GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO IV **N.º 16** JULHO - 1943

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. ~~5$00~~ 6$50

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

FUNDADA POR

B. CARAÇA, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

Editor e Proprietário	Administrador	Tesoureiro
J. da Silva Paulo	*Orlando M. Rodrigues*	*M. d'Oliveira Machado*

REDACÇÃO

Redactor principal: *Manuel Zaluar*

Responsáveis de secções:

Pedagogia	*Bento Caraça*
Astronomia	*Manuel Peres Júnior*
Movimento Matemático	*A. Pereira Gomes*
Matemáticas Elementares	*J. Calado - J. J. Rodrigues dos Santos - J. Paulo*
Problemas	*A. Ferreira de Macedo - M. Alenquer*
Boletim Bibliográfico	*J. da Silva Paulo*

Outros componentes:

em Lisboa	*A. Monteiro - Fernando Carvalho Araújo - Guida Lami - Luiz Passos*
Coimbra	*A. G. Albuquerque*
Porto	*J. Rios de Sousa - Neves Real - R. Luís Gomes*
Madrid	*Sixto Ríos Garcia*
Roma	*J. Ribeiro de Albuquerque - J. Sebastião e Silva - V. Barroso*
Zurich	*A. Sá da Costa - Hugo B. Ribeiro - Maria do Pilar Ribeiro*

Cooperadores: *A. S. Gonçalves - Altino Branco - Álvaro Santos - J. A. Barreira - J. M. Sousa Chaves - J. Marujo Lopes - J. Rémy Freire - J. Oliveira Campos - M. P. Soares Afonso - R. Q. Rosa*

Correspondência para: *M. Zaluar*, Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa

Composição e Impressão: *Soc. Ind. de Tipografia*, Rua Almirante Pessanha, 5 — Lisboa

ANO IV - N.º 16 GAZETA DE MATEMÁTICA JULHO-1943

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Generalizacion a la esfera del teorema de Pitagoras

por **Alfonso de Urquijo**

(aluno de la «Escuela de Ingenieros Agrónomos» de Madrid)

Damos a continuación el enunciado y demostración de un sencillo teorema de Geometría esférica, del cual no tenemos referencia, a pesar de las indagaciones hechas.

«Dado un triángulo esférico rectángulo en A, si consideramos los cuadriláteros construidos sobre la hipotenusa y ambos catetos, formados por los tres lados, y el arco de circulo máximo cuyo polo es el vértice opuesto al lado en cuestión, se verifica que el area del cuadrilátero esférico formado sobre la hipotenusa, es igual a la suma de las areas de los cuadriláteros formados sobre los catetos.»

El exceso de un cuadrilátero esférico, o sea su area, como es sabido, es la suma de sus ángulos menos cuatro rectos. Veamos cual es el area del cuadrilatero $BCNM$ construido sobre la hipotenusa. Los ángulos en M y N son rectos, por pasar AM y AN por el polo A. El ángulo NCB es suplementario de C, el CBM, lo es del B.

Luego $S_a = S(BCNM) = 2 + (2-B) + (2-C) - 4 = 2-(B+C)$. El área de $ABPQ$ será: ángulos en P y Q rectos, ángulo QAB es tambien recto, por ser suplementario del A, y ángulo ABP suplementario del B, luego $S_c = S(ABPQ) = 3 + (2-B) - 4 = 1-B$. Analogamente $S_b = S(ACRT) = 1-C$. Luego $S_a = S_b + S_c$.

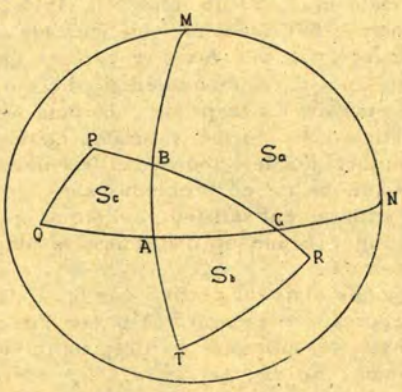
Puede ocurrir que alguno o algunos de los cuadriláteros que se formen sean cóncavos, nuestro teorema es igualmente válido en estos casos, sin mas que orientar el perímetro de los cuadriláteros en un sentido cíclico, teniendo en cuenta el principio de Gauss para los signos de las areas.

Por último, si el triángulo no es rectángulo, efectuadas construcciones análogas, resulta el seguiente teorema:

«El área del cuadrilátero construido sobre un lado, es igual a la suma de las areas de los cuadriláteros construidos sobre los otros dos lados, menos el área del huso que tenga por ángulo un recto menos el opuesto al lado en cuestión».

$$S_a = S_b + S_c - H_{90-A}$$

La demostración es immediata.



Sumando

$$\begin{aligned} S_a &= S_b + S_c - H_{90-A} \\ S_b &= S_c + S_a - H_{90-B} \\ S_c &= S_a + S_b - H_{90-C} \\ \hline S_a + S_b + S_c &= H_{90-A} + H_{90-B} + H_{90-C} = \\ &= H_{270-(A+B+C)} = H_{90-2E} \end{aligned}$$

Es decir que la suma de las tres areas es equivalente al area de un huso cuyo ángulo vale un recto menos el exceso del triángulo dado.

Notícia dum problema de geometria e duma memória de Euler

por **Hugo Ribeiro**

(Bolseiro do Instituto Para a Alta Cultura, em Zürich)

Encontrar todos os triângulos de lados e medianas racionais. Aqui está um problema que, a avaliar pelo enunciado, todos julgarão ter compreendido, mas ninguém (se estou, como julgo, bem informado) entendeu ainda perfeitamente. Jacobi ocupou-se desta questão e Euler escreveu sôbre ela, pelo menos, duas memórias em latim e uma terceira, posterior, em língua francesa. É esta última que me proponho resumir aqui. Euler dá aqui um processo muito geral para encontrar triângulos de lados e medianas racionais. Mas o que se não sabe, ainda hoje, é se êste processo fornece *todos* os triângulos com esta propriedade: não se conhece um exemplo dum triângulo com esta propriedade que não possa obter-se por aquêle processo, nem se demonstrou a inexistência de um tal exemplo. Logo no início desta memória, que com o título «Problème de géométrie résolu par l'Analyse de Diophante» foi publicada em 1820 no tomo VII (1815-1816) das «Mémoires de l'Académie des Sciences de S.t Pétersbourg», pág. 3-9 (e vai reaparecer agora num dos volumes da já monumental edição das obras completas de Euler promovida pela Sociedade Helvética das Ciências Naturais), diz-nos o próprio autor: «J'ai déjà donné, à différentes reprises, des solutions de ce problème, sans qu'aucunne m'ait entièrement satisfait. Celle que je présente ici réunit, à beaucoup d'élégance, la plus grande généralité.».

Vejamos mais de perto o que fez Euler com a preocupação de encararmos o seu método cujo interêsse se sobrepõe ao próprio interêsse do problema: Se $2x$, $2y$, $2z$, r, q, p representam respectivamente as medidas dos lados e das medianas respectivas dum triângulo, as equações fundamentais são: $p^2=2x^2+2y^2-z^2$, $q^2=2x^2+2z^2-y^2$, $r^2=2y^2+2z^2-x^2$ (Euler nota aqui, o que não interessa porém à sua resolução, que o triângulo de lados $2p$, $2q$, $2r$ tem as medianas $3z$, $3y$, $3x$). Um sistema equivalente é $p^2-q^2=3(y^2-z^2)$, $p^2+q^2=4x^2+y^2+z^2$, $r^2=2y^2+2z^2-x^2$. E, se se faz intervir a condição (que tôdas as soluções do problema pôsto devem verificar) de que se y e z são racionais p e q são também racionais, pôr-se-ão as duas equações seguintes (que substituem aquela primeira) $q+p=3\frac{a}{b}(y-z)$ e $p-q=\frac{b}{a}(y+z)$ onde a e b são parâmetros tais que a/b é racional. Obtém-se então o sistema

$$p+q=3\frac{a}{b}(y-z), \quad p-q=\frac{b}{a}(y+z), \quad 8x^2=$$
$$=\frac{9a^2-b^2}{b^2}(y-z)^2+\frac{b^2-a^2}{a^2}(y+z)^2, \quad 8r^2=$$
$$=\frac{9(b^2-a^2)}{b^2}(y-z)^2+\frac{9a^2-b^2}{a^2}(y+z)^2,$$

e o problema pôsto é agora o de encontrar, para cada par a, b (a/b racional), dois números racio- y e z tais que x e r dados pelas duas últimas equações sejam racionais. Se se fazem as substituïções $y+z=a(c+d)$, e $y-z=b(c-d)$ tem-se $p+q=3a(c-d)$, $p-q=b(c+d)$, $\frac{x^2}{a^2}=c^2+d^2+\frac{b^2-5a^2}{2a^2}cd$, $\frac{r^2}{b^2}=c^2+d^2+\frac{9a^2-5b^2}{2b^2}cd$ e procurar-se-ão para cada par a, b (agora a e b racionais) c e d tais que $\frac{x^2}{a^2}$ e $\frac{y^2}{b^2}$ sejam quadrados de números racionais. Esta última questão resolve-a Euler auxiliado pelo seguinte lema (com cuja demonstração êle começa a sua memória): Dois números da forma $A^2+2PAB+B^2$ e $A^2+2QAB+B^2$ serão sempre quadrados quando $A=4(P+Q)$ e $B=(P-Q)^2-4$. De facto, nas condições da hipótese, o produto dos dois números é o quadrado de $A^2+(P+Q)AB-B^2$ e o primeiro número é o quadrado de $(P-Q)(3P+Q)-4$ (o segundo número será, pela simetria, o quadrado de $(Q-P)(3Q+P)-4$). A aplicação dêste lema permite, de facto, a resolução da última questão e portanto a determinação dos triângulos nas condições requeridas: Será $A=c$, $B=d$, $P=\frac{b^2-5a^2}{4a^2}$

e $Q=\frac{9a^2-5b^2}{4b^2}\cdot$ Euler simplifica esta aplicação e os cálculos utilizando um corolário do seu lema e encontra, por exemplo, para $a=2$ e $b=1$, $x=202$, $y=377/2$ e $z=619/2$.

O método consiste aqui na introdução de parâmetros e na determinação de x, y, z, p, q, r como funções racionais dêstes parâmetros capazes de se substuírem às equações fundamentais. É êste método aplicado por Euler sistemáticamente e magistralmente (na opinião do professor Fueter, um dos prefaciadores da edição das obras completas de Euler) a tôda uma série de problemas que parece terem sido demasiadamente esquecidos e deverem retomar-se dum ponto de vista moderno pelos matemáticos da nova geração.

Quanto a indicações bibliográficas para êste problema do triângulo só posso dar, além das obras completas de Euler, especialmente os III e V vols. da série 1.ª, um artigo, que não li, de P. V. Schaewen, «Dreiecke mit rationalen Seiten und rationalen Seitenhalbrerenden», na revista «Zeitschrift für die Realschulwesen», 40, 1915, pág. 145.

Duas demonstrações de um mesmo facto

por J. Albuquerque

(Bolseiro em Roma do Instituto para a Alta Cultura)

Seja $y=f(x)$ uma função real de variável real definida num intervalo (a, b) extremos incluídos. Vamos demonstrar o seguinte importante teorema:

Teorema 1. *Se* f(x) *é contínua no intervalo* (a, b) *extremos incluídos, e nos extremos do intervalo toma valores não nulos de sinais contrários, então* f(x) *anula-se, pelo menos num ponto interior ao intervalo.*

Por hipótese $f(x)$ é contínua relativamente ao intervalo (a, b), num dos extremos, por exemplo em a. Isto significa que se tomarmos uma vizinhança $V_{f(a)}$ do ponto $f(a)$, existirá uma vizinhança V_a do ponto a, tal que: $f[V_a\cdot(a, b)]\subset V_{f(a)}$.

Supondo-se $f(a)\neq 0$, existe sempre, entre os números $f(a)$ e zero, outro número real com o sinal de $f(a)$. Consideremos então as vizinhanças $V_{f(a)}$ que são os intervalos $[f(a)-k, f(a)+k]$, extremos incluídos, onde $0<k<|f(a)|$.

A cada uma dessas vizinhanças corresponde, devido à continuïdade de f no ponto a, uma vizinhança V_a do ponto a, tal que: $f[V_a\cdot(a,b)]\subset V_{f(a)}$, isto é, tal que se $x\,\varepsilon\, V_a\cdot(a, b)$ então $f(x)$ tem o sinal de $f(a)$.

O conjunto $V_a\cdot(a, b)$ é um intervalo $(a, a+h)$ extremos incluídos, podendo ser $h>0$ se fôr $a<b$, ou então $h<0$ se fôr $a>b$.

A continuïdade de $f(x)$ em a, *assegura-nos a existência* de um intervalo $(a, a+h)$ tal que se $x\,\varepsilon\,(a, a+h)$ extremos incluídos, será $f(x)$ do sinal de $f(a)$.

Consideremos todos os intervalos $(a, a+h)$ de comprimento $|h|$ que gosam da propriedade indicada.

Temos $(a, a+h)=V_a\ (a, b)\subset(a, b)$ e portanto o intervalo $(a, a+h)$ é formado só de pontos do intervalo (a, b). Como $f(b)$ é de sinal contrário ao de $f(a)$, todos os intervalos $(a, a+h)$ têm o extrêmo $a+h$, *interior a* (a, b).

O comprimento $|h|$ dêstes intervalos admite um limite superior que representaremos por $|\xi|$ e que será o comprimento do intervalo $(a, a+\xi)$, intervalo limite da família de intervalos $(a, a+h)$. O intervalo $(a, a+\xi)$ está contido no intervalo (a, b); o ponto $a+\xi$, à primeira vista poderá coïncidir com o ponto b: veremos já a seguir que não.

É neste momento que intervém a hipótese da continuïdade da função $f(x)$ noutros pontos de (a, b) além do ponto a. Para prosseguir a demonstração é necessário que a função seja contínua no ponto $a+\xi$.

Com efeito, se a função é contínua no ponto $a+\xi$, sendo $a+\xi$ um ponto de acumulação do conjunto de pontos $a+h$, para cada vizinhança $V_{f(a+\xi)}$ do ponto $f(a+\xi)$ pode determinar-se uma vizinhança $V_{a+\xi}$ do ponto $a+\xi$, tal que: $f[V_{a+\xi}\cdot(a, b)]\subset V_{f(a+\xi)}$.

Isto significa que se $a+\xi$ é ponto de acumulação do conjunto de pontos $a+h$, então $f(a+\xi)$ será ponto de acumulação do conjunto de pontos $f(a+h)$. Conclui-se portanto que $f(a+\xi)$ terá o sinal de $f(a+h)$ e portanto o sinal de $f(a)$. Como $f(b)$ tem o sinal contrário necessàriamente $a+\xi$ é um ponto interior ao intervalo (a, b).

Suposemos que f era contínua em a e $a+\xi$, fomos levados a concluir que $a+\xi$ é interior a (a, b). Suponhamos que a função era só contínua nos pontos interiores ao intervalo (a, b) e no extrêmo a: neste caso o ponto $a+\xi$ poderia coïncidir com b, e não sendo a função contínua nesse ponto já nada obrigava $f(a+\xi)$ a ser ponto de acumulação do conjunto de pontos $f(a+h)$, nada obrigaria pois $f(a+\xi)$ a ter o sinal de $f(a)$; seria portanto $f(a+\xi)=f(b)$ e a função poderia não se anular em nenhum ponto de (a, b). Vê-se pois que é imprescindível que a função seja contínua no ponto b, e a continuïdade de $f(x)$ no ponto b, é implìcitamente estabelecida quando se supõe a continuïdade no ponto $a+\xi$, a-pesar-de se concluir logo em seguida que $a+\xi$ é interior a (a, b)

Então $f(a+\xi)$ *tem o sinal de* $f(a)$ *e* $a+\xi$ *é interior ao intervalo* (a, b).

Consideremos agora um ponto x_1 situado entre $a+\xi$ e o ponto b. No intervalo $(a+\xi, x_1)$ existe sempre um ponto onde a função tem o sinal de $f(b)$, porque no caso contrário $|\xi|$ não seria limite superior de $|h|$. Então qualquer vizinhança do ponto $a+\xi$ possui um ponto onde a função toma o sinal de $f(b)$; $a+\xi$ *é ponto de acumulação de um conjunto de pontos em cada um dos quais a função* f *tem o sinal de* f(b).

Intervém de novo a continuïdade de f no ponto $a+\xi$, e de um modo análogo ao de há pouco, $f(a+\xi)$ é ponto de acumulação de um conjunto de pontos em cado um dos quais a função f toma o sinal de $f(b)$. Portanto $f(a+\xi)$ tem o sinal de $f(b)$, tal como já tinha o sinal de $f(a)$.

Conclui-se então que é necessàriamente $f(a+\xi)=0$, *c. q. d.*.

Do teorema anterior conclui-se imediatamente o seguinte:

Teorema 2. *Se* f(x) *é contínua no intervalo* (a, b) *extremos incluidos, e nos extremos do intervalo toma valores desiguais* $[f(a) \neq f(b)]$, *então* f(x), *pelo menos num ponto interior ao intervalo, toma qualquer valor* k *compreendido entre* f(a) *e* f(b).

Para provar êste teorema como conseqüência do anterior, basta notar que a função $F(x)=f(x)-k$, está nas condições exigidas no teorema 1.

