

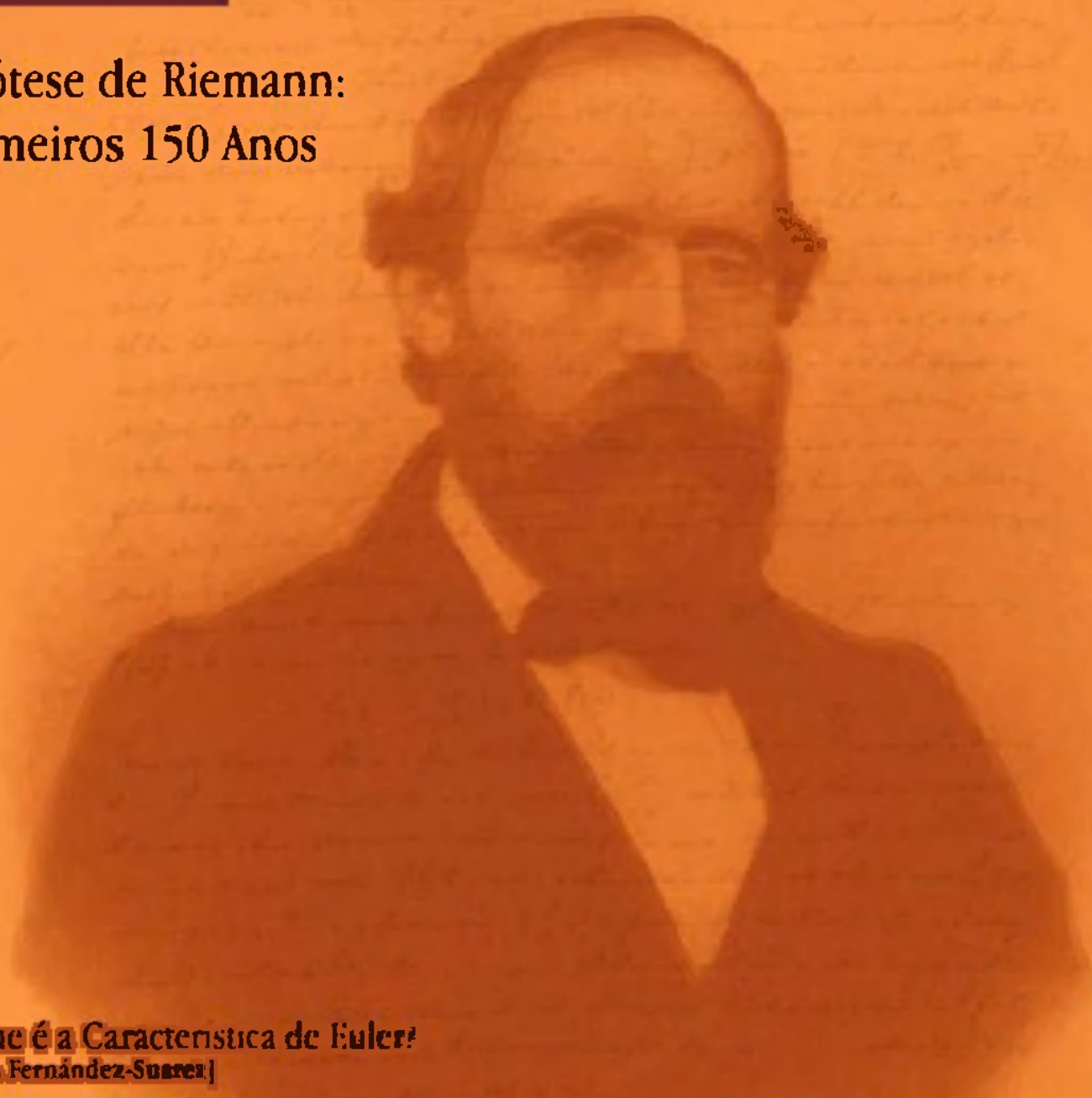
M

N.º 0158

Gazeta de matemática

Publicação quadrimestral
da Sociedade Portuguesa de Matemática
Ano LXX | Setembro 2009
4,20€

A Hipótese de Riemann: Os Primeiros 150 Anos



42 | O que é a Característica de Euler?
[Lucía Fernández-Suárez]

53 | Transformações de Gráficos, Substituições e Equações do Terceiro Grau
[António Pereira Rosa]

Editorial

por Jorge Buescu
[Universidade de Lisboa]


Bernhard Riemann foi um matemático extraordinariamente profundo. A sua morte precoce, aos 39 anos, fez com que a sua obra matemática não fosse, em extensão, comparável às de Euler, Gauss ou Cauchy. No entanto, o seu legado matemático deixou-nos aquele que é considerado hoje em dia o mais importante problema em aberto da matemática: a célebre Hipótese de Riemann.

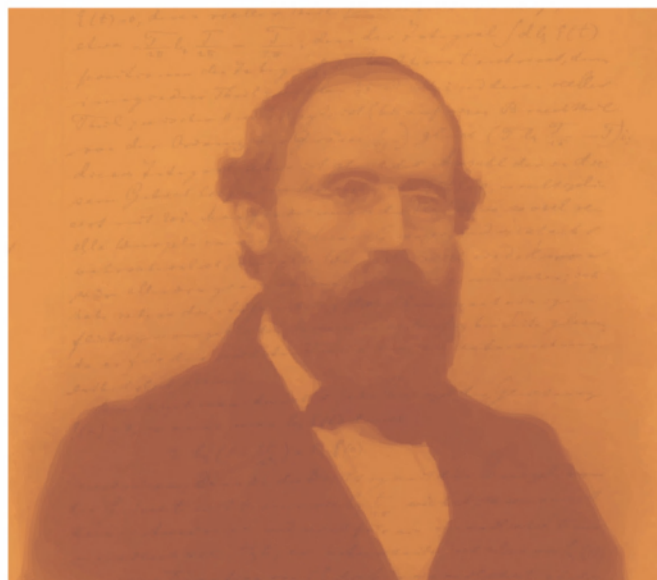
Originalmente quase um à parte na sua conferência inaugural como membro da Academia de Berlim, em Agosto de 1859, a Hipótese de Riemann estava de tal forma avançada no tempo que em 1900 foi considerada por Hilbert um dos seus 23 "Problemas da Matemática" e em 2000 foi classificada pelo Clay Mathematics Institute como um dos sete "Problemas do Milénio".

É precisamente quando se passam 150 anos sobre a sua formulação que José Carlos Santos nos esclarece sobre o significado da Hipótese de Riemann.

Contando com as habituais secções, que vão desde os problemas matemáticos (*Recreio* e *Canto Delfico*) à divulgação dos conceitos matemáticos em *O Que É* (nesta edição dedicada à característica de Euler), *Na Linha de Frente* e *Apanhados na Rede* e nos artigos que nos são submetidos, continuamos a tentar fazer da *Gazeta* uma publicação cada vez mais interessante e com maior qualidade.

Recebemos recentemente uma indicação particularmente gratificante de que estamos no bom caminho. A *Newsletter* da European Mathematical Society (EMS) manifestou interesse em publicar uma versão revista e traduzida do artigo de António Machiavelo da nossa última edição, "Pitágoras: Factos e Lendas". Este artigo já foi aceite e será publicado num dos próximos números da *Newsletter* da EMS.

Ao autor, que tem todos os motivos para se sentir orgulhoso, os sinceros parabéns de toda a equipa da *Gazeta*. 



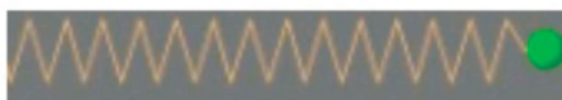
Sobre a Capa

O artigo manuscrito de Riemann, onde se assinala a sua célebre Hipótese: "... de facto, encontra-se aproximadamente este número de raízes reais dentro destes limites, e é muito provável que todas as raízes sejam reais. Seria certamente desejável uma prova mais rigorosa desta questão; eu pus temporariamente de lado esta questão, após algumas fugazes tentativas sem sucesso, pois ela não parece necessária para os próximos objectivos da minha investigação". Riemann formulou a sua hipótese à custa de uma função auxiliar, cujo eixo real corresponde à linha crítica da função zeta (ver artigo principal).

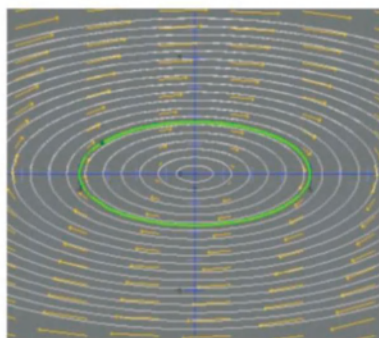
Movimentos Pendulares

"Ouvi dizer a um homem instruído [Eratóstenes] que o tempo não é mais que o movimento do sol. Por que não seria antes o movimento de todos os corpos? Se os astros parassem e continuasse a mover-se a roda do oleiro, deixaria de haver tempo para medirmos as suas voltas?" - Santo Agostinho, em *Confissões*.

O Atractor desenvolveu um conjunto de aplicações interactivas sobre diversos tipos de sistemas dinâmicos oscilatórios. As versões mais elementares são o oscilador harmónico e o pêndulo simples. No primeiro, uma bola de massa m está sujeita apenas à acção de uma mola;



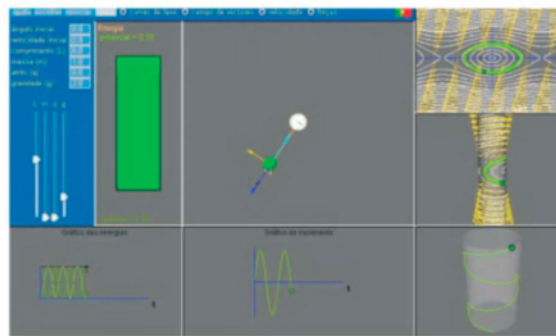
se a localização da bola for descrita relativamente à posição de repouso da mola, a força f exercida, para cada posição x , sobre a bola é a de distensão ou compressão da mola e tem o sinal oposto ao de x . Supondo-a proporcional ao deslocamento, teremos $f(x) = -k x$ ($k > 0$). A equação do movimento será, pois, $-k x = m x''$ ou $x'' = -k/m x$, equação diferencial de 2.^a ordem equivalente ao sistema de equações de 1.^a ordem $x' = y, y' = -k/m x$.



¹<http://www.atractor.pt/mat/pendulos/oscilador>

²<http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloRigido>

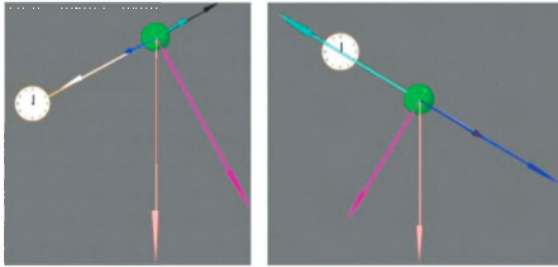
A cada solução da equação corresponderá, no plano xy , uma curva (dita de fase) tangente em cada ponto (x,y) ao vector $(y, -k/m x)$. O *applet*¹ permite variar os parâmetros m e k e seguir, em simultâneo, o movimento da bola e do ponto (x,y) no plano de fase, as variações das energias cinética e potencial e o gráfico do movimento. No segundo exemplo, do pêndulo simples², a bola de massa m move-se num plano por acção da gravidade g , mantendo-se ligada a um ponto por uma haste rígida (de comprimento L , eventualmente com atrito q e suposta sem massa).



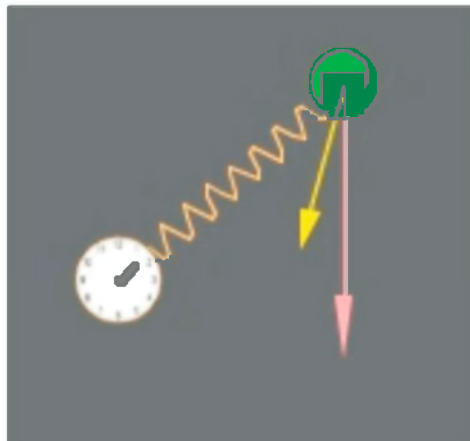
A posição da bola é descrita pelo ângulo x da haste com a posição de equilíbrio (na vertical) e há que estudar as forças que actuam sobre a bola. O *applet* permite analisar *em tempo real* o movimento e velocidade da bola, as variações da energia, o espaço de fase e gráficos do movimento e ainda as forças que nela actuam.

Atractor

[Movimentos Pendulares]



Nas figuras em cima, o vector peso, na vertical, decompõe-se numa componente tangencial ($-p \text{ Sen } x$) e noutra radial e, em movimento, surge ainda uma componente radial de força centrífuga; a resultante das componentes radiais (azul escuro) é equilibrada pela reacção da haste (azul claro), pelo que a resultante radial final é sempre nula. A única componente relevante para o movimento do pêndulo é a tangencial ($-p \text{ Sen } x$) e a equação será $-p \text{ Sen } x = m x''$ ou $-mg \text{ Sen } x = m x''$, ou ainda $x'' = -g \text{ Sen } x$, equivalente a $x' = y$, $y' = -g \text{ Sen } x$. Além daqueles dois exemplos, foram programados outros *applets*:

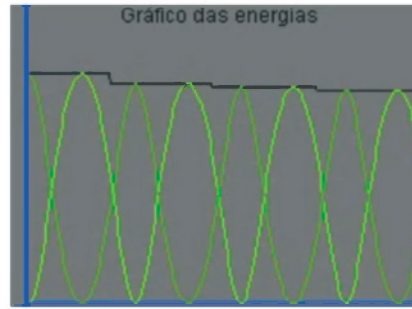


1. **Pêndulo simples de fio**³, cuja dinâmica é distinta da anterior porque a componente radial só será anulada pela reacção do fio se essa componente radial apontar *para fora*, com o fio a compensar com uma força *para dentro* de grandeza igual. Se a componente radial apontar *para dentro*, o fio não a compensa e o movimento deixa de ser pendular: a posição da bola é agora descrita por dois parâmetros e a bola entra em queda livre com movimento parabólico, até o fio esticar de novo.

³<http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloFio>

⁴<http://www.atractor.pt/mat/pendulos/2pendulos>

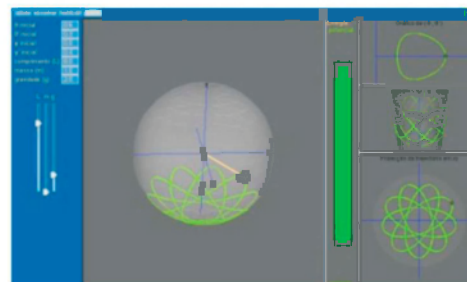
⁵<http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloEsferico>



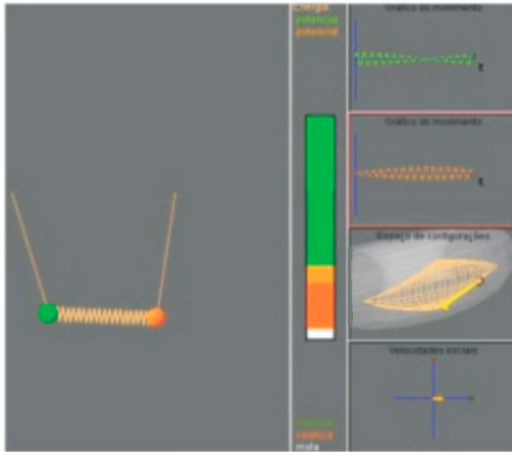
O *applet* trata este caso, admitindo choque inelástico no "esticão", com a consequente perda de energia; e permite a observação de comportamentos muito interessantes: a alternância entre os dois tipos de movimento, pendular e de queda livre, com gradual perda de energia.



2. **Dois pêndulos rígidos**⁴ movendo-se simultaneamente, permitindo assim fazer verificações *experimentais* - se não houver atrito, o período não depende da massa, para pequenas oscilações, *quase* não depende da amplitude inicial e se, além disso, o comprimento de um aumentar por um factor k^2 (4, na figura), o período aumenta por um factor k .



3. **Pêndulo esférico**⁵.

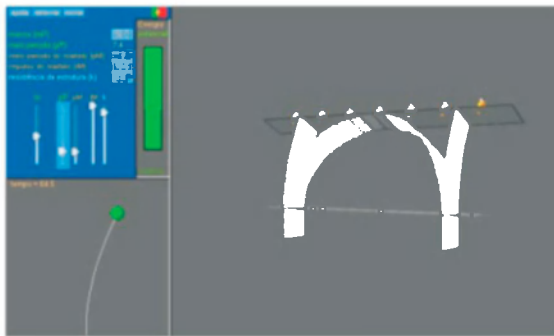


amplitude inicial → maior período e menor comprimento → menor período) se compensem; prova-se que a solução é uma cicloide.



4. **Pêndulo duplo**⁴ com os conhecidos comportamentos de tipo caótico e em que se pode também ver em tempo real a trajectória do movimento no toro, que é o espaço de configurações associado.

7. **Pêndulos acoplados**⁹, em que há agora cinco tipos diferentes de energia, e uma (quase) total transferência alternada da energia de um para o outro pêndulo, bem visível pela própria simulação, pelo gráfico (de barras) da energia, pelos dois gráficos do movimento e pela alternância com que as órbitas aparecem em direcções quase perpendiculares, no espaço de configurações (toro). 8. **Pêndulo excitado**¹⁰ com os fenómenos de ressonância associados; e



5. **Pêndulo cicloidal**⁷ (ou **tautócrono**), cuja frequência não depende da amplitude das oscilações, o que pode ser verificado *experimentalmente* com 6. **Dois pêndulos cicloidais**⁸. A independência da frequência consegue-se com uma curva “de encosto” para o fio do pêndulo: o comprimento útil do pêndulo vai diminuindo à medida que a amplitude cresce. Com uma forma adequada para essa curva, consegue-se que os efeitos (contrários) dessas variações (maior



9. **Ressonância de ponte**, em que é evocado um episódio de ressonância¹¹ da ponte D.Luís (Porto-Gaia), ocorrido em Abril de 1931, aquando do funeral de um estudante de Medicina, que morrerá ao ser perseguido pela polícia. [M](#)

⁴<http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloDuplo>

⁷<http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloCicloidal>

⁸<http://www.atractor.pt/mat/pendulos/2pendulosCicloidais>

⁹<http://www.atractor.pt/mat/pendulos/pendulosAcoplados>

¹⁰<http://www.atractor.pt/mat/pendulos/penduloExcitado>

¹¹<http://www.atractor.pt/mat/pendulos/osciladorPonte>

Gavetas e Bananas

Tirar conclusões numéricas a partir de alguns dados é arte que apela a recursos variados: às vezes alguns teoremas resolvem tudo, mas nem sempre... acontece ter de se recorrer a aproximações mais directas, arregaçar as mangas e... fazer contas!

O *Princípio das Gavetas* permite tirar algumas conclusões surpreendentes. Uma forma de o enunciar é a seguinte: se distribuímos $n+1$ objectos por n gavetas, então pelo menos uma gaveta fica com mais do que um objecto. Dirichlet utilizou este princípio numa demonstração sobre aproximações por racionais dos irracionais. Trata-se de um resultado matematicamente útil, mas dois exemplos recreativos vêm a calhar: em cada cinco cartas de jogar há pelo menos duas do mesmo naipe;



em Lisboa há pelo menos duas pessoas com o mesmo número de cabelos (estima-se que há um milhão de pessoas na capital e que ninguém tem mais do que 600 mil cabelos).



Deixemos um desafio aos leitores: Seja $f(x)$ um polinómio de coeficientes inteiros, de qualquer grau. Suponha que para três valores inteiros a , b e c se tem $f(a)=f(b)=f(c)=2$. Prove que para nenhum valor inteiro d se tem $f(d)=3$.

As vezes não recorremos a métodos gerais para atacar problemas de contagem. Vejamos um exemplo clássico, em que uma abordagem directa basta. Há uma pilha de bananas e três macacos. O primeiro deita fora uma banana e come um terço das restantes. O segundo, mais tarde, deita uma banana fora e come um terço das que encontrou. O mesmo faz o terceiro. Sobraram duas bananas no fim. Quantas bananas havia no início? Bom, o terceiro macaco encontrou por certo quatro bananas. O segundo, para deixar quatro, é porque encontrou sete ($7-1=6$, $6-6/3=4$). A pilha original deveria conter portanto dez bananas.



Propomos mais duas questões para os leitores. A primeira é semelhante à anterior, mas há cinco macacos envolvidos. Cada um deita fora uma banana e come um quinto das restantes. Pergunta-se: qual é o menor número possível de bananas restantes após o quinto macaco se alimentar?

A segunda: 1600 bananas são distribuídas por 100 macacos. Mostre que pelo menos quatro macacos receberam o mesmo número de bananas.

Nota sobre o problema do número anterior. Como o nosso leitor Carlos Gomes, da Escola Secundária/3 Amarante, notou $P(1) = 14$ dá a soma dos coeficientes. O segundo argumento deve ser maior do que este valor. No exemplo foi 17. Quando escrito $P(17)$ em base 17 os coeficientes tornam-se aparentes... \square

A Hipótese de Riemann - 150 Anos

Em 1859, Bernhard Riemann, então com 32 anos, foi eleito para a Academia das Ciências de Berlim. Fazia então parte do regulamento daquela instituição que os novos membros deviam fazer um relatório sobre a pesquisa que estavam a realizar. O relatório entregue por Riemann era curto (foi publicado em oito páginas) e tinha por título *Sobre o número de números primos que não excedem uma grandeza dada*. É aqui que surge a hipótese de Riemann, que é talvez o mais famoso problema em aberto da matemática.

$\zeta(n)$

Para compreender o problema, convém recuar a 1650, ano em que foi publicado o livro *Novæ quadraturæ arithmeticae seu se additione fractionum*, de Pietro Mengoli. É um livro sobre soma de séries, duas das quais são

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

e

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

É aí demonstrado que a primeira (a série harmónica) diverge e o autor levanta o problema de saber qual é a soma da segunda. Este problema foi novamente levantado por Jacob Bernoulli em 1689¹. Três anos mais tarde, o mesmo Jacob Bernoulli começa a estudar as séries

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots \quad (1)$$

para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Em 1735, Euler provou que $\zeta(2)$ é igual a $\pi^2/6$ e, pouco tempo depois, calculou $\zeta(n)$ para cada número natural par n , para além de ter obtido o produto euleriano

$$\zeta(n) = \prod_{p \text{ primo}} (1 - p^{-n})^{-1}, \quad (2)$$

o qual é válido para cada número real $n > 1$. Isto mostra que há uma relação entre a função ζ e a distribuição dos números primos. Não é a única ligação da função ζ à Teoria dos Números. Por exemplo, se $s > 1$, então

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s},$$

onde $d(n)$ é o número de divisores de n . Além disso, se $s > 2$, então

¹O texto em questão foi publicado em Basileia, o que deu origem a designar-se por "problema de Basileia" o problema de determinar o valor de $\zeta(2)$.

$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s},$$

onde $\sigma(n)$ é a soma dos divisores de n .

Conjectura de Legendre

Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $\pi(x)$ o número de números primos menores ou iguais a x . Por exemplo, $\pi(1)=0$, $\pi(2)=1$ e $\pi(3)=2$. No fim do século XVIII, Legendre observou que aparentemente se tem

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad (3)$$

querendo isto dizer que o quociente das duas funções tende para 1 quando x tende para $+\infty$. Pela mesma altura, Gauss (com apenas 15 ou 16 anos de idade) também conjecturou que se tem (3), mas também fez a conjectura equivalente

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{1}{\log t} dt.$$

Que as duas conjecturas são equivalentes resulta de se ter

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x/\log x}{\int_2^x \frac{1}{\log t} dt} = 1,$$

que é algo que se prova facilmente. No entanto, $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$ é uma melhor aproximação de $\pi(x)$ do que $x/\log x$. Pode ver pela figura 1.

