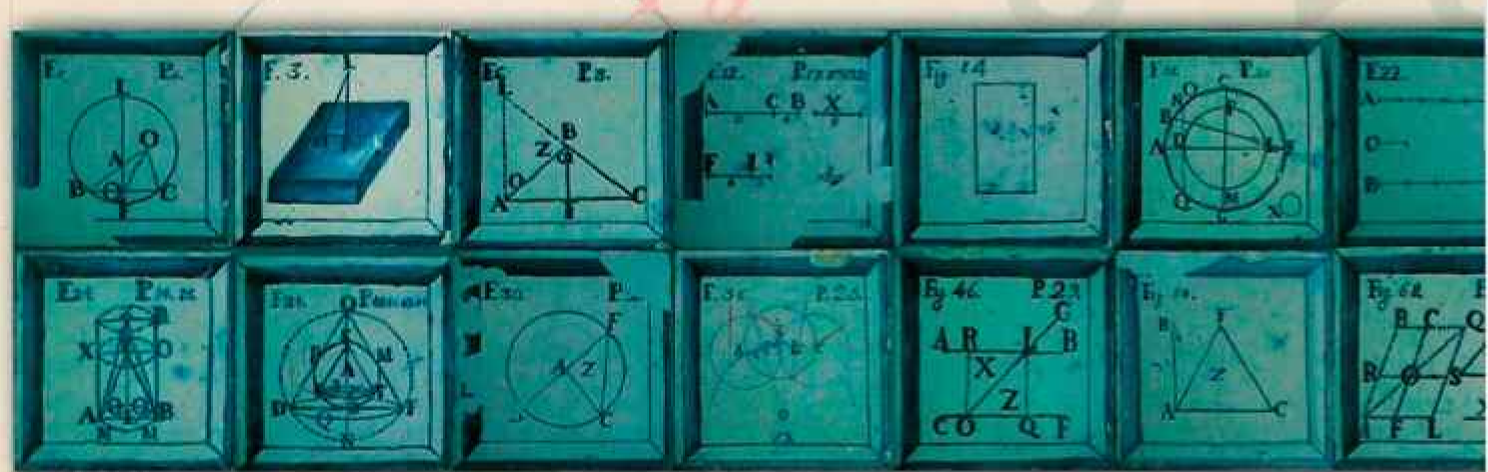
nº153

Azulejos que ensinam
entrevista com António Leal Duarte

Histórias de fracções
por António Pereira Rosa e Jorge Nuno Silva

As XXV Olimpíadas de Matemática

4,20 Euros



A aprendizagem da matemática

José Carlos Santos
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Introdução

Tendo-me sido proposto pelo grupo iNIGMA, formado por estudantes da licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, que escrevesse um texto de opinião, perguntei a mim próprio o que é que eu, quando era aluno a começar a licenciatura, teria perguntado a um professor que estivesse disponível a responder a perguntas genéricas. O que eu teria perguntado não sei, mas o que deveria ter perguntado era "Como é que se aprende Matemática?" Este texto contém a minha resposta.

Antes de passar à resposta, quero explicar melhor qual é o tema que pretendo abordar. A Matemática pode ser aprendida a muitos níveis. Por um lado, há a aprendizagem que se vai tendo desde a pré-primária até à Universidade e, eventualmente, depois; desta, só tenciono abordar a do Ensino Superior e a da pós-graduação, não porque a restante seja desprovida de interesse (antes pelo contrário!) mas porque, por um lado, este texto será sobretudo lido por estudantes universitários aos quais pretendo dar sugestões sobre a sua aprendizagem e, por outro lado, porque considero que tenho pouca experiência quanto aos problemas da aprendizagem da Matemática nos ensinos Básico e Secundário. Por outro lado, tanto se pode estar interessado na Matemática por si mesma (é o que se espera de um estudante da licenciatura em Matemática) como se pode encará-la unicamente como um instrumento útil para atingir outros fins.

Irei abordar ambos os aspectos.

Aqueles exercícios aborrecidos e repetitivos...

Aos estudantes de Matemática é proposto um grande número de exercícios de rotina, cuja resolução é muitas vezes longa, envolve um certo número de cálculos e, acima de tudo, exige que se memorize um algoritmo, ou seja, um método de resolução. Porquê? Há diversos bons motivos para isso (e também alguns maus...).

A mecanização é importante

Ao contrário do que muitas vezes se poderá pensar, a repetição de exercícios de rotina é importante para melhorar a capacidade de resolução de problemas. É que, quando a nossa mente deixa de estar ocupada a recordar (ou a tentar reinventar) a maneira de efectuar todos aqueles passos, pode dedicar-se a coisas mais importantes. Imagine-se uma pessoa a quem é dado o problema da calcular a área de um terreno rectangular com 32 metros de comprimento e 18 de largura.

Suponha-se também que essa pessoa sabe que basta fazer a operação 32×18 mas que não conhece a tabuada e que tem que se lembrar como é o algoritmo da multiplicação. Essa pessoa gastará muito mais tempo a efectuar a operação do que uma pessoa que tenha presentes esses conhecimentos, os quais só envolvem memória e repetição de gestos mentais. Por outro lado, quem já conhecer a tabuada e tiver o algoritmo da multiplicação na ponta da língua, não só faz o cálculo muito mais rapidamente como também não cansa a mente, a qual estará então mais apta para pensar noutras coisas.

Neste sentido, a mecanização deve ser encarada como um investimento: gasta-se tempo agora para se ter mais tempo livre para a mente mais tarde. E, na minha opinião, trata-se de um investimento particularmente lucrativo.

Prática *versus* teoria

Uma impressão errada que se pode ter relativamente aos algoritmos que se devem memorizar é que estes só servem para resolver problemas, o que os torna de algum modo inferiores ao estudo de uma teoria eventualmente mais interessante.

Exagerando um tanto, seria como se os espíritos superiores se ocupassem com a criação de teorias novas totalmente desligadas do mundo real, deixando a resolução de problemas concretos aos pobres infelizes incapazes de os acompanhar. Esta visão da Matemática está errada: as grandes teorias matemáticas surgem imensas vezes da tentativa de resolver problemas concretos. Assim, por exemplo:

- a teoria de Galois, que é um dos aspectos centrais da Álgebra actual, surgiu do problema de se tentar encontrar um algoritmo para resolver equações polinomiais de quinto grau;
- Gauss criou o método dos mínimos quadrados, central na Análise Numérica, para determinar onde se poderia localizar um asteróide (Ceres) que só tinha sido avistado um pequeno número de vezes;
- o conceito de esperança matemática, central no Cálculo de Probabilidades, foi criado por Pascal para resolver um problema de dívidas num jogo de azar por parte de uma pessoa das suas relações.

Além disso, estes métodos revelaram-se importantes porque os seus autores e outras pessoas se aperceberam que poderiam usá-los com sucesso para resolverem um elevado número de problemas. Só que só se pode aperceber disso quem não tenha reservas mentais quanto a usar algoritmos para resolver problemas concretos.

Outro motivo para não se menosprezarem os algoritmos consiste no seguinte princípio: o que é bom para a prática também o é para a teoria! De facto, muitos algoritmos são usados nas demonstrações de teoremas. Por exemplo, um algoritmo usado para determinar se um sistema homogéneo de n equações lineares e n incógnitas tem ou não alguma solução não nula consiste em calcular o determinante da matriz dos coeficientes do sistema; o sistema tem então alguma solução não trivial se e só se aquele determinante for nulo. Pois bem, este mesmo algoritmo é usado para demonstrar teoremas na teoria de Galois!

Persistência

Uma das ideias mais disparatadas que há sobre génios científicos é a de que eles resolvem problemas sem qualquer dificuldade e que, além disso, encontram a resposta correcta à primeira tentativa. Começo por contrariar isto com duas citações, das quais a primeira é famosa e a segunda, não o sendo, merecia sê-lo.

Thomas Edison:

Génio é 1% de inspiração e 99% de transpiração.

Gian-Carlo Rota:

Há uma proporção que permite medir até que ponto se é um bom matemático, que é o número de ideias disparatadas que é preciso ter-se até se chegar a uma boa.

Se for de dez para uma, é-se um génio. Para o matemático médio, é capaz de ser cem para uma.

Em resumo, em Ciência ter ideias não é, só por si, particularmente meritório.

Qualquer bom livro de Ficção Científica está cheio delas. O que é difícil e exige trabalho e disciplina é, para além de ter as ideias, explorá-las, ver até que ponto são férteis, determinar os seus limites, testá-la, compará-las com outras abordagens.

Outro mito falso (e prejudicial!) é o de que os génios científicos descobrem tudo por si próprios, sem precisarem do conhecimento acumulado dos cientistas que os precederam. É mesmo um lugar comum em filmes ou séries da televisão: o contraste entre o professor pedante, que sabe muito mas não cria nada, e o cientista brilhante que, sem precisar daqueles conhecimentos (e, muitas vezes, ridicularizando quem os possui), resolve problemas dificílimos sem esforço. Só que, como disse um colega meu "um matemático é tanto melhor quantos mais teoremas de cor sabe"! Não, saber muitos teoremas de cor não dá qualquer garantia de que se é um bom matemático. Mas que ajuda a sê-lo, ajuda.

Quando dou aulas a alunos de Matemática do 1º ano, uma atitude com a qual já me deparei por diversas vezes é a de reagirem às primeiras demonstrações a que são expostos com uma reacção do tipo "Isto jamais me ocorreria!" Eu costumo dizer que aos primeiros matemáticos a tentarem demonstrar o mesmo resultado provavelmente também não lhes ocorreu aquela demonstração. É que a Matemática que se aprende naquela fase da aprendizagem já tem, geralmente, muitas décadas, até mesmo séculos. As demonstrações que são apresentadas aos alunos não são as primeiras mas sim as melhores. Mas as primeiras abordagens são geralmente toscas, incompletas e com erros. O matemático russo A. S. Besicovitch disse mesmo uma vez que a fama de um matemático é baseada no número de demonstrações falsas que fez! Ele explicou que o que isto quer dizer é que trabalhos pioneiros são imperfeitos.

O matemático norte-americano Paul Halmos conta na sua autobiografia (ou "automatografia", como ele lhe chama) que, numa carta de recomendação que escreveu, começou por dizer que a pessoa em questão resolvia bastantes problemas mas que as soluções que obtinha eram geralmente longas e deselegantes, sendo muitas vezes possível pegar numa das suas soluções e, retirando o que era supérfluo, obter outra solução dez vezes mais curta. Sendo assim, porque é que o destinatário da carta de recomendação o deveria contratar? Porque, como Halmos escreveu, "ele encontra soluções feias onde outros estão elegantemente encravados"! É um bom princípio a ter em mente: quando se está perante um problema, mais vale ter-se uma solução feia do que estar-se elegantemente encravado.

"Mas o que é que isto tem a ver com aprendizagem?", pode-se perguntar. Afinal, é sabido que os professores não estão interessados em abordagens "toscas, incompletas e cheias de erros" nos exames! De facto, mas uma coisa é aprender Matemática, outra é fazer exames. E não se aprende o que é Matemática sem se tentar compreender as coisas por si próprio, o que por sua vez implica, naturalmente, ir além daquilo que o livro ou o professor disserem. A propósito disto, o matemático francês Laurent Schwartz contou uma vez, numa palestra a que assisti, que, quando foi aluno da Escola Normal Superior, em Paris, achava que era um aluno abaixo da média, porque um bom número dos seus colegas lhe dava a impressão de acompanhar as aulas com muita mais facilidade do que ele. Ao fim de algum tempo, apercebeu-se de um facto que ia contra esta ideia: é que ele era o melhor aluno! Só depois é que encontrou a explicação para o paradoxo: enquanto que os seus colegas que lhe transmitiam a impressão de serem melhores do que ele deviam essa impressão a memorizarem rapidamente os conteúdos das aulas, ele precisava de um esforço suplementar para, não só memorizar esses conteúdos, como, ainda por cima, compreender como cada facto novo se encaixava com aqueles que já tinha ao seu dispor. E, como se pode ver, esse esforço extra compensou!

Dúvidas

Uma ideía parcialmente errada que muitos alunos têm é a de que é melhor não fazer perguntas aos professores, pois podem ser disparatadas e criar má impressão. De facto, há perguntas que podem causar má impressão, como aquelas cuja resposta deveria ser imediata para quem esteja razoavelmente a par da matéria dada ou, pior ainda, aquelas para as quais a resposta já foi dada antecipadamente (não há pachorra para aguentar um aluno a perguntar se as matrizes não quadradas também têm determinante após se ter dito umas dezenas de vezes que o determinante só se define para matrizes quadradas). Mas as perguntas que revelam curiosidade e vontade de compreensão provocam quase sempre melhor impressão do que má. Além disso, a experiência revela que, num elevado número de casos, quando um aluno faz uma pergunta numa aula, nenhum dos seus colegas sabe a resposta, o que só mostra como a pergunta é interessante.

Um critério pessoal que uso para formar a minha opinião relativamente a alunos consiste em observar as suas reacções quando me colocam um problema de Matemática cuja solução desconheço mas que tento resolver na sua presença. A maior parte dos alunos pura e simplesmente desliga! A atitude é do tipo "Bolas, ele não sabe!" e encaram o tempo que ficam à espera que eu tente descobrir a solução como um desperdício. Mas os melhores alunos fazem precisamente o contrário: tentam aproveitar a oportunidade para verem como é que eu ajo na minha tentativa de chegar à solução. E há uma diferença abissal entre os alunos que se contentam com terem conhecimentos matemáticos e aqueles que tentam não somente possuir esses conhecimentos como também perceber como os alcançarem por si próprios.

O lado social da Matemática

Um colega meu comentou certa vez, a respeito de ser-se matemático, que "neste trabalho, 50% são relações públicas". E é verdade (bom, talvez com um pequeno exagero)! Um matemático tem todo o interesse em manter-se em contacto com outros matemáticos, quer para ter ideias que possam ajudar a resolver os problemas que lhe interessam, quer para tomar conhecimento de novos problemas. O mesmo se aplica à aprendizagem: é desejável que se contacte com outras pessoas, quer colegas quer professores, a fim de trocar ideias ou receber sugestões. O trabalho individual é fundamental, obviamente, mas o alargamento de horizontes que se obtém através do contacto com outras pessoas também o é. A imagem do matemático genial a trabalhar num isolamento magnífico numa torre de marfim tem pouquíssima correspondência com a realidade. Mesmo naqueles poucos matemáticos que mais deram a impressão de se adequarem a esse estereótipo, como Newton ou Gauss, sabe-se que isso se deveu em grande parte a terem dificuldade em encontrarem interlocutores adequados e não a falta de vontade de trocar ideias.

Estudar Matemática

Não vou descrever aqui como é que faço cada vez que estudo Matemática, pois a maneira mais eficiente de o fazer varia muito de pessoa para pessoa, pelo que cada um deve tentar descobrir quais são as condições em que estuda melhor. Por exemplo, já há muito tempo que constatei que ter música de fundo não me distrai quando estou a tentar resolver um problema mas é bastante incomodativa quando estou a tentar compreender algo novo. No entanto, há algumas ideias que convém ter em mente, quanto mais não seja para ver até que ponto resultam.

Não separar a teoria da prática

Não vou repetir o que escrevi acima quanto à relação entre a teoria e a resolução de problemas, embora esse assunto esteja relacionado com o tópico que vou abordar agora. A crença na superioridade da teoria relativamente à resolução de problemas concretos leva muitas vezes os alunos a estudarem a teoria sem se preocuparem em resolver exercícios, o que é um erro crasso. Ao lerem-se apontamentos das aulas teóricas fica-se muitas vezes com a ilusão de que se compreende mais do que realmente se compreende, sobretudo se os apontamentos forem bem feitos. O contrário também ocorre: textos mal redigidos podem muitas vezes fazer com que um assunto pareça mais difícil do que realmente é. Em ambos os casos, o melhor a fazer é resolver exercícios, quer para testar se se compreendeu bem o assunto, quer para ver se se trata de um tema tão difícil como parece à primeira vista. Caso não se disponha de exercícios, então o melhor é tentar-se aplicar o que se aprendeu a problemas concretos e ver-se se se consegue ou não resolvê-los.

Não gastar demasiado tempo com exercícios de rotina

Quando se está perante uma lista de exercícios "todos iguais" e se tem uma grande dificuldade em resolver um único que seja, então há certamente algo que está errado. Nesta situação, o melhor a fazer é reler a teoria que se está a estudar ou pedir ao professor para explicar novamente o método, consoante o caso que se aplique. Naturalmente, em certos casos não é claro se um determinado exercício é ou não de rotina. Nesses caso, o que há a fazer é perguntar ao professor.

Resolver problemas

Um conselho que sigo muitas vezes ao tentar resolver problemas foi dado já há décadas por George Pólya: se não se consegue fazê-lo, há um caso particular que também não se consegue resolver; deve-se então começar por aí. Não, isto não serve para todos os problemas, mas aplica-se a bastantes mais casos do que o que pode parecer à primeira vista. Não se consegue resolver um problema relativo a polinómios? Começa-se por tentar com polinómios de grau 1 ou 2. Está-se encravado num problema de matrizes? Vê-se o que se consegue fazer com matrizes com duas linhas e duas colunas. Não se avança num problema sobre funções deriváveis? Que tal começar por ver o que se consegue fazer se elas forem polinomiais?

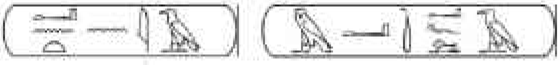
Compreender os conceitos

Para cada conceito, deve-se conhecer pelo menos uma situação à qual este se aplica e pelo menos uma à qual este não se aplica. Assim, por exemplo, um primeiro (e importante) passo para se compreender o que é uma função derivável consiste em conhecer-se pelo menos um exemplo de uma função derivável e pelo menos um exemplo de uma função não derivável. Melhor ainda será conhecer-se um exemplo de uma função da qual se saiba que é derivável e porquê e um exemplo de uma função da qual se saiba que não é derivável e porquê. Naturalmente, é tarefa do professor fornecer tais exemplos, mas caso isso não aconteça convém sempre pedi-los. Mas é bom ter em mente que nem sempre é possível o professor satisfazer tais pedidos. Por exemplo, um número algébrico é um número que é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros. Posto isto e dado o que escrevi anteriormente, um professor que defina o conceito de número algébrico deveria dar um exemplo de um número algébrico, explicando porque é que o é, bem como o exemplo de um número não algébrico (aquilo que se designa por número transcendente), mais uma vez explicando porque é que o é. No entanto, embora seja fácil dar exemplos de números não algébricos (os mais conhecidos são π e e) não é trivial mostrar que um dado número não é algébrico.

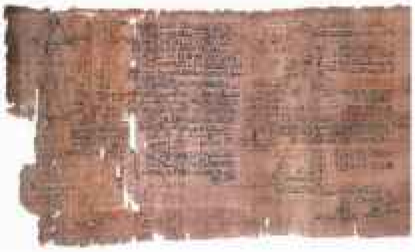
O que vem à rede...

Fracções Egípcias

António Machiavelo



Departamento de Matemática Pura da
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto



O termo *fracção egípcia* designa uma soma de fracções unitárias distintas, sendo uma fracção unitária simplesmente uma fracção de numerador igual a um. Em rigor, o nome *representação egípcia* seria mais adequado, mas a designação fracção egípcia está de tal forma enraizada que é impossível fazer essa correcção.

Por exemplo,

3/25 = 1/9 + 1/150 + 1/450

é uma representação de 3/25 em fracção egípcia. Usando a igualdade **1/a = 1/(a+1) + 1/(a*(a+1))**, pode-se transformar uma representação numa outra com mais parcelas, concluindo-se assim que a representação está longe de ser única. De facto, pode-se gerar uma infinidade de representações à custa de uma só.

A designação *fracção egípcia* deve-se ao facto dos antigos egípcios representarem todos os números fraccionários essencialmente desse modo. A razão de assim ser é desconhecida. É lamentável que em muitas páginas da internet, e mesmo em bons livros de História da Matemática[1], se leiam frases como «Para além dos inteiros, os Egípcios só concebiam as fracções unitárias» e «Enfim, recusando-se a admitir outras fracções para além das unitárias...». Isto seria análogo a afirmar que nós só concebemos os números de 0 a 9, pois escrevemos todos os outros usando apenas estes!

O famoso papiro Rhind, uma das escassas fontes da matemática egípcia e um dos textos mais antigos que é conhecido, copiado por volta de 1650 a.C. pelo escriba Ahmosé[2] de "documentos antigos", nas suas palavras, começa precisamente com uma lista que dá uma representação das fracções da forma **2/n**, com **n** ímpar e variando de 3 a 101, como soma de fracções unitárias distintas. Por exemplo:

2/3 = 1/8 + 1/52 + 1/104

2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890.

A página mantida por Maria João Lagarto, docente da Escola Superior de Educação de Santarém, em:

`http://www.malhatlantica.pt/mathis/`

contém algumas imagens digitalizadas do papiro Rhind, assim como um resumo do seu conteúdo e a transcrição de alguns dos problemas nele contidos.

Não é difícil ver que qualquer número racional positivo tem pelo menos uma representação em fracção egípcia (e portanto, pelo que acima se viu, uma infinidade). Para o caso das fracções que representam números menores que a unidade, é suficiente observar que o algoritmo dito "avarento" ou "voraz" (*greedy*, em inglês) termina sempre num número finito de passos. Este algoritmo consiste em subtrair, ao número racional positivo que se pretende representar em fracção egípcia, a maior fracção unitária que não o ultrapassa, e repetir o processo, sucessivamente, com o que resta, até se obter uma fracção unitária.

Se o número for maior que um, pode-se separar a sua parte inteira da fraccionária, sendo fácil escrever um número inteiro como fracção egípcia usando **1 = 1/2 + 1/3+ 1/6**, juntamente com a igualdade mencionada no segundo parágrafo deste artigo para eliminar fracções unitárias repetidas (deixamos os detalhes como exercício para o leitor).

A representação obtida usando o algoritmo avarento nem sempre é a mais eficiente, tanto em termos do número de fracções como do tamanho dos denominadores. Por exemplo, usando este algoritmo obtém-se:

5/121 = 1/25 +1/757 + 1/763309 + 1/873960180913 + +1/1527612795642093418846225,

enquanto que se tem:

5/121 = 1/33 + 1/121 + 1/363.

Esta é uma curiosa instância onde ser avarento à partida não dá o resultado mais económico no final. É possível que haja aqui algum ensinamento importante!...

