

M

Nº 0156

Gazeta de matemática

Publicação quadrimestral
da Sociedade Portuguesa de Matemática
Ano LXIX | Novembro 2008
4,20€

Das Tábuas Mesopotâmicas às Calculadoras

Breve História da Quinta Operação



50 | O Que É: O Bilhar
[Waldir Oliva]

52 | Rosetas
[Rui Pacheco]

2 Editorial por Jorge Buescu

3 Atractor
[Iguais e Distintos - a Matemática da Classificação]

5 Recreio por Jorge Nuno Silva
[Par ou Ímpar]

7 Artigo Convidado por Bernard Hodgson
[Uma Breve História da Quinta Operação]

31] Canto Dêlfico por Amílcar Branquinho, Alexander Kovacec, Jorge Neves, Eduardo Marques de Sá e António Salgueiro
[O Pentagrama...]

34] Na Linha de Frente por Fabio Chalub
[A Meia-Vida das Palavras]

36] Apanhados na Rede por António Machiavelo
[O Teorema Mais Famoso]

39] Bartoon por Luis Afonso

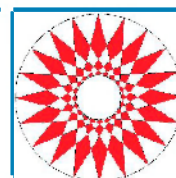
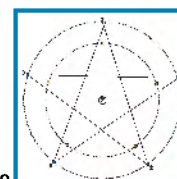
40] [Polígonos Circulares Ascendentes e Descendentes] por Pedro Tadeu e Cecília Costa

50] O Que É... por Waldyr Oliva
[O Bilhar?]

52] [Rosetas] por Rui Pacheco

58 Notícias

64 Cartas da Direcção por Miguel Abreu
[A SPM, o Ensino Superior e a Investigação Científica]



Anuncie aqui!

Já reparou que um anúncio na *Gazeta* é visto por mais de 2.000 leitores, todos eles potenciais interessados em Matemática? Nenhum se desperdiça! A *Gazeta* é o local próprio para anunciar tudo quanto respeite a actividades matemáticas: programas de Mestrado e Doutoramento, livros, workshops ou debates, acontecimentos que interesse dar a conhecer e que devam ficar registados para o futuro... O que não é publicitado é como se não existisse!

Tabela de Preços [páginas interiores]

	Ímpar	Par
1 página	590,00 €	490,00 €
1/2 página	390,00 €	290,00 €
1/4 página	220,00 €	170,00 €
1/8 página	120,00 €	120,00 €

[Aos preços acima acresce 20% de IVA.]

Descontos: Os Sócios Institucionais da Sociedade Portuguesa de Matemática têm direito a um desconto de 15%.

Encartes: É possível enviar encartes. Para mais detalhes consultar a página na web: <http://www.spm.pt>

Editorial

por Jorge Buescu
[Universidade de Lisboa]

Este número da *Gazeta de Matemática* correspondeu a uma oportunidade única: graças à intervenção do Prof. José Francisco Rodrigues, membro do Conselho Editorial da *Gazeta*, publicamos nesta edição um longo e magistral artigo do Prof. Bernard Hodgson, da Universidade de Laval, no Quebec, que proporciona um olhar histórico sobre aquilo a que Descartes chamava a quinta operação: a extracção de raízes quadradas.

Quantos alunos, ou mesmo professores, do nosso Ensino Secundário conhecerão hoje *algum* algoritmo de extracção da raiz quadrada? Numa época em que, tantas vezes erradamente, os raciocínios algorítmicos são desvalorizados “porque hoje temos calculadoras”, e a extracção de raízes quadradas é atirada para o caixote do lixo das artes perdidas, o

Prof. Hodgson proporciona uma viagem intelectual fascinante sobre este problema milenar encontrado por matemáticos mesopotâmicos, gregos, indianos e chineses. A tradução do francês foi uma tarefa árdua, realizada com grande empenho pela Prof. Suzana Nápoles, a quem a *Gazeta* está muito grata.

As restrições de espaço levaram a que este número tenha uma estrutura um pouco diferente da habitual. Assim, não contamos com algumas das secções habituais (Livros, Inquérito) e são publicados apenas dois artigos propostos. Mantêm-se no entanto as restantes secções, que esperamos sejam tão interessantes como de costume.

Boa leitura. Boa Matemática. 



Sobre a Capa

A tábua YBC 7289, da Yale Babylonian Collection, datada do período entre 1200 e 1800 A.C., é o registo mais antigo de aproximação de uma raiz quadrada: proporciona uma aproximação de $\sqrt{2}$ com cinco casas decimais correctas (note-se que o sistema de numeração é de base 60). A imagem é reproduzida com a gentil autorização de Bill Casselman, e pode ser encontrada, tal como fotografias da sua autoria de outras tábuas mesopotâmicas, em <http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc.html>.

Iguais e Distintos - a Matemática da Classificação

O Atractor agradece à Professora Maria Dedò, da Universidade de Milão, ter acecido ao convite para escrever para esta coluna da Gazeta um texto sobre a exposição apresentada em Génova, no âmbito do *Festival della Scienza* 2008.

matematita é um centro inter-universitário destinado à comunicação e aprendizagem informal da matemática (<http://www.matematita.it/>) que há alguns anos propõe, entre outras iniciativas, exposições diversas em Itália dirigidas ao grande público.



A primeira delas (*Simmetria, giochi di specchi*) foi reproduzida em Portugal pela Associação Atractor, com quem o centro *matematita* mantém uma frutuosa colaboração desde há algum tempo. A próxima amostra terá início a 23 de Outubro em Génova, no âmbito do *Festival della Scienza*, um evento que desde há alguns anos atrai a Génova um vasto público.

O *Festival* em Génova lança em Dezembro de cada ano uma competição com um tema dado por uma palavra-chave, e os vários eventos propostos pelo *Festival* do ano seguinte devem estar de algum modo associados a esse mote. A palavra deste ano é "diferença"... e para a matemática ela constituiu uma excelente oportunidade!

A exposição *Iguais? Diferentes! - a oficina do matemático* propõe-se deixar claro ao visitante como uma operação de classificação está de algum modo sempre "subentendida" em qualquer procedimento de abstracção (e cada um de nós está bem habituado a fazê-los - desde que começa a falar!); e, assim, uma das primeiras operações que o matemático leva a cabo quando analisa uma situação é a de classificar os seres que são objecto da sua pesquisa, com método adaptado ao objectivo previamente estabelecido. Ora a diferença entre dois objectos não surge como uma propriedade que lhes seja intrínseca; pelo contrário, depende de parâmetros seleccionados para os estudar, e a realidade pode apresentar aspectos distintos que dependem fortemente do modo como ela é indagada.

A amostra proposta distribui-se por diversos níveis; o primeiro é um percurso de leitura de cartazes que contam ao visitante adulto algumas belas "histórias" de resultados matemáticos sobre classificação (do programa de Erlangen sobre superfícies algébricas, da classificação da simetria dos mosaicos à classificação das superfícies topológicas, passando



Atractor

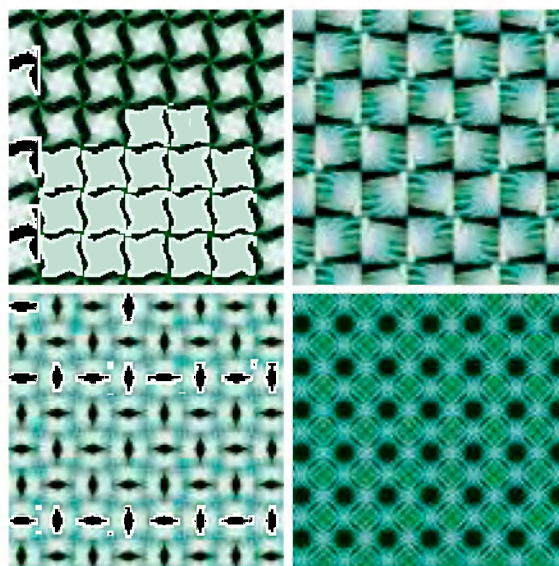
[Iguais e Distintos - a Matemática da Classificação]

pela geometria projectiva e a aritmética modular); o segundo nível é o sugerido pelo subtítulo "oficina do matemático": o termo "oficina" (que se refere aos estabelecimentos medievais onde os aprendizes se instruíam graças à prática supervisionada por um mestre) tem intenção de convidar o visitante a imitar o matemático no seu trabalho, apresentando-lhe diversas situações (ajustadas à faixa etária, das crianças ao público adulto) nas quais ele deve decidir (de maneira arbitrária, mas coerente!) quais os critérios de semelhança e distinção a usar para classificar alguns "objectos". Desse modo pode reconhecer o mau fundamento de um dos preconceitos mais generalizados sobre a matemática, o de que é uma ciência dogmática e monolítica, verificando que, pelo contrário, "fazer matemática" pode ser uma experiência de grande liberdade e criatividade.



As figuras que ilustram estas páginas referem-se a duas das actividades de laboratório propostas: a primeira começa por considerar cerca de quarenta esculturas em madeira, de dimensões pequenas, nas quais se pede ao visitante que assinale quais são esferas (vistas "com os olhos" da topologia), quais são toros, quais são duplos toros. Em duas caixas está uma dezena destas esculturas já subdivididas em esferas e toros, e ao lado um estrado com uma vintena de peças misturadas, entre as quais alguns bitoros e uma superfície de genus 5.

A segunda actividade coloca à disposição do visitante 16 desenhos que são mosaicos apoiados numa grelha quadrada de 4 grupos distintos (p4m,



p4g, p4, pgg); as imagens são obtidas de 4 fotografias diferentes (através da animação "Gerador de padrões" que é parte do DVD "Simetria, uma apresentação dinâmica", criado pela Associação Atractor) e podem portanto classificar-se de (pelo menos) dois modos distintos; está até disponível para uso do público uma caixa de espelhos quadrada, com vários modelos quadrados extraídos dos 16 desenhos, que ajuda numa primeira diferenciação entre os dois primeiros tipos de grupos (que se obtêm numa caixa de espelhos quadrada) e os outros dois (que, pelo contrário, não se podem construir por este processo).

Exposição ao cuidado de Alessandra Brena, Daniela Della Volpe, Francesca Lazzaroni (colaboradoras júniores do centro *matematita*).[M](#)

Ver mais informações em: <http://www.festivalscienza.it/it/programma/evento.php?id=484>

Par ou Ímpar

Em muitas questões matemáticas procura-se padrões que permanecem, quando outros aspectos variam. Por exemplo, uma isometria do plano não altera as áreas das figuras, diz-se que a área é um *invariante* para as isometrias. A identificação de invariantes, alguns muito simples, permite muitas vezes resolver problemas com aspecto complicado...

Vamos propor três problemas que podem ser muito absorventes e complicados, mas que não resistem a uma abordagem simples.

1. A Ara e o Breu disputam o seguinte jogo. Há 100 moedas dispostas numa fila sobre a mesa.



Usam-se moedas de 1, 2, 5, 10, 20 e 50 cêntimos, bem como de 1 e 2 euros. A distribuição inicial é aleatória. A Ara, que joga primeiro, retira uma moeda de uma das extremidades. O Breu, a seguir, retira uma moeda de uma das (novas) extremidades. E assim sucessivamente, até as moedas estarem na posse dos jogadores (50 para cada). Pede-se para mostrar que a Ara, se for esperta, nunca fica mais pobre que o Breu. E se se partisse de 101 moedas?

Podem experimentar este jogo com meia dúzia de moedas e constatar que as estratégias óptimas não são sempre fáceis de determinar...

2. Consideremos os trinta e seis primeiros números primos

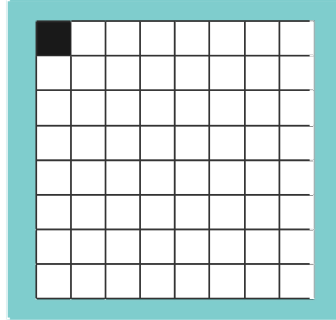
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103
107 109 113 127 131 137 139 149 151.

Sera que é possível dispô-los numa matriz 6×6 de maneira a obter um quadrado mágico? Relembramos que num quadrado mágico a soma das linhas, colunas e diagonais é a mesma.

Recreio

[Par ou Ímpar]

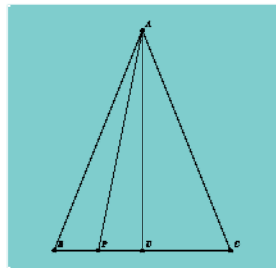
3. Considere um tabuleiro de xadrez com a particularidade de ter uma só casa negra, no canto superior esquerdo.



Pode alterar-se a cor das casas do tabuleiro, desde que se mudem todas de uma linha ou todas de uma coluna. Combinando estas duas operações (alterar cores de linha ou de coluna) poderá obter-se o tabuleiro com todas as casas pintadas de branco?

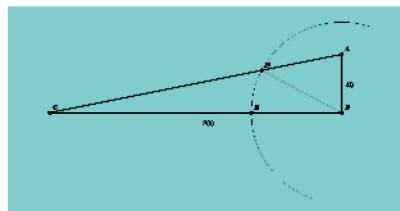
Sobre as questões do número anterior: Seja x a velocidade do comboio mais rápido e y a do mais lento. Os dados dão imediatamente $a+b=m(x+y)$ e $a+b=n(x-y)$ donde, resolvendo o sistema, se obtém $x=(a+b)(m+n)/2mn$ e $y=(a+b)(n-m)/2mn$.

No problema do triângulo isósceles, tracemos a altura AD.



Na notação da figura temos $BP=BD-PD$, $PC=BD+PD$. Multiplicando ordenadamente, obtemos $BP \times PC = BD^2 - PD^2$. Somando a ambos os membros AP^2 e usando o Teorema de Pitágoras, vem $AP^2 + BP \times PC = AP^2 + BD^2 - PD^2 = AD^2 + BD^2 = AB^2$, que é constante.

Quanto ao problema do cavalo, marquemos os pontos D e E, bem como o segmento DB.



Seja x a medida de BE (e de BD) e α o ângulo DBE .

Em termos de áreas tem-se o seguinte. Área de $BCD = 100 x \sin \alpha$, área de $EBD = x^2 \alpha/2$, área de $ABD = 20 x \cos \alpha$. Assim, a condição do problema traduz-se por

$$100 x \sin \alpha - x^2 \alpha/2 = 2000 \text{ e } 20 x \cos \alpha + x^2 \alpha/2 = 2000$$

sistema que, quando resolvido, nos dá um valor aproximado de x de 60,92. \square

Uma Breve História da Quinta Operação

Para René Descartes, a extracção de raízes — em particular de raízes quadradas — tem um lugar especial na aritmética, ao lado das quatro operações usuais. Neste texto, são apresentados vários algoritmos desenvolvidos ao longo dos tempos para a extracção destas raízes. Propõe-se ao leitor um périplo desde a Antiguidade até aos dias de hoje, reencontrando métodos que foram desenvolvidos em diversos lugares e momentos da história da matemática.

1. Introdução

Por muito que se recue no tempo em matemática, a extracção da raiz quadrada suscitou sempre muito interesse. Claramente de alcance geométrico — trata-se, conforme o seu nome aliás indica, da aresta de um quadrado de área dada —, a raiz quadrada é, de um ponto de vista aritmético, uma operação com uma complexidade de cálculo que não é banal. Pelo menos para Descartes, a extracção de raízes (nomeadamente quadradas) ocupa um lugar privilegiado em aritmética, na companhia das quatro operações usuais:

"(...) toda a aritmética é apenas composta por quatro ou cinco operações, que são: a adição, a subtracção, a multiplicação, a divisão e a extracção das raízes, que pode ser entendida como uma espécie de divisão (...)" ([3, p. 1])

Esta observação de Descartes encontra-se mesmo no princípio de *La Géométrie*, numa secção em que ele explica «*como o cálculo aritmético se reporta às operações da geometria*». Seguem-se comentários em que Descartes indica como efectuar com régua e compasso não apenas a adição e a subtracção, mas também a multiplicação e a divisão — com ajuda de triângulos semelhantes bem escolhidos — e a extracção da raiz quadrada. Neste último caso, também usa triângulos semelhantes construídos através do traçado de uma perpendicular ao diâmetro de um semi-círculo, como se indica na figura 1. Notemos que esta construção se encontra duas vezes nos *Elementos* de Euclides, na proposição 13 do Livro VI, quando se pretende construir o meio proporcional entre dois segmentos de recta dados e também na proposição II.14, quando se pretende «*quadrar*» uma figura poligonal dada, isto é, transforma-la num quadrado com a mesma área.

Nos nossos dias, uma simples calculadora de bolso torna o cálculo de uma raiz quadrada absolutamente banal — na medida em que a precisão desejada não ultrapasse o número de algarismos que comporta o seu ecrã. Mas é evidente que isso nem sempre aconteceu. Através dos tempos, introduziram-se vários métodos para calcular uma raiz quadrada ou, através de algoritmos aproximados, determinar um valor aproximado com a precisão desejada.

Esta ideia de cálculo por aproximações sucessivas ocupa um lugar importante neste texto. Ela foi expressa por d'Alembert num artigo de *l'Encyclopédie* (segunda metade do século XVIII) como segue:

Nota: Uma primeira versão deste texto foi publicada em francês no *Bulletin AMQ*, Vol XLVI, n-2, Maio 2006. A presente reprodução foi amavelmente autorizada pela Association Mathématique du Québec. Traduzido por Suzana Nápoles – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

Artigo Convidado

[Uma Breve História da Quinta Operação]

Se um número não é um quadrado perfeito, não se pode esperar exprimir a sua raiz quadrada exacta através de números racionais, inteiros ou fraccionários; neste caso, é preferível recorrer aos métodos de aproximação, e contentar-se com um valor que difere muito pouco do valor exacto da raiz quadrada.

(Citado em [1, pp. 227-228])

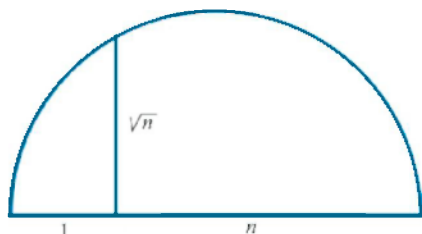


Figura 1

Neste texto pretendemos sobrevoar algumas técnicas de extracção de raiz quadrada. Os métodos que apresentamos foram desenvolvidos em diversos lugares e momentos da história da matemática e julgamos que ilustram bem a riqueza e engenho dos pontos de vista que foram adoptados nas várias épocas. O nosso périplo leva-nos primeiro à Mesopotâmia, onde veremos valores aproximados que podem ser justificados através de um argumento geométrico; depois à Grécia, com os cálculos por aproximações sucessivas que resultam do célebre método de Herão; este algoritmo é um caso particular do método de Newton-Raphson, em que

intervém a derivada de uma função determinada; em seguida veremos como um valor de $\sqrt{2}$ presente na tradição matemática indiana se pode explicar mediante uma dissecação astuciosa de dois quadrados; importaremos então da tradição chinesa uma aproximação geométrica levando ao algoritmo do tipo «algarismo a algarismo» ainda ensinado há algumas décadas nas nossas escolas primárias, antes do advento das máquinas de calcular; finalmente terminaremos com uma técnica que se pode ligar à equação de Pell-Fermat.

2. A raiz quadrada na Mesopotâmia

A nossa primeira paragem leva-nos à Mesopotâmia (actual Iraque) alguns séculos antes da nossa era. A matemática desenvolvida nesta civilização chegou até nós através de pequenas tábuas de argila — foram inventariadas várias centenas — e algumas contêm inscrições relativas a raízes quadradas (por exemplo, procura-se o lado de um triângulo rectângulo, conhecendo os outros dois). Encontram-se assim como valores de $\sqrt{2}$ os números

$$1 + \frac{25}{60} \quad (1)$$

e

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \quad (2)$$

(relembremos que os Mesopotâmios usavam um sistema de numeração sexagesimal, isto é, de base sessenta). Esta última aproximação, que é aproximadamente igual a 1,41421296, em que as primeiras cinco casas decimais são exactas, encontra-se na tábua YBC 7289 da colecção da Universidade de Yale (*Yale Babylonian Collection*).¹

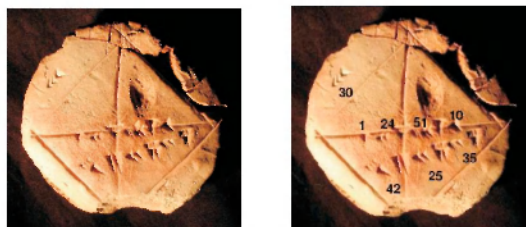


Figura 2

¹As duas fotografias da figura 2 são retiradas do cybersite de Bill Casselman, University of British Columbia, Vancouver — ver www.math.ubc.ca/~7Ecass/Euclid/ybc/ybc.html

Esta tábua mostra-nos um quadrado com lado 30 no interior do qual se podem ler os dois números $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ e $42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$. Como

$$30 \times \left(1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \right) = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$$

conclui-se que $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ é uma aproximação da diagonal de um quadrado de lado 1.

Não se conhece o raciocínio que terá levado os matemáticos da Mesopotâmia aos valores (1) e (2). No caso da aproximação $1 + \frac{25}{60}$, podemos imaginar que se procedeu simplesmente por tentativa e erro elevando ao

quadrado determinados números. O historiador Victor Katz propôs como plausível a explicação seguinte do processo que os Mesopotâmios poderão ter seguido para chegar a estes valores. Baseando-se em afirmações que figuram em alguma tábuas, Katz afirma (ver [9, p. 28]) que se trata de um método "para o qual existe alguma evidência textual".