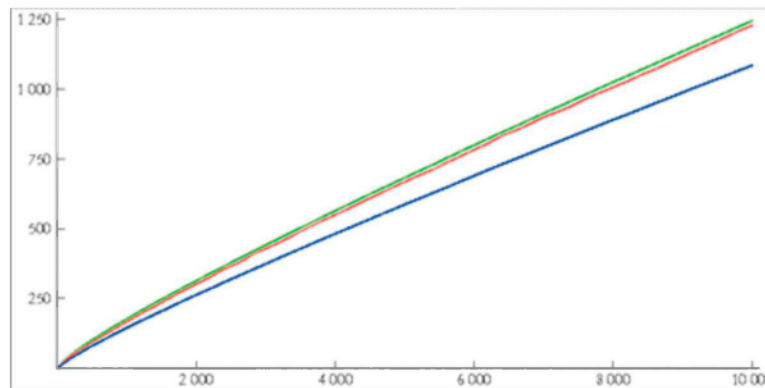


Figura 1: Gráficos de $\pi(x)$ (a vermelho), $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$ (a verde) e $x/\log x$ (a azul)

A figura 1 também sugere que $\pi(x)$ é sempre maior do que $x/\log x$ e que a diferença vai aumentando à medida que x cresce. Isto levou Legendre a conjecturar, em 1800, que uma função que aproxima $\pi(x)$ ainda melhor do que $x/\log x$ é

$$\frac{x}{\log(x) - 1,08366}.$$

Não é claro o que é que ele tinha em mente ao escrever isto, pois se o quociente de $\pi(x)$ por $x/\log x$ tender de facto para 1, então o quociente $\pi(x)$ por qualquer função do tipo $x/(\log(x) + A)$ também tende para 1.

Gauss não publicou nada sobre este tópico; o que se sabe sobre as observações dele acerca do assunto vem nas suas cartas pessoais e no seu diário. Em contrapartida, a conjectura de Legendre era bem conhecida dentro da comunidade matemática e é mencionada por, pelo menos, Abel, Dirichlet e Čebišev na primeira metade do século XIX. Foi aliás Čebišev a primeira pessoa a fazer progressos em direcção a uma demonstração da conjectura. Em 1848 provou que

- para x suficientemente grande tem-se

$$0,89 \times \int_2^x \frac{1}{\log t} dt < \pi(x) < 1,11 \int_2^x \frac{1}{\log t} dt;$$

- num certo sentido (que ele precisou) nenhuma função da forma

$$x \mapsto \frac{x}{\alpha \log x + \beta}$$

aproxima melhor a função π do que $x/(\log(x) - 1)$;

- caso o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x \frac{1}{\log t} dt}$$

exista, então o seu valor só pode ser 1.

O artigo de Riemann

O artigo de Riemann não é um artigo de matemática no sentido usual do termo. É sobretudo um programa de pesquisa que pretende levar a uma demonstração da conjectura de Legendre.

A expressão (1) para $\zeta(n)$ foi definida para valores naturais de $n > 1$. Naturalmente, definir $\zeta(n)$ daquele modo continua a fazer sentido para qualquer $n \in]1, +\infty[$. O que Riemann fez foi definir $\zeta(s)$ para qualquer número complexo s diferente de 1. A definição dele é complexa (sem trocadilhos!), mas vamos ver como se pode prolongar ζ ao conjunto dos números complexos s tais que $\Re(s) > 0$ (e com $s \neq 1$). Para começar, convém definir $n^s = e^{s \log n}$, para cada $s \in \mathbb{C}$. Não é difícil provar que

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \quad (4)$$

converge (e até converge absolutamente) quando $\Re(s) > 1$. No entanto, a série (4) diverge quando $\Re(s) < 1$. Por outro lado, se $\Re(s) > 1$ tem-se

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} + 2^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} + 2^{1-s} \zeta(s). \end{aligned}$$

Logo,

$$\zeta(s) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}}{1 - 2^{1-s}}. \quad (5)$$

Acontece que o numerador do membro da direita desta igualdade é uma série que converge sempre que $\Re(s) > 0$. Isto permite então definir $\zeta(s)$ para cada número complexo s com parte real positiva, excepto aqueles para os quais $2^{1-s} = 1$, ou seja, excepto para os números s da forma $1 - \frac{2\pi in}{\log 2}$, com $n \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, se se definir

$$a_n = \begin{cases} -2 & \text{se } n \text{ for múltiplo de } 3 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

então cálculos semelhantes aos anteriores mostram que

$$\zeta(s) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}}{1 - 3^{1-s}}. \quad (6)$$

Isto permite definir $\zeta(s)$ para cada número complexo s com parte real positiva, excepto os números s da forma $1 - \frac{2\pi in}{\log 3}$, com $n \in \mathbb{Z}$. As expressões (5) e (6) em conjunto permitem definir $\zeta(s)$ para cada $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tal que $\Re(s) > 0$.

Riemann encontrou uma expressão analítica que permitia definir $\zeta(s)$ para cada $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. É natural que não se possa prolongar a 1, pois o limite de $\zeta(s)$ quando s tende para 1 por valores reais maiores do que 1 é $+\infty$. Isto tanto pode ser demonstrado a partir de (4) como (mais facilmente) a partir de (5).

Considerando agora ζ como uma função de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ em \mathbb{C} , Riemann mostrou facilmente que $\zeta(s) = 0$ quando s é um inteiro par menor do que 0 e observou que resulta do produto euleriano (2) que $\zeta(s)$ não tem zeros tais que $\Re(s) > 1$. Riemann também provou que, a não ser quando s ou $1-s$ é um inteiro par menor do que 0, $\zeta(s) = 0$ se e só se $\zeta(1-s) = 0$. Resulta disto tudo que, com excepção dos inteiros pares menores do que 0 (que se designam por *zeros triviais* da função ζ), todos os zeros da função ζ estão na faixa crítica: $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(s) < 1\}$.

Prova-se facilmente que, para cada $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\zeta(s) = \overline{\zeta(\bar{s})}$. Em particular, se s for um zero da função ζ , então \bar{s} também o é. Consequentemente, se se está à procura de zeros da função ζ basta procurar aqueles que têm parte imaginária maior ou igual a 0 e vão ser só estes que serão considerados a partir deste ponto.

Riemann fez uma estimativa de quantos zeros há na faixa crítica com parte imaginária entre 0 e T ($T > 0$) e obteve

$$\frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}. \quad (7)$$

Em seguida, Riemann afirmou que este número também era uma estimativa para o número de zeros p situados na *recta crítica* $\{\frac{1}{2} + ti \mid t \in \mathbb{R}\}$ tais que $0 < \Im(\rho) < T$. Foi neste contexto que formulou a sua famosa hipótese:

Todos os zeros não triviais da função ζ estão na recta crítica.

É natural nesta fase ocorrer uma pergunta. O que é que tudo isto tem a ver com a conjectura de Legendre? Até aqui, a única relação que foi vista entre a função ζ e números primos foi o produto euleriano (2). Para se ver a relação entre as duas coisas, considere-se a função de Möbius $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, assim definida: se $n \in \mathbb{N}$, então

- se n for múltiplo de algum quadrado perfeito maior do que 1, $\mu(n) = 0$;
- caso contrário, $\mu(n) = 1$ (respectivamente -1) caso n tenha um número par (resp. ímpar) de factores primos.

Seja também, para cada $x \in]1, +\infty[$,

$$\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\log t} dt + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{1}{\log t} dt \right).$$

Riemann conjecturou que

$$\text{Li}(x) - \frac{\text{Li}(\sqrt{x})}{2} - \frac{\text{Li}(\sqrt[3]{x})}{3} - \frac{\text{Li}(\sqrt[5]{x})}{5} + \frac{\text{Li}(\sqrt[7]{x})}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \text{Li}\left(\frac{x}{n}\right) \quad (8)$$

seria uma excelente aproximação de $\pi(x)$. Empiricamente isto é plausível; por exemplo, se $n(\in\mathbb{N}) < 1\,000\,000$, então a diferença entre $\pi(n)$ e a soma dos quatro primeiros termos não nulos da série (8) não excede 37. Para se ter uma ideia da ordem de grandeza dos números com que se está a trabalhar, basta ver que $\pi(1\,000\,000) = 78\,498$.

Como $\text{Li}(x)$ e $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$ diferem por uma constante ($\sim 1,04516$), há uma relação clara entre a aproximação de $\pi(x)$ que Riemann conjecturou e a conjectura de Legendre.

Convém observar que existe uma relação directa entre a função de Möbius e a função ζ : se $s \in \mathbb{C}$ e se $\Re(s) > 1$, então

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right).$$

Após Riemann

O artigo de Riemann estava tão avançado em relação ao seu tempo que tiveram de decorrer mais de trinta anos até haver avanços relativamente ao que lá vem. Só em 1896 é que Jacques Hadamard e Charles de la Vallée Poussin demonstraram (independentemente um do outro) a conjectura de Legendre, a qual passou a ser conhecida por *teorema dos números primos*. A demonstração envolveu o estudo dos zeros da função ζ , mas o que provaram foi somente que esta não tem zeros na fronteira da faixa crítica, ou seja, não tem zeros da forma it ou $1+it$ ($t \in \mathbb{R}$). Para se ter uma ideia da complexidade do estudo deste problema, basta ver o gráfico da restrição de $|\zeta|$ ao eixo dos imaginários puros, representado na figura 2. Até hoje, ninguém conseguiu provar que existe algum $\delta < \frac{1}{2}$ tal que todos os zeros não triviais da função ζ estejam na faixa $\{s \in \mathbb{C} \mid \delta < \Re(s) < 1-\delta\}$.

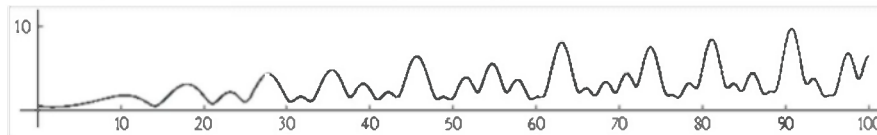


Figura 2: Gráfico de $t \rightarrow |\zeta(it)|$ ($t \in [0,100]$)

O artigo de Riemann continuou a ser fonte de inspiração para muitos matemáticos que trabalharam nesta área. Parte desse trabalho consistiu em encontrar as demonstrações de muitas afirmações aí feitas por Riemann, as quais, aparentemente, eram por ele encaradas como estando completamente demonstradas. Um exemplo entre outros consiste na estimativa (7) apresentada por Riemann para o número de zeros da função ζ no rectângulo que tem por vértices $0, 1, 1 + Ti$ e Ti ($T > 0$). Só em 1905 é que von Mangoldt conseguiu demonstrar que estava correcta.

Desde o fim do século XIX que se estudam por métodos numéricos os zeros da função ζ na faixa crítica. De facto, o próprio Riemann já fizera isso, mas não revelou esse facto no artigo de 1859. Foi somente em 1932 que Carl Ludwig Siegel publicou uma análise dos apontamentos de Riemann que estavam depositados na Universidade de Göttingen. Foi aí descoberta uma fórmula, actualmente conhecida por *fórmula de Riemann-Siegel*, que permite encontrar zeros da função ζ . Riemann chegou a usar essa fórmula para introduzir os três primeiros zeros da função ζ da forma $\frac{1}{2} + ti$ ($t > 0$): correspondem a tomar-se $t \sim 14,135$, $t \sim 21,022$ e $t \sim 25,011$. Levando essa análise um pouco mais longe, pode-se mostrar que não há mais zeros da função ζ na faixa crítica com parte imaginária positiva e menor ou igual ao maior dos três. Esta análise numérica aos zeros da função ζ foi levada cada vez mais longe ao longo dos anos; os primeiros dez zeros situados na faixa crítica podem ser vistos na figura 3. Conhecem-se actualmente biliões de zeros da função ζ situados na faixa crítica e têm todos parte real igual a $\frac{1}{2}$.

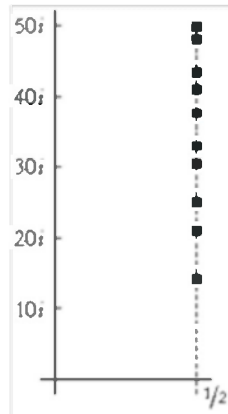


Figura 3 : Os primeiros dez zeros não triviais da função ζ

Este tipo de verificações numéricas são provavelmente encaradas por muitas pessoas como uma prova, para todos os efeitos práticos, da hipótese de Riemann. Para se ver o cuidado que se deve ter com este tipo de "demonstrações", considere-se novamente a figura 1. Como se pode aí ver, tem-se sempre (i. e. sempre que

$1 < x < 10\,000$) $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt > \pi(x)$. Como $\text{Li}(x)$ é ligeiramente maior que $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$ tem-se, por maioria de razão,

que $\text{Li}(x) > \pi(x)$. Será que a desigualdade $\text{Li}(x) > \pi(x)$ se verifica para qualquer $x > 1$? De facto não; em 1914 Littlewood provou que há números x tais que $\text{Li}(x) < \pi(x)$. No entanto, os números para os quais se tem esta desigualdade são tão grandes que nunca se encontrou nenhum.

Naturalmente, foram surgindo ao longo dos anos resultados teóricos cada vez mais precisos sobre os zeros da função Riemann. Por exemplo, em 1914 Hardy demonstrou que a função ζ tem uma infinidade de zeros na recta crítica. Sete anos mais tarde, Hardy e Littlewood demonstraram que existe algum número $K > 0$ tal que o número de zeros da função ζ no segmento que une $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2} + ti$ é maior do que Kt , desde que t seja suficientemente grande. Em 1942, Selberg provou que o mesmo é verdade se se tiver $Kt \log t$ em vez de Kt .

Outras formulações

A hipótese de Riemann é formulada em termos da localização dos zeros de uma função de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ em \mathbb{C} cuja definição não é trivial. Felizmente, há outros enunciados equivalentes mais fáceis de compreender. Um deles é: a função

$$x \mapsto \frac{\pi(x) - \text{Li}(x)}{\sqrt{x} \log x}$$

é limitada. Outro enunciado equivalente pode ser obtido a partir da função de Möbius. É o seguinte: para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sum_{k=1}^n \mu(k)}{n^{1/2+\varepsilon}} = 0.$$

Convém ver o que significa o numerador da expressão anterior. Diz-se que um número natural n é livre de quadrados se não for múltiplo de nenhum quadrado perfeito maior do que 1. Resulta da definição da função μ que, se $n \in \mathbb{N}$, então $|\sum_{k=1}^n \mu(k)|$ é a diferença entre o número de naturais em $[1, n]$ livres de quadrados que têm um número par de factores primos e o número de naturais em $[1, n]$ livres de quadrados que têm um número ímpar de factores primos. Assim, por exemplo, há 13 números livres de quadrados menores ou iguais a 20:

1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,17,19,

estando sublinhados aqueles que têm um número par de factores primos, que são cinco no total. Logo, $|\sum_{k=1}^{20} \mu(k)|=3$. Um enunciado equivalente à hipótese de Riemann é: se $\varepsilon > 1$ e se $n \in \mathbb{N}$ for suficientemente grande, então $|\sum_{k=1}^n \mu(k)| < n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Em 1897, Mertens propôs uma conjectura muito mais forte, a *hipótese de Mertens*:


$$\text{Se } n \in \mathbb{N}, \text{ então } |\sum_{k=1}^n \mu(k)| < \sqrt{n}.$$

Durante muito tempo, todos os dados numéricos disponíveis apoiavam esta hipótese, mas, de facto, é falsa, o que só foi provado em 1985. No entanto, ainda não se conhece nenhum contra-exemplo à hipótese de Mertens, mas sabe-se que um tal contra-exemplo tem que ser maior do que 10^{14} .

Conclusão

Tudo o que foi escrito atrás deve explicar porque é que a hipótese de Riemann é um problema em aberto tão famoso. Desde que foi formulada que tem captado a imaginação de alguns dos maiores matemáticos de mundo. Conta-se, por exemplo, que o exemplar de Hurwitz das obras completas de Riemann tinha a lombada gasta de tal modo que se o deixasse cair ele abria na página onde está formulada a hipótese. Outro matemático fascinado por ela foi André Weil, que declarou certa vez numa entrevista que, durante muito tempo, acalentou a ambição de a demonstrar e de publicar a demonstração em 1959, no centenário da publicação da hipótese. Mas aquele ano passou sem que ele tivesse tido sucesso. Depois, o seu desejo passou a ser somente o de compreender a demonstração quando alguém a publicasse. Perto do fim da vida, desejava somente que a demonstração fosse feita em vida dele, mas nem essa ambição foi satisfeita.

Convém dizer que uma conjectura formulada por Weil sobre os zeros de certas funções de uma variável complexa é análoga à hipótese de Riemann e foi demonstrada por Pierre Deligne em 1974. Este facto é frequentemente apresentado como um dos argumentos mais convincentes para a plausibilidade da hipótese de Riemann.

Em 1900, Hilbert fez uma palestra no Congresso Internacional de Matemáticos onde expôs uma lista de 23 problemas matemáticos particularmente importantes. E provavelmente a lista de problemas mais famosa da história da matemática, mas no ano 2000 surgiu outra que tem rivalizado com a de Hilbert em termos de impacto mediático: é a lista dos problemas do milénio, do Instituto Clay de Matemática. Não admira que o único problema comum a ambas as listas seja a hipótese de Riemann. 

A Toalha da Sorte

Caro leitor,

Imagine que está a preparar a festa de casamento da sua filha. Tudo é preparado sem olhar a gastos, para que a sorte acompanhe os noivos...

Os jardineiros já preparam as flores, a casa com jardim alugada, por um preço justo, mas alto, já alberga as mesas do copo de água, com uma enorme mesa central, cujo tampo está a ser limpo e prestes a receber a toalha bordada com o padrão das demais mesas.

A toalha! Falta a toalha para a mesa principal! Como foi possível esquecer-se dela? Pensa: “o dinheiro não pode ser problema, mas onde poderei encontrar uma toalha tão grande e com o mesmo padrão das demais mesas?” Para além de que está a um dia do grande evento da sua vida...

Lembra-se então de que tem em casa vários rolos de tecido com larguras variadas e cores diferentes. A sua intuição diz-lhe que há males que vêm por bem, e que uma toalha às cores garantirá que a sorte acompanhe os noivos para o resto da vida. Temos que verificar rapidamente se é possível cobrir a mesa com os rolos. Mas nada pode ficar a descoberto, i.e. a mesa deve ficar coberta do tampo aos pés.

Deu consigo a calcular de forma aproximada a área de tecido suficiente para confeccionar a toalha. Dizia para si: “a mesa tem 9 metros de diâmetro e 1 metro de altura, os rolos têm todos 10 metros de comprimento por 0.5, 1.1, 1.2 ou 2 metros de largura. Portanto tem que cobrir uma área de $(\frac{9}{2})^2 \pi = (804) \times 3 = 60 \text{ m}^2$ com tiras de tecido de $10 \times 7.5 = 75 \text{ m}^2$ de superfície.

A sua formação de engenheiro dizia-lhe que tudo se consegue. Ótimo! Esta conclusão resultou da urgência da situação em que se encontrava, pois a pressa pouco espaço deixa para qualquer reflexão aprofundada...

É neste contexto que surge o nosso primeiro problema.

Problema 1: Pegue em fitas e num disco de papel ou cartolina. Encontre condições necessárias e suficientes para cobrir completamente um disco circular de diâmetro d com n fitas de comprimento maior do que d e de larguras d_1, d_2, \dots, d_n . Ver figura 1.

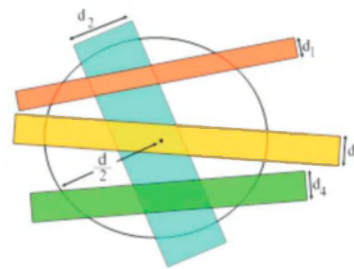


Figura 1

Foi o famoso matemático polaco Alfred Tarski que propôs o seguinte problema: *Suponha que uma região convexa e compacta D do plano é coberta por um número numerável de fitas retangulares. Será que a soma das suas larguras domina a largura de D ?*

Foram muitos os matemáticos que tentaram em vão resolver este problema, até que 20 anos mais tarde o dinamarquês Thøger Bang o resolveu.

Como em muitos outros problemas matemáticos, a solução para o caso especial do disco aqui proposto, o dado fundamental encontra-se numa ideia de Arquimedes no livro *Sobre a Esfera e o Cilindro*, que passaremos a analisar, estabelecendo pontes para a sua aplicação.

Canto Delfico

[A Toalha da Sorte]

O leitor observe a figura 2. Vemos uma esfera S dentro de um cilindro C com o mesmo diâmetro e altura. Uma semi-recta com origem no eixo de C e perpendicular a este projecta cada ponto p de S radialmente para um ponto \hat{p} de C . Entre dois quaisquer planos paralelos da esfera de S encontramos ainda uma certa região B acinzentada e a sua imagem radial \hat{B} em C .

Problema 2: (Ideia de Arquimedes)

a. As áreas de B em S e da sua imagem \hat{B} em C obedecem a uma relação muito simples. Qual é? Demonstre esta relação.

b. Que consequência importante tem este resultado para a cartografia?

c. Em particular podemos tirar daí a fórmula para a área da esfera?

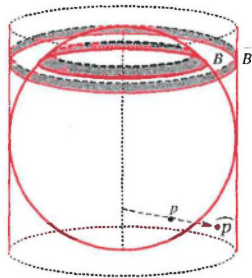


Figura 2

Resolvido este segundo problema, o leitor está quase em condições de provar a conjectura.

Problema 3: Observe a figura 3 e pense em medir as áreas do disco, não de forma convencional, mas através das áreas projectadas para a esfera. De tal modo que mesmo pequenas parcelas perto da fronteira do disco têm uma área grande (cf. figura 3). Prove a conjectura estabelecida no problema 1.

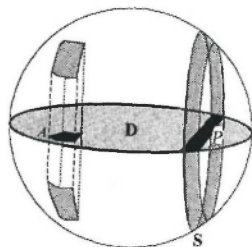


Figura 3

Um enredo de ideias absolutamente extraordinário...

Bem, como ainda temos algum espaço vamos resolver o primeiro problema que colocámos há cerca de um ano, em Julho de 2008, na coluna de abertura, sobre Balanças e Alavancas (cf. *Gazeta de Matemática* n.º 155). Deixamos para o próximo número as resoluções correctas dos problemas 2 e 3 do Canto III, pelo leitor Carlos Alberto Silva Gomes.

Problema: Pretendemos projectar uma alavanca com as seguintes características. Será uma régua (imponderável!) com um fulcro e quatro furos para enganchar pesos: um furo do lado esquerdo do fulcro e três furos do lado direito. Há três pesos fixos que deverão, em cada pesagem, enganchar-se nos três furos do lado direito, um em cada furo. A carga a pesar será colocada no furo à esquerda, e queremos que seja possível pesar cargas com pesos de 1, 2, 3, 4, 5 e 6 quilogramas. Será possível cumprir este projecto? Se sim, diga como.