Vamos mostrar que êste último teorema e, conseqüentemente, o teorema 1, estão intimamente ligados às propriedades de conexão do conjunto de pontos de um intervalo. Para isso ponhamos a seguinte importante definição:

Definição 1. *Um conjunto* E *de pontos diz-se conexo se, qualquer que fôr a sua decomposição em dois conjuntos não vazios e disjuntos, um pelo menos dêsses dois conjuntos tem um ponto de acumulação do outro.*

Representando por X' o conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto X, ou como também se diz o derivado de X, podemos afirmar que um conjunto E será conexo quando para tôda a decomposição do tipo:

(1) $E=A+B, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad A \cdot B=0,$

fôr sempre verificada a relação

(2) $A \cdot B' + A' \cdot B \neq 0.$

Esta última fórmula diz-dos que: ou $A \cdot B' \neq 0$ e então em A existe um ponto ao menos de B' e portanto um ponto de acumulação de B; ou $A' \cdot B \neq 0$ e então em B existe um ponto ao menos de A' e portanto um ponto de acumulação de A; ou $A \cdot B' \neq 0$ e $A' \cdot B \neq 0$ e os dois casos apresentam-se simultâneamente.

Vamos demonstrar que: *um intervalo* (a, b) *é um conjunto conexo* [1].

Para isso consideremos uma decomposição arbitrária do tipo (1):

$$(a, b)=A+B, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad A \cdot B=0.$$

Por ser $A \cdot B=0$, o ponto b pertence necessàriamente a um e só um dos dois conjuntos A e B; suponhamos que se tem $b \in B$.

O conjunto A está contido no intervalo (a, b), é pois limitado e tem um limite superior p.

Se $p=a$, caso em que A se reduz ao ponto a, p é um ponto de acumulação de B, logo $A \cdot B' \neq 0$.

Se $p \neq a$ e $p=b$, caso em que B se reduz ao ponto b, p é um ponto de acumulação de A, logo $A \cdot B' \neq 0$.

Se $p \neq a$ e $p \neq b$, p é um ponto interior ao intervalo (a, b), e por ser limite superior de A, é um ponto de acumulação de A, e pela mesma razão ainda, qualquer vizinhança de p tem à

[1] O leitor pode omitir a demonstração dêste resultado que é deveras natural. Mas se o leitor tiver a ânsia de problemas, poderá, ao contrário, estudar a fundo a mesma demonstração e procurar, por exemplo, demonstrar esta proposição mais geral: *todo o intervalo n-dimensional é um conjunto conexo.*

Isso permitir-lhe-ia de um golpe, generalizar aos espaços a um número qualquer de dimensões inteiras, o teorema 2, que se vai demonstrar mais adiante.

direita de p um ponto de B, logo p será também ponto de acumulação de B, e portanto temos: $p \epsilon A' \cdot B' \neq 0$.

Mas sendo $A \cdot B = 0$, necessàriamente ou é $p \epsilon A$, ou é $p \epsilon B$. Se $p \epsilon A$, como é também $p \epsilon A' \cdot B' \subset B'$, teremos: $A \cdot B' \neq 0$; se $p \epsilon B$, como é também $p \epsilon A' \cdot B' \subset A'$, teremos: $A' \cdot B \neq 0$.

Em todos os casos possíveis se tem para a decomposição arbitrária que considerámos, a relação (2): $A \cdot B' + A' \cdot B \neq 0$.

Em virtude da definição 1, podemos concluir que o intervalo (a, b) é um conjunto conexo.

c. q. d.

Para finalmente pôr em relêvo as relações entre o conteúdo do teorema 2, ou do teorema 1, e as propriedades de conexão do conjunto de pontos de um intervalo, demonstremos o teorema 2, seguindo uma nova ordem de idéas.

Consideremos então uma função $f(x)$ contínua nos pontos do intervalo (a, b) e suponhamos que $[f(a) \neq f(b)]$. Seja k um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, e suponhamos que a função não tomava o valor k em nenhum ponto do intervalo (a, b).

Designemos por A o conjunto dos pontos $x \epsilon (a, b)$ tais que $f(x) < k$, e designemos por B o conjunto dos pontos $x \epsilon (a, b)$ tais que $f(x) > k$. Será evidentemente:

$$(a, b) = A + B, \quad A \cdot B = 0,$$

e como o ponto a pertence a um dos dois conjuntos e o ponto b certamente pertence ao outro, será:

$$A \neq 0, \quad B \neq 0.$$

Tomemos um ponto x_0 pertencente a A, sendo por definição $f(x_0) < k$. Ponhamos

$$\varepsilon = k - f(x_0), \quad \varepsilon \neq 0.$$

Como a função $f(x)$ é por hipótese contínua nos pontos do intervalo e como $x_0 \epsilon A \subset (a, b)$, a função é contínua em x_0, e então, àquele valor de $\varepsilon > 0$, bem determinado para o ponto x_0, corresponderá uma vizinhança V_{x_0} do ponto x_0, tal que para cada ponto $x \epsilon V_{x_0} \cdot (a, b)$ se tem

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

o que dá devido ao valor de ε

$$f(x) < k.$$

Portanto todos os pontos de $V_{x_0} \cdot (a, b)$ pertencem ao conjunto A e o ponto x_0, qualquer que êle seja, não é ponto de acumulação de B. Tem-se pois $A \cdot B' = 0$. Um raciocínio análogo daria $A' \cdot B = 0$. O intervalo (a, b) não seria um conjunto conexo, e a contradição resulta de se ter admitido que $f(x)$ não assumia em (a, b) o valor k. O teorema encontra-se demonstrado.

Nesta demostração se vê dum modo claro que: para a função $f(x)$ assumir o valor k compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ é essencial que o conjunto dos pontos do intervalo (a, b) seja *conexo*.

É essencial mas não é nisso que reside tôda a essência do facto: o leitor que medite no papel não menos essencial desempenhado pela continuïdade da função.

É evidente que o teorema 2, arrasta como conseqüência o teorema 1, e tinhamos visto que o teorema 1 implicava o teorema 2. Demonstrámos de duas maneiras um mesmo facto pois os dois teoremas são lògicamente equivalentes.

Pois bem: na demonstração que demos do teorema 1, ressalta tôda a importância da continuïdade da função.

O conceito de intervalo é complicadíssimo, mas não inextricável: das imensas propriedades topológicas do conjunto de pontos de um intervalo foi-se buscar uma, aquela que intervém decisivamente no facto analisado. Seria um exercício útil para um estudante de matemática decompor o conceito de continuïdade procurando dentro dêle aquela ou aquelas propriedades que jogam na demonstração.

Pode evidentemente dar-se o caso de ser o conceito de continuïdade, todo inteiro, a intervir [1]. Sòmente um hábito de meditação e uma técnica de análise poderá levar um estudante a pronunciar-se sôbre êste ou outros factos semelhantes.

Todo o estudante de matemática numa escola superior deveria ser orientado pelos seus mestres neste caminho. Para isso é indispensável que o mestre possua o hàbito da reflexão e a técnica própria da análise que sòmente lhe poderão vir das suas continuadas e prolongadas investigações.

Outro qualquer método de estudo, adoptado por estudantes de matemática e consentido por mestres e metodólogos, diferente dêste que se apontou, poderá conduzir o aluno, no final do ano ou nas proximídades de um exame, a saber (?) hipóteses e teses, a conhecer mesmo até, quando tal lhe seja exigido, técnicas de demonstração, mas todos êsses conhecimentos serão à superfície da pele, e não terão penetrado profundamente no ser.

Em matemática ou em qualquer outro ramo do saber, mais valioso do que saber, é... saber reflectir.

---

[1] Para o avaliar, poderia estudar-se o comportamento nas mesmas circunstâncias das funções, semi-contínuas, uniformemente contínuas e aproximadamente contínuas.

PEDAGOGIA

OS TRABALHOS MANUAIS E O ENSINO DA GEOMETRIA

Em números anteriores da «Gazeta» temos publicado depoimentos de professores portugueses sôbre a importância das construções experimentais no ensino dos elementos da Geometria.

A êsses depoimentos juntamos hoje a seguinte transcrição de um artigo de Clara O. Larson (Taft High School, Chicago, Illinois) publicado na Revista «The Mathematics Teacher» Vol. XXXV, n.º 4, Abril de 1942.

Manejar os objectos, tocá-los, dá dêles um conhecimento concreto que a simples análise visual, ainda que profunda, o desenho ou a ideação, não podem dar.

No trabalho à escolha, do meu plano de geometria, alguns rapazes fizeram modelos de madeira; modelos apropriados às demonstrações no quadro e outros destinados ao trabalho individual no lugar. Alguns dêstes modelos são:

1. *Triângulos.* A execução dum triângulo, mostra, como nenhum outro processo o fará, que três lados determinam um e um só triângulo rígido que não se deforma. Êste facto põe em evidência o uso dos triângulos em diversas construções, como pontes, asnas, etc. Podem fazer-se modelos de triângulos isósceles, equiláteros, rectângulos, com ângulos agudos de 30° e 60° e de 45°.

2. O quadrilátero que não é rígido. fig. 1)

fig. 1

fig. 2

3. O quadrilátero com uma barra diagonal que o torna rígido. [1] (fig. 2)

4. Os triângulos isósceles que podem usar-se como aparelho para a bissecção de um ângulo que esteja dentro dos limites impostos pelo instrumento. (figs. 3 e 4) Assim na figura 4 é $\overline{AB}=\overline{BC}$; $\widehat{A}=\widehat{C}$, logo $D\widehat{B}A$ é igual a duas vezes um dos ângulos $\widehat{A}$ ou $\widehat{C}$, ou, o que é o mesmo, $\widehat{A}=\widehat{C}=1/2\, D\widehat{B}A$. Uma ranhura AC permite deslocar a régua BA, aumentando ou deminuindo o ângulo $\widehat{DBA}$ dentro dos limites impostos pelo aparelho. É claro que $\overline{AC}$ nunca pode ser maior que $\overline{AB}+\overline{BC}$. Dêste aparelho podem os alunos realizar dois modêlos de madeira, um maior destinado aos trabalhos no quadro e

fig. 3

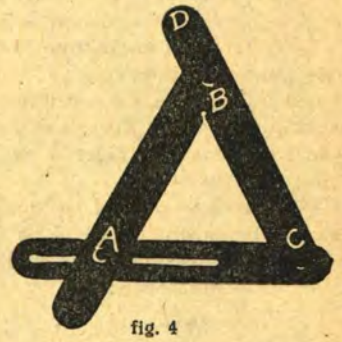


fig. 4

outro mais pequeno para os trabalhos individuais. [2] (figs. 3 e 4)

5. Um aparelho para bissectar um ângulo. [3] (fig. 5). Como é $\overline{AB}=\overline{AD}$; $\overline{BC}=\overline{CD}$ e $\overline{AC}$ igual a si mesmo, os triângulos $[ABC]$ e $[ADC]$ são iguais e os ângulos em A são iguais. C deslisa livremente sôbre a barra AC, conservando-se, durante o movimento, iguais aquêles dois triângulos. Um dos alunos construiu um aparelho de metal, que permite o movimento livre de C sôbre a barra AC. Um outro colocou uma ranhura na barra AC, guia do movimento de C.

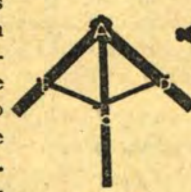


fig. 5

fig. 6

fig. 7

(1) Estas ideias são tiradas dos exercícios do «Essentials of Plane Geometry» de Davide Eugene Smith, pág. 34, editado por Ginn and Company.

(2) Probl. 6, pág. 166, do «New Plane Geometry» de Stone and Mallony. Editado por Benj. H. Sanborn and Co.

(3) Ex. 12, pág. 107 do livro citado de Smith.

(fig. 6) Estes aparelhos ilustram a igualdade e bissecção do ângulo BAD.

6. Réguas paralelas. (fig. 7) São de fácil construção. Pequenos parafusos com porcas ligam as tiras de madeira. Os lados constroem-se iguais. Qualquer que seja o movimento das barras é-se sempre conduzido a uma figura que é um paralelogramo. Um aluno usou as réguas para mostrar que pelo facto de dois paralelogramos terem perímetros iguais, não se segue que tenham a mesma área. Assentando o aparelho sôbre papel quadriculado desenham-se vários paralelogramos, fazendo variar os ângulos das réguas. Todos êles têm a mesma base mas alturas diferentes. Como a área dum paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela altura, dois dêstes paralelogramos não terão a mesma área enquanto os lados não passarem pela mesma posição perpendicular. O rectângulo por ter a maior altura, tem também a maior área.

7. Os rapazes que têm desenho de máquinas mostraram à classe como se traçam linhas paralelas usando a prancheta e a régua T. As linhas paralelas podem traçar-se baseando-se no princípio que diz: duas rectas são paralelas se os ângulos correspondentes forem iguais.

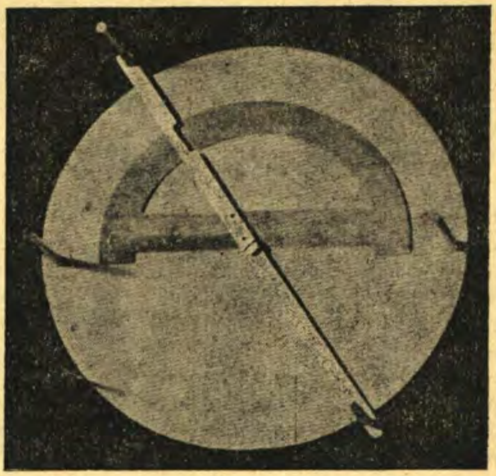


fig. 8

8. Transferidor com barra móvel. Colocado num tripé pode servir para medir ângulos no plano horizontal. (fig. 8).

Tradução de J. Silva Paulo

ASTRONOMIA

UMA NOVA SIGNIFICAÇÃO, NACIONAL E OFICIAL DA EXPRESSÃO «DIA SOLAR»

por ***Manuel Peres Júnior***

A condição VIII do Regulamento do trabalho e salários para os trabalhadores rurais de 12 de Maio, dêste ano, tem a seguinte redacção:

O período diário de trabalho terá a duração do dia solar, deduzidas apenas as horas destinadas às refeições e ao descanço dos trabalhadores.

É evidente que *dia solar* não tem aqui a sua significação usual e clássica, pois em tal caso seria obscura, visto que o dia solar é aquêle por que se regulam todos os povos, mesmo aquêles que não usam calendários solares: por exemplo, nos calendários israelita e moslémico, em que os meses são rigorosamente lunares, os dias são solares.

Poderia dar-se a *dia solar* a significação usual, se se entendesse por *descanço* todo o tempo que não é destinado às refeições e ao trabalho. Tal interpretação teria, porém, o defeito de não se aplicar apenas aos rurais mas a tôda a gente, incluindo a que não trabalha, e nada esclareceria.

A expressão tem, pois, outra significação que é evidentemente a do período tradicional do trabalho do campo e que na linguagem vulgar se chama «de sol a sol». Não é, porém, esta expressão (e com ela a nova significação de *dia solar*) isenta de dúvidas. A explicação que dela se dá, geralmente, é a do período que vai do nascimento ao ocaso do Sol e que é, portanto, o que antigamente se chamava o *dia artificial* (em oposição a *dia natural* que era o dia solar verdadeiro de 24 horas *iguais*) e se dividia em 12 partes iguais (horas *desiguais*) para os usos civis ou em 12 partes desiguais (horas *planetárias*) para os juizos astrológicos.

O govêrno não quis ressuscitar esta absoleta designação que ninguém entenderia e que afinal não corresponde ao período chamado «de sol a sol» porque êste, ao contrário do que geralmente se define, não vai do nascimento ao ocaso mas é sim o lapso de tempo em que, no campo, se pode trabalhar com a luz do Sol, isto é, começa um pouco antes do nascimento e termina um pouco depois do ocaso ou, empregando uma linguagem mais precisa, começa no início do crepúsculo *civil* da manhã e termina no fim do da tarde. É no fim do crepúsculo civil da tarde que os sinos das igrejas fazem ouvir o toque das *Ave-Marias* que durante séculos (e em algumas terras ainda hoje) foi o sinal de largada do trabalho nos campos.

Se a nova significação de *dia solar* inclui ou não os crepúsculos é questão em que os advogados podem dar largas à sua habilidade.

TEMAS DE ESTUDO

Há tempos já a Redacção da «Gazeta de Matemática» pensara criar uma secção onde fôssem propostos aos leitores mais interessados alguns temas de estudo e investigação sôbre vários assuntos de importância mas acessíveis aos conhecimentos da maioria dos nossos leitores. Não faltam, com efeito, temas de trabalho quer dentro dalguns capítulos da matemática clássica, que podem, porém, ser explorados em vários sentidos, ou ser interpretados dum ponto de vista mais geral de acôrdo com as ideias actuais, quer dentro do vasto campo das modernas teorias matemáticas. Havia, no entanto, que encarregar desta importante e simpática tarefa um grupo, tão grande quanto possível, de colaboradores, alguns dos quais ausentes do país, e pedir-lhes dedicassem a sua atenção e um pouco do seu tempo livre, em geral muito escasso, a êste novo trabalho. E era o que se estava tratando de organizar.