Aproximação de \sqrt{k} a partir de um valor por defeito

Falando de um ponto de vista geométrico, o cálculo de \sqrt{k} pode ser encarado como a procura de um quadrado com área k . Podemos procurar incluir nesse quadrado o maior quadrado possível com lado conhecido – para o efeito pode-se usar uma das numerosas tábuas de números elevados ao quadrado que os Mesopotâmios possuíam. Chamemos a ao lado do quadrado assim introduzido, e c ao pequeno segmento que é necessário juntar a a para obter o lado do quadrado com área k , isto é, $a+c = \sqrt{k}$.

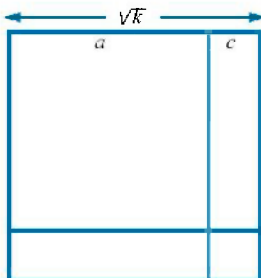


Figura 3

A determinação de um valor a' mais próximo de \sqrt{k} não é mais do que encontrar uma boa aproximação de c , o que pode ser feito examinando a região em forma de «L» reflectido que envolve o quadrado de lado a — por analogia com o estilo de um relógio de sol ou ainda com um esquadro, esta região era chamada *gnómon* pelos antigos gregos (ver a definição 2 do Livro II dos *Elementos* de Euclides, onde esta expressão é introduzida em associação com um paralelogramo).

Este gnómon tem evidentemente área igual a $k - a^2$. Mas observemos que ele se pode decompor em dois rectângulos de lados a e c , mais um "pequeno" quadrado de lado c . Temos então $2ac + c^2 = k - a^2$.

(Este tipo de argumento geométrico, baseado em dissecções elementares de figuras, está inegavelmente ao alcance dos povos da Mesopotâmia. Mas existe certamente um anacronismo na notação algébrica que nós utilizamos para exprimir estes factos geométricos.) Para simplificar a discussão, pode-se desprezar o quadrado de lado c , obtendo assim a aproximação $2ac \approx k - a^2$, isto é

$$c \approx \frac{k - a^2}{2a}$$

Resulta que um melhor valor para \sqrt{k} (em relação ao valor de partida a) é obtido tomando para aproximação de $a+c$ a quantidade

$$a' = a + \frac{k - a^2}{2a} \tag{3}$$

Pondo $c' = \frac{k - a^2}{2a}$ observa-se que a aproximação $c \approx c'$ é uma aproximação por excesso ($c' > c$): com efeito, uma vez que $2ac' \approx k - a^2$, está-se a supor que os dois rectângulos com lados a e c' têm em conjunto a mesma área que

Artigo Convidado

[Uma Breve História da Quinta Operação]

o gnómon, obrigando assim a um valor de c' superior ao de c . Resulta que a aproximação (3), $a' = a + c'$, com base num valor de partida a tomado por *defeito* (isto é, $a < \sqrt{k}$), é ela própria uma aproximação por excesso ($a' > \sqrt{k}$).

A desigualdade $a' > \sqrt{k}$ pode pois ser justificada elevando ao quadrado cada um dos seus membros.

$$\text{Como } a' = \frac{a^2 + k}{2a} \text{ temos, com efeito, que } a'^2 - k = \frac{a^4 + 2a^2k + k^2 - 4a^2k}{4a^2} = \frac{(a^2 - k)^2}{4a^2}$$

e assim $a'^2 - k > 0$ uma vez que o numerador e o denominador do membro da direita da última igualdade são ambos estritamente positivos.

Veremos na secção 2.4 um argumento geométrico mostrando que o aproximante a' toma sempre um valor por excesso.

Chamando b à diferença entre as áreas dos dois grandes quadrados da figura 3, isto é $b = k - a^2$, o método de aproximação em questão pode reescrever-se na forma

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a} \quad (4)$$

Trata-se de uma fórmula de aproximação que se encontra regularmente ao longo dos tempos.

Aproximação de \sqrt{k} a partir de um valor por excesso

O que aconteceria se em vez de um quadrado de lado a situado no interior do quadrado de área k , tomássemos um quadrado que o contivesse?

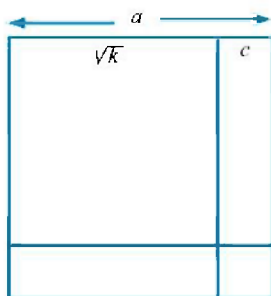


Figura 4

Tem-se então que $a - c = \sqrt{k}$. Além disso, o gnómon que contorna o quadrado com área k , cuja área é agora dada por $a^2 - k$, decompõe-se em dois rectângulos de lados $a - c$ e c mais um "quadrado" de lado c . Temos assim que $2(a - c)c + c^2 = a^2 - k$.

Resulta que $2ac - c^2 = a^2 - k$ (esta última expressão interpreta-se facilmente sobre o gnómon). Desprezando de novo o quadrado de lado c , obtém-se a aproximação c' tal que $2ac' = a^2 - k$, isto é,

$$c \approx c' = \frac{a^2 - k}{2a}$$

Segue que, neste caso, se obtém um melhor valor de \sqrt{k} tomando para aproximação de $a - c$ a quantidade

$$a' = a - c' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = a + \frac{k - a^2}{2a} \quad (5)$$

É interessante constatar que a "fórmula de aproximação" decorrente é exactamente a mesma (comparar as linhas (3) e (5)) seja o valor de partida a inferior ou superior a \sqrt{k} . Resulta que a aproximação da raiz quadrada quando baseada sobre um valor de partida a tomado por *excesso* ($a > \sqrt{k}$) é também ela por excesso ($a' > \sqrt{k}$). (Poderíamos igualmente justificar esta afirmação notando que no caso em que $a > \sqrt{k}$ a aproximação de c por c' se faz agora por *defeito*: $c' < c$. Com efeito, supomos que os dois rectângulos com lados a e c' têm em conjunto a mesma área que o gnómon, obrigando assim a que c' seja mais pequeno do que c , uma vez que o gnómon é formado por dois rectângulos com lados a e c menos o quadrado de lado c . Consequentemente a' é por excesso, uma vez que na expressão $a - c'$, se subtrai de a uma quantidade por *defeito*.)

Assim, o método geométrico introduzido nas secções 2.1 e 2.2 conduz sempre a uma aproximação por excesso, pelo que a única excepção possível decorre da escolha do valor inicial, que quem pretenda aplicar o método poderá eventualmente escolher por *defeito*. Na discussão seguinte não perdemos pois generalidade restringindo-nos ao caso de aproximações por excesso.

Como anteriormente, pode introduzir-se a diferença b entre as áreas dos dois quadrados grandes da figura 4 que, no caso, é $b = a^2 - k$. A equivalente da fórmula de aproximação (4) é então

$$\sqrt{a^2 - k} \approx a \cdot \frac{b}{2a} \quad (6)$$

Se aplicarmos este método no cálculo de $\sqrt{2}$ partindo do valor $1 + \frac{25}{60}$ (superior a $\sqrt{2}$), encontramos directamente limitando-nos a uma precisão com três "casas sexagemaes" a expressão $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ da tábuca YBC 7289. Deixamos os pormenores de cálculo ao cuidado do leitor.

Uma nova interpretação geométrica

Fazendo fé no anacronismo inerente a tal manipulação, simplifiquemos alegremente (e algebricamente!) a "fórmula mesopotâmica" $a \cdot \frac{k - a^2}{2a}$; obtém-se assim facilmente

$$\frac{1}{2} \left(a + \frac{k}{a} \right) \quad (7)$$

No cálculo de \sqrt{k} , esta nova forma de escrever coloca a tónica sobre os números a e $\frac{k}{a}$, onde a pode ser tomado como um valor aproximado de \sqrt{k} (pouco importa a forma como ele foi obtido). E vemos ainda que estamos na presença da *média aritmética* destes dois números, $\frac{1}{2} \left(a + \frac{k}{a} \right)$.

Esta visão dá lugar a uma nova interpretação geométrica. A determinação do lado do quadrado com área k pode ser feita substituindo este quadrado por um rectângulo de lados a e $\frac{k}{a}$, portanto ele também com área k — a figura seguinte ilustra o caso típico $a > \sqrt{k}$.

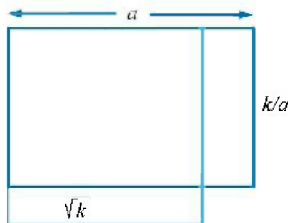


Figura 5

O rectângulo com área k e lados a e $\frac{k}{a}$ constitui assim uma aproximação do quadrado com a mesma área.

Toma-se em seguida a média aritmética $a' = \frac{1}{2} \left(a + \frac{k}{a} \right)$ dos dois lados deste rectângulo, obtendo-se assim um novo valor a' que, pelo menos no plano intuitivo, constitui uma "melhor aproximação" do lado do quadrado.

E é bem o caso! Assim, na situação ilustrada na figura 5 tem-se por um lado $a' < a$ (uma vez que a média a' está situada entre os valores a e $\frac{k}{a}$ com $\frac{k}{a} < a$) e, por outro

lado, já vimos que a' é sempre maior do que \sqrt{k} . Resulta então que $\sqrt{k} < a' < a$, pelo que a aproximação a' é mais próxima de \sqrt{k} do que a .

Um método excessivo, como salta à vista!

A interpretação geométrica da secção 2.3 conduz a uma prova visual³ de que o valor obtido pelo método mesopotâmico é sempre por excesso, quer o número a seja inferior ou superior a \sqrt{k} . Consideremos, por

²Convém insistir sobre o facto de que a visão em termos de média aritmética dos dois números a e k/a não se encontra explicitamente nos documentos conhecidos provenientes da época mesopotâmica.

³Esta demonstração foi-me sugerida pelo meu colega Frédéric Gourdeau, a quem agradeço.

Artigo Convidado

[Uma Breve História da Quinta Operação]

exemplo, o caso típico $a > \sqrt{k}$. Coloquemos um quadrado de lado $\frac{k}{a}$ dentro do rectângulo de lados a e $\frac{k}{a}$ e consideremos em seguida o quadrado de lado $a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$. Como a' é a média aritmética entre a e $\frac{k}{a}$, o lado deste último quadrado está precisamente a meio caminho entre os comprimentos a e $\frac{k}{a}$. Constatando a congruência das duas regiões sombreadas da figura 6, vemos imediatamente que o quadrado de lado a' tem área superior à área do rectângulo com lados a e $\frac{k}{a}$, isto é, $a'^2 > k$. Deixamos ao cuidado do leitor o traçado de uma

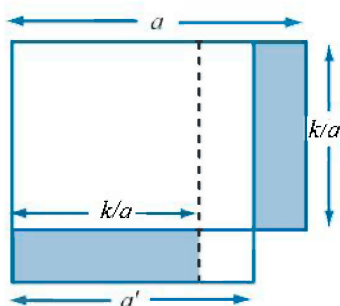


Figura 6

figura semelhante ilustrando o caso $a < \sqrt{k}$.

Até agora foi abundantemente usado o resultado seguinte:

Independentemente do facto do valor a constituir uma aproximação de \sqrt{k} por defeito ou por excesso, a aproximação $a' = a + \frac{k - a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$ é sempre por excesso, isto é, $a' > k$.

Com efeito, além da prova visual que acabámos de usar, lembremos que este resultado foi primeiro estabelecido através de um raciocínio geométrico apoiado nos gnómons (secções 2.1 e 2.2), e que demos também uma prova algébrica na

secção 2.1.

Gostaríamos agora de abordar este mesmo resultado sob um outro ponto de vista.

De média em média

Prolongamos nesta secção a interpretação do método mesopotâmico baseado na noção de média aritmética. Por interessante que esta visão seja, e convém insistir de novo neste facto, ela não se encontra explicitada nos documentos da época. Contudo, faz intervir noções completamente no espírito dos matemáticos gregos da Antiguidade: além da média aritmética de dois números dados, trata-se efectivamente aqui da sua média harmónica. Recordemos a propósito que os Pitagóricos consideravam diversos tipos de "médias" (ver [5, I, pp.

85-89]), de que destacamos em particular a *média aritmética* $\frac{1}{2}(u + v)$, a *média geométrica* \sqrt{uv} e a *média harmónica*

$\frac{2uv}{u + v}$ de dois números u e v . Supomos na discussão que segue que $a \neq \frac{k}{a}$ pois, caso contrário, o problema da

determinação de \sqrt{k} estaria resolvido!

Uma forma simples de nos convenceremos da validade da desigualdade $a' > k$ é apelar para um facto "clássico" em matemática elementar, a *desigualdade média geométrica – média aritmética*. Mas na realidade estamos a falar de média geométrica porquê?

O facto de substituir o quadrado de área k por um rectângulo com a mesma área e com lados a e $\frac{k}{a}$, como

ilustra a figura 5, corresponde certamente à igualdade $k = a \frac{k}{a}$.

Mas então o lado do quadrado, que é a raiz quadrada procurada, pode-se escrever na forma

$$\sqrt{k} =: \sqrt{a \frac{k}{a}}$$

encontrando-se no membro da direita a *média geométrica* dos números a e $\frac{k}{a}$. Ora, vimos na secção 2.3 que a aproximação a' é precisamente a média aritmética destes dois números.

Dito de outra forma, podemos reinterpretar o método mesopotâmico como consistindo em *aproximar a raiz quadrada de um número k , que pode ser encarado como a média geométrica de dois números a e $\frac{k}{a}$, através da média aritmética destes números.*

Mas isto não é tudo: há uma outra média em jogo. Com efeito, uma vez obtida a aproximação a' , podemos ser levados a continuar o processo de aproximação considerando um novo rectângulo com área k , mas desta vez

com lados a' e $\frac{k}{a'}$. Notemos que, uma vez que $a' > \sqrt{k}$, se tem obrigatoriamente que

$$\frac{k}{a'} < \sqrt{k} < a' \tag{8}$$

Esta observação decorre directamente da igualdade $a' \cdot \frac{k}{a'} = k$: quando se considera um produto de dois

factores, esses factores situam-se forçosamente de um lado e do outro da raiz quadrada do produto.

Ora notemos que

$$\frac{k}{a'} = \frac{k}{\frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)} = \frac{2\left(a \cdot \frac{k}{a}\right)}{a + \frac{k}{a}}$$

sendo esta última expressão exactamente a *média harmónica* dos números a e $\frac{k}{a}$.

Somos assim levados a debruçar-nos, de um modo geral, sobre a relação entre a média harmónica, a média geométrica e a média aritmética de dois números. E é aqui que intervém uma desigualdade célebre (que designamos de forma abreviada pela sigla MH-MG-MA): a média harmónica [resp. geométrica] de dois números nunca ultrapassa a sua média geométrica [resp. aritmética].

Desigualdade MH-MG-MA

Dados dois números reais não negativos u e v , tem-se que

$$\frac{2uv}{u+v} < \sqrt{uv} < \frac{1}{2}(u+v)$$

sendo as igualdades satisfeitas quando $u=v$.

Existem numerosas demonstrações deste resultado bem conhecido. Para o leitor interessado neste assunto, apresentamos algumas no Apêndice 1 deste texto.

Transpondo para o caso que nos interessa, a desigualdade MH-MG-MA toma a forma

$$\frac{2\left(a \cdot \frac{k}{a}\right)}{a + \frac{k}{a}} \leq \sqrt{a \cdot \frac{k}{a}} \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$$

isto é,

$$\frac{k}{a'} < \sqrt{k} < a'$$

Sendo a igualdade $a = \frac{k}{a}$ posta de parte por trivialidade, decorre directamente a desigualdade (8):

$$\frac{k}{a'} < \sqrt{k} < a'$$

Artigo Convidado

[Uma Breve História da Quinta Operação]

Assim, não apenas o lado a' do novo rectângulo de aproximação, que é a média aritmética de a e $\frac{k}{a}$, é superior a \sqrt{k} , mas o seu outro lado $\frac{k}{a'}$ é forçosamente inferior a \sqrt{k} , tratando-se, além disso, da média harmónica de a e $\frac{k}{a}$.

Se repetirmos este processo, a nova aproximação a'' será enquadrada por $\frac{k}{a'}$ e a' — trata-se, com efeito, da sua média aritmética! — e certamente a'' é superior a \sqrt{k} . Os números a' e $\frac{k}{a'}$ constituem pois um enquadramento mais fino de \sqrt{k} :

$$\frac{k}{a'} < \frac{k}{a''} < \sqrt{k} < a'' < a'$$

O mesmo acontece evidentemente para as etapas seguintes a''' , etc. Mas há mais. Como a' é a média aritmética entre $\frac{k}{a}$ e a , o ponto a' situa-se precisamente no meio do intervalo separando estes dois pontos. O valor procurado, \sqrt{k} , encontra-se pois na metade esquerda deste intervalo. O mesmo acontece nas etapas de aproximação seguintes.

Este método de aproximar a raiz quadrada é por vezes chamado *método da média aritmética-harmónica*. É utilizado em [12, p.43]⁴.

3. A raiz quadrada por aproximações sucessivas: o método de Herão

Tanto quanto sei, não se encontra explicitamente nos mesopotâmios a ideia de repetir sistematicamente a sua iniciativa, isto é, retomar o cálculo a partir de cada novo valor obtido para encontrar sucessivamente uma melhor aproximação de \sqrt{k} . Mas esta ideia de iterações sucessivas é claramente expressa pelo matemático grego Herão de Alexandria (século I da nossa era).

A expressão $\frac{1}{2} \left(a + \frac{k}{a} \right)$ foi proposta por Herão como aproximação de \sqrt{k} no Livro I da sua obra *Métricas* —

obra essa perdida e reencontrada em 1896. Herão apresenta no início deste livro diversos problemas aritméticos sobre triângulos (cálculo da área e da hipotenusa do triângulo rectângulo com catetos dados, área do triângulo isósceles com lados dados etc.) e é levado, no problema 8 ([6, pp. 18-25]), a um método geral para o cálculo da área A do triângulo de que se conhecem os três lados a , b e c . E então que introduz a célebre fórmula que tem o seu nome — apesar de ela já ser provavelmente conhecida por Arquimedes (cf. [5, II, p. 322]):

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (9)$$

onde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ é o semi-perímetro do triângulo. O problema 8 do Livro I termina aliás com uma

"demonstração geométrica" (segundo as palavras do próprio Herão) da fórmula (9).

Mas anteriormente Herão aplica, neste mesmo problema, a sua fórmula no caso $a=7$, $b=8$ e $c=9$, pelo que tem que calcular $\sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3} = \sqrt{730}$ (nos problemas anteriores os comprimentos foram escolhidos de forma a que a extracção das raízes quadradas seja imediata: $\sqrt{25}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{144}$). Herão escreve então o seguinte:

‘Veremos na próxima secção que o matemático grego Herão de Alexandria propôs um método para o cálculo de raízes quadradas em que intervem a média aritmética (7). As noções de médias aritmética, geométrica e harmónica, como referimos anteriormente, remontam à escola pitagórica, portanto mais de quinhentos anos antes de Herão. Contudo, trata-se sem dúvida de uma maneira simultaneamente elegante e inspiradora de abordar o método do alexandrino. Além disso, mencionamos no Apêndice 1 os textos gregos antigos de onde se podem extrair ligações entre estas médias como a expressa pela desigualdade MH-MG-MA. Mas não é de forma alguma claro que tal visão pudesse ter servido de inspiração a Herão.

"Uma vez que 720 não tem lado racional, vamos extrair o lado com uma diferença muito pequena da forma seguinte. Como o primeiro número quadrado maior do que 720 é 729, que tem por lado 27, divida-se 720 por 27, fica 26 e $\frac{2}{3}$, junta 27 e fica $53 \frac{2}{3}$; toma a metade, que é $26 \frac{1}{3}$. Com efeito, $26 \frac{1}{3}$ multiplicado por si próprio dá $720 \frac{1}{36}$, pelo que a diferença (nos quadrados) é $\frac{1}{36}$. Se queremos tornar essa diferença ainda inferior a $\frac{1}{36}$, colocamos $720 \frac{1}{36}$ acabado de encontrar no lugar de 729 e, procedendo da mesma forma⁵, encontraremos que a diferença (nos quadrados) é muito mais pequena do que $\frac{1}{36}$.

(Citado em [1, p. 231])

Este texto de Herão menciona explicitamente a ideia de repetir o cálculo a partir do valor obtido, de forma a aproximar tanto quanto se desejar o valor procurado. Vemos assim surgir uma sucessão (teoricamente ilimitada) de valores a_1, a_2, a_3, \dots , obtidos por iteração da "fórmula de Herão" e aproximando-se de \sqrt{k} , cada aproximação sendo ligada à anterior pela relação

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right) \quad (10)$$

Assim, é praticamente no decorrer do processo que Herão introduz a fórmula $\frac{1}{2} \left(a + \frac{k}{a} \right)$, e não diz nada quanto à maneira como chegou a esta expressão. Será que se trata de um raciocínio geométrico como o invocado na secção 2.3, onde se aproxima um quadrado por rectângulos com a mesma área? Será que ele via esta expressão simplesmente como a média aritmética dos números a e $\frac{k}{a}$? Ou ainda será uma expressão importada de textos mais antigos ou pertencendo ao "folclore matemático" do seu tempo? Não o sabemos.

