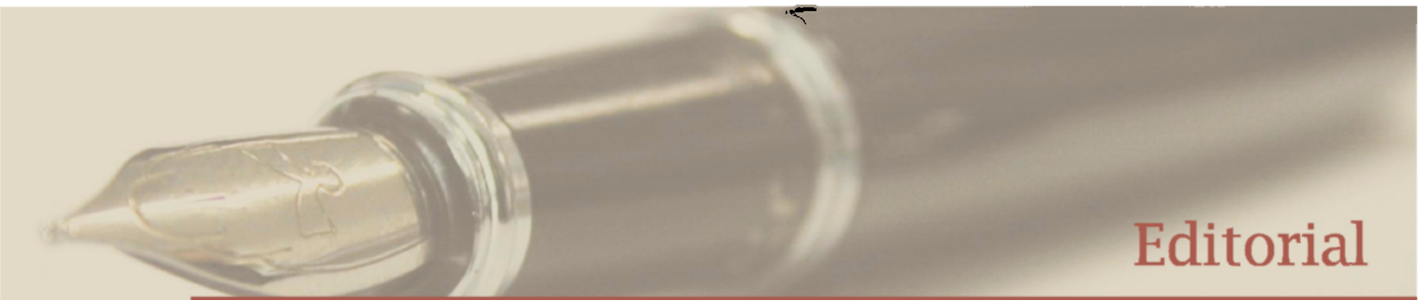
Gazeta de Matemática

N.º 0161
Publicação quadrimestral
da Sociedade Portuguesa de Matemática
Ano LXXI | Julho 2010
4,20€

Matemática
e Futebol

Índice



Editorial

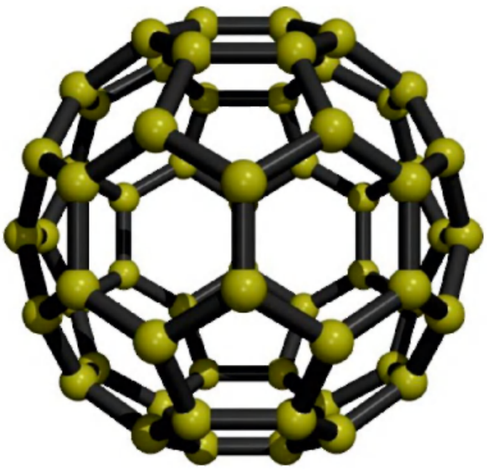
por **Jorge Buescu**
[Universidade de Lisboa]

A edição da *Gazeta de Matemática* que o leitor tem nas mãos é publicada num momento particularmente significativo para a SPM: ela é apresentada no Encontro Nacional da SPM. Este encontro bienal representa um momento de intercâmbio privilegiado para a comunidade matemática portuguesa: é a altura de trocar pontos de vista sobre a matemática em Portugal em todos os seus aspectos, da investigação ao ensino e à divulgação. E, portanto, muito gratificante para toda a equipa da *Gazeta* poder estar presente nesta ocasião.

O momento de publicação da *Gazeta* coincide também com outra circunstância que seria difícil ignorar: o Campeonato Mundial de Futebol. A matemática está presente em todos os aspectos da vida, desde que saibamos onde a procurar; o Mundial de Futebol não é excepção. O *Atractor* explica-nos como deveríamos rematar de forma óptima na procura do golo; a *Linha da Frente* de Fábio Chalub foi aparentemente substituída pela formada por Cristiano Ronaldo, Simão e Deco, pois explica-nos como é possível numa competição como o Mundial realizar um *ranking* final justo. Também o basquetebol contribui, pela mão de Rui Machado, para esta edição mais... *desportiva*.

Num registo diferente, António Machiavelo contribui com a sua visão *Sobre a Natureza dos Objectos Matemáticos*. Nesta discussão entusiasmante o autor acaba por nos esclarecer sobre a sua defesa de uma posição a que chama "Realismo Intuitivo-Conceptualista Empírico-Racionalista Construtivista Anti-Radical!" (exclamação do autor). Roger Picken explica com uma clareza que julgamos exemplar *O Que É a Teoria dos Nós*.

Esperamos continuar a fazer da *Gazeta* uma leitura renovadamente interessante sobre a matemática e a contribuir desta forma para cumprir uma das missões da SPM: a divulgação da ciência que amamos.



Sobre a Capa

Em 1985, a revista *Nature* anunciou a descoberta de uma nova molécula com uma estrutura semelhante à de uma bola de futebol: o fulereno. A semelhança valeu à descoberta de Kroto, Heath, O'Brien, Curl e Smalley a alcunha de futeboleno. A molécula é constituída por 60 átomos de carbono, que formam 12 pentágonos e 20 hexágonos. Os hexágonos constituem uma superfície plana enquanto os pentágonos criam um ângulo de curvatura, necessário para fechar a superfície sobre si mesma, formando uma esfera. No mundo do futebol, uma estrutura semelhante à do fulereno rolava nos relvados desde 1970, ano em que foi concebida a *Telstar*, utilizada no Mundial de Futebol do México. Esta foi a primeira bola a surgir com um *design* de 32 gomos (12 pentágonos e 20 hexágonos), uma configuração que lhe permitiu ser a mais esférica de sempre! Apesar de os modelos utilizados hoje em dia terem evoluído muito, a *Telstar* nunca deixou de representar a imagem clássica de uma bola de futebol.

Caderno_1
quarta-feira, 23 de Junho de 2010 14:5?:18

No âmbito de uma colaboração acordada entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu *site* (*www.atractor.pt*). Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para atractor@atractor.pt.

A Matemática do Futebol

"Vós, que sois abençoados com sombra e também com luz, vós, que sois dotados de dois olhos capazes de perceberem a perspectiva e de se encantarem com a diversidade das cores, vós, que podeis de facto ver um ângulo e abarcar toda a circunferência de um Círculo na afortunada região das Três Dimensões – como poderei eu fazer-vos entender claramente a extrema dificuldade que nós no Mundo Plano temos em reconhecer as formas uns dos outros?"

Edwin A. Abbott, *Flatland – A romance of many dimensions*

Figura 1

Uma circunferência é o conjunto de pontos no plano equidistantes de um ponto fixado. Esta curva caracteriza--se por outras propriedades de natureza distinta que poderiam servir igualmente como definição: entre todas as curvas planas, simples (sem auto-intersecções) e fechadas (se as percorrermos sempre no mesmo sentido a partir de um ponto, retornamos a esse ponto), é a única que: (1) tem curvatura constante positiva; (2) é intersectada por qualquer corda em ângulos iguais; (3) engloba a maior área entre as de igual perímetro.

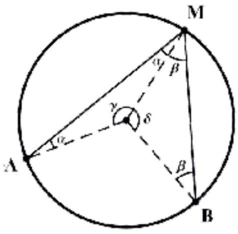


Figura 2
$\gamma+\delta = 2\pi-2(\alpha+\beta)$

O *Atractor* desenvolveu um módulo interactivo (usado, em 2005, para participantes de 10/11 anos, no âmbito da Universidade Júnior, uma iniciativa da Universidade do Porto) cujo guião[1] se serve do futebol para ilustrar outra propriedade que só a circunferência verifica, conhecida como *Teorema do arco capaz*: (a) qualquer ângulo[2] inscrito numa circunferência, de centro O e raio R, tem amplitude igual a 1/(2R) do arco por ele subtendido (fig. 2); daqui resulta, em particular, que ângulos inscritos numa circunferência e suportados pela mesma corda são iguais (fig. 3); (b) fixado um ângulo $\measuredangle AMB$ de amplitude α, o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que o ângulo $\measuredangle APB$ tem amplitude α é precisamente o arco de circunferência com extremos A e B e que passa em M. Além disso, considerando a curva formada pelo referido arco em conjunto com o segmento $[AB]$, então, se um ponto P está no interior da curva, a amplitude de $\measuredangle APB$ é maior do que α e, se P é exterior à curva, a amplitude de $\measuredangle APB$ é menor do que α (fig. 4). As duas imagens seguintes mostram como esta afirmação resulta do facto de, em qualquer triângulo, cada ângulo externo ser a soma dos ângulos internos não adjacentes.

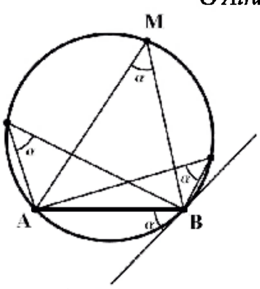


Figura 3

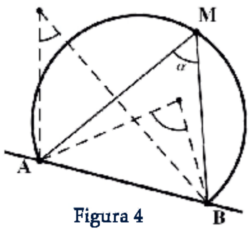


Figura 4

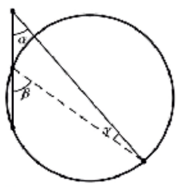


Figura 5
$\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow \alpha<\beta$

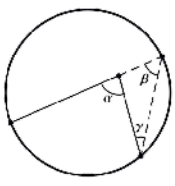


Figura 6
$\alpha=\beta+\gamma \Rightarrow \alpha>\beta$

[1] *http://www.atractor.pt/ujr/acti2005.htm*
[2] Neste trabalho, ângulo e corda serão usados no sentido de ângulo orientado e corda orientada.

No futebol, faz parte da estratégia a determinação do local ideal para a marcação de golo. E, mesmo ignorando os jogadores da equipa adversária, não é certo que um jogador marque golo de qualquer ponto do campo. Claro que um jogador colocado um metro à frente do meio da baliza, e sem adversários, consegue marcar golo. De que outros pontos conseguirá ter igual certeza? A resposta depende da pontaria do jogador. E, no módulo, a pontaria de cada jogador é representada por uma cunha com ângulo igual ao dobro do seu ângulo máximo de erro: quanto melhor for o jogador, mais estreita é a cunha.