O artigo «O Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira» do nosso colaborador António Monteiro suscitou porém da parte dalguns dos nossos jóvens leitores o pedido de creação desta secção Julgamos interessante transcrever parte de duas cartas que à Redacção da «Gazeta de Matemática» dirigiram dois alunos do 2.º ano duma das nossas Faculdades de Ciências. Numa das cartas diz-se:

«Li o artigo da «Gazeta de Matemática» «O Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira» e concordo em que êsse apêlo tem muita razão de ser lançado. Eu sempre tive amor e uma certa aptidão natural para a matemática. E foi êsse mesmo amor que me levou a escolher carreira quando completei o 7.º ano. Gosto por isso de mexer na matemática, de palpar os seus factos na máxima realidade, e até mesmo de perscrutar, isto é, de investigar. Mas para isso não tenho tido quem me oriente eficazmente, apesar de todos os meus Professores se oferecerem para me dar todos os esclarecimentos. Gostaria, pois, que me fôssem confiados temas de estudo e de investigação, para pôr à prova as minhas aptidões nêsse sentido. Por isso, corro ao encontro da nossa «Gazeta», pedindo: não se espere que os nossos Professores apresentem os temas e os resultados da sua investigação, mas a própria «Gazeta» que nos conceda êsses temas, com os quais possam os alunos afiar o seu engenho matemático. Por mim, ficaria muito grato se visse no número de Julho êsses temas com que me pudesse entreter e estudar matemática durante as férias grandes, sôbre Complementos de Álgebra e Geometria Projectiva e mesmo sôbre outras cadeiras, os quais interessarão outros e a mim em próximos anos. Parece-me boa a altura do ano, pois que, libertos das obrigações dos exames poderemos estudar aquilo que nos aprouver, sem pressas e, portanto, com mais segurança e consciência».

Na outra carta lê-se:

«Menciona-se nesse artigo como uma das causas da indiferença por êste prémio o facto dos professores não proporem aos seus alunos temas de trabalho; fundado nesta consideração, lembrava à redacção da «Gazeta de Matemática» se não se poderia incitar os leitores da revista a concorrer ao referido prémio, publicando temas de matemática nas condições do prémio e que pudessem ser tratados pelos leitores, indicando-se a bibliografia relacionada com os temas propostos».

Os acontecimentos precipitaram-se e nós apressamo-nos a indicar já alguma coisa para esta incipiente secção em organização, transcrevendo um tema que nos foi enviado pelo nosso colaborador em Zürich, o bolseiro do Instituto Para a Alta Cultura, Hugo B. Ribeiro, e algumas outras indicações fornecidas pela mesma carta:

«Um tema que seria de grande interêsse para os alunos das nossas Faculdades de Ciências é o da *Teoria Elementar dos Poliedros* e especialmente (o que se mostra como excepcionalmente instrutivo) o estudo do desenvolvimento desta teoria desde Euler, a análise das diversas demonstrações do teorema de Euler. O assunto tem um carácter elementar e é capaz de despertar, desde o início, uma curiosidade que se transformaria fàcilmente em verdadeiro interêsse. Por outro lado não tem sido cultivado entre nós e constitui um capítulo introdutório a um assunto moderno cujo desenvolvimento é hoje tão importante, a Topologia, e introdutório ainda a aplicações recentemente desenvolvidas da Álgebra Moderna. Em língua alemã estudar-se-iam com esta orientação as lições de *Steinitz* redigidas e ampliadas por *Rademacher* «Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter einshluss der Elemente der Topologie», Berlin, Springer, 1934.

Aos alunos das nossas escolas de engenharia e especialmente aos do Instituto Superior Técnico, queremos indicar um livro onde encontrarão interessantes temas de trabalho. Trata-se de «Mathematics applied to electrical engineering» de A. G. Warren, New-York, ed. van Nostrand Company, inc. 1941. Dêste livro podemos dizer que está repleto de exemplos e contém, além das aplicações elementares e das teorias das equações diferenciais, séries de Fourier, funções de Bessel, etc., certos capítulos pouco divulgados entre nós, como o Cálculo de Heavside, transformações conformes e respectivas aplicações e útil biblografia. Aproveitamos a oportunidade para citarmos uma outra publ cação recente embora não pròpriamente matemática. Trata-se do livro «Die elektronenröhre als Physikalisches Messgerät» (A válvula electrónica como instrumento de medições físicas) de Josef Schintlmeister, Wien, Springer 1942.

Chamamos finalmente a atenção do leitor para os artigos publicados nas primeiras páginas dêste número onde são dadas sugestões várias que podem aproveitar-se no sentido de novas investigações.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DO PORTO

A resolução da identidade em espaços separáveis e não separáveis

Em fins de Maio do corrente ano realizou o Prof. Ruy Luís Gomes no Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Pôrto algumas lições sôbre «A resolução da identidade em espaços separáveis e não separáveis». O referido professor escreveu para os nossos leitores o resumo que segue:

Dentro do moderno desenvolvimento da teoria do espaço de Hilbert, devido principalmente a J. v. Neumann, F. Riesz e M. H. Stone, ocupa um lugar importante o estudo dos operadores lineares, através da sua decomposição espectral canónica: (1) $A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE(\lambda)$.

$E(\lambda)$ é uma resolução da identidade e a integração (simbólica) (1) deve tomar-se no sentido de Stieltjes. A igualdade (1), ou melhor $(Af,g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, d(E(\lambda)f,g)$, é válida para todos os elementos $f \in H$ (espaço de Hilbert) tais que $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\,[E(\lambda)f]^2<+\infty$; g qualquer. Se quizermos definir uma integração Lebesgue-Stieltjes, o que de resto já se encontra, embora numa forma diferente, na obra de H. Stone, «Linear Transformations in Hilbert Space» — Cap. VI — temos de substituir as funções de intervalo $I=[a,b]$ $U_{f,g}(I)=(E(I)f,g)$ ou $U_f(I)=|E(I)f|^2$ por uma medida exterior a uma certa classe aditiva.

Na nossa exposição partimos da função aditiva e não-negativa de intervalo $U_f(I)=[E(I)f]^2$ para construir à maneira de Lebesgue, a medida exterior $U_f^*(A)=\liminf_{A\subset\Sigma I_u^0}\Sigma\, U_f(I_u)$, relativa ao conjunto $A\subset R_1$.

A circunstância de $U_f(I)$ ser o quadrado da norma da projecção $E(I)$ de f, levou-nos a averiguar se não seria possível definir uma nova projecção $E(A)$, função unívoca de A, que aplicada ao elemento $f \in H$ desse o mesmo resultado que $U_f^*(A)$.

Ora, as conclusões a que chegámos foram as seguintes:

α) O espaço é separável.

É sempre possível determinar a projecção $E(A)$, função unívoca de A, e as suas principais propriedades são:

1.º) $E(R_1)=1$, $E(0)=0$
2.º) $E(A)\leq E(B)$, $A\subset B$
3.º) $E(A)\cdot E(B)=E(B)\cdot E(A)$;
4.º) $E(\pi A_n)=\underset{n}{\pi} E(A_n)$

5.º) $E(\Sigma A_n) = \Sigma \dot{+} E(A_n)$,

quando as projecções se supõem aplicadas a elementos f relativamente aos quais todos os A_n são mensuráveis U_f^*.

β) O espaço não é separável.

Se A é um conjunto boreleano ainda é possível definir, $E(A)$, função unívoca de A, por maneira que $U_f^*(A) = |E(A)f|^2$, para todo f do espaço.

Se A é qualquer, a projecção $E(A) = \underset{G_\delta \supset A}{\pi} E(G_\delta)$, permite-nos escrever $U_f^*(A) = |E(A)f|^2$, quando f é um dos elementos relativamente aos quais A é mensurável U_f^*.

Nota — Sôbre o problema geral de decomposição espectral de operadores lineares em espaços separáveis ou não, deve consultar-se o último trabalho de Béla v. Sz. Nagy — «Spektral — darstellung Linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes» — [Ergebnisse des Mathematik und iher Grenzgebiete — Berlin 1942].

Multiplicações vectoriais associativas e modulares

Na Faculdade de Ciências do Pôrto, tem-se realizado no Centro de Estudos de Matemática, uma série de lições subordinadas ao tema «Multiplicações vectoriais, associativas e modulares».

O Prof. Almeida e Costa amàvelmente escreveu para os leitores da «Gazeta de Matemática» a seguinte notícia:

O assistente Gonçalves Miranda, desenvolve uma álgebra linear associativa em que os elementos α, formados pelo conjunto de n números complexos, são tratados como habitualmente se faz nas referidas álgebras. Introduz, porém, a par dos elementos α, que designa por vectores contravariantes, elementos covariantes da álgebra, aos quais estende a propriedade associativa. Aparecem então, naturalmente, os produtos mixtos.

A representação dos elementos da álgebra por matrizes é limitada à correspondência de produto a produto.

O assistente G. Miranda dá, finalmente, uma imagem no espaço projectivo n-dimensional dos seu diferentes resultados. O fundamento da construção da imagem reside em fazer corresponder um ponto a cada elemento contravariante e um plano a cada vector covariante.

O professor Alexandre Proca em Portugal

Chegou a Portugal o Prof. Alexandre Proca, do Instituto Henri Poincaré de Paris, que, conforme já aqui noticiámos, assumindo a direcção dos trabalhos do Seminário de Física Teórica anexo ao Centro dos Estudos Matemáticos do Pôrto, vem continuar a obra iniciada pelo Prof. Guido Beck, que se encontra actualmente a trabalhar no Observatório Astronómico de Córdoba (Argentina).

SÔBRE O ENSINO DA FÍSICA EM ZURIQUE

por **A. Gibert**

(bolseiro do Instituto para a Alta Cultura, em Zurique)

Na Escola Politécnica Federal de Zurique existe uma secção de Matemática e Física, a secção IX, e, também uma Associação dos antigos alunos da secção IX.

Em Janeiro dêste ano, durante uma das sessões desta Associação, um dos seus membros alvitrou que se procedesse à recolha de informações que tornassem possível fazer ao Conselho Escolar uma proposta documentada tendente a *melhorar* o ensino (Devemos dizer que êste já é considerado geralmente, na Europa, como muito bom).

O resultado dêsse inquérito acaba de ser apresentado à referida Associação que encarregou imediatamente uma comissão de elaborar a representação que deve ser submetida ao Conselho Escolar (Schulrat). No entanto, a influência dêste primeiro passo, despido de qualquer carácter oficial, já se fará sentir no próximo semestre através da criação de um *Seminário de Matemática para físicos* incluído no quinto semestre do curso.

O trabalho preliminar consistiu na reünião das respostas a um grupo de preguntas, entre as quais destacamos as seguintes:

4. ¿ Será útil para os físicos a cadeira de Geometria Descritiva com o desenvolvimento actual (dois semestres)? Respostas: 1, sim; 21, apenas um semestre.

Observação: É natural que cause certa admiração a alguns leitores da *Gazeta de Matemática* que não tenha sido votada, pura e simplesmente, a supressão da cadeira. Mas, é preciso não esquecer que o Instituto de Física, apesar da sua grande independência, está ligado à grande escola de engenharia que é a E. P. F. e é, pois, natural que sofra a sua influência. Por outro lado entende-se aqui que a cultura geral tem sua importância e reconhece-se ainda que certos aspectos modernos da Geometria Descritiva interessam alguns ramos da Física.

6. ¿ Não seria conveniente que se introduzissem os seguintes cursos: *a)* Métodos matemáticos da Física; *b)* Introdução à Física teórica? Respostas: 3, contra; 19 a favor.

Observação: No que diz respeito à alínea *a)* não se deve concluir da pregunta que não é já dada aqui aos alunos abundante material teórico e prático relativo a êsses métodos (o que se torna evidente depois da leitura do plano de estudos que damos no fim). No entanto, para as exigências actuais da Física, êsse ensino parece não ter tomado ainda todo o desenvolvimento desejável.

Quanto à alínea *b)* a situação é a seguinte: Entre os cursos de Física experimental do professor Scherrer (bem conhecido pelo seu trabalho fundamental sôbre o chamado *efeito Debye-Scherrer*) e as lições de Física teórica do professor G. Wentzel (um dos físicos teóricos de maior vulto da actualidade) não existe um curso de transição, conscientemente organizado com êsse fim, que prepare os alunos, por um lado, para um mais fácil progresso nos métodos da *teoria* e, por outro lado, que consolide, com a indispensável argamassa teórica, os conhecimentos adquiridos com a *experiência*.

7. ¿ Será a teoria das funções necessária para os físicos? Respostas: 2, não, 19, sim, o que dispensa comentários.

9. ¿ Acha suficiente o curso de Química? Respostas: 0, sim; 21, não.

Observação: Calculo que alguns inimigos da tão falada, separação, em Portugal, da Química e da Física (que se deveria antes ligar à Matemática) poderão supor encontrar aqui justificação para a sua condenável atitude inconsciente mas perniciosa. Mas, enganam-se! É que, presentemente, o curso de Física da E. P. F. (8 semestres) conta uma única cadeira semestral de Química (inorgânica) apenas com três horas semanais de laboratório. Isto é, manifestamente, muitíssimo pouco, pois é claro que um físico precisa de possuir as noções e métodos fundamentais da Química, nomeadamente, da Química Inorgânica. Mas para que poderão servir aos físicos conhecimentos especiais de Química orgânica? E, para que poderá servir, seja a quem for, a transformação do seu espírito em ficheiro de receitas de Análise Química?!

Note-se bem, pois, que é êste o espírito daqueles 21 indivíduos que não acham suficiente o actual ensino da Química na E. P. F.

São estes alguns exemplos dos assuntos de que consta o inquérito preliminar a que nos referimos. Brevemente, esperamos poder ter ocasião de descrever o desenvolvimento desta actividade tão progressiva.

Por outro lado, por nos parecer complemento indispensável do que precede, vamos dar ainda o plano geral dos estudos ordinários dum aluno de Física da secção IX.

O curso consta de várias cadeiras, umas obrigatórias, facultativas outras, distribuídas por oito semestres. Os exames fazem-se em duas épocas apenas: uma no fim do quarto semestre, outra depois do oitavo semestre. As cadeiras dos quatro primeiros semestres são comuns para os alunos de Matemática e de Física. Os leitores poderão encontrar a sua lista no artigo de Maria do Pilar Ribeiro, na *Gazeta de Matemática* n.º 12, pág. 20. Devem apenas acrescentar, no terceiro semestre, uma cadeira de Química Inorgânica (duas horas de teoria e três de laboratório).

O exame no final dos quatro primeiros semestres consta de provas sôbre: 1) Cálculo diferencial e integral; 2) Mecânica I e II; 3) Física I e II; 4) Geometria Descritiva I e II e Geometria Vectorial; 5) Química. As notas das provas 1, 2 e 3 têm o coeficiente 2 e as das restantes o coeficiente 1.

Depois do quarto semestre os alunos têm grande liberdade de escôlha, pois existem cêrca de sessenta cursos para êsse grau de ensino. Como exemplo, indicaremos algumas das cadeiras do quinto e sexto semestres destinadas, particularmente, a físicos:

Cálculo das probabilidades (2 horas), Funções analíticas (3 horas), Equações diferenciais lineares (3 horas), Teoria do potencial (3 horas e 1 hora de exercícios), Equações às derivadas parciais da teoria do calor (2 horas), Seminário sôbre métodos matemáticos da mecânica quântica (2 horas), Métodos numéricos (2 horas), Descarga nos gazes

(2 horas), Mecânica ondulatória (2 horas), Seminário sôbre problemas actuais da física experimental (2 horas), Técnica da alta freqüência (2 horas), Teoria electrónica dos metais e semi-condutores (2 horas), Colóquio de física (2 horas), Óptica teórica (3 horas), Exercícios de óptica teórica (1 hora), Estatística quântica (1 hora), Seminário de física teórica (2 horas), Problemas de radioactividade natural e artificial (1 hora), etc.

No quinto, sexto e sétimo semestres os alunos de Física têm ainda trabalhos avançados de laboratório todos os dias sem horário certo. Na realidade, o aluno *avançado* de Física entra no laboratório às 7 ou 8 horas da manhã e sai às 6 horas da tarde, abandonando-o apenas para a refeição do meio dia e para assistir aos cursos que lhe interessam. No oitavo semestre fazem os chamados *trabalhos pessoais de Física*, que consistem na resolução de um tema de trabalho a realizar em quatro meses e do qual devem entregar um relatório que constitui o chamado *trabalho de diploma*. Na execução dêste exigem-se, pelo menos, 24 horas semanais de laboratório.

O exame, no final dos segundos quatro semestres, consta de provas sôbre: 1) Física experimental, 2) Física teórica, 3) Análise matemática, 4) Um curso livre à escôlha entre Astronomia, Alta Mecânica, Prática de Análise, Cálculo das Probabilidades, Técnica de Alta Freqüência, Química, Mineralogia, Geodesia. As notas das três primeiras provas têm o coeficiente 2 e a da quarta apenas 1.

A respeito do ensino da Física na E. P. F. de Zurique muito mais se poderia escrever com o fim de dar aos nossos estudiosos uma idéia do que êsse ensino poderia ser na nossa terra. Estas notas rápidas não pretendem ter outra finalidade, mas talvez a atinjam melhor, se concluirem com duas observações.

1. Qualquer aluno da E. P. F., pelo menos enquanto o é, não pensa noutra coisa senão no seu trabalho, não tem a preocupação dos exames, mas sim a de aprender; só vai aos cursos que o interessam, mas a êsses vai com o único fim de aproveitar o máximo do seu mestre; estuda, enfim, porque quere saber e com o objectivo fundamental de adquirir conhecimentos.

2. Qualquer assistente ou professor da E. P. F. pode dedicar e dedica efectivamente tôda a sua actividade ao ensino e à investigação; não é forçado a perder tempo com exames a prestações, procura averiguar no exame o saber do aluno (e não a sua capacidade de reter determinado número de páginas), classifica-o tanto melhor quanto mais personalidade o aluno revela e aprecia devidamente a extensão dos seus conhecimentos bibliográficos.

O amor do estudo e uma longa tradição de trabalho infatigável em todos os ramos da actividade são os factores dominantes da elevada posição que a pequena Suiça ocupa no mundo civilizado.

Zurique, Julho de 1943.

SÔBRE NICOLAU COPÉRNICO

(Notícia enviada da Suiça por A. SÁ DA COSTA)

Nicolau Copérnico morreu em 24 de Maio de 1543, poucos dias depois de receber o primeiro exemplar da sua principal obra científica — *De revolutionibus orbium cœlestium* — impressa em Nuremberg.