4. À procura de uma raiz de uma equação algébrica: o método de Newton-Raphson

Se \sqrt{k} se interpreta geometricamente como o lado de um quadrado com área k , algebricamente trata-se de uma solução da equação $x^2 - k = 0$. Esta passagem a um quadro onde o interesse se centra nas raízes de um polinómio permite colocar em jogo um método geral de procura dos "zeros" de uma função f isto é, valores da variável x que são raízes da equação $f(x) = 0$. O leitor que guardou algumas lembranças da sua primeira cadeira de cálculo diferencial – a presente visão decorre simultaneamente da álgebra e da análise – reconheceu aqui o contexto de aplicação do método de Newton-Raphson, um tema clássico nesse quadro. Este método foi introduzido por Isaac Newton em cerca de 1670 e em 1690 simplificado pelo seu colega Joseph Raphson nas fórmulas iterativas que se usam hoje em dia. Será apenas algumas centenas de anos depois que se insistirá sobre o aspecto geométrico do método – donde a denominação "método da tangente" frequentemente utilizada –, analogamente sobre as considerações de convergência (ver [1, Chap.6]).

Seja então f uma função «bem comportada» – no nosso caso é suficiente supor que f é duas vezes derivável, o que é evidentemente o caso da função $f(x) = x^2 - k$ a que vamos aplicar Newton-Raphson. Vamos ainda supor que encontramos um certo intervalo onde se encontra uma raiz da equação $f(x) = 0$, por exemplo através do estudo da variação de sinal da função f . O método de Newton-Raphson consiste em tomar um valor arbitrário a situado "próximo" da raiz procurada, e tomar em seguida como aproximação desta raiz o ponto a' resultante da intersecção com o eixo dos x da tangente à curva no ponto $f(a)$.

⁵Por outras palavras, trabalhando com o «lado» $26 \frac{1}{3}$ em vez de 27. Lembremos de passagem que a notação $26 \frac{1}{3}$ significa $26 + \frac{1}{3}$.

Artigo Convidado

[Uma Breve História da Quinta Operação]

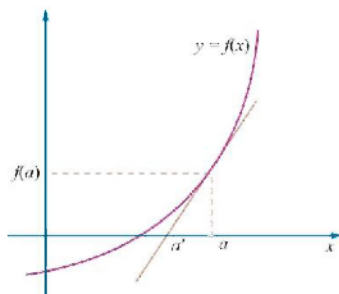


Figura 7

Uma vez que o declive desta tangente se exprime, através da função derivada f' , na forma

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(a')}{a - a'}$$

obtém-se facilmente a relação seguinte para a' :

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

De novo a ideia é de proceder por aproximações sucessivas, obtendo-se assim uma sucessão de valores a_1, a_2, a_3, \dots , que se aproximam cada vez mais do zero da função f .

Quando aplicada à função $f(x) = x^2 - k$ a relação que exprime a' toma a forma

$$a' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{k}{a} \right)$$

onde se reconhecem simultaneamente a fórmula mesopotâmica e, bem entendido, a de Herão.

Um dos interesses de ligar tanto a técnica mesopotâmica como a de Herão ao método de Newton-Raphson é que se podem tirar deste quadro informações preciosas sobre a eficácia destes algoritmos. Com efeito, pode demonstrar-se com bastante facilidade que o método de Newton-Raphson *converge de forma quadrática*. Isto significa que o erro cometido na $(i+1)$ -ésima etapa – isto é, a diferença $e_{i+1} = x_{i+1} - x$ entre a $(i+1)$ aproximação x_{i+1} e o zero de f , x – exprime-se em função do quadrado do erro e_i da etapa anterior. (Este último resultado é objecto do Apêndice 2 deste texto.)

Então se nos situamos numa "boa vizinhança" da raiz procurada, por exemplo com um erro da ordem de 10^3 , uma nova aplicação do método mesopotâmico ou de Herão dará um erro da ordem de 10^6 , duplicando assim o número de casas decimais exactas. Vemos assim que estes métodos de aproximação da raiz quadrada, apesar da sua simplicidade, são de uma eficácia notável.

5. A raiz quadrada através de manipulação geométrica

Vamos buscar à tradição índiana o nosso próximo exemplo de extracção de uma raiz quadrada. Os *Sulbasutras* constituem um anexo a um conjunto de textos religiosos (os *Védeas*) e remontam a 800-600 a.C. A palavra *sulba* significa «corda»: encontram-se nos *Sulbasutras* instruções para a construção de altares para rituais religiosos, servindo a corda para medir as dimensões dos altares.

Propões-se nos *Sulbasutras* o método seguinte para o cálculo de $\sqrt{2}$ (provavelmente relacionado com o projecto de construção de um altar cuja área duplique a de um altar dado): "Aumenta a medida da sua terça parte, e essa terça parte da sua própria quarta parte menos a trinta e quatro-ésima parte desse quarta parte." ([10, p. 40]). Utiliza-se pois como aproximação de $\sqrt{2}$ a expressão

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34} \quad (11)$$

Esta aproximação ronda 1,414215686, sendo as cinco primeiras casas decimais exactas. Tal como acontece no caso do método mesopotâmico ou no de Herão, os autores dos *Sulbasutras* não forneceram qualquer indicação sobre os raciocínios que os levaram a este valor para $\sqrt{2}$.

Uma visão possível da expressão (11) é retomada por Joseph [7, pp. 234-236] (com base nos trabalhos de B. Datta). O argumento assenta no facto de serem dadas duas cópias de um quadrado com área 1 e de ver como «reunir» estas figuras de maneira a formar um quadrado com área 2, do qual se procurará em seguida calcular o

lado. Bem entendido que uma solução geral de um problema de adição de áreas é fornecida pelo teorema de Pitágoras: o quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo rectângulo tem exactamente por área a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois lados do ângulo recto. Mas uma tal aproximação, por mais elegante que seja no que diz respeito à ideia de adicionar áreas, não é minimamente útil quando se pretende obter um valor numérico do lado do quadrado. O argumento que encontramos em [7] assenta sobre o "bricolage" geométrico seguinte, no qual intervêm a figura 8.

Consideremos os quadrados $ABCD$ e $PQRS$, ambos com área um. Começamos por decompor um dos quadrados dados em três bandas idênticas. Duas destas bandas (regiões 1 e 2) podem ser colocadas sobre os lados do outro quadrado. Dividindo então a terceira banda em três quadrados, tomamos um deles (região 3) para o colocar no "canto", junto às regiões 1 e 2. Resta pois colocar à volta do quadrado $ABCD$ (assim aumentado) os dois últimos quadrados, vestígios do segundo quadrado de partida. Com esse fim, dividimos cada um dos dois "quadrinhos" em quatro bandas idênticas (regiões 4 a 11) que colocamos como é indicado na figura 8.

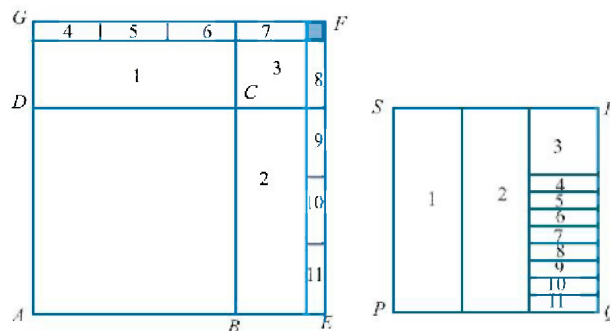


Figura 8

Neste momento o primeiro quadrado $ABCD$ foi transformado num grande quadrado $AEFG$ com lado

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} = 1\frac{5}{12} \quad (12)$$

Contudo, a área deste grande quadrado excede o dobro da área de $ABCD$, uma vez que o quadradinho sombreado situado junto ao vértice F não foi coberto por fragmentos provenientes do quadrado $PQRS$. Ora este quadradinho tem área igual a $\left(\frac{1}{3 \times 4}\right)^2$. É pois necessário, para equilibrar o todo, "repartir" este quadradinho ao longo dos lados do quadrado $AEFG$ recortando-o.

Com essa finalidade, imaginemos que tiramos três bandas estreitas, cada uma de largura x do quadrado $AEFG$ – por exemplo, tiramos uma primeira banda ao longo de AG e outra em baixo, ao longo de AE . Supomos,

bem entendido, que estas duas bandas totalizam uma área igual a $\left(\frac{1}{3 \times 4}\right)^2$ de forma que

$$2x \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4}\right) - x^2 = \left(\frac{1}{3 \times 4}\right)^2$$

Desprezando o termo x^2 , esta última equação, depois de simplificada, conduz a $x \approx \frac{1}{3 \times 4 \times 34}$, tal como pretendíamos.

Observemos que a análise geométrica anterior é apenas válida para o caso de $\sqrt{2}$. isto é, quando se procura duplicar a área de um quadrado.

Katz [9, p. 28] propõe outra interpretação da aproximação (11) para $\sqrt{2}$. Tomando como ponto de partida o valor $1\frac{5}{12}$, que figura em (12), ele aplica a aproximação mesopotâmica $a' = a - \frac{a^2 - k}{2a}$ — ver em (5) —, obtendo assim directamente a aproximação indiana de $\sqrt{2}$:

$$\frac{17}{12} - \frac{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 2}{2 \times \frac{17}{12}} = \frac{17}{12} - \frac{1}{\frac{34}{12}} = \frac{17}{12} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34}$$

Aliás, Neugebauer escreve a este respeito: "Não me parece de excluir a possibilidade de que tanto o termo principal como a correcção subtraída sejam, em última instância, baseados nas duas aproximações babilónicas." ([11, p. 35])

6. A raiz quadrada "algarismo a algarismo": visões geométrica e algébrica do algoritmo usual

O próximo exemplo de método de extracção da raiz quadrada leva-nos para os lados da antiga China. O livro *Os nove capítulos sobre os processos matemáticos* (em chinês, *Jiuzhang suanshu* — ver [2], [8]) figura entre os principais textos de matemática da Antiguidade chinesa. Esta obra, que remonta à época da dinastia Han (-206 a 220), foi escrita por volta do princípio da era comum (d.C.) e consiste numa recolha de conhecimentos matemáticos desenvolvidos durante o milénio precedente. O conteúdo matemático dos *Nove capítulos* é apresentado de forma sumária e sem justificações, sob a forma de problemas com respostas e de processos para encontrar essas respostas. Contudo, esta obra, um dos «clássicos» da China antiga, foi ao longo dos séculos objecto de comentários explicando e justificando esses algoritmos. Para o nosso propósito são particularmente interessantes os comentários de Liu Hui (263), que dão uma interpretação geométrica bastante límpida do método proposto nos *Nove capítulos* para a extracção da raiz quadrada.

Uma visão geométrica

Pretendemos agora ilustrar o funcionamento do algoritmo chinês para a raiz quadrada e fornecer uma sua motivação geométrica baseada nos comentários de Liu Hui. Para isso usamos como caso tipo o cálculo de $\sqrt{55\ 225}$ que é um dos exemplos numéricos tratados nos *Nove capítulos* (problema 12 do Capítulo 4). O facto de este número ser um quadrado perfeito não retira nada à generalidade do objectivo, o algoritmo que dá, um a um, os algarismos da raiz quadrada, qualquer que seja o seu valor posicional. A discussão que segue podia assim ser facilmente transposta para o caso de uma raiz quadrada não inteira. Esta constatação encontra-se aliás nos comentários de Liu Hui, que fala explicitamente da continuação da extracção da raiz para lá da unidade, "na parte decimal" ([2, p.365]): Liu Hui menciona que os algarismos obtidos sucessivamente são então tomados como numeradores, enquanto que 10, 100, ... intervêm como denominadores. E ele exprime claramente que cada vez que se calculam mais algarismos decimais, mais as fracções correspondentes são "finas", de forma que apesar do quadrado de partida não ter sido completamente esgotado, a parte ("superfície") desprezada torna-se tão pequena que "não vale a pena falar dela" ([2, p. 365]).

Sem surpresa, Liu Hui vê o cálculo de uma raiz quadrada como a procura do lado de um quadrado dado. Contudo, em vez de proceder a uma decomposição do quadrado "à maneira da Mesopotâmia", faz uma dissecção que se aproxima muito da numeração em base dez. Sublinhemos simplesmente, a propósito da numeração chinesa, que os Chineses utilizavam entre eles um sistema decimal posicional, bastante próximo do nosso: o sistema dos pauzinhos para calcular.

A figura 9, retirada dos comentários de Liu Hui (ver [2, pp. 323 e 801] e [8, p. 207]) serve de suporte aos argumentos geométricos que subentendem o processo dos *Nove capítulos* para a extracção da raiz quadrada. A

figura deve ser lida etapa a etapa, enquanto se procura "esgotar" o quadrado de área dada por quadrados de área cada vez maior – Liu Hui utiliza mesmo a cor para ilustrar os seus propósitos, onde nós usamos o sombreado. (Esta figura não está, evidentemente, à escala.)

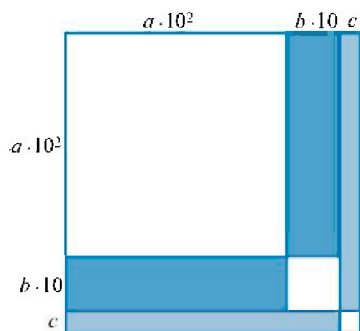


Figura 9

É preciso começar por observar que $\sqrt{55\,225}$ é um número que expresso na forma decimal é constituído por três algarismos: este facto decorre facilmente da observação do número de algarismos das primeiras potências de 10. Em base 10, o número $\sqrt{55\,225}$ é pois da forma abc (ou, se preferirmos $a \times 10^2 + b \times 10 + c$). Calculemos agora, um a um, cada um dos algarismos a , b e c , por ordem. Para tornar mais clara a discussão, reproduzimos a figura 9 em cada etapa do cálculo, destacando os elementos pertinentes a essa etapa. No entanto o raciocínio pode ser efectuado sobre uma só figura 9.

Etapa I: O algarismo das centenas

Procuramos em primeiro lugar o maior valor que o algarismo das centenas, a , pode ter de forma que o quadrado de lado $a \times 10^2$ caiba no quadrado com área 55225, isto é,

$$(a \times 10^2)^2 < 55\,225 \tag{13}$$

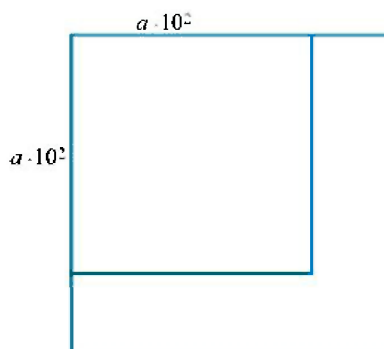


Figura 10

Resulta que $a = 2$. Observemos o gnómon à volta deste quadrado de lado 200; ele tem área igual a $55\,225 - 200^2 = 15\,225$.

Etapa II: O algarismo das dezenas.

Seguidamente procura-se o maior valor que o algarismo das dezenas, b , pode ter de forma que dois rectângulos de lados 200 e $b \times 10$, mais um quadrado de lado $b \times 10$ caibam no gnómon com área 15225, isto é,

$$2 \times 200 \times b \times 10 + (b \times 10)^2 < 15\,225 \tag{14}$$

Artigo Convidado

[Uma Breve História da Quinta Operação]

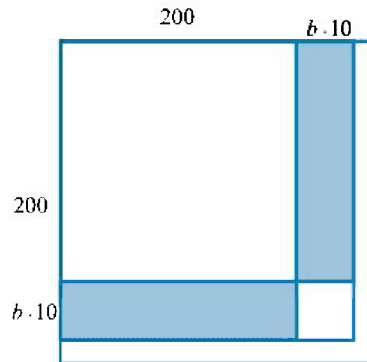


Figura 11

Como $2 \times 200 \times 3 \times 10 + (3 \times 10)^2 = 12\,900$ e $2 \times 200 \times 4 \times 10 + (4 \times 10)^2 = 17\,600$ conclui-se que $b = 3$. Obtemos então o quadrado de lado 230 rodeado por um gnómon com área $55\,225 - 230^2 = 23\,25$

Etapa III: O algarismo das unidades

Procuramos agora o maior valor que o algarismo das unidades, c , pode ter de forma que dois rectângulos com lados 230 e c mais um quadrado de lado c caibam num gnómon com área 2325, isto é

$$2 \times 230 \times c + c^2 < 2\,325 \quad (15)$$

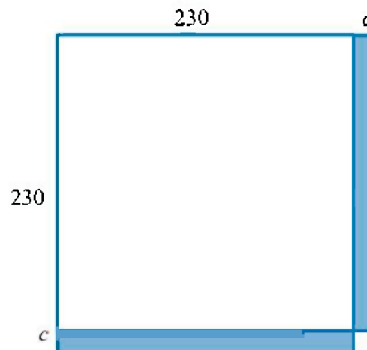


Figura 12

Conclui-se facilmente que $c = 5$ — que verifica a igualdade em (15) — e assim $\sqrt{55\,225} = 235$.

É de salientar que, contrariamente aos métodos analisados nas secções anteriores, o processo dos *Nove capítulos* fornece um a um os algarismos de uma raiz quadrada, cada etapa de cálculo fornecendo uma nova posição decimal (por ordem decrescente de grandeza). Foi por este processo que, no cálculo de $\sqrt{55\,225}$, se obtiveram sucessivamente os valores 200, 230 e 235. No caso dos algoritmos anteriores, cada etapa permite em geral obter vários algarismos da raiz — não esqueçamos que estes métodos estão todos englobados no algoritmo de Newton-Raphson, que converge quadraticamente.

6.2. Ligação entre o algoritmo chinês e o algoritmo usual

Há apenas algumas décadas, ensinava-se na escola primária um método para calcular a raiz quadrada. Esse algoritmo era evidentemente introduzido como um conjunto de regras para aplicar praticamente às cegas, sem qualquer justificação. Gostaríamos de mostrar aqui que este "truque de cálculo" não é mais do que uma disposição cómoda das manipulações numéricas que se executam usando um processo como o *dos Nove capítulos*. Observemos a propósito que esta obra propõe uma certa disposição em forma de quadro dos números intervinientes neste cálculo — trata-se da representação dos números com o auxílio de "barras de calcular" (ver [2, p. 324] e [8, p. 207]). Mas a forma de juntar os números é diferente da que segue.

Etapa 0': O número de algarismos da raiz quadrada

Começamos por dividir o número do qual se extrai a raiz quadrada em grupos de dois algarismos andando para a esquerda a partir da vírgula decimal. (Se existe uma parte decimal faz-se o mesmo para a parte decimal andando para a direita a partir da vírgula.)

$$\begin{array}{r} 5 \ 52 \ 25 \\ \hline \end{array}$$

A raiz quadrada de 55 225 é assim composta por três algarismos (na sua parte inteira.)

Etapa I': O algarismo das centenas

Procuramos o maior algarismo a tal que $a^2 < 5$. Tem-se então que $a = 2$, e elevamos ao quadrado: $2 \times 2 = 4$, que subtraímos de 5, restando 1.

$$\begin{array}{r} 5 \ 52 \ 25 \\ \underline{4} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline 2 \times 2 \end{array}$$

Etapa II': O algarismo das dezenas

Baixamos o grupo seguinte, 52. Seguidamente cortamos o produto 2×2 (que já não serve), e duplicamos o 2 para obter 4.

$$\begin{array}{r} 5 \ 52 \ 25 \\ \underline{4} \\ 1 \ 52 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline 2 \times 2 \\ 4 \end{array}$$

Procuramos agora o maior algarismo b tal que o número que se escreve na forma "4b" seja tal que multiplicado por b caiba em 152, isto é, tal que $(2 \times 20 + b) \times b < 152$. Encontramos $b = 3$. Calculamos: 43×3 , que subtraímos a 152, restando 23.

$$\begin{array}{r} 5 \ 52 \ 25 \\ \underline{4} \\ 1 \ 52 \\ \underline{1 \ 29} \\ 23 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline 2 \times 2 \\ 4 \end{array}$$

Artigo Convidado

[Uma Breve História da Quinta Operação]

Etapa III: O algoritmo das unidades

Baixamos o grupo seguinte, 25. Seguidamente cortamos o produto 43×3 e duplicamos 23, obtendo 46.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 52 & 25 & 23 \\ \hline 4 & & & 2 \times 2 \\ 1 & 52 & & 43 \times 3 \\ \hline 1 & 29 & & 46 \\ \hline & 23 & 25 & \end{array}$$

Procuramos agora o maior algarismo c tal que o número que se escreve na forma "46c" seja tal que multiplicado por c caiba em 2325, isto é, tal que $(2 \times 230 + c) \times c < 2325$. Encontramos $c=5$. Calculamos: $465 \times 5 = 2325$ de forma que o resto seja zero. A raiz quadrada está à vista, em cima à direita da grelha de cálculo: $\sqrt{55225} = 235$.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 52 & 25 & 235 \\ \hline 4 & & & 2 \times 2 \\ 1 & 52 & & 43 \times 3 \\ \hline 1 & 29 & & 465 \times 5 \\ \hline & 23 & 25 & \\ & 23 & 25 & \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

O "mistério" envolvendo etapas do estilo "duplica-se o número que aparece na linha de cima, na parte da direita da grelha de cálculo" desvanece-se completamente se pensarmos na ligação com a decomposição geométrica do quadrado inicial em retângulos e quadrados de diferentes tamanhos, tal como foi proposto por Liu Hui. Aliás, as várias manipulações efectuadas para a aplicação do algoritmo "algarismo a algarismo" tornam-se mais claras se nos dermos ao trabalho de escrever os zeros necessários para completar todas as posições decimais no decorrer do cálculo. (Podemos aproveitar para alinhar os cálculos intermédios correspondentes às desigualdades (13), (14) e (15) com os produtos que daí resultam.)

$$\begin{array}{r|l} 5 & 52 & 25 & 235 \\ \hline 4 & 00 & 00 & 200 \times 200 \\ 1 & 52 & 25 & \\ \hline 1 & 29 & 00 & 430 \times 30 \\ \hline & 23 & 25 & \\ & 23 & 25 & 465 \times 25 \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

6.3. Uma visão algébrica

De um ponto de vista algébrico, o algoritmo usual tratado na secção anterior pode ser visto como a utilização repetida da identidade fundamental

$$(u + v)^2 = u^2 + (2uv + v^2) \quad (16)$$

(pode-se evidentemente fazer a mesma ligação com o processo de Liu Hui). Indicamos sumariamente em seguida como esta identidade intervém nos cálculos em questão.