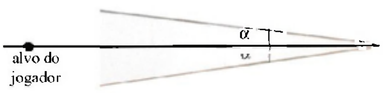


Figura 7
Cunha

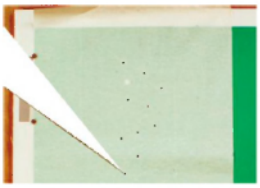


Figura 8

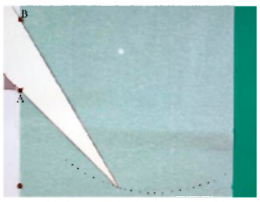


Figura 9

Para determinar a região onde um jogador (sem adversários) está certo de marcar golo, o utilizador do módulo[3] coloca a cunha (como indicado na figura 8) e vai marcando pontos numa folha de papel transparente previamente fixada sobre o campo. Na verdade, para delimitar a região desejada, basta ir assinalando os pontos correspondentes às posições da cunha em que ela encosta aos dois postes da baliza: esta região, cujo bordo é a curva assim obtida experimentalmente, representa os locais onde um jogador, que aponte correctamente, está certo de fazer um golo[4]. Essa curva (fig. 9) tem uma forma que lembra a de um arco de circunferência – e já justificámos acima que é essa a solução do problema.

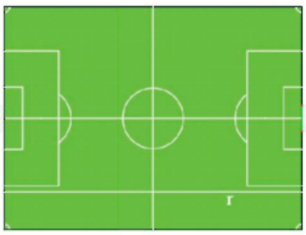


Figura 10

Consideremos agora uma situação concreta: um jogador está a correr ao longo de uma linha – r – paralela à linha lateral (fig. 10). Há algum sítio, nessa linha, onde ele tenha a certeza de marcar golo? De novo a resposta depende do jogador, ou seja, da cunha que lhe está associada. E podem ocorrer três situações distintas. Se considerarmos o arco capaz que passa pelos extremos da baliza, A e B, e que tem um ângulo inscrito 2α suportado na corda AB, então: (1) ou o arco não intersecta r, e por isso não há nenhum sítio onde seja certa a marcação de golo; (2) ou o arco e a recta r se intersectam em dois pontos, C e D, e o golo está garantido se marcado a partir do segmento de recta $[CD]$ (fig. 11); (3) ou r é tangente ao arco, e o ponto de tangência é o único em que está assegurada a marcação de golo.

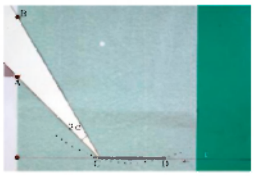


Figura 11

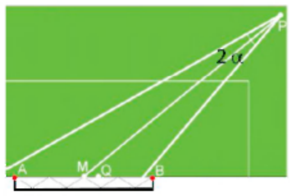


Figura 12

Encontrando-se o jogador num bom sítio para rematar, para onde deve ele apontar a bola se pretende marcar golo? Deverá apontar para o meio da baliza? Os utilizadores do módulo são novamente convidados a testar experimentalmente várias cunhas (jogadores) para verificarem que, em certas circunstâncias (como a descrita na figura), é possível a um jogador na posição P, ao apontar a bola para o ponto médio M de $[AB]$, falhar a marcação do golo (fig. 12). Com um pouco mais de esforço, convencem-se de que, se o jogador tivesse apontado para o ponto Q de intersecção da bissectriz de $\angle APB$ com $[AB]$, então, sem a intervenção dos defesas ou do guarda-redes, o golo estaria garantido. E daqui deduzem facilmente que um jogador deve apontar a bola para o meio da baliza apenas quando Q coincide com M, isto é, quando o triângulo $[APB]$ é isósceles, com $|PA|=|PB|$. M

[3] Está disponível uma versão virtual do módulo em *http://www.atractor.pt/ujr/materiais-2005/Futebol.gsp*
[4] Para simplificar a abordagem, ainda se considera golo se a bola bater na trave

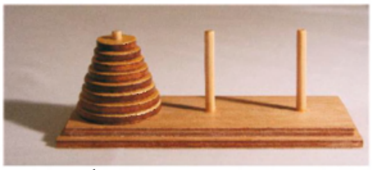
por Jorge Nuno Silva
[Universidade de Lisboa]

Torres de Hanói Magnetizadas

Torres de Hanói é um quebra-cabeças popular entre nós, sendo presença frequente em ambientes recreativos. A sua relação com a base binária de numeração e o crescimento do número de movimentos da respectiva solução com o número de discos são aspectos sempre realçados. Hoje apresentamos uma variante de Uri Levy, em que a base 2 é substituída por outra...

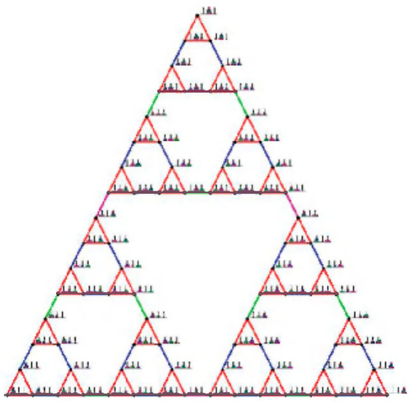
Todos conhecem o quebra-cabeças inventado e comercializado no final do século XIX pelo matemático Edouard Lucas, que o descreveu no seu livro *Recreations Mathématiques*.

Trata-se de deslocar um conjunto de peças circulares entre dois de três postes, sendo que cada movimento permitido consiste em mudar um disco de poste, mas sem nunca pousar num disco menor.



No caso ilustrado na figura seriam necessários 255 movimentos para terminar a tarefa. Em geral, se tivermos N discos, serão necessários 2^N-1 movimentos para os deslocar para outro poste de acordo com as regras.

Este *puzzle* surge relacionado com várias áreas matemáticas, às vezes de forma surpreendente.

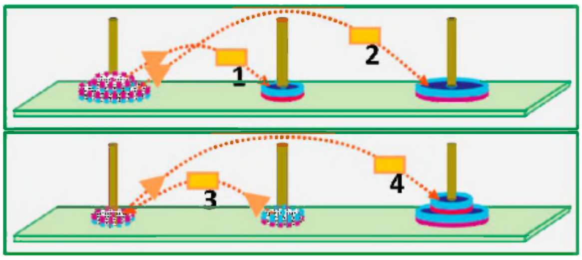


Descrição da resolução do Torres de Hanói
com a forma do Triângulo de Sierpinski

A variante de Uri Levy caracteriza-se por os discos terem faces de cores diferentes, azuis e vermelhas, sendo que nos movimentos os discos para além de não poderem pousar sobre discos menores, têm de respeitar o facto de cores iguais se repelirem, inviabilizando que a face inferior de um disco partilhe a cor da face superior do disco em que repousa. Cada movimento deve inverter as cores do disco movido.

Torres de Hanói magnéticas de Uri Levy

A figura seguinte mostra como se deve proceder para mudar dois discos de poste de acordo com as novas regras.



Repare-se no movimento intermédio 3, necessário para trocar as cores da peça que, assim, poderá ser colocada no poste da direita, terminando a migração.

Pergunta-se: quantos movimentos são necessários para deslocar uma pilha de *N* discos colocada num poste para outro?

Sobre o número anterior: Pediu-se para estudar a forma óptima de jogar *NIM*. Como Bouton mostrou no começo do século passado, devemos deixar ao adversário pilhas contendo $n_1, \ldots, n_k$ feijões, tais que a soma-nim destes números seja nula. A soma-nim define-se, em base 2, pela tabuada: 0+0=1+1=0, 0+1=1+0=1. Ver *Boletim da SPM – Número Especial de Jogos Matemáticos*.

por **António Machiavelo**
[Departamento de Matemática Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]

Sobre a Natureza dos Objectos Matemáticos

Os objectos matemáticos são reais ou são imaginários? São descobertos ou são criados? Têm uma existência independente dos seres humanos ou são meras elaborações mentais destes? São quimeras, fantasias, sombras de um outro mundo, habitantes de um mundo ideal? Mas então como pode a matemática ter tantas aplicações, concretas, reais e extremamente eficazes? Por outro lado, se têm uma existência própria, de que forma existem? Podem ser localizados no espaço e no tempo? De que modo?

1. A grande questão

A natureza dos objectos ou entes matemáticos[1] é um tema de debate que remonta, pelo menos, à Grécia Antiga, sendo desde então fonte de constante perplexidade entre filósofos e matemáticos. A questão central que tem sido debatida, ao longo de milénios, com maior ou menor intensidade, é a seguinte: os objectos, ou entes, matemáticos são reais ou são imaginários? Dito de outro modo, são descobertos ou são criados? Ou ainda, existem na "realidade" ou apenas num "mundo de ideias"?

Há um facto que é particularmente confuso: enquanto alguns objectos matemáticos, como por exemplo os números complexos, parecem ser claramente uma invenção humana, já é muito difícil argumentar que resultados sobre estes, como por exemplo o chamado *teorema fundamental da álgebra*[2], sejam uma criação humana! E isto parece conduzir a uma situação um pouco bizarra: inventamos objectos que depois têm propriedades que são completamente independentes de nós? Como é isto possível?

Enquanto investigador, um matemático parece desempenhar por vezes o papel de um construtor, de métodos ou ferramentas, outras vezes o de um descobridor, de resultados sobre certos objectos mais ou menos abstractos. Na realidade, estas duas funções complementam-se, pois o objectivo da construção de métodos e ferramentas é o de levar a perceber melhor certos objectos e as suas propriedades, assim como o de servir para descobrir outras propriedades mais subtis desses mesmos objectos. Não há qualquer dúvida de que um matemático, enquanto faz matemática, se sente como um descobridor explorando terras incógnitas. Mas, pode perguntar-se, um descobridor de quê? Bem, de resultados sobre... E é precisamente neste ponto que surge uma questão particularmente difícil: sobre exactamente o quê?

Seja lá sobre o que for, seja lá qual for a natureza exacta dos objectos matemáticos, tanto a posição de que estes são reais como a posição de que são criados acarretam sérias dificuldades. Por um lado, quem defende que são reais tem de explicar de que forma o são, pois parece ser evidente que têm uma existência algo imaterial, certamente muito diferente da de um rochedo ou da de um rio. Por outro lado, quem defende que aqueles são criações da nossa mente e da nossa imaginação deve explicar como é então possível a matemática ter tantas, tão incríveis e eficazes aplicações no "mundo real".