Comemorando o quarto centenário da sua morte, anuncia-se a publicação em nove volumes duma edição completa de tôdas as suas obras, cartas, escritos e desenhos.

Pouco antes do início da guerra actual surgiu a idéia da publicação das obras completas de Copérnico, cujo plano foi fixado por uma comissão de peritos depois de uma revisão cuidada.

As obras serão apresentadas, comulativamente, na língua original e numa nova tradução alemã. Serão publicadas, não só numerosas reproduções do manuscrito da obra fundamental descoberto no século XIX, mas também comentários e desenhos a ela relativos, revelados por laboriosas pesquizas levadas a efeito na Alemanha, na Itália e na Suécia. Completará a edição uma bibliografia completa das obras de Copérnico e uma selecção de documentos relativos à sua vida e à sua obra científica.

O auxílio da União Alemã das Ciências Nuturais permitiu a execução imediata do plano da publicação. Assim, o primeiro volume aparecerá brevemente no editor R. Oldenbonog (Münich-Berlim) e os dois seguintes serão publicados ainda no ano corrente. A conclusão da edição está prevista para 1945.

REAL INSTITUTO DE ALTA MATEMÁTICA DE ITÁLIA

Achamos interessante publicar na «Gazeta de Matemática» notícia dos cursos que terão lugar, no próximo ano escolar 1943-44, no Instituto de Alta Matemática de Roma, centro de investigação de alta categoria, de cuja organização e funcionamento já demos ao leitor indicações no nosso número 12.

O leitor, curioso de conhecer um pouco mais do que o título dum curso, encontrará em «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», Roma, 1943. Vol. IV—fasc. 1-2 um pequeno programa-resumo, acompanhado da bibliografia aconselhada para a preparação dos interessados em seguir os referidos cursos de que só transcrevemos os títulos.

Cursos para o ano escolar de 1943-44:

Ugo Amaldi — *Problemas de equivalência de sistemas diferenciais.*

Enrico Bompiani — *Geometria diferencial das transformações.*

Renato Caccioppoli — *Os problemas de existência da Análise como problemas de Geometria funcional.*

Fabio Conforto — *Funções automorfas e geometria algébrica.*

Luigi Fantappiè — *As funcionais não lineares e as suas aplicações ao estudo dos auto valores e dos núcleos resolventes de um dado núcleo.*

Giovanni Giorgi — I — *Conjuntos e números transfinitos;* II — *Matrizes e cálculo respectivo.*

Giulio Krall — *As equações diferenciais e integrais da técnica.*

Francesco Severi — *Continuação das teorias geométricas, topológicas e transcendentes concernentes às superfícies e variedades algébricas.*

Antonio Signorini — *Teoremas de confronto na Física-Matemática, o problema completo da balística externa.*

ANTOLOGIA

MÉTODOS ALGORÍTMICOS — MÉTODOS DIRECTOS

por **Georges Bouligand**

(de «La causalité des théories mathématiques» págs. 5-7)

Os métodos directos afastam-se pelas suas tendências dos métodos de cálculo ou métodos algorítmicos, cujo desenvolvimento, que data de Descartes e Fermat, conheceu a sua época áurea depois de Newton e Leibnitz. Em lugar de excluir os métodos de cálculo, os métodos directos tendem a disciplina-los orientando-os no sentido do melhor rendimento. O algorítmo será numa dada categoria de problemas um *a posteriori* cujo exame directo terá prèviamente revelado a melhor adaptação possível. Entrevê-se assim uma das soluções que a actividade matemática sugeriria para responder à pregunta de Serge Bernstein. E como exemplo a reforçar, poder-se hia citar o da análise vectorial, que acompanhando o simbolismo da geometria analítica, se adapta muitíssimo melhor do que esta a uma grande quantidade de problemas.

Evocava há pouco a idade de ouro dos métodos algorítmicos. O apogeu do seu desenvolvimento não anda longe de 1799, ano em que Laplace escrevia [1]: a análise algébrica bem depressa nos faz esquecer o objectivo principal das nossas investigações levando-nos a ocupar com combinações abstractas, e só no fim é que nos reconduz ao ponto de partida. Mas, abandonando-nos às operações da análise, somos levados pela generalidade dêste método».

Eis o que merece ser meditado. A idéia de que o cálculo pode, de algum modo, arrastar-nos, fundamenta-se em constatações impressionantes; como exemplo, a possibilidade, descoberta por Lagrange, de introduzir, sob o nome de dinâmica analítica, métodos de cálculo aplicáveis ao estudo dos movimentos de que podem ser animados os mais variados sistemas materiais, mediante a ex-

[1] Laplace, *Système du monde*, 1799. Esta passagem de Laplace é freqüentemente comentada. Cfr. Pierre Boutroux, *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris, Alcan, 1920, cap. III: o apogeu e o declínio da concepção sintetista.

clusão do atrito e de certas ligações, isto deixando ainda aberto o campo a uma vasta generalidade.

Mas à medida que a complexidade dos problemas aumentava a eficacidade do cálculo diminuía. Em questões de carácter físico, a prévia redução algébrica escondia por detrás dos símbolos os aspectos do real e, muito a propósito, Bouasse poude falar «das belas coisas que os matemáticos cobrem dum impenetrável mistério».

Muitos físicos sentiram isto com pena. E foi esta a razão por que se procurou bastantes vezes acompanhar as demonstrações rigorosas com provas intuitivas, menos perfeitas, mas menos afastadas do concreto. No entanto, julgou-se por largo tempo impossível conseguir o rigor por esta via, considerando eivados de vícios redibitórios os raciocínios dos físicos ou dos geómetras.

Sabe-se actualmente que não se trata senão duma opinião preconcebida. Os métodos directos conduzem ao desenvolvimento de raciocínios cuja trama, fortemente acusada, dá a impressão dum todo simultâneamente harmonioso e irreductível. É-se levado sem rodeios da intuição para a lógica. Unicamente durante o percurso aparecem noções subtis, que se impõem ràpidamente ao que procura a solução, mas que necessitam da parte do investigador, que os põe em evidência, esforços, por vezes, penosos. As vitórias dêste género são o fruto das correntes axiomáticas. Mas voltemos, por um instante ao cálculo, para examinar os pontos fracos.

Quando se utiliza num problema um ou outro modo operatório, raro é haver adaptação perfeita à questão posta. É o que se nota pela necessidade de hipóteses acessórias, para permitir a aplicação do algorítmo. Estas hipóteses auxiliares representarão um papel análogo ao das limitações de cargas que um engenheiro, ao construir um edifício, evita ultrapassar para lhe garantir estabilidade.

Trad. de Manuel Zaluar

ALGUMAS NOTAS CURIOSAS SÔBRE AS RELAÇÕES DE ABEL E CRELLE

por ***E. T. Bell***

(da biografia de Abel em Cap. XVII de «Les grands mathématiciens»)

Tendo deixado o seu país em Setembro de 1825, Abel começou por visitar os matemáticos e astrónomos notáveis da Noruega e Dinamarca; em seguida, em lugar de ir ter com Gauss a Goettingen, como era seu intento, dirigiu-se a Berlim. Aí teve a grande felicidade de encontrar Augusto Leopodo Crelle (1780-1856), que se tornaria para êle um outro Holmboë, mas de muito maior pêso no mundo matemático. Se Crelle contribuíu bastante para a reputação de Abel, êste, pelo seu lado, facilitou grandemente o êxito de Crelle. Onde quer que se cultive hoje a matemática, o nome de Crelle é corrente; não é o de um homem, mas o da grande revista que êle fundou e cujos três primeiros volumes contêm vinte e duas memórias de Abel.

A revista deu a conhecer Abel, ou, pelo menos, a conhecê-lo mais ràpidamente aos matemáticos do continente; mas a obra de Abel lançou a revista com um brilho que se propaga por todo o mundo matemático, e por fim a revista fêz Crelle. Êste modesto amador matemático merece mais do que uma simples menção: o seu tacto e fino instinto na escôlha dos seus colaboradores contribuíram mais para o progresso das matemáticas no século XIX do que uma dúzia de academias científicas.

Crelle gostava da matemática e tinha-a aprendido por gôsto; não era um creador, mas, engenheiro de profissão, foi o construtor da primeira linha férrea da Alemanha, tendo conseguido ocupar uma bela situação; consagrava os seus momentos livres à matemática, que era para êle mais do que um passatempo, porque êle próprio contribuíu para a investigação científica, antes e depois da criação, em 1826, da sua revista: «Journal für die reine und angewandte Mathematik» (Jornal de matemáticas puras e aplicadas), grande impulsionadora das matemáticas alemãs. Esta revista foi o primeiro periódico do mundo consagrado exclusivamente às *investigações* matemáticas; não eram recebidas fàcilmente exposições de obras antigas; pelo contrário, àparte uns trabalhos de Crelle, a revista só aceitava memórias de que não interessava o nome do autor desde que o assunto tratado fôsse novo, rigoroso e de importância (qualidade difícil de definir) suficiente para merecer a publicação. «Crelle» publicou trimestralmente com regularidade, desde 1826 até os nossos dias, um conjunto brilhante de memórias matemáticas originais.

. . . .

Quando Abel chegou, em 1825, a Berlim, Crelle ia justamente lançar-se nesta grande aventura ùnicamente com os seus meios. Há duas versões do primeiro encontro entre Abel e Crelle, ambas de interêsse. Crelle ocupava, naquele momento, funções oficiais para que tinha pouca aptidão e gôsto, as de examinador no «Gewerbe-Institut» (Escola Técnica Profissional) de Berlim. Eis como o próprio Crelle nos conta êste histórico encontro, que nos chegou, é certo, já em terceira mão, por uma carta de Crelle a Weierstrass comunicada por êste a Mittag-Leffler!

«Um belo dia entrou no meu escritório um homem ainda novo, bastante tímido, de cara juvenil e de aspecto muito inteligente. Pensando que se tratava dum candidato a exame de admissão à Escola, expliquei-lhe que teria de fazer vários exames diferentes. No fim, o mancebo abriu a bôca para me dizer em mau alemão: Não se trata de exames mas de matemática».

Crelle percebeu que Abel era estrangeiro e tentou falar-lhe em francês; Abel poude fazer-se entender nesta língua com alguma dificuldade. Crelle preguntou-lhe o que tinha feito em matemática, a que Abel, usando de diplomacia, respondeu ter lido, entre outras, uma memória do próprio Crelle de 1823, recentemente publicada, sôbre as «faculdades analíticas» (cujo nome moderno é o de «factoriais») e que a tinha achado muito interessante. Imediatamente em seguida, esquecendo tôda a diplomacia, pôs-se a mostrar ao seu interlocutor os êrros contidos no estudo, e aqui Crelle manifestou larguesa de espírito. Em lugar de afectar um ar glacial ou irritar-se contra esta presunção audaciosa do rapaz que tinha diante de si, prestou atenção e fêz preguntas cujas respostas ouviu com a maior atenção. Tiveram assim uma longa conversação matemática de que Crelle só parte abrangeu; no entanto apercebeu-se nitidamente do valor de Abel. Crelle não conseguiu nunca compreender a décima parte do que Abel criou, mas o seu fino instinto matemático indicou-lhe que se tratava de um matemático de primeira categoria e fêz tudo quanto poude para conseguir que fôssem reconhecidos os méritos do seu jovem protegido. Ainda antes do final da sua primeira intervista, Crelle tinha decidido que Abel havia de ser um dos primeiros colaboradores da sua revista.

A narrativa de Abel difere um pouco da de Crelle mas não fundamentalmente. Se lermos nas entrelinhas, vê-se que as diferenças provêm da modéstia de Abel.

Trad. de Manuel Zaluar

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1942)

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 5

1441 — Determine as condições a que devem satisfazer os valores de m para que as raízes da equação $8x^2-(m-1)x+m-7=0$ sejam: 1.º Reais e iguais. 2.º Iguais e de sinal contrário. 3.º Uma recíproca da outra. 4.º Diferentes entre si sendo uma nula. R: 1.º *Basta ser* $\Delta=(m-1)^2-32(m-7)=0$ *ou seja* $m=9$ *ou* $m=25$. 2.º *Deverá verificar-se a condição* $S=(m-1):8=0$ *ou seja* $m=1$. 3.º *As raízes serão recíprocas uma da outra se fôr* $P=(m-7):8=1$, *igualdade que é verificada para* $m=15$. 4.º *Tem-se* $P=0$ *donde o valor* $m=7$.

1442 — Desenvolva, recorrendo à fórmula do binómio de Newton, a expressão $(\sqrt{a}:3-a:\sqrt{3})^4$. Simplifique os têrmos obtidos.

R: $$\frac{a^2}{81}-\frac{4a^2\sqrt{a}}{27\sqrt{3}}+\frac{2a^2}{9}-\frac{4a^3\sqrt{a}}{9\sqrt{3}}+\frac{a^4}{9}.$$

1443 — Partindo da fórmula que dá o número de combinações de n objectos tomados m a m, mostre que se pode obter ${}^{n+1}C_m$ (número de combinações de $n+1$ objectos tomados m a m) adicionando ${}^nC_{m-1}$ a ${}^nC_m$. R: *Como é* $${}^{n+1}C_m=\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}$$ *e* $${}^nC_{m-1}+{}^nC_m=\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}+\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n!\,m}{(m-1)!\cdot m\cdot(n-m+1)!}+\frac{n!(n-m+1)}{m!(n-m)!(n-m+1)}=\frac{n!(m+n-m+1)}{m!(n-m+1)!}=\frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}$$ *verifica-se a relação proposta.*

1444 — Verifique a identidade $\operatorname{sen} 3a=4\operatorname{sen} a\operatorname{sen}(60^\circ-a)\operatorname{sen}(60^\circ+a)$. R: $\operatorname{sen} 3a=4\operatorname{sen} a[\operatorname{sen}60^\circ\cos a-\cos60^\circ\operatorname{sen} a][\operatorname{sen}60^\circ\cos a+\cos60^\circ\operatorname{sen} a]=4\operatorname{sen} a\,[3/4\cdot\cos^2 a-1/4\cdot\operatorname{sen}^2 a]=3\operatorname{sen} a\cos^2 a-\operatorname{sen}^3 a$ *o que verifica a relação.*

1445 — Determine sem recorrer às tábuas os valores das linhas trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante) do ângulo $8\pi/3$. R: $\operatorname{sen} 8\pi/3 = \operatorname{sen} 2\pi/3 = \operatorname{sen}(\pi - \pi/3) = \sqrt{3}/2$; $\cos 8\pi/3 = -\cos\pi/3 = -1/2$; $\operatorname{tg} 8\pi/3 = -\operatorname{tg}\pi/3 = \sqrt{3}$; $\operatorname{cotg} 8\pi/3 = -\operatorname{cotg}\pi/3 = -\sqrt{3}/3$; $\sec 3\pi/3 = -\sec\pi/3 = -2$ *e* $\operatorname{cosec} 8\pi/3 = 2\sqrt{3}/3$.

1446 — Determine, recorrendo ao cálculo logarítmico, o ângulo ao centro que corresponde à corda de 1,23 metros, na circunferência de raio 1,6721 metros. R: *Se fôr* α *o ângulo pedido será* $1{,}23 = 2 \times 1{,}6721 \operatorname{sen}\alpha/2$ *donde* $\log\operatorname{sen}\alpha/2 = \log 1{,}23 + \operatorname{colg} 3{,}3442 = 0{,}08991 + \bar{1}{,}47570 = 1{,}56561$ *donde* $\alpha/2 = 21^\circ 34' 47''$ *e* $\alpha = 43^\circ 9' 34''$.

1447 — Indique como se procede à adição de números fraccionários e enuncie as propriedades dessa operação.

1448 — Demonstre que um triângulo é isósceles quando duas das suas medianas têm o mesmo comprimento. R: *Considere um triângulo, determine os meios de dois lados e construa as medianas que supomos iguais. A linha que une os meios dos dois lados é paralela ao terceiro lado. O quadrilátero formado por êsse terceiro lado, pela paralela conduzida pelo meio dos outros dois lados e por estes lados é um trapézio de que as diagonais (medianas do triângulo) são iguais, logo, é isósceles e por isso o triângulo será também isósceles.*

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 1

1449 — Calcule com o auxílio de uma tábua de logaritmos os valores de x que satisfazem à equação $\operatorname{tg} x = -(1-\cos\alpha)\sqrt{\operatorname{sen} 1/2\,\beta}$ para $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 203^\circ 27'$. R: *Como* $\cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B-A}{2}\right)$ *e como* $1 = \cos 0^\circ$ *será* $\log\operatorname{tg}(-x) = \log 2 + \log\operatorname{sen} 15^\circ + \log\operatorname{sen} 30^\circ + 1/2 \log\operatorname{sen} 78^\circ 16' 30' = 0{,}30103 + \bar{1}{,}41300 + \bar{1}{,}69897 + \bar{1}{,}99542 = \bar{1}{,}40842$ *e* $x = -14^\circ 21' 54'' \pm n \cdot 180^\circ$.

1450 — Defina superfícies prismática e piramidal. Indique alguns sólidos limitados em parte ou no todo por tais superfícies

1451 — Resolva a inequação $x-(x-1):(x+1) < 4x-5$, calculando as raízes com a aproximação de 0,01. R: *A inequação é equivalente a* $(3x^2-x-6):(x+1) > 0$ *e sendo as raízes do numerador* $x_1 = 1{,}59$ *e* $x_2 = -1{,}26$, *os valores que satisfazem à desigualdade são* $x > 1{,}59$ *e* $-1{,}26 < x < -1$.