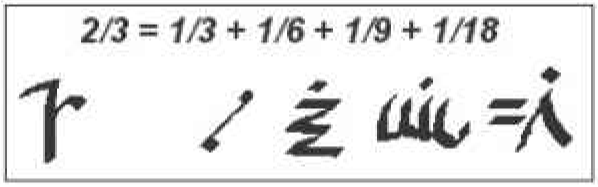
Há alguns resultados notáveis inspirados pelo estudo das fracções egípcias. Limitamo-nos aqui a mencionar um, que é relativamente recente: a demonstração de Ernie Croot, em 2000, da validade da conjectura de Erdös-Graham, que afirma que se os números naturais forem repartidos numa união finita de subconjuntos disjuntos (ou, equivalentemente, forem coloridos usando um número finito de cores), então pode-se escrever 1 como soma de fracções unitárias em que os denominadores pertencem todos a um só desses subconjuntos (são monocromáticos).

Há também alguns problemas em aberto sobre fracções egípcias, sendo talvez o mais notável e conhecido a:

Conjectura de Erdös-Straus[3]: Para todo **n>1** (*n natural*) existem números naturais **x,y,z** tais que:

4/n = 1/x + 1/y + 1/z.

Thomas Hagedorn, em 2000, demonstrou a validade de uma conjectura análoga, devida a R. H. Hardin e Neil Sloane: para todo o número n ímpar, não divisível por 3, existem números naturais ímpares x, y, z, distintos, tais que **3/n = 1/x + 1/y + 1/z**. Neste contexto, Andrej Schinzel formulou a seguinte conjectura: para todo o número



natural **m** existe um número natural **N** tal que para cada **n>N** se tem **m/n = 1/x + 1/y + 1/z**, para alguns inteiros **x, y, z.** A sua validade está estabelecida[4] para **m<36.**

Para mais informações sobre estes tópicos, recomendamos as páginas de Ron Knott[5] e David Eppstein[6], cujos endereços são, respectivamente:

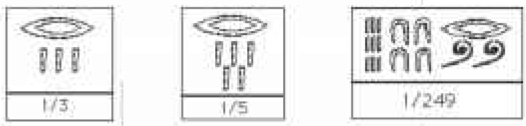
`http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fractions/egyptian.html`

`http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/`

e o artigo de Kevin Gong[7] que pode ser obtido em:

`http://kevingong.com/Math/index.html`

Não deixa de ser curioso que uma representação de fracções com milénios de existência continue a ser fonte de inspiração de descobertas sobre propriedades dos números e que haja, ainda, alguns mistérios por desvendar nesta área.



1 A. Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer, *Une Histoire des Mathématiques: routes et dédales*, Éditions du Seuil, 1986, p. 14 e 15, respectivamente.

2 Ahmes ou Ahmose na transliteração para inglês; desconhecemos a transliteração correcta para português, mas Ahmosé parece-nos razoável.

3 Formulada cerca de 1948 por Paul Erdös (1913--1996) e Ernst Gabor Straus (1922—1983).

4 R. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag, 1981, p. 88.

5 Dirige a sua própria empresa de consultadoria e desenvolvimento de software e é "visiting fellow" da Escola de Electrónica e Ciências Físicas da Universidade de Surrey, no Reino Unido.

6 Professor no Departamento de Ciências dos Computadores da Universidade da California, em Irvine.

7 Escrito enquanto este era aluno de mestrado na Universidade de Berkeley; actualmente Gong é engenheiro de software na empresa Danger Research (em Palo Alto, na Califórnia).

No centenário do nascimento de António Aniceto Monteiro (1907-1980)

Natália Bebiano
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

António Monteiro é, com Ruy Gomes, a mais poderosa mentalidade da sua geração. Os dois formam contraste. Um, taciturno e melancólico, sempre recolhido em si próprio, no mistério das suas reflexões, de onde sai por vezes com uma expressão de riso infantil; o outro, intelecto-acção, sempre em efervescência; é o tipo do intelectual-energia, do intelectual que se insere na vida, e a domina.

Abel Salazar, "Movimento Científico Português", in *Sol Nascente* de 1 de Abril de 1938

António Aniceto Monteiro nasceu a 31 de Maio de 1907 em Mossâmedes, Angola[1]. Frequentou o Colégio Militar e a Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa[2], onde se licenciou em Ciências Matemáticas em 1930. Foi como bolseiro do Ministério da Educação Nacional para Paris onde permaneceu de 1932 a 1936, tendo obtido em 1936 o grau de doutor em Sciences Mathématiques na Sorbonne, com a dissertação intitulada "Sur l'additivité des noyaux de Fredholm", realizada sob orientação de Maurice Fréchet.

Após o doutoramento, regressou a Portugal e dinamizou um "vivíssimo e irrequieto movimento matemático", que visava a promoção da investigação científica de acordo com as práticas dos países avançados, a criação de revistas científicas de circulação nacional e internacional, a organização de cursos avançados e conferências sobre temas candentes, a modernização dos curricula, a formação de jovens investigadores, em suma, a criação de uma verdadeira Escola de Matemática...

Bento Caraça, Ruy Luís Gomes e António Monteiro foram os mais proeminentes impulsionadores do *Movimento Matemático*, que tinha como ideário nuclear a promoção dos estudos matemáticos em Portugal e a sua elevação ao nível das vanguardas internacionais.

Apesar do seu excepcional talento, da sua invulgar capacidade de formar discípulos, o Estado Novo inviabilizou o seu ingresso na carreira académica. Escreve Monteiro no seu curriculum: "durante o período de 1938-43 todas as minhas funções docentes e de investigação foram desempenhadas sem remuneração; ganhei a vida dando lições particulares e trabalhando num Serviço de Inventariação de Bibliografia Científica existente em Portugal, organizado pelo IAC (Instituto de Alta Cultura)."

Em 1936, Monteiro participou na criação do *Núcleo de Matemática*, Física e Química com António da Silveira (1904-1985), Bento de Jesus Caraça (1900-1947), Manuel Valadares (1904-1982), entre outros[3]. Em 1937, Monteiro fundou com José da Silva Paulo e Manuel Zaluar Nunes, a *Portugaliae Mathematica*, a primeira revista portuguesa dedicada à publicação de originais de Matemática, e em cujo primeiro número a sua tese foi dada à estampa. Em 1938 foi-lhe outorgado o Prémio Artur Malheiros da Academia das Ciências de Lisboa. Em 1939 começou a funcionar em Lisboa o *Seminário de Análise Geral*, de que foi um dos mais proeminentes impulsionadores, e nesse mesmo ano fundou a revista de divulgação *Gazeta de Matemática*, em colaboração com Bento Caraça, Hugo Ribeiro, J. da Silva Paulo e Manuel Zaluar Nunes. Foi também co-fundador do *Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa* (1940). António Monteiro distinguiu-se como um dos principais mentores da fundação da Sociedade Portuguesa de Matemática em 1940, tendo sido seu primeiro Secretário Geral entre 1941 e 1942.


GAZETA DE MATEMÁTICA

APRESENTAÇÃO

Gazeta de Matemática: *Jornal dos candidatos ao exame de aptidão e dos estudantes de matemática das escolas superiores*

1 Seu pai, António Ribeiro Monteiro (1880-1915), era tenente de infantaria e dirigiu as obras do caminho de ferro de Mossâmedes.

2 *Nos quatro ou cinco anos que andei na Faculdade de Ciências como aluno, nunca ouvi falar de "conferências" de matemática. Se houve alguma não me lembro. In* carta a Alfredo Pereira Gomes, citada na *Portugaliae Mathematica*, vol.39, 1980, p. XXXV.

3 O afã da organização de cursos, conferências e publicações do "Núcleo" extinguiu-se com a sua "desintegração" inopinada dois anos volvidos.

4 Iniciativa de António Luiz Gomes, irmão de Ruy L. Gomes, auspiciosamente concretizada.

5 Na sequência da conferência radiofónica "Os Objectivos da JIM" proferida por António Monteiro foram encerrados os Clubes de Matemática para jovens criados pelo palestrante em Lisboa.

6 Cfr. a correspondência de Ruy Luís Gomes com o biólogo José Antunes Serra da Universidade de Coimbra, posteriormente professor de genética nos Estados Unidos, in Natália Bebiano, *Ruy Luís Gomes, uma fotobiografia*, Gradiva e Universidade do Porto, 2005, pp. 221-224.

Em 1943, por iniciativa de Mira Fernandes, Ruy Luís Gomes e António Monteiro, foi criada a "Junta de Investigação Matemática" (JIM), a primeira associação privada de cientistas em Portugal sem financiamento público. A JIM tinha como um dos seus objectivos primaciais "despertar na juventude estudiosa portuguesa o entusiasmo pela investigação matemática". Graças às diligências de Ruy Luís Gomes, Monteiro foi contratado com fundos da "Dotação da JIM"[4], e com o seu dom natural de "intelectual-acção" contribuiu decisivamente para a concretização dos projectos do recém-criado *Centro de Estudos Matemáticos do Porto*, onde dirigiu o Seminário de Topologia Geral.

No epicentro da agitação matemática dos anos 40, estavam António Monteiro e Ruy L.Gomes, exorcizando com um clarividente programa de realizações a "fatalidade histórica" do nosso atraso científico. A mobilização da juventude portuguesa para o cultivo da Ciência era desiderato primordial. Os estudantes da Faculdade de Ciências do Porto, contagiados pela atmosfera entusiástica que reinava, tentaram criar um Clube de Matemática, a exemplo do que ocorrera em Lisboa, mas a iniciativa não se concretizou face à oposição do Ministério do Interior[5].

A constituição de um instituto de investigação nacional "de autêntica extensão universitária" englobando a matemática, a física, a química, a biologia, as ciências económicas e sociais, esteve nos horizontes dos cientistas da "geração de 40". O sucesso alcançado no meio matemático, quer no fortalecimento de contactos com a comunidade científica internacional, quer no desenvolvimento de projectos de investigação com envolvimento crescente de jovens, era inspirador do alargamento das iniciativas a outros campos científicos. Cientistas de diferentes áreas da ciência portuguesa idealizavam a organização geral da investigação científica num agrupamento de Institutos: Instituto de Química, Instituto de Biologia, Instituto de Física, Instituto de Matemática, Instituto de Ciências Económicas e Sociais[6]. A ofensiva desencadeada pelo Estado Novo contra a inteligentzia incómoda fez malograr este projecto.

Um matemático no exílio

Em 28 de Fevereiro de 1945, face ao endurecimento do carácter repressivo do Regime e à inviabilidade de realizar em Portugal o seu labor científico, Monteiro viu-se forçado a seguir para o exílio. Partiu com um contrato de quatro anos para a Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil, hoje Universidade Federal do Rio de Janeiro, com recomendação de Einstein, von Neumann e Guido Beck. Ocupou a cátedra de Análise Superior e desenvolveu actividades de investigação nas áreas da Topologia Geral, Análise Funcional, Reticulados, Álgebras Booleanas. Enquanto professor no Rio teve contacto com André Weil, Oscar Zariski e Jean Dieudonné, professores visitantes na Universidade de São Paulo, respectivamente, nos anos académicos de 1945-1947, 1945 e 1946-1947. Em 1945-46 foi investigador do Núcleo Técnico Científico da Fundação Getúlio Vargas.

Em Julho de 1946, o doutoramento na Universidade do Porto do seu orientando Alfredo Pereira Gomes foi um acontecimento marcante, revelador da maturidade e criatividade da nossa comunidade matemática.

Em 1948, Monteiro deu início à publicação no Rio de Janeiro da série de monografias "Notas de Matemática". Editor de seis volumes, a série monográfica veio posteriormente a ter como editor Leopold Nachbin, seu ex-aluno, sendo publicada a partir de 1973 na Holanda pela North-Holland Publishing Company.

Em 1949 Monteiro era investigador do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas no Rio de Janeiro. Mas, por influência da Embaixada de Portugal, o seu contrato académico com a Universidade não foi renovado, devido ao papel activo que desempenhava com outros exilados políticos na Resistência contra o Salazarismo.

Uma vez mais, Monteiro teve que partir. A Argentina foi o seu novo local de exílio e palco para as grandes realizações científicas que o Regime de Salazar lhe cerceou. Em 1950, é contratado pela Universidade Nacional del Cuyo, na cidade de San Juan, e ali permareceu como docente de Análise Matemática na Faculdade de Engenharia até 1956, tendo sido ainda docente de Matemática na Faculdade de Ciências da Educação da mesma Universidade, na cidade de San Luis.

Em 1951 foi um dos fundadores do Departamento de Investigaciones Científicas (DIC) e em 1953 acumulou a docência na Faculdade de Engenharia com o magistério no Instituto de Matemática do DIC na Universidade Nacional del Cuyo. Em 1954-56 exerceu funções docentes na Escola de Arquitectura da Faculdade de Engenharia de San Juán.

Foi co-fundador da Revista Matemática Cuyana (1955). No ano seguinte, foi convidado para docente da recém-criada Universidad del Sur (UNS) em Bahía Blanca, para onde transitou. Ali organizou o Instituto de Matemática, os curricula, a biblioteca, que ostenta o seu nome, regeu cursos e dinamizou seminários, orientou estudantes, criou discípulos, lançou séries de publicações, como as "Notas de Lógica Matemática" (1964) ou as "Notas de Algebra y Análisis" (1966).

Em 1958, Ruy L. Gomes, demitido da Universidade Portuguesa em 1947 e vítima da sanha persecutória da PIDE, aceitou o convite do seu amigo António Monteiro para docente da Universidad del Sur, onde permaneceu até 1961.

Aniceto Monteiro (1966)

Em 1972, António Monteiro recebeu o título de Professor Emérito da Universidad del Sur em tributo à sua excepcional acção na Instituição.

No pós 25 de Abril

Em 1974, António Monteiro foi eleito membro honorário da Unión Matemática Argentina e no ano seguinte jubilou-se. Nesse mesmo ano, o reitor da Universidad Nacional del Sur, invocando legislação anti-terrorista, proibiu a sua entrada na instituição, o que provocou fortes reacções de repúdio.

António Monteiro, que antes do 25 de Abril nunca foi admitido no corpo docente ou de investigação da Universidade Portuguesa, ocupou em 1977 um lugar de investigador no CMAF, onde desenvolveu a sua acção de matemático de génio, mormente orientando doutorandos. Em 1978, o seu trabalho "Sur les Algèbres de Heyting Symétriques" foi distinguido com o Prémio Gulbenkian de Ciência e Tecnologia.

Morreu em Bahía Blanca em 29 de Outubro de 1980. Em 2000, foi-lhe concedida postumamente a Grã-Cruz da Ordem Militar de Santiago e Espada. A sua bibliografia compreende cerca de meia-centena de artigos científicos publicados em diversas revistas, obras de carácter pedagógico-didáctico, de divulgação e diversas comunicações editadas em Actas.

Bibliografia Fundamental

[1] Portugaliae Mathematica, vol.39, 1980 (número de homenagem a António Aniceto Monteiro)
[2] Blog de Jorge Rezende

Alfredo Pereira Gomes (1919-2006)

Alfredo Pereira Gomes, o mais antigo sócio honorário da Sociedade Portuguesa de Matemática, partiu. É mais um homem de uma geração que tanto agitou as águas científicas e políticas que nos deixa.

O Professor Pereira Gomes foi bem conhecido pelos matemáticos portugueses e por várias gerações de estudantes apesar de ter passado grande parte da sua vida fora de Portugal. Ele teve de abandonar o país ainda jovem, trabalhou no Brasil e na França, tendo regressado a Portugal somente durante a chamada primavera marcelista já com bem mais de 50 anos. No Brasil deixou uma obra notável, ainda hoje recordada. Em Portugal foi um dos grandes interessados na Sociedade Portuguesa de Matemática a cuja Comissão Instaladora pertenceu quando, em 1977, se procedeu à sua legalização (a SPM foi fundada em 1940 mas só conseguiu a legalização em 1977). De 1978 a 1980 e depois de 1980 a 1982 foi Presidente da Mesa da Assembleia Geral da SPM. Participou nas negociações que levaram a SPM a tornar-se proprietária da Portugaliae Mathematica. Mais tarde foi nomeado Director desta, cargo que desempenhou num período importante da vida da revista até que em 1996 pediu para ser substituído. Dedicou também muita atenção à Gazeta de Matemática e teve intervenção nas negociações que, por volta de 1977, tiveram lugar entre esta e a SPM mas que não foram bem sucedidas. Enfim, Pereira Gomes foi um homem profundamente interessado pela vida matemática com especial atenção aos acontecimentos que tinham lugar em Portugal. O seu empenho foi reconhecido pela Sociedade Portuguesa de Matemática que o nomeou sócio honorário em Assembleia Geral que teve lugar a 1989.

Graciano de Oliveira

O contexto académico no Recife na década de 40 e início dos anos 50.

A Universidade do Recife que a partir de 1965 recebeu o nome de Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, foi criada em 1946, pela reunião de suas principais Faculdades, à época:

A Faculdade de Direito, a mais antiga do Brasil, fundada juntamente com a Faculdade de Direito de São Paulo, em 1827; a Faculdade de Engenharia, criada em 1895, onde estudaram e ensinaram vários expoentes das chamadas Ciências Exactas, daquele tempo, como: João Holmes Sobrinho, Joaquim Cardozo, Newton Maia e Luis Freire; a Faculdade de Medicina que data de 1915 e a Faculdade de Química.

Devido a várias dificuldades, as primeiras gerações de físicos e matemáticos recifenses, pernambucanos e nordestinos eram encaminhadas, ainda jovens, para o sul do país onde completavam sua formação. Por exemplo, José Leite Lopes, Mário Schenberg, Leopoldo Nachbin, Maurício Peixoto, Samuel McDowell, Ricardo Palmeira, entre outros, seguiram esse roteiro. O propósito ao lembrar estes fatos é explicar o contexto da época, a terrível força de desinformação científica misturada a uma pretensa cultura local distante dos cânones correctos que se impunham, havia tempo, no campo das Ciências Exactas. Um contexto de uma grande massa desinformada, com pontos isolados de treinamento científico autodidáctico e semiamadorístico.

Nessas circunstâncias, o que faz alguém que estava na Université de Nancy, França, e que poderia seguir carreira naquele país, aceitar, em 1953, um convite do primeiro Reitor da UFPE, Prof. Joaquim Amazonas, para vir trabalhar no Recife, tornando-se assim o primeiro matemático a pertencer aos quadros da universidade? A resposta somente pode ser entendida por quem conheceu o Prof. Pereira Gomes e pôde apreciar a sua personalidade forte e determinada, e a sua grande disposição para enfrentar desafios.

Ao longo do tempo, outros matemáticos portugueses como Manuel Zaluar Nunes (em 1953), José Morgado (em 1960) e Ruy Luís Gomes (em 1962) vieram-se juntar a Pereira Gomes para formar o que ficou conhecido como a Escola Portuguesa do Recife.

Inicialmente, logo após sua chegada, Pereira Gomes começou a ensinar na Faculdade de Engenharia e no Departamento de Matemática da recém criada Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras. Em 1954, é fundado o Instituto de Física e Matemática, IFM, onde seriam desenvolvidas actividades extracurriculares de Matemática e de Física com o objectivo de aperfeiçoar e actualizar a formação científica de licenciados e assistentes.

Seu primeiro Director foi Luís Freire e sua Secção de Matemática era composta pelos professores Pereira Gomes, Zaluar Nunes e Newton Maia. É importante observar que o IMPA, no Rio de Janeiro, fora criado em 1952, e que o próprio CNPQ, a mais influente agência de fomento do país, surgira em 1951. O IFM passou a contar com o apoio do CNPQ que fez a primeira doação para a sua Biblioteca cujo primeiro coordenador foi o Professor Zaluar Nunes.

Por iniciativa de Pereira Gomes vários matemáticos, sobretudo franceses, visitaram o IFM nos primeiros anos, entre eles: Armand Denjoy, Roger Godément, François Bruhat. Eles deixaram redigidos os resumos de suas aulas sobre Variedades Diferenciáveis, Álgebras e Grupos de Lie, que foram publicados numa Colecção, intitulada "Textos de Matemática", inaugurada por Pereira Gomes, em 1955, com o seu curso de Álgebra Linear e Multilinear. A estes volumes sucederam outros como "Differentiable Manifolds, Complex Manifolds" de S.S. Chern, "Integral de Haar" de Leopoldo Nachbin, lançado posteriormente pela editora Van Nostrand. Laurent Schwartz e François Treves passaram também pelo Recife.

As actividades dos portugueses no Recife começaram a repercutir nos demais centros matemáticos do Brasil, tendo o Professor Pereira Gomes participado de Conselhos Directores e Conselhos Consultivos de várias dessas instituições como o IMPA, a Universidade de Brasília, etc.

Conheci Pereira Gomes em 1959, como aluno do belíssimo curso de Cálculo Diferencial e Integral, que ele leccionava na Escola de Engenharia, e ao final do mesmo, fui por ele convidado para continuar os meus estudos no IFM, com uma bolsa de Iniciação Científica do CNPQ.

Em 1962, com a chegada de Ruy Luís Gomes ao Recife e o afastamento de Pereira Gomes para a França, em gozo de um ano sabático, passei a ser orientado pelo primeiro que teve uma determinante influência na minha formação matemática.

Para finalizar, quero destacar a importância da passagem do Professor Pereira Gomes na UFPE, pelo pioneirismo, e sobretudo pelo fato que foi sua presença no Recife o factor decisivo que contribuiu para a vinda dos demais matemáticos portugueses aqui citados que deixaram um legado de realizações até hoje reconhecidas.

Fernando Cardoso
Professor do Departamento de Matemática
Universidade Federal de Pernambuco

Até sempre, Professor

Após o falecimento, em Novembro último, do Professor Alfredo Pereira Gomes, em várias notícias publicadas surgiu a referência ao desaparecimento "do último matemático da geração de 40", relatando o seu percurso científico durante a permanência em França e no Brasil. Quem leu alguns destes textos poderá ficar com a ideia de que a actividade matemática do Professor Pereira Gomes se esgotou até 1972, ano em que regressou a Portugal. Sobre os restantes 34 anos de actividade científica e docente, 17 dos quais dedicados ao ensino como Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL), são raras as referências, para além de um breve apontamento relativo ao seu envolvimento na reactivação da Sociedade Portuguesa de Matemática e ao seu papel no relançamento da revista Portugaliae Mathematica. Não me julgo capacitada para preencher essa lacuna e tecer considerações sobre o trabalho científico do Professor Pereira Gomes. Haverá certamente outros muito mais habilitados para o fazer. O meu testemunho é o de alguém que com ele trabalhou durante quase vinte anos e que o recorda com muita saudade.

Curiosamente, a família Pereira Gomes esteve ligada à minha vida em dois momentos determinantes: a entrada na vida escolar e a entrada na carreira académica.

Aprendi a "ler, escrever e contar" com a escritora Alice Gomes. Com o Professor Pereira Gomes, seu irmão mais novo, comecei a trabalhar no início da minha actividade como assistente no Departamento de Matemática da FCUL e, sob a sua orientação, prestei provas de doutoramento na Universidade de Lisboa. É a ele que devo a minha formação pós-licenciatura.