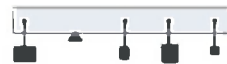


Figura 4

Solução: Vamos provar por redução ao absurdo que é impossível projectar tal alavanca. Suponhamos a existência de uma balança consistindo em pesos padrão $p_1 < p_2 < p_3$ e uma alavanca com distâncias dos furos do lado direito ao fulcro dadas por $0 < d_1 < d_2 < d_3$; ver figura 4. Sem perda de generalidade podemos supor o furo do lado esquerdo a uma distância 1 do fulcro. Há seis maneiras de enganchar os pesos p_i : são parametrizadas pelas seis permutações π dos inteiros 1, 2, 3. Se escrevermos $\pi = 231$, digamos, isto significa $\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 1$. Segundo a lei de Arquimedes sabemos que a carga C_π equilibrada pela permutação π dos pesos padrão, isto é, pondo o peso padrão $P_{\pi(i)}$ no

$$i\text{-ésimo buraco, } i=1,2,3 \text{ é dada por } C_\pi = \sum_{i=1}^3 p_{\pi(i)} d_i.$$

Como falamos de seis cargas distintas, 1, 2, 3, 4, 5, 6, precisamos, de facto, de distâncias e de pesos diferentes: as desigualdades acima são estritas. É fácil ver que sempre que trocarmos as posições de um peso

p' mais perto do fulcro por um peso menor p mais longe do fulcro, precisamos para restabelecer o equilíbrio de uma carga maior do que antes: isto é consequência da desigualdade $p'd+pd' < pd+p'd'$ sendo $0 < p < p', 0 < d < d'$.

Isto dá-nos informação parcial sobre quais os pesos que determinada permutação eventualmente permite equilibrar.

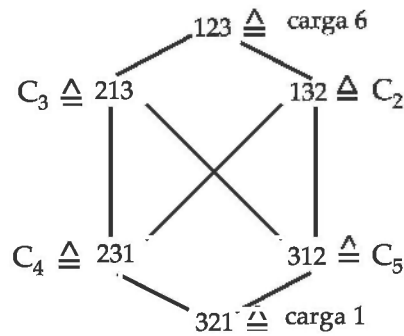


Figura 5

O diagrama da figura 5 resume esta informação. As cargas 1, 2, 3, 4, 5, 6 a equilibrar devem estar associadas aos vértices de modo que qualquer caminho ascendente ligue cargas crescentes. Em particular, a menor carga, 1, deve ser equilibrada pela permutação 321 à maior, 6, pela permutação 123. A permutação 231 equilibra uma menor carga do que 132, etc; vemos que as cargas 2, 3, 4, 5 devem ser associadas aos quatro vértices restantes numa das quatro formas

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & ' & 2 & 3 & ' & 3 & 2 & ' & 3 & 2 & ' \end{matrix}$$

onde as posições relativas correspondem às posições dos quatro vértices no meio do diagrama. Cada

escolha define um esquema $c_3 \ c_2$
 $c_4 \ c_5$.

O nosso problema é decidir se existem escolhas p, d, e um esquema de cargas como sendo um dos quatro indicados de modo que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_1 \\ p_3 & p_1 & p_2 \\ p_3 & p_2 & p_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tenha solução. Ora se subtrairmos a equação da linha 6 à da linha 1, isto é, se fizermos uma operação que denotamos $l_1 - l_6$, obtemos

$$\begin{aligned} (p_1 - p_3) d_1 + (p_3 - p_1) d_3 \\ = (p_1 - p_3)(d_1 - d_3) = 6 - 1 = 5 \end{aligned}$$

De formas semelhantes $l_5 - l_3$ dá $(p_3 - p_2)(d_1 - d_3) = c_5 - c_3$, e finalmente $l_4 - l_2$ dá $(p_2 - p_1)(d_1 - d_3) = c_4 - c_2$.

Mas como $d_1 \neq d_3$, obtemos, somando estas equações, que a condição

$$0 = 5 + c_4 + c_5 - c_2 - c_3 =: s$$

é necessária para solubilidade do sistema.

Ora como as quatro atribuições possíveis dos inteiros 2, 3, 4, 5 às variáveis c_2, c_3, c_4, c_5 dão todas $c_4 + c_5 = 5$, $c_2 + c_3 = 9$, vemos que

$$s = 10 - 9 = 1 \neq 0$$

Logo não existe a alavanca projectada.

Esperamos pela sua resolução destes três problemas, bem como pela resolução dos problemas propostos nos cantos anteriores. **M**

Envie as soluções para

Projecto Delfos
Departamento de Matemática da FCTUC
Apartado 3008
EC Universidade
3001-454 COIMBRA

16 de Abril de 1178 A.C.: o dia em que Odisseu encontrou Penélope

Num épico onde Penélope é a Lua (faz e desfaz a sua colcha de tricô, como as fases da Lua) e Odisseu o Sol (navega de leste para oeste, desaparece nos subterrâneos da Terra e retorna a partir do leste), o seu encontro final só poderia mesmo ser durante um eclipse. Três mil anos depois, a astronomia, a física e a matemática unem-se para desvendar um dos maiores encontros amorosos de sempre.

Odisseu foi um dos heróis gregos da Guerra de Tróia; foi sua a ideia de introduzir um cavalo cheio de guerreiros na cidade inimiga. A sua saga de retorno a casa é magistralmente descrita pelo poeta Homero em uma das obras fundadoras da cultura ocidental: a *Odisseia*. Enquanto enfrentava perigos vários pelo caminho (dizem até que fundou Lisboa), numa longa viagem de dez anos, Penélope, a sua fiel esposa, recusava as pressões paternas para um novo casamento: “só quando

terminar esta colcha”, que tricotava de dia e desfazia de noite, para espanto dos seus compatriotas, que não entendiam como nunca terminava os seus afazeres.

Quando o monarca finalmente chegou ao seu reino, a ilha de Ítaca, na costa ocidental da Grécia, Penélope estava cercada de

pretendentes, que desejavam desposá-la. Com a sua subtileza habitual, o recém retornado matou a todos, num evento conhecido como o “massacre dos pretendentes”. Logo depois descreveu à sua amada a cama com que a havia presenteado e foi reconhecido como o esperado marido. Terminou a epopeia declarando paz duradoura no reino.

Sempre houve dúvidas quanto à veracidade das histórias descritas na *Iliada* e na *Odisseia*. Até fins do século XIX nem mesmo a existência de Tróia era ponto pacífico. No final daquele século, o arqueólogo alemão Heinrich Schliemann, guiado por passagens destes livros e levando em consideração as alterações naturais do relevo (algo que algumas gerações antes não se acreditava possível), foi capaz de achar o local exacto da cidade destruída. A ciência já havia descoberto *onde*. Agora é a vez do *quando*.

A *Odisseia* possui algumas passagens que uma leitura cuidadosa pode identificar como referências a efemérides. Baikouzis e Magnasco [1] identificam quatro destas que lhes pareceram particularmente explícitas: no dia do “massacre dos pretendentes” a Lua é Nova (dois dias antes do encontro com Penélope, o próprio herói, disfarçado, anuncia a sua chegada no início do próximo ciclo lunar). Vamos chamar este dia de *T*. Cinco dias antes, em *T-5*, quando chega à ilha de boleia com os Feácios (vindo provavelmente da ilha grega de Corfu), o planeta Vénus é claramente visível pouco antes da alvorada.

No dia *T-34*, Zeus envia o seu mensageiro Hermes à ilha de Ogígia, de onde sobe aos céus e retorna imediatamente depois de dar o recado. Tradicionalmente, Hermes é identificado com o planeta Mercúrio, o que mais rápido se move no céu, sempre junto ao oceano e que, por vezes, realiza um



Figura 1 – Representação clássica do encontro entre Odisseu e Penélope.

movimento retrógrado (o seu sentido aparente de movimento é invertido), cuja data inicial será exactamente $T-34$.

Cinco dias depois de receber a mensagem de Hermes, Odisseu zarpa com a instrução de navegar com “a constelação do Boieiro (Boötes), olhando para as Plêiades, e com a Ursa (maior) à esquerda”. Navega durante 17 dias, até naufragar. Como as duas primeiras constelações não estão visíveis o ano inteiro, a sua viagem deve estar compreendida entre 17 de Fevereiro e 4 de Abril.

As estimativas históricas indicam que o fim da Guerra de Tróia foi entre 1240 e 1125 a.C. (estimativas arqueológicas datam-no em cerca de 1190 a.C.). Obtendo para cada ano todas as Luas Novas compatíveis com as datas acima, só existe uma que preenche os quatro requerimentos: o encontro foi no dia 16 de Abril de 1178 a.C., dia em que finalmente Penélope reconheceu o seu marido. Esta quadra de efemérides acontece apenas uma vez a cada dois mil anos, portanto a existência de uma data que a satisfaz, em uma época historicamente compatível com a guerra de Tróia, não deve ser uma coincidência.

Outras passagens da *Odisseia* dão mais dicas sobre as épocas do ano: o naufrágio final do barco de Odisseu dá-se quando “Poseidon retorna da Etiópia”. Normalmente isto é interpretado como a passagem da eclíptica (trajectória aparente do Sol) para o hemisfério Norte, e portanto com o equinócio de Primavera (no início de Abril, pois trata-se do calendário Juliano), duas datas que ficam próximas de satisfazer os quatro requerimentos básicos acima falham completamente neste último. O dia do naufrágio é o dia em que as Plêiades desaparecem no horizonte, e portanto Odisseu não poderia seguir mais as instruções de Zeus.

Não só os versos da *Odisseia* são compatíveis com a data acima; também o que não está lá aponta na mesma direcção. Ares, uma importante deidade grega, não aparece em momento algum da epopeia.

Marte, o planeta que a representa, esteve ausente do céu durante todo este período.

No entanto, um importante facto não poderia em hipótese alguma passar despercebido. Neste dia, um eclipse total do Sol varreu as ilhas Jónicas, uma das quais é Ítaca. Não há como não notar: como o olho se adapta à falta progressiva da luz, não reparamos nele

até um estado avançado. Poucos segundos antes da totalidade o brilho do Sol ainda é milhares de vezes maior que o da Lua Cheia. Repentinamente, a luminosidade cai, as estrelas tornam-se visíveis e a temperatura desce alguns graus. Os animais ficam inquietos e os humanos espantados. Porquê então tantas referências sofisticadas à astronomia e não a algo mais directo?

Porque a profecia de Teoclimeno sobre o massacre dos pretendentes, “quando o Sol for exterminado do céu e uma escuridão agourenta invadir o mundo”, sempre foi considerada pelos estudiosos como uma alegoria e não como a descrição de um eclipse total do Sol. Na década de 1920, os astrónomos Schoch e Neugebauer já a haviam interpretado desta forma (na verdade, Plutarco e Heráclito precederam-nos, mas não dominavam a técnica de cálculos astronómicos), e, considerando as datas arqueológicas da guerra de Tróia, obtidas poucos anos antes, calcularam o dia de 16 de Abril de 1178 a.C. como data provável do famoso encontro. Neste dia ocorreu o único eclipse solar total na região em mais de um século.

Desta forma, os dois conjuntos de dados obtidos a partir de passagens distintas da *Odisseia* indicam a mesma data. Como Homero, autor do poema mais de três séculos após os supostos factos, poderia saber de todos estes pormenores continua um mistério. Uma longa e consistente tradição oral foi certamente necessária para transmitir toda esta sequência detalhada de eventos, na Terra e no Céu. □



Figura 2 – O eclipse de 16 de Abril de 1178 a.C. visto de cima. A faixa estreita mais escura representa a região de totalidade, que cruza a ilha de Ítaca; a faixa de coloração mais clara indica a região de penumbra. (As figuras 2 e 3 foram gentilmente cedidas pelos autores do artigo.)

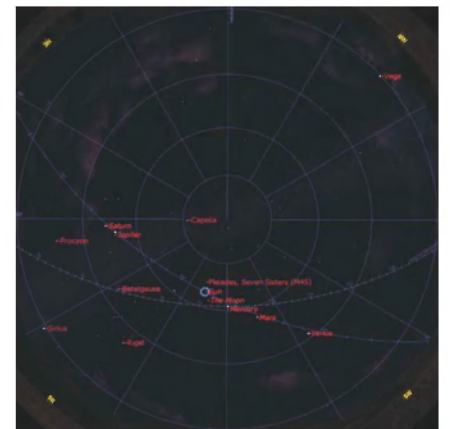


Figura 3 – O eclipse de 16 de Abril de 1178 a.C. visto de baixo. Representação do céu que Odisseu e Penélope viram. Todos os planetas conhecidos estiveram visíveis simultaneamente em um arco de apenas 90 graus.

Referências

[1] Baikouzis, C. e Magnasco, M. O. (2008). “Is an eclipse described in the Odyssey?” *Proc. Natl. Acad. Sciences* 105(26) 8823-8828.

Apanhados na Rede

por António Machiavelo

[Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]

A Astronomia, a Matemática e o Lado Escuro do Universo

A astronomia e a matemática têm uma profícua relação simbiótica há milénios. A colaboração destas duas ciências deu-nos a forma do “Mundo”. Tenta-se agora descobrir a forma do Universo e determinar a natureza da misteriosa “matéria escura” e da ainda mais enigmática “energia escura”...

A matemática cresceu, em grande parte, de mãos dadas com a astronomia. Habitados que estamos às comodidades do mundo actual, esquecemos, ou nem sequer sabemos, que a investigação das regularidades e irregularidades dos movimentos dos astros foi fundamental para ajudar a prever a chegada das estações, o que foi, e ainda é, essencial para a agricultura, e que desempenhou um papel imprescindível na navegação. As civilizações necessitam de mapas e calendários, e estes não podem ser elaborados sem se recorrer a cuidadosas observações astronómicas e ferramentas matemáticas.

A matemática muito deve à astronomia, assim como à geografia, tendo vários resultados em geometria sido motivados por problemas oriundos dessas duas ciências e, muito possivelmente, toda a área da trigonometria nasceu e cresceu de investigações nesses domínios. Reciprocamente, muitas descobertas em astronomia não teriam sido possíveis sem o precioso auxílio de técnicas matemáticas, algumas das quais desenvolvidas com outros propósitos.

É, pois, natural que na introdução ao livro I do seu famoso tratado *As Revoluções das Orbes Celestes*¹, Nicolau Copérnico (1473–1543) escreva que a astronomia era para muitos dos autores clássicos “a consumação da matemática”. Dois exemplos disto que, na minha opinião, deviam ser apresentados com

algum cuidado e detalhe no ensino da matemática dirigido a todos os alunos, seja no ensino básico, seja no secundário, conforme o caso, são a estimativa da circunferência², ou equivalentemente do diâmetro, do planeta que habitamos feita por Eratóstenes de Cirene (ca. 276 a.C. – ca. 194 a.C.), e uma ideia precisa do uso e importância da trigonometria na obra de Cláudio Ptolomeu (ca. 85 d.C. – ca. 165 d. C.), que ficou conhecida como *Almagesto*.

Eratóstenes usou geometria elementar de um modo simples e engenhoso para realizar um feito notável: estimar o tamanho do enorme globo que habitamos sem qualquer necessidade de o circunnavegar. Uma descrição interessante desta proeza foi feita por Carl Sagan na série televisiva *Cosmos*, um dos melhores trabalhos de divulgação científica de sempre. Muitos excertos de vários episódios estão disponíveis no *You Tube*, em particular o fragmento sobre Eratóstenes³.

A obra de Ptolomeu, que este intitulou simplesmente *Composição Matemática*, e à qual matemáticos e astrónomos árabes do período por vezes designado por Renascença Islâmica viriam a chamar *O Livro Majestoso*, de onde provém o nome pelo qual a obra é agora conhecida, *Almagesto* (literalmente, “o majestoso”), é uma das obras mais influentes de sempre e inteiramente merecedora dessa alcunha. Nela, Ptolomeu desenvolve uma teoria planetária bastante engenhosa⁴, baseada em métodos

¹Na página 13 da edição publicada pela Fundação Calouste Gulbenkian em 1984.

²Entendida aqui como o perímetro de um círculo máximo.

³Para o encontrar basta pesquisar, no *You Tube*, “Sagan + Eratosthenes”. Ver também <http://galileoandstein.physics.virginia.edu/lectures/gkastr1.html>

⁴Em <http://farside.ph.utexas.edu/syntaxis.html>, Richard Kilpatrick tem uma reconstrução do modelo Ptolemaico usando notação moderna, por forma a facilitar a compreensão da extensão das realizações científicas de Ptolomeu. Ver também http://galileoandstein.physics.virginia.edu/lectures/greek_astro.htm Ver ainda a página <http://people.sc.fsu.edu/~dduke>, que contém, entre outras coisas, animações de modelos Ptolemaicos de movimento planetário.

desenvolvidos por alguns dos seus predecessores, entre os quais merece especial destaque Hiparco de Nicéia (ca. 190 – ca. 120 a.C.). Como Otto Neugebauer comenta⁵:

O “sistema Ptolemaico” tem sido frequentemente censurado pela preservação por quase 1500 anos de uma estreita, e no entanto demasiado complicada, visão do mundo. É apenas justo sublinhar o facto de que este sistema preservou, pela mesma extensão de tempo, a tradição dos métodos matemáticos que se tornaram instrumentos poderosos nas mãos de Copérnico, Tycho Brahe e Kepler.

No *Almagesto* é exposto um belíssimo resultado de geometria, hoje conhecido como Teorema de Ptolomeu. É bastante provável que este resultado seja bem anterior a Ptolomeu, mas não se conhecendo as suas origens e uma vez que a sua exposição no *Almagesto* é clara e elegante, a designação poderá não ser de todo injusta. O resultado é o seguinte: num quadrilátero inscrito num círculo, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados

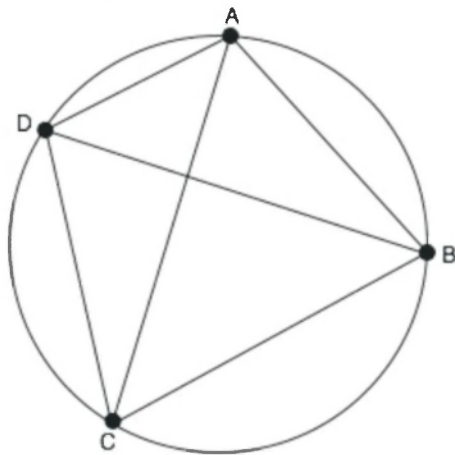


Figura 1: Teorema de Ptolomeu

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$$

opostos (ver figura 1). Este teorema é usado por Ptolomeu para dele deduzir resultados auxiliares para a construção de uma tabela de cordas, útil para diversos cálculos astronómicos, ou seja, uma tabela fornecendo, num determinado círculo, os comprimentos de um certo número de cordas em função dos respectivos arcos. Entre outras coisas, Ptolomeu mostra como usar o teorema referido para, dadas duas cordas determinadas por dois arcos, calcular a corda correspondente à diferença desses arcos. O que obtém corresponde exactamente à fórmula que fornece o seno da diferença de dois ângulos à custa dos senos e cossenos dos respectivos ângulos⁶. É pena que esta fórmula quase nunca seja apresentada neste contexto, em que se percebe a motivação para a sua descoberta.

Discrepâncias entre aquilo que é esperado ou previsto por um modelo matemático e aquilo que é observado foram sempre importantes fontes de descoberta, conduzindo a aperfeiçoamentos dos respectivos modelos ou a importantes mudanças de paradigmas científicos. Nas últimas décadas, algumas dessas discrepâncias surpreenderam a comunidade científica, mostrando que o Universo é ainda mais misterioso do que até então se imaginava. Por um lado, nos fins da década de 1960 e início da de

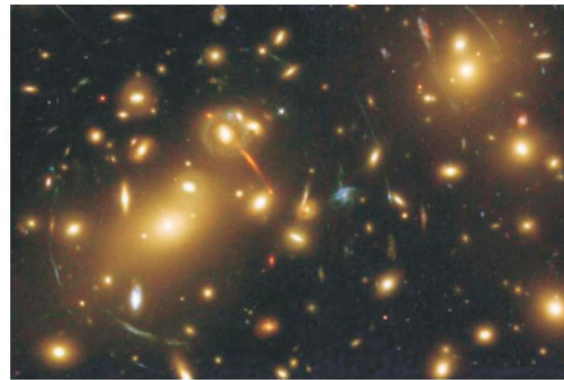


Imagem: Hubble

Figura 2: Lente gravitacional

⁵No fim da página 1015 do artigo, disponível *online*, “Mathematical Methods in Ancient Astronomy”, *Bulletin of the AMS* 54 (1948) 1013–1041.

⁶Para mais detalhes, ver http://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy's_theorem, o livro *Trigonometric Delights* de Eli Maor, disponível *online* em <http://press.princeton.edu/books/maor> e o capítulo XII do Livro I na edição da Fundação Calouste Gulbenkian da obra de Copérnico acima mencionada.

⁷Na década de 1930, um fenómeno análogo tinha já sido observado num aglomerado de galáxias pelo astrofísico Fritz Zwicky, mas esta descoberta foi praticamente ignorada. Ver http://en.wikipedia.org/wiki/Dark_matter e <http://www.slac.stanford.edu/pubs/beamline/31/1/31-1-maurer.pdf>.

⁸Como, por exemplo, lentes gravitacionais, como a da imagem na figura 2, que é provocada pelo aglomerado de galáxias Abell 1689.

⁹Para mais informações sobre este assunto, ver: http://chandra.harvard.edu/xray_astro/dark_matter

Apanhados na Rede

[A Astronomia, a Matemática e o Lado Escuro do Universo]

1970, uma jovem astrónoma, Vera Rubin, descobriu que as estrelas de muitas galáxias orbitam em torno do respectivo centro galáctico de uma forma totalmente inesperada⁷. Estas e outras observações subsequentes⁸ apontam para a existência daquilo que é designado por *matéria escura*, por não emitir nem absorver qualquer radiação no espectro electromagnético, sendo apenas detectável através dos seus efeitos gravitacionais⁹. Por outro lado, em finais

http://www.ted.com/index.php/talks/patricia_burchat_leads_a_search_for_dark_energy.html

Existem algumas explicações alternativas para estes dois enigmas, algumas das quais, em particular para a *energia escura*, têm a ver com a geometria global do Cosmos¹². Há vários projectos e experiências para tentar lançar alguma luz nestes mistérios obscuros, que incluem: *JDEM – Joint Dark Energy Mission*¹³; *CDMS – Cryogenic Dark Matter Search*¹⁴; *LUX – Large*



Figura 3: Observatórios espaciais Herschel e Planck.

da década de 1990, duas equipas distintas de astrónomos, estudando supernovas para determinar a variação da velocidade de expansão do universo ao longo do tempo, chegaram à mesma conclusão, completamente não antecipada e surpreendente: essa expansão tem vindo a acelerar¹⁰! Para explicar como tal é possível, uma vez que se esperava que a gravidade desacelerasse a expansão do universo, foi proposta a existência de uma misteriosa *energia escura*.

Numa palestra TED¹¹, Patricia Burchat, da Universidade de Stanford, explica o que são a *matéria escura* e a *energia escura*, e qual a evidência da existência de ambas. Esta palestra está disponível em:

*Underground Xenon*¹⁵; *SNLS – SuperNova Legacy Survey*¹⁶; o radio-telescópio internacional *Square Kilometre Array*¹⁷ (a construir); o *Grande Acelerador de Hadroes*¹⁸; o telescópio espacial de raios gama *Fermi*¹⁹ e os recentes observatórios espaciais *Planck*²⁰ e *Herschel*²¹. É muito possível que surjam importantes e extraordinárias descobertas num futuro bem próximo, incluindo alguma informação sobre a geometria global do Universo.

Tudo isto mostra bem que a astronomia e a matemática, parceiras há já vários milénios, continuam a viver juntas emocionantes aventuras na descoberta do Cosmos, recheado de mistérios, que habitamos. **M**

¹⁰Para uma descrição desta descoberta, assim como do papel nela desempenhado pelo telescópio espacial *Hubble*, ver: http://hubblesite.org/hubble_discoveries/dark_energy

¹¹TED é um acrónimo para *Technology, Entertainment, Design*, um evento onde se trocam ideias num conjunto de palestras, muitas das quais excelentes e disponíveis em <http://www.ted.com>.