1452 — Escreva o 4.º termo do desenvolvimento de $(x : \sqrt{y} + \sqrt[3]{y})^5$ e simplifique. R: $T_4 = 10x^2$.

1453 — Enuncie as regras de divisibilidade que conhece.

1454 — Diga como constrói um triângulo, dados os comprimentos de duas medianas e o valor do ângulo cujo vértice é o extrêmo de uma daquelas. R: *Traça-se uma das medianas* AB *e o lugar dos pontos dos quais se vê esta mediana sob o ângulo dado* α; *o vértice do triângulo estará sôbre êsse lugar. Como as medianas se cortam à distância da base de um têrço do seu comprimento marca-se* D *a um têrço de* AB *de* B, *e com centro em* D *descreve-se uma circunferência, de raio* DC *igual a dois terços da outra mediana, que cortará ou não o lugar já achado assim se obtendo o ponto* C; *unindo* C *com* D *e marcando a partir de* D *a distância* DD' *igual a um têrço da segunda mediana obtem-se* D' *que unido com A determina o terceiro lado do triângulo pedido* ACC'.

Soluções dos n.os 1441 a 1454 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 3

I

1455 — Efectue o desenvolvimento de

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2y}} - \sqrt{\frac{2y}{x}}\right)^5$$

e simplifique o mais possível o resultado obtido. R:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2y}} - \sqrt{\frac{2y}{x}}\right)^5 = \frac{x}{2y}\sqrt[3]{\frac{x^2}{4y^2}} - 5\cdot\frac{x}{2y}\sqrt[3]{\frac{x}{2y}}\cdot\sqrt{\frac{2y}{x}} + 10\frac{x}{2y}\cdot\frac{2y}{x} - 10\sqrt[3]{\frac{x^2}{4y^2}}\frac{2y}{x}\sqrt{\frac{2y}{x}} + 5\cdot\frac{4y^2}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x}{2y}} - \frac{4y^2}{x^2}\sqrt{\frac{2y}{x}}.$$

1456 — Dada a equação $x^4 + mx^2 + 1 = 0$, determine o coeficiente m de modo que sejam reais *tôdas* as raízes da equação. R: *O parâmetro* m *deve satisfazer apenas às condições* $m < 0$ *e* $m^2 - 4 > 0$ *donde* $m < -2$.

1457 — Defina *função inversa* de uma dada função e escreva a função inversa da função $y = 2\log_a(2x-1)$. R: *A função inversa da função dada é* $x = (1 + a^{y/2})/2$.

II

1458 — Numa circunferência de raio igual a 230,08 metros inscreveu-se um triângulo rectângulo. Sabendo que um dos seus ângulos internos mede $58^\circ 18' 12''$, calcule o comprimento do *maior* cateto do referido triângulo. Utilize logarítmos. R: *O maior cateto* b *é o que se opõe ao ângulo* *dado* α. *A hipotenusa é, evidentemete, o diâmetro da circunferência. Tem-se:* $b=2R \operatorname{sen}\alpha$, $\log b = \log 2+\log R+\log \operatorname{sen}\alpha = 0,30103+2,36188+\bar{1},92985=2,59276$ *donde* $b=391,53$ m.

1459 — Determine, em radianos, a expressão geral dos ângulos que verificam a equação $\cos y = \cos 150^{\circ}$. R: $150^{\circ}=5\pi/6$ rad; $y=2k\pi \pm 5\pi/6 = \frac{12k\pm 5}{6}\pi$ rad.

1460 — Sabendo que x é um ângulo do 1.º quadrante que satisfaz à relação $\operatorname{tg} x = 2 \operatorname{sen} x$, calcule o valor de $\operatorname{tg} x$. R: *Da relação dada deduz-se* $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}=2$ *ou* $\cos x = 1/2$, *donde* $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

III

1461 — Demonstre que os meios dos lados de um triâgulo e o pé de uma qualquer das alturas são vértices de um trapésio isósceles. R: *Sejam* M, N *e* S *respectivamente os pontos médios dos lados* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ *e* $\overline{BC}$ *e designemos por* P *o pé da altura referente ao lado* BC. *O quadrilátero* [MNSP] *tem os lados* MN *e* PS *paralelos (pois o segmento* $\overline{MN}$ *que une os pontos médios de* 2 *lados é paralelo ao terceiro lado). Por outro lado o ponto* M *é equidistante de* A *e* P *pois* $\overline{MN}$ *é perpendicular ao meio de* $\overline{AP}$ *(teorema de Thales aplicado às transversais* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AP}$ *interceptadas pelas paralelas* MN *e* BC*). Logo* $\overline{MB}=\overline{MP}$. *Como por construção* $\overline{MA}=\overline{MB}$ *conclui-se que* $\overline{MP}=\overline{MB}$ *e portanto* $\overline{MP}=\overline{NS}$.

1462 — A secção feita num cilindro de revolução por um plano que contém o eixo, é um rectângulo de área igual a 16 cm² e cujo perímetro é igual a 20 cm. Calcule a área lateral do cilindro. R: *Uma das dimensões do rectângulo é o diâmetro* $2r$ *da base do cilindro e a outra é a geratriz* g. *A área lateral é* $A=2\pi rg=\pi\cdot 16\text{ cm}^2=50,24\text{ cm}^2$.

Soluções dos n.os 1455 a 1462 de J. Calado.

Instituto Superior Técnico

Ponto n.º 1

1463 — Duas bicicletas fazem o percurso AB, no mesmo sentido, partindo a segunda 5 minutos depois da primeira e chegando 10 minutos antes. Ao passarem uma pela outra são fotografadas com a exposição de 1/10 de segundo, verificando-se pela fotografia que, durante a exposição, cada um dos raios das rodas girou de um ângulo correspondente a 10 raios na primeira bicicleta e de um ângulo correspondente a 12 raios na segunda. Sabendo que as rodas das duas bicicletas têm de circunferência 3,65 m e 3,85 m, respectivamente, e que o número de raios de cada roda é 50 na primeira e 55 na segunda, calcular o percurso AB. R: *As velocidades das duas bicicletas são, respectivamente,* $v_1=10/50\times 3,65:1/10=7,3$ m/s *e* $v_2=12/55\times 3,85:1/10=8,4$ m/s. *Por outro lado, é* $\overline{AB}=7,3\times t=8,4\times(t-900\text{ s})$ *donde* $t=\frac{75600}{11}$ s *e* $\overline{AB}=50170,91$ m.

1464 — A equação $ax+by+cz=1$ é satisfeita pelos mesmos valores de x para $a=5$, $b=10$ e $c=15$ e para $a=b=c=10$. Exprimir y em função explícita de x. R: *Como* $x=(1-cz-by):a$ *será* $(1-15z-10y):5=(1-10z-10y):10$ *e por isso* $z=(1-10y):20$ *valor que substituido na equação dá* $ax+by+c(1-10y):20=1$ *donde* $y=(20-c-20ax):(20b-10c)$.

1465 — Estudar a variação do trinómio $y=\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x+1$ quando x varia entre -2π e 2π e fazer a sua representação gráfica. R: *A função pode escrever-se* $y=(\operatorname{sen} x-1)^2$ *o que mostra ser esta sempre positiva. Por outro lado basta faser o estudo da variação da função entre* 0 *e* 2π *pois que em virtude da periodicidade de* $\operatorname{sen} x$ *ela retomará os mesmos valores no intervalo* $(-2\pi, 0)$. *Para* $x=0$, $\operatorname{sen} 0=0$ e $y=1$; *de* 0 *a* $\pi/2$, *o seno cresce e é positivo e portanto em valor absoluto a diferença* $\operatorname{sen}|x-1$ *decresce e para* $x=\pi/2$ *será* $y=0$. *De* $\pi/2$ *a* π *o seno é positivo e decresce, e a função* y *cresce atingindo quando* $x=\pi$ *o valor* $y=1$. *No terceiro quadrante o seno é negativo e decrescente e a função continua crescendo atingindo quando* $x=3\pi/2$ *o valor* $y=4$; *no quarto quadrante a função decresce para voltar a ter em* 2π *o valor* 1.

1466 — Calcular a área de um círculo, sabendo que no triângulo rectângulo inscrito com um dos catetos igual a 2, é igual a 1/3 a razão das tangentes dos ângulos agudos. R: *O problema tem duas soluções conforme considerarmos o cateto de medida* 2 *oposto a um ou outro dos ângulos agudos. Teremos assim* $\operatorname{tg} B/\operatorname{tg} C=3$ *ou* $\operatorname{tg} B/\operatorname{cotg} B=3$ *e* $\operatorname{tg}^2 B=3$, *donde* $\cos B=1:(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 B})=1/2$. *No primeiro caso teremos* $2r=2\times 1/2=1$ *e* $r=1/2$ *donde a área igual a* $\pi/4$. *No segundo caso* $\cos C=\sqrt{3}/2$ *e* $2r=2\times\sqrt{3}/2=\sqrt{3}$, $r=\sqrt{3}/2$ *e a área mede* $\pi\sqrt{3}/2$.

1467 — Dois triângulos de alturas h e h' tem as bases b e b' sôbre a mesma recta. Tirar uma paralela a esta recta de modo que o segmento nela determinado pelo primeiro triângulo seja duplo do determinado pelo segundo triângulo. R: *Sejam* s *e* s′ *os segmentos da paralela determinados pelos triângulos e* x *a distância da paralela à base dos dois triângulos, será então* $s:(h-x)=b:h$ *e* $s':(h'-x)=b':h$ *e como* $s=2s'$ *vem* $b(h-x):h=2b'(h'-x):h'$ *e por isso teremos* $x=hh'(2b'-b):(2b'h-bh')$.

1468 — Dado um paralelipípedo rectângulo de dimensões 2, 3 e 4 centímetros, determinar o ângulo que deve fazer, com a face menor, um plano tirado pela maior aresta da mesma face para que divida o paralelipípedo em duas partes tais que o volume de uma seja triplo do da outra. R: $V=2.3.4=24\,\text{cm}^3$ *é o volume do prisma dado, e seja* v *o volume do prisma menor. Será* $4v=24$ *e* $v=6\,\text{cm}^3$; *e se for* x *o ângulo do plano com a face menor será* $v=3.1/2.2.2.\operatorname{tg}x$ *donde* $6=6\operatorname{tg}x$ *e* $x=45°$.

Soluções dos n.os 1465 a 1468 de J. da Silva Paulo.

CORRECÇÃO

Problema n.º 1344, «G. M.» n.º 15 — O último período deve ser substituído por: *Os valores de* m *são todos os compreendidos entre* 2 *e* 17/4.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência e finais

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. A. — Matemáticas Gerais — **Alguns pontos dos exames de freqüência e finais do ano lectivo 1942-43.**

1469 — ¿Quantos valores numèricamente distintos toma a expressão x^{y^z} quando as variáveis tomam cada uma um dos valores 2, 3 e 5? O mesmo para x^{yz}. R: *A expressão* x^{y^z} *toma, nas condições indicadas, tantos valores quantos o número de permutações completas de* 3 *elementos ou seja* $3^3=27$. *Já não sucede o mesmo com* x^{yz}. *Com efeito, o expoente* yz *toma valores distintos cujo número é o de combinações completas de* 3 *elementos* 2 *a* 2, *ou seja* $\Gamma_{2,2}=C_{4,2}=6$, *valores estes que combinados com um dos* 3 *valores da base dá o número total de* $6\times3=18$ *valores distintos para a expressão dada.*

1470 — Quantas raízes tem a equação $z^n-k^2=0$? (n inteiro e positivo). Se k fôr real como varia o número de raízes reais com n? Justifique as respostas.

1471 — Considere o conjunto das raízes da equação $\cos x+1=0$. Indique a potência dêste conjunto e se é, ou não, denso. Justifique as respostas. R: $\cos x=-1\rightarrow x=(2k+1)\pi$. *Trata-se evidentemente dum conjunto numerável e não denso.*

1472 — Determine m de modo que, para α qualquer, seja ortogonal o determinante:

$$\Delta(m,\alpha)=\begin{vmatrix}\cos\alpha & -m\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & m\cos\alpha\end{vmatrix}.$$

1473 — Dados os 3 vectores $\mathbf{u}_1=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{u}_2=3\mathbf{i}+13\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}_3=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, verifique se são, ou não, linearmente independentes. No caso de dependência determine a relação que os liga.

1474 — Resolva a equação

$$\begin{vmatrix}x(x+1) & 3x & 2x\\ x^2-1 & x-1 & 3x-3\\ x+1 & 0 & x\end{vmatrix}=0.$$

R: *Pondo em evidência os factores comuns aos elementos das várias filas, tem-se* $x(x+1)(x-1)\begin{vmatrix}1&3&2\\1&1&3\\1&0&x\end{vmatrix}=0$ *ou* $x(x+1)(x-1)(-2x+7)=0$. *As raízes são pois* -1, 0,1 e $7/2$.

1475 — Designando por O e Q dois pontos fixos e $\mathbf{u}$ um vector constante perpendicular a $Q-O$, indique o logar geométrico do ponto P satisfazendo à equação: $(Q-O)\wedge(P-O)=\mathbf{u}$. R: *O logar geométrico pertence ao plano que contém* O *e* Q *e é normal a* $\mathbf{u}$. *É, evidentemente, uma das duas rectas do plano paralelas a* OQ *à distância* $\dfrac{\operatorname{mod}\mathbf{u}}{\operatorname{mod}(Q-O)}$.

1476 — Indique o logar geométrico dos pontos do espaço caracterizado vectorialmente pela equação $\operatorname{mod}[(Q-O)\wedge(P-O)]=a^2$ (a número real). Deduza a equação cartesiana dêste logar tomando O para origem do referencial cartesiano ortogonal e supondo $Q(0,0,3)$. R: *Tendo presente o exercício anterior é fácil de ver que o logar é a superfície cilíndrica de revolução de eixo* OQ *e raio de secção recta* $\dfrac{a^2}{\operatorname{mod}(Q-O)}$. *A equação cartesiana* *deduz-se com facilidade. Com efeito:* $Q-O=$ $=3\mathbf{k}$, $P-O=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $(Q-O)\wedge(P-O)=-3y\mathbf{i}+$ $+3x\mathbf{j}$ *e, portanto,* $\sqrt{9y^2+9x^2}=a^2$ *ou, racionalizando,* $x^2+y^2=(a^2/3)^2$.

1477 — Determine o número máximo de triângulos formados pelas diagonais de um polígono plano convexo de n lados. R: *Como é sabido o número de diagonais de tal polígono é* $N=n(n-3)/2$, *e de cada vértice partem* $n-3$ *diagonais.*

O número de triângulos é, no máximo, dado por $\binom{N}{3}-n\binom{n-3}{3}$. *O subtractivo desta diferença corresponde* (*para* $n\geq 6$) *aos grupos de* 3 *diagonais dentre as* $n-3$ *que irradiam de cada vértice e que, evidentemente, nunca formam triângulo.*

A existência de elementos de simetria no polígono torna paralelos ou concorrentes grupos de diagonais, diminuindo o número de triângulos formados. Por isso o número acima indicado é não excedido.

Soluções dos n.os 1469 a 1477 de M. Zaluar.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **1.º exame de freqüência, 1942-43.**

1478 — O afixo A do complexo $3+4i$ descreve um arco de circunferência de $45°$, com centro na origem dos eixos. Qual é o complexo cujo afixo é a nova posição do ponto A? Calcular o resultado sob a forma algébrica. R: *Será um complexo* $a+bi=\rho(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ *com* $\begin{cases} a=\rho\cos\alpha \\ b=\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$ *e em que* ρ *é o módulo do complexo* $3+4i$ *e* $\alpha=\alpha_1+45°$ *sendo* α_1 *o argumento dêste mesmo complexo supondo a rotação efectuada no sentido directo. Portanto, por ser* $\rho=\sqrt{9+16}=5$, $\cos\alpha_1=3/5$, $\mathrm{sen}\,\alpha_1=$ $=4/5$, $\mathrm{sen}\,45°=\cos 45°=\sqrt{2}/2$, *teremos:* $\cos\alpha=$ $=\cos(\alpha_1+45°)=-\sqrt{2}/10$, $\mathrm{sen}\,\alpha=\mathrm{sen}\,(\alpha_1+45°)=$ $=\sqrt{2}/10$. *Logo* $a+bi=5\left(-\sqrt{2}/10+\sqrt{2}/10\cdot i\right)=$ $=\sqrt{2}/2\cdot(-1+i)$.

1479 — Sendo $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2ax+1}}$, mostrar que é $y'=(a-x)\,y^3$. Calcular também a segunda derivada, expressa em a e x. R: *Com efeito, por ser* $y'=\dfrac{-(x-a)}{(x^2-2ax+1)^{3/2}}$ *é imediata a verificação pedida. Derivando* y' *em ordem a* x *obtém-se fàcilmente* $y''=(x^2-2ax+1)^{-3/2}\cdot[3\,(x-a)^2\,(x^2-2ax+1)^{-1}-1]$.