Por indicação do Professor Almeida e Costa, o Professor Pereira Gomes contactou-me pouco tempo depois da sua chegada a Lisboa, convidando-me a integrar o projecto de investigação "Análise Funcional em Grupos Localmente Compactos". Este projecto deu posteriormente origem à linha de acção nº 3, "Análise Harmónica e Aplicações" do Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais (CMAF), criado em 1976. Foi nessa área que preparei a minha tese de doutoramento, totalmente realizada no CMAF. Foi o Professor Pereira Gomes que me colocou as primeiras questões e me sugeriu os temas que levaram à sua redacção. A ele devo um apoio contínuo e uma orientação esclarecida.

Recordo como momentos de desencanto, que surgem naturalmente no decurso de um trabalho de investigação, eram temperados por longas conversas sobre temas que nada tinham a ver com a matemática. O Professor Pereira Gomes era profundamente culto e interessado por tudo o que o rodeava. Sabia ouvir, cultivando um contraditório saudável, mesmo quando as opiniões eram diametralmente opostas às suas, e era um exímio contador de histórias.

Enquanto trabalhei como sua assistente na disciplina de Análise Complexa tive ocasião de testemunhar um episódio que bem exemplifica o seu grande sentido de humor e "fair play". Na sequência de um exame com resultados pouco animadores, um aluno queixou-se das dificuldades inerentes ao programa da cadeira. O Professor Pereira Gomes, bem ao seu jeito irónico, contrapôs a existência de alternativas a um diploma de licenciatura, tais como o cultivo de alcachofras. Este "conselho" deu origem à afixação de uma banda desenhada em que, muito bem caricaturado, o Professor era um "super-herói" que ingeria latas de alcachofras para obter os seus poderes (à semelhança de Popeye com as latas de espinafres). Apesar da banda desenhada ser divertida e não ofensiva, seria de esperar que o visado não achasse muita graça. Ora o Professor Pereira Gomes pediu uma cópia que esteve afixada durante anos no seu gabinete.

Depois de jubilado foi-se afastando do convívio científico no seio do CMAF. Mantivemos contactos esporádicos e, por mais do que uma vez, me enviou documentação relacionada com o meu trabalho, mostrando assim que a jubilação não tinha sido para ele uma resignação, ou um fim, o que diz muito sobre o seu temperamento, empenho e dinamismo. Numa dessas ocasiões escreveu: "Se é verdade que tenho presentemente várias doenças, na realidade nenhuma delas é contagiosa e muito menos a velhice...". Além de uma censura, ainda que velada, pelos meus longos silêncios, este desabafo traduzia também alguma solidão que o acompanhou nos seus últimos tempos.

Chocou-me muito a notícia da morte do Professor e chocou-me muito o número reduzido de pessoas que lhe prestou uma última homenagem. O Professor desapareceu "perante o silêncio e o esquecimento", como alguém escreveu. Mas certamente alguns dos que estiveram presentes na comovente cerimónia que teve lugar na capela do cemitério, ao ouvir falar do homem e do cientista, terão compreendido que Alfredo Pereira Gomes foi muito mais do que "o último matemático da geração de 40".

Até sempre, Professor.

Suzana Metello de Nápoles

Alfredo Pereira Gomes, em Maio de 2006

Um passado que nos honra

Alfredo Pereira Gomes (1919-2006), que durante algum tempo foi o único sócio honorário da Sociedade Portuguesa de Matemática, é um dos associados a quem estamos mais devedores. Com uma vida dedicada à matemática, foi membro activo da SPM desde o seu início e foi um dos que conseguiram, apesar do exílio, contribuir para dinamizar a vida científica em Portugal durante os difíceis anos do salazarismo.

Regressado ao nosso país em 1972, num momento de relativa abertura do regime, prosseguiu o seu trabalho arcando com a responsabilidade da *Portugaliae Mathematica* e colaborando no esforço de reanimação da SPM.

Nos últimos anos, tinha limitações de mobilidade e de saúde. A sua presença rareava nos encontros matemáticos e nos convívios da nossa Sociedade. Em Dezembro de 2005 fizemos-lhe uma homenagem especial, que o deixou muito agradado. Voltámos a homenageá-lo no nosso Encontro Nacional de 2006, onde aprovámos novos sócios honorários, que igualmente distinguimos. Conservamos todos uma lembrança grata desses raros momentos. Para nós, relembrar Pereira Gomes e outros matemáticos a quem muito devemos não é apenas um manifesto de gratidão. É o reconhecimento de um passado que nos honra e anima o nosso presente.

Nuno Crato
(Presidente da SPM)

José Sousa Ramos (1948-2007)

José Sousa Ramos, professor de Matemática no Instituto Superior Técnico, desapareceu muito jovem quando havia ainda muito a esperar dele. Interessou-se muito pela Sociedade Portuguesa de Matemática e foi em actividades ligadas à Direcção da SPM que com ele mais privei. Empenhou-se em criar escola como testemunham os inúmeros candidatos a doutoramento que o tiveram como orientador. Um seu antigo aluno, o Professor Jorge Buescu, descreve melhor os seus interesses e projectos científicos.

Deixou-nos um amigo que recordo com saudade.

Graciano de Oliveira

•

Faleceu, a 1 de Janeiro de 2007, José Rodrigues Santos de Sousa Ramos.

José Sousa Ramos - a quem me referirei simplesmente por SR, como era carinhosamente conhecido por todos quantos com ele privaram de perto (e que constituía um afectuoso trocadilho com os R e L omnipresentes no seu trabalho em Dinâmica Simbólica) foi um matemático notável. Licenciado em Física pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa em 1972, iniciou a sua carreira no então Instituto de Física Matemática como assistente de investigação, posição que ocupou até 1979. Entrou então como assistente para o Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, onde se viria a doutorar em 1989 com a Tese *Hiperbolicidade e Bifurcação de Sistemas Simbólicos*.

Durante esse período revelou uma grande abrangência científica, abarcando desde questões provenientes da Física Teórica, como as equações da Relatividade Generalizada, até à então emergente Teoria do Caos, na qual SR foi em Portugal dos primeiros matemáticos a trabalhar. Talvez por isso a sua Tese não tenha tido orientador; também nisso SR seguiu o poeta António Machado: "Caminhante não há caminho - o caminho faz-se ao andar".

Em 1992 transitou para o Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico, onde veio a permanecer. Nestes quinze anos a sua criatividade científica floresceu de forma impressionante, como é visível nas suas 89 publicações referenciadas no *Mathematics Reviews* à data da escrita (é provável que este número cresça, pois SR tinha vários artigos submetidos para publicação aquando do falecimento).

Sendo os Sistemas Dinâmicos o tema unificador da sua actividade científica, é impressionante a amplitude de tópicos matemáticos que SR relacionava, reveladores de uma profunda cultura matemática. Dinâmica Simbólica, equações funcionais, álgebras C^*, funções zeta, pavimentações, grupos hiperbólicos - até uma incursão no problema de Collatz existe.

Mas, para lá das suas qualidades científicas, SR será acima de tudo recordado como Mestre. Quem o conheceu não consegue imaginá-lo senão como sempre esteve: rodeado por alunos. SR começou a ter estudantes ainda antes de terminar o Doutoramento: José Paulo Lampreia (Professor na UNL, entretanto falecido em Fevereiro de 2007 após doença prolongada) foi o seu primeiro doutorando, e o autor destas linhas o primeiro mestrando. E trabalhar com os seus estudantes era para ele a forma natural de fazer Matemática. Assim, de manhã à noite, era inevitável ver SR rodeado de jovens, discutindo entusiasmadamente com eles os problemas matemáticos que a sua visão de conjunto proporcionava.

SR aliava à sua cultura matemática qualidades humanas excepcionais, nomeadamente uma dedicação extrema aos seus alunos, colocando-os sempre à frente dos seus interesses pessoais. Este facto ajuda a compreender o impressionante número de discípulos que arrastava: orientou 14 Doutoramentos (e tinha outros 10 em curso à data do falecimento), orientou 15 Mestrados e 8 Provas de Aptidão Científica e Pedagógica.

SR nunca fumara; mas em meados de 2006 foi atraiçoado por um fulminante cancro do pulmão, numa altura em que era Coordenador de Licenciatura no IST e estava a preparar as provas de Agregação. Não chegou a realizá-las: faleceu nas primeiras horas de 2007, deixando-nos a todos mais pobres.

Mas enquanto o seu principal legado científico, aquele de que mais SR se orgulharia, os seus Alunos, o tiverem presente, não nos terá verdadeiramente deixado.

Jorge Buescu
Abril de 2007

Teresa Alice de Moura (1919-2007)

Teresa Alice de Moura foi uma notável e conhecida professora do ensino secundário. Um colega e um antigo aluno dão testemunho da sua actividade e dedicação.

Teresa Alice marcou várias gerações de estudantes e a muitos incutiu o gosto pela Matemática. Interessou-se pela Sociedade Portuguesa de Matemática, sobretudo no início das suas actividades depois da legalização, tendo sido membro da mesa da Assembleia Geral da Delegação Regional do Centro. Nessa qualidade prestou-me valiosa colaboração quando fui Presidente da Direcção daquela Delegação de 1978 a 1980. A sua opinião e o seu conselho nunca me faltaram.

Recordemos o exemplo dos bons professores de Matemática.

Graciano de Oliveira

•

Faleceu no dia 19 de Janeiro de 2007 a **Dra Teresa Alice de Moura**, conhecida e prestigiada professora e orientadora de estágio da disciplina de Matemática do ensino secundário em Coimbra.

Nascida a 17/12/1919 em Vila Cova à Coelheira-Seia, frequentou e concluiu a licenciatura em Ciências Matemáticas na Universidade de Coimbra em 20/11/1945 com a classificação de Bom (14 valores) onde concluiu também o Curso de Pedagógicas obrigatório para a carreira de professor do ensino secundário.

Iniciou o seu estágio pedagógico, na época com duração de dois anos e exame de estado, em 2/12/1949 no Liceu José Falcão. Numa altura de grandes desigualdades entre homens e mulheres, muito desvantajosa para as mulheres (também) no ensino onde a progressão era muito lenta, deu início à sua carreira de professora profissionalizada no Liceu de Santarém onde permaneceu três anos, seguindo-se um ano no Liceu Passos Manuel e mais quatro em Santarém.

Em 58/59 foi colocada no liceu D. Maria, então Liceu Feminino, como professora auxiliar, vindo a efectivar-se nesta Escola em 65/66, onde se manteve até a sua aposentação em 89/90 já com 71 anos por autorização especial para concluir a orientação de estágio.

Leccionou ainda num estabelecimento de ensino particular já após a aposentação.

Com uma sólida formação científica e pedagógica as suas aulas foram exemplos de disciplina, rigor científico e entusiasmo. Terá sido mesmo a sua característica principal a forma entusiástica com que ensinou e viveu a matemática influenciando centenas de alunos, estagiários e colegas.

Senhora de um espírito curioso e aberto à inovação esteve na linha da frente quando da experimentação de novos programas, nomeadamente no lançamento da Matemática Experimental que introduzia as estruturas algébricas e na dita Matemática Moderna que abordava exaustivamente a lógica, assuntos um pouco perturbadores da rotina programática instalada e à qual nunca se acomodou. Frequentou, inclusivamente, já no final da sua vida, um curso de informática na ANAI - UTL (Universidade Sénior) mostrando, talvez pela última vez, a sua sede de conhecimento e novidade.

Preocupada com o crónico insucesso da Matemática no nosso País investigou e experimentou processos de abordagem dos conteúdos ensaiando metodologias e estratégias. Apresentava aos seus alunos problemas, curiosidades, desafiando-os à sua participação em concursos nomeadamente as Olimpíadas da Matemática de que foi uma empenhada divulgadora junto dos alunos e professores.

Extremamente activa encarou sempre a aposentação com temor, o que a levou depois de já retirada do ensino oficial a leccionar, durante quase uma década num estabelecimento do ensino particular e a publicar um livro de exercícios de matemática em parceria com dois colegas.

Disciplinadora e um pouco formal nas aulas, nunca abdicou do seu papel de educadora revelando no contacto pessoal com os alunos, estagiários e colegas uma grande humanidade e afectividade preocupando-se e interessando-se com os seus problemas tanto de ordem pessoal como de aprendizagem.

Nos últimos tempos já com problemas de locomoção e saúde esteve praticamente afastada de qualquer actividade, confinada à residência.

Podemos em síntese afirmar que Teresa Alice foi um ser humano bem formado e uma dedicada e excelente professora e formadora a quem muitos deverão muito.

Teresa Alice, no seu merecido descanso, permanecerá na memória e no coração de muitos de nós.

Reinaldo Eloi Oliveira
Antigo colega

•

Foi com profunda tristeza que soube do falecimento da **D.ra Teresa Alice de Moura.** Eu tive o privilégio de ser aluno da Dra Teresa Alice, como era conhecida entre os seus alunos, nos anos lectivos 1979/1980 e 1980/1981 quando frequentei o 11º e 12º anos de escolaridade no Liceu Nacional Infanta D. Maria, em Coimbra. Recordo, com saudade, o entusiasmo que nos transmitia a todos, sem esquecer o rigor e a clareza na exposição das matérias, aliados a um grau elevado de exigência para com os seus alunos. Hoje sei que a Dra Teresa Alice conseguia conciliar um conjunto ímpar de qualidades. Como ex-aluno, só posso agradecer-lhe por tudo o que me ensinou e posso afirmar, sem sombra de qualquer dúvida, que foi uma das professoras que mais me marcou em todo o meu trajecto escolar.

Teresa Alice está no meu livro pessoal de memórias em lugar de destaque, como amiga, como professora.

Orlando Oliveira
Ex-aluno

ESTIMADO ASSINANTE

É extraordinariamente difícil manter a publicação da Gazeta de Matemática com a qualidade e regularidade a que nos habituámos.

É de todo impossível melhorá-la e fazê-la sair mais do que duas vezes por ano se os assinantes não pagarem atempadamente (e espontaneamente!) as suas assinaturas.

Se pensa que a Gazeta de Matemática deve continuar, por favor, procure manter a sua assinatura em dia.

Histórias de fracções

António Pereira Rosa . E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho, Lisboa
Jorge Nuno Silva . Dep. de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

1. Introdução

No Módulo Inicial do programa de Matemática A do 10º ano surge uma lista de problemas que têm o objectivo de "…. consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais adquiridos no 3º ciclo de modo tanto a detectar dificuldades em questões básicas como a estabelecer uma boa articulação entre este ciclo e o Ensino Secundário." ([PA], pág. 23). Chamou-nos particularmente a atenção o chamado "problema das fracções", pois pareceu-nos levantar questões interessantes e nada triviais, muito para além do que seria de esperar num problema proposto a nível de 10º ano. O seu enunciado completo é o seguinte:

"Que números racionais são representáveis por dízimas finitas? Qual a dimensão do período de uma dízima infinita periódica?"

Sucede que, enquanto a primeira questão pode ser tratada facilmente a nível do Ensino Secundário, é muito mais difícil dar uma resposta satisfatória à segunda; na verdade, a primeira está relacionada com os primos que surgem na factorização do denominador da fracção em causa, ao passo que no estudo da segunda há necessidade de utilizar conceitos e processos mais avançados, como a ordem de um elemento num grupo ou o Teorema de Fermat-Euler, que são normalmente estudados no Ensino Superior, em Álgebra ou Teoria de Números.

Começaremos por analisar as abordagens do assunto por parte de alguns manuais do Ensino Secundário existentes no mercado e procuraremos em seguida responder às duas questões do problema.

2. Algumas abordagens do problema

Para facilitar a análise, vamos chamar questão A à pergunta "Que números racionais são representáveis por dízimas finitas?" e questão B a "Qual a dimensão do período de uma dízima infinita periódica?".

Em alguns manuais do actual Ensino Secundário ([StAubyn], [Neves], [Soveral] e [Mendes]), os autores optaram por não abordar explicitamente os problemas A e B, o que é perfeitamente legítimo de acordo com o programa em vigor, limitando-se a algumas referências a fracções, dízimas finitas e infinitas, números racionais e irracionais. Em [Gomes] aborda-se brevemente o problema A, essencialmente à base de exemplos, ficando como exercício provar que as fracções cujo denominador é produto de potências de base 2 ou 5 originam sempre dízimas finitas. O tratamento do problema que surge em [Costa] é também sucinto mas muito interessante, especialmente no que se refere ao problema B: dada uma fracção irredutível a/b, correspondente a uma dízima infinita periódica, os autores procuram levar os alunos a uma majoração do comprimento do período, considerando os restos possíveis da divisão de a por b; trata-se, em nossa opinião, de um bom exemplo de uma situação em que, não sendo capazes de obter a solução exacta de um problema, somos no entanto capazes de a limitar. O que distingue essencialmente [Bernardes] das obras anteriores é uma maior insistência na utilização das calculadoras, usando a instrução [MATH] **Frac** das calculadoras da Texas Instruments para a passagem de dízima a fracção, um problema que também é resolvido por via analítica.

De todos os manuais consultados, é em [Jorge] que surge a abordagem mais completa e interessante do "problema das fracções". Na forma de um diálogo entre dois alunos, um dos quais "tem um segredo: gosta de fracções", são considerados os problemas A e B e a passagem de dízima a fracção. Depois de algumas revisões sobre a correspondência "número racional ↔ dízima finita ou infinita periódica" e "número irracional ↔ dízima infinita não periódica", estabelece-se a propriedade de que as dízimas finitas são equivalentes a fracções com denominadores do tipo $2^{\alpha}\times 5^{\beta}$ e considera-se em seguida o seu recíproco. Assinala-se a conveniência de trabalhar com fracções irredutíveis e aborda-se em seguida o problema B. Trata-se também do problema da passagem de dízima a fracção, por via analítica. Ao longo do texto, tocam-se assuntos menos vulgares, como a noção de "cauda de noves", que permite reduzir as dízimas finitas a dízimas infinitas periódicas (por exemplo, 0,5 = 0,499999999....), a de *anteperíodo* (sequência de algarismos começando imediatamente a seguir à vírgula decimal e terminando imediatamente antes do início do período; por exemplo, em 0,8(3), 8 é o anteperíodo). Dá-se ainda um exemplo de números cíclicos (embora sem usar o nome), um tópico importante em Matemática Recreativa, a propósito do estudo de 1/7 (veja-se [GM] ou [CG]). Todo o diálogo é acompanhado de observações e sugestões pertinentes e não falta uma referência à dificuldade de usar as máquinas de calcular habituais para o estudo dos períodos das dízimas[1].

3. Representação de números reais por dízimas

No estudo das dízimas como é habitualmente feito no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, há uma certa ambiguidade, relacionada com as chamadas "caudas de noves". A título de exemplo, consideremos o número 1/2. Tem-se por um lado 1/2 = 0,5 (dízima finita) e por outro lado 1/2 = 0,499999999..... (dízima infinita periódica). Assim, a um mesmo número podem corresponder duas dízimas, que são *distintas*, no sentido de que as sucessões de dígitos que as formam são diferentes. Seria naturalmente conveniente tentar evitar este tipo de problemas, de forma a existir uma correspondência biunívoca entre os números reais e as dízimas. Com este fim em vista, vamos analisar com algum pormenor em que consiste a representação de números reais por dízimas.

No que se segue, vamos representar por $\lfloor \alpha \rfloor$ *a parte inteira* (também conhecida por *característica*) do número real α; trata-se de uma notação usual em Teoria de Números e parece-nos ser melhor que o $C(\alpha)$ ou o $I(\alpha)$ vulgarmente utilizados no Ensino Secundário (para não falar no Int(α) das máquinas CASIO ou o iPart(α) das TEXAS...).

Seja então α um número real positivo; ele pode obviamente ser escrito na forma $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + x$, com $0 \le x < 1$. Supondo que $\lfloor \alpha \rfloor > 0$, existirá certamente um inteiro não negativo n tal que $10^n \le \lfloor \alpha \rfloor < 10^{n+1}$ e então, dividindo por 10^n, segue-se que $\lfloor \alpha \rfloor = A_1 10^n + X_1$, com $0 < A_1 = \lfloor 10^{-n}\alpha \rfloor < 10$ e $0 \le X_1 < 10^n$. Por aplicação sucessiva do algoritmo da divisão, vamos obter

$$\begin{array}{ll} X_1 = A_2 10^{n-1} + X_2, & 0 \le A_2 < 10, \quad 0 \le X_2 < 1 \\ X_2 = A_3 10^{n-2} + X_3, & 0 \le A_3 < 10, \quad 0 \le X_3 < 1 \\ \vdots & \\ X_{n-1} = A_n 10 + X_n, & 0 \le A_n < 10, \quad 0 \le X_n < \\ X_n = A_{n+1}, & 0 \le A_{n+1} < 10 \end{array}$$

1 O facto de as máquinas de calcular usuais apresentarem os resultados com um máximo de apenas 10 casas decimais pode levar os alunos a concluir erradamente que há fracções às quais correspondem dízimas infinitas não periódicas. Isso pode acontecer com fracções tão simples como 1/17=0,(0588235294117647), obtendo-se na TI-83 1/17=0,0588235294, o que sugere a inexistência de período; veremos mais adiante como se pode resolver este problema.

Tem-se assim a representação $\lfloor \alpha \rfloor = A_1 10^n + A_2 10^{n-1} + \ldots + A_n 10 + A_{n+1}$, que se costuma abreviar para $\lfloor \alpha \rfloor = A_1 A_2 \ldots A_n A_{n+1}$, com $A_1 \neq 0$, $0 \le A_i < 10$; é apenas a representação habitual de um número inteiro em base 10.

Passemos ao tratamento da *parte fraccionária* (ou *mantissa*), x. O processo é muito semelhante ao anterior, embora mais complexo. As justificações das considerações um pouco mais delicadas sobre convergência e correspondência entre dízimas e números reais que vamos fazer em seguida poderão ser omitidas numa primeira leitura.

Sejam $x = f_1$ e $a_1 = \lfloor 10 f_1 \rfloor$; a_1 é um número inteiro não negativo inferior a 10, pelo que podemos escrever $10 f_1 = a_1 + f_2$, sendo $0 \le f_2 < 1$. Repetindo o processo, tem-se $a_2 = \lfloor 10 f_2 \rfloor$, $10 f_2 = a_2 + f_3$, sendo $0 \le f_2 < 1$ e a_2 um número inteiro não negativo inferior a 10. Por sua vez, $a_3 = \lfloor 10 f_3 \rfloor$, $10 f_3 = a_3 + f_4$, sendo $0 \le f_3 < 1$ e a_3 um número inteiro não negativo inferior a 10. E assim sucessivamente.