¹²Ver: Timothy Clifton e Pedro G. Ferreira, *Does Dark Energy Really Exist?*, *Scientific American*, volume 300, número 4 (Abril 2009), 32–39. Disponível online no endereço <http://astronomy.case.edu/heather/us211.09/darkenergy1.pdf>

¹³<http://jdem.gsfc.nasa.gov>

¹⁴<http://cdms.berkeley.edu>

¹⁵<http://lux.brown.edu>

¹⁶<http://cfht.hawaii.edu/SNLS>

¹⁷<http://www.skatelescope.org>

¹⁸Ver: http://en.wikipedia.org/wiki/Large_Hadron_Collider e <http://public.web.cern.ch/public/en/LHC/WhyLHC-en.html>

¹⁹<http://fermi.gsfc.nasa.gov>

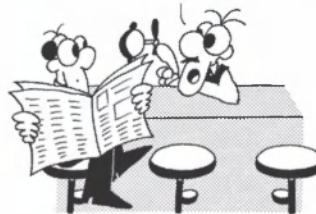
²⁰<http://www.esa.int/SPECIALS/Planck>

²¹<http://www.esa.int/SPECIALS/Herschel>

O GOVERNO APROVOU
O ALARGAMENTO DA ESCOLARIDADE
OBRIGATÓRIA PARA 12 ANOS.



ACHO QUE É MUITO CURTO.
DEVIA SER ALARGADA PARA 40 ANOS.



40 ANOS?



REPARE NA VANTAGEM: SERIAMOS TODOS
CONSIDERADOS ESTUDANTES, NÃO HAVERIA
DESEMPREGO A ESTRAGAR AS ESTATÍSTICAS...



Publicação gentilmente autorizada pelo autor.

Público, 23/04/2009

Ficha Técnica

Director Jorge Buescu [Universidade de Lisboa]
Vice-Directores J. Pimentel Nunes [Instituto Superior Técnico]
Adérito Araújo [Universidade de Coimbra]
Rogério Martins [Universidade Nova de Lisboa]
Conselho Editorial Afonso Pedrosa Pinto [Escola S/3 S. Pedro Vila Real]
Carlota Simões [Universidade de Coimbra]
Elisabete Rodrigues [Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Lisboa]
Graciano de Oliveira [Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia]
Henrique Leitão [Universidade de Lisboa]
João Filipe Queirós [Universidade de Coimbra]
José Francisco Rodrigues [Universidade de Lisboa]
José Miguel Rodrigues de Sousa [Escola Secundária Felismina Alcântara, Mangualde]
Juan-Miguel Gracia [Univ. Vitoria, Espanha]
Lina Fonseca [Escola Superior de Educação, Viana do Castelo]
Luís Madureira [antigo professor na Esc. Sec. Padre António Vieira]
Maria do Céu Pinto [Universidade de Coimbra]
Manuel Domingos Oliveira Cadete [Universidade Agostinho Neto]
Paulus Gerdes [Universidade Eduardo Mondlane, Maputo, Moçambique]
Raquel Escórcio [E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho]
Roberto Ramalho [Univ. Pernambuco, Recife, Brasil]
Teresa Almada [Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia]

Redactores António Pereira Rosa [ES Mª Amália Vaz de Carvalho]
Daniel Pinto [Universidade de Coimbra]

Assistentes Editoriais e Revisão Renata Ramalho [SPM]
Ana Figueiredo [SPM]
Sílvia Dias [SPM]

Concepção e manutenção do portal Web Pedro Quaresma [Universidade de Coimbra]

Design B-Design

Impressão Offsetmais Artes Gráficas, S.A.

Propriedade Sociedade Portuguesa de Matemática,
Av. da República 45, 3º Esq. 1050-187 Lisboa
Tel.: 21 793 97 85 | Fax: 21 795 23 49
E-mail: spm@spm.pt

Tiragem 1.800 Exemplares

ISSN 0373-2681

ICS 123299

Depósito Legal 159725/00

Capa Ilustração de Filipe Branco sobre a Hipótese de Riemann

Coors, Grafos e Resolução de Conflitos

Uma das dificuldades com que nos confrontamos nas nossas aulas prende-se com o facto de muitos dos alunos não reconhecerem a utilidade e a importância que a matemática tem no nosso dia-a-dia. Neste artigo pretendemos ilustrar o contributo que a matemática pode ter na tomada de decisões no nosso quotidiano, utilizando para tal a coloração de vértices de um grafo.

Considerações iniciais

Com a nova reforma do ensino secundário surgiu uma nova disciplina, optativa para o curso de Científicos Humanísticos de Ciências Sociais e Humanas, a Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). Um dos itens do programa denomina-se Modelos de Grafos e está previsto que seja leccionado no segundo ano daquela disciplina. O programa aponta claramente que conteúdos um professor desta disciplina deve leccionar, mas, na nossa opinião, deixa de fora um conteúdo muito importante, os problemas de coloração. Não concordamos com esta exclusão, pois este tipo de problemas revela-se muito útil na resolução de conflitos. Ainda dentro desta temática, consideramos incontornável o teorema das quatro cores. Este teorema representa um marco na história da matemática, pela riqueza da sua história, e por ter sido o primeiro teorema importante a ser demonstrado com recurso a meios informáticos.

Neste nosso texto referimo-nos apenas a mapas planos, estilo *mapa-mundi*¹; contudo poderíamos também pensar em mapas esféricos, que estão mais de acordo com a nossa ideia de globo. No entanto, é equivalente estudar problemas de coloração no plano ou na esfera. Informalmente, basta pensar que podemos deformar suficientemente uma esfera até esta se tornar num plano.

Um pouco de história

Tudo começou em 1852 quando Francis Guthrie

tentava pintar os condados do Reino Unido, de forma que dois condados adjacentes não tivessem a mesma cor. Neste processo Guthrie apercebeu-se de que para pintar todos os condados conseguia usar apenas quatro cores. Na altura, Francis Guthrie perguntou ao seu irmão Frederick Guthrie, estudante de matemática e aluno de De Morgan, se seria possível pintar qualquer mapa plano com apenas quatro cores. O irmão intrigado apresenta a questão a De Morgan que a estuda e, de alguma forma, ajuda a divulgar o que ficou conhecido como a conjectura das quatro cores: todo o mapa pode ser pintado com um máximo de quatro cores sem que regiões vizinhas admitam a mesma cor.

Estava lançado um desafio que resistiu mais de um século, tendo sido vencido em 1976 por Appel e Haken. A sua demonstração, no entanto, não foi bem aceite pela comunidade matemática, principalmente por dois motivos: parte da demonstração usa o computador e não pode ser verificada à mão e parte dos cálculos efectuados à mão são morosos e muito longos. Perante tanta controvérsia Robertson, Sanders, Seymour e Thomas tentaram melhorar a prova mas acabaram por desistir. Segundo estes autores, em 1993, para sua paz de espírito começaram a tentar provar por eles próprios a conjectura, tendo acabado por obter uma prova mais simples, mas onde ainda assim foi necessária a utilização do computador. Pelo caminho foram publicadas algumas “provas” que continham alguns erros, mas

¹É um mapa com representação de todo o globo terrestre, sendo os dois hemisférios projectados lado a lado.

mesmo com alguns problemas técnicos também elas ajudaram a impulsionar e a resolver a famosa conjectura. Destacamos a prova de Alfred Kempe (1879) que Heawood, onze anos depois, provou estar errada. Na mesma altura Heawood enunciou e provou o teorema das cinco cores. Em 1922, a conjectura foi provada para qualquer mapa com 25 regiões. Este limite foi sendo melhorado até se atingir, em 1970, 96 regiões.

Temos então agora o teorema das quatro cores: *Para colorir um mapa plano, de forma que em regiões vizinhas não se utilize a mesma cor, quatro cores são suficientes.*

Grafos Completos e Planares

Neste ponto poderá o leitor perguntar: Mas de que forma é que pintar mapas está ligado com matemática? A resposta é simples, mas antes temos que introduzir algumas noções de Teoria dos Grafos.

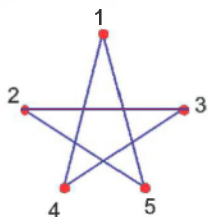


Figura 1

Um grafo é um par² ordenado $G=(X,T)$ de conjuntos finitos, onde X é o conjunto de vértices e T é uma coleção de subconjuntos de X com dois elementos. T designa-se por conjunto de arestas. Assim, informalmente, um grafo é um conjunto de vértices com várias ligações (arestas) entre si. Dois vértices dizem-se adjacentes se existe uma aresta que os ligue. Para melhor percebermos o que foi dito, note-se que associamos naturalmente à figura 1 o grafo tal que $X=\{1,2,3,4,5\}$ e $T=\{\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\},\{4,3\}\}$. Dizemos que este é o grafo subjacente à figura, que por sua vez se denomina por representação do grafo.

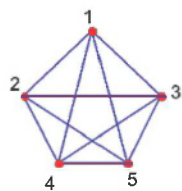


Figura 2

²Por vezes incluem-se lacetes no conjunto das arestas. Um lacete é uma aresta com duas extremidades no mesmo vértice. Note ainda que é usual exigir-se que $X \neq \emptyset$.

³Um grafo diz-se conexo se existir sempre um caminho entre quaisquer dois vértices pertencentes ao grafo.

Vamos agora introduzir a noção de grafo completo e grafo planar. Um grafo diz-se completo com n vértices, e designa-se por K_n , se todos os vértices são adjacentes aos outros $n-1$ vértices, isto é, cada vértice está ligado a todos os outros vértices. A seguinte figura representa o K_5 . Este tem cinco vértices e cada um deles está ligado a todos os outros

Um grafo diz-se planar se existir alguma representação sua no plano de forma que as suas arestas não se intersectem a não ser nos vértices. As figuras 1 e 3 mostram duas representações do mesmo grafo, sendo apenas uma planar (figura 3).

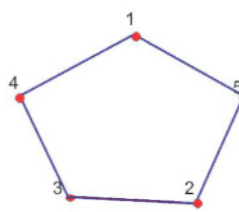


Figura 3

Centremos agora a nossa atenção nos grafos planares. Apesar de terem uma formulação simples, nem sempre é fácil verificar se um dado grafo é planar. Chamamos ciclo de um grafo a uma sequência circular de vértices distintos, tal que dois vértices consecutivos são adjacentes no grafo. Podemos então ver o ciclo como $c=[V_0, V_1, \dots, V_k]$, onde $V_0=V_1$ e de resto $V_i \neq V_j$ se $i \neq j$, e $\{V_{i-1}, V_i\}$ é uma aresta para $i=1, \dots, k$. Estas são as k arestas do ciclo.

Pelo teorema de Jordan (para polígonos), uma curva fechada simples, γ , no plano divide-o em duas regiões, de tal modo que não se pode ligar um ponto de uma região por uma curva sem que esta intersecte γ . Assim, na figura 3, a representação planar do grafo, inteiramente constituído pelos vértices e arestas de um ciclo, divide o plano em duas regiões, uma interior à representação, delimitada por todas as arestas, e uma exterior, que não é limitada. Em geral, há mais do que um ciclo e mais do que uma região. Cada uma destas regiões designa-se por face. O número de arestas que limita uma face designa-se por grau da face. Euler descobriu uma fórmula que relaciona o número de vértices n , o número de arestas m e o número de faces f de um grafo conexo³ planar: (1) *Seja G um grafo conexo e planar com n vértices, m arestas e f faces. Então $n-m+f=2$.* Caso a fórmula não seja satisfeita

podemos concluir com segurança que o grafo não é planar. Apresentamos um outro resultado interessante que nos ajuda a concluir se um dado grafo é ou não planar: (2) Seja G um grafo planar, conexo, com m arestas e f faces, tal que cada face está delimitada por pelo menos k arestas. Então $k \cdot f < 2m$.

Dois grafos importantes que nos ajudam a decidir se um determinado grafo é ou não planar são o K_5 e o $K_{3,3}$.

Começemos então por verificar se K_5 é ou não planar. Suponhamos então que sim. Este grafo tem 5 vértices e 10 arestas, logo $n = 5$ e $m = 10$, então por (1) temos que $5 - 10 + f = 2$, e portanto, $f = 7$. Por (2), uma vez que não existem ciclos com menos de 3 vértices, temos que $3 \times 7 = 21 > 2 \times 10 = 20$. Então, como a desigualdade não se verifica, foi absurdo supor que K_5 era planar e, portanto, K_5 é não planar.

Consideremos agora o grafo $K_{3,3}$. Começemos por considerar o seguinte problema: Numa cidade pretende-se ligar três casas 1, 2 e 3 com três fontes de energia 4, 5 e 6. Estas ligações não se podem cruzar. Será possível fazer estas ligações naquela condição? Estamos, portanto, interessados em desenhar num plano um grafo tal que as suas arestas não se intersectem. A seguinte figura apresenta o passo inicial (mas as posições podem não ser fixas).



Figura 4

Convidamos o leitor a tentar resolver esta questão. Para a resolver basta encontrar um grafo planar com 6 vértices e 9 arestas. Depois de várias tentativas poderá ficar com a sensação de que tal ligação não é possível de ser realizada. E, de facto, tem razão, pois este grafo é não planar e, como tal, a ligação é impossível de se realizar. Poderá encontrar uma demonstração geométrica na referência [1].

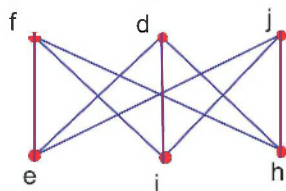


Figura 5 - Grafo $K_{3,3}$

A figura anterior representa o grafo que modela o problema anterior. Vejamos, de facto, que $K_{3,3}$ não é planar. Como atrás, vemos que se $K_{3,3}$ é planar então $f = 2 - n + m = 5$, já que $n = 6$ e $m = 9$. Como no grafo não existem circuitos de comprimento 3 ou menos, por (2) (com $k = 4$), obtém-se que $4 \times 5 < 2 \times 9$, o que é falso. Portanto, $K_{3,3}$ não é planar.

As condições (1) e (2) são apenas condições necessárias de planaridade. Existe, no entanto, um outro resultado, que nos fornece uma condição necessária e suficiente de planaridade, o teorema de Kuratowski. Este teorema afirma que um grafo é planar se e só se não admite subgrafos isomorfos a subdivisões de K_5 ou $K_{3,3}$. As subdivisões são obtidas acrescentando vértices nas arestas, isto é, substitui-se uma determinada aresta, por exemplo, a aresta $\{vw\}$ por outras duas arestas $\{vx\}$ e $\{xw\}$, onde x é um novo vértice que também se acrescenta ao conjunto de vértices.

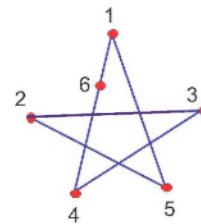


Figura 6

O grafo representado na figura 6 obteve-se a partir do grafo da figura 1, através de uma subdivisão: substituiu-se a aresta $\{1,4\}$ pelas arestas $\{1,6\}$ e $\{6,4\}$. Consideremos agora o grafo de Petersen (figura 7), e vejamos se este grafo é ou não planar.

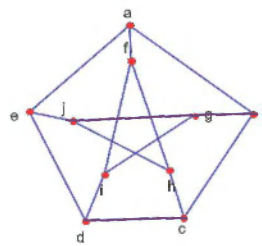


Figura 7

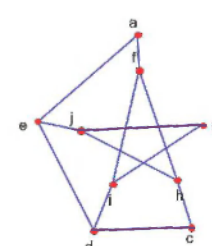


Figura 8

O grafo da figura 8 é um subgrafo do grafo de Petersen, obtido eliminando o vértice b , assim como as arestas incidentes neste vértice. Redesenhamos agora o grafo da figura 8, no grafo da figura 9.

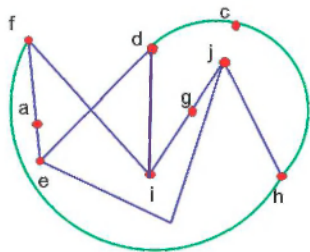


Figura 9

O grafo da figura 9 obteve-se de $K_{3,3}$ (figura 5) através de três subdivisões: substituiu-se a aresta $\{dh\}$ por $\{cd\}$ e $\{ch\}$, substituiu-se a aresta $\{ij\}$ por $\{gi\}$ e $\{gj\}$, e finalmente, substituiu-se a aresta $\{ef\}$ por $\{af\}$ e $\{ae\}$. Portanto, pelo teorema de Kuratowski, o grafo de Petersen não é planar.

Grafos e Coloração

Voltemos à questão inicial: quantas cores são precisas para colorir um mapa, de tal forma que regiões com fronteira comum tenham cores diferentes? Procedamos da seguinte forma: a cada região do mapa associamos um vértice. Dois vértices estão ligados por uma aresta se as respectivas regiões partilharem uma fronteira. No caso de as regiões partilharem uma fronteira desenha-se uma aresta a passar na fronteira. A título de exemplo, vejamos o mapa do distrito de Évora.



Figura 10 - Distrito de Évora

Obtemos então um grafo planar, com tantos vértices como regiões do mapa. Para melhor visualizar a situação apresentamos a seguir o grafo planar.

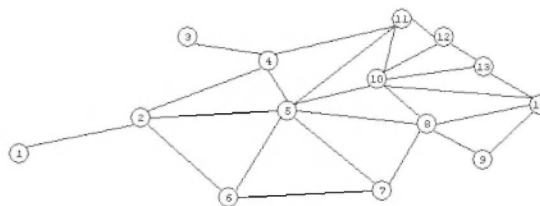


Figura 11

Estamos interessados em colorir os vértices do grafo, ou seja, estamos interessados em encontrar uma coloração para o grafo. Poderíamos usar tantas cores como vértices, mas pretendemos minimizar a quantidade de cores. Mas o que se entende por coloração? Consideremos o grafo $G=(V,A)$. Então uma coloração dos vértices é uma aplicação $c: V \rightarrow S$, onde S designa o conjunto de cores, com a seguinte propriedade: para qualquer $\{uv\} \in A$, $c(u) \neq c(v)$. Quer isto dizer que dois vértices adjacentes terão que ter forçosamente cores diferentes. A questão fulcral é determinar o número mínimo de cores que pode ter S . Para esse efeito consideremos o menor número inteiro positivo k para o qual um grafo é k -colorável. Este número designa-se por número cromático. O número cromático de G é denotado por $\chi(G)$. O teorema das quatro cores afirma que: (3) Se G é um grafo planar então $\chi(G) < 4$. Portanto, todo o grafo planar pode ser colorido com um máximo de quatro cores. Com esta certeza, podemos agora colorir o grafo da figura 11.

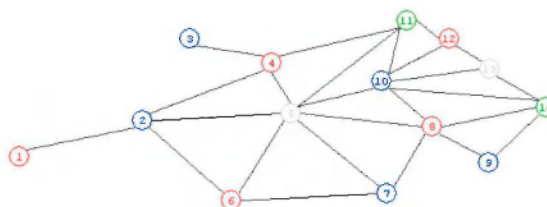


Figura 12

Mas, como seria de esperar, nem todos os mapas precisam de quatro cores e a título de exemplo o mapa do distrito de Faro consegue-se colorir com três cores.

O leitor mais atento poderá agora perguntar: e se o grafo não for planar quantas cores serão precisas? Também existem alguns resultados interessantes. O seguinte resultado ajuda-nos a colocar um limite superior ao número de cores a usar: (4) Todo o grafo G

com m arestas satisfaz $\chi(G) < \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$. No caso do

grafo que representa o distrito de Évora, este último resultado não nos ajudaria muito já que obteríamos $\chi(G) < 7$. Mas, caso o grafo não fosse planar, já nos daria uma boa ajuda. Vamos apenas considerar dois tipos de grafos: grafos completos e grafos bipartidos. Se considerarmos K_n (grafo com n vértices em que todos os vértices são adjacentes) é óbvio que $\chi(K_n)=n$, isto por definição de grafo completo. Consideremos agora um grafo bipartido completo. Neste caso $\chi(K_{n,m})=2$, visto que num grafo bipartido completo existe uma partição do conjunto de vértices em dois subconjuntos e não existem arestas a ligar vértices do mesmo conjunto. Aliás, existem alguns autores que definem este tipo de grafos através do seu número cromático. Para outros grafos, que não os anteriores, torna-se necessário recorrer a algoritmos heurísticos para encontrar uma coloração. Em termos simplistas, porque este não é de todo o nosso objectivo, não é conhecido nenhum limite para o número cromático baseado em critérios simples. De facto, o problema para a determinação de χ é considerado NP-difícil [2], no sentido em que, à medida que o número de vértices do grafo aumenta, o tempo que um algoritmo necessita para encontrar o número cromático aumenta exponencialmente. Por esta razão, utilizam-se algoritmos heurísticos, de ordem polinomial, mas que podem necessitar de mais do que χ cores, fornecendo assim unicamente um limite superior para o número cromático.

Para o problema da coloração existem vários algoritmos, e o algoritmo que apresentamos deve-se a Christofides: 1) ordenar os vértices por ordem decrescente de grau; 2) colorir o vértice com maior grau com a primeira cor disponível; 3) retirar este vértice e as arestas adjacentes a ele; 4) recalcular os graus dos vértices restantes; 5) reordenar os vértices por ordem não crescente; 6) colorir o primeiro vértice que for possível com a cor inicial; 7) repetir o passo 3) até não ser possível colorir mais vértices com a cor inicial; 8) recomeçar com o passo 1) para outra cor; 9) parar quando todos os vértices estiverem coloridos.

Agora que sabemos como colorir qualquer grafo, pode-se colocar outra questão: existe apenas uma forma de colorir um grafo ou de quantas formas diferentes se pode colori-lo? Para responder a esta questão torna-se necessário introduzir outra noção: a noção de polinómio cromático. Seja G um grafo planar e λ o número de cores disponíveis para colorir os vértices de G . O polinómio cromático de G é a função

polinomial de λ , $P(G, \lambda)$, que fornece o total de formas diferentes de como se podem colorir os vértices de G . Vamos de seguida dar uma ideia de como aplicar este conceito. Para isso, consideremos o seguinte grafo.

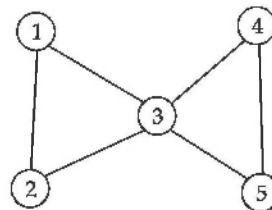


Figura 13

Começemos, por exemplo, por colorir o vértice 1. Este pode ser colorido de λ formas diferentes, logo para o vértice 2 só poderão usar-se $\lambda-1$ cores. Como o vértice 3 é adjacente aos vértices 1 e 2, poderá usar-se $\lambda-2$ cores. Para colorir os outros dois vértices podemos voltar a usar as cores dos vértices 1 e 2, e por esta razão teremos, por exemplo, $\lambda-1$ cores para o vértice 4 e $\lambda-2$ cores para o vértice 5. Temos então que $P(G, \lambda) = \lambda \cdot (\lambda-1) \cdot (\lambda-2)^2$. Ora para $\lambda=0 \vee \lambda=1 \vee \lambda=2$ temos que $P(G, \lambda) = 0$ e então existem zero formas de colorir o grafo, e portanto, não é possível colori-lo; se $\lambda=3$ temos 12 formas distintas de colorir o grafo anterior, mas sempre usando três cores.