Etapa I': O algarismo das centenas

Para encontrar o algarismo das centenas a utiliza-se a desigualdade (13), $(a \times 10^2)^2 < 55\,225$, cuja interpretação é a mesma num contexto algébrico.

Etapa II': O algarismo das dezenas

Considere-se agora o algarismo das dezenas b . Neste caso a identidade fundamental (16) toma a forma

$$(200 + b \times 10)^2 = 200^2 + (2 \times 200 \times b \times 10 + (b \times 10)^2)$$

Ora, os dois últimos termos que se encontram do lado direito desta igualdade constituem o membro da esquerda da desigualdade (14) e podem ser escritos na forma $(2 \times 200 + b \times 10) \times b \times 10$. Procura-se então o maior valor de b tal que

$$(2 \times 200 + b \times 10) \times b \times 10 < 15\,225$$

Obtém-se $b=3$, de forma que a desigualdade anterior toma a forma $430 \times 30 = 12\,900 < 15\,225$, o que corresponde à segunda parte da etapa II'.

Quando expressa em termos gerais, conservando o símbolo a para algarismo das centenas, esta etapa diz respeito à expressão $(2 \times a \times 10^2 + b \times 10) \times b \times 10$, que se vislumbra facilmente nas manipulações da secção 6.2.

Etapa III': O algarismo das unidades

No caso do algarismo das unidades c , a identidade fundamental (16) toma a forma

$$(230 + c)^2 = 230^2 + (2 \times 230 \times c + c^2)$$

Mais uma vez os dois termos à direita da igualdade referem-se a uma desigualdade da secção 6.1, mais precisamente a desigualdade (15). Reescrevendo os seus termos na forma $(2 \times 230 + c) \times c$, volta-se a encontrar o cálculo da última parte da etapa III', da secção 6.2.

No caso a interpretação algébrica desta etapa reporta-se à expressão

$$2 \times (a \times 10^2 + b \times 10) \times c + c^2 = (2 \times (a \times 10^2 + b \times 10) + c) \times c$$

que intervém nos cálculos da secção 6.2.

7. Alguns caminhos alternativos

O presente texto não pretende minimamente ser exaustivo no que diz respeito ao desenvolvimento ao longo dos tempos das técnicas de extracção da raiz quadrada. Outras contribuições teriam merecido ser apresentadas e limitamo-nos a sublinhar brevemente três delas.

1. Cerca do ano 370 da nossa era, Teão de Alexandria utiliza como suporte geométrico para os seus cálculos a partição canónica do quadrado de lado $a + b$ em dois quadrados e dois rectângulos – reportando-se à proposição II.4 dos *Elementos* de Euclides para essa decomposição. Teão está então a comentar o *Almagesto* de Ptolomeu e pretende explicar como calcular $\sqrt{4500}$ da qual este último deu o valor sem justificação. A figura que acompanha o raciocínio de Teão (ver [14, p. 471]) é, em todos os pontos, idêntica à de Liu Hui (figura 9), e o algoritmo

Artigo Convidado

[Uma Breve História da Quinta Operação]

resultante é muito próximo do algoritmo "algarismo a algarismo" que tratámos anteriormente. Pode-se encontrar a tradução do texto de Teão em [1, pp. 233-234].

2. Este algoritmo "algarismo a algarismo" está presente em numerosas obras de cálculo da Idade Média. O matemático marroquino Ibn al-Banna (século XIII) dá uma explicação deste algoritmo que fornece, com base na numeração posicional, uma descrição do processo a seguir para a extracção de uma raiz quadrada (ver [1, pp. 235-237]).

3. Encontramos na Antiguidade grega um método completamente diferente para calcular $\sqrt{2}$. Assenta na constatação, conhecida dos Pitagóricos, de que o quadrado construído sobre a diagonal de um quadrado dado tem uma área que duplica a do quadrado inicial. No entanto, a irracionalidade da razão entre a diagonal do quadrado e o seu lado teria levado os Pitagóricos a introduzir o processo denominado dos *números laterais e diagonais* para obter valores aproximados desta razão (isto é, em linguagem moderna, do número $\sqrt{2}$). O processo em causa pode ser visto como consistindo em trabalhar com razões sucessivas de racionais, mas tais que o quadrado de um dos membros de uma dada razão difere apenas de uma unidade do dobro do quadrado do outro membro.

Numa obra intitulada *Exposição dos conhecimentos matemáticos úteis para a leitura de Platão* ([15]), o filósofo Teão de Smyrne (século II da nossa era) introduz duas sucessões de números inteiros satisfazendo uma relação deste tipo. Mais precisamente, pondo $c_1 = d_1 = 1$, define duas sucessões $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ através das igualdades

$$c_{n+1} = c_n + d_n \quad \text{e} \quad d_{n+1} = 2c_n + d_n$$

Obtém-se assim $c_2 = 2, d_2 = 3, c_3 = 5, d_3 = 7, c_4 = 12, d_4 = 17$, etc. Teão menciona que o quadrado de cada número «diagonal» d_n difere de uma unidade do dobro do quadrado do número "lateral" correspondente c_n — estas diferenças tomam alternativamente os valores -1 e $+1$. Com efeito tem-se a relação

$$d_n^2 = 2c_n^2 + (-1)^n \tag{17}$$

que se verifica facilmente com as notações modernas: uma vez que

$$d_n^2 - 2c_n^2 = (2c_{n-1} + d_{n-1})^2 - 2(c_{n-1} + d_{n-1})^2 = 2c_{n-1}^2 - d_{n-1}^2 = -(d_{n-1}^2 - 2c_{n-1}^2)$$

cada passagem de uma etapa para outra limita-se a introduzir uma mudança de sinal, o que dá o resultado pretendido quando se observa que $d_1^2 - 2c_1^2 = -1$.

De um ponto de vista geométrico, os números laterais e diagonais podem ser interpretados como segue. Partindo de um losango de lado 1 e tal que uma das suas diagonais também tenha comprimento 1 — tem-se, com efeito, que $c_1 = d_1 = 1$ — isto é, um losango cujos ângulos medem 60° e 120° , cada etapa de iteração consiste então em substituir um losango dado — digamos de lado c_n e tendo d_n como uma das suas diagonais — por um

maior (de lado c_{n+1} e de diagonal d_{n+1}) e cuja forma se aproxima cada vez mais de um quadrado. As razões $\frac{d_n}{c_n}$ que

tomam sucessivamente os valores $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \frac{17}{12}$ etc. que tendem então para $\sqrt{2}$, alternativamente por defeito

e por excesso, como mostra aliás a igualdade (17) quando reescrita na forma

$$\frac{d_n^2}{c_n^2} = 2 + \frac{(-1)^n}{c_n^2} \tag{18}$$

Por outras palavras, se c_n é encarado como o lado de um quadrado, então d_n fornece uma aproximação da sua diagonal. Notemos que a aproximação é tanto melhor quanto maiores são c_n e d_n — esta observação decorre imediatamente da igualdade (18), ou pode ser vista como ligada ao facto de a diferença entre d_n^2 e $2c_n^2$ ser sempre igual a 1.

O comentador Proclus (século V) indica que o processo dos números laterais e diagonais, que associa explicitamente aos Pitagóricos, pode ser visto geometricamente como resultando da proposição II.10 dos *Elementos* de Euclides (proposição essa conhecida muito antes da época do próprio Euclides), cuja interpretação algébrica pode ser traduzida pela igualdade

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2$$

(ver [16, pp. 138-139]).

A igualdade (17) — com n par — é um caso particular da *equação de Pell-Fermat*. Mais geralmente, consideremos a equação $x^2 - my^2 = 1$, em que m é um número inteiro positivo que não é um quadrado perfeito. Esta pode ser reescrita na forma

$$\frac{x^2}{y^2} = m + \frac{1}{y^2},$$

de forma que quando y é "grande", a fracção $\frac{x}{y}$ fornece uma boa aproximação racional para \sqrt{m}

8. Conclusão

Quando está em questão uma raiz quadrada, antes de tudo o que está em causa é a relação

$$p = \sqrt{q} \Leftrightarrow p^2 = q$$

Mais do que uma técnica de cálculo, é ela que traduz a própria essência de uma raiz quadrada. A partir dela podem ser ultimadas técnicas de aproximação numérica. Se, por exemplo, dispomos de uma calculadora com a tecla x (mas sem a tecla $\sqrt{}$) a sequência de cálculos seguinte permite procurar as primeiras três casas decimais de $\sqrt{2}$. A ideia presente é de "ensanduichar" 2 entre dois quadrados de forma cada vez mais fina, aumentando uma casa decimal de precisão em cada etapa do cálculo.

$$\begin{aligned} 1^2 &< 2 < 2^2 \\ 1,4^2 &< 2 < 1,5^2 \\ 1,41^2 &< 2 < 1,42^2 \\ 1,414^2 &< 2 < 1,415^2 \end{aligned}$$

Apesar da sua simplicidade, este algoritmo "algarismo a algarismo" não é menos fundamental.

Os diferentes métodos apresentados neste texto trazem uma luz diferente sobre a extracção da raiz quadrada. Pretendemos em particular colocar a tónica sobre os métodos que se baseiam numa interpretação geométrica, visão que, segundo nos parece, está muito frequentemente ausente do ensino actual.

Vários destes métodos têm uma eficácia notável — pensemos na convergência quadrática do método de Newton-Raphson, que está por detrás de vários dos algoritmos aqui estudados. Seria provavelmente interessante, quando se trabalha com alunos no final do ensino secundário que participam em programas onde a informática ocupa a parte principal, levá-los a programar Newton-Raphson e permitir-lhes *ver* a rapidez da convergência.

Isto poderia proporcionar a ocasião para reflectir sobre o que se passa "nas entranhas" da calculadora quando se apoia sobre a tecla $\sqrt{}$. Newton-Raphson estará provavelmente subjacente... ou qualquer coisa do género! ☺

Convidado

[Apêndice 1: A desigualdade MH-MG-MA]

Apêndice 1: A desigualdade MH-MG-MA

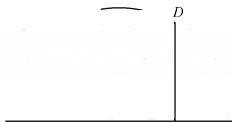
Pretendemos estabelecer a desigualdade *média harmónica – média geométrica – média aritmética*:

$$\frac{2uv}{u+v} < \sqrt{uv} < \frac{1}{2}(u+v)$$

onde u e v são dois números reais positivos (ou nulos), sendo a igualdade verificada quando $u = v$. O resultado é evidente se um destes números for nulo.

Demonstração geométrica

Consideremos um semi-círculo de diâmetro $u + v$, a perpendicular CD levantada a partir do ponto C de encontro dos dois segmentos (de comprimentos respectivamente u e v) tem por comprimento \sqrt{uv} . Este comprimento é claramente limitado pelo raio OD do semicírculo, cujo comprimento é igual a $\frac{1}{2}(u+v)$. Por outro lado, verifica-se facilmente que a perpendicular CE baixada sobre OD determina um segmento DE que representa a média harmónica de u e v , isto é, de comprimento $\frac{2uv}{u+v}$. E DE é também limitado por CD . O caso limite $u = v$ corresponde à situação em que, sendo os pontos C e O coincidentes, se tem $DE = CD = OD$.



Demonstração algébrica

A ideia é recorrer a uma equação algébrica bem escolhida da qual decorrerá a desigualdade MH-MG-MA. Apresentamos dois exemplos de tais equações – que são na realidade variantes uma da outra.

• Observemos que

$$(u+v)^2 = 4uv + (u-v)^2 \tag{19}$$

de forma que

$$(u+v)^2 > 4uv \tag{20}$$

Segue-se que, por um lado

$$2\sqrt{uv} < u+v$$

e por outro lado

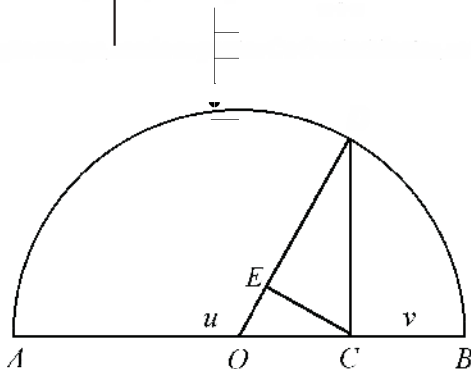


Figura 13

$$\frac{4uv}{(u+v)^2} \leq 1 \text{ e conseqüentemente } \frac{4u^2v^2}{(u+v)^2} < uv$$

com igualdade quando $u=v$ — porque nesse caso $(u-v)^2=0$.

- Uma vez que $(x-y)^2 > 0$, tem-se que

$$x^2 + y^2 > 2xy$$

verificando-se a igualdade quando $x=y$. Os resultados seguem tomando $x^2=u$ e $y^2=v$.

Observação

Tanto quanto sei, a desigualdade MH-MG-MA não foi formulada de maneira explícita na literatura da Antiguidade — poderíamos dizer que não estava provavelmente no "espírito" da época. No entanto as ideias encontram-se disseminadas por vários textos. Assim, Heath ([4, II, pp. 185-186]) salienta que tanto a proposição V.25 dos *Elementos* de Euclides como a proposição VI.27 conduzem à desigualdade MG-MA como caso particular. A proposição V.25 interpreta-se como segue, falando de um ponto de vista algébrico: se as quantidades a, b, c e d satisfazem as proporções

$$a \div b = c \div d$$

(sendo a a quantidade maior e d a mais pequena), então

$$a + d > b + c$$

Se $b=c$, então b é a média geométrica de a e d , e a proposição V.25 afirma que esta é limitada pela média aritmética destes dois números. Quanto à proposição VI.27, a desigualdade MG-MA pode ser vista como o resultado de uma discussão sobre áreas de paralelogramos, no contexto daquilo a que se chama habitualmente a «álgebra geométrica».

A figura 13 que acompanha a demonstração geométrica anterior encontra-se tal e qual na secção 11 do Livro III da Coleção Matemática ([13, pp. 50-51]) de Pappus da Alexandria (século IV). Pappus interessa-se então pelo problema da representação num semicírculo das médias aritmética, geométrica e harmónica.

Finalmente observemos que a identidade (19) é conhecida há muito tempo e corresponde à proposição II.5 dos *Elementos* de Euclides que, visto como resultado de álgebra geométrica, pode ser interpretado directamente como

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = uv + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$$

A identidade (19) é susceptível de uma prova visual tal como as desigualdades (20) e (21) ver figura 14.

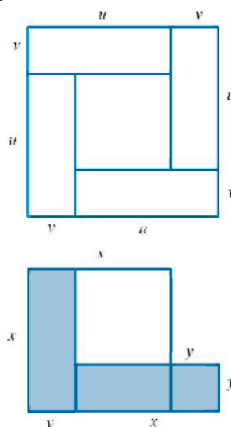


Figura 14

Apêndice 2: A convergência quadrática do método de Newton-Raphson

Revisão: Os desenvolvimentos de Taylor

Dada uma função f — tendo em conta os objectivos da discussão, consideramos uma função de uma variável —, uma ideia base em análise é a de utilizar funções simples, habitualmente polinómios, para aproximar f . Por exemplo, poderemos procurar um polinómio P coincidindo com f e algumas das suas derivadas num ponto dado — não se trata evidentemente da única forma de determinar um polinómio aproximante, mas este processo é de grande importância, tanto do ponto de vista histórico como prático.

Verifica-se sem grande dificuldade (consulte o seu curso de cálculo preferido) que se f é uma função possuindo derivada de ordem n num ponto a , existe um único polinómio P de grau

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad P''(a) = f''(a), \quad \dots, \quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

onde $P^{(j)}$ e $f^{(j)}$ designam a j -ésima derivada de P e de f , respectivamente. Escrevendo o polinómio na forma geral

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n$$

cada coeficiente a_j , satisfaz então a igualdade

$$a_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$$

Obtemos assim o polinómio de Taylor de grau n no ponto a para a função f :

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Consequentemente a função f pode ser representada sob a forma de um desenvolvimento de Taylor,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + E_{n,a}(x)$$

em que o último termo dá o erro que se introduz na aproximação de f pelo polinómio $P_{n,a}$ ⁶

Aplicação ao método de Newton-Raphson⁷

Utilizamos agora a noção de desenvolvimentos de Taylor para ajuizar da eficácia do método de Newton-Raphson na procura dos zeros de uma função.

Seja então f uma função possuindo, num certo intervalo, um zero \bar{x} (tem-se então por hipótese $f(\bar{x}) = 0$), e consideremos a função auxiliar

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

expressando o processo iterativo de cálculo das raízes da equação $f(x) = 0$ pelo método de Newton-Raphson. Efectuando o desenvolvimento de Taylor de grau 2 de g numa vizinhança do ponto x , obtém-se⁸

⁶Por exemplo, se suposermos que a derivada $f^{(n+1)}$ existe, a versão dita de *Lagrange* do erro de aproximação é da forma

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \text{ com } c \text{ entre } a \text{ e } x.$$

⁷Agradeço ao meu colega Jean-Jacques Gervais o ter-me chamado à atenção para esta demonstração da convergência quadrática do método de Newton-Raphson.

⁸Necessitamos que a função g seja duas vezes derivável no intervalo em causa, o que arrasta condições análogas para f . No caso que nos interessa, o cálculo da raiz quadrada \sqrt{k} a função f é da forma $f(x) = x^2 - k$, estas condições não levantam evidentemente quaisquer problemas.

$$g(x) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 + E_{2,x}(x)$$

Uma vez que, por hipótese, se tem $f(x) = 0$, então $g(x) = x$ (supomos neste caso que $f'(x) \neq 0$, o que equivale a eliminar as raízes duplas da equação $f(x) = 0$). Por outras palavras, x é um *ponto fixo* da função g . Além disso verifica-se sem grande dificuldade que $g'(\bar{x}) = 0$. Com efeito, um simples exercício de derivação conduz a

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

de forma que

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - 0}{[f'(x)]^2} = 0.$$

Resulta então que

$$g(x) = \bar{x} + \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 + E_{2,\bar{x}}(x),$$

isto é

$$g(x) - \bar{x} \approx \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2. (**)$$

Pondo $x = x_i$, a i -ésima iterada na aplicação do método de Newton-Raphson, tem-se que $g(x_i) = x_{i+1}$, de forma que a expressão (**) toma a forma

$$x_{i+1} - x_i \approx \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x_i - \bar{x})^2. (***)$$

Ora as expressões $x_{i+1} - x_i$ e $x_i - \bar{x}$ (que designamos respectivamente por e_{i+1} e e_i) representam os erros de aproximação nas $(i+1)$ -ésima e i -ésima etapas. Além disso, o factor $\frac{g''(\bar{x})}{2!}$ é constante. A expressão (**) é pois da forma

$$e_{i+1} \approx cte \times e_i^2$$

o que exprime que em cada iteração o erro da aproximação varia com uma potência 2. Diz-se então que o processo de Newton-Raphson é de *convergência quadrática*, ou de *convergência de ordem 2*. Isto significa grosso modo que o número de casas decimais de precisão duplica em cada etapa de iteração. Assim, se o erro e_i é da ordem de 10^4 , e_{i+1} é da ordem de 10^8 . Newton-Raphson é pois um método potencialmente eficaz!