Se representarmos por x_m a soma $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_m}{10^m}$, podemos escrever

$$x = x_m + g_{m+1}$$

com

$$0 \le g_{m+1} = \frac{f_{m+1}}{10^m} < \frac{1}{10^m}.$$

Associámos assim ao número x a dízima $0{,}a_1 a_2 \ldots\ldots$. Como se tem $0 \le a_i \le 9$ para todo o i e $\lim_{m \to +\infty} g_{m+1} = 0$, a série

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

converge para x. Escreve-se então $x = 0{,}a_1 a_2 \ldots\ldots$, como é usual. Qualquer dízima deste género representa um número real entre 0 e 1, mas há um tipo de dízima que o processo descrito não pode gerar, a saber, as dízimas que contêm uma "cauda de noves". Com efeito, tem-se

$$g_{m+1} = \sum_{i \ge m+1} \frac{a_i}{10^i} < \frac{1}{10^m} = \sum_{i \ge m+1} \frac{9}{10^i}$$

e portanto não podemos ter uma infinidade de dígitos 9 consecutivos a partir de nenhuma ordem. Desta observação vai decorrer que a dízimas diferentes correspondem números diferentes: suponhamos, com vista a um absurdo, que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{10^i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i}{10^i}$$

e que existia um índice n para o qual se tinha $a_n \neq b_n$. Seja N o menor índice para o qual $a_N \neq b_N$. Então $|a_N - b_N| \ge 1$ e vem

$$0 = \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{10^i} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i}{10^i} \right| \ge \frac{1}{10^N} - \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{|a_i - b_i|}{10^i} \ge$$

$$\ge \frac{1}{10^N} - \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^i} = 0 ,$$

o que implica a existência de uma "cauda de noves" ($a_n - b_n = 9$ ou $a_n - b_n = -9$ para $n \ge N$), o que já vimos ser impossível.

Combinando as expressões obtidas anteriormente para as partes inteira e fraccionária, podemos resumir as nossas conclusões no seguinte teorema:

Teorema 1. Qualquer número real positivo α pode ser escrito na forma de uma dízima

$$A_1 A_2 \ldots . A_{n+1}, a_1 a_2 \ldots\ldots,$$

com $0 \le A_i < 10$, $(1 \le i \le n+1)$ e $0 \le a_i < 10$ para todo o natural i. Existe pelo menos um A_i não nulo e uma infinidade dos a_i é diferente de 9. A correspondência acima obtida entre os números reais positivos e as dízimas é biunívoca[2].

Vejamos a título de exemplo a representação de $\alpha = \frac{23}{20}$. Extraindo a parte inteira, $\alpha = \frac{23}{20} = 1 + \frac{3}{20}$; $A_1 = 1$ e $x = \frac{3}{20}$. Segue-se que $10x = 1{,}5$, donde $a_1 = 1$, $f_1 = 0{,}5$. Agora $10 f_1 = 5$, logo $a_2 = 5$ e $f_2 = 0$. Tem-se finalmente $\alpha = \frac{23}{20} = 1{,}15$.

Voltamos a salientar que, tendo em conta o processo de

2 A título de curiosidade, referimos que esta correspondência, que pode ser feita em outras bases além da base 10, pode ser usada para definir funções sobre os números reais operando sobre os dígitos das dízimas que os representam, permitindo a construção de certos "monstros" da Análise, como funções contínuas em *IR* sem derivada finita em nenhum ponto e linhas contínuas que preenchem um quadrado. Sugerimos a consulta de [GN] para mais detalhes.

3 A discussão do problema das "caudas de noves" que apresentámos é demasiado complicada para ser feita a nível do Ensino Secundário; assim, caso se pretenda abordar este assunto, somos da opinião que a não consideração de "caudas de noves" deverá ser apresentada como uma convenção destinada a assegurar que a cada fracção corresponde uma única dízima.

representação que descrevemos, seria *incorrecto* escrever $\alpha = \frac{23}{20} = 1{,}149999999\ldots$[3].

4. Período de uma fracção

Comecemos por reparar que, no estudo do período de uma fracção p/q, podemos sempre supor que p/q é uma fracção própria irredutível, isto é, que $0 < p < q$, com p e q primos entre si, por redução à ínfima espécie e extracção da parte inteira. Por exemplo, $\frac{442}{88} = \frac{221}{44} = 5 + \frac{1}{44}$.

Vamos referir brevemente algumas definições e resultados de Teoria dos Números que serão necessários no seguimento.

Dado um número natural n, representa-se por $\varphi(n)$ a quantidade de números naturais menores que n primos com n. Simbolicamente,

$$\varphi(n) = \#\{m \in IN : m < n \wedge \text{mdc}(m, n) = 1\} \ .$$

Define-se assim uma função natural de variável natural que goza das seguintes propriedades:

1. $\varphi(1)=1$
2. Se $n > 1$, $\varphi(n) \leq n - 1$, tendo-se a igualdade se e só se n é primo.
3. Se mdc$(a, n) = 1$, então $a^{\varphi(n)}$ dá resto 1 na divisão por n (teorema de Fermat-Euler).
4. Se ν é o menor número natural tal que a^{ν} dá resto 1 na divisão por n, então ν divide $\varphi(n)$; ν diz-se a *ordem* de a módulo n.
5. Se n é um número natural maior que 1, e $p_1,\ldots,p_r$, os seus factores primos, então
$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right).$$

As justificações das propriedades 1. e 2. são muito simples e ficam ao cuidado do leitor; quanto ao teorema de Fermat-Euler e à propriedade 5., a sua demonstração pode ser vista em qualquer tratado de Teoria de Números[4]. Provaremos apenas a propriedade 4.

Demonstração da propriedade 4. Pelo algoritmo da divisão, existem q e r naturais tais que $\varphi(n) = q \times \nu + r$, com $0 \leq r < \nu$. Vem então $a^r = a^{\varphi(n) - q\times\nu} = a^{\varphi(n)} \div (a^{\nu})^q = 1 \div 1^q = 1$ e como ν é o menor número natural tal que a^{ν} dá resto 1 na divisão por n, tem de ser $r = 0$, e portanto ν divide $\varphi(n)$, como queríamos.

∎

O resultado principal desta secção é o seguinte:

Teorema 2. Seja $x = p/q$ uma fracção própria irredutível. Então:

1. a dízima correspondente é finita se e só se q não admite outros factores primos para além de 2 e 5; mais precisamente, se $q = 2^{\alpha}5^{\beta}$, então a dízima termina após c dígitos, sendo c=max(α,β).
2. se mdc$(q, 10) = 1$, a dízima é infinita periódica com período ν, sendo ν o menor número natural tal que o resto de 10^{ν} na divisão por q é igual a 1; ν é pois a ordem de 10 *módulo* q, na terminologia[5] da propriedade 4.
3. se $q = 2^{\alpha}5^{\beta}Q$, sendo Q um número natural maior que 1 e primo com 10, a dízima é periódica mista, com um período de ν algarismos e um anteperíodo de c algarismos, onde ν e c têm os mesmos significados que em 2. e 1.

Demonstração

1. É óbvio que a dízima correspondente a $x = p/q$ termina se e só se existir um número natural n tal que $10^n x$ seja um número inteiro. Então, se $q = 2^{\alpha}5^{\beta}$, basta considerar n=max(α,β) para se obter o resultado. Reciprocamente, se na decomposição em factores de q surgir um primo p_1 distinto de 2 e 5, a dízima não pode ser finita; com efeito, se existisse um natural n tal que $10^n \frac{p}{q} = k \in IN$, viria $10^n p = k \times q$ e p_1 dividiria o segundo membro sem dividir o primeiro (não esquecer que supomos que mdc$(p, q) = 1$), o que é absurdo.

Deixamos ao cuidado do leitor a justificação da observação relativa ao comprimento da dízima.

4 Sugerimos em particular a leitura do artigo [OP], que aborda também uma generalização do teorema de Fermat-Euler devida ao matemático português Daniel Augusto da Silva.

5 Na linguagem da Álgebra Moderna, trata-se da ordem do elemento 10 no grupo das unidades do semigrupo multiplicativo do anel $(Z/qZ,+,\times)$, com as operações usuais entre classes de congruências; faz sentido considerar esta ordem já que mdc$(q, 10) = 1$.

2. Suponhamos agora que mdc(q, 10) = 1. Seja ν a ordem de 10 módulo q (cuja existência é garantida pelo Teorema de Fermat-Euler). Pondo de novo $x = p/q$, vem, para um certo inteiro m, $10^\nu = mq+1$ e então,
$$10^\nu x = 10^\nu \frac{p}{q} = \frac{(mq+1)p}{q} = mp + \frac{p}{q} = mp + x.$$
Porém, na notação usada na secção anterior, tem-se
$$10^\nu x = 10^\nu (x_\nu + g_{\nu+1}) = 10^\nu x_\nu + 10^\nu g_{\nu+1} = 10^\nu x_\nu + f_{\nu+1}.$$
Como $0 < x < 1$, segue-se que $f_{\nu+1} = x$ e o processo de obtenção da dízima de x repete-se a partir de $f_{\nu+1} = x$. A dízima de x é pois periódica, com período de comprimento ν, no máximo.
Por outro lado, dada uma dízima infinita periódica $0,(a_1 \dots a_k)$, tem-se que
$$\begin{aligned} 0,(a_1 \dots a_k) &= \left(\frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_k}{10^k}\right)\left(1 + \frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^{2k}} + \dots\right) \\ &= \frac{a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \dots + a_k}{10^k - 1} \\ &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$
para certos números naturais p e q, primos entre si. Como q divide $10^k - 1$, segue-se que $q \geq \nu$, já que ν é, por definição, o menor natural com esta propriedade. Portanto, a dízima é periódica com comprimento igual à ordem de 10 módulo q.
3. Para terminar, examinemos o caso em que $x = p/q$, com $q = 2^\alpha 5^\beta Q$, sendo Q um número natural maior que 1 e primo com 10.
Seja ν a ordem de 10 módulo q e $c = \max(\alpha, \beta)$. Então
$$10^c x = \frac{10^c p}{2^\alpha 5^\beta Q} = X + \frac{p'}{Q}$$
com X inteiro, $0 \leq X < 10^c$, $0 < p' < Q$ e mdc(p',Q)=1. Supondo que $X > 0$, X pode representar-se na base 10, digamos $X = A_1 A_2 \dots A_{n+1}$; atendendo ao caso 2., a fracção p'/Q é periódica de período ν e portanto podemos escrever
$$10^c x = A_1 A_2 \dots A_{n+1},(a_1 \dots a_\nu)$$
donde $x = 0,b_1 b_2 \dots b_c (a_1 \dots a_\nu)$, sendo $b_c = A_{n+1}$, $b_{c-1} = A_n$ etc.
A recíproca, isto é, que uma dízima desta forma representa uma fracção com denominador da forma $2^\alpha 5^\beta Q$, é evidente, concluindo-se assim a demonstração do Teorema 2.

$\square$

A título de exemplo deste terceiro caso, seja $x = 3/140$. Como $140 = 2^2 \times 5^1 \times 7$, tem-se $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $Q = 7$; vem $c = \max(\alpha, \beta) = 2$. Então, $10^2 x = 15/7 = 2 + 1/7$ e dividindo por 100 e tendo em conta que $1/7 = 0,(142857)$, obtemos finalmente o resultado $3/140 = 0,02(142857)$.

Observações

1. A hipótese de a fracção ser irredutível é imprescindível: por exemplo, o denominador de 3/30 admite o factor primo 3 e a dízima correspondente é finita.
2. As conclusões elementares sobre o comprimento do período referidas nos livros analisados na secção 2 são consequências imediatas do Teorema 2.
3. De acordo com o Teorema 2, o tipo de dízima, bem como o *comprimento do período*, quando este existe, depende apenas do denominador da fracção; o numerador não tem qualquer influência. Para vermos que o período, *entendido como sequência de algarismos*, depende também do numerador, basta considerar os períodos das fracções próprias de denominador 7, que exibem uma notável regularidade (permutação cíclica):

$1/7 = 0,(142857)$	$4/7 = 0,(571428)$
$2/7 = 0,(285714)$	$5/7 = 0,(714285)$
$3/7 = 0,(428571)$	$6/7 = 0,(857142)$

O caso geral (Qual a relação entre as sequências de algarismos que formam os períodos das fracções do tipo p/q com $1 \leq p \leq q - 1$ e mdc(10,q) = mdc(p,q) = 1?) é um problema mais complicado e muito interessante, que não vamos abordar aqui; o leitor interessado pode consultar [Ore] ou [CG].

5. Alguns aspectos computacionais

Nesta secção, vamos abordar alguns problemas de cálculo decorrentes do estudo da dízima correspondente a uma fracção dada; mais concretamente, veremos como calcular o comprimento do período e obter a sequência de algarismos que o formam, quando se verifica a segunda ou a terceira hipótese do Teorema 2 da secção anterior.

O primeiro problema a considerar é o da simplificação da fracção, se tal for necessário; para tanto basta determinar o máximo divisor comum dos termos da fracção, o que não oferece dificuldades de maior[6]. Também é muito fácil ver se o denominador tem ou não outros factores primos além de 2 e 5 (repare-se que para "extrair" os factores 2 e 5 não é, de modo nenhum, necessário proceder à decomposição em factores primos, um problema muito mais difícil). Assim, podemos concentrar-nos na segunda hipótese do Teorema 2, vendo como calcular a ordem de 10 com o denominador como módulo. Seja pois q um número natural primo com 10; pretendemos determinar o menor natural ν tal que 10^{ν} dá resto 1 ao ser dividido por q. Recorrendo à linguagem das congruências, $\nu = \min\left\{n \in IN : 10^n \equiv 1 \pmod q\right\}$. Comecemos por observar que a ideia "natural" de ir calculando as sucessivas potências de 10 e dividindo-as por q até obter resto 1 é computacionalmente desastrosa. Por exemplo, para determinar a ordem de 10 $(\mathrm{mod}\ 17)$ (que é igual a 16) por este processo, seria necessário ver os restos que dão na divisão por 17 os números $10^1 = 10$, $10^2 = 100, \ldots, 10^{16} = 10000000000000000$! O problema pode ser resolvido com facilidade reparando que se $10^n \equiv a \pmod q$, então $10^{n+1} \equiv 10a \pmod q$ e reduzindo $(\mathrm{mod}\ q)$ o segundo membro da congruência antes de efectuar a próxima multiplicação por 10. Por exemplo, para calcular a ordem de $10 (\mathrm{mod}\ 7)$, basta reparar que

$$\begin{aligned}
10^1 &\equiv 3 \pmod 7\\
10^2 &\equiv 30 \equiv 2 \pmod 7\\
10^3 &\equiv 20 \equiv 6 \pmod 7\\
10^4 &\equiv 60 \equiv 4 \pmod 7\\
10^5 &\equiv 40 \equiv 5 \pmod 7\\
10^6 &\equiv 50 \equiv 1 \pmod 7,
\end{aligned}$$

concluindo-se que a ordem é 6.

O programa seguinte, escrito para a TI - 83, implementa o algoritmo anteriormente descrito.

```
PROGRAM:ORDEM
:ClrHome
:Input "VALOR DE Q?",Q
:1→J
:For(I,1,Q-1)
:10*J-iPart((10*J)/Q)*Q→J
:If J=1
:Then
:Disp"ORDEM=",I
:Stop
:End
:End
```

O programa é muito simples: a partir do valor de Q (suposto[7] primo com 10), retorna o valor da ordem de $10 \pmod Q$. O resto da divisão inteira de 10^*J por Q é calculado na linha

:10*J-iPart((10*J)/Q)*Q→J

e é armazenado na variável J.

Repare-se que, ao contrário do que poderia parecer natural, não utilizámos $\varphi(Q)$ como limite superior do ciclo, mas sim $Q - 1$: de um modo geral, é mais fácil e económico executar mais algumas vezes as instruções do ciclo `For` do que proceder ao cálculo de $\varphi(Q)$, um problema que pode ser difícil quando Q é grande.

Resolvido o problema do cálculo do comprimento, vejamos como determinar a sequência de algarismos que

6 As calculadoras TI - 83 permitem calcular o máximo divisor comum de dois números (função **gcd** do submenu **NUM** do *Menu* **MATH**). Caso se pretenda fazer a simplificação sem recurso à calculadora, os alunos terão de proceder por tentativas ou determinar o máximo divisor comum dos termos da fracção por decomposição em factores primos, já que desconhecem o algoritmo de Euclides, um processo muito mais "económico" em termo de cálculos.

7 O programa *não* verifica se mdc(10, Q) = 1; o leitor pode facilmente adaptá-lo de forma a proceder a esta verificação, se assim o desejar.

forma o período. Tal como anteriormente, a abordagem simples (efectuar a divisão do numerador pelo denominador e ir acrescentando zeros à direita da vírgula) é impraticável, a não ser nos casos mais simples (experimente-se dividir "à mão" 1 por 97...). Mesmo com calculadora, não conseguimos ir muito mais longe por esta via; veja-se o exemplo de 1/17, já referido na nota 1. Apresentamos a seguir, por meio de um exemplo, um artifício que resolve o problema para períodos de comprimento "moderado".

Exemplo 1. Determinar o período de 1/17.
Usando a TI - 83, tem-se a seguinte aproximação por defeito

$$1/17 \approx 0{,}0588235294. \qquad (1)$$

É fácil ver que o comprimento do período é 16, recorrendo ao programa ORDEM ou então reparando que os possíveis comprimentos são 1, 2, 4, 8 ou 16, os divisores de $\varphi(17)=16$, e que a aproximação acima indicada exclui imediatamente as quatro primeiras possibilidades.

Podemos escrever a igualdade $1/17 = 0{,}0588235294 + r$, com $r \geq 0$ donde se conclui que

$$r = \frac{1-17\times 0{,}0588235294}{17} = \frac{2\times 10^{-10}}{17} = \frac{2}{17}\times 10^{-10}.$$

Recorrendo de novo à calculadora,

$$2/17 \approx 0{,}1176470588. \qquad (2)$$

Multiplicando ambos os membros de (2) por 10^{-10} e tendo em conta (1), vem que $1/17 = 0{,}05882352941176470588...$, ou, atendendo a que o comprimento do período é 16, $1/17 = 0{,}(0588235294117647)$. Sugerimos ao leitor que determine por este método[8] o período de mais algumas fracções como, por exemplo 1/29, 1/31 ou 1/97.

Se se pretende levar mais além este tipo de estudos, é conveniente dispor de software de computação algébrica, como o **Mathematica**, **Maple** ou **Derive**, que permitem trabalhar com um número (quase) ilimitado de casas decimais. Dado que as nossas Escolas Secundárias não têm, em geral, estes programas, sugerimos em alternativa o programa **Maxima** (ver [TD]), que pode ser obtido *gratuitamente* em `http://maxima.sourceforge.net`. Apresentamos em seguida a determinação do período de 1/97 usando o **Maxima**.

```
(C1) fpprec:200;
(D1)                                   200
(C2) bfloat(1/97);
(D2)  1.030927835051546391752577319587628865979381443
29896907216494845360824742#
268041237113402061855670■010309278350515463917525773
1958762886597938144329896907#
21649484536082474226804123711340206185567■010309278
B-2
```
(os símbolos ■ foram por nós inseridos para delimitar o período)

A instrução da linha (C1) fpprec:200; faz com que o Maxima apresente os resultados com 200 algarismos significativos (por defeito, são 16) e a instrução da linha (C2) bfloat(1/97); leva a que o resultado da divisão de 1 por 97 seja apresentado em notação científica (os símbolos finais da linha (D2), "B-2", correspondem ao E-2 da calculadora TI-83).

Como alternativa ao software de computação algébrica geral, podem-se apontar os programas concebidos explicitamente para Teoria de Números, como, por exemplo, o PARI/GP (disponível em `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`). Este é, no entanto, um programa muito sofisticado, destinado essencialmente à investigação, pelo que a sua utilidade no Ensino Secundário é discutível. Apresentamos a seguir o cálculo da ordem de 10(mod 17389) no PARI.

```
GP/PARI CALCULATOR Version 2.2.8 (development CHANGES-1.887)
          i686 running cygwin (ix86 kernel) 32-bit version
```

8 O leitor que queira ver um exemplo dos métodos (frequentemente muito engenhosos) usados para este tipo de cálculos quando não havia meios de cálculo automático pode ler a determinação do período de 1/97 em [BA]. A título de curiosidade, refira-se que no século XIX o famoso calculador William Shanks determinou o período de 1/17389, que tem 17388 (!) algarismos e calculou o comprimento dos períodos de todas as fracções do tipo 1/p, para p primo menor que 120000 (!!).

```
        compiled: Jan 13 2004, gcc-3.3.1 (cygming special)
        (readline v4.3 enabled, extended help available)

                  Copyright (C) 2003 The PARI Group
PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public
License, and
comes WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.
Type ? for help, \q to quit.
Type ?12 for how to get moral (and possibly technical) support.
        realprecision = 28 significant digits
        seriesprecision = 16 significant terms
        format = g0.28
parisize = 4000000, primelimit = 500000

(12:59) gp > znorder(Mod(10,17389))
%1 = 17388
(13:00) gp >
```

No exemplo anterior, Mod(10, 17389) faz com que o programa considere 10 como elemento do grupo das unidades do semigrupo multiplicativo do anel (Z/17389Z, +, x), e znorder calcula a ordem deste elemento (veja-se a nota 5). Repare-se que o cálculo, feito num Pentium 4 a 3.0 Ghz é praticamente instantâneo; a TI-83, com o programa ORDEM, leva cerca de 15 minutos para o fazer.

Para terminar, gostaríamos de referir um programa muito interessante, escrito para alunos de um curso básico de Teoria de Números e que possibilita a realização dos vários tipo de cálculos apresentados neste trabalho: o programa **Numbers**, disponível em `http://archives.math.utk.edu/software/msdos/number.theory`. Trata-se de um programa de utilização muito simples, mas que implementa a generalidade dos algoritmos básicos da Teoria de Números, pelo que o aconselhamos vivamente. Tem no entanto um problema: como foi escrito para MS DOS, pode não correr em Windows XP, pelo que o leitor interessado na sua utilização deverá primeiro instalar um emulador de DOS: sugerimos o **DOSBox** com o *frontend* **D-Fend**, disponíveis em `http://dosbox.sourceforge.net/` e `http://members.home.nl/mabus/`, respectivamente.

6. Referências

Gerais

[BA] Beiler, A. H. (1964) - *Recreations in the Theory of Numbers*, New York, Dover Publications Inc.

[CG] Conway, J. H e Guy, R. K. (1999) - *O Livro dos Números* (3ª edição), Lisboa, Gradiva.

[GM] Gardner, M. (1990) - *Mathematical Circus*, Penguin Books, London.

[GN] Garcia, N. (1997) - *Do Zero ao Infinito - Tratado Básico de Matemática Aplicada*, Lisboa, Escolar Editora.

[HW] Hardy, G. H. e Wright, E. M. (1980) - *An Introduction to the Theory of Numbers* (5th edition), Oxford University Press, Oxford.

[OP] Oliveira, P. A. J. (2001) - O teorema de Fermat-Euler-Silva, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática no. 45*, 65-72.