Neste artigo é delineado um contexto para uma resposta a este aparente dilema, tendo as reflexões

[1] Por exemplo, os números (naturais, racionais, reais, imaginários, p-ádicos), as figuras geométricas (planas, sólidas, n-dimensionais), as funções, os grupos, as álgebras, os espaços topológicos, as variedades diferenciáveis, os espaços de Hilbert de dimensão infinita.

[2] Que garante que todo o polinómio de coeficientes complexos se factoriza como um produto de polinómios lineares.

que aqui se apresentam[3] sido inicialmente inspiradas pela leitura de quatro obras que tiveram uma enorme influência nas posições filosóficas do autor: *Gödel, Escher, Bach*, de Douglas R. Hofstadter [1], *O Acaso e a Necessidade*, de Jacques Monod [2], *O Macaco Nu*, de Desmond Morris [3], e *Dragões do Eden*, de Carl Sagan [4].

2. Algumas correntes da filosofia da matemática

Há, em filosofia da matemática, vários "ismos" que se referem a várias posições sobre as questões ontológicas (*o que são?*) e epistemológicas (*como os conhecemos?*) colocadas pelos objectos matemáticos. Sendo impossível detalhar aqui todas essas posições e suas *nuances*, limitamo-nos a dar um esboço das principais correntes, fornecendo ao leitor interessado alguns apontadores bibliográficos.

Uma das mais antigas e influentes doutrinas, conhecida por *Platonismo*, por ter sido exposta por Platão em várias das suas obras, consiste na opinião de que os objectos matemáticos existem num mundo mais real e perfeito do que aquele que se apresenta aos nossos sentidos, um mundo "*povoado por entidades (chamadas «Formas» ou «Ideias») que são eternas, imutáveis e, em certo sentido, paradigmáticas para a estrutura e o carácter do nosso mundo*" ([5], secção 1; ver também as secções 2 e 9). Um mundo que, numa perspectiva contemporânea, existiria fora do espaço e do tempo, não sendo nem físico nem mental (ver [6]). Esta é uma posição defendida actualmente por, entre outros, o físico-matemático inglês Roger Penrose (ver pp. 11-23 de [7]) e pelo matemático francês Alain Connes ([8], pp. 30-31) que defende uma espécie de mundo platónico um pouco mais elaborado, a que chama "realidade matemática arcaica" (ver [9], pp. 180-192, sendo o termo introduzido na p. 182) ou "primordial" (ver [10], pp. 6-8). Recentemente, a *Newsletter of the European Mathematical Society* publicou uma série de artigos sobre Platonismo[4], que mostram bem quanto o tema é actual, havendo alguma variedade de posições pró-platónicas e anti-platónicas. E interessante observar uma importante diferença de ênfase: enquanto os antiplatónicos se concentram na rejeição da existência de um mundo sobrenatural e místico como o mundo ideal platónico, ignorando o problema da aplicabilidade da matemática, os pró-platónicos realçam a sua opinião de que os objectos matemáticos e as suas relações são independentes dos seres humanos, ignorando o problema da forma da sua existência.

Numa qualquer introdução à filosofia da matemática é quase obrigatório mencionar as três escolas antiplatónicas nascidas da "crise" dos fundamentos no final do século XIX e início do século XX, nomeadamente: *logicismo*, *formalismo* e *intuicionismo*. Numa descrição sumária e superficial, pode dizer-se que a primeira consistia num projecto[5] de redução da matemática à lógica, de modo que as verdades matemáticas sê-lo-iam apenas devido à sua estrutura lógica interna e não por serem propriedades de uns quaisquer objectos exteriores; a segunda[6] é a posição de que a matemática mais não é do que um jogo de símbolos de acordo com certas regras; a terceira[7], a posição de que a matemática deve ter as suas raízes muito bem alicerçadas na intuição humana e em cuidadosas construções feitas com base nessas intuições, sendo esta ciência não mais do que o estudo dessas construções, que existem apenas após serem (mentalmente) construídas e são assim um produto da mente humana. Há que observar que o principal objectivo dessas escolas era o de fornecer alicerces sólidos para os fundamentos da matemática, e não tanto esclarecer o estatuto ontológico e epistemológico dos seus objectos de estudo. Apesar de os seus sucessos terem sido muito relativos e de estas posições não terem actualmente muitos adeptos, convém salientar que tiveram, todas e de diversas formas, um papel fundamental na criação da Lógica Moderna e de vários dos assuntos que hoje nela desempenham um papel importante, assim como

[3]Versoes preliminares foram expostas em vários seminários e conferências – na Universidade do Porto e na Universidade de Coimbra em 1999, num ciclo de palestras promovido pelo Clube Inigma em 2004, no CIBEM em 2005 e na Universidade do Minho em 2006. Quero expressar aqui o meu sincero agradecimento ao actual director da *Gazeta* pelo convite para escrever este artigo, que me deu a oportunidade de elaborar e aqui deixar registadas algumas dessas reflexões.

[4]Devido a restrições de espaço, tiveram de ser retiradas algumas notas e várias indicações bibliográficas. O leitor interessado poderá consultá-las em *http://www.spm.pt/files/outros/bibliografia_completa_artigo_convidado_gaz161.pdf*

[5]Iniciado por Gottlob Frege (1848-1925) e desenvolvido, proeminentemente, por Bertrand Russell (1872-1970).

[6]A que, invariavelmente, se associa o nome de David Hilbert (1862-1943), mas quase sempre de uma forma simplista e caricatural. As ideias de Hilbert, um dos mas notáveis matemáticos de sempre, eram bem mais sofisticadas do que normalmente se descreve. Ver, sobre este assunto, [11].

[7]Iniciada por Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966) e desenvolvida pelo seu aluno Arend Heyting (1898-1980).

contribuíram para a teoria da computação moderna, tendo mesmo desempenhado um papel importante na concepção dos próprios computadores.

Ao longo de todo o século XX surgiram e foram elaboradas diversas propostas de teorias filosóficas da matemática, algumas enraizadas em posições filosóficas bem antigas, com outras roupagens ou com novos aperfeiçoamentos ou adornos. Sem pretender fazer aqui uma lista exaustiva, parece-me que as principais são as seguintes, por ordem alfabética: *conceptualismo*[8] – os objectos matemáticos, como todos os *universais*, não são mais do que conceitos mentais, não tendo qualquer substância ou realidade externa; *construtivismo* – um objecto matemático existe apenas quando há um processo de, de algum modo, o construir, havendo várias formas de construtivismo: o *intuicionismo* de Brouwer, já referido; o *finitismo* de Hilbert e Bernays; o *construtivismo recursivo* de Markov; o programa de análise construtiva de Bishop; o *construtivismo social* – o conhecimento científico é uma construção social, sendo criado por relações e interacções sociais; o *construtivismo radical* – o conhecimento é meramente um processo de auto-organização cognitiva do cérebro humano e, sendo assim uma construção, é impossível saber o quanto reflecte uma realidade ontológica; *estruturalismo* – a matemática trata, não de colecções de "objectos matemáticos", mas sim de padrões ou estruturas, sendo os objectos "lugares" nessas estruturas; *ficcionalismo* – as teorias matemáticas são histórias de ficção, exactamente como novelas ou contos de fadas; *humanismo* – uma forma de conceptualismo social-cultural-histórico centrado nos seres humanos, no qual se defende que os objectos matemáticos são criados ou inventados pelos humanos, não de uma forma arbitrária, mas dependendo de necessidades da "vida", estando sujeitos a condicionalismos históricos e, uma vez criados, os objectos matemáticos tornar-se-iam parte da cultura humana, ganhando uma existência independente do seu criador ou inventor e tendo então propriedades bem determinadas que podemos ou não descobrir; *naturalismo* – o ponto de vista filosófico segundo o qual tudo tem causas naturais; *nominalismo*[9] – os universais e abstracções, em particular os objectos matemáticos, não passam de nomes sem qualquer correspondência real: apenas os objectos particulares existem e o que há de comum a objectos distintos (*lisos*, por exemplo) é simplesmente o nome (*liso*) que designa algo de comum e nada mais ("*liso*" é algo que não tem existência por si só); *quasi-empirismo* – o conhecimento matemático é algo semelhante ao conhecimento empírico, no sentido de o critério de verdade em matemática ser, como em física, o sucesso prático das ideias, sendo o conhecimento matemático susceptível de correcção e não-absoluto.

Para mais detalhes e argumentos pró e contra estas diversas posições, ver as notas e referências contidas em *http://www.spm.pt/files/outros/bibliografia_completa_artigo_convidado_gaz161.pdf*. Mas fica o leitor avisado de que algumas discussões neste campo fazem lembrar anjos em cabeças de alfinetes e que, como escreveu Marvin Greenberg em [12] (p.245), "*a filosofia da matemática está num estado de total confusão.*"

Todas as posições referidas podem ser pensadas como diferentes gradações num espectro *realismo – idealismo*, onde *realista* é um adjectivo que se aplica, neste contexto, a uma posição na qual se defende que os objectos de conhecimento são de alguma forma independentes da actividade da mente, enquanto *idealista* se aplica aqui a posições centradas na defesa de que toda, ou uma grande parte, da existência desses mesmos objectos é exclusivamente mental[10].

A posição mais radicalmente idealista que se pode ter é denominada *solipsismo*. É a posição de que apenas o leitor que lê estas palavras existe, e absolutamente nada mais, sendo tudo o resto ilusões mentais. Em [13] (p. 302), Bertrand Russell escreve: "*recebi uma vez uma carta de um filósofo que professava ser solipsista mas que estava surpreendido por não haver outros! [...] Isto mostra que o solipsismo não é realmente acreditado mesmo por aqueles que pensam estar convencidos da sua verdade.*" O solipsismo é normalmente apresentado como exemplo de uma teoria irrefutável (como provar que tudo não é uma ilusão da mente?), mas completamente infrutífera,

[8] De facto, uma posição filosófica sobre o estatuto dos *universais* e não propriamente uma filosofia da matemática. Um *universal* é uma propriedade ou relação comum a vários objectos particulares. O *problema dos universais* é a questão de saber se são descobertos ou criados, se existem ou não, e de que forma.