Artigo Convidado

[Apêndice 2: A convergência quadrática do método de Newton-Raphson]

Referências

- [1] **Jean-Claude Chabert et al** (1994). *Histoire d'algorithmes: Du caillou à la puce*. Belin
- [2] **Karine Chemla e Guo Shuchun** (2004). *Les Neuf chapitres: Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaries*. Dunod
- [3] **René Descartes** (1637/1894). *La Géométrie*. Versão em francês moderno em: Auguste Comte, *La géométrie analytique*. Paris, Louis Bahl
- [4] **Euclides** (1926/1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. (tradução e comentários de Thomas Heath.) (2- edição) Tomos I, II, e III. Dover.
- [5] **Thomas Heath** (1921/1981). *A History of Greek Mathematics. Volume I: From Thales to Euclid. Volume II: From Aristarchus to Diophantus*. Dover
- [6] **Herão de Alexandria** (1903/1976). "Les Métriques". *Heronis Alexandrini Opera quæ sunt omnia, vol III* (texto grego e tradução alemã por Hermann Schöne. B.G. Teubner)
- [7] **George Gheverghese Joseph** (1992). *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. Penguin Books
- [8] **Shen Kangshen, John N. Crossley e Anthony W.-C. Lun** (1999). *The Nine Chapters of the Mathematical Art: Companion and Commentary*. Oxford University Press
- [9] **Victor J. Katz** (1998). *A History of Mathematics: An Introduction*. (2ª edição) Addison-Wesley
- [10] **Richard Mankiewicz** (2001). *L'histoire des mathématiques*. Seuil
- [11] **Otto Neugebauer** (1957/1969). *The Exact Sciences in Antiquity*. (2ª edição) Dover
- [12] **Otto Neugebauer e Abraham J. Sachs** (1945). *Mathematical Cuneiform Texts*. (American Oriental Series, vol. 29) American Oriental Society
- [13] **Pappus de Alexandria** (1933). *La Collection mathématique*. Tomo I. (Tradução e comentários por Paul Ver Eecke.) Desclée De Brouwer
- [14] **Teão de Alexandria** (1936). "Commentaires sur les livres 1 et 2 de l'Almageste" *A. Rome, dir., Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*. Tomo II. Biblioteca Apostolica Vaticana
- [15] **Teão de Esmirna** (1892). *Exposition de connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*. (Tradução e comentários por J. Dupuis) Hachette
- [16] **Ivor Thomas** (1939/2002). *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Volume I: From Thales to Euclid. Harvard University Press

O Pentagrama...

5 são os braços da estrela-do-mar e dos dedos da mão,
são 5 as estrelas errantes e há 5 sólidos de Platão.

Caro Leitor,

Desde o tempo do mito ao da racionalidade, para pitagóricos e eleatas, para astrólogos, astrónomos e matemáticos de todos os tempos, para simples mortais como nós, o pentagrama foi e é um símbolo mágico. Para uns está presente no culto de coisas ocultas. Para os matemáticos é mais um símbolo do poder do conhecimento, da imaginação e do raciocínio.

O pentagrama foi o logótipo da Escola Pitagórica. De facto, o símbolo é bem mais antigo: Pitágoras (c. 569 AC c. 475 AC) tê-lo-á trazido do seu périplo pela Babilónia, onde a estrela tinha já um valor místico. Muito se vai dizendo sobre a impossibilidade de comparação racional entre o lado e a diagonal dum quadrado, mas essa fatalidade pitagórica é uma característica marcante do próprio diagrama das cinco pontas. Afinal, a incomensurabilidade que tanto atormentou a Escola esteve sempre pendurada na sua porta de entrada.

Sabia que Kepler descobriu um pentagrama no céu? Vamos explicar onde e como. A figura 1 representa as órbitas da Terra e de Vénus, duas circunferências centradas no centro do Sol. Nesta figura plana, os dois planetas movem-se em redor do Sol, no sentido directo, com velocidade angular uniforme. A Terra descreve a circunferência exterior e o seu movimento angular é mais lento que o de Vénus; dito em números, o período orbital da Terra é 365.256 dias, e o de Vénus 224.701 dias.

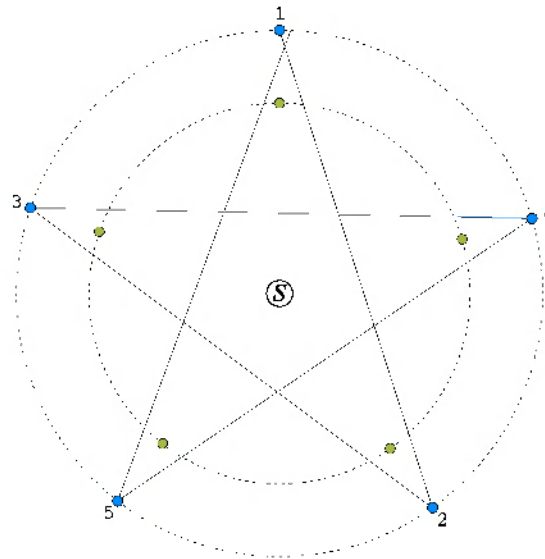


Figura 1

Problema 1

Imagine que, em certo momento inicial, representado por "1" na figura 1, Terra e Vénus estão em conjunção (isto é, Vénus está no segmento que une os centros do Sol e da Terra). Quanto tempo decorrerá até à próxima conjunção?

Só lhe damos a resposta no próximo número, pois queremos que chegue a ela e nos informe disso. Mas damos uma pista geométrica: a conjunção a seguir a "1" ocorre na posição "2", a conjunção seguinte na posição "3", e assim sucessivamente. E lá está o pentagrama: 1-2-3-4-5-6...

Canto Delfico

[O Pentagrama...]

Note o pequeno desvio da posição "6" relativamente à posição "1". Elas deviam coincidir se os deuses tivessem tido mais cuidado a fazer o mundo.

Problema 2

Quando a Terra chega à posição de conjunção "6", a que distância angular se está da posição de conjunção "1"?

Kepler sabia bem deste atraso espacial (e avanço temporal) da sexta conjunção Terra-Vénus, que lhe serviu para determinar, com grande rigor, a periodicidade dos trânsitos de Vénus — aqueles momentos mágicos, como o de 8 de Junho de 2004, em que Vénus se vê como bolinha negra atravessando lentamente o disco solar.

São frequentes as visitas de Kepler ao pentágono e ao pentagrama, como ilustra a figura 2 extraída da sua obra *Harmonice Mundī*, de 1619, com três dos seus mosaicos estranhos a que chamou "monstros", talvez pela aparente irregularidade e a ocorrência de decágonos siameses. É interessante notar como este trabalho de Kepler, com quase quatro séculos de idade, inspirou de forma decisiva a teoria dos mosaicos aperiódicos que Roger Penrose iniciou nos anos de 1970.

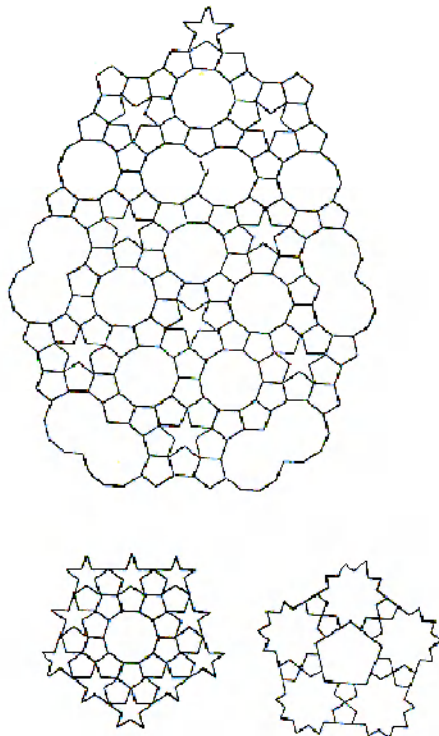


Figura 2

A figura 3 mostra uma sequência de pentágonos e pentagramas regulares.

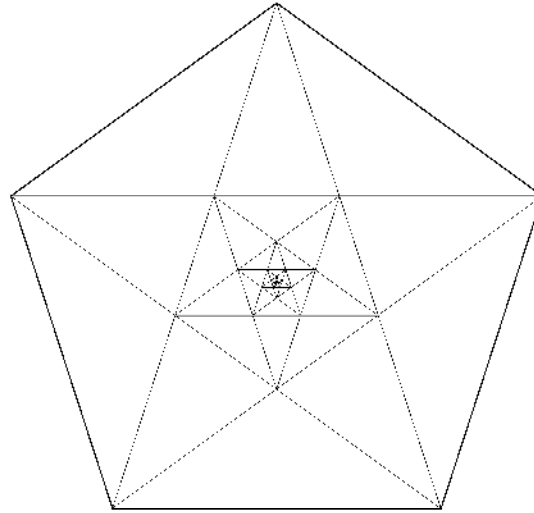


Figura 3

Problema 3

(a) Mostre que cada dois segmentos de recta representados na figura fazem entre si ângulos múltiplos de $\pi/5$.

(b) Mostre que é isósceles cada um dos triângulos desenhados a cheio na figura.

(c) Estão traçados (a cheio, e com extremidades bem identificadas) muitos segmentos de recta. Sejam c_1, c_2, c_3, \dots os comprimentos distintos de todos esses segmentos. Supondo os comprimentos ordenados por ordem decrescente, $c_1 > c_2 > c_3 > \dots$, determine, para cada i a razão c_i/c_{i+1} .

Sugerimos que utilize as alíneas (a) e (b) para resolver (c). Pode também utilizar as seguintes dicas na resolução do problema 3, ou, reciprocamente, usar o que digeriu na sua resolução para compreender o que vamos dizer agora. Sejam d_0 e d_1 a diagonal e o lado do pentágono regular maior da figura 3; sejam d_2 e d_3 a diagonal e o lado do segundo maior pentágono regular da figura 3, sejam d_4 e d_5 a diagonal e o lado do terceiro maior pentágono regular da figura 3; etc.. Não é difícil ver que

$$\begin{aligned} d_0 &= d_1 + d_2 \\ d_1 &= d_2 + d_3 \\ d_2 &= d_3 + d_4 \\ d_3 &= d_4 + d_5, \text{ etc., etc..} \end{aligned}$$

Aquilo a que chamamos *divisão inteira de números* pode ler-se geometricamente, à moda dos gregos da Antiguidade: toma-se um segmento S de comprimento d_0 e outro, T , de menor comprimento d_1 ; extrai-se T de S tantas vezes quantas as necessárias para obter, como *resto*, um segmento de comprimento menor que d_1 ; essas "tantas vezes" são o *quociente*.

Como $d_2 < d_1$, a primeira equação representa a divisão inteira de d_0 por d_1 com resto d_2 e quociente 1. E cada uma das restantes equações representa uma divisão. As sucessivas divisões determinam um algoritmo, dito *de Euclides*, mas conhecido muito antes de Euclides. Nesse tempo sabia-se, também, que o facto de um dos restos d_i ser nulo equivale à comensurabilidade dos segmentos de comprimentos d_0 e d_1 . Mas nenhum dos nossos segmentos tem comprimento zero, *ergo*...

Saberia disto Hipaso de Metaponto, o pitagórico da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal dum quadrado?

Uma forma interessante de construir um pentágono é tomar uma tira comprida de papel, com bordos paralelos entre si, e fazer com ela um nó de modo a chegar a uma dobragem com o aspecto da figura 4.

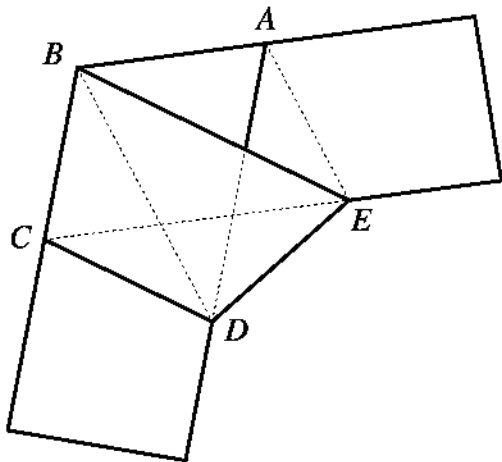


Figura 4

A coisa não é de todo fácil, pois não pode dobrar-se a tira sem mais nem menos, logo no início. Dê um nó bastante lasso e vá puxando as pontas para o apertar; vá calcando o papel assim enrolado sem se comprometer com dobras muito vincadas; puxe e calque mais um pouco, e vá iterando a manipulação até uma dobragem definitiva.

O processo ficará matematicamente completo quando em cada um dos vértices A, C, D, E, convergirem 3 segmentos dos bordos da tira, e no vértice B convergirem 4.

Problema 4

Responda ao seguinte com um argumento rigoroso: será o pentágono ABCDE sempre regular, ou haverá maneira de conduzir o processo manipulativo de modo a obter um pentágono não regular?

De passagem, repare que, na figura 4, o pentágono não é regular!

Vendo o nó à transparência, os bordos da tira desenham um pentagrama e o seu pentágono envolvente, com todos os 10 lados, *excepto um*... nem tudo no mundo é perfeito!

Envie as suas soluções para

Projecto Delfos
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
3001-454 Coimbra.

A Meia-Vida das Palavras

No princípio era o verbo. Um verbo irregular. Mas o tempo passou e ele tornou-se regular. Como pode a matemática ajudar a entender a língua nossa de cada dia? Um projecto inovador mostra em detalhe como a linguagem evolui – do irregular ao regular.

Verbos irregulares são um inferno. Tanto para as crianças quanto para os estudantes de uma língua estrangeira. Mesmo adultos fluentes e bem educados por vezes tropeçam em conjugações exóticas. Se o próprio nome faz-nos supor que tais estruturas são mais excepção do que regra, porque, então, os verbos mais comuns (ser, estar, ter, haver) são irregulares?

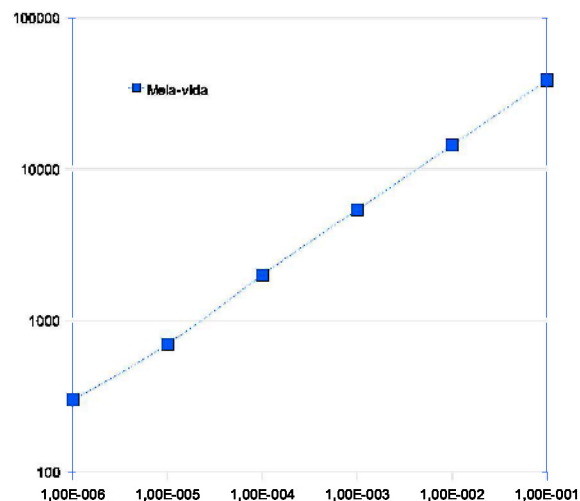
Esta questão tem intrigado os linguistas há muito tempo. Recentemente, um grupo de matemáticos e biólogos de Harvard resolveu tirar a questão a limpo com técnicas muito distantes das que são normalmente usadas no estudo da língua [1]. Tal equipa, liderada por Martin Nowak, do Programa de Dinâmica Evolutiva, tem aplicado modelos matemáticos simples para tudo aquilo que evolua: genes, pessoas, países e, porque não?, línguas.

Assim, classificaram tantos verbos irregulares em inglês quanto foram capazes de encontrar na literatura clássica e recente: desde *Beowulf* (século VII a IX) até a literatura contemporânea, passando pelos *Contos da Cantuária* (*Canterbury tales*), de 1200. No inglês arcaico do primeiro livro, havia 177 verbos irregulares. Já no medieval, apenas 145. Hoje resistem 98. Portanto, não há dúvidas, as línguas evoluem – gostem ou não os amantes da excepção!

Como se dá esta evolução? O que faz um verbo resistir a sua regularização e outros não? Em inglês, é bom lembrar, a regra básica é que a forma passada de um verbo faz-se pela adição de “-ed” em seu final. Raríssimas vezes um verbo regular torna-se irregular (como “sneak” - esgueirar-se, em uma tradução livre –

cujo passado modificou-se de “sneaked” para “snuck”). O caminho comum é o inverso, e é disto que trata o artigo de Liberman.

Para quantificar esta mudança, os autores tomaram emprestado um conceito da física nuclear: a “meia-vida”. A “meia-vida” de uma substância radioactiva é o tempo necessário para que a sua actividade diminua pela metade. Assim, os verbos foram divididos em seis grupos de acordo com o sua frequência de uso. No primeiro estavam os dois únicos verbos cujo uso é superior a um em dez (10^1): “be” e “have”. Em seguida vinham os que têm uso



Relação entre a meia-vida dos verbos e a sua frequência de uso, em escala logarítmica. Os quatro primeiros números são calculados; os dois últimos estimados.

entre 10^1 e 10^2 . Este grupo inclui "come", "do", "find", "get", "give", "go", "know", "say", "see", "take" e "think". Os dez verbos mais comuns em inglês são todos irregulares e estão num destes dois grupos. A divisão continua, em mais quatro grupos marcados por potências sucessivas de 10. O grupo a que cada verbo pertence é definido pela sua frequência actual de uso, pois não há disponibilidade confiável de dados equivalentes para épocas passadas.

Os dois primeiros grupos (os de uso mais frequentes) não tiveram nenhuma regularização desde a época de *Beowulf*. No terceiro grupo, 10% dos verbos deixaram de ser irregulares. No quarto e no quinto grupos 43% e 72% dos verbos foram regularizados pelo uso, respectivamente. Finalmente, na categoria dos infrequentes, 91% dos verbos irregulares em inglês antigo já não o são.

O tamanho de cada grupo diminui no tempo, tornando possível associar uma meia-vida para os verbos de cada categoria. Para os verbos cujo uso está entre 10^6 e 10^5 , a meia-vida foi estimada em 300 anos. Desta forma, "wreak" (vingar) mudou da forma passada "wrekan" para a regular "wreaked". Uma categoria acima, o tempo característico para a regularização obtido foi de 700 anos, tempo suficiente para o passado de "mourn" (lamentar) mudar de "mournen" para "mourned" mas insuficiente para "drove" (passado de dirigir) tornar-se "drived". Subimos uma categoria e a meia-vida sobe para 2000 anos. Mais um pouco, e temos 5400 anos, fazendo com que verbos regularizados como "help" se tornem, neste grupo, mais uma excepção do que uma regra. Finalmente, nas duas categorias de topo, encontramos tempos característicos de 14.400 e 38.000 anos, fazendo com que as mudanças nestes dois grupos sejam tão raras que provavelmente nunca ocorrerão. Podemos até dizer que antes de "be" e "have" virarem regulares a própria língua inglesa já terá deixado de existir.


Se não houve nenhuma regularização nestas duas categorias mais altas, como é possível saber a vida média de seus componentes? Usa-se um processo chamado "extrapolação". A partir das quatro categorias onde esta conta é possível chega-se a uma lei surpreendente pela sua simplicidade: a meia-vida da forma irregular de um verbo é proporcional ao inverso da raiz quadrada da sua frequência de uso. Isto permite-nos obter, por extrapolação dos resultados, a frequência de ocorrência de

regularizações em grupos de palavras onde ainda não aconteceu nenhuma regularização. E, sem surpresa, o tempo característico é muito maior do que o tempo de observação desta investigação.

A idéia de que as palavras menos usadas são mais rapidamente regularizadas é antiga. Aquilo que mais usamos está mais forte na nossa memória; além disto, alterar uma forma que usamos muito pode prejudicar a comunicação – portanto somos mais conservadores exactamente nestas palavras.

Outro estudo, publicado no mesmo número da *Nature* e que compara a velocidade de alteração das palavras em Inglês, Espanhol, Grego e Russo reforça esta ideia: o que usamos menos muda mais rápido [2]. É por este motivo que quando se compara duas linguas, as primeiras palavras a ser estudadas são *um, dois, noite, morrer* etc., palavras cuja má comunicação pode ser fatal e que, por serem das que menos se alteram, melhor permitem estabelecer relações entre as varias linguas.

E no português? Temos muito mais riqueza de conjugação, cada pessoa exigindo uma terminação verbal específica. Muitos verbos (aceitar, eleger, expressar, imprimir, fritar, matar, prender, suspender etc.) têm dois participios – um irregular, geralmente derivado directamente do latim, e um regular, frequentemente a forma mais recente, mostrando uma tendência próxima àquela descrita acima.

Uma curiosa consequência deste resultado é poder fazer uma previsão para o futuro. De acordo com Lieberman e colegas, o próximo verbo a ser regularizado é "wed" (casar). Assim, estamos a assistir o fim da época dos "newly-wed" (recém-casados) e entrando na época dos "newly-wedded". Uma rápida pesquisa na internet mostra que a nova forma, regular, já está muito corrente. 

Referências

[1] - Lieberman E, JB Michel, J Jackson, T Tang, MA Nowak (2007). "Quantifying the evolutionary dynamics of language" *Nature* 449:713-716

[2] – Pagel M, Atkinson AD, Meade A (2007). "Frequency of word-use predicts rates of lexical evolution throughout Indo-European history" *Nature* 449:717-720

O Teorema Mais Famoso

Toda a gente conhece o teorema dito «de Pitágoras». Mas sabe o leitor porque é verdade para TODOS os triângulos rectângulos? Como podemos ter a certeza ABSOLUTA? E como foi descoberto? Foi mesmo Pitágoras quem o descobriu? Quem primeiro o demonstrou?

O «teorema de Pitágoras» é, sem qualquer dúvida, o resultado matemático mais conhecido. A simplicidade do enunciado, conjugada com o facto de ser uma observação bastante subtil sobre uma curiosa relação entre figuras geométricas simples – nomeadamente três quadrados construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo –, fazem com que este resultado apele a um certo sentido estético abstracto que os seres humanos possuem, mesmo aqueles que não gostam de o admitir.

Há muitas e variadas maneiras de demonstrar o teorema de Pitágoras. Em 1968 Elisha S. Loomis publicou um livro, há muito esgotado, intitulado *The Pythagorean Proposition*, contendo nada mais, nada menos do que 367 demonstrações! Algumas são pequenas variações de outras, sendo difícil dizer exactamente quantas são essencialmente distintas. Para ter uma ideia do tipo de argumentos, sugere-se a consulta da página mantida por Alexander Bogomolny, e que contém 79 demonstrações¹.