[Ore] Ore, O. (1948) - *Number Theory and its History*, New York, Dover Publications Inc.

[PA] Carvalho e Silva, J. (Coord.) et al. (s/d) - *Matemática A 10º ano*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário (disponível em www.mat-no-sec.org)

[RA] Rosa, A. (2003) - *Matemática 10º ano* (Programa Ajustado) e Matemática A 10º ano: que diferenças? Gazeta de Matemática no. 145, 18-21.

[TD] Torres, D. (2004) - *Números Felizes e Sucessões Associadas: Digressões com o Maple*, Educação e Matemática no. 77, 35-38.

[TI] Texas Instruments Inc. (1996) - *Guia da calculadora gráfica TI-83*, Van Gorcum, Assen, the Netherlands.

Manuais do Ensino Secundário

[StAubyn] Aubyn, M. St., Brito, C. e Martins, C. (2003) - *Mat 10*, parte 1, Lisboa Editora, Lisboa.

[Bernardes] Bernardes, A., Loureiro, C., Viana, J. P. e Bastos, R. (2003) - *Matemática 10*, vol. 1 (*Resolução de Problemas/Geometria*), Edições Contraponto, Porto.

[Costa] Costa, B., Rodrigues, M. E. e Resende, (2003) - *Espaço 10*, Edições ASA, Porto.

[Gomes] Gomes, F., Viegas, C. e Lima, Y. (2003) - *XeqMat 10ºano*, vol. 1, Editorial O Livro, Lisboa.

[Jorge] Jorge, A., Alves, C., Fonseca, G., Barbedo, J. (2003) - *Infinito 10A*, parte 1 (livro do professor), Areal Editores, Perafita.

[Mendes] Mendes, E., Santos, L. e Inácio, S. (2003) - *Matemática A 10º ano*, Constância Editora, Carnaxide.

[Neves] Neves, M. e Guerreiro, L. (2003) - *Matemática A 10º ano* (Geometria I), Porto Editora, Porto.

[Soveral] Soveral, A. e Silva, Carmen (2003) - *Matemática 10ºano*, vol. 1, Texto Editora, Lisboa.

Contrastes entre novos e antigos programas do Ensino Secundário: alguns exemplos*

António Pereira Rosa
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho

1. Introdução

O nosso objectivo é exemplificar a diferença de tratamento de alguns temas de Matemática elementar entre os "antigos" e os "novos" programas desta disciplina, a nível do Ensino Secundário.

Por programas "antigos", entendemos os programas do 10º e 11º ano de Escolaridade do extinto Curso Complementar Diurno (dito "Curso das Áreas"), que vigoraram desde o ano lectivo de 1978/1979 até ao ano lectivo de 1993/1994, bem como o programa do 12º ano via Ensino, que vigorou desde o ano lectivo de 1980/1981 até ao ano lectivo de 1994/1995. Ao longo dos anos, estes programas tiveram adaptações e ajustamentos, relativamente pequenos no caso do Curso Complementar Diurno e grandes para o 12º ano via Ensino (logo no segundo ano de existência, foi drasticamente reduzido, e sofreu mais alguns cortes em 1988/1989); tais alterações, no entanto, não afectaram os temas que vamos abordar. A carga horária semanal da disciplina foi sempre de 5 horas no 10º e 11º ano; no 12º ano começou por ser 5, foi reduzida para 4 durante alguns anos e voltou mais tarde a ser de 5 horas, valor que se manteve até à extinção do 12º ano via Ensino.

Por programas "novos", entendemos os programas do 10º, 11º e 12º ano do novo Ensino Secundário criado pelo Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto, na versão de Janeiro de 1997 (conhecidos por programas "ajustados"); nos assuntos que temos em vista, estes programas coincidem com os da disciplina de Matemática A da Reforma do Ensino Secundário que está a entrar em vigor neste ano lectivo de 2004/2005 no 11º ano de escolaridade (Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março e Portaria n.º 550-A/2004, de 21 de Maio). A carga horária semanal dos primeiros foi de 4 horas no 10º e 11º ano e de 5 no 12º ano; a Matemática A é leccionada em três blocos de 90 minutos por semana, ao longo dos três anos do Ensino Secundário.

2. A sucessão definida por $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; o número e.

Nos programas "antigos", o estudo desta sucessão era o culminar do capítulo 6 do 12º ano, *Complementos sobre sucessões*. Quando era abordado, os alunos já tinham bons conhecimentos sobre sucessões (definição e generalidades, monotonia e limitação, progressões aritméticas e geométricas, sucessões convergentes, infinitamente grandes e infinitésimos, teorema da sucessão monótona, regras operatórias dos limites, levantamento de indeterminações, soma de todos os termos de uma progressão geométrica), adquiridos no 11º ano e revistos e completados no 12º ano (teorema das sucessões enquadradas, estudo quanto à monotonia, limitação e convergência de algumas sucessões definidas por recorrência). Também já estavam fami-

* Artigo baseado numa palestra proferida na Homenagem ao Prof. Dr. Armando Machado realizada na Faculdade de Ciências de Lisboa a 16 de Fevereiro de 2005.

liarizados com o método de indução e com a fórmula do binómio de Newton.

O estudo era feito, em geral, sem grandes preocupações com a motivação ou com aplicações a "problemas da vida real" (vejam-se, por exemplo [FCG] ou [GOR2]). De forma sucinta, demonstrava-se a convergência da sucessão em causa recorrendo ao desenvolvimento de $u_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ e $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pela fórmula do binómio para concluir que a sucessão é crescente e à majoração de termos do desenvolvimento de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ por potências de $\frac{1}{2}$ para obter a cadeia de desigualdades

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

O teorema da sucessão monótona garante então que $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge, sendo o seu limite um número entre 2 e 3. Definia-se e como $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, dizia-se que era um número irracional aproximadamente igual a 2,718 e referiam-se resultados que facilitam o estudo da convergência de sucessões deste tipo (como, por exemplo: "Se $x\in IR$ e (a_n) é um infinitamente grande então $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n}=e^x$").

É uma abordagem cientificamente correcta, revelando preocupação com o encadeamento lógico dos temas estudado, mas pouco motivadora e nada interessante para os alunos; recorre a uma demonstração algo complicada e que a generalidade dos alunos se apressava a esquecer, retendo apenas o último resultado referido. Refira-se que o cálculo deste tipo de limites surgia quase sempre nos exames, em exercícios que, frequentemente, requeriam artifícios algo complicados, grande virtuosismo de cálculo e habilidade na manipulação de expressões.

Nos "novos" programas, a sucessão definida por $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é estudada no Tema III do 11º ano (*Sucessões*), o que, como vamos ver é, no mínimo, bizarro, para não dizer altamente criticável do ponto de vista científico. Com efeito, pretende-se o "estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática; primeira[1] definição do número e" (ver [P1], pág. 29 ou [P11A], pág. 8), numa altura em que os alunos ainda nem sequer sabem o que é o limite de uma sucessão!! Isto pode levar a abordagens lamentáveis do assunto, como a que exemplificamos a seguir:

Abordagem I

Por meio de uma calculadora, determinam-se uns tantos termos (digamos os 50 primeiros) desta sucessão; procede-se em seguida à representação gráfica e diz-se que a sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, para valores grandes de n, se aproxima, tanto quanto quisermos, de um número chamado número de Neper, que se representa por e.

Neste ponto do programa, os alunos ainda **não sabem** o que é o limite de uma sucessão (fizeram-se apenas algumas referências a limites de funções, abordados de forma "experimental" com a calculadora no Tema II do 11º ano, de forma tão vaga e intuitiva que chega a ser nebulosa...); como se isso não bastasse, estamos a incutir-lhes a ideia de que basta calcular uns tantos termos e fazer uma representação gráfica para se estudar a convergência, o que é gravíssimo e constitui um dos mais flagrantes exemplos da forma como a introdução ao cálculo infinitesimal é tratada nos "novos" programas. Por outro lado, trata-se de uma sucessão que, pela sua complexidade, destoa imenso das sucessões "simples" estudadas neste tema. Que fazer para apresentar o tema com um mínimo de rigor e sem induzir em erro os alunos?

Um momento de reflexão mostra que o estudo desta sucessão está completamente fora de contexto neste tema do programa: seria preferível deixá-la para o 12º ano, no Tema II (*Introdução ao Cálculo Diferencial II*), altura em que os alunos já dispõem de conhecimentos suficientes para um estudo mais razoável. No entanto, esta maneira

1 Não seria preferível haver apenas uma definição e chamar "caracterizações" a outras que porventura surjam depois?

de proceder poderia levantar graves questões relacionadas com o incumprimento, ainda por cima deliberado, do programa em vigor. Assim, podemos optar por uma mudança menos radical: deixar o estudo para o fim do Tema III do 11º ano, já depois da introdução da noção de limite de uma sucessão, de forma relativamente rigorosa. Temos assim a seguinte proposta:

Abordagem II

Por meio de uma calculadora, determinam-se os 50 primeiros termos desta sucessão; procede-se em seguida à representação gráfica e diz-se que é possível provar (embora não o vamos fazer) que:

1) a sucessão definida por $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente (difícil).
2) $2 = u_1 \le u_n$, para todo o n (evidente, a partir de 1).
3) $u_n < 3$, para todo o n (difícil).

De 1), 2) e 3), conclui-se, pelo teorema da sucessão monótona[2], que a sucessão dada é convergente, para um número que vamos representar por e, que está entre 2 e 3.

Esta abordagem está matematicamente correcta, resolve o problema de uma apresentação rigorosa do assunto mas (e isto é um ponto de vista muito pessoal), "sabe a pouco": não seria possível demonstrar (ainda que isso seja ir além do que o programa pede) a convergência da sucessão?

Ao tentarmos proceder a uma demonstração do resultado, vemos imediatamente que não se pode usar a prova do 12º ano via Ensino. Com efeito, na altura em que ela vai ser feita, os alunos ainda não estudaram um dos seus "ingredientes" fundamentais, a fórmula do binómio, que só surge no Tema I do 12º ano (*Probabilidades e Combinatória*). Por outro lado, a prova referida não é, em nossa opinião, muito interessante ou motivadora. Felizmente, conhecem-se provas alternativas, como a que se pode ver em [KK] e que apresentamos a seguir, constituindo a "base matemática" da abordagem III.

2 Estudado na rubrica **Limites** do tema III do 11º ano.

Abordagem III

Por meio de uma calculadora, determinam-se os 50 primeiros termos da sucessão definida por $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; procede-se em seguida à representação gráfica e passa-se à prova da sua convergência, pelo método que apresentamos a seguir.

Define-se e como $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

A prova necessita de um lema, que é interessante por si só.

Lema (desigualdade de Bernoulli)

Se $\alpha > -1$ e $\alpha \neq 0$, então $(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$, para qualquer número natural n maior que 1.

Demonstração

Imediata, por indução em n (recorde-se que nos "novos" programas, o método de indução matemática tanto pode ser dado no Tema III do 11º ano, para demonstrar propriedades das sucessões, como no Tema I do 12º ano, para provar propriedades combinatórias - ver [P1], pág. 36 e [P10A], pág. 21).

Teorema

A sucessão definida por $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é convergente.

Demonstração

Comecemos por provar que a sucessão dada é (estritamente) crescente. Seja $n > 1$.

$$u_{n-1}<u_n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}<\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \Leftrightarrow 1-\frac{1}{n}<\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n}$$

e o resultado sobre a monotonia segue-se tomando no lema $\alpha=-\frac{1}{n^2}$.

Para a provar a limitação, vamos considerar uma sucessão auxiliar definida por $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ e provar que ela é decrescente; como se tem obviamente $u_n < v_n$ para todo o n, segue-se que $2 = u_1 \le u_n < v_n \le v_1 = 4$ para todo o n e a conclusão segue-se do teorema da sucessão monótona. A prova é muito semelhante à anterior:

$$v_{n-1} > v_n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n > 1+\frac{1}{n} \Leftrightarrow \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$$

Ora, tomando no lema $\alpha = \frac{1}{n^2-1}$, vem

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n},$$

o que conclui a prova.

Observações:

1. Pode ver-se em [CJ] uma outra versão desta prova, que é um pouco mais simples em termos de manipulações algébricas. No entanto, essa prova pressupõe o conhecimento da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, pelo que preferimos a demonstração apresentada. Outras demonstrações podem ser vistas em [GN] ou [DH].
2. Como a segunda parte da prova é muito semelhante à primeira, o professor pode optar por deixá-la como exercício para os alunos, o que permite inclusive que sejam eles a fazer a transformação de $\frac{n^2}{n^2-1}$ em $1+\frac{1}{n^2-1}$, um tipo de manipulação algébrica sugerido nos programas (veja-se [P1], pág. 27).
3. Tem-se obviamente
$$\lim v_n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \times 1 = e.$$
No entanto, o resultado não pode ser apresentado assim aos alunos, pois eles ainda não estudaram as regras operatórias dos limites; no actual 11º ano, o cálculo de limites faz-se por comparação e enquadramentos, recorrendo às chamadas "sucessões de referência"...
4. À primeira vista, pode parecer que o enquadramento obtido para e por este método é pior que o tradicional: provámos apenas que $2 < e < 4$. Basta no entanto fazer $n = 6$ na desigualdade $e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ para reobter o enquadramento clássico $2 < e < 3$. Pode-se até ir bastante mais além, observando que:
$$|v_n - u_n| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| \le \frac{3}{n},$$ o que permite calcular o valor de e com precisão arbitrária; isto terá, no entanto, que ficar para o 12º ano (e, infelizmente, não se trata de um método particularmente eficaz.....).
5. Não abordámos o problema da precisão numérica da calculadora, que surge naturalmente no estudo deste tipo de sucessões. Com efeito, para n "suficientemente grande", $1+\frac{1}{n} = 1$ na calculadora e todos os termos da sucessão saem iguais a 1! O leitor interessado pode ver um tratamento detalhado deste problema em [CM].

Até aqui, a discussão foi apenas sobre os aspectos matemáticos do estudo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; vejamos agora como tem sido tratado a sua apresentação num "contexto de modelação matemática".

Todos os autores de manuais que consultámos recorrem, de forma mais ou menos explícita, a uma questão de Matemática Financeira: o problema da capitalização contínua, conforme é sugerido em [P1], págs. 63 e 64. Alguns usam-no como motivação para o estudo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ao passo que outros preferem abordá-lo já depois de se ter definido o número e, processo que preferimos utilizar. Para analisar esta aplicação da Matemática à Economia, recordemos em que consiste o regime de capitalização composto.

Se num banco colocarmos 1000 euros à taxa anual de 10%, ao fim de um ano teríamos o capital acumulado M_1=1000(1+0,1); ao fim do segundo ano, o capital seria

M_2=1000(1+0,1)(1+0,1)=1000(1+0,1)^2, se os juros recebidos no fim do primeiro ano fossem capitalizados, rendendo eles por sua vez também juro. Prosseguindo desta maneira, o capital acumulado ao fim de n anos seria dado por M_n=1000(1+0,1)^n; em geral, para um capital inicial C e uma taxa de juro anual i, o capital acumulado ao fim de n anos é $M_n=C(1+i)^n$. Surge então a questão: poderemos obter maior rendimento mantendo inalterada a taxa anual, mas reduzindo o período de capitalização? E será possível enriquecer em pouco tempo a partir de um pequeno capital inicial recorrendo a períodos de capitalização cada vez mais pequenos, ao semestre, ao trimestre, ao mês, ao dia, ao minuto, ao segundo....?

A resposta à primeira questão é obviamente SIM, a resposta à segunda é NÃO! Para vermos isto, podemos recorrer a uma fórmula de Matemática Financeira:

$$M_t = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt},$$

que nos dá o capital acumulado ao fim de t anos, sendo

C - capital inicial

i - taxa de juro anual

n - número de capitalizações por ano.

Supondo, para fixar ideias, que C = 1 euro, i = 100% e t = 1 ano, vem que nunca se pode ter ao fim de 1 ano mais que $e \approx 2{,}718$ euros, uma vez que, mesmo em capitalização contínua ($n \to +\infty$), se tem $\lim\limits_{n\to+\infty} M_1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Mais geralmente (mas isto já pressupõe conhecimento do cálculo com limites...), o valor a receber ao fim de t anos nunca pode exceder $\lim\limits_{n\to+\infty} M_t = \lim\limits_{n\to+\infty} C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} = Ce^{it}$.

Esta aplicação da Matemática a uma situação da "vida real" resulta muito bem com os alunos, em especial com os do 3º Agrupamento (Economia), que já estudaram as fórmulas do regime de capitalização composto em disciplinas da sua formação específica. Os alunos dos outros agrupamentos têm, em geral, necessidade de uma breve revisão sobre as modalidades de juros (assunto abordado no 7º ano de escolaridade).

É, em nossa opinião, uma das ideias mais felizes dos "novos" programas, contrastando fortemente com a forma menos interessante como o assunto era tratado na generalidade dos manuais do 12º ano via Ensino. Não queremos, no entanto, deixar de referir aqui uma notável excepção, o livro M12, da Texto Editora, da autoria dos Professores Armando Machado, Paulo Abrantes e Raul Carvalho: no início do capítulo dedicado aos *Complementos sobre sucessões*, começa-se precisamente por falar a possibilidade de um enriquecimento rápido reduzindo cada vez mais os intervalos de capitalização, uma abordagem surpreendentemente "moderna" para um livro editado em 1988. É ainda notável que nesse mesmo capítulo se faça já referência ao uso de calculadoras (científicas) e computadores, mencionando-se mesmo as limitações do método experimental em Matemática, por meio do exemplo do cálculo de $\lim\left(\frac{n+1}{n+5}\right)^{3n-6}$, que dá e^{-12} e não zero, como uma utilização descuidada da calculadora ou computador poderia sugerir ([M12], pág. 186).

3. Determinação das raízes reais de polinómios de coeficientes reais.

A diferença entre o estudo deste assunto nos "antigos" e nos "novos" programas reside essencialmente na possibilidade que agora se tem do uso de calculadoras gráficas sofisticadas. No fim do 9º ano, os conhecimentos sobre polinómios e equações dos alunos de hoje são (teoricamente....) iguais aos de há vinte anos: noção de polinómio, operações com polinómios (excluindo a divisão inteira), casos notáveis da multiplicação e factorização em casos simples, resolução de equações do primeiro e do segundo grau (estas últimas pela fórmula resolvente). Nos programas "antigos", os polinómios surgiam no 10º ano, integrados no capítulo "Expressões designatórias"; nos "novos" programas, são estudados também no 10º ano, mas num contexto algo diferente, de estudo de funções, no Tema II (*Funções e gráficos-Generalidades. Funções polinomiais.*

Função módulo). As diferenças, se excluirmos as devidas ao uso das calculadoras, são, no entanto poucas, conforme se pode constatar consultando os manuais existentes: depois do estudo da divisão inteira de polinómios, com particular incidência na divisão por $x - a$ feita na prática pela regra de Ruffini, segue-se o Teorema do Resto[3] e a decomposição de polinómios em factores em casos simples (estudo completo para polinómios quadráticos; para graus superiores apenas se estudam casos em que seja possível descobrir facilmente raízes ou se possam aplicar os casos notáveis da multiplicação) e, esporadicamente, alguns assuntos um pouco mais avançados, como a noção de multiplicidade de uma raiz ou o teorema que diz que um polinómio de grau n não pode ter mais que n raízes[4]. Métodos mais sofisticados de cálculo de raízes, como as fórmulas resolventes para equações do 3º e do 4º grau, não eram abordados nos programas "antigos" e continuam a não o ser nos "novos". A nível de 12º ano, costuma fazer-se uma referência ao método da bissecção quando do estudo do Teorema de Bolzano, mas não é dada, em geral, grande relevância ao assunto. No 12º ano via ensino, resolviam-se alguns problemas de separação de zeros, a propósito do teorema de Rolle e seus corolários, o que já não se faz actualmente, dado que este teorema não figura nos "novos" programas. Embora muitos desses problemas até se possam resolver por considerações simples de monotonia estudada através do sinal da derivada, eles pura e simplesmente deixaram de "estar na moda", por motivos óbvios.

Com as calculadoras actualmente existentes no mercado, a situação mudou: é possível, pelo menos em princípio[5], obter facilmente as raízes reais de um polinómio, com grande aproximação. De um modo geral[6], o utilizador começa por definir o chamado rectângulo de visualização, uma versão discreta (ou, de forma talvez mais expressiva, pixelizada...) do rectângulo de IR^2 [xmin,xmax]x[ymin,ymax], onde os parâmetros xmin, xmax, ymin e ymax têm significados óbvios, e depois a calculadora determina os zeros que estão entre xmin e *xmax*. Se, por acaso, não detectar zeros no intervalo [xmin,xmax], emite uma mensagem apropriada, como "Not Found" (CASIO CFX-9850G) ou "ERR: NO SIGN CHNG" (TI-83). É pois muito conveniente dispor de um processo que nos permita, à partida, escolher um intervalo [xmin,xmax] que contenha todos os possíveis zeros. Repare-se que, em princípio, o intervalo [ymin,ymax] é relativamente irrelevante, se [xmin,xmax] estiver bem escolhido: desde que 0∈]ymin,ymax], o gráfico exibido no ecrã exibirá a região em torno do zero e sabendo xmin e xmax, a máquina determina automaticamente valores para ymin e ymax, que podem ser depois refinados manualmente. Uma resposta excelente à questão da determinação de [xmin,xmax] foi dada na secção *Consultório Matemático* do n.º 36 do Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, secção essa que na altura era de responsabilidade do Prof. Armando Machado. É essa resposta ([MA]) que passamos a referir.

Antes de mais, repare-se que nada se perde ao supor que o polinómio em causa é mónico: se não for esse o caso, basta dividir ambos os membros da equação pelo coeficiente principal do polinómio. Temos então a seguinte proposição:

Proposição

Sejam n um número natural e, para cada i tal que $1 \leq i \leq n$, $a_i \in IR$. Seja $M \geq 0$ o maior dos n números $|a_i|$. Para cada $x \in IR$ tal que $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, tem-se então que $|x| \leq M + 1$, por outras palavras, podemos tomar xmin $= - M - 1$ e xmax $= M + 1$.

3 O resto da divisão do polinómio $p(x)$ por x-α é $p(\alpha)$.

4 Em [P1], pág. 54, refere-se uma versão do Teorema da raiz racional, (se p é um zero inteiro de um polinómio de coeficientes inteiros, p divide o termo constante), mas o assunto tem sido praticamente ignorado nos manuais. Vejam-se [MA] ou [RA1] para mais detalhes.

5 Há por vezes falhas "estranhas": experimente-se resolver a equação x^2=0 numa TI-83.

6 Alguns modelos, como a CASIO CFX-9850G, têm menus para a resolução directa de equações do segundo e terceiro grau, apresentando inclusive raízes complexas; há ainda a hipótese de recorrer às capacidades de programação destas máquinas para resolver o problema, como se pode ver em [TI] .