[9] Aplica-se aqui a mesma observação que foi feita na nota de rodapé anterior.

[10] Dada a versatilidade das palavras e as relações afectivas que, de um ou outro modo, todos nós temos com alguns conceitos, é capaz de ser útil mencionar que, no presente contexto, "realista" não tem qualquer relação com reis e rainhas, e que "idealista" nada tem aqui a ver com a defesa de nobres e importantes ideais. Fica a chamada de atenção para a necessidade de se tentar perceber muito bem o significado que se pretende dar aqui, como em outros sítios, às palavras que vão sendo usadas.

pois nada explica. Percebe-se assim que não chega elaborar teorias coerentes e irrefutáveis: é necessário que tenham poder explanatório!

3. O "milagre" das aplicações

Um dos problemas centrais em filosofia da matemática é o de explicar o que foi descrito pelo físico Eugene Wigner[11] como a "eficácia irrazoável da matemática nas ciências naturais". São vários os exemplos dessa eficácia, desde a previsão de eclipses a viagens à Lua. Outros exemplos notáveis são: as propriedades das secções cónicas estudadas por matemáticos da Grécia Antiga, a título de curiosidade intelectual, desempenharam um papel fundamental, mais de dois mil anos depois, na descoberta das leis que regem os movimentos dos planetas, por Johannes Kepler (1571-1630) a partir das observações metódicas de Tycho Brahe (1546-1601); a previsão, em 1846, da existência de um planeta, Neptuno, feita por Urbain Le Verrier (1811-1877), usando apenas matemática e dados de observações do planeta Urano, sendo atribuído a François Arago (1786-1853) o dito de que Le Verrier "descobriu um planeta com a ponta da sua caneta!"; a descoberta matemática por James Clerk Maxwell (1831-1879), "no papel", cerca de 1864, das ondas electromagnéticas, cuja existência é experimentalmente demonstrada mais de duas décadas depois, por Heinrich Hertz (1857-1894); a descoberta, em 1900, do "lado" quântico do mundo atómico, por Max Planck[12] (1858-1947), que foi literalmente forçado pela matemática a aceitar certas interpretações físicas que lhe desagradavam fortemente; a geometria Riemanniana "criada" por Bernhard Riemann (1826-1866), por volta de 1854, inspirada em trabalhos de Gauss (1777-1855), e posteriormente elaborada por Beltrami (1835-1900), Christoffel (1829-1900), Lipschitz (1852-1903), Ricci (1853-1925) e Levi-Civita (1873-1941), que iria desempenhar, mais de meio século depois, um papel crucial na teoria da relatividade geral de Albert Einstein[13] (1879-1955); a previsão da existência de antimatéria por Paul Dirac[14] (1902-1984), em 1928, tendo sido a existência do positrão, a antipartícula correspondente ao electrão, comprovada experimentalmente quatro anos mais tarde; o uso de espaços de Hilbert complexos de dimensão infinita em mecânica quântica, uma das teorias físicas mais bem-sucedidas, com previsões que coincidem com medições experimentais com uma precisão quase inacreditável.

Estes exemplos mostram também que matemática "criada" ou "descoberta" num contexto muitas vezes (aparentemente) desligado da "realidade" é usada décadas, séculos ou mesmo milénios mais tarde, na explicação e na previsão de fenómenos concretos e reais. Isto coloca sérias dificuldades a todas as posições filosóficas que encaram a matemática como um fenómeno meramente mental.

O físico francês Bernard D'Espagnat escreve, em [14] (pp. 36-37), que uma das razões para a matemática ter sido desde o início um agente unificador da física é que "*a matemática não é somente uma linguagem cómoda, na realidade representa uma linguagem mais um raciocínio*". E que "*a matemática é insubstituível*" no sentido em que o seu desconhecimento impede "*o passar de uma descrição, instrutiva neste ou naquele caso, a uma descrição diferente e mais esclarecedora em determinados outros casos*", dando como exemplo a necessidade da matemática para "ver" que a lei clássica, dita lei de Snell–Descartes, de refracção da luz, que dá o desvio angular sofrido por um raio de luz ao passar de um meio para outro, é perfeitamente equivalente ao princípio de Fermat, que estipula que o caminho percorrido por um raio de luz entre dois pontos é aquele que minimiza o tempo percorrido. E acrescenta que "*todos os fenómenos naturais estão fortemente inter-relacionados: a dificuldade de mudar de ponto de vista traduz-se, na prática, numa incapacidade de juntar os elos profundos que unem fenómenos tão diversos da natureza, constituindo-se, portanto, um obstáculo a uma verdadeira compreensão global.*" A matemática é assim algo que captura esses elos profundos.

Observe-se que os exemplos acima enumerados mostram algo mais, algo que quero aqui sublinhar muito bem: a **matemática é mais do que um instrumento de descrição do real – é uma ferramenta para a descoberta do real ainda desconhecido!** O exemplo disto que me parece um dos mais flagrantes é o da descoberta por Maxwell de todo o espectro de ondas electromagnéticas. Como descobrir de outro modo, que não "teoricamente", a existência de ondas, como as de rádio, que não são detectadas por nenhum dos nossos cinco sentidos? Heinrich

[11]Recipiente do Prémio Nobel da Física em 1963.
[12]Prémio Nobel da Física em 1918.
[13]Prémio Nobel da Física em 1921.
[14]Prémio Nobel da Física em 1933.

Hertz, o primeiro a demonstrar experimentalmente a existência dessas mesmas ondas electromagnéticas, escreveu:

"Não se consegue evitar a sensação de que estas fórmulas matemáticas têm uma existência independente e uma inteligência própria, que são mais sábias do que nós, mesmo mais sábias do que os seus descobridores, que delas retiramos mais do que originalmente nelas colocamos."

Por tudo o que se expôs, parece-me inegável que a matemática lida com coisas bem reais e que não pode simplesmente ser uma construção humana. Uma posição idealista relativa à natureza dos objectos matemáticos inevitavelmente esbarra no problema de explicar este enigma da aplicabilidade da matemática. Na realidade, todas as defesas que conheço de uma concepção idealista dos objectos matemáticos ou ignoram este problema ou o menosprezam, dando explicações completamente insatisfatórias, ou então confessam-se incapazes de o explicar. Mas o problema é ainda mais complicado do que normalmente é descrito, pois, como exemplificado acima, a matemática não só fornece instrumentos para explicar, de um modo unificado, variadíssimos fenómenos, como dá ainda a capacidade de sonhar sobre coisas reais que são ainda desconhecidas. Como é isto possível?

4. Uma perspectiva Darwiniana

Antes de mais, é necessário esclarecer que a posição que defendo parte dos dois postulados seguintes:

• Há uma "realidade" exterior aos seres humanos, a "Natureza"[15].

• Tudo, incluindo os seres humanos, é inteiramente natural, sem qualquer componente "sobrenatural"[16].

Por "postulado" entendo aqui um ponto de partida que não pode ser demonstrado, mas para o qual há fortes indícios de ser verdadeiro. De facto, mais de dois mil e quinhentos anos de história da ciência têm sugerido, com uma crescente acumulação de evidências, a veracidade daquilo que acima é postulado. Como observou Stephen Jay Gould (1941-2002): "*As mais importantes revoluções científicas incluíram, sem excepção, o destronar da arrogância humana de pedestal após pedestal de convicções prévias acerca da nossa centralidade no cosmos.*" Mais ainda, não há exemplo de nenhuma posição que tenha partido de pressupostos que contradigam estes postulados e que tenha enriquecido, a partir desses pressupostos, o nosso conhecimento efectivo do cosmos, incluindo conhecimento sobre o ser humano (que é uma parte desse cosmos!).

Há uma dessas revoluções que, apesar de ter já século e meio, continua aparentemente a ser de difícil digestão: o mecanismo de "selecção natural e descendência com modificação lenta", a descoberta seminal feita por Charles Darwin (1809-1882). A "teoria da evolução", como é comummente conhecida[17], é uma das teorias científicas mais bem comprovadas, tendo um enorme poder explanatório, que tornou inteligível uma enorme quantidade de dados e observações sobre os organismos vivos previamente dispersos e confusos, assim como fomentou, e continua a fomentar, pesquisas extremamente frutíferas em várias áreas da biologia.

No entanto, abundam ainda muitas ideias distorcidas ou mesmo **completamente erradas** sobre a teoria da evolução, nomeadamente[18]: que implica uma ascensão contínua de animais "inferiores" a animais "superiores"; que a vida evoluiu ao acaso; que há uma "intenção" implícita da selecção natural; que a teoria justifica comportamentos avarentos, imorais ou "animalescos"; que justifica a "lei do mais forte". Estas e outras razões, que se prendem com a remoção do ser humano de um lugar central entre os seres vivos, levam a certas recusas emocionais, conscientes ou inconscientes, das consequências profundas, "**transcendentalmente democráticas**"[19], da teoria da evolução. Um exemplo disto, relevante para o assunto deste artigo, é a seguinte passagem

[15] Que poderíamos designar por ℕ, em homenagem aos Pitagóricos!

[16] Em particular, todas as componentes de um ser humano estão contidas em ℕ ☺

[17] Apesar de Darwin não ter usado o termo "evolução", por boas razões, pois dá a ideia **errada** de haver um "progresso".

[18] Ver [15] e *http://evolution.berkeley.edu*. Parece haver alguma dificuldade em distinguir entre o acaso das mutações e o mecanismo de selecção natural, que é tudo menos caótico, assim como perceber que "apto", no sentido de adaptado ao meio ambiente, pouco tem a ver, em geral, com "mais forte", não sendo nada óbvio, a não ser *a posteriori*, que características tornam um animal "apto". Mesmo um cientista brilhante como Jacques Monod, galardoado com o Prémio Nobel em Fisiologia ou Medicina em 1965, escreveu alguns sérios disparates sobre este assunto num livro pelo qual tenho (globalmente) uma enorme admiração, [2]: ver pp. 143-144.