Da Coloração à Resolução de Conflitos

Como já afirmámos, ao colorirmos os vértices de um determinado grafo estamos na verdade a determinar uma partição de V em conjuntos independentes. Estes são conjuntos de vértices entre os quais não existe qualquer ligação. Desta forma, a coloração de grafos é ideal para resolver situações onde existe um conjunto de pessoas que não podem estar em projectos em simultâneo ou um conjunto de materiais em que alguns deles são incompatíveis entre si. Para ilustrar o anterior, analisemos a seguinte situação: suponha que um determinado jardim zoológico adquiriu algumas novas espécies. Alguns destes novos elementos não podem partilhar a mesma jaula. O seguinte grafo mostra quais os elementos que não podem ficar juntos.

Qual será o número de recintos em que podemos colocar os novos animais do Jardim Zoológico? [3].

Nesta situação estamos interessados em distribuir os animais de tal forma que dentro de uma mesma jaula não possam estar dois animais incompatíveis. O grafo que está representado na figura 14 é o grafo de

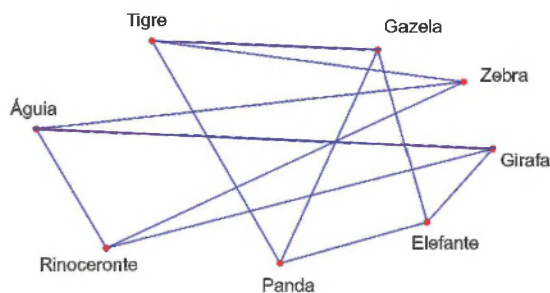


Figura 14

incompatibilidades para a situação descrita. Pode-se resolver esta questão colorindo os vértices daquele grafo, de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes.

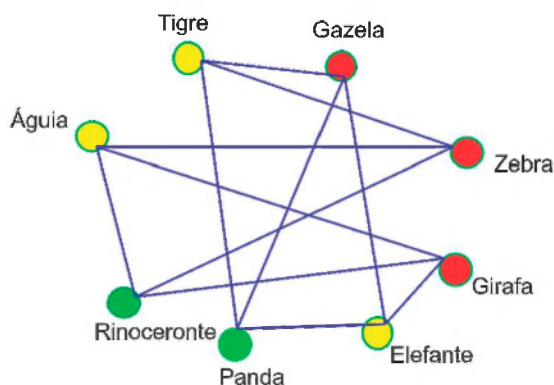


Figura 15

A figura 15 apresenta uma solução possível para a resolução deste problema. Assim, a águia, o tigre e o

elefante podem partilhar uma jaula, a gazela, a zebra e a girafa podem partilhar outra jaula, e, finalmente, o rinoceronte e o panda podem partilhar outra. Torna-se óbvio, pelo que já foi descrito atrás, que esta coloração não é a única solução.

Desta forma, vemos como se consegue resolver de uma forma fácil uma questão que à partida poderia parecer de difícil resolução. Este é só um pequeno exemplo, mas existem muitas mais situações em que, recorrendo a coloração dos vértices de um grafo de incompatibilidades, se resolve uma situação que à partida poderia parecer bastante complexa. Obviamente, caso o grafo de incompatibilidades permita uma representação planar, o teorema das quatro cores fornece um limite superior ao número de cores a usar.

Considerações finais

Em jeito de conclusão, procurámos mostrar as potencialidades dos problemas de coloração. Abordámos ainda algumas questões relativas ao teorema das quatro cores. Este teorema, que dominou por mais de um século a mente de alguns dos mais famosos matemáticos, ilustra ainda como enunciados simples de perceber e de enunciar podem ser de difícil demonstração (veja-se o teorema de Fermat). Coloca ainda, em evidência, o facto de o trabalho de um matemático não ter de ser necessariamente solitário, ao contrário do que se julga.

Ao abordarmos este tipo de problemas estamos ainda a contribuir para que os alunos reconheçam, de uma forma inequívoca, o contributo que a matemática pode ter na tomada de decisões no nosso dia-a-dia.

Agradecimento

O autor agradece as sugestões apresentadas pelo *referee*, pois estas contribuíram em muito para melhorar o presente texto.

Referências

- [1] Lima, E. (2004). *Matemática e Ensino*, Gradiva
- [2] Foulds, L. R. (1992). *Graph Theory Applications*, Nova Iorque, Springer-Verlag
- [3] Rosenstein, J. (1992). "A Comprehensive View of Discrete Mathematics: Chapter 14 of the New Jersey Mathematics Curriculum Framework", In Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F., (eds), *Discrete Mathematics in the Schools*, 133-184, Virginia, AMS e NCTM

Bibliografia

- Diestel, R. (2000). *Graph Theory*, Nova Iorque, Springer-Verlag
- Robertson, N., Sanders, D., Seymour, P., Thomas, R. (1996). "A new proof of the four-colour theorem", *Electron. Res. Announ. Am. Math. Soc.*, Vol. 2
- Scheinerman, E. (2003). *Matemática Discreta*, Pioneira Thomson, S. Paulo



por José Carlos Santos
[Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]

A Ilusão Portuguesa¹

É quase desconhecido o facto de ter sido um matemático português o autor de um dos primeiros livros jamais publicados (em 1612) com um capítulo dedicado ao ilusionismo e que é mesmo o primeiro a descrever como levar a cabo essas ilusões. Uma delas, com algum conteúdo matemático, é aqui descrita em detalhe.

Começemos pela apresentação de uma ilusão com cartas. O ilusionista mostra um baralho de cartas à audiência. De seguida, passa-o a um membro desta, com as cartas viradas para baixo, e pede-lhe para o partir, ver qual é a carta que ficou então no cimo do baralho após o corte e devolvê-lo. O ilusionista, ao receber o baralho, imediatamente diz qual é a carta em questão. Em seguida, recomeça, com outro membro da audiência.

Como é que isto poderá ser feito? O segredo reside em as cartas estarem dispostas por uma certa ordem. Quando o ilusionista recebe o baralho de volta, olha rapidamente para a carta que está no fundo (que é a única cuja face está visível) e então, como a carta que está no cimo do baralho era, até antes de este ser partido, aquela que se lhe seguia na ordenação em questão, o ilusionista fica a saber de qual carta se trata.

A espectacularidade desta ilusão baseia-se em convencer a audiência de que as cartas estão baralhadas. Isso pode ser feito colocando as cartas por uma ordem que parece arbitrária, embora não o seja. Uma maneira de fazer isso foi descrita em 1612, em [1]. Há ligeiras variações do mesmo método, publicadas em Portugal na segunda metade do século XIX (cf. [2] e [3]; ver também [4]).

O método consiste em:

1. Fixar uma ordem para os naipes. Tomemos, por exemplo, Ouros (♦), Paus (♠), Copas (♥) e Espadas (♣);

2. Atribuir um valor a cada carta de um naipe e fixar uma ordem para esses valores.

É este segundo ponto que tem algum interesse matemático. Vai-se começar por atribuir a cada carta um valor. As cartas do dois ao dez atribui-se o seu valor facial: o Ás vale 1, a Dama 11, o Valete 12 e o Rei 13. Então, dada uma carta qualquer, de valor n , convencionou-se que a carta seguinte terá o valor assim obtido: $n+4$ se este número for menor ou igual a 13 e $n-9(=(n+4)-13)$ caso contrário. Por outras palavras, soma-se 4 a n . Se $n+4$ for menor ou igual a 13, será esse o valor da carta seguinte; caso contrário, subtrai-se 13 à soma obtida.

A ordem das cartas é então a seguinte: dada uma carta qualquer, a que se lhe segue é a subsequente tanto na ordem nos naipes (convencionando-se que após o naipe de Espadas vem novamente o de Ouros) como na ordem dos valores acima indicada. Assim, por exemplo, após o ♣ 4 vem o ♥ 8, a este segue-se o ♠ V, em seguida o ♦ 3, etc. É claro que se um baralho estiver ordenado por esta ordem, então, se for partido,

¹O autor agradece a Tony Klaufl, a Helena Henriques e a Luís Saraiva pela valiosa ajuda prestada na preparação deste artigo.

ainda continuará ordenado pela mesma ordem. É por isso que a ilusão pode ser repetida imediatamente.

A escolha do número 4 na ordem do valor das cartas representa um compromisso entre facilidade de cálculo e obtenção de uma ordem aparentemente aleatória. Com outros valores obter-se-ão resultados diferentes. Assim, por exemplo, enquanto que se se partir do A as 8 primeiras cartas relativamente à ordem anterior são

♦A ♣5 ♥9 ♠R ♦4 ♣8 ♥V ♠3,

se se empregar 6 no lugar de 4 na definição da ordem do valor das cartas, as 8 primeiras cartas relativamente a partir do A (inclusive) são

♦A ♠7 ♥R ♣6 ♦V ♠5 ♥D ♣4.

De notar que as três obras acima referidas ([1], [2] e [3]) usam valores distintos (5 nas duas primeiras e 3 na terceira). Em [2] também se sugere o uso de uma mnemónica em vez de uma fórmula matemática para a memorização da ordem do valor das cartas.

Naturalmente, quem conhecer e souber empregar alguma técnica de baralhar em falso poderá fazer esta ilusão de uma maneira que torna ainda mais difícil que um espectador perceba qual é a ideia que lhe está subjacente.

A ilusão aqui descrita é geralmente atribuída ao ilusionista norte-americano Si Stebbins (1867–1950). No entanto, basta comparar o ano de nascimento deste com os anos de publicação de [1], [2] e [3] (1612, 1860 e 1872 respectivamente) para ver que tal não é possível. A mais antiga destas obras, da autoria do matemático português Gaspar Cardoso de Sequeira, Mestre em Artes pela Universidade de Alcalá e originário de Murça, foi publicada 255 anos antes do nascimento de Si Stebbins. Aliás, segundo o autor de [4], que foi quem descobriu a descrição desta ilusão naquelas três obras, [1] é somente o quarto livro jamais publicado com um capítulo sobre ilusionismo. Curiosamente, os três anteriores foram publicados em três línguas distintas no período de somente dois anos (1584–1585). Além disso, contrariamente aos seus predecessores, em [1] descreve-se como levar a cabo essas ilusões. De facto, a maneira de ordenar o baralho

descrita em [1] é ligeiramente mais complexa do que aquela que foi descrita acima, pois o autor estipula que, após um Rei, ao passar-se para a carta seguinte só se muda o valor da carta, mas mantém-se o naipe. Por outro lado, o baralho da época ainda não tinha a forma actual (veja-se [5] para a evolução do baralho de cartas em Portugal) e a ilusão descrita em [1] refere-se a um baralho de 48 cartas, que corresponde ao baralho actual se deste se excluirmos as cartas cujo valor facial é 10.

Poderá parecer estranho que [1], cujo autor é apresentado como matemático logo no rosto, se ocupe desta ilusão, mas é preciso ter em mente que foi publicado no período descrito por Gomes Teixeira [6] como "a longa noite" da matemática portuguesa (de finais do séc. XVI à reforma da Universidade de Coimbra em 1772). A obra [1], embora contenha alguma matemática (aritmética e geometria elementares), também se ocupa de muitos outros assuntos. Contém, por exemplo, o seguinte método para curar feridas: recomenda o uso de folha e flor de alecrim seco ao ar (e não ao Sol) misturada com clara de ovo e posta na ferida por vinte e quatro horas. Também contém ensinamentos de astrologia. Está dividido em quatro livros, cada um dos quais dividido em tratados. De facto, o primeiro livro tem somente um tratado, o segundo tem dois e assim sucessivamente. As ilusões com cartas surgem no terceiro livro (sobre aritmética), no terceiro tratado deste,

"o qual trata de muitas várias curiosidades tiradas da dita arte, as quais não tão somente são curiosas para passatempo lícito e deleitoso, mas em extremo são proveitosas para espertar e purificar o entendimento".

Segundo a Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura, Gaspar Cardoso de Sequeira foi também autor de um *Prognóstico Lunario Para o Anno de 1605* (publicado em Lisboa, em 1602), mas [1] é a sua obra mais conhecida, tendo sido reeditada muitas vezes ao longo do século XVII; a última edição data de 1702. [M](#)

Referências

- [1] **Sequeira, G.** (1612). *Thesouro de Prudentes*, Coimbra
- [2] **Anónimo**, (1860). *O Senhor Hermann*, Porto
- [3] **Castro, D.**, (1872). *O Prodigio nas Sallas*, Porto
- [4] **Klauf, T.** (1998). *A Importância do Baralho ordenado no Ilusionismo*, ed. de autor
- [5] **Moniz, E.** (1998). *História das Cartas de Jogar*, Apenas
- [6] **Gomes Teixeira, F.** (1934). *História das Matemáticas em Portugal*, Academia das Ciências de Lisboa, Lisboa

Obras de Pedro Nunes – Volume IV

Acaba de ser publicado, pela Academia das Ciências e pela Fundação Gulbenkian, o volume IV das *Obras de Pedro Nunes*.


Este volume de 800 páginas, que levou quatro anos a preparar, é o ponto alto da nova edição das *Obras de Pedro Nunes*, iniciada em 2002 por altura do quinto centenário do nascimento do matemático. A edição decorre sob a responsabilidade de uma Comissão Científica constituída por Henrique Sousa Leitão (Coordenador), António Costa Canas, António Estácio dos Reis, Francisco Contente Domingues, João Filipe Queiró e Luís Semedo de Matos, e com o acompanhamento de uma Comissão Editorial de Académicos composta por Fernando R. Dias Agudo (Académico Responsável), Aníbal Pinto de Castro,

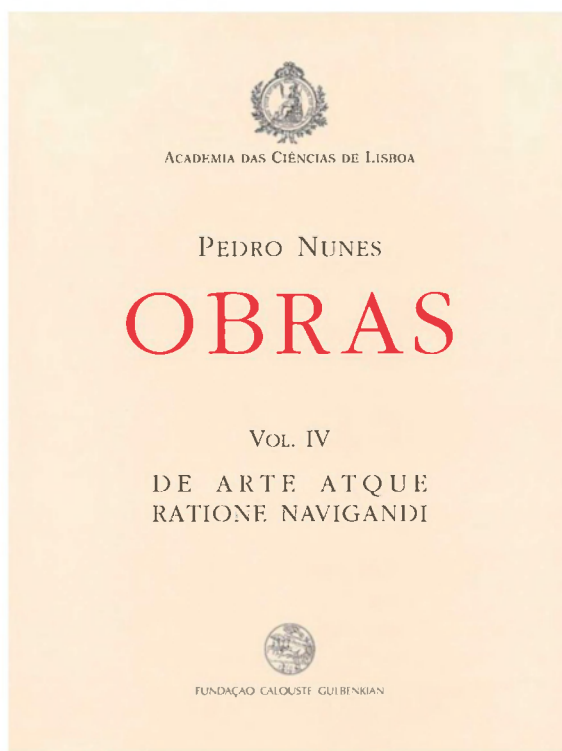
António Dias Farinha, António Ribeiro Gomes, José Manuel Toscano Rico e Justino Mendes de Almeida.

O volume IV, com o título *De arte atque ratione navigandi*, é o ponto alto da edição, antes de mais porque esta obra, de 1566, é a mais importante de Pedro Nunes. Texto da maturidade, em latim, publicado em Basileia e com grande impacto na Europa, é o momento da criação de uma nova disciplina matemática, a ciência da navegação. O autor desenvolve muito os tratados portugueses de 1537 (em particular com a distinção clara, a ele devida, entre navegação loxodrómica e ortodrómica, e com a ideia fundamental da mais tarde chamada carta de Mercator), acrescenta muitos capítulos com contribuições rigorosas sobre questões matemáticas, astronómicas e de navegação (e alguns dos primeiros comentários feitos à obra de Copérnico), e continua com capítulos sobre a curva loxodrómica e a sua descrição e propriedades matemáticas, notabilíssimos se pensarmos que se está a mais de um século da criação do cálculo diferencial e integral.

Em segundo lugar porque, sendo a obra mais importante de Pedro Nunes, e sendo este o maior cientista português de sempre (seja qual for o critério que se use), o livro é o mais relevante da história da ciência em Portugal e é portanto uma obra cimeira na história da cultura portuguesa.

O volume, tal como os anteriores, pode ser adquirido na livraria da Fundação Gulbenkian, sendo possível fazer encomendas online no endereço <http://www.montra.gulbenkian.pt>

Até ao fim de 2010 está prevista a publicação dos volumes V, VI e VII das *Obras de Pedro Nunes*, devendo o oitavo e último volume sair em 2011. 



Entrevista a Douglas Ravenel

Em Abril foi anunciada a solução de um dos mais famosos problemas em Topologia Algébrica e Geométrica – o problema do invariante de Kervaire. Um dos responsáveis pela solução visitou, em Maio, o Instituto Superior Técnico e aproveitámos a ocasião para uma conversa sobre a sua carreira.

No início de Maio de 2009, Douglas Ravenel da Universidade de Rochester (EUA) visitou o Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico para dar uma série de palestras sobre Teoria de Homotopia Estável. Esta série de palestras estava já planeada há mais de um ano e por isso foi uma grande surpresa para os organizadores quando se tornou claro, duas semanas antes da sua realização, que estas seriam acerca da solução de um dos mais famosos problemas em Topologia Algébrica e Geométrica – o problema do invariante de Kervaire.

A solução foi anunciada a 21 de Abril por Michael Hopkins (Universidade de Harvard) durante a conferência que celebrou os 80 anos de Sir Michael Atiyah, em Edimburgo. Hopkins é um dos membros da equipa de três matemáticos norte-americanos que resolveu o problema, sendo os outros membros Ravenel e Michael Hill da Universidade da Virgínia.

As palestras do Professor Ravenel tiveram lugar de 5 a 7 de Maio e constituíram a primeira apresentação detalhada da solução do problema. Convidamos o leitor interessado a consultar [1] para obter os *slides* das palestras, assim como uma enorme quantidade de informação adicional sobre o problema.

Aproveitámos esta ocasião para entrevistar o Professor Ravenel sobre a sua carreira na investigação, administração e ensino.

Gazeta: Antes de mais, muitos parabéns pela solução do problema do invariante de Kervaire! Pode

dar-nos uma ideia da sua natureza, assim como da sua história e importância?

Ravenel: Trata-se de um problema com cerca de 50 anos. Teve origem no trabalho de Kervaire e Milnor sobre a classificação das esferas exóticas nos anos 1960. Eles relacionaram este problema com o cálculo dos grupos de homotopia estáveis das esferas, mas deixaram uma questão em aberto relacionada com esferas exóticas de dimensão congruente com 1 módulo 4. Esta questão está por sua vez relacionada com um invariante de certas variedades de dimensão congruente com 2 módulo 4 obtido a partir da forma quadrática na cohomologia da dimensão do meio. Esta forma quadrática toma valores em $\mathbb{Z}/2$ e estes objectos foram estudados pelo matemático turco



Douglas Ravenel.

Cahit Arf. Ele publicou um artigo nos anos 1940 que as classifica [2] usando um invariante que é hoje chamado o invariante de Arf. Este invariante toma os valores 0 ou 1 e a questão que permaneceu em aberto durante muito tempo foi se existia ou não uma variedade emoldurada de dimensão $4k+2$ com um invariante de Arf igual a 1.

Kervaire foi o primeiro a estudar este problema, pelo que o invariante das variedades emolduradas em questão é normalmente chamado o invariante de Kervaire. Eu gosto de lhe chamar o invariante de Arf-Kervaire. Em 1969, Browder demonstrou um Teorema afirmando que o invariante só pode ser 1 quando a dimensão da variedade é da forma 2^n-2 e que nesse caso está relacionado com um certo elemento na sucessão espectral de Adams que converge para os grupos de homotopia estáveis das esferas.



Novas notas de 10 liras turcas com a imagem de Cahit Arf.

Sabia-se nesta altura que tais elementos existem em dimensões 2, 6, 14 e 30 e poucos anos depois da publicação do resultado de Browder [3] foi encontrado um elemento em dimensão 62 por Barratt, Jones e Mahowald. Desde então não tinha havido qualquer progresso neste problema, apesar das tentativas de muitas pessoas. Há inclusivamente várias pessoas da área de Teoria da Homotopia, com destaque para Mark Mahowald, que formularam conjecturas sobre os grupos de homotopia das esferas baseadas na hipótese de que tais variedades com invariante de Arf-Kervaire 1 existiam em todas as dimensões da forma 2^n-2 .

Ora o nosso Teorema diz que não existem tais variedades em dimensões superiores com possível excepção da dimensão 126. Os nossos métodos não resolvem o problema nessa dimensão, mas sabemos agora que em todas as dimensões acima de 126 da forma 2^n-2 , como 254, 510, etc., não existem variedades com invariante de Arf-Kervaire 1.

Gazeta: Há um outro problema famoso em Topologia – o problema do invariante de Hopf

resolvido por Adams no final dos anos 1950 – em que se demonstrou que havia apenas um número finito de exemplos (nesse caso aplicações entre esferas com invariante de Hopf 1). O vosso resultado tem a mesma natureza?

Ravenel: Sim, é um resultado da mesma natureza, mas eu diria que é muito mais difícil e demorou muito mais tempo a demonstrar.

Gazeta: Poder-se-á dizer que as variedades com invariante de Kervaire 1 desempenham um papel análogo ao dos grupos de Lie excepcionais (que formam também uma sucessão finita)?

Ravenel: Essa analogia não é tão boa como a anterior porque, tanto quanto sei, ninguém alguma vez pensou que poderia haver uma sucessão infinita de grupos de Lie excepcionais. Tal como os grupos simples esporádicos trata-se de objectos construídos com grande dificuldade e não há qualquer plano geral para a construção de um número infinito. No nosso caso havia pessoas que pensavam que estas variedades existiriam num número infinito de dimensões, embora agora saibamos que isso não é verdade.

É ainda demasiado cedo para dizer o que isto significa para a Teoria da Homotopia porque, como disse antes, não é um resultado que alguém esperasse. Não conheço ninguém, incluindo eu próprio, que o teria predito há um ano.

Gazeta: A inexistência de tais elementos é uma desilusão?

Ravenel: Pode ser que haja pessoas que se sintam desapontadas, mas para mim é sempre bom quando se pode demonstrar um Teorema e saber a verdade. Quanto a mim esse é sempre um passo na boa direcção.

Gazeta: Já tinha pensado seriamente neste problema durante a sua carreira?

Ravenel: Nunca tinha feito qualquer tentativa séria de resolver este problema. Doutorei-me em 1972 e nessa altura o problema era muito discutido. Assisti a muitas palestras em que se definia o invariante de Arf e se falava dele. Nos anos 1960 e 1970 pensou-se

muito neste problema, mas depois tornou-se menos visível porque ninguém teve sorte em resolvê-lo. Desvaneceu-se por ser tão difícil.



Mike Hill.

Na realidade, Hill, Hopkins e eu também não estávamos a tentar resolver este problema. Não é como se nos tivéssemos juntado há três anos e tenhamos decidido atacá-lo. Estávamos a trabalhar num problema diferente relacionado com certos conjuntos de pontos fixos em Teoria da Homotopia Estável. Estávamos a realizar certos cálculos e descobrimos que havia uma possível ligação entre o problema que estudávamos e o problema do invariante de Kervaire. Foi como se estivéssemos a procurar uma casa na mesma rua da casa de Kervaire, embora não estivéssemos a bater directamente à porta de Kervaire. E quando estávamos nessa casa encontrámos um túnel que parecia ir na direcção do problema de Kervaire. Começámos a caminhar ao longo desse túnel, mas deparámo-nos com um grande obstáculo e para o superar tivemos que inventar alguma maquinaria nova. Mas assim que fizemos isso encontrámo-nos no meio do problema de Kervaire.

Gazeta: Quando começaram a trabalhar efectivamente neste problema?

Ravenel: Há cerca de seis meses. Foi então que nos apercebemos de que o problema em que tínhamos trabalhado nos últimos dois ou três anos poderia levar à solução do problema de Kervaire.