7 Não vamos abordar aqui os problemas que esta discretização por vezes causa; o leitor interessado pode consultar [CM] para um estudo detalhado.

Demonstração

Seja x um número real solução da equação dada. Podemos desde já supor que $|x|>1$, pois nada há a provar se esta desigualdade não se verificar. Vem então

$$\begin{aligned}|x|^n = \left|x^n\right| &= \left|a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\right| \leq \\ &\leq |a_1||x|^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}||x| + |a_n| \leq \\ &\leq M\left(|x|^{n-1} + \ldots + |x| + 1\right) \leq M\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}\end{aligned}$$

(repare-se que a soma dentro do parêntesis é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $|x|$ e primeiro termo 1). Segue-se que

$$|x|^n \leq M\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}$$

donde

$$|x| - 1 \leq M\frac{|x|^n - 1}{|x|^n} \leq M$$

e tem-se o resultado.

Observações

1. Esta proposição aparece enunciada sem demonstração na brochura de Funções para o 10º ano ([F10]), bem como nalguns manuais escolares ([CRM], por exemplo).
2. Pensamos que a proposição acima deve ser enunciada no 10º ano de escolaridade e demonstrada no Tema III do 11º ano (*Sucessões*). Com efeito, nessa altura os alunos já adquiriram todos os conhecimentos necessários (essencialmente, saber trabalhar com módulos e utilizar fórmulas das progressões geométricas) e esta regra é um exemplo feliz da "simbiose" entre os métodos clássicos e as novas tecnologias: ao pretender resolver-se um problema clássico por meio das calculadoras, somos conduzidos a outro problema que por sua vez é resolvido por métodos mais tradicionais.

4. A regra de Ruffini, há vinte anos e actualmente

A forma de apresentação da regra de Ruffini é igual nos dois programas que temos vindo a considerar: estudada no 10º ano (com demonstração), ela surge como uma maneira prática de efectuar a divisão de um polinómio por um binómio do tipo $x - a$, sendo utilizada com frequência em questões como a decomposição de polinómios em factores e a determinação de raízes. Vamos nesta secção indicar algumas aplicações menos vulgares da regra de Ruffini, que nos parecem ser especialmente adequadas aos novos programas.

1ª aplicação: uma versão simplificada do Teorema da raiz racional

Como se sabe, este teorema afirma que se $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ é um polinómio de coeficientes inteiros com a_0 e a_n não nulos, qualquer raiz racional de $p(x)$ pode ser escrita na forma p/q, com p e q inteiros primos entre si, sendo p divisor de a_n e q divisor de a_0.

O resultado que nos propomos provar é o seguinte: "Se a é um zero inteiro do polinómio de coeficientes inteiros $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, com a_0 e a_n não nulos, então a divide o termo independente a_n" (vejam-se a nota 4 do presente trabalho e [P1], pág. 54).

Para o provar, recordemos o enunciado e uma demonstração usual da regra de Ruffini:

"Sejam $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ um polinómio de grau n, e $q(x) = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \ldots + q_{n-1}$ e R o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$, respectivamente. Então, tem-se que

$$\begin{cases} q_0 = a_0 \\ q_1 = aq_0 + a_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1} \\ R = aq_{n-1} + a_n \end{cases}\text{."}$$

Demonstração (da regra de Ruffini)

Como $p(x)=(x-a)q(x)+R$, efectuando as operações e identificando os coeficientes dos termos de igual grau nos dois membros, segue-se que

$$\begin{cases} q_0 = a_0 \\ q_1 = aq_0 + a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1} \\ R = aq_{n-1} + a_n \end{cases}$$, como desejávamos.

Demonstração (da versão simplificada do Teorema da raiz racional)

Suponhamos que o polinómio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ tem coeficientes inteiros, com a_0 e a_n não nulos e seja a um seu zero inteiro. Sejam $q(x) = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + ... + q_{n-1}$ e R o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$. Pelo Teorema do Resto, $R = 0$ e vem então

$$\begin{cases} q_0 = a_0 \\ q_1 = aq_0 + a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1} \\ 0 = aq_{n-1} + a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_0 = a_0 \\ q_1 = aq_0 + a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1} \\ a(-q_{n-1}) = a_n \end{cases},$$

donde se segue que todos os coeficientes de $q(x)$ são inteiros e a divide a_n, como queríamos.

Pensamos que o resultado acima pode ser apresentado como corolário da justificação da regra de Ruffini preconizada no programa em vigor.

2ª aplicação: economia de operações e ganho de precisão

Nos "novos" programas do 11º ano ([P1], pág. 27), surge a seguinte *Indicação Metodológica*, a propósito do estudo das funções racionais:

"...o aluno deverá ser capaz de transformar expressões como $\frac{x^2+2}{x+1}$ em $x-1+\frac{3}{x+1}$ ou $\frac{x+3}{x+1}$ em $1+\frac{2}{x+1}$ e observar que, do ponto de vista computacional, normalmente se ganha em precisão, pois se efectua um número mais reduzido de operações.".

O problema da economia de operações, praticamente ignorado nos programas "antigos", é um assunto pertinente em cálculo numérico e a sua abordagem nos "novos" programas é, em nossa opinião, positiva. Sucede, no entanto, que é possível referi-lo de forma mais natural e completa a nível de 10º ano. Com efeito, seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ um polinómio e suponhamos que pretendemos calcular o seu valor num certo ponto a. Se nos limitarmos a substituir o valor de a na expressão anterior, teremos de efectuar um total de n adições (algébricas) e $2n$-1 multiplicações. Ora, pelo Teorema do Resto, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$ é precisamente $p(a)$ e como este resto pode ser obtido pela regra de Ruffini com n adições e n multiplicações, temos assim uma economia considerável de cálculo; para um exemplo concreto, pode consultar-se [GM]. Neste contexto, a regra de Ruffini costuma ser conhecida como *algoritmo de Horner*.

3ª aplicação: que sucede se aplicarmos repetidamente a regra de Ruffini?

A título de exemplo, consideremos o polinómio $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ e dividamo-lo pelo binómio $x - 1$; em seguida, dividamos por $x - 1$ o quociente obtido e assim sucessivamente. Obtemos o seguinte esquema:

	3	2	-1	1	
1		3	5	4	
	3	5	4	5	$=R_1$
1		3	8		
	3	8	12	$=R_2$	
1		3			
	3	11	$=R_3$		
1					
	3	$=R_4$			

Surge então a questão: qual a relação (se alguma existe) entre o dividendo inicial, o divisor e os sucessivos restos?

Sabemos que o primeiro resto é $p(1)$; verifica-se imediatamente que $R_2 = p'(1)$, que $R_3 = p''(1)/2!$ e que $R_4 = p'''(1)/3!$. Para manter a exposição a nível do 12º ano, analisaremos apenas o caso do segundo resto R_2, deixando ao cuidado do leitor os restantes (sugestão: fórmula de Taylor).

Concretamente, vamos demonstrar o seguinte resultado:

"Sejam $p(x)$ um polinómio de grau maior ou igual que 1 e a um número real qualquer. Pondo

$q_1(x)$ = quociente da divisão de $p(x)$ por $x - a$

R_1 = resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$

$q_2(x)$ = quociente da divisão de $q_1(x)$ por $x - a$

R_2 = resto da divisão de $q_1(x)$ por $x - a$,

tem-se que $R_2 = p'(a)$."

Demonstração

Sabe-se que

$p(x) = (x - a)q_1(x)+R_1$

$q_1(x) = (x - a)q_2(x)+R_2$;

se derivarmos em ordem a x a primeira igualdade, vem $p'(x) = (x - a)q'_1(x)+q_1(x)$. Fazendo nesta expressão $x = a$, obtém-se $p'(a) = q_1(a)$ (1).

Por outro lado, fazendo $x = a$ na igualdade $q_1(x) = (x - a)q_2(x)+R_2$, vem $q_1(a) = R_2$ (2); o resultado segue-se imediatamente das igualdades (1) e (2).

Para concluir, vamos utilizar esta última proposição para fazer uma "ponte" entre o Ensino Secundário e o Superior, aplicando-a a um problema de cálculo numérico.

Um dos métodos mais conhecidos para determinar raízes de equações não lineares é o processo iterativo conhecido como *Método de Newton*: se pretendemos determinar um zero de uma função f, definida num intervalo $[a,b]$, tomamos $x_0 \in [a,b]$ e definimos uma sucessão (x_n) por meio de

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Em condições não muito restritivas, prova-se que a sucessão assim definida converge para o (único) zero de f em $[a,b]$(veja-se, por exemplo, [VM], págs. 39 a 43). Este método tem, no entanto, um inconveniente: exige em cada iteração o cálculo do valor da derivada, o que pode ser aborrecido se a expressão da derivada for complicada ou o cálculo dos seus valores pouco eficiente comparado com o cálculo de valores da função. Uma solução é substituir a derivada $f'(x_n)$ pela razão incremental $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$, obtendo-se o conhecido *método da secante*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}.$$

No entanto, se estivermos apenas interessados no cálculo de raízes de polinómios, a proposição anterior dá-nos um método muito eficaz de calcular $f(x_n)$ e $f'(x_n)$: basta aplicar duas vezes a regra de Ruffini, com o dividendo inicial $f(x)$ e o divisor $(x - x_n)$. Esta observação muito simples é a base de um algoritmo para cálculo de raízes de polinómios conhecido como *método de Bierge-Viète*.

5. Referências

Gerais

[CJ] Carneiro, J. P. (1997) - A poderosa desigualdade das médias, *Boletim da SPM*, 36, 23 - 30.

[CM] Consciência, M. (2003) - Calculadoras gráficas - algumas limitações, *Gazeta de Matemática*, 145, 34 - 42.

[CaM] Carpentier, M. (1998) - *Métodos Numéricos*, Lisboa, Associação de Estudantes do Instituto Superior Técnico.

[CSJ] Carvalho e Silva, J. (2003) - Novos programas de Matemática no Ensino Secundário - 2003/2004, *Gazeta de Matemática*, 145, 10 - 17.

[DH] Dörrie, H. (1965) - 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*, New York, Dover Publications Inc. (tradução da 5ª edição alemã de 1958).

[F10] Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C. , Antunes, C. e Nápoles, S. (1997) - *Funções - 10º ano de escolaridade*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.

[GM] Graça, M. M. (2000) - Efeitos colaterais no uso de máquinas de calcular, *Gazeta de Matemática*, 139, 15-21.

[GN] Narciso, G. (1985) - *O número e*, Amadora, Editora Danúbio Lda.

[KA] Kurosh, A. (1973) - *Cours d'Algèbre Supérieure*, Moscou, Éditions MIR.

[KK] Knopp, K. (1990) - *Theory and Application of Infinite Series*, New York, Dover Publications Inc. (tradução da 4ª edição alemã de 1947).

[MA] Machado, A. (1997) - Resposta a uma questão na secção *Consultório de Matemática*, *Boletim da SPM*, 36, 61 - 64.

[OA] Ostrowski, A. (1976) - *Lições de Cálculo Diferencial e Integral*, vol. I, 3ª. edição, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian (tradução da edição alemã de 1960).

[P1] Equipa Técnica (1977) - *Matemática - Programas*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.

[P10A] Carvalho e Silva, J. (Coord.) et al. (s/d) - *Matemática A - 10º ano*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário (disponível em www.mat-no-sec.org).

[P11A] Carvalho e Silva, J. (Coord.) et al. (s/d) - *Matemática A - 11º ano*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário (disponível em `www.mat-no-sec.org`).
[PH] Pina, H. (1995) - *Métodos Numéricos*, Lisboa, Editora McGraw-Hill de Portugal.
[PF] Pontes, F. e Filipe, J. (1995) - *As calculadoras e o Ensino*, Lisboa, Beltrão Coelho Lda.
[PY] Parelman, Y. (1979) - *Matemáticas Recreativas*, Lisboa, Litexa.
[RA1] Rosa, A. (2002) - Números Irracionais no Ensino Secundário, *Gazeta de Matemática*, 142, 32 - 36.
[RA2] Rosa, A. (2003) - Matemática 10º ano (Programa Ajustado) e Matemática A (10º ano): que diferenças?, *Gazeta de Matemática*, 145, 18 - 21.
[TI] Texas Instruments (versão portuguesa de Nélson Sousa) (s/d) - *Equações* TI 80 TI 81 TI 82 TI 83 TI 92, Texas Instruments.
[VM] Valença, M. R. (1990) - *Métodos Numéricos*, Braga, Instituto Nacional de Investigação Científica.

Manuais dos programas "antigos"
[FG] Freitas, A. C. e Gomes, F. (1981) - *Matemática 10º ano* Tomo 1 (2ª ed.), Lisboa, Livraria Popular de Francisco Franco.
[FCG] Freitas, A. C., Coimbra, E. e Gomes, F. (1987) - *Matemática 12º ano de escolaridade (via ensino)* Vol. I, Lisboa, Livraria Popular de Francisco Franco.
[GOR1] Garcia, M., Osório, A. e Ruivo, A. (1982) - *Compêndio de Matemática 10º ano de escolaridade* 1º Vol. (8ª reimp. da 1ª ed.), Porto, Porto Editora
[GOR2] Garcia, M., Osório, A. e Ruivo, A. (1988) - *Compêndio de Matemática 12º ano de escolaridade* 2º Vol., Porto, Porto Editora.
[M10] Abrantes, P. e Carvalho, R. F. (1983) - *M10 - Matemática 10º ano* (1ª ed.), Lisboa, Texto Editora.
[M12] Machado, A., Abrantes, P. e Carvalho, R. F. (1988) - *M12 - Matemática 12º ano* (3ª ed.), Lisboa, Texto Editora.
[NVA] Neves, M. A., Vieira, M. T. e Alves, A. G. (1986) - *10º Matemática* (reimp. da 1ª ed.), Porto, Porto Editora.

Manuais dos programas "novos"
[BV] Bernardes, A., Loureiro, C., Viana, J. P. e Bastos, R. (2003) - Matemática 10 vol. 2: *Funções/Estatística*, Porto, Edições Contraponto. **
[LB] Lopes, A. V., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J. M., Viana, J. P. e Bastos, R. (1998) - *Matemática 11 Sucessões*, Porto, Edições Contraponto. *
[CRM] Costa, B., Resende, L. e Rodrigues, M. E. (2003) - *Espaço 10*, Porto, Edições ASA. **
[GVL] Gomes, F., Viegas, C. e Lima, Y. (2003) - XEQMAT (*Matemática A - 10º ano*) vol. 1, Lisboa, Editorial O Livro. **
[GL] Gomes, F. e Lima, Y. (s/d) - XEQMAT (*Matemática - 11º ano*), Lisboa, Editorial O Livro. *
[GV] Gomes, F. e Viegas, C. (2004) - XEQMAT (*Matemática - 11ºano*) vol. 2, Lisboa, Texto Editora. **
[JB1] Jorge, A. M., Alves, C., Fonseca, G. e Barbedo, J. (2003) - *Infinito 10 A* - Parte 2, Porto, Areal Editores. **
[JB2] Jorge, A. M., Alves, C., Fonseca, G. e Barbedo, J. (2004) - *Infinito 11 A* - Parte 3, Porto, Areal Editores. **
[NG] Neves, M. A. e Guerreiro, L. (2003) - *Matemática A 10º ano - Funções I*, Porto, Porto Editora. **
[NGM] Neves, M. A., Guerreiro, L. e Moura, A. (2004) - *Matemática A 11º ano - Sucessões*, Porto, Porto Editora. **
[NM] Neves, M. A. (2001) - *Matemática 11º ano - Parte 3: Sucessões*, Porto, Porto Editora. *

* programa "ajustado".
** programa de Matemática A.

Bartoon

Luís Afonso, Público, 27-08-2006
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)

Livros contados

Paulo Ventura Araújo

Dicionário de Matemática Elementar,

de Stella Baruk (tradução de Maria do Céu Pereira da Silva, Maria Elisa de Lima Mirra e Maria de Fátima Sousa Ribeiro, 2 volumes, Edições Afrontamento, Porto, 2005)
recensão crítica por Maria Teresa Viegas, Escola Secundária Fontes Pereira de Melo e Faculdade de Ciências do Porto

Em 1992 foi publicada em França a obra de Stella Baruk *Dictionnaire de Mathématiques Élémentaires*; no subtítulo lia-se *Pedagogie*, *Langue*, *Méthode*, *Exemples*, *Étymologie*, *Histoire*, *Curiosités*. Treze anos mais tarde, aparece a obra em português com uma apresentação simples e de muito bom gosto, numa tradução que, nas palavras das tradutoras, procurou ser, "na medida do possível, literal". Assim, o título é *Dicionário de Matemática Elementar* e mantêm-se, como subtítulo, as palavras *Pedagogia*, *Língua*, *Método*, *Exemplos*, *Etimologia*, *História*, *Curiosidades*. Reconhecidos que foram o valor e a utilidade do original em França, importa divulgar esta tradução, dar uma opinião sobre a sua qualidade e comentar a oportunidade da sua publicação *agora* junto do público português.

Para tentar responder a estas questões de maneira a que o leitor possa entender o que vai ser dito sem ter tido acesso à obra, torna-se oportuno referir não só a que público se dirige como também fazer uma descrição, ainda que breve, do conteúdo e da forma como está organizada. Começarei portanto por aí, adiantando já algumas apreciações ou críticas, se tal vier a propósito.

A quem se dirige o Dicionário?

A obra destina-se primeiramente ao "Pedro" (Claude, na versão original), um aluno do ensino básico, personagem abstraída dos muitos alunos que passaram pela vida da autora enquanto professora dos ensinos básico e secundário. Um Pedro que, "enquanto criança, enfrentou a escrita dos números e o sentido das operações; depois menino, se debateu com as percentagens e as fracções; e hoje, no ensino básico, num face a face desigual com as grandes figuras de Tales ou de Pitágoras; e, mais tarde, Pedro no secundário, interrogando-se sobre as funções (...) ou sobre os logaritmos." Um Pedro que levanta questões, "que responde e pergunta, exclama e comenta, escandaliza-se e ironiza, justifica-se e surpreende-se" e que tantas vezes já foi quase posto de lado e julgado como incapaz de aprender matemática por professores que consideraram os seus "erros grosseiros" ou as suas "perguntas absurdas", mas que, apesar disso, não deixa que a sua inteligência seja facilmente paralisada. Pedro consta como entrada neste dicionário e aí é explicado de quem verdadeiramente se trata. Mas, na Introdução, a autora conta como nasceram o "Pedro" e a ideia de elaborar este dicionário: uma resolução dum exercício que lhe foi dada por um aluno seu, "perfeitamente ignorante em matemática", mas "aliás excelente aluno" que, depois de se ter dado conta de que "as palavras ou os sinais podiam ter sentido", se atreveu a resolver sozinho e com êxito um exercício de geometria, decifrando o significado de cada termo novo através dum dicionário de língua francesa. Pouco tempo depois de ter recebido este presente ("um dos mais 'gratificantes' que recebi no exercício da minha profissão"), a autora interrogou-se: "e se os alunos dispusessem, em matemática *elementar*, de um dicionário que lhes fosse acessível, como o poderia ser um dicionário de russo ou inglês, isto é, que, *falando*-lhes a *sua* língua, lhes desse os meios para falar e escrever uma outra; não poderiam eles, então, ficar apetrechados eficazmente para captar o sentido de um texto matemático?" Catorze anos depois, ficou pronta esta obra, de início pensada ingenuamente como podendo substituir "um ser vivo" (o professor), mas que, aos poucos - reconhecendo essa impossibilidade -, passou a um instrumento dirigido, em primeiro lugar, a "um ser vivo" (o "Pedro").

Sendo o "Pedro" pensado pela autora como o principal destinatário, não deixa o dicionário de ter particular interesse para outras pessoas: pais que, tendo alguma formação matemática, pretendam ajudar os filhos de maneira segura, professores de matemática que queiram colher uma sugestão didáctica para introduzir um tema, ou, simplesmente, pessoas curiosas em retomar o contacto com a linguagem matemática de que somente têm uma vaga ideia. E, nesse aspecto, ele contém sugestões didácticas, curiosidades, referências históricas, que se lêem quase sem querer e que, por vezes, nos podem fazer esquecer de que afinal apenas o consultámos para saber o significado duma palavra.

Conteúdo e organização

Depois duma Introdução escrita pela autora - que não é certamente dirigida ao Pedro -, o Modo de Utilização explica claramente o significado dos símbolos e letras utilizados para que se possa tirar o maior partido do dicionário. O dicionário tem cerca de 500 entradas, distribuídas por 22 capítulos cujas "*aberturas*" são "*ornamentadas com letras desenhadas em «divina proporção» pelo monge matemático Luca Pacioli*". Embora nem todas as entradas forneçam o mesmo tipo de informação, há quase sempre a preocupação de dizer algo sobre a etimologia da palavra, de a classificar gramaticalmente, de apresentar os seus significados em português (com exemplos de frases onde aparece), e de dar uma definição matemática a um nível elementar (também ilustrada com exemplos). Em certos casos (ver por exemplo *Aresta*, *Critério*, *Defeito*, *Faixa*, *Raso*), pouco mais se fica a saber (ou nem tanto), embora, em algumas situações, sejamos remetidos para outras entradas onde pode haver mais informações. Porém, outros há em que o que está escrito é tão cativante que corremos o risco de nos apanharmos quatro ou cinco páginas adiante lendo coisas que nada têm a ver com a entrada que nos levou ao dicionário. Por exemplo, se o leitor for ver o que consta sobre *Aresta*, será pouco provável que resista a entrar em *Aritmética*, que vem logo a seguir. Aí, para além do esperado, sentir-se-á certamente curioso com a nota histórica em que encontra referências às primeiras 'moedas' que podiam ser "tanto constituídas por cabeças de gado (Gregos, Romanos, Hebreus) como por rações de cevada (Sumérios, Babilónios) ", ficará com a ideia de quanto a aritmética, encarada como "iniciação nos problemas práticos, ou pressupostos como tal (...) atormentaram gerações de estudantes" a partir de 1882 (quando, em França, o ensino se tornou obrigatório para crianças dos 6 aos 13 anos), e ainda poderá inteirar-se de qual é a famosa conjectura de Goldbach, que, enunciada em 1742, até hoje não foi nem provada nem refutada, apesar da inocência do seu enunciado.