[19] Ver [16], p. 67.

de [7][20] (p. 19), na qual Roger Penrose deixa claro por que prefere o platonismo:

"Como me sinto, realmente, acerca da possibilidade de todas as minhas acções, e as de todos os meus amigos, serem em última análise governadas por princípios matemáticos deste tipo? Eu preferiria ter estas acções controladas por algo que habita algum aspecto do fabuloso mundo matemático de Platão do que as ter sujeitas ao tipo de razões básicas e simplistas, tais como procura de prazer, avareza individual ou violência agressiva que muitos argumentam ser as implicações de um ponto de vista estritamente científico."

Penrose demonstra assim os seus preconceitos e alguma falta de reflexão relativamente à teoria da evolução[21]. Não admira que escreva um pouco mais adiante (pp. 20-21):

"[…] continua a ser um profundo quebra-cabeças perceber por que razão as leis matemáticas se aplicam ao mundo com uma precisão tão fenomenal."

Ora, numa perspectiva Darwiniana este mistério começa a esfumar-se, pois, como Carl Sagan explicou em [4], pp. 232-233:

"[...] podemos imaginar um universo no qual as leis da natureza são imensamente mais complexas. Mas nós não vivemos num tal universo. Porque não? Penso que talvez tal se deva ao facto de todos os organismos que apreendiam o seu universo como muito complexo estarem mortos. Os nossos antepassados arborícolas que tinham dificuldade em calcular as suas trajectórias quando saltavam de uma árvore para outra não deixaram muita descendência[22]*. A selecção natural serviu como uma espécie de crivo intelectual, produzindo cérebros e inteligências cada vez mais competentes para lidar com as leis da natureza. Esta ressonância, extraída por selecção natural, entre os nossos cérebros e o universo pode ajudar a explicar o enigma descrito por Einstein: a propriedade mais incompreensível do universo, disse, é que seja tão compreensível."*

Sempre achei curioso o facto de as pessoas se espantarem tanto com os ajustes delicados e extraordinários entre algumas características de alguns animais e o seu meio ambiente, e não repararem que o mesmo se aplica ao animal humano, assumindo, explícita ou implicitamente, haver uma estranha separação entre as nossas faculdades mentais e a natureza, separando o mental do material de um modo irreconciliável. Ora, a mente é o produto de milhões de anos de selecção natural e faz parte tanto da natureza como de outra coisa qualquer. Contém extraordinárias adaptações dos humanos ao seu meio ambiente, entre as quais a capacidade de abstrair padrões e organizar informação.

5. Problemas de perspectiva

Antes de descrever a minha opinião sobre a natureza dos objectos matemáticos, é necessário introduzir algumas distinções importantes.

5.1 Representação e representado

Na nossa espécie, o uso de símbolos é tão comum que é por vezes difícil separar a **representação** de algo daquilo que por ela é **representado**[23]. Por exemplo, uma coisa é o símbolo "6" e algo totalmente distinto é o que ele representa. O número 6 tem representações distintas em várias línguas (ver figura 1), mas aquilo que é representado, o número em si, é a mesma "entidade". E o que é essa "entidade"? Uma quantidade, poder-se-á responder. Mas o que é uma quantidade? E, em particular, qual a quantidade representada por "6"?

٦ VI 六 陸 ௬ ๖ ༦

Figura 1: Numerais para o número seis, em árabe, latim, chinês simplificado, chinês tradicional, tâmil, tailandês e tibetano (respectivamente).

Estas questões poderão originar alguma confusão, usualmente não se vislumbrando uma resposta que não seja circular. Isto acontece justamente porque abstraímos com tanta facilidade que nem nos apercebemos do que estamos a abstrair! Um exemplo simples poderá ajudar a esclarecer este ponto.

[20] Que não deixa por isso de ser um excelente livro, um autêntico "*tour de force*"!

[21] O que é corroborado na página seguinte (p. 22), em que mostra não entender as bases evolutivas da moral, quando afirma: "*A moralidade tem uma profunda ligação com o mundo mental, uma vez que está tão intimamente ligada aos valores atribuídos por seres conscientes e, mais importante ainda, à presença da própria consciência. É difícil ver o que a moral significaria na ausência de seres conscientes*". Ver sobre este assunto [17,18] e o próprio Darwin, em [19], capítulos 3, 4, e 5.

[22] Isto é obviamente um exemplo caricatural.

[23] Esta confusão é eloquentemente ilustrada num quadro do pintor belga René Magritte (1898-1967), intitulado "A Traição das Imagens" (ver *http://en.wikipedia.org/wiki/The_Treachery_of_Images*), que contém a representação de um cachimbo juntamente com a frase "isto não é um cachimbo", o que é inteiramente verdade: não há nenhum cachimbo na figura, apenas uma sua representação!

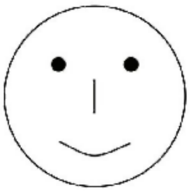


Figura 2: O que é isto?

Toda a gente reconhece na figura 2 uma face humana. No entanto, as faces humanas são tridimensionais, muito mais complexas, não havendo nenhum ser humano específico que esteja aí representado. Por que razão vemos, então, nela uma face? Porque representa (abstractamente) um número de características comuns às faces humanas que é suficiente para as caracterizar[24]. E porque, espero tê-lo demonstrado com este simples exemplo, os humanos abstraem tão facilmente quanto os peixes nadam ou as aves voam.

O que representa então o símbolo "6"? Representa algo que é comum a todos os conjuntos de coisas com seis elementos, ou seja a sua quantidade específica. Isto parece circular, mas não o é. Esta aparência de circularidade resulta de termos de usar as palavras que capturam esse conceito para o descrever, não podendo aqui arranjar-se uma alternativa fácil. Se quisermos, podemos tentar uma explicação um pouco mais sofisticada dizendo que dois agrupamentos de objectos têm a mesma "quantidade" se puderem ser emparelhados, ou mais sofisticadamente ainda, se existir uma bijecção entre esses dois agrupamentos. E o 6 é o nome de uma dessas "quantidades", aquela que segue o 5. A dificuldade advém aqui de a noção de quantidade ser bastante abstracta e, ao mesmo tempo, simples, no sentido de ser irredutível a outros conceitos. Espero, no entanto, que esteja agora clara a diferença entre o numeral 6 e o número que ele representa. De toda esta discussão quero também registar aqui o facto de a noção de número advir de *relações*, de algo em comum entre objectos.

5.2 Camadas e níveis

É também importante estar consciente de que as coisas têm em geral várias camadas, ou níveis, que podem ter características bem distintas. É frequente em discussões, filosóficas ou outras, haver desacordo entre os arguentes sem que estes reparem que estão a centrar o seu discurso em níveis distintos, aos quais dão mais relevância, por um ou outro motivo, tendo ambos razão no que dizem, embora afirmem coisas contraditórias! Isto mostra a necessidade de deixar claro o contexto do que se diz, o que nem sempre é fácil, podendo mesmo ser extremamente difícil em situações um pouco complexas. Aliás, tenho a impressão de que quanto mais interessante é uma situação, mais difícil é distinguir esses mesmos contextos.

Figura 3: Níveis

A figura 3 pretende dar exemplo de algo cujos "níveis" são bem distintos[25]. Diferentes leitores poderão descrever essas figuras como um *N* e um *C*, outros como conjuntos de *R*s, outros ainda como um conjunto de *C*s, à esquerda e um conjunto de *N*s à direita. Todos têm razão! Uma descrição mais cuidada deveria incluir o nível de que se fala, enquanto uma descrição completa deveria incluir descrições a todos os níveis. Mas isto pode não ser fácil descortinar. Imagine-se que, no exemplo acima, cada um dos pequenos *C*s da figura do lado esquerdo, quando visto ao microscópio, era como o *C* da figura à direita, e que cada um dos *N*s da direita tinha a estrutura do *N* da esquerda...

5.3 A noção de "objecto"

Finalmente, é ainda necessário clarificar o que se entende por "objectos matemáticos". Há aqui uma dificuldade séria, pois o próprio conceito de "objecto" é já por si de difícil delimitação, facilmente admitindo extensões de significado a "objectos" um pouco mais gerais, extensões essas muito úteis em diversos contextos. Além de que tem, como quase todas as palavras, uma multiplicidade de significados. Objecto tanto pode significar "*o que afecta os sentidos*", como uma "*coisa material*", ou "*o que ocupa o espírito*", ou

[24] Nao há nenhum outro animal com uma face tão redonda e que sorria movendo os lábios do modo esquematizado na figura...
[25] Cf. "*Prelude...*" e "*...Ant Fugue*" em [1], pp. 275-284 e 310-336.
[26] Que *N* seja a primeira letra de naturalismo, *R* seja a primeira letra de realismo e *C* seja a primeira letra de construtivismo não é aqui coincidência...

ainda *"o que pode ser pensado, por oposição ao ser pensante ou sujeito"*.

Mesmo a tentativa de restringir a noção de "objecto" a algo que é "físico" esbarra imediatamente em alguns problemas: e as ondas electromagnéticas? E a gravidade? Bem, não vou aqui precisar o sentido em que uso a palavra "objecto", pois isso restringiria a sua utilidade e implicaria a introdução de várias palavras ou adjectivações adicionais. Limito-me a dar exemplos e a deixar o leitor fazer o que nós, seres humanos, fazemos melhor: abstrair deles os significados pretendidos. Começo, assim, por observar que a gravidade deva talvez se vista como uma relação entre objectos com massa.

Tomemos de seguida como exemplo de "objecto" o próprio leitor, considerado como objecto físico (no sentido comum destes termos, para já) e consideremos alguns níveis a que podemos descrevê-lo (ver figura 4): para um médico, o leitor é um conjunto de órgãos e suas inter-relações (chamo aqui a atenção para a importância destas inter-relações: rearranjemos os órgãos de um outro modo e o resultado é dramaticamente diferente!); para um biólogo, o leitor poderá ser visto como um conjunto de células e suas (importantíssimas) inter-relações; para um físico, o leitor é um conjunto de átomos e suas (imprescindíveis) inter-relações.