Porquê tantas demonstrações? Afinal, uma demonstração não é só um argumento que mostra a validade de um resultado matemático, de modo a que não restem quaisquer dúvidas? Assim sendo, não basta uma? De facto, não é bem assim... Em Matemática não se quer apenas decidir a validade ou falsidade de certas proposições, mas também *perceber a fundo* os resultados que se vão descobrindo e as inter-relações entre os diferentes «entes» matemáticos. Assim, argumentos distintos são muitas vezes úteis

para dar diferentes perspectivas de um mesmo resultado, servir para o generalizar de diversos modos e para mostrar diferentes conexões entre alguns assuntos.

Uma pequena curiosidade: a quinta demonstração na lista de Bogomolny é atribuída a James Abram Garfield (1831–1881), o vigésimo presidente dos Estados Unidos da América².

A página *Matemática sem Palavras*³ do site «ATRATOR: Matemática Interactiva», mantido pela Associação Atractor, contém três demonstrações com *applets* interactivos, a primeira das quais é, essencialmente, a minha favorita – uma das mais simples e elegantes, e que pode ser resumida do seguinte modo: dado um triângulo rectângulo, coloquem-se quatro cópias dele numa caixa quadrada cujo lado é igual à soma dos comprimentos dos dois catetos, do modo indicado na imagem esquerda da figura 1. Usando o facto da soma dos ângulos internos de um triângulo rectângulo ser igual a dois ângulos rectos, é fácil concluir que a área livre na caixa tem a forma de um quadrado cujo lado é a hipotenusa do triângulo rectângulo dado.

Rearranjando, na mesma caixa, os quatro triângulos do modo sugerido na imagem direita da figura 1, para o que basta transladar dois dos triângulos, do modo indicado na imagem do meio, é fácil ver que a área livre é agora igual à soma de dois quadrados cujos lados são precisamente os catetos. Como se trata da mesma caixa e dos mesmos quatro

¹<http://www.cuttheknot.org/pythagoras/index.shtml>

²O segundo presidente americano a ser assassinado, pelo que ocupou a Casa Branca por apenas seis meses.

³http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/entrada_pitagoras.htm



Uma demonstração muito simples do Teorema de Pitágoras.

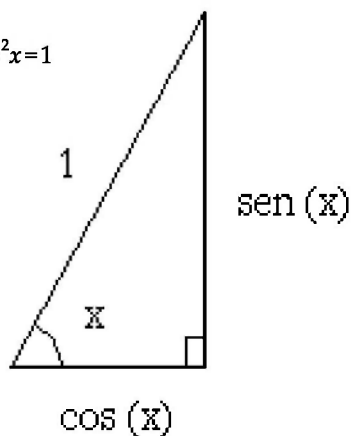
triângulos rectângulos, as áreas livres nas duas situações têm de ser iguais e portanto: *num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos!*

Curiosamente, uma ligeira variante deste argumento fornece uma demonstração⁴ da fórmula de adição do seno: ver «Seno da soma» na página do Atractor acima mencionada.

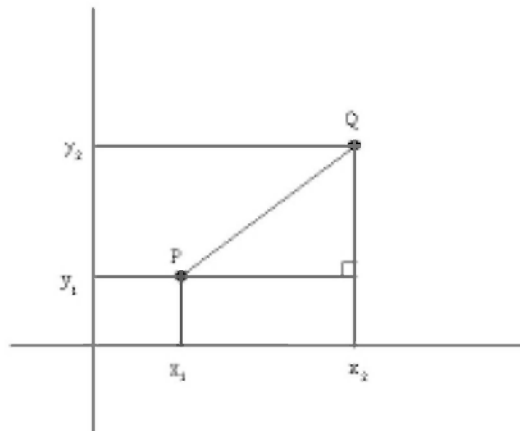
Já vi muitos alunos do ensino secundário realmente perplexos por lhes ter observado que as fórmulas seguintes são consequências directas do teorema de Pitágoras:

1. a chamada *fórmula fundamental da trigonometria*:

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

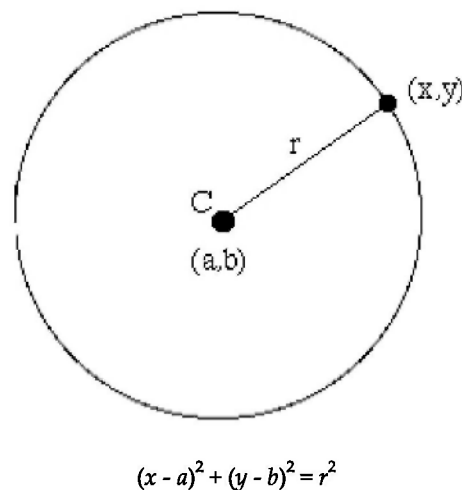


2. a fórmula para a distância euclidiana entre dois pontos, $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, do plano cartesiano, nomeadamente:



$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3. a equação cartesiana de um círculo⁵ de raio r e centro $C = (a, b)$:



Quando se ensina estas matérias não se devia nunca deixar de notar e de realçar estas ligações, que ajudam o aluno a melhor compreender os assuntos leccionados e a integrar os seus conhecimentos numa perspectiva mais completa.

O site «História da Matemática – história dos problemas», mantido por Maria João Lagarto, contém uma página intitulada *Problemas Pitagóricos*⁶ onde se dão vários exemplos de problemas curiosos, retirados

⁴Que, tanto quanto sei, se deve a Volker Priebe e Edgar A. Ramos, que a publicaram como uma «demonstração sem palavras» na revista *Mathematics Magazine* 73 (2000), p. 392.

⁵Esta é, de facto, uma consequência imediata da fórmula anterior.

⁶<http://www.malhatlantica.pt/mathis/Problemas/Pitagoras/Pitagoricos.htm>

Apanhados na Rede

[O Teorema Mais Famoso]

de textos antigos e de várias proveniências, que envolvem o uso do teorema de Pitágoras.

A descoberta do teorema de Pitágoras perde-se nos primórdios do período histórico da nossa espécie, havendo algumas evidências do seu conhecimento nas primeiras grandes civilizações, mas as dúvidas são muitas e as certezas muito poucas. O papel que Pitágoras terá tido neste assunto é muito mais incerto do que o leitor possa imaginar. O nosso conhecimento dessa figura quase mítica é relativamente escasso e, como se isso não bastasse, impregnado de lendas, contradições e documentos forjados. De facto, e

contrariamente ao que se possa pensar, não há nenhuma evidência histórica fiável de que Pitágoras se tenha sequer dedicado à Matemática! Ver:

<http://plato.stanford.edu/entries/pythagoras/>

Deixamos para a próxima rubrica algumas considerações sobre este assunto, assim como especulações sobre as possíveis origens deste resultado basilar de muita matemática, com incontáveis e importantíssimas aplicações. [M](#)





por Pedro Tadeu [Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão Instituto Politécnico de Bragança]
Cecília Costa [Departamento de Matemática da Universidade de Trás dos Montes e Alto Douro]

Polígonos Circulares Descendentes e Ascendentes

Saiba como a exploração com o MatLab de relações entre conceitos de geometria plana elementar e conceitos de álgebra linear nos levou à descoberta de polígonos que designamos “pais” e “filhos” e, a partir destes, de outras belas figuras, como os tapetes circulantes e as espirais poligonais.

Introdução

Cada vez mais o caminho do ensino conduz a uma utilização sistemática das novas tecnologias, quer ao nível dos últimos anos do ensino secundário quer ao nível dos primeiros anos do ensino superior.

O uso do computador e de poderosas ferramentas cada vez mais ao nosso dispor — concretamente programas como MatLab ou o Mathematica, as calculadoras gráficas, o surgimento das chamadas actividades, actividades interactivas apoiadas nas calculadoras — impõem que o professor, elo essencial, quer numa fase preparatória de elementarização do saber quer no processo de ensino/aprendizagem esteja atento às possibilidades que se abrem e faça uso delas.

O uso de tecnologias, em particular a ferramenta que utilizamos — MatLab —, pode revelar-se de grande importância nos primeiros anos do ensino superior. Este instrumento pedagógico possibilita a execução de actividades de investigação/exploração as quais contribuem de modo significativo para o desenvolvimento de capacidades essenciais, designadamente a auto-confiança, a autonomia, o raciocínio e o pensamento científico. Fomentando a investigação, desenvolve-se no aluno o espírito crítico e contribui-se para criar um outro gosto pela Matemática. É importante que o aluno aprenda a sentir que esta ciência não é algo de imutável e cujo desenvolvimento estagnou há muitos anos, mas, muito pelo contrário, entender a Matemática como algo constantemente a ser desenvolvido, inclusive por si próprio, aluno, no decorrer das suas aulas e das suas tarefas de investigação. Independentemente da importância efectiva da sua contribuição para o enriquecimento do conhecimento matemático colectivo, esta é essencial ao desenvolvimento individual do futuro matemático profissional.

Este trabalho constitui um exemplo de como com ferramentas matemáticas acessíveis a alunos dos dois primeiros anos do ensino superior e com o apoio do programa MatLab se podem realizar actividades de investigação/exploração matemática.

Utilizando a noção de polígono regular, introduziremos os conceitos originais de polígono circulante descendente e polígono circulante ascendente.

Antes de apresentarmos as definições e desenvolvermos os processos que levam à obtenção dos polígonos circulantes, vamos referir o que se entende por matriz circulante e pseudo-inversa ou inversa generalizada de uma matriz.

À matriz quadrada $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix}$, onde $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, que denotamos por $\text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_n)$,

chamamos matriz circulante ([3]).

Neste texto é relevante a matriz circulante $\text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

Em termos geométricos, o produto da matriz $C = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right)$ pela matriz cujas linhas são as coordenadas dos vértices de um polígono é uma matriz cujas linhas são as coordenadas dos pontos médios dos lados desse polígono. A união destes sucessivos pontos médios dá origem a um outro polígono, "filho", em relação ao original, "pai".

A única matriz que verifica as seguintes quatro equações de Penrose, $AXA = A; XAX = X; (XA)^T = XA; (AX)^T = AX$, é designada por pseudo-inversa ([2]) ou inversa generalizada da matriz A e é denotada por A^\dagger . Esta noção estende o conceito de inversa de uma matriz quadrada não singular a matrizes quadradas singulares e a matrizes retangulares. No nosso caso, as matrizes circulantes envolvidas são quadradas e singulares quando são de ordem par. Nesta situação, como as matrizes não são de característica máxima, não temos fórmulas para a inversa generalizada ([2]). Aqui procedemos ao cálculo de uma aproximação da inversa generalizada usando a função PINV do programa MatLab. A função PINV, $X = \text{PINV}(A)$, calcula uma matriz X da mesma dimensão de A , e o seu cálculo é baseado no processo de decomposição de uma matriz em valores singulares ([1]).

2. Polígonos Circulantes Descendentes e Ascendentes

Apresentamos os conceitos de polígonos circulantes descendentes e ascendentes de primeira ordem e de qualquer ordem. As matrizes circulantes e as suas inversas generalizadas desempenham papel fundamental. Para polígonos descendentes, temos:

Definição 2.1- Dado o polígono $G_0 = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$ de n vértices $V_i, i = 1, 2, \dots, n, n > 3$ e um inteiro positivo k , chamamos

polígono circulante descendente de ordem k ao polígono $G_k = C^k G_0$, onde C é a matriz circulante $C = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right)$ de ordem n .

Exemplo 2.2- Dado o triângulo $G_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$, de vértices $(1,0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, obtêm-se

os triângulos circulantes descendentes de 1ª ordem e de 5ª ordem seguintes

$$G_1 = CG_0 = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.25 & 0.433 \\ -0.5 & 0 \\ 0.25 & -0.433 \end{bmatrix},$$

$$G_5 = C^5 G_0 = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0156 & -0.0271 \\ 0.0156 & 0.0271 \\ -0.0313 & 0 \end{bmatrix},$$

e que são ilustrados na Figura 1

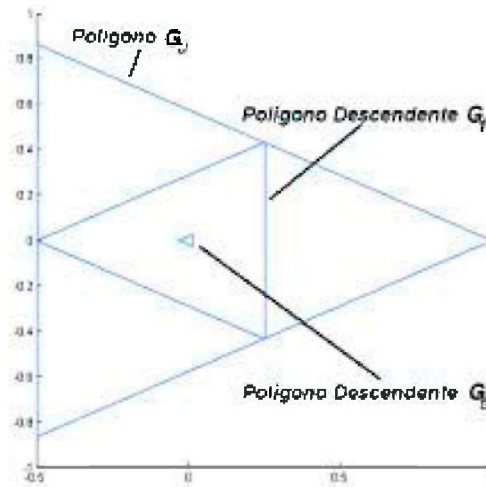


Figura 1

De uma maneira similar ao estabelecido para polígonos circulares descendentes, temos agora para polígonos circulares ascendentes:

Definição 2.3- Dado o polígono $G_k = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$ de n vértices $V_i, i = 1, 2, \dots, n, n > 3$ e um inteiro positivo k ,

chamamos **polígono circular ascendente** de **ordem k** ao polígono $G_k = (C^\dagger)^k G_0$, em que C^\dagger é a inversa generalizada da matriz circulante C de ordem n .

Exemplo 2.4- Dado o quadrado $G_0 = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$, de vértices $(-0.25, -0.25), (0.25, -0.25), (0.25, 0.25),$

$(-0.25, 0.25)$, os quadrados circulares ascendentes de 1ª ordem e de 3ª ordem, G_{-1} e G_{-3} são definidos por:

$$G_1 = (C^\dagger)G_0 = \left(\text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)\right)^\dagger \begin{bmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$G_{-3} = (C^\dagger)^3 G_0 = \left(\left(\text{circ} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right) \right)^\dagger \right)^3 \begin{bmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

esão representados na Figura 2.

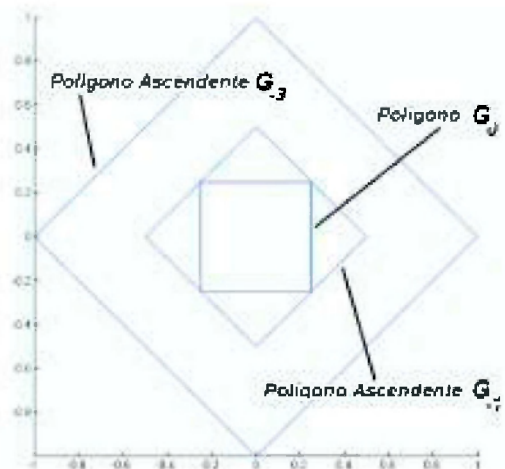


Figura 2

3. Aplicações à Geometria

Após termos estabelecido as definições de polígonos circulares, vamos agora utilizá-las na construção de outras figuras: o fractal de Sierpinski, tapetes circulares e espiral poligonal.

3.1 - Fractal de Sierpinski

É bem conhecido o **fractal de Sierpinski**, a repetição sucessiva de triângulos encaixados. Usando as definições descritas é possível efectuarmos a construção desse fractal.

Tomemos o triângulo G_0 de vértices $A = (0,1)$, $B = (1,0)$ e $C = (1,1)$. Construamos o triângulo circular descendente de 1ª ordem G_1 de vértices $D = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $E = (\frac{1}{2}, 1)$ e $F = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Na Figura 3 apresentamos os triângulos anteriores.

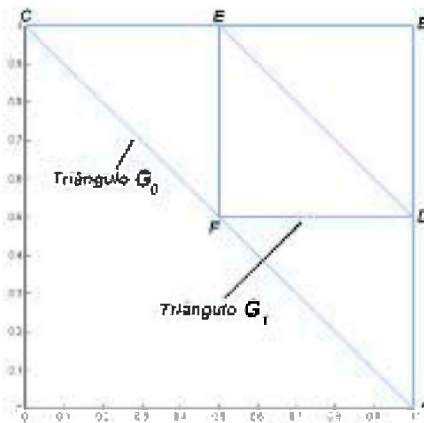


Figura 3

Repetindo o processo, mas agora em relação aos triângulos $\Delta[ADF]$, $\Delta[DBE]$ e $\Delta[FEC]$, obtemos os seus descendentes de 1ª ordem que são apresentados na Figura 4.

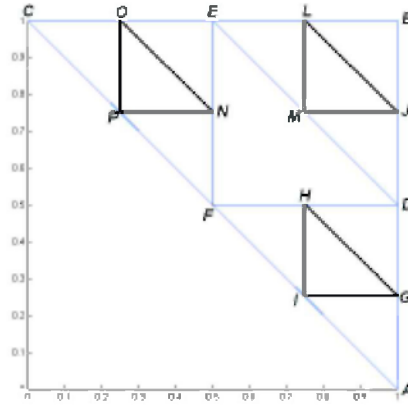


Figura 4

Procedendo como anteriormente, e à custa de triângulos descendentes de 1ª ordem, vamo-nos aproximando do conhecido fractal de Sierpinski.

3.2- Tapetes Circulantes

Nas próximas construções, que intitulamos **tapetes circulantes**, iremos utilizar polígonos circulantes descendentes de várias ordens, com os quais construiremos os tapetes circulantes.

A primeira construção será feita utilizando **triângulos** e os seus descendentes circulantes.

Seja um triângulo $G_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.866 \\ -0.5 & -0.866 \end{bmatrix}$ (de vértices A, B, C respectivamente). Calculemos o seu descendente

circulante de 1ª ordem, G_1 (de vértices D, E, F respectivamente)

$$G_1 = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.866 \\ -0.5 & 0.866 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.25 & 0.433 \\ -0.5 & 0 \\ 0.25 & -0.433 \end{bmatrix},$$

que é representado na Figura 5.

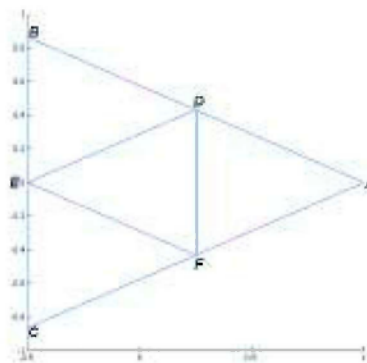


Figura 5

De seguida tomemos os triângulos circulares descendentes de 1ª ordem dos triângulos $\Delta[ADF]$, $\Delta[DBE]$ e $\Delta[FEC]$ que se formaram (respectivamente de vértices $N, O, P; G, H, I$ e J, L, M)

$$G_{1[ADF]} = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.25 & 0.433 \\ 0.25 & -0.433 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.625 & 0.2165 \\ 0.25 & 0 \\ 0.625 & -0.2165 \end{bmatrix},$$

$$G_{1[DBE]} = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} 0.25 & 0.433 \\ -0.5 & 0.866 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.125 & 0.6495 \\ -0.5 & 0.433 \\ -0.125 & 0.2165 \end{bmatrix},$$

$$G_{1[FEC]} = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} 0.25 & -0.433 \\ -0.5 & 0 \\ -0.5 & -0.866 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.125 & -0.2165 \\ -0.5 & -0.433 \\ -0.125 & -0.6495 \end{bmatrix},$$

que são representados na Figura 6.

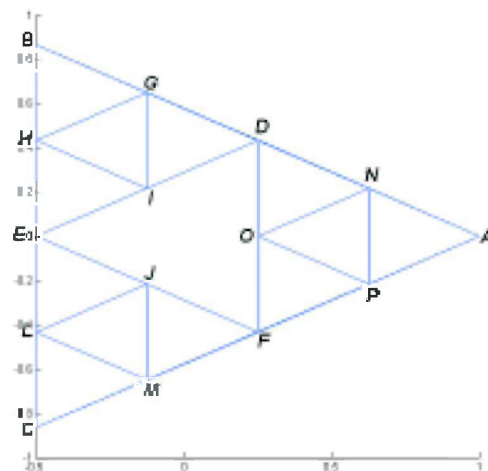


Figura 6

Calculemos agora o descendente circular de 2ª ordem do triângulo $\Delta[ABC]$, G_2 , e os triângulos circulares descendentes de 1ª ordem que restam

$$G_2 = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.866 \\ -0.5 & -0.866 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.125 & 0.2165 \\ -0.125 & 0.2165 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix},$$

O processo continua sempre do mesmo modo. Colorindo somente os triângulos que não são descendentes circulares de nenhum outro, obtemos o **tapete circular triangular** que é representado na Figura 7.

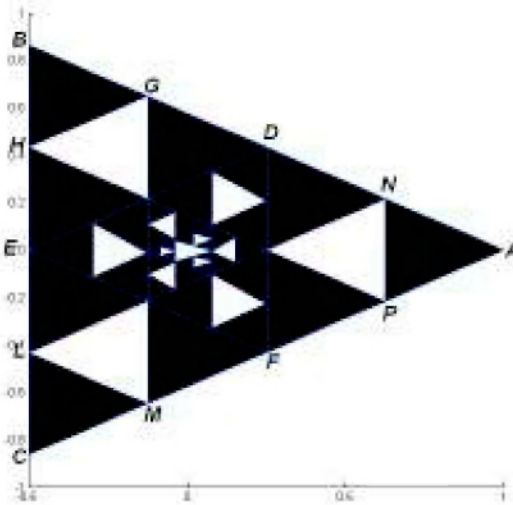


Figura 7

A próxima construção foi efectuada recorrendo a **triângulos** e **quadrados** e seguindo um processo em tudo idêntico ao anterior.

Tomemos o quadrado $G_0 = [ABCD]$ e calculemos o seu descendente circularmente de 1ª ordem $G_1 = [EFGH]$.