1480 — Marque, num gráfico, os pontos $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(2a,0)$ e $P(0,k)$. Calcular a ordenada do ponto de encontro Q de $\overline{AB}$ com $\overline{CP}$. Exprima a área S do triângulo $[AQP]$ em função de a, b e k (considerando-a como a diferença das áreas dos triângulos $[ACP]$ e $[ACQ]$). Calcule o valor de k que torna S máxima. R: *Suponhamos* $a>0$, $b>0$, $k>0$. *A ordenada do ponto de intersecção* Q *das rectas* AB *e* CP *obtém-se fàcilmente, eliminando* x *entre as equações daquelas rectas que são, como sabemos:*

$$\begin{matrix} AB)\equiv x/a+y/b=1 \\ CP)\equiv x/2a+y/k=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} bx+ay-ab=0 \\ kx+2ay-2ak=0\,. \end{cases}$$

Efectuando a eliminação acima indicada, virá: $y=bk/(2b-k)$. *A área a determinar será pois:* $S=S_1-S_2$ *em que* S_1 *e* S_2 *são respectivamente as áreas de dois triângulos de base* $\overline{AC}=a$ *e de alturas* $\overline{OP}=k$ *e* $\overline{OQ}=bk/(2b-k)$. *Ter-se-á portanto:* $S=1/2\cdot a\,[k-bk/(2b-k)]=ak\,(b-k)/[2\,(2b-k)]$. *Pretende-se determinar* k *de modo que a área* S(k) *seja máxima. Derivando e tendo em conta algumas simplificações, teremos:* $S'(k)=\dfrac{a(k^2-4bk+2b^2)}{2\,(2b-k)^2}\rightarrow$ $\rightarrow S'(k)=0\rightarrow k^2-4bk+2b^2=0$ *por ser* $a\neq 0$, $\rightarrow$ $\rightarrow k=\left(2\pm\sqrt{2}\right)b$, *soluções que não anulam o denominador de* $S'(k)$. *É fácil ver que dêstes valores de* k, *apenas* $k=\left(2-\sqrt{2}\right)b$ *torna* $S''(k)<0$ *e que portanto, apenas êste valor de* k *torna a área* S(k) *máxima.*

1481 — Calcular: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{cosec}\,(x-a)}{\dfrac{1}{x-a}}$. R: *O limite a determinar reduz-se a:* $\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{sen}\,(x-a)}{x-a}}=1$.

Soluções dos n.os 1478 a 1481 de O. Morbey Rodrigues.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **Exame Final, 16 de Junho de 1942.**

1482 — Determinar os máximos e mínimos de z, dada a equação $2z^4+(x-1)^2+2(y-1)^2-2=0$.

1483 — Integrar a equação $y=2xy'+(1+y')^2$, e determinar as equações paramétricas da linha integral que no ponto de abscissa $-2/3$ tem uma tangente paralela à bissectriz do 1.º quadrante.

1484 — Calcular

$$I=\int_0^4 dy\int_0^{1+y^2/8} x\,dx+\int_4^5 dy\int_0^{\sqrt{25-y^2}} x\,dx\,,$$

depois de mudar a ordem das integrações.

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — 2.º exame de freqüência, 1943

1485 — Integrar a equação
$$2\frac{d\rho}{d\theta}-\frac{\rho}{\theta}+\frac{2\theta+1}{\theta(\theta+1)^2}\frac{1}{\rho}=0,$$
e determinar as assíntotas da linha integral que passa pelo ponto $(\theta=3\,,\rho=1/2)$. R: *Trata-se de uma equação de Bernoulli,*
$$2\rho\frac{d\rho}{d\theta}-\frac{\rho^2}{\theta}+\frac{2\theta+1}{\theta(\theta+1)^2}=0.$$
Fazendo $\rho^2=z$, *vem a equação linear*
$$\frac{dz}{d\theta}-\frac{z}{\theta}+\frac{2\theta+1}{\theta(\theta+1)^2}=0.$$
O integral geral da equação sem 2.º membro é $z=C_1\theta$; *variando a constante obtêm-se* $z=\frac{1}{\theta+1}+C\theta$, *ou, finalmente,* $\rho^2=\frac{1}{\theta+1}+C\theta$, *que é o integral procurado.*

Para $\theta=3$; $\rho=1/2$, *vem* $C=0$. *A direcção assintótica da linha* $\rho^2=\frac{1}{\theta+1}$ *é* $\theta=-1$; *como* $(S_T)_{\theta=-1}=0$, *a equação da assintota é* $\operatorname{tg}\theta=-\operatorname{tg}1$, *ou* $\operatorname{sen}(\theta+1)=0$.

1486—Integrar a equação $y'=(x-1)\,y''+1/2y''^2$, e determinar a evoluta da linha integral que passa pela origem onde é tangente ao eixo das abscissas. R: *Trata-se duma equação incompleta. Fazendo* $y'=z$, $y''=z'$, *obtêm-se a equação de Clairaut* $z=xz'-z'+z'^2/2$, *cujo integral geral é* $z=xC-C+C^2/2$. *Por uma quadratura obtêm-se* $y=C/2\,.\,x^2+(C^2/2-C)\,x+C_1$, *que é o integral geral procurado.*

As condições iniciais dão-nos $C=2$, $C_1=0$. *A linha integral tem, pois, para equação* $y=x^2$, *e a sua evoluta é* $(Y-1/2)^3=27/16\,.\,X^2$.

Nota — *A equação dada admite ainda a solução* $y=-\frac{(x-1)^3}{6}+C_2$, *correspondente à solução singular da equação de Clairaut. Na determinação da evoluta não se considerou, por não ter interêsse, a solução correspondente à determinação* $C=0$, $C_1=0$.

1487 — Calcular $\iint_D \frac{xy}{x+1}\,dx\,dy$. O domínio D é limitado pelas linhas $y^2=2x$; $xy=4$; $x=4$; $y=0$.

R: *Tem-se* $I=\iint_D\frac{xy}{x+1}dx\,dy=\int_0^2\frac{x}{x+1}dx\int_0^{\sqrt{2x}}y\,dy+\int_2^4\frac{x}{x+1}dx\int_0^{4/x}y\,dy=\int_0^2\frac{x^2}{x+1}dx+\int_2^4\frac{8}{x(x+1)}dx=$ $=9\log 3+8\log 2/5$. *Podia integrar-se em primeiro lugar em ordem a* x; *nesse caso viria*
$$I=\int_0^1 y\,dy\int_{y^2/2}^4\frac{x}{x+1}dx+\int_1^2 y\,dy\int_{y^2/2}^{4/y}\frac{x}{x+1}dx.$$

1488 — Sendo $x=u^3+3u$; $y=u^3-3u$; $z=3u^2$ as equações paramétricas duma linha, determinar o comprimento do arco, a partir da origem, e verificar a 1.ª fórmula de Frenet $\frac{\mathbf{n}}{R}=\frac{dt}{ds}$. R: *Tem-se* $ds=3\sqrt{2}\,(u^2+1)\,du$ *e, portanto,* $s=\sqrt{2}\,(u^3+3u)$. *Como* $A=-18(u^2+1)$, $B=18(u^2-1)$, $C=36u$, *vem* $R=3(u^2+1)^2$. *Por outro lado, é*
$$\mathbf{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{i}+\frac{u^2-1}{u^2+1}\mathbf{j}+\frac{2u}{u^2+1}\mathbf{k}\right)$$
e
$$\mathbf{b}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\mathbf{i}+\frac{u^2-1}{u^2+1}\mathbf{j}+\frac{2u}{u^2+1}\mathbf{k}\right);$$
portanto
$$\mathbf{n}=\mathbf{b}\wedge\mathbf{t}=\frac{2u}{u^2+1}\mathbf{j}+\frac{1-u^2}{u^2+1}\mathbf{k}$$
e
$$\frac{dt}{ds}=\frac{2u}{3(u^2+1)^3}\mathbf{j}+\frac{1-u^2}{3(u^2+1)^3}\mathbf{k}.$$
Atendendo à expressão de R *a verificação é imediata.*

Soluções dos n.ºs 1485 a 1488 de A. Pereira Gomes.

I. S. C. E. F. — Cálculo — Exame Final — 10-X-1942.

1489 — Determinar as curvas planas cujo comprimento de arco é dado pela equação $s=a\cdot\frac{dy}{dx}$.

R: *Tem-se* $s=a\cdot y'$ *ou* $\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx=a\cdot y'$ *e, derivando em ordem a* x *e quadrando,* $1+y'^2=a^2y''^2$. *Substituindo* y' *por* t *e, portanto,* y'' *por* t', *vem* $1+t^2=a^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$ *donde* $a\frac{dt}{dx}=\sqrt{1+t^2}$ *ou, por separação das variáveis,* $\frac{a\,dt}{\sqrt{1+t^2}}=dx$ *e, integrando,* $-a\log\left[\sqrt{1+t^2}-t\right]=x+c_1$. *Resolvendo em ordem a* t *vem, sucessivamente* $\sqrt{1+t^2}=t+e^{-\frac{x+c_1}{a}}$, $1=2te^{-\frac{x+c_1}{a}}+e^{-2\frac{x+c_1}{a}}$, $t=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[e^{\frac{x+c_1}{a}}-e^{-\frac{x+c_1}{a}}\right]$.

Separando as variáveis, $dy=\operatorname{senh}\frac{x+c_1}{a}dx$ *e in-*

tegrando, vem $y+c_2=a\cosh\frac{x+c_1}{a}$ *que é a equação das curvas que satisfazem ao enunciado.*

1490 — Determine a, b e c de modo tal que a curva $ay^2-ax^3+bx^2-4(a+1)x+c=0$ tenha uma reversão no ponto (2,0). R: *Tem-se* $\frac{\partial f}{\partial x}=-3ax^2+2bx-4(a+1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2ay$, $r=-6ax+2b$, $s=0$, $t=2a$. *Para que o ponto* (2,0) *seja um ponto de reversão deverá ser*

$$\left\{\begin{array}{l} f_{2,0}\equiv-16a+4b+c-8=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_{2,0}}\equiv-16a+4b+4=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y_{2,0}}\equiv 0 \\ (s^2-rt)_{2,0}\equiv 24a^2-4ab=0 \end{array}\right.$$

donde $a=-1/2$, $b=-3$, $c=12$.

1491 — As equações $xy+zt=1$, e $\frac{x+y}{z+t}=-1$ definem z e t como funções de x e y. Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$. R: *Derivando o sistema* $\left\{\begin{array}{l} xy+zt=1 \\ x+y+z+t=0\end{array}\right.$ *duas vezes em ordem a* x, *e resolvendo os sistemas obtidos, obtêm-se* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z-y}{t-z}$, $\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{y-t}{t-z}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{(y-z)(y-t)}{(t-z)^3}$. *Notando que o sistema dado é invariante para a substituição* $\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ y & x & t & z\end{pmatrix}$, *tem-se, imediatamente* $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=2\frac{(x-t)(x-z)}{(z-t)^3}$.

Soluções dos n.os 1489 a 1491 de A. Sá da Costa.

I. S. T. — Cálculo — Exame final — Outubro, 1942

1492 — Dada a congruência de parábolas $P)$ $a(x-y)^2+2b(x+y)+1=0$; 1.º mostrar que as curvas da congruência que são tangentes a um dos eixos coordenados são também tangentes ao outro; 2.º determinar a congruência de tôdas as parábolas tangentes a ambos os eixos coordenados e, entre elas, a família a um parâmetro das que pertencem à congruência P.

1493 — Sendo P_0 um ponto fixo duma curva plana qualquer e P um ponto variável sôbre a mesma curva, mostrar que a equação diferencial da curva descrita pelo meio da corda $\overline{P_0P}$ se integra, como a equação de Clairaut, substituindo a derivada por uma constante arbitrária. R: *Seja a curva de equação* $y=f(x)$ *e os pontos* $P_0[a, f(a)]$ *e* $P[x, f(x)]$. *Seja* $M(X, Y)$ *o ponto médio da corda* $\overline{P_0P}$. *Tem-se* $\left\{\begin{array}{l} 2X=a+x \\ 2Y=f(a)+f(x).\end{array}\right.$ *Eliminando* x *entre estas equações, obtêm-se a equação da família de curvas a que se refere o enunciado* $2Y=f(a)+f(2X-a)$. *Para obter a equação diferencial da família, derivemos ambos os membros desta equação em ordem a* X *e eliminemos o parâmetro* a *entre as duas equações*

$$\left\{\begin{array}{l} 2Y=f(a)+f(2X-a) \\ Y'=f'(2X-a)\rightarrow \qquad a=2X-\varphi(Y') \end{array}\right.$$

donde $2Y=f[2X-\varphi(Y')]+f[\varphi(Y')]$. *Como imediatamente se reconhece o integral geral desta equação obtêm-se substituindo* Y' *por uma constante arbitrária* c. *Com efeito obtêm-se* $2Y=f[2X-\varphi(c)]+f[\varphi(c)]$ *ou* $2Y=f(2X-a)+f(a)$.

1494 — Determinar as curvas planas cujo comprimento de arco é dado pela equação $s=(y^2+mx^2)^{1/2}$. R: *Tem-se* $\int_a^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=(y^2+mx^2)^{1/2}$. *Derivando em ordem a* x *e quadrando vem* $1+y'^2=\frac{m^2x^2}{y^2+mx^2}$ *ou* $1+p^2=\frac{m^2}{(y/x)^2+m}$ *que é uma equação homogénea e cuja integração pode fazer-se depois de resolvê-la em ordem a* p, *ou a* y/x.

Soluções dos n.os 1492 a 1494 de A. Sá da Costa

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — Mecânica Racional — Exame Final — Junho de 1942.

1495 — *a)* Ache os momentos de inércia em relação aos planos coordenados, do volume homogéneo limitado pelo paraboloide $x^2+y^2=2pz$, e pelo plano $z=h$. *b)* A partir dêstes momentos, escreva, justificando, a equação do seu elipsoide de inércia, relativo à origem dos eixos coordenados. *c)* A partir desta equação, ache o momento de inércia do mesmo volume, em relação à recta: $x=2\mu$, $y=\mu$, $z=-2\mu$. R: *Empregando coordenadas cilíndricas, o elemento de volume, é:* $dV=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$. *a) Momento de inércia em relação a*

$$XOY:\ I_{xy}=\iiint_V\lambda z^2\,dV=\lambda\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h z^2\,dz\int_0^{\sqrt{2pz}}\rho\,d\rho=$$

$=\frac{\pi\lambda p h^4}{2}$, $I_{xz}=\iiint_V \lambda y^2 dV=\lambda\iiint_V \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi\cdot dV=$

$=\lambda\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\varphi d\varphi\int_0^h dz\int_0^{\sqrt{2pz}}\rho^3 d\rho=\lambda\pi p^2\frac{h^3}{3}\cdot$ *Por razões evidentes de simetria é* $I_{yz}=I_{xz}$. *Querendo exprimir estes momentos em função da massa do paraboloide basta calcular esta. Tem-se* $\iiint_V \lambda dV=\pi\lambda p h^2$.

Donde: $I_{xy}=\frac{Mh^2}{2}$, $I_{xz}=I_{yz}=\frac{Mph}{3}\cdot$ *b) A equação do elipsoide de inércia relativo à origem é:* Ax^2+ $+By^2+Cz^2-2Dyz-2Exz-2Fxy=1$ *onde* A, B, C *são os momentos de inércia, do sistema, relativos, respectivamente, aos eixos dos* XX, *dos* YY *e dos* ZZ, *e* D, E, F *são os produtos de inércia:* $D=\iiint_V \lambda yz\, dV$, *etc.. No nosso caso o elipsoide de inércia é um elipsoide de revolução em tôrno do eixo dos* ZZ, *visto o ser o sistema material considerado, pois que, sendo todos os planos passando pelo eixo dos* ZZ, *planos de simetria do sistema, são-no também do elipsoide de inércia do sistema relativo a qualquer ponto do eixo dos* ZZ, *e portanto, em particular, do relativo à origem. Será então:* $A=B$, $D=E=F=0$; *mas* $A=I_x=I_{xy}+I_{xz}=$ $=\frac{Mh^2}{2}+\frac{Mph}{3}$, $C=I_z=I_{xz}+I_{yz}=\frac{2Mph}{3}\cdot$ *A equação do elipsoide de inércia será então*

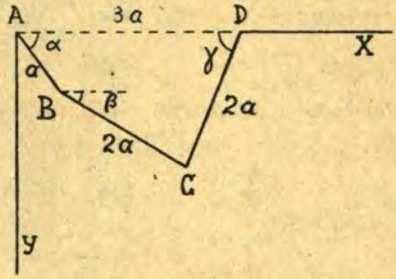
$$\left(\frac{Mh^2}{2}+\frac{Mph}{3}\right)(x^2+y^2)+\frac{2}{3}Mph\,z^2=1$$

ou: $(3h+2p)(x^2+y^2)+4pz^2=\frac{6}{Mh}\cdot$ *c) O momento de inércia do sistema dado, em relação à recta considerada é:* $I=\frac{1}{\overline{OK}^2}$, *sendo* K *o ponto aonde a recta encontra o elipsoide de inércia. Seja* μ_1 *o valor do parâmetro* μ *correspondente ao ponto* K.

Será: $I=\frac{1}{4\mu_1^2+\mu_1^2+4\mu_1^2}=\frac{1}{9\mu_1^2}$ *Temos então:*

$(3h+2p)(4\mu_1^2+\mu_1^2)+4p\mu_1^2=\frac{6}{Mh}$ *donde:* $\mu_1^2=$ $=\frac{6}{Mh(15h+14p)}$ *e portanto* $I=\frac{Mh(15h+14p)}{54}$.

1496 — Um sistema material é formado por 3 barras articuladas, homogéneas e do mesmo material. A sua posição é a indicada na figura. Os extremos *A* e *D* estão articulados em dois pontos fixos situados na mesma horizontal. Determinar a relação entre os ângulos α, β, γ, característica da posição de equilíbrio do sistema.