Gazeta: Conforme disse, foram desenvolvidos novos métodos para esta demonstração. Tem já alguma outra aplicação em mente para estes métodos?

Ravenel: Ainda é demasiado cedo para responder a essa pergunta.

Gazeta: Desde há cerca de um ano têm vindo a ser divulgados no Arxiv vários artigos (em russo), pelo matemático Piotr Ahkmeteev, que afirmam resolver o problema de Kervaire por meio de uma abordagem geométrica. Sabe alguma coisa acerca deste assunto?

Ravenel: Ouvi falar um pouco deste assunto, mas os artigos estão em russo pelo que não tenho uma opinião informada. O facto de não estarem em inglês dificulta as coisas.

Gazeta: O que é que fez despertar o seu interesse pela matemática?

Ravenel: Soube desde muito cedo que tinha talento para a matemática. Mesmo antes de perceber exactamente o que era, sabia que tinha jeito para a disciplina. Acho que isso é verdade para muitos matemáticos.

Gazeta: Está a falar dos seus tempos de escola ou mesmo antes da escola?

Ravenel: Na escola, seguramente. Sempre fui muito bom a Aritmética. Embora me lembre de chumbar num teste de Aritmética no 5.º ano. Gostaria de encontrar o professor num avião e dizer-lhe a minha ocupação.

Gazeta: E quanto à Topologia? O que o levou à Topologia e à Topologia Algébrica em particular?

Ravenel: Acho que me centrei nisso quando fazia os meus estudos de licenciatura e não consigo explicar porquê. Parecia-me um assunto realmente interessante. E devo dizer que uma das coisas que eu achava mais fascinante era o artigo de Kervaire e Milnor [4] que mencionei antes acerca da classificação das esferas exóticas. Parecia-me um resultado fantástico. Lembro-me de olhar para uma tabela na primeira página do artigo onde diziam o número de estruturas diferenciáveis nas esferas das várias dimensões. O facto de eles conseguirem determinar estes números e a sua natureza fascinava-me, e desde então fiquei cativado.

Gazeta: Diz que o seu interesse começou ainda durante a licenciatura. Isso influenciou a sua escolha de universidade para realizar o doutoramento?

Ravenel: Sim, certifiquei-me de que fosse um sítio onde houvesse pessoas que trabalhassem em Topologia Algébrica.

Gazeta: O seu orientador de doutoramento foi Ed Brown, também ele um distinto topólogo. Quais foram as pessoas que tiveram maior influência no seu trabalho ao longo dos anos?



Mike Hopkins.

Ravenel: Quando eu estava a fazer o doutoramento aprendi muito com as palestras de Dennis Sullivan. Nessa altura ele estava no MIT e deu uma série de lições de Topologia Geométrica. Isso levou à produção de um documento conhecido por “lista telefónica”, uma vez que tinha mais ou menos esse tamanho e formato. Eu fui um dos três alunos de doutoramento a quem ele pediu ajuda para a revisão do texto. Foi uma série de lições verdadeiramente inspiradora e, apesar de não ter ido exactamente para essa área da matemática, lembro-me de ter aprendido muito. Também fui muito inspirado pelo trabalho de Quillen, claro.

Gazeta: A sua primeira grande contribuição (em trabalho conjunto com Haynes Miller e Steve Wilson [5]) está relacionada com os grupos de homotopias de esferas. Pode dizer-nos algo acerca deste trabalho e da sua origem?

Ravenel: Conheci o Steve Wilson quando éramos ambos alunos de doutoramento, em Boston, no Outono de 1968. Começámos nessa altura a falar de

cobordismo complexo e tópicos relacionados. Nessa altura esta era uma área bastante recente e parecia-me que tinha o potencial para aplicações muito interessantes aos grupos de homotopia das esferas.

Sempre me senti fascinado pelos grupos de homotopia das esferas. Não é algo que consiga explicar e é algo que encaro simultaneamente como uma benção e uma maldição. É um problema verdadeiramente intratável e eu não espero que seja resolvido durante a minha vida ou mesmo a dos meus filhos. É um daqueles problemas que parece “engolir matemática” no sentido seguinte: cada 10 ou 20 anos há um grande desenvolvimento computacional que nos dá uma visão mais profunda dos grupos de homotopia das esferas. Sempre que isso acontece apercebemo-nos de que é um problema muito mais complexo do que pensávamos. Isto tem acontecido uma e outra vez nos últimos 50 anos, e é bem possível que volte a acontecer. É um problema inesgotável, e isso significa que há sempre muita matemática a fazer para o atacar. Isso é o que ele tem de bom.

Mas voltemos a [5]. Acho que conheci o Haynes quando ele era um aluno de doutoramento em Princeton no princípio dos anos 1970, mas foi o ano 1974/1975 que foi crucial para esse artigo [5]. Nesse ano estávamos os três em Princeton: Haynes estava ainda a fazer o doutoramento, Steve fazia um pós-doutoramento e eu estava no Instituto de Estudos Avançados. Encontrávamo-nos regularmente. Todos nós conhecíamos o trabalho de Jack Morava - a sua descrição dos seus grupos estabilizadores e da filtração de Spec MU dada pela classificação das leis de grupo formais. Também sabíamos que isto devia ter consequências relativamente aos grupos de homotopia das esferas. Nessa altura havia também o trabalho de Toda e Oka sobre o que agora chamamos “elementos de letras gregas”. Tudo isto andava no ar, e nós sentíamos que se estudássemos o assunto de forma verdadeiramente profunda algo de muito bom poderia resultar.

Tínhamos horários radicalmente diferentes. Eu tinha um bebé, e por isso estava em modo “das 9 às 5” enquanto que o Steve Wilson ficava regularmente a trabalhar até às 6 da manhã e dormia depois até às 2 ou 3 da tarde. O Haynes estava algures no meio. Encontrávamo-nos no gabinete do Haynes ao final da tarde, que era a única altura do dia em que estávamos os três verdadeiramente acordados. De certa forma trabalhávamos 24 horas por dia.

Gazeta: Além de Teoremas importantes, o Professor é ainda responsável por conjecturas com grande influência. Essas conjecturas surgiram na sequência do trabalho que discutimos antes?

Ravenel: Sim, certamente. No Verão seguinte continuei a pensar nestas ideias e isso levou-me às conjecturas de que fala [6] [7].

Gazeta: Essas conjecturas descrevem a estrutura da Teoria da Homotopia Estável em “larga escala”.

Ravenel: Todas essas conjecturas, com excepção de uma, foram demonstradas [8] [9]. Eram de facto conjecturas acerca da estrutura da categoria de homotopia estável e dos grupos de homotopia das esferas em que ninguém tinha pensado. Foi divertido concebê-las.

Gazeta: Também desempenhou um papel de relevo no início de um importante desenvolvimento em matemática nos anos 1980 – a criação (ou invenção) da cohomologia elíptica [10]. Quer contar-nos algo sobre isto?

Ravenel: Em meados dos anos 1970 apercebi-me de que havia certos objectos chamados curvas elípticas às quais estavam associados grupos formais. Tentei aprender o mais possível sobre elas. Nesse ano, em Princeton, assisti a um curso de Nick Katz sobre Curvas Elípticas e Formas Modulares. Fartei-me de o importunar com as minhas ideias sobre o assunto, mas nada resultou disso. As minhas ideias não estavam bem articuladas. Suspeitava de que havia algo como Cohomologia Elíptica, mas não dispunha das ferramentas correctas para juntar todos os fios da meada. Falava disso quando podia com as pessoas e foi um prazer ver as coisas conjugarem-se nos anos 1980. Aquilo que pôs a bola a rolar foi um Teorema de Ochanine [11] relacionado com acções de círculos em variedades Spin. Isto levou ao conceito de género elíptico e isso não é algo que me teria ocorrido.

Gazeta: Olhando para trás, tem algum Teorema favorito?

Ravenel: Fui capaz de calcular os grupos de homotopia das esferas no primo 5 até cerca da dimensão 1000. Esse era o objectivo do meu primeiro

livro – o “livro verde” [12]. Foi muito agradável aplicar toda aquela maquinaria a um problema concreto.

Uma das coisas que me preocupa na Topologia Algébrica é que, nos dias que correm, quando vou a conferências há muitas palestras de pessoas que desenvolvem e refinam teorias, mas não as aplicam à resolução de problemas matemáticos. É como se estivéssemos a ver pessoas afinar um carro mas sem nunca o levar para a estrada. Acho que estes carros precisam de ser conduzidos e que é importante ter um problema concreto em mente quando se está a desenvolver uma nova teoria. A matemática resultante é muito melhor se a teoria puder ser utilizada para resolver um problema que existia antes de a teoria ser criada.

Gazeta: Diz-se que há uma dicotomia em matemática entre os “construtores de teorias” e os “solucionadores de problemas”. Descrever-se-ia então como um solucionador de problemas?

Ravenel: Acho que sim. Se tiver que ser, desenvolvo uma teoria, mas não gosto de construir teorias por si mesmas.

Gazeta: Assim que talvez tenha sido este cálculo aquilo que lhe deu mais prazer?

Ravenel: Bom, não gosto de discriminar as coisas dessa forma. A minha carreira deu-me muito prazer. É óptimo trabalhar em Topologia Algébrica. A comunidade da Teoria da Homotopia é um grupo fantástico de gente. Sempre foram muito simpáticos e acho que temos muita sorte a esse respeito.

Notei desde muito cedo na minha carreira que as pessoas de Topologia Algébrica formam um grupo muito amigável, mas demorei algum tempo a perceber que isso não é verdade em todas as áreas da matemática. Já me perguntei muitas vezes porque é que será e acho que parte da razão é que se trata de um clube que tem uma jóia de entrada muito elevada. Há um preço intelectual muito grande a pagar para trabalhar em Topologia Algébrica – uma enorme quantidade de maquinaria a aprender. Isso cria laços entre as pessoas que pagaram o preço para entrar.

As pessoas de Topologia Algébrica falam todas a mesma língua, de certa forma, e quando se passa a maior parte do nosso tempo a pensar em coisas que

literalmente menos de uma pessoa num milhão consegue perceber há uma ligação imediata quando encontramos alguém que nos entende.

Gazeta: Que perspectivas vê para a Topologia Algébrica e para a Teoria de Homotopia Estável em particular. Sente-se optimista?

Ravenel: Sim, sinto-me optimista. Ao longo da minha vida a área tem crescido de forma progressiva tanto em termos de praticantes como de número de conferências e teoremas demonstrados. Em cada estágio da minha carreira sempre houve gente a dizer que a área está a morrer ou que se sente preocupada por alguma razão. Aprendi a ignorar essas pessoas porque, como disse, a área continua a desenvolver-se.

Gazeta: Acha que a visão desta área a partir de outras áreas da matemática se tem alterado ao longo dos anos?

Ravenel: Imediatamente antes de eu iniciar a carreira houve resultados espectaculares em Topologia Algébrica. Já mencionei a classificação das esferas exóticas. Também há o Teorema de Atiyah-Singer. Nos anos 1960 muitos topólogos ganharam a medalha Fields. Tratava-se portanto de um tempo em que o prestígio da área no seio da matemática era muito maior do que hoje, mas de qualquer forma acho que a área é muito saudável. Uma das coisas que aprecio é o facto de o conjunto de ferramentas que se usa continuar a crescer. Hoje em dia, para trabalhar em Teoria da Homotopia Estável é necessário saber muito acerca de Geometria Algébrica Aritmética (Geometria Algébrica em característica p), que é usada de formas cada vez mais sofisticadas. Isso era algo que não existia há 20 anos.

Gazeta: Acha que a área emergente de Geometria Algébrica Derivada pode fazer com que a Topologia Algébrica desempenhe um papel ainda mais relevante?

Ravenel: Acho que é bem possível. Recentemente, houve também o trabalho de Voevodsky que foi premiado com a medalha Fields. Ele conseguiu importar muitos métodos da Teoria da Homotopia para um problema de Geometria Algébrica e K -teoria

Algébrica. Foi um desenvolvimento muito encorajador.

Gazeta: Além da sua carreira na investigação fez também uma carreira notável na administração. Há cerca de 14 anos houve uma crise no departamento de Matemática da sua universidade – a Universidade de Rochester. Quer contar-nos um pouco sobre este assunto?

Ravenel: Houve certamente uma crise. A nossa administração decidiu eliminar o programa doutoral em Matemática para poupar dinheiro e nós conseguimos impedi-lo. Conseguimos convencê-los de que não era uma boa ideia. E devo dizer que tivemos muita ajuda da Sociedade Matemática Americana, que nos deu muito apoio moral e tático. Foi uma experiência interessante. O que eu aprendi com ela foi que todos os departamentos de Matemática têm que ter uma ou duas pessoas que estejam em contacto com o resto da universidade. É muito comum entre os matemáticos (eu incluído) não quererem ter nada a ver com o mundo académico fora da matemática. A maioria dos matemáticos quer pensar na sua matemática e não na política da sua universidade ou na maneira como o departamento se enquadra na instituição. Estes assuntos são encarados como aborrecimentos e distrações.

Ora é verdade que a matemática é uma profissão muito exigente, que obriga a uma enorme concentração. Para um matemático jovem é provavelmente boa ideia concentrar a sua energia mental na matemática o mais possível. Mas para a profissão como um todo, tem que haver alguém em cada departamento a “tomar conta da loja”. Isto significa ter contacto com a universidade, saber o que se passa e de que forma o departamento pode contribuir.

O que muitos matemáticos e mesmo muitos administradores de universidades não percebem é que a matemática é uma parte essencial de qualquer universidade. Não há nenhuma boa universidade no mundo que possa funcionar sem um departamento de Matemática. A matemática é um campo único do conhecimento no sentido em que contém ferramentas requeridas por um grande número de outras disciplinas. Não há nenhuma outra disciplina com estas características, com possível excepção do Inglês (ou seja lá qual for a língua em questão).

A maioria das disciplinas necessita de algum conhecimento matemático e qualquer departamento de Matemática que saiba jogar as suas cartas pode tornar-se numa parte essencial da sua universidade. A maioria dos matemáticos não é consciente disto, e isso pode meter o departamento em grandes problemas como nos aconteceu em 1995.

Gazeta: Como fizeram para convencer os administradores?

Ravenel: Convencemo-los de que o encerramento do programa doutoral em Matemática danificaria severamente a reputação da universidade. A verdade é que não há nenhuma universidade com actividade de investigação relevante nos Estados Unidos, e talvez no mundo, que não tenha um programa doutoral em Matemática. Nessa altura eu coligi informação que sustentava esta afirmação de forma a que eles não a pudessem ignorar. Acho que esse foi o ponto crucial: perceberam que mesmo que se poupassem alguns dólares a curto prazo, não estariam a ajudar a universidade a longo prazo.

Gazeta: Durante o período em que presidiu ao departamento de Rochester houve um grande aumento do número de alunos que escolhiam Matemática como área de concentração. Pode dizer-nos como conseguiram isto?

Ravenel: Desde o tempo da crise, a percentagem dos alunos de Rochester que se licenciam em Matemática triplicou ou quadruplicou. Tenho muito orgulho nisso. Acho que isto aconteceu porque o departamento como um todo se apercebeu de que a sua missão de ensino era importante, e que se tratarmos bem os nossos alunos eles reagem de forma positiva.

A reacção dos alunos tem sido muito gratificante. Há muitos alunos de licenciatura entusiastas em Rochester e é realmente divertido trabalhar com eles. O departamento adquiriu a reputação de ser um sítio amigável e interessante, e acho que qualquer departamento pode conseguir isto. Não há nada de único em Rochester que não possa ser imitado.

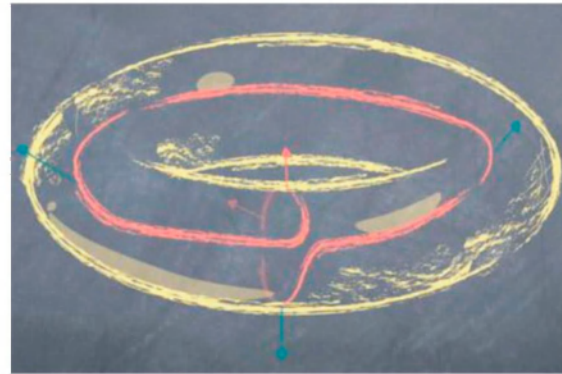
Gazeta: Foi apenas uma questão de um maior esforço por parte dos professores ou houve algo em particular que ajudou?

Ravenel: Houve várias coisas. Uma delas é um programa chamado WeBWork, criado por um par de colegas meus, que permite a realização de trabalhos de casa através da internet. Eles começaram a trabalhar nele mais ou menos na altura da crise. Nós sabíamos que uma grande vulnerabilidade nossa era o facto de não termos recursos suficientes para corrigir trabalhos de casa de Cálculo. Na minha universidade cerca de 80% dos alunos do primeiro ano inscrevem-se em Cálculo e para eles a cadeira é muito importante. Não porque estejam interessados em matemática, mas porque precisam da cadeira para a sua área de concentração ou para entrar na Escola de Medicina.

Se um aluno que pretende fazer carreira em Engenharia, Ciência ou Medicina tem uma má nota em Cálculo trata-se de um assunto grave, talvez até de uma crise que o obrigue a mudar de carreira. Os professores de Matemática têm que perceber isto e é muito fácil não o fazer porque, como matemáticos, nós pensamos no Cálculo como algo de mundano e aborrecido que poderíamos fazer a dormir. Mas temos que nos lembrar que para os alunos é algo de importante em que têm que se sair bem, mesmo que não estejam interessados. Eles estão dispostos a esforçar-se e reagirão positivamente se lhes dermos oportunidades para que se saiam bem.

No nosso caso conseguimos fazer com que os trabalhos de casa se tornassem uma parte mais importante do curso, criando um programa que dava notas instantaneamente. Antes não podíamos corrigir os trabalhos de casa e agora constituem 25% ou 30% da nota e são levados muito a sério pelos estudantes. Se não se corrige os trabalhos de casa, a maioria dos estudantes não os faz, e portanto não retira qualquer benefício deles.

Agora, em Rochester, assim como em cerca de 100 outras escolas que usam este software, os alunos



Uma variedade emoldurada de dimensão 2 com invariante de Kervaire 1.

percebem que têm que fazer os trabalhos de casa e que serão prejudicados se não os fizerem.

Além disso há este mecanismo de feedback instantâneo que é pedagogicamente muito valioso – algo de que não nos apercebemos imediatamente. O facto de trabalhar num problema, introduzir a solução e saber imediatamente se a resposta é ou não a correcta é excelente. Nós dizemos aos alunos que

podem continuar a tentar obter a resposta correcta até um certo prazo e a experiência mostra que muitos estudantes continuam a tentar até acertarem, mesmo depois de o prazo passar. Muitos deles queixam-se que gastam demasiado tempo com os trabalhos de casa, mas para mim isso é um sinal de sucesso. Estão a aprender a matéria!☐

Referências

- [1] **Ravenel, D.** "The Kervaire invariant page", www.math.rochester.edu/u/faculty/doug/kervaire.html
- [2] **Arf, C.** (1941). "Untersuchungen ueber quadratische Formen in Koerpern der Charakteristik 2, I". *J. Reine Angew. Math.*, 183, 148–167.
- [3] **Browder, W.** (1969). "The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization". *Ann. of Math* (2) 90, 157-186.
- [4] **Kervaire, M. & Milnor, J.** (1963). "Groups of homotopy spheres. I.". *Ann. of Math.* (2) 77, 504-537.
- [5] **Miller, H., Ravenel, D. & Wilson, S.** (1977). "Periodic phenomena in the Adams-Novikov spectral sequence.". *Ann. of Math.* (2) 106 no.3, 469-516.
- [6] **Ravenel, D.** (1984). "Localization with respect to certain periodic homology theories". *Amer. J. Math.* 106 no.2, 351-414.
- [7] **Ravenel, D.** (1992). "Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory." *Annals of Mathematics Studies*, 128. Princeton University Press, Princeton, NJ, xiv+209.
- [8] **Devinatz, E., Hopkins, M. & Smith, J.** (1988). "Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory.I.", *Ann. of Math.* (2) 128, no. 2, 207-241.
- [9] **Hopkins, M. & Smith, J.** (1998). "Nilpotence and stable homotopy theory. II." *Ann. of Math.* (2) 148, no.1, 1-49.
- [10] **Landweber, P., Ravenel D. & Stong, R.** "Periodic cohomology theories defined by elliptic curves." *The Czech centennial* (Boston, MA, 1993), 317-337, *Contemp. Math.*, 181, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 1995.
- [11] **Ochanine, S.** (1987). "Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques.", *Topology* 26, 143-151.
- [12] **Ravenel, D.** (1986). "Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres." *Pure and Applied Mathematics*, 121. Academic Press, Inc., Orlando, FL, xx+413 pp.

Bibliografia

- Jackson, Allyn** (1996). "Downsizing at Rochester: Mathematics PhD program cut", *Notices of the Amer. Math. Soc.* 43, no.3, 300-306.
- Ravenel, D.** (1999). "Rochester Four Years Later: From Crisis to Opportunity", *Notices of the Amer. Math. Soc.*, 46, no.8, 861-863.

tardes de matemática

10 outubro 2009 15h30

Biblioteca Central da Universidade
da Beira Interior

a matemática da nova física

Carlos Folhais

Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade de Coimbra

12 dezembro 2009 15h30

Saião Nobre da Câmara Municipal da Covilhã

**a matemática no tempo
do mestre José vizinho**

Natália Beblano

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Marla José Tavares

Universidade Aberta

António Costa Canas

Centro de História das Ciências da Universidade de Lisboa

14 novembro 2009 15h30

Biblioteca Central da Universidade
da Beira Interior

**grandezas e misérias da estatística
- prémios nobel e prémios Ig nobel**

Dinis Pestana

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Informações

Sociedade Portuguesa de Matemática

217 939 785

www.spm.pt

Delegação Regional Centro da SPM

275 329 256

Apoios:



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Covilhã | Portugal

A Característica de Euler?

Todos sabemos que o número de vértices mais o número de faces dos poliedros usuais é igual ao número de arestas mais dois. Porém, será que esta relação se verifica para todo o poliedro? Tem algum tipo de aplicação ou trata-se de uma propriedade anedótica? Com a introdução de um invariante numérico básico em topologia, a característica de Euler, é possível encontrar respostas para todas estas indagações.

Em 1750, numa carta dirigida a Christian Goldbach, Leonhard Euler escreve:

“Em todo o sólido limitado por faces planas, a soma do número de faces com o número de vértices excede em dois o número de arestas”

Com esta afirmação Euler identifica¹ três tipos de “peças” diferentes na superfície de tal sólido, de dimensões 0, 1 e 2 (vértices, arestas e faces) e estabelece a relação:

$$b_0 - b_1 + b_2 = 2$$

onde b_k designa o número de “peças k -dimensionais”, $k=0,1,2$. A soma alternada $b_0 - b_1 + b_2$, chama-se *característica de Euler* do poliedro (da superfície do poliedro, para sermos exactos) e a propriedade anterior enuncia-se como “a superfície de um poliedro convexo² tem característica de Euler igual a 2”. Não é difícil pensar numa extensão da definição anterior: se um objecto está construído a partir de “peças” de dimensões 0, 1, ..., n , chamamos característica de Euler desse objecto à soma alternada do número de “peças” em cada dimensão.