Consultando o índice, talvez se fique surpreendido pela falta de algumas entradas: encontrando na secção destinada à letra H a palavra *Hipotenusa*, é de estranhar que em C não esteja *Cateto*; uma vez que em L consta a entrada *Limite*, por que será que em A não está *Assimptota*? Em contrapartida, palavras que não parecem fazer parte do vocabulário específico da matemática elementar (como *Conservar, Constatar, Reiterar, Desenho, Direito, Idade, Idealidade*) constam como entradas na letra respectiva. E se esta segunda surpresa apenas pode fazer com que o leitor fique curioso e acabe por constatar que "afinal até vem a propósito", já no que diz respeito à primeira, a desilusão causada por tais faltas pode levá-lo a desconfiar que o dicionário é muito incompleto, pois a palavra que procura - e que é elementar - "afinal não está lá". O interessante é que, em geral, ela é tratada no dicionário a propósito doutra palavra. E se, nalguns casos, é fácil adivinhar onde encontrar uma referência (para *Cateto*, é natural procurar em *Triângulo rectângulo*), para outros pode não acertar às primeiras tentativas (para Assímptota é possível que tente *Hipérbole* - que não consta como entrada mas está definida em *Cone* - e só um segundo palpite o levará à entrada *Função*, onde efectivamente há uma referência ao que pretende). Julgo ser aqui que posso apontar um defeito (talvez o único) ao dicionário: a falta de um índice remissivo! Tal índice não só colmataria falhas como as que referi, como também tornaria a consulta do dicionário mais fácil e proveitosa, convertendo-o, logo a um primeiro contacto, naquilo em que ele na verdade já é: muito mais do que um dicionário de matemática elementar, como aliás as palavras do subtítulo deixam antever. Para ilustrar o que acabei de afirmar, vejamos o seguinte exemplo. Suponhamos que o leitor procura o significado de *Regular*. Encontrará essa entrada na p.1104 e poderá ficar a saber, por exemplo, que se trata dum adjectivo, criado no século XVII, que deriva do latim *regularis*, de *regula*, a qual em português significa *regra*. Depois de alguns exemplos de frases em português em que o termo aparece naturalmente, terá a possibilidade de ver duas acepções da palavra em matemática, uma em álgebra e outra em geometria (sendo aqui remetido para outras entradas como *Polígonos* e *Poliedros*). E ainda pode ficar a saber que, na opinião da autora (e no que toca ao significado geométrico), "regular" é uma palavra que se revela bem económica quando se pensa que, para significar essa propriedade de um polígono, os geómetras gregos utilizavam o que para nós é a sua definição, ou seja, que eles "especificavam que ele era *isopleuro* e *isógono* ou, por outras palavras, equilátero e equiangular." Entretanto, é muito pouco provável que não veja a entrada que se segue: *Reiterar*. Atrevo-me a conjecturar que não esperava encontrá-la e que terá curiosidade em prosseguir na leitura (mesmo que em diagonal) do que a autora diz a seu respeito: para além de poder confirmar que é uma palavra de origem latina que significa *recomeçar*, ao entrar na matemática depara-se com uma série de exemplos de reiterações "particularmente espectaculares" de que até já pode ter ouvido falar, como a expressão do *número de ouro* à custa de *fracções contínuas*, da *sucessão de Fibonacci* e do *triângulo pedário* dum triângulo dado.

Pequenos reparos

Disse acima que talvez o único defeito desta obra seja a ausência dum índice remissivo. No entanto há afirmações em que podem ser feitos alguns reparos. Como ilustração focarei apenas três. A propósito da entrada *Numerável*, surge no final que "o 'inumerável matemático', isto é, não-numerável, 'começa' com o *contínuo*, isto é, com o 'número de pontos' de uma recta, ou mesmo de um segmento, por outras palavras, com o conjunto ***R*** dos números reais". Apesar do salvaguardar das palavras pelas aspas inglesas simples, isto pode dar a impressão de que, em número de elementos, ***R*** vem logo a seguir a ***N***. No entanto, esta não é a ideia da autora, podendo apenas ser considerada como uma forma de expressão menos feliz. A questão vem exposta com clareza nas páginas consagradas à entrada *Infinito, infinita, infinidade*, onde apenas é de lamentar que todo o protagonismo relativo à prova da indecidibilidade da chamada *hipótese do contínuo* seja dado a Paul Cohen, esquecendo-se a grande contribuição de Kurt Gödel mais de vinte anos antes.

É interessante ler o que a autora diz sobre a recente mudança no significado de *fracção*, palavra surgida em 1187 que entrou na matemática em 1520 para substituir a designação de número quebrado (que contudo permaneceu até ao fim do século XVIII). Antes dessa mudança, uma fracção era pensada como sendo um número, resultante de unidades "partidas" em partes iguais; depois, foi "determinado pela instituição matemática esvaziar a palavra "fracção" de todo o seu sentido quantitativo ou numérico, para a reduzir à tradução duma simples escrita". Perdendo o carácter de ente matemático e vendo-se reduzida a um *nome*, um *desenho*, deixam obviamente de fazer sentido expressões como *somar fracções* ou a questão de saber se *uma fracção é maior ou menor do que outra*: a continuarem a ser usadas, terão que ser consideradas abusos de linguagem. O motivo pelo qual chamo a atenção para o assunto é essencialmente a data da mudança apontada pela autora: "por volta de 1980". A menos que eu esteja a interpretar mal, seriam de descontar quase vinte anos a esta data; como "cobaia" da experiência inovadora de ensino ligada ao movimento da matemática moderna, lembro-me da insistência na distinção entre *designação* e *designado*, sendo quase um pecado dizer *somar fracções* em vez de *somar números representados por fracções*. Isto passou-se em 1966 e não fui das primeiras cobaias! Aliás, esta importância dada à distinção entre *numeral* e *número* é caricaturada em *O Fracasso da Matemática Moderna*, livro de Morris Kline surgido em 1973. No que me toca, fiquei tão marcada pela insistência nesta distinção que, ainda hoje, ao ouvir da boca dos meus alunos expressões como *Somo estas fracções?*, sinto um arrepio análogo ao que se sente ao raspar a unha na parede e respondo *Sim, soma lá os números representados por essas fracções*. Em suma: uma marca deixada em mim por Bourbaki de que não abdico totalmente: não digo... mas deixo dizer.

E, já que falo de abusos de linguagem, fiquei admirada com a naturalidade com que a autora utiliza o artigo definido em vez de indefinido quando se refere, por exemplo, a equações de rectas, circunferências, parábolas etc. Aparece, um pouco por todo lado, "a equação cartesiana da recta" em vez de "uma equação cartesiana da recta" e outras frases do mesmo tipo. Talvez a minha costela bourbakista me tenha tornado sensível a este género de abuso que nunca utilizo e, confesso, não gosto de ouvir. Pensei que, a este propósito, a autora nada diria, mas enganei-me. Na página 429, a autora afirma que ""o abuso de linguagem" que consiste em falar *da* equação cartesiana duma recta pode ser tolerado", explica porquê e acaba até por dar uma definição de equação cartesiana de uma figura segundo a qual a utilização do artigo indefinido deixa de ser um abuso de linguagem. Concorde-se com esta posição ou não, é de louvar que tenha havido a preocupação de chamar a atenção para o assunto; a sensação que fica é a de que, neste dicionário, nada é deixado ao acaso.

Resposta às questões iniciais

Espero que já tenha ressaltado do que vem sendo dito que a minha opinião sobre esta obra é muito favorável. A cada passo fui lendo frases que eu própria poderia ter dito ou escrito, resultados de inúmeras reflexões que não esperava encontrar relatadas em parte alguma.

Um aspecto que seria imperdoável não referir é a boa qualidade da tradução. Nos poucos casos em que pus em dúvida a sua fidelidade, consultei a versão francesa; em todos eles pude verificar que as tradutoras respeitaram cuidadosamente o sentido das frases, fazendo apenas as adaptações indispensáveis para que se adequasse à língua portuguesa. Mesmo sem motivo para "desconfiar", li o que me pareceu suficiente na versão original para poder afirmar, com fundamento, que se trata duma *boa tradução*. E, mesmo tendo em conta as semelhanças de estrutura gramatical das duas línguas, foi com certeza necessário um grande esforço para levar a cabo um trabalho tão difícil como este, do qual, felizmente, também resultou uma obra escrita em bom português.

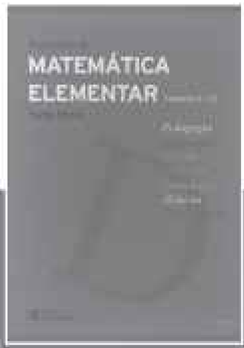
Dito isto, falta falar da utilidade e oportunidade da publicação da obra em Portugal. Dividirei a minha opinião em três partes, sendo cada uma consagrada aos principais destinatários deste dicionário: aos "Pedros", aos pais dos "Pedros" e aos professores de matemática dos "Pedros".

Aos "Pedros"

Tanto no que diz respeito à linguagem usada como aos conteúdos tratados que se dirigem aos "Pedros", este dicionário serviria bem a realidade portuguesa. Infelizmente, é minha opinião que a maioria dos nossos "Pedros" não será sensível a uma obra como esta, contentando-se em tentar aprender as partes dos manuais em que os professores mais insistem, e quase sempre porque "vem para o teste". Poucos serão os curiosos que, mesmo tendo acesso a este dicionário (por exemplo porque ele existe na biblioteca da escola), recorrerão a ele por iniciativa própria. No entanto, alguns "Pedros" serão certamente levados a consultá-lo se forem incentivados pelos pais e pelos professores.

Aos pais dos "Pedros"

Suponho que ainda é vulgar, nas famílias com uma certa formação académica, que os filhos peçam ajuda aos pais nos trabalhos de casa. Também pode acontecer que surja uma conversa sobre um tema que se esteja a debater na



escola ou sobre um episódio que tenha ocorrido em aula. Este dicionário pode sugerir formas "caseiras" de fazer com que uma criança entenda o que não percebeu ao ouvir o professor (e continua a não entender por mais que tente ler no livro), e até ser usado como tira-teimas em discussões familiares. Imaginemos um pai, convencido de que consegue tirar uma dúvida ao filho sem qualquer dificuldade (pois o que sabe de matemática transcende largamente o que é *elementar*), vendo-se confrontado com uma pergunta tão inocente como "O que é um quadrilátero?":

Pai: O quê? Tu não sabes o que é um quadrilátero? É um polígono com quatro lados. (Desenha um exemplo particular: quatro pontos no papel - cuja disposição está bem longe de ser ao acaso - e as uniões "naturais" desses pontos dois a dois.)
Filho: Mas isso é uma linha e pedem-me a área!
Pai: Ah, pois.... É obvio que é o que está "dentro"... (Sombreia o interior.)
Filho: Então é isso... unem-se os quatro pontos dois a dois! E se eu os unisse assim? (Desenha um polígono cruzado.) Isto também é um quadrilátero ou são dois triângulos unidos por um vértice? E se os pontos estiverem assim? (Coloca quatro pontos que, unidos, limitam um polígono côncavo.)
Pai: Bem... eu acho que... tens razão... boa pergunta... nesses casos... não sei. Mostra cá o livro... não diz nada sobre isso... Amanhã pergunta ao professor ou consulta o dicionário na escola.

Seja isto uma caricatura ou não, a resposta à pergunta inicial, que ainda tem que se lhe diga, está na página 1007. É possível que nem tudo seja directamente entendível pelo filho; mas talvez passe a sê-lo depois de lido e explicado pelo pai.

Aos professores dos "Pedros"

E chegou o momento de exprimir a opinião que formei ao longo do tempo que dediquei à recensão desta obra: *a quem eu acho que ela poderá ser mais útil é exactamente a nós, professores de matemática*. Consultando-a, poderemos aceder a sugestões de como tratar um assunto a um nível elementar (que até dominamos dum ponto de vista matemático superior), aprofundar matérias com que apenas lidamos apelando à intuição e cujos alicerces matemáticos não são tão fortes quanto gostaríamos, ficar a saber um pouco da história de algum grandioso método, conhecer a origem das palavras que usamos como termos técnicos... Se me fosse permitido pormenorizar e exemplificar o valor desta obra, correria o risco de escrever uma recensão crítica em três volumes, duma tradução em dois volumes duma obra que nasceu apenas num! Como tal é impensável, deixo apenas aqui a ideia de que se trata, para nós, duma obra muito útil, nada fora de moda, que é óptimo ter à mão pois a oportunidade de a consultar surge frequentemente e quando menos se espera. E, se não é natural que os nossos alunos a possam ter em casa à disposição, já connosco a situação é diferente. Mesmo numa altura em que parece que qualquer dúvida se desfaz pressionando meia-dúzia de teclas num computador ligado à rede - ideia inocente de quem ainda não tem consciência de que para se avaliar da qualidade com que um assunto é aí tratado é preciso ter muitos conhecimentos sobre ele ou então indicações, nem sempre fáceis de obter, de sítios fidedignos - ter este dicionário em casa representa uma mais-valia para qualquer professor de matemática. Se, por outro lado, ele também estiver, como se impõe, à disposição dos alunos nas bibliotecas escolares, talvez, por nosso intermédio, os "Pedros" o comecem a consultar como consultam um dicionário de português ou duma língua estrangeira. Seria uma forma de tentarmos que os "Pedros" portugueses começassem a ganhar uma autonomia, em matemática, que o nosso sistema de ensino teima em não lhes fornecer.

Esta secção propõe-se publicar recensões aprofundadas de livros de Matemática editados recentemente em português, dando preferência a livros que interessem a um público alargado.
Agradecemos aos leitores da Gazeta de Matemática o envio de sugestões de livros que julguem merecedores da nossa atenção.
Contacto do editor da secção: Paulo Ventura Araújo (FCUP);
e-mail: paraujo@fc.up.pt

PARÁBOLAS E PARABÓLICAS . Nuno Crato

Memórias da Matemática

Uma das principais riquezas da Sociedade Portuguesa de Matemática é a sua história. Temos o privilégio de ter tido entre os nossos fundadores pessoas como Bento Jesus Caraça e António Aniceto Monteiro. Temos a honra de ter tido, entre os nossos colaboradores, matemáticos do calibre de Mira Fernandes, Ruy Luís Gomes e Sebastião e Silva. Tivemos entre os nossos sócios honorários Maurice Fréchet, Emídio Guerreiro, José Morgado e Alfredo Pereira Gomes. E contamos orgulhosamente com Maria do Pilar Ribeiro, nossa associada número 1, que esteve presente na Assembleia de fundação, em 12 de Dezembro de 1940, assim como com os distintos professores Dias Agudo e Campos Ferreira.

Temos também algumas das mais antigas publicações portuguesas: a *Portugaliae Mathematica*, fundada em 1937, e hoje a mais antiga e praticamente a única revista científica portuguesa sobrevivente com carácter internacional, assim como a própria *Gazeta de Matemática*, fundada em 1940.

O nosso património histórico precisa de ser tratado. A SPM lançou recentemente o projecto «Memória da Matemática», com o qual conseguimos registar em vídeo horas de entrevista com alguns importantes matemáticos. Alfredo Pereira Gomes, por exemplo, tem um longo relato de vida gravado em formato digital, a ser em breve transcrito para DVD. Temos organizado conferências, palestras, livros e números especiais do nosso *Boletim*, incorporando estudos e relatos sobre alguns dos nossos mais importantes antecessores. Este ano, nas comemorações do centenário de António Aniceto Monteiro, lançamos uma fotobiografia e desenvolvemos estudos sobre essa grande figura da ciência portuguesa.

Mas muito mais precisa de ser feito. Lamentavelmente, não temos sequer fotografias decentes dos mais importantes matemáticos portugueses. Só recentemente, por exemplo, conseguimos obter uma boa fotografia de Pedro José da Cunha, o primeiro presidente da Sociedade.

Talvez mais grave ainda que a ausência de imagens seja a raridade dos documentos. As cartas, os manuscritos de artigos, as actas de reuniões, tudo isso pode ser precioso para se perceber como se desenvolveu a SPM e a matemática portuguesa. Sem esses documentos não conseguimos, por exemplo, perceber as atitudes dos matemáticos perante o desenvolvimento da ciência nem a forma como se transmitiram conhecimentos e atitudes.

Faltam-nos coisas ainda mais elementares. Temos arquivados quase todas as nossas publicações, mas há alguns números antigos, da época em que o regime nos impediu de existir legalmente, que nos faltam.

Seria importante que todos os associados e amigos da Sociedade colaborassem num esforço de recuperação do nosso passado. A SPM não pretende arquivar documentos pessoais, fotografias e objectos, embora esteja disposta a fazê-lo ou ajudar a fazê-lo. Podemos, por exemplo, promover o arquivo e tratamento de espólios valiosos noutras instituições competentes, como a Biblioteca Nacional e a Fundação Mário Soares. Nestas duas instituições estão depositados, respectivamente, os espólios de Hugo Baptista Ribeiro e de Bento Jesus Caraça. Ou podemos simplesmente digitalizar documentos à guarda de familiares ou de amigos. O importante é que a informação não se perca nem se limite a bibliotecas e arquivos pessoais, por mais bem organizados que estejam. Seria bom que o que é património de todos fosse útil a todos.

Inquérito:
O estatuto do professor

Nos últimos tempos a imprensa tem sido farta em notícias que interessam aos professores. A esse propósito, Luisa Araújo (Professora de Ciências da Educação) diz, no Público de 28 de Março de 2007, que o ritmo com que o Ministério da Educação anuncia medidas atrás de medidas tem um efeito curioso: ninguém discute as implicações que cada uma delas e todas elas, no seu conjunto, podem ter no nosso sistema educativo.

De entre as novidades citemos três: (a) a criação da categoria de Professor Titular, (b) a ideia de organizar a preparação dos professores de modo a habilitá-los a ensinar todas as disciplinas nucleares do 1º ao 6º ano (tema tratado no artigo referido), (c) o velho problema da autoridade dos professores em conjugação com a indisciplina (veja-se o Diário de Notícias de 3 de Abril de 2007).

Com o objectivo, não de conseguir conclusões com relevo estatístico, mas somente de auscultar quem tem experiência, provocar a meditação e fomentar a discussão, a Gazeta de Matemática pôs as seguintes perguntas e solicitou respostas sucintas:

Questão 1: *Que acha da criação da categoria de Professor Titular?*

Questão 2: *E que pensa dos critérios de promoção? Não são demasiado burocráticos (contagem do número de faltas, etc.) em vez de se basearem na qualificação e desempenho científico e pedagógico dos pretendentes?*

Questão 3: *Devem preparar-se os professores para ensinar todas as disciplinas do 1º até ao 6º ano ou é preferível preparar professores especializados em áreas razoavelmente restritas do conhecimento?*

Questão 4: *Quanto à indisciplina (e mesmo violência na Escola) acha que se deve dar mais autoridade aos professores ou antes pelo contrário?*

Questão 5: *Devem atribuir-se mais responsabilidades aos adolescentes, inclusivamente considerando-os mais capazes no plano ético? Por exemplo, quando um adolescente não se interessa pela Escola ou despreza o conhecimento ou é indisciplinado, a qual dos pontos se deve dar mais ênfase: (1) a causa reside no professor (ou na Escola ou nas infra-estruturas) porque não sabe motivá-lo, (2) a causa deve procurar-se no adolescente que não assume as suas obrigações e já tem idade para isso?*

António Celestino Lima dos Santos,
Instituto de Odivelas

Questão 1: Com a instituição de professores titulares, querer-se-á estabelecer uma distinção entre professores de primeira e professores de segunda? Com que critérios? E quais as funções de tais titulares? Será o professor titular, "um glorificado professor delegado" em cada área de ensino? Do mal o menos, mas então será determinante a elaboração de uma grelha onde conste a descrição do seu conjunto de tarefas, salvaguardando, ao mesmo tempo, uma sã camaradagem, num espírito de entreajuda.

Não seria mais útil a criação de professores de recuperação/objectivos mínimos para ajudar os alunos com maiores dificuldades?

Questão 2: Os critérios de promoção de professores deverão sobretudo basear-se em qualificações e provas dadas de aptidão científico-pedagógica e assiduidade. Porém, a obtenção inequívoca de tais provas requer por vezes estratégias de difícil consolidação. *Por favor: cuidado com as opiniões de pais e alunos.*

Já não me repugna a crítica construtiva do conjunto da informação que os professores fornecem de uma forma vinculativa, através de fichas formativas, testes de avaliação e outros materiais, em conjunção, com a apreciação criteriosa (mais outra dificuldade?) dos resultados obtidos, como médias e percentagens de positivas. Mas tudo contra *um pano de fundo de sã camaradagem e entreajuda.*

Questão 3: Em França, a opção por um professor único até ao 5º ano de escolaridade, parecer ter um grande sucesso. No entanto naquele país os critérios de admissão e a preparação dos alunos-mestres são altamente exigentes.

Questão 4: Os professores deverão ter mais autonomia e autoridade e os *procedimentos disciplinares deverão ser mais céleres e simples.*

Questão 5: Haverá sempre modos adequados de envolver os alunos no processo educativo. Mas nada de empolar os "direitos dos alunos" nem de propor passagens de ano gratuitas ao estilo do que já se fez na Itália. Sim à criação de saídas vocacionais para alunos sem apetência para currículos académicos.

Branca Maria Ruas,
Escola Secundária Amélia Rey Colaço, Linda-a-Velha

Questão 1: Não concordo.

Questão 2: Discordo do princípio da aplicação de quaisquer critérios dos quais os docentes não tinham conhecimento e de incidirem apenas sobre parte da carreira. Os professores não sabiam que poderiam vir a ser penalizados por terem "SÓ" dado aulas nos últimos 7 anos.

Não concordo com certos critérios, principalmente os que se referem ao desempenho de alguns cargos, que, na minha opinião, não contribuem para melhorar a qualidade da função docente.

A qualificação e o desempenho científico e pedagógico são determinantes mas não se podem dissociar do profissionalismo e sentido de responsabilidade. Assim, penso que faz sentido ter em conta o número e o tipo de faltas dadas por um docente, em cada ano lectivo, ao longo de toda a sua carreira mas não apenas nos últimos 7 anos.

Um professor que, num ano lectivo, não tenha dado faltas, deveria ter uma pontuação diferenciada.

Questão 3: Discordo completamente de uma formação generalista. Os professores têm que gostar muito do que fazem e das matérias que leccionam, por isso defendo uma formação especializada, por disciplina, o que não significa inexistência de interdisciplinaridade. Os programas têm de ser elaborados de forma a permitir que ela se possa efectuar de uma forma natural e não forçada.

Sendo professora de Matemática, receio as consequências que esta medida venha a ter no futuro, pois estou certa que não irá diminuir o insucesso.

Questão 4: Deve ser dada mais autoridade aos professores e dignificar a profissão docente. Os Encarregados de Educação devem participar, como parceiros, no processo educativo dos seus educandos. É fundamental que nas Escolas exista um clima de respeito entre todos, em particular na sala de aula. A indisciplina contribui para o insucesso dos alunos.

Questão 5: Os adolescentes devem ser mais responsáveis e os encarregados de educação devem ter um papel fundamental neste processo.

Existem muitas outras causas, a maior parte delas exteriores à Escola, para este problema.

Os dois pontos (1) e (2) não podem ser colocados em alternativa.

Professores, alunos e encarregados de educação devem reflectir sobre as causas possíveis desse desinteresse e assumir as suas responsabilidades.