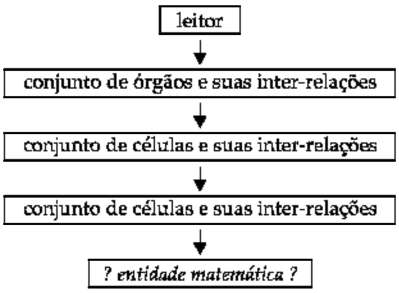


Figura 4: O que é realmente um objecto?

Mas, coisa curiosa, segundo Werner Heisenberg[27] (1901-1976), as partículas elementares são "formas matemáticas" e, em geral:

"A "coisa-em-si" é para o físico atómico, admitindo que ele alguma vez use o conceito, em última análise, uma estrutura matemática."

Esta ideia é realçada pelo físico Bernard D'Espagnat, no artigo já acima referido: *"para além das funções já descritas, a matemática assume uma outra, cuja importância vai aumentando. Cada vez mais, com efeito, as matemáticas* **servem para definir os próprios conceitos que se procuram pôr em correspondência com os fenómenos observados.**"

Chegamos assim a um resultado deveras curioso (ver fig. 5). Para tentar perceber o que é um objecto matemático, para determinar se este é ou não real, parece natural procurar saber primeiro o que é um "objecto real". Ora, quando analisamos esta questão com alguma profundidade, somos conduzidos à conclusão de que um objecto real é, em última análise, um objecto matemático! Isto mostra o quão subtil é a noção de objecto! E também sugere que os objectos matemáticos poderão afinal não ser assim tão mais peculiarmente estranhos do que outros tipos de objectos, mesmo os mais comuns.

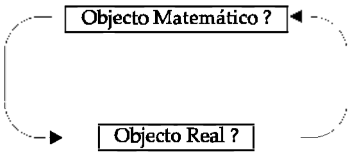


Figura 5: Um ciclo estranho

Para complicar ainda mais as coisas, sabia o leitor que é um conjunto de átomos variável com o tempo? Num discurso proferido num encontro da Academia das Ciências dos Estados Unidos, em 1955, Richard Feynman[28] (1918-1988) observou:

"[...] os átomos que estão no cérebro vão sendo substituídos: os que lá estavam antes já lá não estão.

Assim, o que é esta nossa mente: o que são estes átomos com consciência? Na semana passada eram batatas! Agora conseguem relembrar o que se passava na minha mente há um ano – uma mente que foi há muito substituída.

Note-se que aquilo a que chamo a minha individualidade é apenas um padrão ou dança [...]. Os átomos entram no meu cérebro, dançam uma dança e depois vão-se embora – há sempre novos átomos, mas sempre dançando a mesma dança, relembrando como era a dança no dia anterior."

Ou seja, somos muito mais parecidos com um rio do que com uma pedra...

6. Conclusão

Qual é então a natureza dos objectos matemáticos? A pergunta deve ser, de facto, reformulada do seguinte modo: o que é que representam os objectos

[27] Prémio Nobel da Física em 1932.
[28] Premio Nobel da Física em 1965.

matemáticos? A resposta é sugerida pelos próprios números naturais: relações! Relações entre objectos físicos (i.e., numa primeira aproximação, detectáveis pelos nossos sentidos) e outras mais profundas, que não são menos reais do que esses mesmos objectos "físicos"! A matemática captura e estuda relações e inter-relações entre relações, e relações entre estas inter-relações, e por aí fora, até onde chegar o engenho e a sagacidade humanos. Por a visão e o tacto dominarem os nossos sentidos (em muitos contextos usamos "ver" como sinónimo de "perceber") e o que vemos serem os objectos físicos, e não (directamente) as suas inter-relações e interdependências profundas e por vezes subtis, os objectos de estudo da matemática são assim invisíveis. Mas o nosso cérebro é um poderoso guia que, refinado por éons de selecção natural, nos permite aperceber regularidades recônditas na Natureza e desse modo expandir o nosso conhecimento do ambiente circundante (figura 6). As vantagens evolutivas são óbvias.

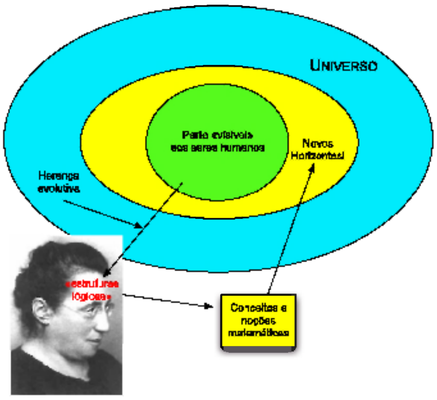


Figura 6: O Universo, os Humanos e a Matemática

Todas as escolas de pensamento em filosofia da matemática me parecem contribuir com análises válidas sobre a matemática, os seus objectos e a sua *praxis*, só que concentrando-se em diferentes níveis, em aspectos diferentes ou partes distintas, cometendo-se depois o erro de misturar alhos com bugalhos. Por exemplo, é claro que os matemáticos **C**riam representações, mas para **descobrirem** **R**esultados sobre o que é representado por essas representações. A matemática tem, assim, um lado construtivista e um outro naturalista, obviamente enraizado em algo empírico, um lado formalista e um lado intuicionista, estando essas suas múltiplas "faces" profundamente interligadas.

Contribuindo para aumentar ainda mais a confusão, os matemáticos têm um hábito curioso: criam representações, que depois se tornam elas próprias objecto de estudo. São como biólogos que tenham inventado um novo tipo de microscópio para estudar seres vivos e depois se ponham a estudar esses microscópios. Em matemática isto tem mostrado ser muito útil! Em minha opinião, o corpo $\mathbb{R}$, por exemplo, não é mais do que um instrumento análogo a um microscópio (ou será um telescópio?), que serve para estudar outros objectos matemáticos, mas que é simultaneamente um objecto de estudo[29].

Em conclusão, não tenho qualquer dúvida de que a matemática corresponde, em última análise, a algo de **R**eal, a que acedemos através da nossa **I**ntuição, que beneficia das adaptações evolutivas da nossa espécie e que ajuda a **C**onstruir instrumentos e a desenvolver noções, usando simbioticamente a **E**xperiência e a **R**azão, que são destiladas em **C**onceitos que permitem **A**vançar na exploração da **R**ealidade. E esse "algo de real" é a própria textura do cosmos que corresponde a leis profundas que regem as mais diversas inter-relações entre "objectos".

A posição que defendo poderia chamar-se *Pitagorismo Darwiniano*, mas, pelo que acaba de ser dito, prefiro dar-lhe o nome de[30]:

Realismo Intuitivo–Conceptualista **E**mpírico–**R**acionalista **C**onstrutivista **A**nti–**R**adical!

[29] A descoberta das geometrias não-Euclidianas é frequentemente usada para retirar ilações filosóficas anti-realistas sobre a matemática (cf. [20], pp. 1032-1036). Uma análise cuidada revela, no entanto, a falta de fundamento dessas ilações. Por exemplo, cada uma dessas geometrias pode ser representada "dentro" das outras, o que mostra que não são tão incompatíveis quanto aparentam à primeira vista. São apenas instrumentos distintos que capturam padrões e relações subtis de diferentes aspectos da realidade. É uma situação análoga a algo bem conhecido em Teoria dos Números, onde cada um dos anéis $\mathbb{Z}_n$ contém informações distintas, mas igualmente relevantes, sobre o anel $\mathbb{Z}$, facto muito útil na resolução de equações diofantinas.

[30] Em humilde homenagem ao maior compositor de sempre: Johann Sebastian Bach (1685-1750) (ver [1], pp. 3-8).

Referências

[1] **Hofstadter, Douglas** (1978). *Gödel, Escher and Bach: an Eternal Golden Braid*, Basic Books.

[2] **Monod, Jacques** (1977). *O Acaso e a Necessidade*, Europa-América.

[3] **Morris, Desmond** (1967). *O Macaco Nu*, Círculo de Leitores (edição não datada; o original é de 1967).

[4] **Sagan, Carl** (1977). *The Dragons of Eden: speculations on the evolution of human intelligence*, Hodder & Stoughton.

[5] **Kraut, Richard** (2008). "Plato", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), *http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/plato*, Fall 2008 edition.

[6] **Balaguer, Mark** (2009). "Platonism in Metaphysics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), *http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/platonism*, Summer 2009 edition.

[7] **Penrose, Roger** (2005). *The Road to Reality: a complete guide to the laws of the universe*, Vintage Books.

[8] **Goldstein, Catherine e Skandalis, George** (2008). "An interview with Alain Connes, part II", *Newsletter of the EMS* 67, 29-33.

[9] **Changeaux, Jean-Pierre e Connes, Alain** (1995). *Conversations on Mind, Matter and Mathematics*, Princeton University Press.

[10] **Connes, Alain, Lichnerowicz, André, Schützenberger** e **Marcel Paul** (2001). *Triangle of Thoughts*, American Mathematical Society.

[11] **Zach, Richard** (2009). "Hilbert's Program", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), *http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/hilbert-program*, Spring 2009 edition.

[12] **Greenberg, Marvin** (1980). *Euclidean and non-Euclidean Geometry: development and history* (segunda edição*)*, Freeman.

[13] **Russell, Bertrand** (1951). *An Outline of Philosophy*, Georg Allen & Unwin (original de 1927).

[14] **D'Espagnat, Bernard** (1993). "Física", em *Enciclopédia Einaudi* (dirigida por Ruggiero Romano), vol. 24, Imprensa Nacional Casa da Moeda.

[15] **Gregory, T. Ryan** (2009). "Understanding Natural Selection: Essential Concepts and Common Misconceptions", *Evolution: Education and Outreach* 2, 156-175.

[16] **Druyan, Ann** e **Sagan, Carl** (1993). *Shadows of Forgotten Ancestors*, Ballantine Books.