Uma “peça n -dimensional” pode ser formalizada pelo conceito de um n -simplex. Um n -simplex com vértices a_0, a_1, \dots, a_n de \mathbb{R}^N é o subconjunto de \mathbb{R}^N definido por:

$$\{x \in \mathbb{R}^N : x = t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_n a_n, t_i \geq 0, t_0 + t_1 + \dots + t_n \leq 1\}$$

com a_0, a_1, \dots, a_n pontos de \mathbb{R}^N em posição geral, isto é, não contidos num plano n -dimensional. Por exemplo (Figura 1), um 1-simplex com vértices a_0 e a_1 é o segmento com extremos a_0 e a_1 , um 2-simplex com vértices a_0, a_1 e a_2 é o triângulo com vértices a_0, a_1 e a_2 , um 3-simplex é um tetraedro sólido.

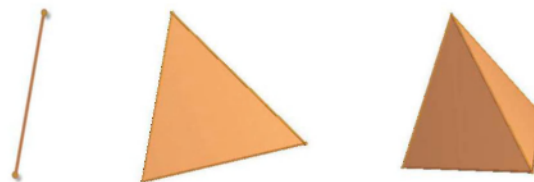


Figura 1

Um poliedro n -dimensional ou *complexo simplicial n -dimensional* é a reunião de um número finito de simplices de dimensão menor ou igual a n de tal modo que dois simplices diferentes têm intersecção vazia ou intersectam-se ao longo de um simplex de dimensão inferior. A característica de Euler de um poliedro n -dimensional K , representada normalmente pela letra grega χ , é a soma alternada:

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + \dots + (-1)^n b_n$$

onde b_k designa o número de k -simplices para $k=0,1, \dots, n$. A superfície do octaedro e a do grande dodecaedro

¹Nos capítulos 1 a 9 de [1] encontra-se uma detalhada e amena exposição histórica desta descoberta.

²Quando L. Euler escreve “sólido limitado por faces planas” está a referir-se aos poliedros convexos.

estrelado são poliedros bidimensionais com característica de Euler igual a 2; o octaedro sólido é um poliedro tridimensional com característica de Euler igual a 1 (Figura 2).

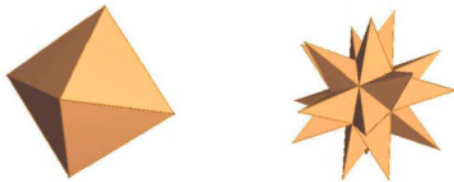


Figura 2

Notemos que a definição de poliedro bidimensional parece mais restritiva que a definição usual de poliedro, pois só consideramos como “peças bidimensionais” os triângulos (2-*símplices*) e não quaisquer polígonos. Na realidade, como todo o polígono pode decompor-se em triângulos essa restrição não faz qualquer diferença.

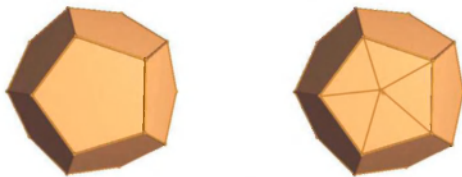


Figura 3

Além do mais, se partimos de um poliedro com V vértices, A arestas e F faces poligonais e fizermos subdivisões baricêntricas nas faces (Figura 3), a característica de Euler do poliedro resultante (que tem faces triangulares) é precisamente $V - A + F$. Efectivamente, ao dividir baricentricamente um polígono com n -lados em n triângulos estamos a criar $n-1$ faces, n arestas e 1 vértice pelo que o cômputo total alternado permanece igual.

Os poliedros regulares, os prismas e anti-prismas são poliedros bidimensionais³ com característica de Euler igual a 2. Mas há exemplos mais exóticos de poliedros bidimensionais como o *cubo truncado perfurado* e a *stella octângula* (Figura 4).

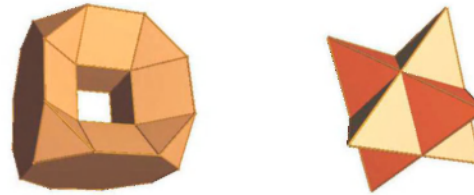


Figura 4

O *cubo truncado perfurado* tem 32 faces (12 quadrados, 4 octógonos e 16 triângulos), 64 arestas e 32 vértices pelo que a sua característica de Euler é 0. A *stella octângula* define-se usualmente como a reunião de dois tetraedros regulares⁴ e é formada por 32 faces (incluindo 8 triângulos interiores não visíveis desde o exterior!), 36 arestas e 14 vértices, pelo que a sua característica de Euler é 10. O poliedro definido só pelos triângulos exteriores da *stella octângula* tem característica de Euler 2.

A propriedade fundamental da característica de Euler (que explica, por exemplo, porque todos os poliedros convexos têm a mesma característica) é que se trata de um *invariante topológico*⁵. Isto é, se K e K' são poliedros n -dimensionais homeomorfos, ou seja, se existe uma aplicação contínua e bijetiva entre eles com inversa contínua, então $\chi(K) = \chi(K')$. Poincaré provou este resultado nada trivial usando argumentos difíceis de explicar sucintamente.

Não é fácil dar uma ideia intuitiva exacta do que significa ser homeomorfo, mas costuma dizer-se que dois objectos são homeomorfos se se podem deformar continuamente um no outro⁶. Por exemplo, se imaginarmos os poliedros feitos de um material elástico, ao insuflar no seu interior uns deformar-se-iam numa superfície esférica (os poliedros regulares, os prismas, a superfície visível da *stella octângula*), outros numa bóia de praia (o *cubo truncado perfurado*), outros num balão com oito balões colados (a *stella octângula*)...

O Teorema de Poincaré diz-nos que todos os poliedros que se deformem no mesmo objecto têm a mesma característica de Euler, pois são homeomorfos. Aliás, esse teorema permite estender a definição de

³Historicamente o termo poliedro designava o objecto sólido (*sólidos platónicos*). Actualmente o termo poliedro usa-se tanto para o sólido como para a sua superfície.

⁴Na literatura aparece frequentemente que a *Stella Octângula* tem 8 faces, 12 arestas e 8 vértices e número de Euler 4 (não são contados os vértices e as arestas que aparecem nas intersecções dos tetraedros). Este “número de Euler” não corresponde ao invariante topológico chamado característica de Euler, que é 10. Este tipo de discordância encontra-se na literatura em muitos poliedros estrelados.

⁵De facto, é um invariante do tipo de homotopia.

⁶A ideia de deformação contínua parece envolver uma noção de espaço exterior (o lugar onde a deformação ocorre) que não está presente no conceito de homeomorfismo e que em topologia se chama *isotopia*.

O Que É...

[A Característica de Euler?]

característica de Euler a uma classe muito maior de objectos: a classe dos objectos homeomorfos a poliedros ou *espaços topológicos triangularizáveis*. Por exemplo, podemos definir a característica de Euler da bóia de praia (o toro) como 0 pois todo o poliedro homeomorfo a ela é homeomorfo ao *cubo truncado perfurado* (Figura 4) que tem característica de Euler 0.

Embora a demonstração geral seja difícil de resumir⁷, é fácil apresentar um argumento bastante convincente de que todo o poliedro homeomorfo a uma esfera tem característica de Euler 2. Recordemos que podemos supor o poliedro formado por triângulos e imaginemos o poliedro construído em material elástico. Se o poliedro se deformar continuamente numa esfera, as suas arestas deformam-se em arcos que definem um mapa da esfera com regiões triangulares (Figura 5).

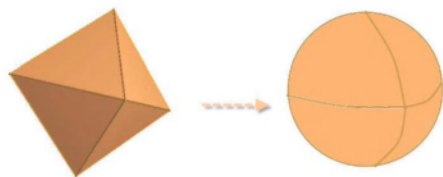


Figura 5

Este tipo de mapas na esfera podem ser desenhados a partir de um “triângulo inicial na esfera”, realizando sucessivamente alguma das operações seguintes:

- adicionar um novo vértice e uma nova aresta;
- unir dois vértices que já existem criando uma nova face.

O triângulo inicial determina na esfera um mapa com duas regiões triangulares (uma interior ao triângulo e outra exterior), 3 arestas e 3 vértices. Isto é, o mapa inicial tem característica de Euler 2. As operações a) e b) não alteram a característica de Euler do mapa, pelo que o mapa final vai ter também característica de Euler 2.

A característica de Euler tem inúmeras aplicações. Indicamos em seguida algumas das mais conhecidas e referências onde podem ser encontradas em detalhe:

- Existem apenas cinco poliedros regulares (ver a seguir);
- Coloração de mapas: o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa numa superfície depende da característica de Euler dessa superfície [3];

⁷Consultar capítulo 2 de [2].

⁸A prova aqui apresentada determina as únicas configurações possíveis para o poliedro. E essas configurações podem realizar-se nos bem conhecidos *sólidos platónicos*.

3. A característica de Euler pode ser utilizada para provar que um grafo não é plano [1];

4. A característica de Euler restringe a curvatura de uma superfície através do famoso *Teorema de Gauss-Bonnet*[4].

Terminamos então este artigo usando a Fórmula de Poliedros de Euler para mostrar que existem no máximo⁸ cinco poliedros regulares.

Suponhamos que K é um poliedro regular com F faces, isto é, as F faces de K são polígonos regulares e congruentes de m lados de tal modo que cada vértice incide exactamente em n faces. Imaginemos K como um puzzle feito com polígonos. Antes de montar o puzzle temos F polígonos, mF arestas (que serão coladas duas a duas) e nF vértices (que serão colados em grupos de n vértices). Assim, se A e V são, respectivamente, o número de arestas e vértices do poliedro (já montado) tem-se que:

$$2A = mF \quad \text{e} \quad nV = mF$$

Estas igualdades permitem expressar A e V em função de F , m e n . Substituindo na Fórmula de Euler:

$$2 = V - A + F$$

obtemos

$$F = 4n / (2m - nm + 2n)$$

Como n é positivo e o número de faces F também deve ser positivo, resulta que m e n devem satisfazer a condição:

$$2m - nm + 2n > 0$$

Os únicos valores que verificam esta condição são:

- $m=3, n=3$ que implica $F=4$ (configuração do *tetraedro*);
- $m=3, n=4$ que implica $F=8$ (configuração do *octaedro*);
- $m=3, n=5$ que implica $F=20$ (configuração do *icosaedro*);
- $m=4, n=3$ que implica $F=6$ (configuração do *cubo*);
- $m=5, n=3$ que implica $F=12$ (configuração do *dodecaedro*).[□]

Referências

- [1] **Richeson, David S.** (2008). *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press.
- [2] **Hatcher, Allen** (2002). *Algebraic Topology*, Cambridge University Press.
- [3] **Firby, P.A., Gardiner, C.F.** (2001). *Surface Topology*, Horwood Publishing Ltd.
- [4] **Bloch, Ethan D.** (1996). *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry*, Birkhauser.

Software:

Os desenhos de poliedros foram realizados com o programa Small Stella, de Robert Webb (consultar <http://www.software3d.com/Stella.php>).



por Luís Madureira

[Antigo professor da Escola Secundária Padre António Vieira]

Os Jogos da “Sobreposição” e da “Mudança” com Moedas Não-Equilibradas

Quantas coincidências são de esperar no lançamento simultâneo de duas ou mais moedas não-equilibradas? E no lançamento consecutivo de uma moeda não-equilibrada, quantas mudanças de face ocorrerão e qual a sua distribuição de probabilidade? O artigo debruça-se sobre este tipo de questões e propõe respostas algo inesperadas.

Suponha-se, a título de exemplo, que em certa escola existem 10 turmas com 20 alunos cada, dos quais 10 são rapazes e 10 são raparigas. Em cada turma, metade das raparigas tem olhos azuis e metade tem olhos negros; quanto aos rapazes, nada se sabe sobre o número (que pode variar de turma para turma) dos que têm olhos azuis e negros.

Constituem-se aleatoriamente 10 pares (rapaz-rapariga) por turma e conta-se o número de casais com igual cor de olhos.

Quantos destes casais existirão nas 10 turmas?

Cerca de 50, isto é, metade do número de casais que se podem constituir¹. Esta estimativa, apesar da sua inevitável imprecisão, não deixa de ser algo surpreendente, tendo em conta que nada se sabe sobre o número de rapazes com olhos azuis ou negros em cada turma, e pode ser generalizada através do teorema que adiante enunciaremos. Para esse efeito, reformulemos o “Jogo da Sobreposição” no contexto de moedas não-equilibradas.

Lançam-se três moedas não-equilibradas, seis vezes consecutivas, e conta-se o número k de vezes, com $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que as três moedas apresentam a mesma face (número de sobreposições ou coincidências), recebendo cada apostador k euros. Quanto deve um casino cobrar por aposta para ter lucro?

¹Sublinhe-se que não é possível estimar o número de casais com olhos azuis e o número de casais com olhos negros em cada turma, a menos que se conheçam simultaneamente as probabilidades p_1 de os rapazes terem olhos azuis e p_2 de as raparigas terem olhos azuis, tendo-se então, respectivamente, np_1p_2 e $n(1-p_1)(1-p_2)$, onde n representa o número de rapazes da turma (igual ao número de raparigas).

No entanto, no caso de $p_2 = 0,5$, é possível estimar o número total de casais com olhos da mesma cor após o primeiro

emparelhamento aleatório, ainda que se ignore o valor de p_1 : $np_1p_2 + n(1-p_1)(1-p_2) = \frac{n}{2}$

Podemos imaginar a seguinte experiência:

Se, retirados os casais entretanto formados, repetirmos sucessivamente o emparelhamento aleatório dos elementos que restam até que seja possível constituir novos casais, concluímos que, no total, se formarão em cada turma (considerando agora p_2 , qualquer):

np_1 casais com olhos azuis e $n(1-p_1)$ casais com olhos negros quando $p_1 < p_2$ e

np_2 casais com olhos azuis e $n(1-p_2)$ casais com olhos negros quando $p_1 > p_2$.

Note-se que o valor limite deste processo de emparelhamentos aleatórios sucessivos coincide com o que seria obtido num único passo, se rapazes e raparigas utilizassem a percepção visual na escolha intencional e determinística de um companheiro com idêntica cor de olhos.

[Os Jogos da "Sobreposição" e da "Mudança" com Moedas Não-Equilibradas]

Representemos por p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de ocorrência de uma determinada face das três moedas e seja X a variável aleatória que representa o valor k recebido pelo apostador.

A função de probabilidade de X é dada por:

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \cdot \left(\prod_{j=1}^3 p_j + \prod_{j=1}^3 (1 - p_j) \right)^k \cdot \left(1 - \prod_{j=1}^3 p_j - \prod_{j=1}^3 (1 - p_j) \right)^{6-k} \quad (1)$$

tendo-se, como valor esperado,

$$E(X) = 6 \cdot \left(\prod_{j=1}^3 p_j + \prod_{j=1}^3 (1 - p_j) \right) = 6 \cdot (1 - p_1 - p_2 - p_3 + p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3),$$

peço que, para ter lucro, o casino deve cobrar um valor superior a $E(X)$.

As expressões precedentes podem ser generalizadas a qualquer número de moedas e de lançamentos².

Tendo em conta os resultados apresentados em [1], se considerarmos equilibradas as três moedas,

obtemos $P(X = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot 3^{6-k}}{4^6}$ e, portanto, é esta a distribuição de probabilidade do valor recebido por jogo (com $p_1 = p_2 = p_3 = 0,5$):

Valor recebido (k)	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidade	0,177979	0,355957	0,296631	0,131836	0,032959	0,004395	0,000244

O correspondente valor esperado de X é $E(X) = 6 \cdot \frac{1}{4} = 1,5$.

Que acontecerá se substituirmos uma (e apenas uma) das moedas anteriores por uma moeda não-equilibrada?

Suponhamos $p_1 \neq 0,5$ e $p_2 = p_3 = 0,5$. Após substituição em (1) e simplificação, obtém-se, como anteriormente,

$$P(X = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot 3^{6-k}}{4^6},$$

concluindo-se assim que a substituição de uma moeda equilibrada por uma não-equilibrada em nada alterou a distribuição de probabilidade do valor recebido por jogo. Ou seja, no "Jogo da Sobreposição" pode utilizar-se indiferentemente três moedas equilibradas ou apenas duas moedas equilibradas de entre essas três, sendo então irrelevante a natureza da terceira moeda! É até possível dar-se o caso de esta moeda apresentar sempre a mesma face, o que não significa, obviamente, que ela possa retirar-se do jogo, facto que se reconhece de imediato considerando um jogo com duas moedas, uma equilibrada e outra totalmente viciada, já que a eliminação da moeda viciada implicaria a impossibilidade de jogar.

E se jogarmos agora com duas moedas não-equilibradas?

Consideremos então $p_1 \neq 0,5 \wedge p_2 \neq 0,5 \wedge p_3 = 0,5$ e determinemos o valor esperado $E(X) = 6(0,5 - 0,5(p_1 + p_2) + p_1 p_2)$. Poderá $E(X)$ valer 1,5 com $p_1 \neq 0,5 \wedge p_2 \neq 0,5$?

Verifica-se que tal não é possível, uma vez que, sendo $p_3 = 0,5$, $E(X) = 1,5 \Leftrightarrow (p_1 = 0,5 \wedge p_2 \text{ qualquer}) \vee (p_1 \text{ qualquer} \wedge p_2 = 0,5)$.

²Sejam p_1, p_2, \dots, p_m as probabilidades de ocorrência de determinada face em m moedas que se lançam simultaneamente n vezes consecutivas. Então:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\prod_{j=1}^m p_j + \prod_{j=1}^m (1 - p_j) \right)^k \cdot \left(1 - \prod_{j=1}^m p_j - \prod_{j=1}^m (1 - p_j) \right)^{n-k} \quad (2)$$

tendo-se $E(X) = n \cdot \left(\prod_{j=1}^m p_j + \prod_{j=1}^m (1 - p_j) \right)$

Facilmente se verifica que estas equações são ainda válidas para moedas equilibradas, considerando para o efeito $p_j = \frac{1}{2}, \forall j$. Obtém-se, nesse caso, as expressões apresentadas em [1].

[Os Jogos da “Sobreposição” e da “Mudança” com Moedas Não-Equilibradas]

Será oportuno sublinhar que pode obter-se $E(X) = 1,5$ com três moedas não-equilibradas: um exemplo, entre muitos, $p_1 = 0,46$; $p_2 = 0,46$ e $p_3 = 0,52$.

Os resultados a que chegámos sugerem o seguinte teorema (que podemos designar “Insensibilidade ao desvio do equilíbrio”):

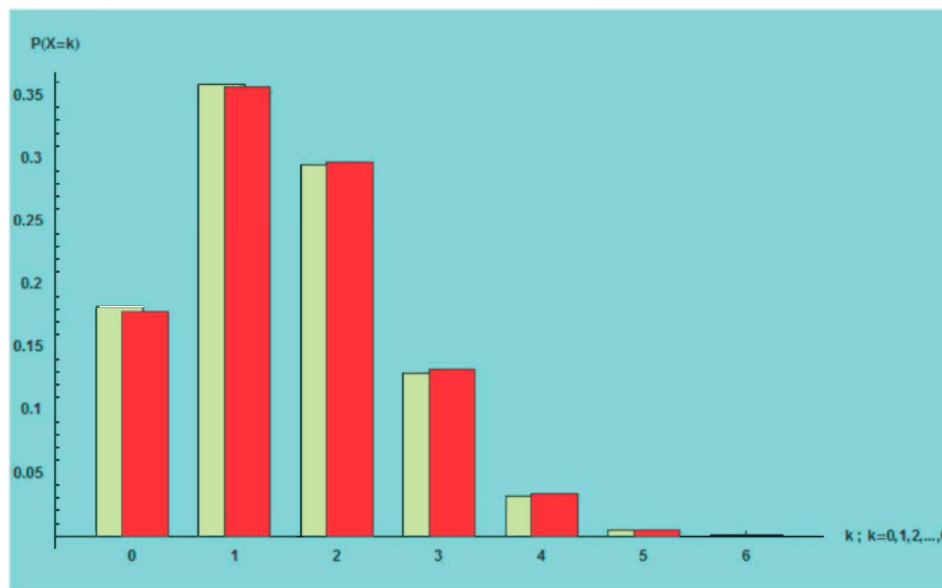
A distribuição de probabilidade do número de sobreposições no lançamento simultâneo de duas ou mais moedas equilibradas não se altera se substituirmos uma delas (e apenas uma), por uma qualquer moeda não-equilibrada.

A respectiva demonstração é apresentada em nota de rodapé³.

Um caso particular em que se torna evidente este teorema é o de se jogarem duas moedas, das quais uma é equilibrada e a outra apresenta sempre a mesma face.

Uma outra conclusão inesperada a respeito deste jogo é a seguinte: o nosso hipotético casino nada tem a recear quanto a um ligeiro desequilíbrio das três moedas utilizadas; na verdade, até pode lucrar com isso!⁴ Vejamos porquê.

Admitamos que a probabilidade de sair determinada face em cada uma das três moedas se situa no intervalo $[0,45; 0,55]$ e determinemos o valor de $E(X) = 6 \cdot (1 - p_1 - p_2 - p_3 + p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)$ para as possíveis 64.478.185 combinações de valores de p_1 , p_2 e p_3 que conduzem a $E(X) \neq 1,5$ obtidas para sucessivos incrementos de 0,00025, o que dá uma razoável estimativa das probabilidades envolvidas. Verifica-se que cerca de 59,67% das combinações geram valores de $E(X)$ inferiores a 1,5 (o valor esperado para o caso da distribuição “equilibrada”), pelo que o casino tem quase 60% de probabilidades (estimadas) de obter um lucro adicional se utilizar moedas ligeiramente desequilibradas. Uma das combinações que produz lucro adicional (€0,015) é a seguinte: $p_1 = 0,45$; $p_2 = 0,55$ e $p_3 = 0,47$. No gráfico seguinte comparam-se as distribuições de probabilidade do valor recebido por jogo para os valores de p_i referidos (a amarelo) e para três moedas equilibradas (a vermelho):



³Das m moedas, uma é “viciada”, com probabilidade $p \neq 0,5$ de apresentar determinada face, e as restantes são equilibradas.

Substituindo os $m-1$ valores $p_j = \frac{1}{2}$ em (2), (ver nota 2), e após simplificação, obtemos uma expressão da função de probabilidade, independente de p , e que coincide com a distribuição de probabilidade correspondente ao jogo com m moedas equilibradas.

⁴Tal já não ocorreria se o jogo se realizasse com duas moedas, ambas não-equilibradas, uma vez que a probabilidade de obter lucro adicional seria igual a 50%.

[Os Jogos da "Sobreposição" e da "Mudança" com Moedas Não-Equilibradas]

Suponhamos agora que o casino pretende introduzir um segundo jogo a que chama "Jogo da Mudança".

Uma moeda é lançada 11 vezes consecutivas e conta-se o número k de vezes, com $k \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9, 10\}$, em

que uma face é seguida de outra face diferente. Definamos "taxa de mudança" como a razão $\frac{k}{10}$. Cada apostador

recebe dez vezes o valor da "taxa de mudança". Quanto deve o casino cobrar por cada aposta para ter lucro no jogo?

Supondo a moeda equilibrada e tendo em conta as fórmulas apresentadas em [1], pode concluir-se que deve

cobrar um valor superior a $10 \times \frac{1}{2} = 5$ euros.