Maria do Céu Silva,
Escola Secundária Alexandre Herculano, Porto

Questão 1: Embora pareça prematuro prever o impacto que a criação da categoria de professor titular pode vir a ter na organização do novo sistema escolar, uma coisa é certa, alguns itens da sua concepção são profundamente injustos. Se outras razões não existissem, bastariam as duas que refiro em seguida: o facto de apenas serem considerados os últimos sete anos de uma carreira que pode ascender a mais de 30 e a desvalorização em termos de pontuação de um candidato que, embora tendo efectivamente exercido funções docentes, o tenha feito num estabelecimento público de ensino superior. Parece natural esperar que, concebida tal como está, a criação da categoria de professor titular condicionará a atitude crítica do professor e promoverá o individualismo e a competitividade, com prejuízo do trabalho em equipa.

Questão 2: Não tenho dúvidas que o critério que primeiro deve pesar na progressão da carreira de um professor deve ser o da sua competência científica e pedagógica, em simultâneo e na mesma proporção. Também não tenho dúvidas sobre a importância da assiduidade (dos professores e de todas as classes profissionais!). Mas parece-me extremamente injusto que alguém seja penalizado por usar um privilégio que a lei lhe concede: poder ao longo do ano lectivo utilizar uns poucos dos dias de férias a que tem direito para tratar de algum assunto pessoal inadiável.

Questão 3: É indiscutível que, quanto mais diversificada for a preparação de um candidato a professor melhor será a sua prestação enquanto tal. Mas isso não significa que ele não deva ter uma especialização em alguma área do conhecimento e que seja nela que exerça a sua actividade docente. Justamente por isso, parece-me que não pode haver vantagem em implementar um sistema de ensino em que os dois primeiros ciclos sejam totalmente confiados a um professor. Afigura-se-me que, nestas condições, além de ficar privado de crescer na diversidade do contacto com métodos de trabalho diferentes, o aluno fica ainda sujeito a um tipo de ensino mais superficial (acredito que são raros os exemplos de super-professores). Por isso, entendo que na formação básica devem existir professores diferentes, cobrindo as seguintes áreas disciplinares: ciências, letras, educação física e educação artística.

Questão 4: Estou convencida que o factor mais importante para o sucesso do processo de ensino-aprendizagem está directamente relacionado com a autoridade do professor. Parece-me, no entanto, que essa autoridade não pode adquirir-se por decreto. Ela vai sendo conquistada à medida que a sociedade for reconhecendo a importância do papel do professor na sua formação e transformação; e essa tarefa é, naturalmente, da incumbência do Ministério da Educação.

Questão 5: Embora não sejam de excluir casos em que a causa da indisciplina reside no professor e/ou na Escola, parece-me que é sobretudo no comportamento do adolescente e na atitude das famílias que ela deve ser procurada. Por um lado, vivemos numa sociedade demasiado permissiva (também com os adolescentes), em que muitos pais se demitem da sua tarefa de educadores, remetendo-a quase inteiramente para a Escola. Por outro lado, nos últimos anos criou-se a ideia que aprender deve ser algo que se realiza sem esforço. Estes dois erros crassos traduzem-se na desresponsabilização dos alunos, com as consequentes atitudes de indisciplina que todos conhecemos. Para fazer da Escola um espaço agradável, onde o processo de ensino-aprendizagem seja possível, é necessário instituir e fazer cumprir regras de boa convivência entre todos os intervenientes no processo educativo, o que torna indispensável responsabilizar os alunos, adequando, naturalmente, essa responsabilidade à faixa etária em que se enquadram.

Afinal o que importa não é ser novo e galante - ele há tanta maneira de compor uma estante

Estante

Mário Cesariny de Vasconcelos

Nos seus tempos de estudante houve algum livro de que gostasse especialmente e ao qual ainda recorra se precisar de verificar qualquer coisa na área que ele abrange?

General Topology • S. Willard

O livro mais usado, na minha estante, é *General Topology*, de S. Willard e publicado pela Editora Addison-Wesley. Num sentido estrito, a sua indicação não responde à pergunta, já que só foi publicado logo após o meu doutoramento. Contudo, como livro de referência, acho-o extremamente útil. Embora não seja um livro para quem inicia o estudo da *Topologia*, começa, mesmo assim, pelas noções básicas e desenvolve a teoria até um nível bastante avançado.

Duas características específicas são uma colecção muito completa de contra-exemplos e a existência de muitas notas, acompanhadas de referências, sobre ramos da teoria que não fazem parte do corpo principal do livro. O autor usa um largo número de exemplos para ilustrar os conceitos e mostrar até que ponto podem ser desenvolvidos. Os exercícios, frequentemente, contêm indicações que apontam para novos rumos. Embora apresentadas concisamente, segui-las e preencher as lacunas é muito instrutivo para o estudante. Na realidade, leccionei cursos de Mestrado em que os estudantes eram conduzidos, através das suas notas e exercícios, a uma área substancial da Matemática. Possuo este livro há quase quarenta anos e, para mim, não perdeu nem interesse nem valor.

Sheila Carter
School of Mathematics
University of Leeds U.K.

recolha de
F. J. Craveiro de Carvalho

A Quadratura dos Polígonos

O célebre problema da quadratura do círculo pede uma construção com régua e compasso que permita, dado um círculo, construir um quadrado com a mesma área.

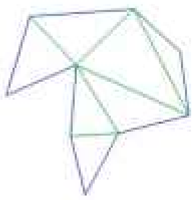
Este problema é impossível, como mostrou Lindemann em 1882, já que π é um número transcendente, isto é, não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros.

O problema de que nos ocupamos hoje, pelo contrário, é possível. É até fácil de resolver.

Dado um polígono, será possível cortá-lo em pedaços, com golpes rectilíneos de tesoura, de forma a que estes possam ser reorganizados na forma de um quadrado?

A solução vai ser apresentada passo a passo.

I- Qualquer polígono pode ser visto como constituído por triângulos.



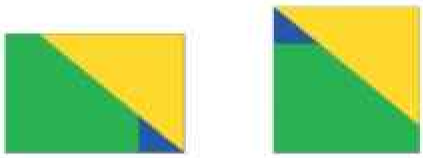
II- Todos os triângulos podem ser transformados em rectângulos, usando cortes de tesoura.

Traçando uma paralela à base que contenha os pontos médios dos outros, a construção fica evidente (escolhemos para base um lado relativamente ao qual a altura do triângulo está dentro deste).

III- Qualquer rectângulo pode ser transformado num quadrado.

Se os lados do rectângulo forem a e b, o quadrado vai ter lado $\sqrt{(ab)}$.

Isto torna evidente onde marcar os pontos de separação nos lados maiores do rectângulo. (Supomos $a < b < 4a$, caso contrário partimos o rectângulo ao meio e empilhamos as duas peças o número de vezes necessário).

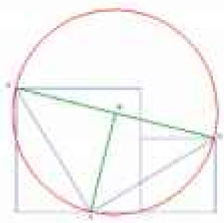


IV- Para cada par de quadrados temos uma construção que nos permite formar um quadrado com a área dos dois juntos.

Propomos aos leitores a verificação da validade do processo.

A ideia chave consiste na escolha do ponto na base que vai definir a separação dos pedaços.

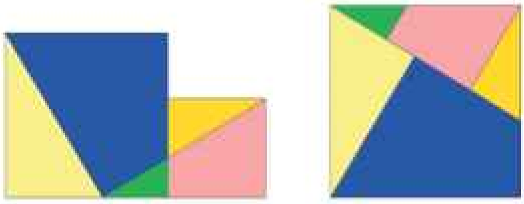
Esta construção prévia permite evidenciar que tal ponto está numa circunferência de que o segmento que une os vértices dos quadrados originais é diâmetro.



Jorge Nuno Silva
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

Recreio

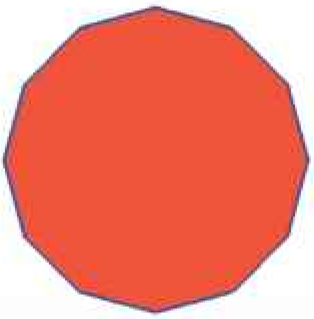
Agora basta cortar, colorir e reagrupar...



O processo está terminado: dado um polígono, começamos por dividi-lo em triângulos, cada um destes transformamos num rectângulo; cada rectângulo num com proporções aceitáveis (lado maior mais curto que quatro vezes o menor) e, finalmente, cada par de quadrados dá origem a um só quadrado.

Claro que este processo, se bem que infalível, usa decomposições em muitas peças.

Qual será o menor número de peças em que é necessário cortar o dodecágono regular de forma a que estas se reordenem na forma de um quadrado?



Nota: A solução do problema do último número pode ser encontrada em

http://ludicum.org/MR/probl

As XXV Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Joana Teles
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Bodas de Prata das Olimpíadas de Matemática

O ano de 2007 ficará para sempre recordado como um ano muito especial na história das Olimpíadas de Matemática em Portugal. Em primeiro lugar porque se comemoram os 25 anos das Olimpíadas de Matemática com um âmbito nacional e em segundo lugar porque Portugal acolherá, pela primeira vez, uma competição de nível internacional: as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática. Jovens talentos e professores dos 22 países Ibero-Americanos e de Moçambique, este último como nosso convidado especial, juntar-se-ão em Coimbra em Setembro de 2007 para um período que todos nós tentaremos tornar inesquecível, quer a nível de excelência académica, quer ao nível do convívio e da partilha de experiências que uma semana em conjunto proporcionam.

É o culminar de um movimento que se iniciou em Coimbra no ano de 1980. Ainda nesse ano, durante o ano lectivo 1979/1980, a SPM lançou as primeiras olimpíadas de Matemática, chamadas Mini-Olimpíadas porque só abrangiam a região do país correspondente à Delegação Regional do Centro.

A primeira Comissão Organizadora era constituída por Ana Isabel Rosendo, Ana Maria Justino, António Leal Duarte, Dina Maria Santos, Jaime Carvalho e Silva, João Carlos Clímaco, João Filipe Queiró, Manuel Rolão Candeias, Maria Emília Miranda, Maria de Lurdes Vieira e Maria Manuela Sobral.

Vencedores das Olimpíadas de 1983 (1.ªs ONM) e 1984 2.ªs ONM)

Depois de três Mini-Olimpíadas, no ano lectivo de 1982/1983 tiveram lugar as primeiras Olimpíadas Nacionais de Matemática, que em 2000 mudaram o nome para Olimpíadas Portuguesas de Matemática. Em 1989 em Macau (à data sob administração portuguesa) começou o movimento olímpico que deu origem às Olimpíadas de Matemática de Macau, com forte contributo e apoio da SPM.

Para comemorar os 25 anos das Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), com o apoio do Pavilhão do Conhecimento - Ciência Viva, concebeu uma exposição que conta a história de um quarto de século desta competição e dos seus intervenientes. Nesta exposição é possível saber o que é feito dos antigos vencedores, que profissões abraçaram e se a Matemática continua a fazer parte das suas vidas. A história de cada uma das edições das Olimpíadas pode ser percorrida e podem ser experimentados os módulos interactivos que representam alguns dos desafios que nos últimos 25 anos foram colocados a todos os participantes. Esta exposição encontra-se no foyer do Pavilhão do Conhecimento até dia 14 de Maio e depois irá percorrer o país.

A inauguração desta exposição decorreu no Pavilhão do Conhecimento no dia 24 de Março integrada no programa da Final Nacional das XXV OPM. Antigos vencedores olímpicos, colaboradores, criadores de problemas, correctores de provas, organizadores, amigos e sócios da SPM foram convidados a assistir a esta cerimónia que contou com a presença do Ministro da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, Professor Mariano Gago. Os momentos vividos pelos participantes das Olimpíadas nas finais nacionais foram recordados nos depoimentos de dois participantes de gerações distintas. Foi feita uma homenagem às escolas e aos alunos que mais se destacaram nesta competição. A ocasião foi, também, aproveitada para o lançamento do Volume 1 dos livros "Olimpíadas de Matemática – Categoria A" e "Olimpíadas Portuguesas de Matemática – Categoria B" organizados por Paulo Eduardo Oliveira e Jorge Picado e editados pela Texto Editora e pela SPM. Estes livros reúnem todos os enunciados e resoluções dos primeiros 10 anos das OPM e podem ser ferramentas essenciais na preparação e melhoria de resultados quer pelos alunos quer pelas escolas.

A sessão terminou com a fotografia (possível) de todos os vencedores presentes e com uma visita à exposição comemorativa.

Final Nacional das XXV Olimpíadas Portuguesas de Matemática

A primeira etapa (dita eliminatória) das Olimpíadas de Matemática realizou-se em Novembro de 2006 em perto de 1000 escolas por todo o país num total de 25 000 participantes. Os que deram provas de capacidades na resolução dos problemas propostos puderam continuar para a segunda etapa (eliminatória) que decorreu em Janeiro de 2007. Após esta etapa apenas 60 "magníficos" atingiram a Final Nacional: 30 da categoria A (8° e 9° anos de escolaridade) e 30 da categoria B (10°, 11° e 12° anos), distribuídos uniformemente pelas regiões norte, centro e sul. A última etapa (a Final Nacional) no trilho de uma medalha olímpica decorreu entre os dias 22 e 25 de Março em Lisboa sendo a Escola Secundária José Gomes Ferreira a escola escolhida para acolher este evento. Os 60 jovens chegaram a Lisboa no dia 22 de Março, quinta-feira, tendo sido recebidos no Pavilhão do Conhecimento no Parque das Nações. As duas provas que constituem esta final decorreram na escola nas manhãs de sexta-feira e sábado. As tardes destes dois dias foram aproveitados para passear e visitar a cidade de Lisboa, nomeadamente o Castelo de São Jorge e o Oceanário foram pontos por onde todos passaram. No Sábado ao final da tarde todos os olímpicos estiveram na sessão comemorativa dos 25 anos das Olimpíadas de Matemática e à noite assistiram a um espectáculo da Companhia Nacional de Bailado que decorreu no Teatro Camões.

O momento mais aguardado por todos, a sessão de encerramento e entrega de prémios, decorreu no Domingo de manhã no auditório da Fundação Calouste Gulbenkian. Esta cerimónia contou com as seguintes presenças: Professor Marçal Grilo em representação da Fundação Calouste Gulbenkian; Ministra da Educação, Professora Maria de Lurdes Rodrigues; Professor Nuno Crato, presidente da SPM; Professor João Filipe Queiró, professor do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e um dos pioneiros das Olimpíadas em Portugal e Doutor Manuel Esperança, presidente do Conselho Executivo da Escola Secundária José Gomes Ferreira. O Professor João Filipe Queiró fez uma breve apresentação intitulada "Nos 28 anos de Olimpíadas de Matemática", numa alusão aos três anos anteriores em que decorreram umas "Mini-Olimpíadas de Matemática" na região de Coimbra. Após ter sido feito um pouco de história e de terem sido apresentadas algumas histórias curiosas, chegou o momento de conhecer o nome dos medalhados. Certo era que os presentes já eram vencedores pois atingiram a final de entre os muitos concorrentes iniciais. O suspense habitual foi mantido. Um a um, os participantes foram chamados ao palco, com os medalhados com o ouro a serem os mais sofredores, uma vez que primeiro foram chamados os não medalhados, depois os bronzes, em seguida as pratas e por fim os ouros. A lista de todos os medalhados nas duas categorias é a seguinte:

Categoria A

Medalhas de Ouro

Telmo Martins Oliveira

9º ano - Escola BI Santa Catarina da Serra, Gondemaria

Tiago Miguel Barbosa Barroso

9º ano - Colégio do Sagrado Coração de Maria, Loures

Tiago Oleinik Ramos

9º ano - Escola B 2,3 Alapraia, Parede

Medalhas de Prata

Gonçalo Filipe Moura Ferreira

9º ano - Colégio Nossa Senhora do Rosário de Fátima, Leiria

Miguel Jorge Azevedo Lopes

9º ano - Colégio Internato dos Carvalhos, Canidelo

Ricardo Alves Conde

9º ano - Escola Sec. Eng. Acácio Calazans Duarte, Marinha Grande

Medalhas de Bronze

Carolina Sousa Fernandes

9º ano - Escola BI de Santo Onofre, Caldas da Rainha

Filipe Rui Rocha Oliveira

9º ano - Escola Sec. c/ 3o ciclo Oliveira Júnior, Fermêdo

Maria Inês Pastor Pereira da Silva

9º ano - Escola B 2,3 da Maia

Matilde Couto Rosado Martins Simões

9º ano - Externato Nossa Senhora do Rosário, Cascais

Rui Miguel Simões Pinto

9º ano - Ancorensis Cooperativa de Ensino, Vila Praia de Âncora

Silvia Maria de Jesus Pimenta Teixeira da Silva

9º ano - Colégio Moderno, Lisboa

Categoria B

Medalhas de Ouro

Filipe Manuel Figueiras Valeriano
11º ano - Escola B 2,3 c/ Sec. Dr. João de Brito Camacho, Almodôvar

João Leitão Guerreiro
12º ano - Colégio Valsassina, Lisboa

João Pedro Correia Matias
12º ano - Escola Sec. José Gomes Ferreira, Lisboa

Medalhas de Prata

António Jorge Pinto Fernandes
11º ano - Escola Sec. Prof. Dr. Flávio Resende, Alhões, Cinfães

Diogo Miguel Ferreira Poças
11º ano - Escola Sec. Amélia Rey Colaço, Linda-a-Velha

Vasco Correia Moreira
12º ano - Escola Sec. de Gondomar

Medalhas de Bronze

Astrid Nathalie Hiller Biln
12º ano - Colégio Rainha Santa Isabel, Coimbra

Daniel Jorge Ramos Vaz
11º ano - Colégio de São Teotónio, Coimbra

Gonçalo Pereira Simões Matos
10º ano - Escola B 2,3 c/ Sec. de Mação

João Carlos Gomes Martins
11º ano - Escola Sec. José Falcão, Coimbra

José Alberto Gouveia
11º ano - Escola Sec. Almeida Garrett, Gaia

Sara de Sousa Neto Carvalho
12º ano - Escola Sec. Augusto Gomes, Matosinhos

Os medalhados da categoria B são os candidatos a integrarem as equipas que representarão Portugal nas competições internacionais em 2007. Para esse efeito deverão participar nos estágios de preparação a cargo do Projecto Delfos em Coimbra. O desempenho nas XXV OPM em conjunto com os estágios definirá a equipa portuguesa constituída por 6 alunos que irá às Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) que decorrerão em Julho no Vietname e a equipa de 4 alunos que participará nas Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática que se realizam em Setembro em Coimbra.

CARTAS DA DIRECÇÃO DA SPM

José Carlos Santos
Vogal da Direcção da SPM

Livros de Matemática

A actual Direcção da SPM está empenhada na publicação de livros de Matemática, quer sozinha quer em parceria com outras entidades.

É bem conhecida a parceria com a Gradiva, que se traduz na colecção Temas de Matemática, na qual, no momento da redacção deste texto, já foram publicados os livros:

1 - *Matemática e Ensino*, de Elon Lages Lima;

2 - *Contar e fazer contas*, de J. Eurico Nogueira, Suzana Nápoles, António Monteiro, José A. Rodrigues e M. Adelaide Carreira;

3 - *Desastre no Ensino da Matemática: Como recuperar o tempo perdido*, coordenado por Nuno Crato.

Estão em avançado estado de preparação e deverão ser publicados brevemente os seguintes títulos, também naquela colecção:

- *Logaritmos*, de Elon Lages Lima. Trata-se de uma reedição (a primeira edição data de 1991) de uma excelente introdução aos logaritmos, com extensas notas históricas e um grande número de ilustrações, exemplos e aplicações. Além disso, as qualidades pedagógicas do autor são sobejamente conhecidas.
- *Apologia de um matemático*, de G. H. Hardy. É a primeira edição em Portugal do justamente famoso livro de Hardy, cuja edição original em inglês data de 1940. Hardy era «heterodoxo, excêntrico, radical, capaz de discorrer sobre o que quer que fosse», escreveu C. P. Snow no prefácio do livro. Também era um ardente defensor da Matemática Pura, como qualquer leitor casual deste livro pode aperceber-se imediatamente (defende, por exemplo, que «a Matemática pura é, no seu conjunto, nitidamente mais útil do que a aplicada») embora, ironicamente, alguns dos exemplos que apresenta de Ciência pura sem quaisquer aplicações práticas tenham vindo a encontrar tais aplicações posteriormente (em alguns casos, ainda em vida do autor).
- *O eduquês: Uma praga europeia*, de Laurent Lafforgue e outros. Laurent Lafforgue é um dos grandes matemáticos franceses da actualidade, tendo-lhe sido atribuída a medalha Fields (a mais prestigiada distinção atribuída a matemáticos) em 2002. Também se interessa por questões relativas ao ensino e escreveu alguns textos (uns sozinho e outros em colaboração) sobre este assunto. Este livro contém quatro desses textos.

A SPM colaborou também com a Texto Editora relativamente à publicação da obra *Olimpíadas de Matemática — Problemas seleccionados*, em quatro volumes (dois relativos aos 8º e 9º anos do Ensino Básico e outros dois relativos ao Ensino Secundário), da autoria de Jorge Picado e de Paulo Oliveira. De recordar que em 2007 se comemoram os 25 anos das primeiras Olimpíadas Portuguesas de Matemática, para além de ser a primeira vez que se realizam em Portugal as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática.

Teve ainda lugar uma colaboração da SPM com a Editorial Bizâncio, da qual resultou o quinto volume da colecção *Ciência a Brincar*. Trata-se do livro *Descobre a Matemática*, de Carlota Simões.

A SPM também publica livros sem ser em colaboração com editoras comerciais. No ano 2000 publicou o primeiro volume da Biblioteca Básica de Textos Didácticos de Matemática (*Compêndio de Geometria*, de Diogo Pacheco de Amorim) e publicou agora o segundo volume daquela colecção, a *Aritmética Racional*, de António Aniceto Monteiro e J. D. da Silva Paulo. Visto que em 2007 se comemora o centenário do nascimento de Aniceto Monteiro (veja-se `http://aam.cii.fc.ul.pt/`), esta publicação é particularmente oportuna.

Encontra-se também em preparação uma tradução para português do livro *Solving Mathematical Problems*, do matemático australiano Terence Tao, que recebeu a medalha Fields em 2006 e que escreveu este livro com apenas 15 anos de idade.

A SPM publica também Monografias, Notas de Cursos e Actas de Conferências e os seus sócios são convidados a submeter para apreciação os seus originais. De notar que as Monografias da SPM são distribuídas internacionalmente pela World Scientific. Só muito excepcionalmente se poderão considerar para publicação textos que estejam escritos noutra língua que não o inglês.

Na loja da SPM há à venda diversos livros, bem como outros artigos, com um desconto substancial para sócios. A lista dos artigos à venda pode ser consultada na página da SPM:

`http://www.spm.pt`