R: *O sistema tem um único grau de liberdade, como se verifica fàcilmente, notando que a cada valor dado, por exemplo ao ângulo* α, *a posição do sistema fica completamente determinada. Então, aquêles* 3 *ângulos não são independentes, devendo ser possível exprimir dois dêles em função do* 3.º; *por outras palavras, devem existir sempre* 2 *relações entre aquêles* 3 *ângulos. Tomemos os eixos coordenados indicados. As* 2 *relações que procuramos são as que exprimem que a soma das projecções das* 3 *barras sôbre* OX *é igual a* 3a, *e sôbre* OY *é nula:*

$$\begin{cases} a\cos\alpha+2a\cos\beta+2a\cos\gamma=3a \\ a\operatorname{sen}\alpha+2a\operatorname{sen}\beta-2a\operatorname{sen}\gamma=0 \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} \cos\alpha+2\cos\beta+2\cos\gamma=3 \\ \operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\beta-2\operatorname{sen}\gamma=0. \end{cases} \qquad (1)$$

As fôrças que actuam no sistema são os pesos das barras, aplicados nos respectivos centros de gravidade, situados, em virtude da homogeneidade das mesmas, nos pontos médios destas. Tem-se então:

Barra AB *Pêso* **P** $\begin{cases} O \\ P \end{cases}$ *aplicado em* $\begin{cases} x_1=a/2\cdot\cos\alpha \\ y_1=a/2\cdot\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

Barra BC *Pêso* 2**P** $\begin{cases} O \\ 2P \end{cases}$ *aplicado em* $\begin{cases} x_2=a\cos\alpha+ \\ \quad +a\cos\beta \\ y_2=a\operatorname{sen}\alpha+ \\ \quad +a\operatorname{sen}\beta \end{cases}$

Barra CD *Pêso* 2**P** $\begin{cases} O \\ 2P \end{cases}$ *aplicado em* $\begin{cases} x_3=3a-a\cos\gamma \\ y_3=a\operatorname{sen}\gamma. \end{cases}$

Pelo princípio dos trabalhos virtuais, a posição de *equilibrio será aquela em que:* $P\times\delta P_1+2P\times\delta P_2+2P\times\delta P_3=0$, *sendo* δP_1, δP_2, δP_3 *deslocamentos virtuais de* $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, *compatíveis com as ligações. Será então:* $P\delta y_1+2P\delta y_2+2P\delta y_3=0$ *ou* $\delta y_1+2\delta y_2+2\delta y_3=0$. *Mas* $\delta y_1=a/2\cdot\cos\alpha\cdot\delta\alpha$, $\delta y_2=a\cos\alpha\cdot\delta\alpha+a\cos\beta\ \delta\beta$, $\delta y_3=a\cos\gamma\cdot\delta\gamma$. *Será então* $1/2\cdot\cos\alpha\ \delta\alpha+2\cos\alpha\cdot\delta\alpha+2\cos\beta\,\delta\beta+2\cos\gamma\cdot\delta\gamma=0$ *ou* $5\cos\alpha\cdot\delta\alpha+4\cos\beta\cdot\delta\beta+4\cos\gamma\cdot\delta\gamma=0$. *As variações dos parâmetros* α, β, γ, *não são independentes visto que estes devem verificar constantemente as relações*(1). *Ter-se-á então, diferenciando estas relações:* $-\operatorname{sen}\alpha\cdot\delta\alpha-2\operatorname{sen}\beta\cdot\delta\beta-2\operatorname{sen}\gamma\cdot\delta\gamma=0$, $\cos\alpha\cdot\delta\alpha+2\cos\beta\cdot\delta\beta-2\cos\gamma\cdot\delta\gamma=0$. *Eliminando* 2 *das variações, por exemplo* $\delta\beta$ *e* $\delta\gamma$, *empregando o método dos multiplicadores indeterminados, tem-se sucessivamente:* $(5\cos\alpha-\lambda_1\operatorname{sen}\alpha+\lambda_2\cos\alpha)\,\delta\alpha+(4\cos\beta-2\lambda_1\operatorname{sen}\beta+2\lambda_2\cos\beta)\,\delta\beta+(4\cos\gamma-2\lambda_1\operatorname{sen}\gamma-2\lambda_2\cos\gamma)\,\delta\gamma=0$, *e determina-se* λ_1 *e* λ_2 *de modo que os coeficientes de* $\delta\beta$ *e* $\delta\gamma$ *sejam nulos. Será:*

$$\begin{cases}(4+2\lambda_2)\cos\beta-2\lambda_1\operatorname{sen}\beta=0\\(4-2\lambda_2)\cos\gamma-2\lambda_1\operatorname{sen}\gamma=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4+2\lambda_2-2\lambda_1\operatorname{tg}\beta=0\\4-2\lambda_2-2\lambda_1\operatorname{tg}\gamma=0\end{cases}$$

donde $\lambda_1=\dfrac{4}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}$ *e* $\lambda_2=\dfrac{2\operatorname{tg}\beta-2\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}$. *Virá então:* $5\cos\alpha-\lambda_1\operatorname{sen}\alpha+\lambda_2\cos\alpha=0$ *ou* $-4\operatorname{tg}\alpha+7\operatorname{tg}\beta+3\operatorname{tg}\gamma=0$ *que é a relação pedida.*

Soluções dos n.os 1495 e 1496 de F. Veiga de Oliveira.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — **1.º exame de freqüência, 25-III-1943.**

1497 — Demonstre que, havendo num sólido, — em determinado instante — três pontos não situados em linha recta com a mesma velocidade, o movimento instantâneo é de translação.

1498 — Que relação existe entre a união de Oldham e os mecanismos que denominámos haste-manivela e elipsógrafo?

1499 — Durante o tremor de terra da Califórnia Setentrional, em 11 de Setembro de 1938, a componente SW-NE do acelerógrafo de Ferndale registou um movimento de período igual a 0,18 s com a aceleração máxima de 93 cm/s^2.

Admitindo, como é uso, que o movimento se pode considerar harmónico simples, determine a sua amplitude.

1500 — O «bol» duma super-centrífuga Sharples, usada na depuração do azeite, gira com a velocidade angular constante de 18.000 r/m.

Determine a aceleração de um ponto do «bol» situado a 2 cm do eixo de rotação.

Esta aceleração é igual a quantas vezes a da gravidade?

1501 — Um sólido move-se em relação ao triedro tri-rectângulo $O\,\vec{e}_1\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3$. Em determinado instante, as coordenadas vectoriais do torsor velocidade instantânea, em relação ao ponto Q do eixo de Mozzi, são $Q'=5\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$ e $\vec{\Omega}=-10\vec{e}_1+2\vec{e}_2-2\vec{e}_3$. Determine o passo do movimento helicoidal tangente ao movimento efectivo do sólido no instante considerado.

1502 — Um veio gira uniformemente com a velocidade angular de 300 r/m e comanda, por intermédio de uma união universal, outro veio com o qual faz um ângulo de 30°. Calcule *a*) a velocidade angular máxima do veio conduzido; *b)* a oscilação da razão de transmissão.

1503 — Demostre que, no mecanismo de Scott Russell, se a manivela tiver movimento uniforme, o ponto guiado rectilìneamente pelo mecanismo está animado de movimento oscilatório harmónico.

1504 — Um ponto está animado de movimento uniformemente variado. Sabe-se que, durante o 4.º segundo decorrido após a origem dos tempos, percorreu o dôbro do caminho andado durante os três primeiros segundos. Determine a aceleração tangencial em função da velocidade inicial.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas - **Alguns pontos do 2.º exame de freqüência, 16-VI-1943.**

1505 — Considere um sistema material qualquer de baricentro G. Considere ainda os pontos O_1 e O_2. Demonstre que, se o ângulo $G\hat{O}_1O_2$ fôr recto, o momento de inércia do sistema em relação a O_2 é igual à soma do seu momento quadrático em relação a O_1 com o produto da sua massa total pelo quadrado da distância $\overline{O_1O_2}$.

1506 — Considere o campo de fôrças definido pela função $\vec{F}(Q)=k(Q-O)$, em que k é uma constante e O um ponto fixo (fôrça repulsiva proporcional à distância). Determine as linhas de fôrça do campo e verifique que êste admite a função de fôrças $U=k/2\,.\,(Q-O)^2$.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1507 — Resolver o sistema de equações:

$$x^2+y^2-(x+y)=48\,,\quad x+y+xy=31\,.$$

1508 — Sôbre as três arestas de um triedro trirectângulo marquem-se três comprimentos $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$ e trace-se o triângulo $[ABC]$. Determinar: 1.º — a expressão da área dêste triângulo; 2.º — a distância $\overline{OD}=d$ do ponto O ao plano ABC; 3.º — o que devem ser b e c, quando sendo dados a e d, para que o triângulo $[ABC]$ tenha uma superfície dada.

Problemas 1507 e 1508 propostos por J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

1509 — Mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} i\,(i+1)\cdots(i+p)=\frac{n\,(n+1)\cdots(n+p+1)}{p+2}\,.$$

1510 — Pelo ponto médio do lado AB dum triângulo $[ABC]$ traça-se uma recta arbitrária; designando por N e P os pontos de encontro dessa recta com BC e AC respectivamente, mostrar que têm lugar as relações:

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{NC}}{\overline{CP}}\quad\text{e}\quad\frac{\overline{MN}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}\,\frac{\overline{PN}}{\overline{PC}}\,.$$

Problemas 1509 e 1510 propostos por José Morgado (do Pôrto).

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1081 — Mostrar que 2^{1000}, escrito no sistema decimal, termina em 76. R: *De* $(\dot{10}0+16)\,16=\dot{10}0+56$, $(\dot{10}0+16)\,16^2=\dot{10}0+96$, $(\dot{10}0+16)\,16^3=\dot{10}0+36$, $(\dot{10}0+16)\,16^4=\dot{10}0+76$, $(\dot{10}0+16)\,16^5=\dot{10}0+16$, $(\dot{10}0+16)\,16^6=\dot{10}0+56$, *resulta que:* $(\dot{10}0+16)\,16^n$ *terminará em* 56, 96, 36, 76 *ou* 16 *conforme o resto da divisão de* n *por* 5 *fôr respectivamente* $1, 2, 3, 4$ *ou* 0. *Ora* $2^{1000}=2^4\cdot 2^{996}=16\cdot(2^4)^{249}=(0+16)\,16^{249}=(\dot{10}0+16)\,16^{249}$. *Mas,* 249 *dividido por* 5 *dá de resto* 4. *Logo* 2^{1000} *no sistema decimal terminará em* 76.

1083 — Mostrar que $1000\,!$ contém 994 vêzes o factor 2. (*) R: *Na decomposição* $1000\,!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot999\cdot1000$ *há* 500 *factores pares. Excluindo então os factores ímpares, visto êstes não conterem o factor* 2, *temos:* $2^{500}\cdot 500\,!$ *Procedendo do mesmo modo para* $500\,!$ *temos* $2^{500}\cdot2^{250}\cdot250\,!$ *e assim sucessivamente, achamos* $2^{500}\cdot2^{250}\cdot2^{125}\cdot2^{62}\cdot2^{31}\cdot2^{15}\cdot2^{7}\cdot2^{3}\cdot2=2^{994}$.

(*) É êste o enunciado correcto do problema proposto n.º 1083 que figura incorrectamente enunciado no n.º 11 da «Gazeta de Matemática».

1181 — Sendo $A=\operatorname{sen}2x-k\operatorname{sen}x-\cos x+k$, e $B=\cos 2x-k\cos x-\operatorname{sen}x$, exprimir $\dfrac{A}{B}$ em função de $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, e mostrar que é igual a $\dfrac{t-1}{t+1}$. R: *Atendendo a que* $\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cdot\cos x$ *e* $\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$ *pode fazer-se* $\dfrac{A}{B}=\dfrac{a+bk}{c+dk}$ *onde* $a=\cos x(2\operatorname{sen}x-1)$, $b=1-\operatorname{sen}x$, $c=\cos^2 x-\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x+1)$, $d=-\cos x$. *A condição necessária e suficiente para que* A/B *seja independente de* k *é que* $a/c=b/d$, *isto é,* $ad-bc=0$. *Ora, neste caso* $ad-bc=-\cos^2 x\,(2\operatorname{sen}x-1)-[\cos^2 x\,(1-\operatorname{sen}x)-\operatorname{sen}x\,(\operatorname{sen}x+1)\,(1-\operatorname{sen}x)]=-2\operatorname{sen}x\cos^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x+\operatorname{sen}x\cos^2 x+\operatorname{sen}x\cos^2 x=0$. *Fica assim provado que* A/B *é independente de* k. *Façamos então* $k=0$, *virá:*

$$\frac{A}{B}=\frac{\cos x\,(2\operatorname{sen}x-1)}{\cos^2 x-\operatorname{sen}x\,(\operatorname{sen}x+1)}$$ *e atendendo a que* $$\operatorname{sen}x=\frac{2\operatorname{tg}x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}=\frac{2t}{1+t^2}$$ *e* $$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$ *teremos feitas as necessárias reduções:*

$$\frac{A}{B}=\frac{t^4-4t^3+4t-1}{t^4-2t^3-6t^2-2t+1}=\frac{(t^3-3t^2-3t+1)(t-1)}{(t^3-3t^2-3t+1)(t+1)}=$$
$$=\frac{t-1}{t+1}.$$

Soluções dos n.os 1081, 1083 e 1181 de R. Quaresma Rosa.

1182 — Os 3 lados de um triângulo e uma das alturas são 4 têrmos consecutivos de uma progressão geométrica. Dada uma dessas 4 quantidades, calcular as outras. R: *Sejam* a, b *e* c *os lados dum triângulo por ordem decrescente de grandeza e* h *a altura. Por hipótese é* $\div\!\div a:b:c:h$, *donde:* $a\times h=b\times c$. *Trata-se dum triângulo rectângulo em que* a *é a hipotenusa,* h *a altura respectiva,* b *e* c *os catetos. Teremos para resolver o problema:* $a^2=b^2+c^2$, $b^2=a\cdot c$, $c^2=b\cdot h$, *sistema de três equações a três incógnitas, visto ser conhecido um dos elementos. A razão da progressão que fàcilmente se determina, atribuindo um valor qualquer a um dos lados é* $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Solução de Álvaro Simões (de Sangalhos).

1183 — Dado o triângulo isósceles $[ABC]$ rectângulo em A, e a recta XX', paralela a AC e passando por B, determinar o lugar geométrico das posições do vértice A, quando B se desloca sôbre XX', mantendo-se fixo o vértice C, e conservando-se o triângulo isósceles e rectângulo em A. R: *Tracemos pelo vértice* C *uma recta* YY' *perpendicular a* XX' *e seja* O *o ponto de intersecção. Designemos por* P_i *e* P_i' *respectivamente os pés das perpendiculares baixadas dos pontos* A_i *sôbre* XX' *e* YY'. *Os triângulos rectângulos* $A_i\overset{\triangle}{P}B_i$ *e* $A_i\overset{\triangle}{P'}C$ *são iguais. Com efeito* $\overline{A_iB_i}=\overline{A_iC}$ *por hipótese e os ângulos* $A_i\widehat{B}_iP_i$ *e* $A_i\widehat{C}P_i'$ *também são iguais, visto terem os lados perpendiculares. Logo* $\overline{A_iP_i}=\overline{A_iP_i'}$. *Os pontos* A_i *mantêm-se eqüidistantes de* XX' *e* YY'. *O lugar geométrico dos pontos* A_i *é, pois, a bissectriz do ângulo recto do triângulo dado.*

Solução de Álvaro Simões (de Sangalhos)

1249 - Determinar a equação geral das superfícies S tais que, designando por $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ os pontos em que a normal num ponto M duma delas encontra respectivamente os planos YOZ, ZOX e XOY, a razão anarmónica $(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},M)=k$. R: *Sejam* $\overline{X}_x$, $\overline{Y}_x$, $\overline{Z}_x$ *e* x *abcissas de* $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ *e* M. *Das equações da normal* $\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$, *tira-se* $\overline{X}_x=0$, $\overline{Y}_x=x-py/q$, *e* $\overline{Z}_x=x+pz$. *Tem-se*
$$(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},M)=\frac{\dfrac{\overline{Z}_x-\overline{X}_x}{\overline{Z}_x-\overline{Y}_x}}{\dfrac{x-\overline{X}_x}{x-\overline{Y}_x}}=\frac{(x+pz)\dfrac{p}{q}y}{xpz+x\dfrac{p}{q}y}=k,$$
donde se tira $yxp-kxzq=(k-1)xy$. *Integremos estas equações* $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{-kxz}=\frac{dz}{(k-1)xy}$. *Do confronto das duas primeiras equações resulta* $kx^2+y^2=c_1$. *Multiplicando ambos os termos das 3 frações, respectivamente por* x, y *e* z, *e tendo em vista uma propriedade das proporções vem* $xdx+ydy+zdz=0$, *que dá* $x^2+y^2+z^2=c_2$. *Portanto a equação geral das superfícies* S *é* $x^2+y^2+z^2=\varphi(kx^2+y^2)$.

Solução de Laureano Barros (do Pôrto).

1252 — Lugar do centro dum círculo que se desloca de tal forma que os seus eixos radicais com dois círculos fixos passam por dois pontos fixos. R: *Sejam* C_1 *e* C_2 *os centros dos dois circulos fixos,* R_1 *e* R_2 *os respectivos raios;* P_1 *e* P_2 *os dois pontos fixos, definidos pelas distâncias* $P_1P_2=r$, $P_1C_1=d_1$ *e* $P_2C_2=d_2$; C *o centro de um dos circulos do lugar.*

Supondo R *o raio dêste último circulo, tem-se, pelas propriedades do eixo radical:*

$$\begin{cases} r_1^2-R^2=d_1^2-R_1^2=T_1^2 \\ r_2^2-R^2=d_2^2-R_2^2=T_2^2 \end{cases}$$

Eliminando R, *vem* $r_1^2-r_2^2=T_1^2-T_2^2$. *Está assim reduzido o problema a achar-se o lugar dos pontos* C *tais que a diferença dos quadrados das suas distâncias a* P_1 *e* P_2 *é constante e igual a* $T_1^2-T_2^2$. *Êsse lugar é, como fàcilmente se reconhece, uma recta perpendicular a* P_1P_2; *a intersecção do lugar com* P_1P_2 *dista de* P_1 *de* $\frac{T_2^2-T_1^2-r^2}{2r}$.