E se a moeda não for equilibrada? A função de probabilidade da variável aleatória Y que representa a "taxa de mudança" $\frac{k}{n-1}$ (com $k=0, 1, \dots, n-1$), numa sequência de $n > 2$ lançamentos consecutivos de uma moeda não-equilibrada cujas faces ocorrem com probabilidades p e $1-p \neq p$, é a seguinte:

$$P\left(Y = \frac{k}{n-1}\right) = \begin{cases} 2 \cdot \sum_{j=\frac{k+1}{2}}^{n-\frac{k+1}{2}} \binom{j-1}{j-\frac{k+1}{2}} \cdot \binom{n-j-1}{n-j-\frac{k+1}{2}} \cdot p^{n-j}(1-p)^j & \text{se } k \text{ ímpar} \\ \sum_{j=\frac{k}{2}}^{n-\frac{k}{2}} \left[\binom{j-1}{j-\frac{k}{2}} \cdot \binom{n-j-1}{n-j-1-\frac{k}{2}} + \binom{j-1}{j-1-\frac{k}{2}} \cdot \binom{n-j-1}{n-j-\frac{k}{2}} \right] \cdot p^{n-j}(1-p)^j & \text{se } k \text{ par} \end{cases}$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$)

A dedução desta fórmula, elaborada pelo *referee* com base numa ideia sugerida por Manuel Silva, da Universidade Nova de Lisboa, encontra-se no Anexo 1.

Uma notável propriedade da função de probabilidade da variável aleatória Y é a que se enuncia no seguinte teorema⁵ (que designamos por "Predominância das mudanças pares"):

No lançamento repetido de uma moeda em que determinada face tem probabilidade p de ocorrer, a soma $1-2p(1-p)$ das probabilidades de ocorrerem "taxas de mudança" correspondentes a um número par de mudanças é, à excepção da moeda equilibrada em que se verifica a igualdade, sempre superior à soma $2p(1-p)$ das probabilidades de ocorrerem "taxas de

⁵Para demonstrar o teorema, basta mostrar que a soma das probabilidades de ocorrerem "taxas de mudança" correspondentes a um número par de mudanças é igual a $1-2p(1-p)$.

Considerando n par, é possível estabelecer, com o apoio do Mathematica, que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=k}^{n-k} \left[\binom{j-1}{j-k} \cdot \binom{n-j-1}{n-j-1-k} + \binom{j-1}{j-1-k} \cdot \binom{n-j-1}{n-j-k} \right] \cdot p^{n-j}(1-p)^j \right) = 1 - 2 \cdot \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-2}{k-1} \cdot p^k(1-p)^{n-k}$$

Analogamente, considerando n ímpar, pode-se mostrar que:

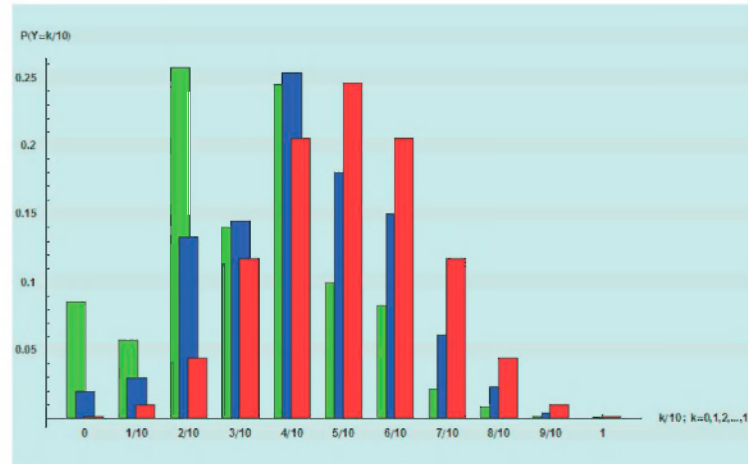
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=k}^{n-k} \left[\binom{j-1}{j-k} \cdot \binom{n-j-1}{n-j-1-k} + \binom{j-1}{j-1-k} \cdot \binom{n-j-1}{n-j-k} \right] \cdot p^{n-j}(1-p)^j \right) = 1 - 2 \cdot \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-2}{k-1} \cdot p^k(1-p)^{n-k}$$

Ora, $\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n-2}{k-1} \cdot p^k(1-p)^{n-k} = p(1-p)$, pelo que a soma das probabilidades de ocorrerem "taxas de mudança" correspondentes a um número par de mudanças é igual a $1-2p(1-p)$.

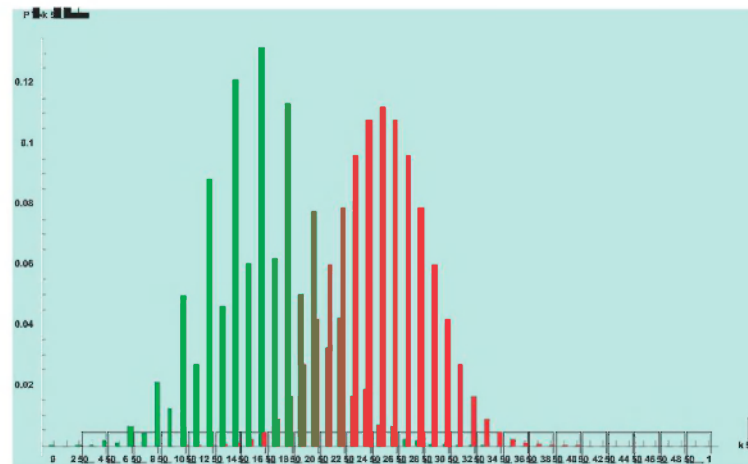
[Os Jogos da “Sobreposição” e da “Mudança” com Moedas Não-Equilibradas]

mudança” correspondentes a um número ímpar de mudanças, sendo a diferença entre ambas tanto maior quanto mais longe do equilíbrio estiver a moeda, ou seja, quanto mais se aproximar p de 0 ou de 1⁶.

Vejamos uma ilustração para duas moedas em que $p = 0,2$ (moeda “verde”), e $p = 0,3$ (moeda “azul”), em comparação com uma moeda equilibrada (moeda “vermelha”):



Se considerarmos um maior número de lançamentos, a propriedade torna-se ainda mais perceptível. Vejamos o gráfico correspondente a 51 lançamentos, desta vez com omissão da moeda “azul” ($p = 0,3$):



“Se o leitor tiver curiosidade (e paciência...) em verificar fisicamente este resultado pode “fabricar” uma moeda não-equilibrada com um dado equilibrado, fazendo corresponder, por exemplo, a face “1” do dado a “1” e as restantes a “0”.

Obtém assim uma “moeda” $\frac{1}{6} // \frac{5}{6}$ para a qual $1 - 2p(1-p) = 0,7(2)$ e mais do dobro de $2p(1-p)$, o que torna o efeito bastante pronunciado.

Considerando seis lançamentos consecutivos dessa “moeda”, tem-se a seguinte tabela:

Distribuição de probabilidade da “taxa de mudança”

Taxa de mudança $\binom{k}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
Probabilidade	0,334919	0,167395	0,334791	0,105024	0,052512	0,00535837

Claro que a simulação em computador (com o apoio do Mathematica mais uma vez) permite realizar dezenas de milhares de provas repetidas em alguns minutos e verificar experimentalmente estes resultados de forma expedita.

[Os Jogos da “Sobreposição” e da “Mudança” com Moedas Não-Equilibradas]

O valor esperado de Y é $E(Y) = 2p(1-p)$, expressão⁷ que toma o valor máximo 0,5 para $p = 0,5$. No caso da moeda “verde”, $E(Y) = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,32$, o que significa que se o casino utilizasse essa moeda, deveria cobrar um valor ligeiramente superior a €3,2 mas ainda assim inferior, em princípio, ao que cobraria no caso da moeda equilibrada (pouco mais de €5).

Naturalmente, no caso de uma moeda muito imperfeita qualquer jogador se aperceberá rapidamente de que algo de anormal se passa e sentir-se-á prejudicado se o casino lhe cobrar o valor correspondente ao jogo com a moeda equilibrada. Contudo, se a moeda for apenas ligeiramente não-equilibrada (o que, em contrapartida, tornará também mais ligeiro o lucro adicional do casino), dificilmente alguém detectará a diferença: vendo bem, até uma moeda perfeitamente equilibrada pode ter um comportamento “estranho” em alguns jogos.

No jogo da “Mudança” torna-se assim ainda mais evidente o que já se referiu em relação ao jogo da “Sobreposição”: não existe qualquer razão para o casino se preocupar com o não-equilíbrio das moedas que utiliza – só tem a ganhar com isso. **M**

Agradecimentos

Agradeço ao *referee* as recomendações no sentido de melhorar a legibilidade do texto e corrigir defeitos do mesmo. Agradeço, muito especialmente, por ter-me facultado a dedução da expressão da função de probabilidade da variável aleatória que representa a “taxa de mudança”, constante da nota 5.

Referências

[1] **Madureira, L.** (2009) “Os jogos da «Sobreposição» e da «Mudança»” – *Gazeta de Matemática*, 157.

Anexo 1

Teremos de considerar dois casos: o caso em que o número de mudanças é par e o caso em que o número de mudanças é ímpar.

Vamos organizar a sequência de 0's e 1's da seguinte forma: $[0 \dots 0] [1 \dots 1] \dots [0 \dots 0] [1 \dots 1]$

onde $[0 \dots 0]$ e $[1 \dots 1]$ representam blocos de 0's e 1's, respectivamente, constituídos por um ou mais elementos.

1) k ímpar:

Se k é ímpar significa que teremos $\frac{k+1}{2}$ blocos de 0's e o mesmo número de blocos de 1's na sequência de 0's e

1's. O número de sequências com k (ímpar) mudanças não difere se começarmos com um bloco de 0's ou com um bloco de 1's, pelo que basta ter em conta um dos casos e multiplicar por 2 para obter o resultado final.

Observações:

- O número mínimo de 0's e de 1's terá de ser $\frac{k+1}{2}$, o que significa que teremos, no máximo, $n - \frac{k+1}{2}$ 0's.

- Para os diferentes valores de j tal que $\frac{k+1}{2} \leq j \leq n - \frac{k+1}{2}$, temos necessariamente uma organização distinta,

⁷ $2p(1-p)$ é a expressão simplificada de $1 - \sum_{i=1}^n p_i^2$ em que p_i designa a probabilidade da face i , considerando $p_1 = p$ e $p_2 = 1 - p$. Em geral, no lançamento de um poliedro com f faces, tem-se $E(Y) = 1 - \sum_{i=1}^f p_i^2$, quantidade que toma o valor máximo $\frac{f-1}{f}$ para $p_i = \frac{1}{f}, \forall i$ (na condição de que $\sum_{i=1}^f p_i = 1$).

⁸Virá a propósito sugerir uma visita ao site <http://www.random.org/> que reclama a geração de números verdadeiramente aleatórios.

sendo possível para cada j contar o número de seqüências com k mudanças e contendo j 0's.

- O número de seqüências distintas começando com um bloco de 0's será obtido pela soma do número de seqüências fazendo variar j de $\frac{k+1}{2}$ a $n - \frac{k+1}{2}$.

- Em cada bloco de 0's temos de fixar um 0, podendo os restantes pertencer a qualquer bloco. Assim, com j número de 0's na seqüência, temos $j - \frac{k+1}{2}$ 0's que podem ser distribuídos por qualquer um dos $\frac{k+1}{2}$ blocos de 0's, podendo haver repetições de blocos. O raciocínio é idêntico se atribuirmos os blocos aos $j - \frac{k+1}{2}$ 0's, podendo-se repetir blocos.

- Quando a ordem não importa mas cada objecto pode ser escolhido mais de uma vez, o número de combinações vale $\binom{m+r-1}{r}$ onde m é o total de elementos e r é o número de elementos escolhidos. Para este problema, $r = j - \frac{k+1}{2}$, correspondendo ao número de 0's que podem pertencer a qualquer bloco, e $m = \frac{k+1}{2}$, número de blocos com 0's que podem ser repetidos, pelo que o número de combinações é $\binom{j-1}{j - \frac{k+1}{2}}$.

- Se pensarmos apenas na colocação de 1's, o raciocínio é análogo, ou seja, havendo j 0's na seqüência, terá de haver $n-j$ 1's dos quais $\frac{k+1}{2}$ são fixados para garantir a existência dos $\frac{k+1}{2}$ blocos de 1's. Assim temos $\frac{k+1}{2}$ blocos a serem escolhidos para receber os $n - j - \frac{k+1}{2}$ 1's, podendo haver repetição. Para obter o número de combinações basta considerar combinações com repetição de elementos fazendo $m = \frac{k+1}{2}$ e $r = n - j - \frac{k+1}{2}$, ou seja, $\binom{m+r-1}{r} = \binom{n-j-1}{n-j-\frac{k+1}{2}}$.

- O produto das combinações que aparecem na expressão da função de probabilidade de Y , para k ímpar, resulta do facto de termos para cada combinação de 0's na seqüência geral sempre o mesmo número de combinações distintas de 1's.

- Se fixarmos uma seqüência com j 0's e consequentemente $n-j$ 1's, então a probabilidade de se verificar esta combinação é $p^j (1-p)^{n-j}$.

Com este conjunto de observações fica concluído o raciocínio que permite validar a expressão no caso em que k é ímpar.

2) k par:


Neste caso o raciocínio é análogo se considerarmos duas situações distintas: combinações começadas por um bloco de 0's; combinações começadas por um bloco de 1's. Como o número de mudanças é par, teremos um número ímpar de blocos, $k+1$. Por exemplo, se começarmos a seqüência com um bloco de 0's teremos

$\frac{k}{2} + 1$ blocos de 0's e $\frac{k}{2}$ blocos de 1's. Estes números invertem-se caso a seqüência seja começada por um bloco de 1's.


Para cada uma destas duas situações o raciocínio é análogo ao que foi feito para k ímpar, tendo em atenção o número de blocos de 0's e de 1's.

Pedro Nunes revisitado




A ideia é simples mas, ao mesmo tempo, ambiciosa. Pedro Nunes Lectures é uma iniciativa do Centro Internacional de Matemática (CIM), em colaboração com a SPM e com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian, para promover visitas de matemáticos notáveis a Portugal. Cada visitante é convidado a dar duas ou três palestras, em universidades portuguesas, sobre desenvolvimentos recentes na matemática, suas aplicações e impacto cultural. O objectivo das Pedro Nunes Lectures não passa por abordar os temas de uma forma demasiado detalhada, só ao alcance de especialistas, pois a organização pretende chegar a uma audiência vasta, com interesses matemáticos amplos, em especial estudantes de doutoramento e jovens investigadores. As primeiras sessões das Pedro Nunes Lectures ocorreram em Julho e tiveram como orador o professor Luis Caffarelli, presidente da Fundação Sid W. Richardson da Universidade do Texas, em Austin. 


História da astronomia em Portugal

Vai decorrer, de 24 a 26 de Setembro, no Museu de Ciência da Universidade de Lisboa, o Colóquio de História da Astronomia. Ao longo desses dias, um painel de investigadores procurará reflectir sobre a história da astronomia em Portugal e, em particular, sobre a sua relação com as ciências matemáticas e com as aplicações da astronomia. Mais informações podem ser recolhidas em: <http://chcul.fc.ul.pt/astro/index.htm>. Esta conferência faz parte do programa do Ano Internacional da Astronomia. 

Matemática ao serviço da indústria

A importância da matemática no desenvolvimento da indústria é indiscutível, mas nem sempre merecedora de atenção. Para impedir esse alheamento está a ser desenvolvido o projecto EIMI, Educational Interfaces Between Mathematics and Industry, que propõe aos matemáticos de todo o mundo a partilha da investigação, dos estudos teóricos e de experiências relacionadas com a ligação da matemática à indústria. Contribuições para a Study Conference, que terá lugar na Fundação Calouste Gulbenkian de 19 a 23 de Abril de 2010, ou para o Study Volume (a publicação pós-conferência) devem ser enviadas até 15 de Setembro, através da página <http://www.cim.pt/eimi/>. 


A SPM também está no Twitter

Há cada vez menos razões para não conhecer as iniciativas organizadas pela Sociedade Portuguesa de Matemática. Desde o dia 30 de Junho é possível acompanhar no Twitter as notícias da SPM. Nem é necessário criar uma conta, basta consultar o endereço: <http://twitter.com/spmatematica>. 

Mira Fernandes: vida e obra




No passado mês de Junho, terminaram as comemorações da vida e obra de Aureliano Mira Fernandes, um dos maiores matemáticos portugueses do século XX, que morreu há 50 anos. O encerramento fez-se com a conferência histórica "Mira Fernandes e a sua época" e com uma mesa redonda em que participaram antigos alunos. Para assinalar a ligação de Mira Fernandes à Teoria da Relatividade, realizou-se também o encontro "Relatividade Matemática em Lisboa".

Mira Fernandes fundou a Junta de Investigação Matemática em 1943 e foi Professor Catedrático do Instituto Superior Técnico durante mais de 40 anos. 


Um novo prémio



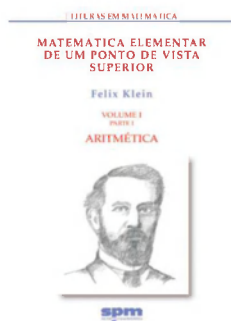
A nova edição do ICM (International Congress of Mathematicians) decorrerá na Índia, no próximo Verão. No ICM 2010 haverá uma novidade: a atribuição da medalha Chern, um novo prémio para matemáticos no valor de 500 mil dólares (no entanto, metade desta quantia terá de ser doada a uma instituição, escolhida pelo galardoado, que promova o ensino ou a investigação matemática). 

Novos Talentos em Matemática 2009

A Fundação Calouste Gulbenkian lançou a edição de 2009 do Programa Novos Talentos em Matemática, dirigido a estudantes universitários que frequentem o 1.º, 2.º ou 3.º ano de uma licenciatura na área da Matemática. O programa, cujas candidaturas terminam a 9 de Outubro, procura incentivar a investigação em matemática, bem como estimular o gosto pela disciplina, distinguindo estudantes universitários que apresentem resultados académicos relevantes. A Fundação

Calouste Gulbenkian prevê seleccionar até 20 concorrentes, que beneficiarão de uma bolsa de mérito. Os estudantes seleccionados poderão optar por realizar um trabalho de estudo aprofundado, participar num programa de seminários ou iniciar-se na investigação em matemática, tendo ainda a possibilidade de conciliar estas três vertentes. Reconhecidos especialistas em matemática desempenharão o papel de tutores. 

Obra de Felix Christian Klein traduzida para português



As ideias inovadoras de Felix Christian Klein, um dos mais notáveis matemáticos alemães do século XIX, foram traduzidas para português. O livro “Matemática Elementar do Ponto de Vista Superior”, com lançamento previsto para o mês de Setembro, expõe de forma simples e estimulante os conteúdos e fundamentos dos tópicos essenciais da instrução matemática, acompanhando os métodos correntes do ensino.

Combinando a intuição geométrica com a precisão das fórmulas da aritmética, o autor, detentor de uma visão unificadora e inovadora da

geometria, apresenta o desenvolvimento histórico das várias teorias, de forma a demonstrar as diferenças marcantes entre os vários métodos de apresentação.

“Matemática Elementar do Ponto de Vista Superior” é uma publicação promovida pela SPM, com o apoio dos Centros de Investigação Matemática da Universidade de Lisboa (CMAF e CAUL).

A influência de Klein (1849-1925) no ensino da matemática atravessou fronteiras e estendeu-se ao longo de quase dois séculos, sendo a sua obra ainda hoje uma referência para a comunidade científica.

Portugal alcança o melhor resultado de sempre nas IMO

Foi a primeira vez que uma equipa portuguesa conquistou uma medalha de prata nas IMO, em 20 anos de competição. Num evento que juntou mais de uma centena de países, os participantes portugueses obtiveram 99 pontos, colocando Portugal em 33.º lugar, o que representa o melhor resultado de sempre.

Mas a equipa portuguesa não ficou por aqui e a deslocação a Bremen, na Alemanha, valeu-lhe ainda outro feito histórico: todos os participantes foram galardoados. Pedro Vieira foi o responsável pela medalha de prata. Jorge Miranda, João Pereira e Ricardo Moreira (irmão de um ex-olímpico) conquistaram as três medalhas de bronze, tendo Jorge Miranda ficado apenas a um ponto de alcançar a segunda medalha de prata. Gonçalo Matos e Raul Penaguião conseguiram duas menções honrosas, por terem uma resposta totalmente certa.

Até à data, o melhor resultado de Portugal tinha sido obtido em 1989, ano em que os participantes alcançaram o 44.º lugar. Vinte anos depois, e com um número crescente de países participantes, os seis portugueses colocaram Portugal num lugar de destaque nas IMO. Estes resultados reflectem, assim, a grande capacidade matemática destes olímpicos e a paixão que demonstram pela disciplina, aliadas ao empenho dos professores e organizadores das Olimpíadas, especialmente os que integram a equipa de preparação para as IMO.



O entusiasmo de milhares de jovens e o apoio dos pais e do público em geral são também contributos importantes para a obtenção dos bons resultados, numa competição que tem reunido cada vez mais atenções.

Pedro Vieira e Jorge Miranda terão uma nova oportunidade de brilhar nas Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática, que se realizam entre os dias 17 e 27 de Setembro, em Santiago de Querétaro, no México.

Nova Casa, Nova Vida

Os serviços centrais da SPM foram recentemente transferidos para o n.º 45 da Avenida da República e renovados, para melhor se adaptarem às actividades da Sociedade. Esperamos a sua visita.

Como é certamente do conhecimento de todos os associados, os serviços centrais da Sociedade Portuguesa de Matemática foram transferidos da Avenida da República n.º 37 para outro prédio, na mesma Avenida, o n.º 45, 3.º esquerdo.

Esta escolha foi feita após consideração de outras alternativas, e acabou por se revelar vantajosa quer na localização quer no espaço que era necessário. Tal como nas antigas instalações, estão sedeadas agora neste endereço, para além da SPM, as Sociedades Portuguesas de Física, Química e Filosofia.

Com a mudança, as salas atribuídas à SPM foram renovadas, tendo-se adquirido mobiliário e computadores novos, para substituição dos materiais já um pouco obsoletos transferidos das antigas instalações. Temos também novo software para registo da contabilidade.

Os serviços centrais da SPM estão então instalados em quatro salas. Estas salas estão atribuídas, respectivamente, ao Gabinete de Imprensa, ao secretariado da SPM, aos secretariados do Centro de Formação e das Olimpíadas e à Loja. Trabalham na sede, ao todo, oito pessoas: Renata Ramalho, Ana Figueiredo e a estagiária Sílvia Dias no Gabinete de Imprensa, Helena Teves no secretariado da SPM, Célia Folgado e Teresa Pires no Centro de Formação, Margarida Pinto nas Olimpíadas e Ana Rita Ferrer na Loja, substituindo Francisco Estorninho, que até há pouco tempo assegurou estas tarefas, e a quem agradecemos o empenho e dedicação.

Este elevado número de colaboradores é sinal do grande dinamismo actual das actividades da SPM. De facto, é com agrado que registamos um aumento muito significativo na actividade do Centro de Formação (em relação ao ano passado) e esperamos em breve ter também um aumento de vendas da Loja, em resultado de um contacto mais activo com os associados.

É também conhecida a presença frequente da SPM ou dos seus representantes nos meios de comunicação social, o que reflecte a qualidade do trabalho do Gabinete de Imprensa.

As Olimpíadas da Matemática são desde há muito uma actividade central para a SPM, tendo também crescido com o tempo. Sinais disto são o aumento de participantes de ano para ano e o maior apreço do público, que no ano passado escolheu João Guerreiro, olímpico medalhado com ouro nas Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática, como jovem do ano, num concurso organizado pelo Rádio Clube Português.

Finalmente, o secretariado da SPM, sendo o serviço que se encarrega de tarefas de cariz mais geral, tem visto crescer a sua actividade em função dos vários projectos que a SPM tem desenvolvido, que tem sempre acompanhado com grande dinamismo.

Convidamos assim os nossos associados, que ainda não conheçam a nova casa, a fazer uma visita ao n.º 45, 3.º esquerdo da Avenida da República para conhecer as nossas instalações e a nossa equipa. **M**