Formam-se, após o cálculo do quadrado circularmente descendente de 1ª ordem, quatro triângulos: $\Delta[EBF]$, $\Delta[FCG]$, $\Delta[GDH]$ e $\Delta[HAE]$. Calculamos seguidamente os descendentes circularmente de 1ª ordem destes quatro triângulos, usando a matriz circularmente $\text{circ} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ e que são representados na Figura 8.

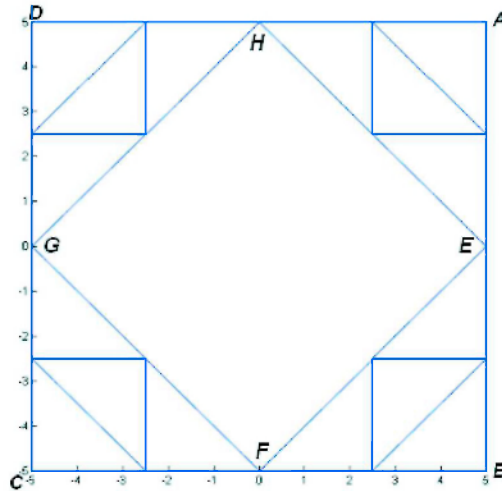


Figura 8

Calculado o quadrado descendente circularmente de 2ª ordem do quadrado inicial, passamos ao cálculo dos triângulos circularmente descendentes de 1ª ordem que entretanto se formaram, e assim sucessivamente. De cada vez, vamos obtendo mais triângulos e quadrados circularmente descendentes dentro da figura. Colorindo de preto os triângulos que não são circularmente descendentes de nenhum outro, obtemos o **tapete circularmente quadrangular** que é apresentado na Figura 9.

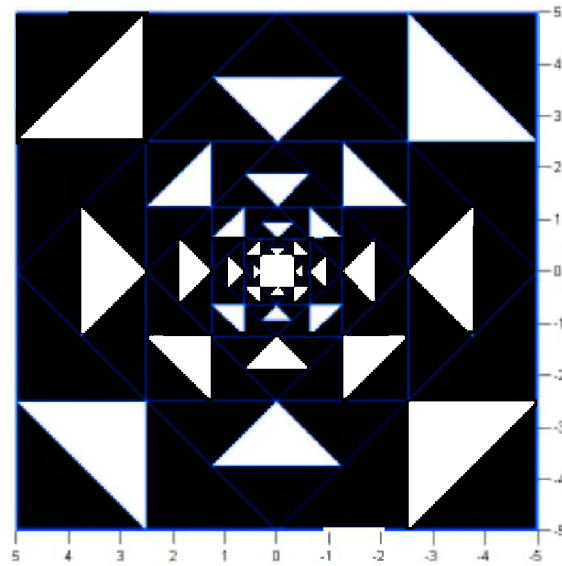


Figura 9

Se, no início da construção, em vez de um quadrado tomássemos um **pentágono**, iríamos obter, por um processo semelhante, um **tapete circulante pentagonal**. Na Figura 10 apresentamos um exemplo do tapete anterior.

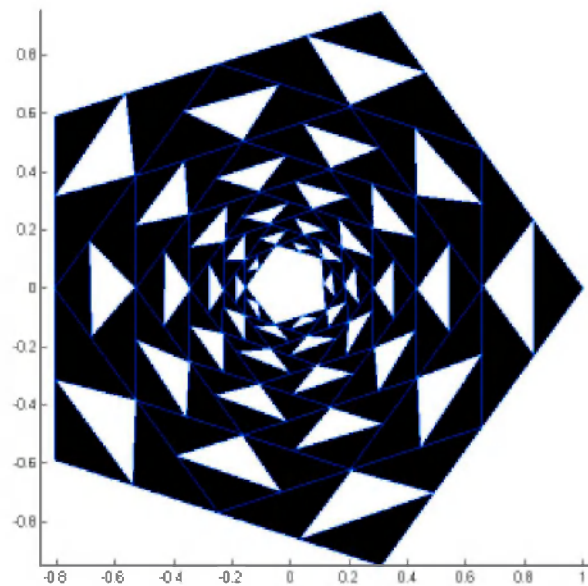


Figura 10

Se o polígono inicial for um **hexágono**, construímos o **tapete circulante hexagonal**. Na Figura 11 ilustramos um tapete circulante hexagonal.

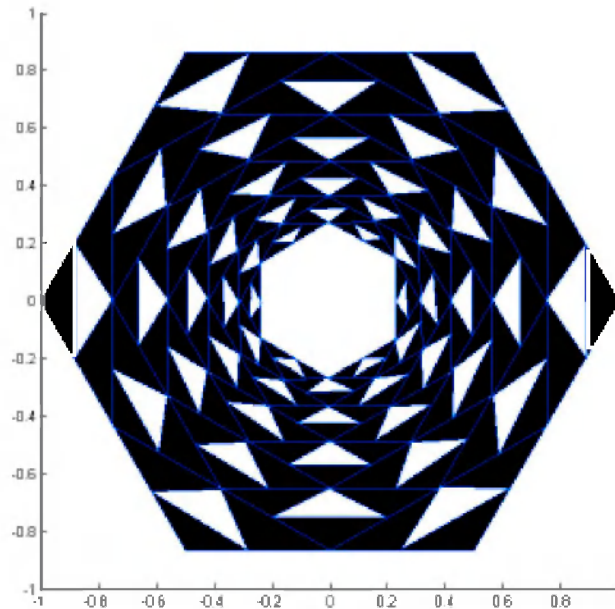


Figura 11

Os tapetes circulares apresentados nas figuras 7, 9, 10 e 11 constituem alguns exemplos dos inúmeros tapetes que se podem obter seguindo o processo de construção que utilizamos.

3.3 - Espiral Poligonal

Utilizando as figuras construídas na secção anterior, encontramos um outro tipo de polígono – a **espiral poligonal**. Basta para tal colorir os triângulos adequados à composição da espiral poligonal. O triângulo inicial pertence a cada um dos polígonos circulares originais com que iniciamos a construção do tapete e a partir daí passamos para os seus descendentes sucessivos, como é ilustrado na Figura 12.

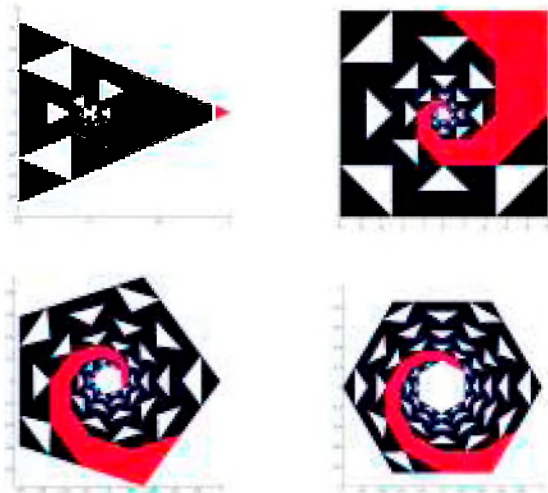


Figura 12

À medida que o número de vértices do polígono inicial vai aumentando, a espiral poligonal aproxima-se cada vez mais da curva espiral que conhecemos.

4. Notas Finais

A necessidade, cada vez mais premente, de se investir no desenvolvimento científico do país e o facto de “(...) diversos estudos em educação terem mostrado que investigar constitui uma poderosa forma de construir conhecimento (...)” ([5]) são factores de incentivo ao recurso, por parte do professor, a actividades de investigação/exploração na sala de aula, em todos os níveis de escolaridade.

A implementação deste tipo de actividades na sala de aula já começa a ser uma realidade, especialmente ao nível do ensino não superior, em parte porque os programas oficiais assim o exigem.

O trabalho que apresentámos pretende ser um contributo no sentido de motivar os professores dos primeiros anos do ensino superior (e em qualquer curso que contemple no seu plano de estudos uma disciplina de Álgebra Linear) para a utilização de actividades de investigação/exploração nas suas aulas.

O estudo feito recorre a ferramentas de Geometria e de Álgebra Linear e serve como exemplo de uma actividade possível de desenvolver com alunos dos primeiros anos do ensino superior. Entendemos ser de destacar a interligação nele efectuada entre estas duas áreas da Matemática, bem como o papel desempenhado pela tecnologia no apoio quer à conjectura quer à obtenção dos resultados.

Terminamos fazendo uma breve referência ao aspecto estético da Matemática, dada a beleza dos tapetes circulantes e das espirais poligonais obtidos. **M**

Agradecimento

Expressamos aqui o devido agradecimento ao Professor Doutor José Vitória da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, pelas suas sugestões, reparos e disponibilidade com que sempre nos ajudou na elaboração deste artigo.

Agradecemos ainda as sugestões do *referee* que nos permitiu melhorar a forma final deste artigo.

Referências

[1] Ben Israel, A.; Greville, T.N.E., (2003). *Generalized Inverses. Theory and applications*, Segunda Edição, Springer-Verlag, Nova Iorque.

[2] Cline, Randall E. (1979). *Elements of The Theory of Generalized Inverses for Matrices*, The UMAP Expository Monograph Series, EDC/UMAP, Newton, Mass.

[3] Davis, Philip J. (1994). *Circulant Matrices*, AMS, 2ª Edição, Nova Iorque.

[4] Meyer, Carl D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Filadélfia.

[5] Ponte, João P. et al. (Org.) (2002). *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores*, Secção de Educação e Matemática da SPCE, Lisboa.

O Bilhar?

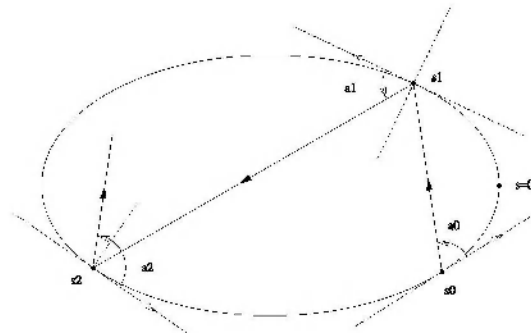
Um bilhar matemático é definido por uma região convexa do plano, limitada por uma curva fechada, onde se movimentava uma partícula pontual que se reflecte de cada vez que choca com a curva, à semelhança de uma bola de bilhar. O estudo das possíveis trajectórias da partícula é um problema matemático muito interessante.

O “problema da bola de bilhar” foi introduzido por Birkhoff ([3], 1927), que o concebeu como um modelo para a chamada dinâmica Hamiltoniana. Trata-se de considerar o movimento de uma partícula (massa pontual) que se desloca livremente numa região convexa D do plano, limitada por uma curva fechada e diferenciável B (o “bilhar”) e de modo que a partícula se reflecta elasticamente ao chocar com B de acordo com a lei: “o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.” Em cada instante o estado da partícula é determinado pela posição em que se situa em D e pela direcção do movimento. A sua dinâmica reduz-se portanto a uma questão de geometria elementar (ver a figura). A partir do movimento definido acima, introduz-se a “aplicação bilhar” $T: M = B \times [0, \pi] \rightarrow M$ que descreve a dinâmica de uma colisão à colisão seguinte. Como entre dois impactos consecutivos a partícula move-se em linha recta, uma órbita de T fica especificada pela sequência das suas posições e direcções imediatamente após cada impacto. A posição em B será parametrizada pelo comprimento de arco s , módulo L , em que L é o comprimento total de B . O conjunto $M = B \times [0, \pi]$, chamado “espaço de fase” do bilhar, tem como coordenadas o par (s, α) em que $\alpha \in [0, \pi]$ é o ângulo que o vector unitário da velocidade após o impacto faz com o vector tangente a B no ponto de coordenadas s .

É também usual considerar os pares (s, p) , $p = \cos(\alpha)$, para representar os pontos de M e neste caso $M = [0, L] \times [-1, 1]$ que, face à periodicidade de s , se identifica, topologicamente, com uma faixa cilíndrica.

Uma órbita de T consiste, portanto, numa sucessão de pares (s_n, p_n) obtidos após os impactos da partícula

com B a partir da “condição inicial” (s_0, p_0) . A dinâmica discreta da aplicação bilhar fica definida pela função $T(s_n, p_n) = (s_{n+1}, p_{n+1})$ e pode-se demonstrar que, nas coordenadas (s, p) , ela preserva área e orientação, embora haja problemas a analisar



no que toca à sua diferenciação nos pontos das componentes da fronteira da faixa cilíndrica (ver [5], p.343).

O estudo qualitativo das órbitas da aplicação bilhar T pode não só conduzir a situações previsíveis, no sentido de que pequenas mudanças nas condições iniciais provocam pequenas mudanças na órbita, bem como a situações não previsíveis em que pequenas mudanças nas condições iniciais provocam alterações radicais na órbita perturbada e, em certos casos, as duas situações podem ocorrer simultaneamente para diferentes escolhas das condições iniciais.

Existem três casos em que a órbita pode ser analisada no espaço de fase:

1º) Um conjunto finito de $N \gg 1$ pontos distintos $(s_0, p_0), (s_1, p_1), \dots, (s_{N-1}, p_{N-1})$ repete-se após N

impactos, isto é, $T(s_{N-1}, p_{N-1}) = (s_0, p_0)$. Neste caso a órbita de T diz-se "periódica" de período N e na faixa cilíndrica fica determinado um conjunto discreto de N pontos. Se $N=1$, isto é, se $T(s_0, p_0) = (s_0, p_0)$, obtém-se o que se chama um "ponto fixo" de T .

2º) As iteradas de uma condição inicial (s_0, p_0) preenchem uma curva denominada "curva invariante", isto é, T transforma essa curva nela própria sem que nenhum ponto da curva seja transformado nele mesmo. Isso ocorre, por exemplo, no caso em que T é "integrável" no sentido de que existe uma constante do movimento na forma de uma função real $F(s, p)$ que assume o mesmo valor em todos os pontos da órbita, isto é, as curvas de nível de F são as curvas invariantes.

3º) As iteradas de (s_0, p_0) preenchem uma "área" da faixa cilíndrica. Isto acontece quando a órbita não admite constantes de movimento e passa a evoluir de uma forma "caótica".

Observemos, inicialmente, que o bilhar circular (B é uma circunferência) é integrável com a constante de movimento $F(s, p) = p^2$ e, portanto, o espaço de fase é coberto por curvas invariantes paralelas à direção s , excluindo-se, desde já, o 3º caso acima mencionado.

Berry [1] mostra três deformações de um bilhar circular, passando inicialmente por um bilhar em forma de estádio ([1], fig.4) em que para quase toda a condição inicial (s_0, p_0) as iteradas (s_n, p_n) comportam-se de forma "ergódica", isto é, tais iteradas passam arbitrariamente próximo de qualquer ponto do espaço de fase, para n suficientemente grande. A seguir, deforma o bilhar circular numa elipse e obtém-se o resultado descoberto por Birkhoff de um bilhar integrável com uma forma explícita para a constante do movimento. Neste ponto convém ainda mencionar ([3], 1927) que Birkhoff afirmou desconhecer bilhares integráveis que não fossem os circulares ou os elípticos. Também é de observar que as folheações do espaço de fase são muito distintas (topologicamente) nestes dois casos integráveis conhecidos:

i) nos bilhares elípticos ([1], fig.7) parte do espaço de fase é folheada por curvas invariantes zero-homotópicas (todo o laço dessa parte pode ser deformado continuamente no laço trivial, ver [4]),

ii) no caso do bilhar circular todas as curvas invariantes são não zero-homotópicas.

Numa terceira deformação do bilhar circular obtêm-se certas "ovais" que são genéricas no sentido que os bilhares correspondentes apresentam

simultaneamente os vários tipos de órbitas acima mencionados ([1], p.97).

Lembremos agora que o bordo de M é o conjunto dos pontos $(s, p) \in M$ em que $p = \pm 1$. Sobre a questão da existência ou não de outros bilhares integráveis distintos dos circulares e dos elípticos, há que enunciar a seguinte Conjectura de Birkhoff: "Se uma vizinhança do bordo de M é folheada por curvas contínuas fechadas, invariantes e não zero-homotópicas em M , então B é uma elipse."

Um notável e esclarecedor resultado é devido a Bialy ([2], Theorema A, 1993): "Se todo o espaço de fase M da aplicação bilhar T , correspondente a um bilhar B , é folheado por curvas contínuas, fechadas invariantes e não zero-homotópicas, então B é uma circunferência." Sobre esta e outras contribuições de Bialy, bem como de Rychlik ([6], 1989) é de grande interesse a leitura do artigo de Wojtkowski ([7], 1994). Finalmente, para maiores considerações sobre o problema do bilhar há que consultar o capítulo 9 do livro de Katok e Hasselblatt [5].

Referências

- [1] M.V. Berry (1981). "Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard", Eur. J. Phys 2, 91–102.
- [2] M. Bialy (1993). "Convex billiards and a theorem by E. Hopf", Mathematische Zeitschrift, 214, 147–154.
- [3] G. D. Birkhoff (1927). "Dynamical systems", Colloq. Publ. Vol. IX, Providence R.I. AMS.
- [4] G. Granja (2008). "O que é o grupo fundamental?", Gazeta de Matemática nº 0155.
- [5] A. Katok e B. Hasselblatt (2005). "A moderna teoria de sistemas dinâmicos", Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- [6] M.R. Rychlik (1989). "Periodic points of the billiard ball map in a convex domain", J. Differential Geometry 30, 191–205.
- [7] M. Wojtkowski (1994). "Two applications of Jacobi fields to the billiard ball problem", J. Differential Geometry 40, 155–164.

Rosetas

Coroas circulares decoradas com diferentes padrões, que lhes dão a aparência final de rosas ou estrelas, são motivos ornamentais muito apreciados desde a antiguidade. A riqueza e variedade geométrica destes padrões sugerem-nos uma viagem que nos levará da Pompeia destruída à vila de Alpedrinha.

Introdução.

Um motivo ornamental relativamente comum consiste numa coroa circular preenchida com diferentes padrões geométricos que lhe dão a aparência final de uma rosa ou estrela. Em geral, designaremos por *roseta* qualquer figura com estas características. A atracção de muitos arquitectos e artistas pelas rosetas pode eventualmente ser explicada pela ênfase visual que estas proporcionam sobre o seu centro. A respeito do uso de rosetas em arquitectura, recomendamos a leitura de [4].

No presente texto, iremos encetar uma digressão por certos tipos de rosetas, não deixando fugir a oportunidade de aproveitar um motivo há muito apreciado em arte e arquitectura para ilustrar alguns conceitos geométricos, tais como os de inversão e conformalidade. Em particular, inspirados por [2], tomaremos como ponto de partida as *rosetas de rombóides*, como aquela que mostramos na Figura 1. Um exemplo deste tipo de roseta pode ser encontrado como adorno da orla de uma janela circular no Mosteiro de Santa Maria de las Cuevas (La Cartuja) em Sevilha. No seguimento, abordaremos o problema de construir uma roseta análoga à da Figura 1, mas utilizando para tal k bandas de rombos (losangos), em vez de rombóides. Veremos como a *roseta de rombos* está intimamente associada a um outro tipo de rosetas, as *rosetas logarítmicas* (Figuras 7

e 8), construídas a partir da espiral homónima. O impacto visual das rosetas logarítmicas não difere muito daquele proporcionado pelas *rosetas circulares* (Figura 10), bem mais fáceis de construir. Retornando ao ponto de partida, rosetas de rombóides podem ser obtidas por inversão a partir de rosetas circulares.

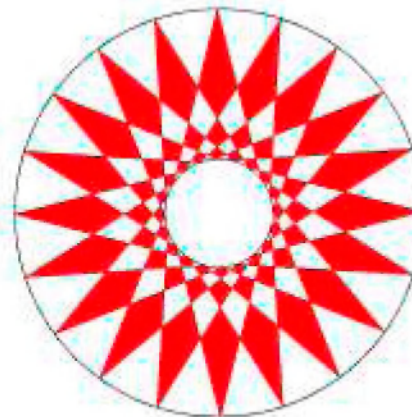


Figura 1 - roseta com $k = 3$ bandas de rombóides

Rosetas e simetria. O grupo de simetria de uma figura F no plano é constituído por todas as isometrias que deixam F invariante. Recorde-se que existem precisamente quatro tipos de isometrias no plano: reflexões, translações, rotações e reflexões deslizantes (reflexão numa recta seguida de uma

translação com a direcção dessa mesma recta). Cada uma das rosetas que vamos construir admite o *grupo diedral* D_n como grupo de simetria. D_n tem $2n$ elementos (n reflexões, $n-1$ rotações e a transformação identidade) e é *gerado* por uma rotação de ângulo $2\pi/n$ em torno de um ponto O e uma reflexão em relação a uma recta passando por esse mesmo ponto, isto é, podemos obter qualquer elemento de D_n por composição destas duas isometrias.

Construção de uma roseta de rombóides. Para construir uma roseta como aquela da Figura 1, com k bandas de rombóides, podemos proceder do modo que é indicado em [2]: dadas duas circunferências concêntricas, dividimos ambas em n partes iguais e enumeramo-las de igual forma; traçamos segmentos que unam a divisão i da circunferência interior às divisões $i+k$ e $i-k$ da circunferência exterior, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. O valor de n deverá ser suficientemente grande de forma a evitar que os segmentos intersectem a circunferência interior. A Figura 2 ilustra este procedimento para $k=3$ e $n=20$.