Solução de Laureano Barros (do Pôrto).

Enviou também solução correcta: José Morgado (do Pôrto)

1254 — Prove que

$$\sum_{r=0}^{n-1}2^r\,\mathrm{tg}\,(2^r x)=\mathrm{cotg}\,x-2^n\,\mathrm{cotg}\,(2^n x).$$ R:

Da relação $\mathrm{cotg}\,2x=\frac{1-\mathrm{tg}^2x}{2\,\mathrm{tg}\,x}$ *ou* $2\,\mathrm{cotg}\,2x=\mathrm{cotg}\,x-\mathrm{tg}\,x$ *resulta* $\mathrm{tg}\,x=\mathrm{cotg}\,x-2\,\mathrm{cotg}\,2x$. *Mudando* x *em* 2^rx: $\mathrm{tg}\,(2^rx)=\mathrm{cotg}\,(2^rx)-2\,\mathrm{cotg}\,(2^{r+1}x)$ *ou* $2^r\,\mathrm{tg}\,(2^rx)=2^r\,\mathrm{cotg}\,(2^rx)-2^{r+1}\,\mathrm{cotg}\,(2^{r+1})\,x$. *Dando a* r *os valores* $0,1,\cdots,n-1$, *e somando ordenadamente, vem*

$$\sum_{r=0}^{n-1}2r\,\mathrm{tg}\,(2^rx)=\mathrm{cotg}\,x-2^n\,\mathrm{cotg}\,(2^nx),\quad \text{c. q. p.}$$

Solução de José Morgado (do Pôrto).

Enviou também solução correcta: Laureano Barros (do Pôrto).

1335 — Seja $\overline{OA_0}$ um segmento rectilíneo de comprimento igual ao dôbro do diâmetro de uma circunferência dada. Marque-se, a partir de $\overline{OA_0}$, o ângulo $A_0\hat{O}A_1=45^o$, e outro $\hat{O}_0AA_1=90^o$; a partir de $\overline{OA_1}$, o ângulo $A_1\hat{O}A_2=\frac{1}{2}\cdot 45^o$, e outro $O\hat{A}_1A_2=90^o$; a partir de $\overline{OA_2}$, o ângulo $A_2\hat{O}A_3=\frac{1}{2^2}\cdot 45^o$, e outro $O\hat{A}_2A_3=90^o$; e assim sucessivamente, de modo que seja sempre $A_{n-1}\hat{O}A_n=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot 45^o$ e $O\hat{A}_{n-1}A_n=90^o$. Calcular $\lim_{n\to\infty}\overline{OA_n}$, e verificar que é perpendicular a $\hat{O}A_0$ e igual ao perímetro da circunferência dada. R: *Do triângulo rectângulo* $A_{i-1}\hat{O}A_i$ *tira-se* $\overline{OA_i}=\frac{\overline{OA_{i-1}}}{\cos 45^o/2^{i-1}}=\overline{OA_{i-1}}\cdot\frac{2\operatorname{sen} 45^o/2^{i-1}}{\operatorname{sen} 45^o/2^{i-2}}$. *Atribuindo a* i *os valores* $1,2,\cdots,n$, *multiplicando ordenadamente as igualdades obtidas e simplificando, vem* $\overline{OA_n}=\overline{OA_0}\cdot\frac{2^n\operatorname{sen} 45^o/2^{n-1}}{\operatorname{sen} 90^o}=\overline{OA_0}\cdot 2^n\operatorname{sen}45^o/2^{n-1}$ $\lim_{n\to\infty}\overline{OA_n}=\overline{OA_0}\cdot\lim_{n\to\infty}2^n\operatorname{sen}\pi/2^{n+1}=\overline{OA_0}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\pi/2^{n+1}}{\pi/2^{n+1}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\overline{OA_0}$. *Portanto, o limite pedido é igual ao perímetro da circunferência dada. Notando que a soma dos ângulos* $A_{i-1}\hat{O}A_i$, *soma dos termos duma progressão geométrica decrescente, é* $\frac{\pi/4}{1-1/2}=\frac{\pi}{2}$ *vê-se que* $\overline{OA_n}$, *no limite, é perpendicular a* $\overline{OA_0}$.

Solução de José Morgado (do Pôrto), completada por R. Quaresma Rosa.

Enviaram também soluções correctas: Alberto Pais (de Lisboa), J. S. Faria de Abreu (de Penafiel) e Paul Richard (de Portalegre).

1336 — Mostrar que sendo $2^x\cdot 3^y=3^x\cdot 4^y=6$, é também $x^2-2y^2=2x-3y$. R: *De* $2^x\cdot 3^y=3^x\cdot 2^{2y}=2\cdot 3$, *resultam as igualdades* $2^{x-1}\cdot 3^{y-1}=3^{x-1}\cdot 2^{2y-1}=1$. *Aplicando logaritmos:* $(x-1)\log 2=-(y-1)\log 3$, $(2y-1)\log 2=-(x-1)\log 3$. *Dividindo membro a membro,* $\frac{x-1}{2y-1}=\frac{y-1}{x-1}$, *ou* $x^2-2y^2=2x-3y$.

Solução de José Morgado (do Pôrto).

Enviou também solução correcta Paul Richard (de Portalegre).

1337 — Demonstrar a identidade $8\operatorname{sen}10^o\cdot\operatorname{sen}50^o\cdot\operatorname{sen}70^o=1$. R: *A igualdade pode, evidentemente escrever-se* $8\operatorname{sen}10^o\cos 10^o\operatorname{sen}50^o\cos 50^o\operatorname{sen}70^o\cos 70^o=\cos 10^o\cos 50^o\cos 70$ *ou* $\operatorname{sen}20^o\operatorname{sen}100^o\operatorname{sen}140^o=\cos 10^o\cos 50^o\cos 70^o$, *igualdade verdadeira, em virtude de ser:* $\operatorname{sen}20^o=\cos 70^o$, $\operatorname{sen}100^o=\cos 10^o$ *e* $\operatorname{sen}140^o=50^o$.

Solução de José Morgado (do Pôrto).

Enviaram também soluções correctas: Alberto Pais (de Lisboa), Álvaro Simões (de Sangalhos), J. S. Faria de Abreu (de Penafiel), M. Guerra dos Santos (de Lisboa) e Paul Richard (de Portalegre).

1338 — Resolver a equação $\operatorname{sen}5x\cdot\cos 3x=\operatorname{sen}9x\cdot\cos 7x$. R: *Atendendo a que* $2\operatorname{sen}5x\cos 3x=\operatorname{sen}8x+\operatorname{sen}2x$ *e* $2\operatorname{sen}9x\cos 7x=\operatorname{sen}16x+\operatorname{sen}2x$, *a equação proposta transforma-se em* $\operatorname{sen}8x=\operatorname{sen}16x$ *ou* $\operatorname{sen}8x=2\operatorname{sen}8x\cos 8x$ *ou* $\operatorname{sen}8x(1-2\cos 8x)=0$ *logo* $\operatorname{sen}8x=0\to x=k\pi/8$ *e* $\cos 8x=1/2\to x=k\pi/4\pm\pi/24$.

Solução de M. Carlos Guerra dos Santos (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Álvaro Simões (de Sangalhos), José Morgado (do Pôrto) e Paul Richard (de Portalegre).

1339 Três números x, y e z estão em progressão aritmética, estando $x+y$, y e $y+z$ em progressão geométrica. Calcular êsses números sabendo ainda que a soma dos quadrados dos extremos x e z é 8. Calcular a razão das duas progressões. R: *O enunciado traduz-se pelas equações* $\begin{cases} zy=x+z\\ y^2=(x+y)(y+z)\\ x^2+z^2=8,\end{cases}$ *a segunda das quais é equivalente a* $xy+yz+zx=0$. *Então, tem-se sucessivamente* $9y^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2=8+y^2$ *donde* $y=\pm 1$. *Para* $y=+1$, *vem* $x+z=2$, $xz=-2$, *donde, a solução* $x=1\pm\sqrt{3}$, $y=1$, $z=1\mp\sqrt{3}$. *Para* $y=-1$, *vem* $x+z=-2$, $xz=-2$ *donde a solução* $x=-1\pm\sqrt{3}$, $y=-1$, $z=-1\mp\sqrt{3}$. *As razões são: no caso da progressão aritmética* $r_1=-\sqrt{3}$ *ou* $r_2=\sqrt{3}$; *no caso da progressão geométrica* $\rho_1=2+\sqrt{3}$ ou $2-\sqrt{3}$.

Solução de José Morgado (do Pôrto).

Enviaram também soluções correctas: Alberto Pais (de Lisboa), J. S. Faria de Abreu (de Penafiel) e Paul Richard (de Portalegre).

1340 — São dadas as circunferências $C_1, C_2\cdots C_n$ tais que: *a)* os centros estão alinhados; *b)* a circunferência C_i $(i=2,\cdots,n-1)$ é tangente à circunferência C_{i-1} e à circunferência C_{i+1}; *c)* as circunferências são tangentes às rectas a e b. Conhecendo o ângulo 2α das rectas a e b e o raio R_1 de C_1, calcular a soma dos raios das n circunferências. [Considerar os dois casos: $R_j<R_{j+1}$ e $R_j>R_{j+1}$, $(j=1,\cdots,n-1)$]. R: *Primeiro caso*

$R_j < R_{j+1}$. *É evidente a relação* $\operatorname{sen} \alpha = \frac{R_{j+1} - R_j}{R_{j+1} + R_j}$, *ou* $R_{j+1} = R_j \times \frac{\operatorname{sen} \alpha + 1}{-\operatorname{sen} \alpha + 1}$. *A soma de* n *raios será a soma de* n *têrmos duma progressão geométrica em que o primeiro termo é* R_1 *e a razão* $\frac{\operatorname{sen} \alpha + 1}{-\operatorname{sen} \alpha + 1}$ *Portanto* $S = \frac{R_1 \left[\left(\frac{\operatorname{sen} \alpha + 1}{1 - \operatorname{sen} \alpha} \right)^n - 1 \right]}{\frac{\operatorname{sen} \alpha + 1}{1 - \operatorname{sen} \alpha} - 1}$. *No caso de ser* $R_j > R_{j+1}$ *a progressão será decrescente e a razão igual a* $\frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}$. $S = \frac{R_1 \left[1 - \left(\frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} \right)^n \right]}{1 - \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}}$.

Solução de Álvaro Simões (de Sangalhos).

Enviaram também soluções correctas : J. S. Faria de Abreu (de Penafiel) e Paul Richard (de Portalegre).

1341 — Calcular o valor da soma $S = 1!1 + 2!2 + \cdots + n!n$. R: $n!n = n![(n+1)-1] = n!(n+1) - n! = (n+1)! - n!$ *Fazendo* n *sucessivamente igual a* $n-1, n-2, \cdots 3, 2, 1$, *vem* $n!n = (n+1)! - n!$, $(n-1)!(n-1) = n! - (n-1)!$, $(n-2)!(n-2) = (n-1)! - (n+2)!$; $\cdots 3!3 = 4! - 3!$, $2!2 = 3! - 2$, $1!1 = 1$ *Somando ordenadamente vem* $1!1 + 2!2 + 3!3 + \cdots + n!n = (n+1)! - 1$.

Solução de Paul Richard (de Portalegre).

Enviou também solução correcta : J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

1343 — Consideremos um diedro de rectilíneo 2α e um plano que secciona o diedro perpendicularmente ao plano bissector. Sendo β o ângulo formado pela aresta e por aquêle plano, determinar, em função de α e β, o ângulo de secção do diedro. R: *Considere-se o triedro que tem por vértice* V, *o ponto de intersecção da aresta do diedro e do plano que secciona êste perpendicularmente ao plano bissector, e por arestas, a aresta do diedro e as intersecções do dito plano com o plano bissector e com uma das faces do diedro ; arestas que se designam por* VA, VB *e* VC *respectivamente. Neste triedro rectângulo conhecem-se a face* $BVA = \beta$ *e o ângulo* α *oposto à face* BVC. *O triedro está, pois, determinado. Resolvendo-o, acha-se:* $\operatorname{tg} B\hat{V}C = \operatorname{sen} \beta \operatorname{tg} \alpha$ *donde* $B\hat{V}C = \operatorname{arc tg} (\operatorname{sen} \beta \operatorname{tg} \alpha)$ *e* $2BVC = 2 \operatorname{arc tg} (\operatorname{sen} \beta \operatorname{tg} \alpha)$. *É o ângulo pedido.*

Solução de Alberto Pais (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas : José Morgado (do Pôrto), J. S. Faria de Abreu (de Penafiel) e Paul Richard (de Portalegre).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

23 — BUTLER, Chas. H. and LYNNWOOD Wren, F. — **The Teaching of Secondary Mathematics** — Mc Graw-Hill Gook Co. 1941. XII+513 págs. $3.00.

É um livro verdadeiramente actual que todo o professor de matemáticas do ensino secundário deveria inscrever na sua lista de leituras. Deveria ser lido também pelos educadores em geral e pelos dirigentes que têm a seu cargo qualquer trabalho sôbre matemáticas nas escolas secundárias. Escrito por dois professores capazes e experimentados, êste livro é precioso e cheio de sugestões, particularmente para o grupo de professores jovens que, faltando-lhe a experiência do trabalho escolar, necessitam de um guia para os seus planos diários de lições.

O livro está dividido em três partes :

1.ª O lugar e a função das matemáticas na educação secundária.

2.ª Melhoramento e avaliação da instrução na educação secundária.

3.ª O ensino do assunto principal das matemáticas secundárias.

Pode-se felicitar os autores por terem escrito um bom livro, agradável e cheio de notas de filosofia e sugestões para o desenvolvimento da instrução ; é são e bem equilibrado.

Os exercícios do fim de cada capítulo são bem escolhidos e a bibliografia é actual.

(de W. D. R. em «The Mathematics Teacher» Vol. XXXV, n.º 4 — Abril 1942 — Trad. J. S. P.)

24 — FRANKLIN, Philip — **A Treatise on Advanced Calculus** — John Wiley and Sons, Inc. — New York ; Chapman and Hall — London ; 1940.

Esta obra constitue uma valiosa contribuição a êste campo da matemática. Preenche definitivamente a lacuna existente entre o trabalho de forma elementar e o de rigor dentro da moderna análise, como é pôsto em evidência pelos títulos dos primeiros capítulos. Como ponto de partida os inteiros positivos e negativos, seguindo-se os números racionais, os irracionais — cujo estudo é feito pelo método de Dedekind — a definição de ponto limite, e os teoremas de Bolzano-Weierstrass e de Heine-Borel. O segundo capítulo trata, de forma cuidada, mas não muito longa, de limites, extremos, e continuïdade; utilizando o teorema de Heine-Borel demonstra-se que uma função contínua em todos os pontos de um intervalo fechado é uniformemente contínua nesse intervalo, e apresentam-se demonstrações de teoremas relativos à continuïdade que são geralmente omitidas em livros dêste género. O primeiro capítulo termina por 34 exercícios propostos que dizem respeito aos números algébricos e transcendentes, demonstra-se que o conjunto dos algébricos é numerável, o que não sucede com o conjunto dos números reais, e dá-se a definição da curva de Peano.

. . . .

Chegados ao capítulo III, encontramos definições aritméticas construtivas das funções exponencial, logarítmo e trigonométricas. A aproximação aqui dada é nova, e de um indiscutível interêsse e valor; ao crítico afigura-se ser esta a parte mais interessante do livro. O tempo e atenção que o seu detalhe requerem deve ser, provàvelmente, o motivo da sua exclusão dalguns cursos dêste género.

Há três capítulos sôbre integração e dois relativos à variável complexa. A integração limita-se aos integrais de Riemann, próprios e impróprios.

. . . .

Nos capítulos relativos a séries e sucessões de funções encontra-se, ao lado do que é usual, secções dedicadas aos produtos infinitos, convergência em média, e equi-continuïdade. O capítulo sôbre as séries e integrais de Fourier inclue o teorema de Féjer, o de aproximação de Weierstrass, o teorema de Parseval e transformações de Laplace.

. . . .

O último capítulo trata da função gama, dos polinómios e números de Bernoulli, fórmula de Stirling, etc.

(de R. L. Jeffery em «The American Mathematical Monthly» Vol. 48, n.º 4, Abril 1941 — Trad. M. Z.)

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Boletin Matemático — (Buenos Aires) — Revista argentina de Matemática — Ano XIV — n.º 17, Ano XV — n.ºs 12-13.

Matematica Elemental — Revista publicada por el Instituto «Jorge Juan» de Matematicas y la Real Sociedad Matematica Española — 4.ª série — Tomo III — n.º 6 — 1943.

Técnica — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.ºs 138 e 139.

Revista Politécnica — (São Paulo — Brasil) — Ano 38.º n.ºs 141.

Euclides — (Madrid) — Revista mensal de Ciências Exactas, Físicas, Químicas y Naturales — Tomo III, n.ºs 28 e 29.

Seguros — Ano V — n.º 28.

Seleções do Reader's Digest — Maio de 1943 — e outras publicações — oferta da Legação dos Estados Unidos da América do Norte.

A situação financeira da «Gazeta de Matemática»

CONTA DO N.º 15 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Receita

Receita da venda avulso e por assinatura de 842 números	3.332$75
Existência de 549 números ao preço de custo	1.500$00
24-VIII-1943, *Déficit*	244$15
	5.076$90

Despesa

Composição, impressão, papel e brochura	4.250$50
Sua quota parte nas despezas gerais realizadas até 24 de Agôsto de 1943	826$40
	5.076$90

O. M. R. e M. O. M.