[17] **Allen, Colin** e **Bekoff, Marc** (2005). "Animal Play and the Evolution of Morality: an Ethological Approach", *Topoi* 24, 125-135.

[18] **Frank, Robert H.** (1988). *Passions Within Reason: the strategic role of emotions*, W. W. Norton.

[19] **Darwin, Charles** (1882). *The Descent of Man, and selection in relation to sex*, John Murray (segunda edição), disponível em "The Complete Work of Charles Darwin Online", no endereço *http://darwin-online.org.uk*

[20] **Kline, Morris** (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press.

por Fabio Chalub
[Universidade Nova de Lisboa]

Um Fut-Teorema em Ano de Mat-Mundial

Em época de Mundial de Futebol, desviamo-nos um pouco da linha mestra desta secção: hoje, a "Linha de Frente" não é o último acontecimento da matemática, mas aquela composta por Cristiano Ronaldo, Simão e Deco!

Quando termina a temporada da Liga Portuguesa, não há dúvida de quem é o campeão, o segundo colocado etc., até ao doloroso último lugar. No entanto, no Mundial há sempre aquela incerteza, da qual só o vencedor escapa, sobre qual foi a real posição das outras equipas, aquelas que caíram antes do fim.

Figura 1: Uma "linha de frente" diferente.

A pergunta, na verdade é simples: será possível montar um *ranking* fidedigno das equipas num campeonato em que não jogam todos contra todos? Ou ainda, será possível montar tal *ranking* para um campeonato ainda em andamento? A resposta é "Sim!", como foi mostrado em 1993 pelo matemático James Keener. Para isto vamos recorrer a um dos mais interessantes teoremas da álgebra linear, o mesmo teorema que permite ao *Google* ordenar as páginas pela sua importância: o Teorema de Perron--Frobenius, que formulamos aqui de uma forma bastante restrita:

Considere uma matriz quadrada não nula M, de tamanho NxN, em que cada um dos seus elementos é não negativo. Então esta matriz possui um valor próprio positivo λ e um vector próprio v cujas entradas são todas não negativas. Ademais, se a matriz for irredutível, o vector próprio v tem entradas estritamente positivas, é único (a menos de múltiplos) e simples e o valor próprio λ é o maior valor próprio em módulo.

O vector próprio e o valor próprio descritos acima são chamados *dominantes*.

A matriz M pode ser escrita de várias maneiras. Por exemplo, ordenamos as equipas de 1 a N. O valor do elemento da matriz M_{ij} é 0, 1 ou 3 consoante o resultado, derrota, empate ou vitória, de i quando recebeu j em sua casa (podemos também definir 1, 2 ou 4, respectivamente, para diferenciar a derrota de um jogo que não houve; melhor ainda, podemos definir 1 quando não houve jogo e 2, 4 e 5 para os três possíveis resultados, evitando alguns problemas matemáticos das matrizes que têm entradas nulas). Vamos associar a cada equipa um *ranking* r_i que ainda não sabemos qual é e que modifica o número de pontos obtidos – a vitória contra um plantel bem colocado no *ranking* vale mais do que contra um que esteja no fim da tabela. Desta forma, o número de pontos obtidos pela equipa i é dado pela soma em todos os valores de j de M_{ij} vezes r_j. O resultado final deve ser proporcional ao próprio *ranking* e, portanto, $Mr=\lambda r$.

Aqui entra o teorema de Perron-Frobenius. Existe uma única maneira de colocar as equipas em ordem: o *ranking* é dado pelo vector próprio associado ao maior valor próprio, que está definido a menos de reescalonamentos.

Uma das hipóteses usadas é a de que a matriz M é irredutível. O que significa isto? Significa, basicamente, que o campeonato não se subdivide em torneios independentes. É isto que ocorre, por exemplo, na qualificação para o Mundial ou para o Europeu, onde há um certo número de grupos e não um cruzamento final entre os componentes de cada grupo. Mais precisamente no contexto discutido, uma matriz é irredutível se não for possível dividir as equipas em dois grupos A e B tal que nenhuma equipa de A jogue com B. A estrutura do Campeonato do Mundo faz com que esta hipótese seja satisfeita, no entanto, apenas após a final – não é possível usar a teoria para obter *rankings* parciais. Isto é diferente na Liga, por exemplo, em que após algumas rodadas já temos uma matriz irredutível.

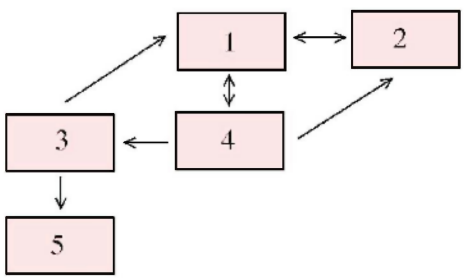


Figura 2: Matriz de ligações para uma Internet de 5 *sites*: o sistema de Perron-Frobenius usado pelo *Google* indica que o mais importante é o *site* 1, seguido pelos *sites* 2, 4, 3 e finalmente o *site* 5.

A *Google*, ao usar ideias semelhantes para o *ranking* de páginas, considerou uma matriz em que M_{ij} é diferente de zero sempre que houver um *link* da página j para a página i. Na verdade, adopta-se o valor $1/n$ em que n é o número de ligações a partir da página j. Para evitar a possibilidade de termos uma matriz redutível, soma-se uma matriz em que todas as entradas sejam idênticas a um pequeno valor.

Outra aplicação de ideias semelhantes é o cálculo da importância de uma revista científica. Usualmente calcula-se o "factor de impacto", basicamente o número médio de citações nos primeiros anos após a publicação dos seus artigos. Uma ideia mais sofisticada é a de usar o "*eigenfactor*", algo como o "factor próprio" da revista: a matriz M é obtida a partir do número de citações dirigidas da revista j para a revista i; depois segue-se o raciocínio anterior. Também neste caso é importante somar uma matriz de entradas positivas e idênticas para evitar o risco de as revistas científicas serem divididas em dois grupos que não se citam mutuamente.

E, afinal, como calcular o *ranking* a partir da matriz M? Para isto usa-se um método clássico em análise numérica. Escolhe-se um vector qualquer com todas as suas coordenadas positivas. Com probabilidade um, ao ser decomposto na base que diagonaliza a matriz M, caso esta exista (se não existir, fazemos o mesmo na base de Jordan da matriz), este possui um componente não nulo na direcção do vector próprio dominante. Obtemos sucessivas iterações deste vector u da seguinte maneira: calculamos Mu e depois normalizamos o vector obtido (serve qualquer método de normalização, sendo o mais útil na maioria das aplicações usar a norma da soma, ou seja, dividir o vector Mu pela soma dos seus componentes, todos não negativos). Seguindo este procedimento, o vector obtido aproximar-se-á do vector próprio. Assim temos o *ranking*.

Mundial 2006

O ranking the Perron-Frobenius

1 - França 1565
2 - Itália 1521
3 - Portugal 1451
4 - Alemanha 1444

Figura 3: Classificação final do Mundial de 2006 com base na seguinte pontuação: 1 ponto quando não há jogo, 2 para a derrota, 3 para o empate e 5 para a vitória.

O resultado dependerá de como montamos a matriz M, e mesmo num campeonato de todos contra todos não há nenhuma garantia de que o resultado seja o mesmo do oficial. No entanto, isto também é verdade para o sistema usual de ordenamento, ou seja, atribuir 3 pontos pela vitória e 1 pelo empate. Para diferentes pontuações, a classificação final pode ser diferente. Este facto não muda com o ordenamento baseado em Perron-Frobenius; no entanto, este permite uma maneira natural de estender o *ranking* para equipas que nunca se enfrentaram.

Referências

Keener, James P. (1993). *The Perron-Frobenius Theorem and the Ranking of Football Teams*, SIAM Review, Vol. 35(1), pp 80/93.

por **António Machiavelo**
[Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]

Números de Fermat

Fermat suspeitava de que os números da forma $2^{2^n}+1$ seriam todos primos. Estava errado (algo raro em Fermat), mas este erro não deixou de criar um desafio que, ainda hoje, dá muito que fazer: o de factorizar estes números, que são, em muitos aspectos, realmente singulares. E este ano de 2010 conta já com alguns avanços históricos na procura dos factores destes números.

Numa carta dirigida a Frénicle de Bessy (c. 1605-1675), muito possivelmente escrita em Agosto de 1640, da qual é conhecido apenas um fragmento, o juiz conselheiro do parlamento de Toulouse e matemático nas horas livres Pierre de Fermat (1601 ou 1607/8-1665)[1] escreveu:

[...] estou quase persuadido de que todos os números [da forma $2^{2^n}+1$ ($n \in \mathbb{N}_0$)][2] *são números primos...*

Não tenho uma demonstração exacta disto, mas excluí uma tão grande quantidade de divisores através de demonstrações infalíveis, e tenho umas tão grandes luzes que fundamentam o meu pensamento, que teria dificuldade em me desdizer.

Fermat repetiria esta sua convicção em várias outras cartas[3] ao longo da vida. O interesse num resultado deste tipo seria o de poder dar-se exemplo, de um modo relativamente fácil, de números primos tão grandes quanto se queira, o que ainda hoje não se sabe fazer. Isto apesar de, em 1964, C. P. Willans ter construído[4] uma fórmula para o n-ésimo número primo, P_n, a partir do teorema de Wilson[5] que caracteriza os números primos como os números k tais

Retrato de Fermat, por Roland Lefèvre
(Musée de la Ville de Narbonne)

[1]Há algumas dúvidas sobre a data de nascimento de Fermat: ver *http://www.emis.de/newsletter/newsletter42.pdf*, p. 12.

[2]Fermat diz isto de um outro modo, que não interessa aqui referir. Ver pp. 205-206 do segundo volume das *Oeuvres de Fermat*, publicadas por Paul Tannery e Charles Henry, Gauthier-Villars (1891-1912), disponíveis em *http://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath*. Relembre-se que 2^{2^n} representa, por convenção (para evitar o uso de alguns parêntesis), o número $2^{(2^n)}$, e não $(2^2)^n$.