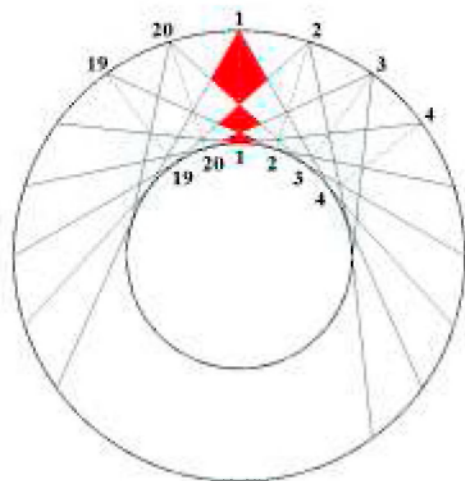


Figura 2

Construção de uma roseta de rombos. Consideremos agora o problema de construir uma roseta com k bandas de rombos semelhantes. Este problema admite uma solução elementar quando o raio da circunferência exterior não é fixado à partida. Com efeito, nesta situação basta começar por dividir a circunferência interior em n partes iguais e construir a

primeira banda de rombos utilizando um valor arbitrário para a razão entre os semi-eixos dos mesmos; de seguida, prolongar os lados destes rombos para formar a segunda banda de rombos, repetindo sucessivamente este processo até obter as k bandas, como a Figura 3 sugere.

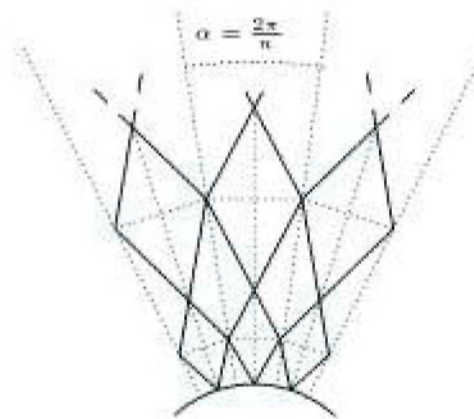


Figura 3

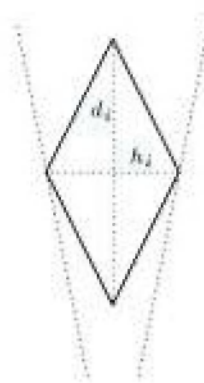


Figura 4

Denotemos por h_i e d_i as medidas dos semi-eixos dos rombos que estão sobre a banda i (ver Figura 4). Seja r o raio da circunferência interior. Uma propriedade fundamental das rosetas que acabámos de construir reside no facto da progressão d_1, d_2, d_3, \dots ser geométrica. Com efeito: uma vez que os rombos em cada sector circular de ângulo $\alpha = 2\pi/n$ são semelhantes entre si, vai existir uma constante c tal que $h_i/d_i = c$, para qualquer $i = 1, 2, \dots, k$; por outro lado, temos

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h_1}{r+d_1} = \frac{h_2}{r+2d_1+d_2} = \dots = \frac{h_i}{r+2d_1+2d_2+\dots+2d_{i-1}+d_i};$$

denotando $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ por simples manipulação algébrica obtém-se

$$d_1 = \frac{rt}{c-t}$$

e por indução é então possível concluir (deixando os detalhes ao cuidado do leitor) que

$$d_i = d_1 \left(\frac{c+t}{c-t} \right)^{i-1}$$

para qualquer $i = 1, 2, \dots, k$; ou seja, os semi-eixos d_1, d_2, \dots, d_k ... obedecem a uma progressão geométrica de

razão $\frac{c+t}{c-t}$.

Suponhamos agora que os raios das duas

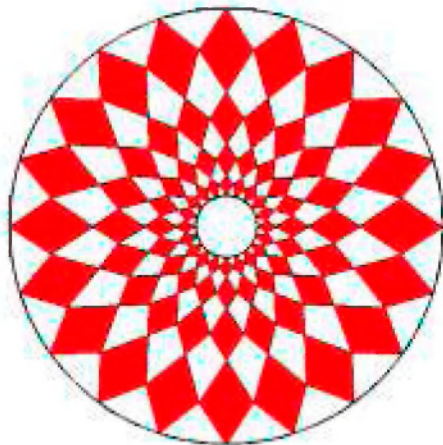


Figura 5 - roseta com $k = 4$ bandas de rombos.

circunferências são dados. Para determinar os vértices dos rombos que a vão preencher, faremos uso daquela espiral pela qual Jacob Bernoulli no século XVII se deixou fascinar.

A *espiral logarítmica* é uma curva no plano que, em coordenadas polares (ρ, θ) , é dada por uma equação do tipo

$$\rho(\theta) = r_0 e^{m\theta}$$

Trata-se de uma curva que corta todas as rectas

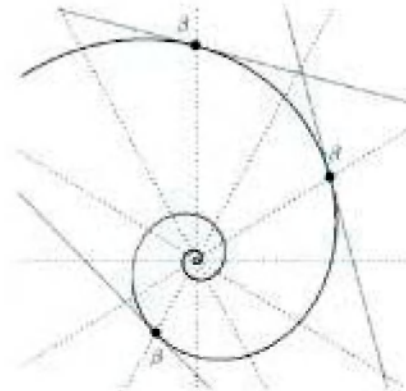


Figura 6 - espiral logarítmica.

radiais segundo um mesmo ângulo $\beta = \operatorname{arctg} m$ (ver Figura 6), tal como as curvas loxodrómicas em relação aos meridianos na superfície esférica ou, mais simples, uma recta cortando um feixe de rectas paralelas. Na realidade, as projecções estereográficas das curvas loxodrómicas são precisamente espirais logarítmicas (ver [3], por exemplo). De outro ponto de vista, que iremos explorar mais à frente, uma espiral logarítmica é a imagem de uma recta oblíqua no plano por meio da aplicação $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

Para iguais incrementos no ângulo θ ,

$$\theta_0 = 0, \theta_1 = \alpha, \theta_2 = 2\alpha, \theta_3 = 3\alpha, \dots,$$

os correspondentes valores de ρ vão ser

$$\rho_0 = r_0, \rho_1 = r_0 e^{m\alpha}, \rho_2 = r_0 (e^{m\alpha})^2, \rho_3 = r_0 (e^{m\alpha})^3, \dots$$

e, portanto, obedecem a uma progressão geométrica. Os dados estão pois lançados: inevitavelmente as espirais logarítmicas estão relacionadas com o problema que nos ocupa. Vejamos como proceder.

Sejam r e R os raios das circunferências interior e exterior, respectivamente. Sem perda de generalidade, vamos fixar $r = 1$ de maneira a não sobrecarregar as notações. Começemos por dividir ambas as circunferências em n partes iguais e enumeremo-las de igual forma. Denotamos por θ_i o ângulo polar da radial correspondente à divisão i e pomos $\alpha = 2\pi/n$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, unimos a divisão i da circunferência interior com as divisões $i+k$ e $i-k$ da circunferência exterior por meio dos segmentos de espiral obtidos por uma rotação de θ_i radianos a partir de

$\rho(\theta) = e^{\frac{\ln R}{k\alpha}\theta}$, $0 \leq \theta \leq k\alpha$ e $\rho(\theta) = e^{-\frac{\ln R}{k\alpha}\theta}$, $-k\alpha \leq \theta \leq 0$, respectivamente. Obtemos assim uma *roseta logarítmica*¹:

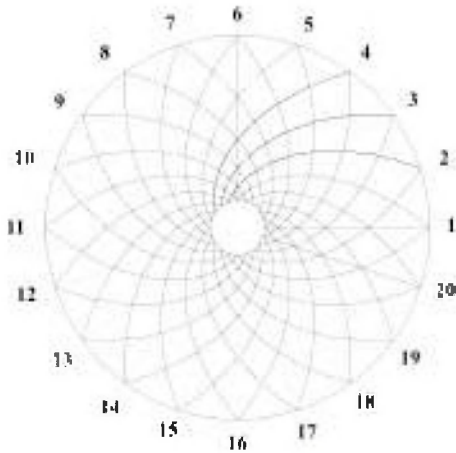


Figura 7 - $n = 20$ e $k = 5$

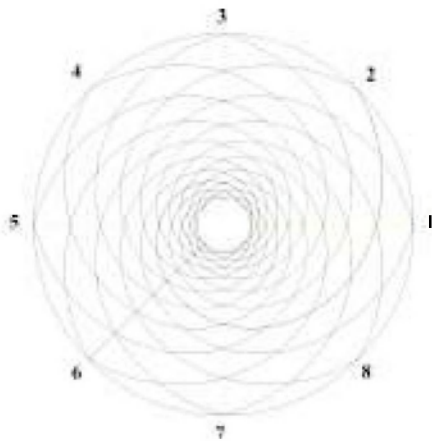


Figura 8 - $n = 8$ e $k = 9$

Sobre cada um dos segmentos radiais que dividem em partes iguais a nossa coroa circular existem precisamente $k + 1$ pontos de intersecção com as espirais logarítmicas. Para um desses segmentos, denotemos os respectivos pontos de intersecção por P_1, P_2, \dots, P_{k+1} , em ordem crescente relativamente às suas distâncias à origem. Estas distâncias obedecem a uma progressão geométrica de razão $R^{1/k}$:

$$1, R^{1/k}, R^{2/k}, R^{3/k}, \dots, R.$$

Para cada $i = 1, \dots, k$, tracemos o rombo L_i , cujos vértices são P_i e P_{i+1} , juntamente com os pontos de intersecção da mediatriz do segmento $P_i P_{i+1}$ com as radiais definidas pelos ângulos $\theta_i + \alpha/2$ e $\theta_i - \alpha/2$, tal como a figura seguinte ilustra:

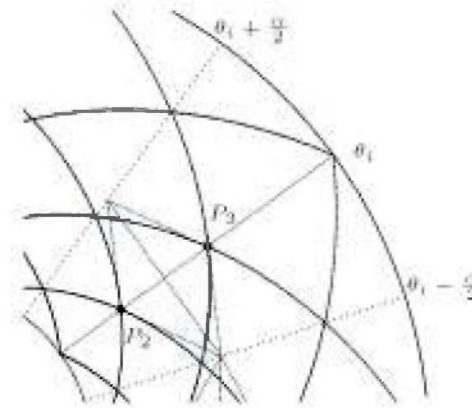


Figura 9

Denotemos por h_i e d_i os semi-eixos do rombo L_i (ver Figura 4). Como

$$d_1 = \frac{R^{1/k} - 1}{2} \quad \text{e} \quad d_i = d_1 R^{i-1},$$

os semi-eixos $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{k-1}$ obedecem também a uma progressão geométrica de razão $R^{1/k}$. Um cálculo longo mas directo mostra-nos que

$$c = \frac{h_i}{d_i} = \frac{R^{1/k} - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)(1 + R^{1/k})}$$

Assim, os rombos L_i , com $i = 1, \dots, k$, são semelhantes entre si. Repetindo este procedimento para todas as radiais θ_i , com $i = 1, \dots, n$, obtemos então a roseta com k bandas de rombos semelhantes.

Rosetas circulares. Para a construção deste tipo de rosetas podemos repetir o procedimento já familiar: dadas duas circunferências concêntricas, de centro em O , dividimos ambas em n partes iguais e enumeramo-las de igual forma; para cada i consideremos a circunferência que passa pela divisão i da circunferência interior, I_i , pela divisão $i + k$ da

¹Um exemplar de roseta logarítmica foi encontrado num pavimento durante escavações nas ruínas da cidade de Pompeia e neste momento pode ser admirado no Museo Nazionale Romano, em Itália [4].

circunferência exterior, E_{i+k} e pelo centro O ; traçamos o arco desta circunferência compreendido entre I_i e E_{i+k} ; por reflexão, unimos também I_i a E_{i-k} por meio de um arco de circunferência; o resultado final será uma roseta como a da Figura 10.

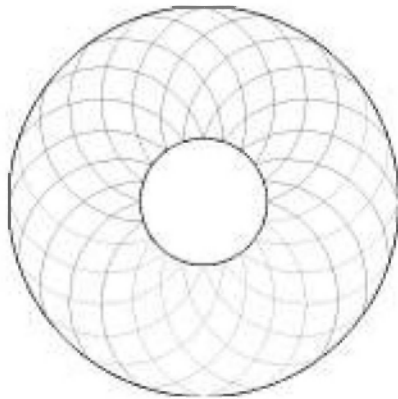


Figura 10 - roseta circular com $n = 20$ e $k = 3$.

No Batistério di San Giovanni em Florença pode ser encontrado um exemplar de tal motivo [4]. Outro exemplar, é certo que não tão sofisticado, encontra-se no óculo da fachada principal da Igreja Matriz da vila de Alpedrinha (Concelho do Fundão).



Figura 11 - roseta circular na fachada principal da Igreja Matriz de Alpedrinha.

Embora para um observador desprevenido o efeito visual da nossa roseta circular possa parecer idêntico ao de uma roseta logarítmica, a diferença entre as duas pode ser facilmente detectada, uma vez

que na roseta logarítmica os “rombóides curvilíneos” são todos semelhantes entre si, ao contrário do que acontece com as rosetas circulares. A razão para a maior popularidade das rosetas circulares admite uma explicação simples: do ponto de vista do executante são bem mais fáceis de construir, por muito profundas que sejam as pretensões místicas do arquitecto.

Rosetas e Inversões. Consideremos um ponto P no plano e seja C uma circunferência de raio r e centro O . Suponhamos que O e P são pontos distintos. O inverso de P relativamente a C é o único ponto P' sobre a semi-recta com origem em O que passa por P tal que

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2$$

A inversão na circunferência C é a transformação T do plano que a cada $P \neq O$ faz corresponder o seu inverso relativamente a C . O centro O é também designado por pólo da inversão T .

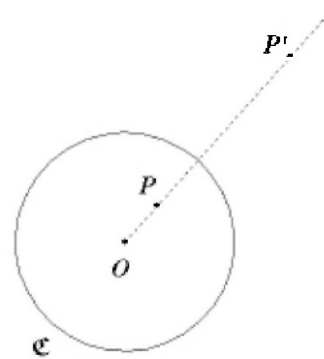


Figura 12 - O ponto P e o seu inverso relativamente à circunferência C .

É claro que T é involutiva, isto é, o inverso do inverso de um ponto é o próprio ponto. Temos ainda: se P está em C então $P' = P$; o inverso de um ponto no interior de C é um ponto no exterior de C e o inverso de um ponto no exterior de C é um ponto no interior de C . As seguintes propriedades das inversões, que irão ser relevantes na nossa análise, não são tão óbvias (para detalhes consultar [1], por exemplo): o inverso de uma recta que não passa pelo pólo de inversão O é uma circunferência que passa por O ; o inverso de uma circunferência D que não passa em O é ainda uma circunferência que não passa em O (se D tem centro

em O , então a sua circunferência inversa também tem centro em O).

A imagem de uma espiral logarítmica $\rho(\theta) = r_0 e^{m\theta}$ por meio de uma inversão em relação a uma circunferência de raio R_0 e centro na origem é ainda uma espiral logarítmica, a saber, aquela de equação

$$\rho(\theta) = \frac{R_0^2}{r_0} e^{-m\theta}.$$

Assim, se invertermos uma roseta logarítmica em relação a uma circunferência com o mesmo centro, obtemos uma nova roseta logarítmica.

Consideremos agora uma roseta circular com centro em O . Os segmentos de arco que a formam pertencem a circunferências que também passam por O . Assim, ao invertermos em relação a uma circunferência centrada em O , estes arcos de circunferência são transformados em segmentos de recta, de onde concluímos que a roseta circular vai ser transformada numa roseta de rombóides.

Rosetas e conformalidade. Consideremos de novo a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

Esta função transforma: a recta horizontal $y = \theta_0$ na semi-recta radial correspondente ao ângulo θ_0 ; a recta vertical $x = R_0$ na circunferência de raio R_0 e centro na origem; a recta oblíqua $x = my + r_0$, com $m \neq 0$, na espiral logarítmica $\rho(\theta) = r_0 e^{m\theta}$. Assim, f transforma a grelha da Figura 13 numa roseta logarítmica com $k = 4$ bandas de rombos.

Mais podemos dizer sobre a função f : uma vez que qualquer circunferência corta os seus raios perpendicularmente e as espirais logarítmicas, como já observámos atrás, cortam todas as rectas radiais segundo um mesmo ângulo $\beta = \arctg m$, podemos concluir que f é uma função *conforme* em todo o seu domínio. Em geral, uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 diz-se

Referências:

- [1] P.V. Araújo (1999). *Curso de Geometria*, Gradiva.
- [2] E. Borrás Veses, P.M. Gómez, X.N. Moreno, A. A. Salanova (2002). *Ritmos: matemáticas e imágenes*, Nivola libros y ediciones.
- [3] J. F. Queiró (2002). "Pedro Nunes e as linhas de rumo." *Gazeta de Matemática*, nº 143.
- [4] K. Williams (1999). "Spirals and Rosettes in Architectural Ornament." *Nexus Network Journal*, vol.1.

conforme num ponto se preservar a medida e a orientação dos ângulos formados por curvas que se intersectam nesse ponto. Para o leitor familiarizado com funções complexas de variável complexa: se identificarmos \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 , $z = x + iy \cong (x, y)$, qualquer função analítica $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é conforme nos pontos onde a sua derivada não se anula e, reciprocamente, qualquer função conforme $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, cujas derivadas parciais existam e sejam contínuas em \mathbb{C} , é analítica em \mathbb{C} .

Podemos então perguntar que outros motivos ornamentais se podem obter a partir da grelha da Figura 13 por aplicação de transformações conformes. Como exemplo, apresentamos o caso

$$z \cong (x, y) \mapsto \cosh(z) \cong (\cosh(x) \cos(y), -\sinh(x) \sin(y)).$$

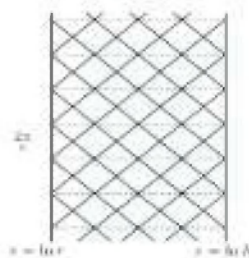


Figura 13 - os segmentos horizontais a tracejado têm entre si um espaçamento constante $\Delta = 2\pi/n$



Figura 14 - "versão elíptica" da roseta logarítmica

Esta função é conforme, transforma rectas horizontais paralelas em elipses confocais e a grelha da Figura 13 no motivo da Figura 14. □

A SPM, o Ensino Superior e a Investigação Científica

Um dos objectivos principais da SPM é, desde a sua fundação em 1940, promover e dinamizar a actividade matemática no âmbito do Ensino Superior e da Investigação Científica. Tendo tomado posse no passado dia 14 de Julho de 2008, a Direcção da SPM para o biénio 2008/2010 está empenhada em reforçar o papel que a Sociedade já desempenha neste âmbito. Nesse sentido, propõe-se concretizar um conjunto de iniciativas, das quais se destacam:



A nova Direcção da SPM.

- Reforçar a presença da Sociedade nos organismos internacionais a que pertence, intensificando a colaboração com a *European Mathematical Society* e continuando a apoiar a Comissão Nacional de Matemática e, por seu intermédio, a participação de Portugal na *International Mathematical Union*.

- Continuar a apoiar a publicação da *Portugaliae Mathematica* e os esforços para a tornar uma revista de qualidade científica cada vez maior na comunidade matemática internacional.

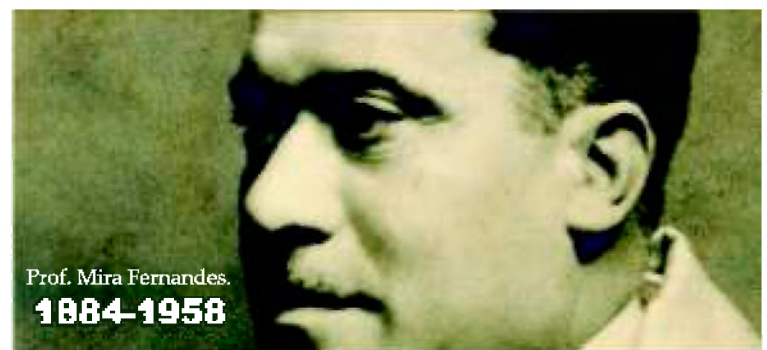
- Organizar, com a Real Sociedade Matemática Espanhola, o III Encontro Ibérico de Matemática, a ter

lugar na Universidade do Minho, em Fevereiro de 2010. Como nos dois encontros anteriores, o objectivo é estreitar relações entre Portugal e Espanha em domínios da investigação em Matemática.

- Concretizar a ideia já existente de criar um Gabinete do Ensino Superior e Investigação (GESI), constituído por professores universitários e investigadores em Matemática. O GESI fará sugestões e recomendações à Direcção da SPM, que assim, através de um conhecimento mais sistemático dos problemas, procurará intervir da forma mais coerente e eficaz junto das entidades públicas competentes.

- Continuar a apoiar, em parceria com o CIM, a organização das tardes de trabalho SPM/CIM, que têm constituído uma ocasião privilegiada de intercâmbio científico entre os matemáticos portugueses.

- Apoiar os encontros e publicações organizados pelo Seminário Nacional de História da Matemática, nomeadamente *aqueles que estão associados às Comemorações da Vida e Obra do Prof. Mira Fernandes*.



Estas iniciativas, como quaisquer outras que venham a ser propostas, só são possíveis e fazem sentido com a participação activa da comunidade matemática nacional. A SPM agradece a todos os que têm colaborado e irão colaborar na sua realização. 