[3]De novo a Frénicle, em 18 de Outubro de 1640 (pp. 207-208 do vol. II das *Oeuvres de Fermat*), a Mersenne em 25 de Dezembro de 1640 (pp. 212-213), a Pascal em 29 de Agosto de 1654 (p. 309-310), a Kenelm Digby em Junho de 1658 (pp. 404-405; p. 316 do vol. III), a Carcavi em Agosto de 1659 (p. 434).

[4]C. P. Willans, *"On Formulae for the* n*th Prime Number"*, *The Mathematical Gazette* **48** (1964) 413-415.

[5]Apesar de ter este nome, este resultado era já conhecido por Bhaskara (séc. VII) e, posteriormente, por al-Haytham (séc. X-XI). John Wilson (1741-1793) apenas o redescobriu, não o tendo conseguido demonstrar. A primeira demonstração conhecida do teorema "de Wilson" foi dada por Lagrange, em 1773 (*http://en.wikipedia.org/wiki/Wilson's_theorem*).

que $\frac{(k-1)!+1}{k}$ é um número inteiro:

$$P_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left\lfloor \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \left\lfloor \cos^2 \pi \frac{(k-1)!+1}{k} \right\rfloor \right)^{-1/n} \right\rfloor$$

onde (x) denota a parte inteira de x, ou seja, o maior inteiro que não ultrapassa x. Várias outras fórmulas foram entretanto construídas[6], em geral de alguma forma codificando um ou outro critério de primalidade, mas são todas computacionalmente inúteis, não permitindo calcular efectivamente números primos "grandes", não se conhecendo nenhuma expressão que, dado um número natural n, forneça um número primo tanto maior quanto n o for e que dê lugar a um número de operações simples[7] que seja directamente proporcional a n. A expressão de Fermat, $2^{2^n}+1$, daria uma tal função.

Mas o arquitecto da Teoria dos Números moderna estava errado, e os números $F_n=2^{2^n}+1$, hoje conhecidos como *números de Fermat*, não são todos primos. De facto, em 1732, Euler mostra que 641 divide F_5, algo que Fermat poderia ter facilmente feito se não estivesse, por razões que se desconhecem, tão convencido de que eram todos primos. Sabe-se hoje que F_n é composto para $n \in \{5, 6, ..., 32\}$. O número F_{33}, um gigante com 2 585 827 973 algarismos (!), é assim o primeiro número de Fermat que não se sabe se é primo ou composto. Wilfrid Keller da Universidade de Hamburgo mantém uma página com as últimas informações sobre a factorização destes números em:

http://www.prothsearch.net/fermat.html

A primalidade de um número de Fermat pode ser decidida com uma única divisão, em consequência de um resultado publicado em 1877 por Jean François Pépin (1826-1904):

$$F_n \text{ é primo se e só se } F_n \text{ dividir } 3^{\frac{F_n-1}{2}}+1,$$

hoje conhecido como *teste de Pépin*[8]. Essa divisão pode ser efectuada muito eficientemente usando bons algoritmos de exponenciação modular[9]. O grande obstáculo à determinação da primalidade dos números de Fermat é o crescimento desmesurado destes, cujo número de algarismos, grosso modo, duplica quando se passa de um deles para o seguinte. Isto faz com que seja um autêntico desafio lidar com estes números.

Mas mais complicado ainda é encontrar um divisor próprio de um número de Fermat[10], mesmo depois de se saber que este é composto. No início deste ano de 2010 sabia-se, graças ao teste de Pépin, de quatro números de Fermat que eram compostos, sem se conhecer nenhum dos seus factores: F_{14}, F_{20}, F_{22}, F_{24} (desde 1963, 1987, 1993 e 1999, respectivamente). Causou, pois, alguma sensação o anúncio, a 3 de Fevereiro, de que tinha sido encontrado um factor primo de F_{14} (4933 algarismos):

$$1784180997819127957596374417642156545110881094717 \times 2^{16} + 1.$$

Veja-se a reacçao entusiástica dos respectivos *tifosi*, em:

http://www.mersenneforum.org/showthread.php?=13051

Para adicionar à festa, a 26 de Março, foi anunciada a descoberta de um factor de F_{22} (1 262 612 algarismos!): $3853959202444067657533632211 \times 2^{24}+1$. E no dia seguinte, a 27 de Março, foi encontrado o sexto factor primo de F_{12}, que, apesar disso, não está ainda completamente factorizado! Como pode ser visto no início da página de W. Keller acima mencionada, e respectivos *links*, os adeptos estão ao rubro! Como alguém já declarou no fórum *www.mersenneforum.org*: "Este é o ano em que se fez contacto com muitos factores de Fermat!"

As atenções estão agora centradas em F_{20}, F_{24} e F_{33}. Para ajudar na busca, o leitor interessado em colaborar na procura distribuída dos factores dos números de Fermat deve ir a

http://www.fermatsearch.org

Quem sabe se não acaba o ano a brindar com a equipa! Boa sorte!

[6]Ver *http://en.wikipedia.org/wiki/Formula_for_primes* e *http://mathworld.wolfram.com/PrimeFormulas.html*.
[7]Para as quais exista um programa que as execute com um número de passos directamente proporcional ao tamanho do maior dos dados de entrada (i.e. do *input*).
[8]Ver *http://primes.utm.edu/prove/prove3_1.html*
[9]Ver *http://en.wikipedia.org/wiki/Exponentiation_by_squaring*
[10]Sabe-se que um factor primo de F_n tem deter a forma $2^{n+2}k+1$.

Tabela de Publicidade

Gazeta de Matemática 2010

Características Técnicas da Revista:

Periodicidade: Quadrimestral
Tiragem: 2.000
Nº de páginas: 64
Formato: 20.2cmx26.6cm
Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura.

Condições Gerais:

Reserva de Publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.
Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência minima de 30 dias
Condições de pagamento: 30 dias após data de lançamento.

Especificações Técnicas:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK
Resolução: 300 dpi (alta resolução)
Margem de corte: 4 mm

Localizações Específicas:

Verso capa – 1240€
Contracapa – 1100€
Verso de contracapa – 990€

Contactos:

Ana Rita Ferrer

tel: 21 7939785
tlm: 961848966
rita.ferrer@spm.pt

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.

Tabela de Publicidade - 2010:

Formato	ímpar	par
Página inteira	590€	490€
½ página ao baixo	390€	290€
½ página ao alto	390€	290€
¼ página	220€	170€
1/8 página	120€	120€
Rodapé	220€	170€

por Jorge Nuno Silva
[Universidade de Lisboa]

Algo de Novo no Debate Sobre o Ensino da Matemática?

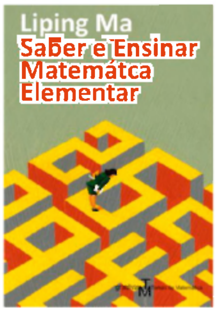
O ensino da matemática é tema sobre o qual as opiniões habitualmente se extremam, gerando diálogos de surdos e sermões a convertidos. Contudo, a recente visita de Hung-Hsi Wu, matemático de Berkeley, introduziu algo de novo neste debate. As suas propostas não cabem em nenhuma das "ideologias" que se têm gladiado entre nós. Além disso, trata-se, na nossa opinião, de ideias que merecem a reflexão geral.

A experiência de Aharoni, exposta no livro *Aritmética para Pais* (Gradiva e SPM 2008), já nos tinha mostrado que o ensino da Matemática Elementar merece cuidados especiais. Ron Aharoni, matemático profissional, experimentou ensinar aos níveis mais baixos e descobriu que, além de não estar preparado para o fazer, esse tipo de docência é muito exigente a vários níveis.

Se bem que Aharoni tenha hoje uma contribuição pedagógica e didáctica importante, tendo até prolongado a sua incursão no terreno da docência da Matemática Elementar, todos podemos partilhar uma conclusão: a muita matemática superior que levava na bagagem foi de pouca utilidade para ensinar conceitos básicos às criancinhas.

Mais recentemente, a SPM e a Gradiva publicaram *Saber e Ensinar Matemática Elementar*, de Liping Ma. Da sua leitura sai reforçada a ideia que tirámos de *Aritmética para Pais*. Além disso, como a formação universitária dos professores americanos tem alguns traços comuns com a dos nossos, há reflexões que migram por analogia. Relembremos que Ma mostra que, apesar da formação superior, os docentes americanos evidenciam um desempenho deficiente, ao contrário dos professores chineses, cuja formação se reduz a três anos lectivos após o 9.º ano.

Ao longo da nossa experiência profissional formámos a convicção, reforçada com a leitura destas duas obras que recenseámos nestas páginas, de que urge encontrar a virtude entre os vícios da "sopa rala" e da "carne dura" (terminologia de Elon Lima).



O livro de Liping Ma faz parte da colecção "Temas de Matemática" SPM / Gradiva

Entre nós, há professores que foram expostos a muita matemática superior, que se revela essencialmente irrelevante e desmotivadora, embora haja outros que são lançados na docência com muita bagagem pedagógica mas pouco conteúdo científico.

Recentemente, tivemos a visita de Hung-Hsi Wu, professor da UC Berkeley (de quem, quando estudante de doutoramento, fui assistente). A conferência que Wu proferiu na FCUL, a convite do Instituto de Educação e do Departamento de Matemática, versava exactamente esta questão. Além do invulgar convite em conjunto, que esperamos seja augúrio de um diálogo que todos anseiam, a conferência permitiu que um matemático sénior pudesse argumentar contra a ideia de que "quanto mais matemática os professores souberem, melhor ensinam" sem cair na apologia da pedagogia sem conteúdo.

Wu faz mais do que procurar a mediação entre extremos, ele propõe que a matemática a ensinar a futuros professores seja diferente da que normalmente se ministra aos estudantes, independentemente de estes planearem carreiras de investigação ou outras. Propõe, por exemplo, que o aparato teórico subjacente aos números racionais seja construído de uma maneira particular, baseada na representação geométrica, que permita ao futuro professor ter um encadeamento rigoroso de conceitos, a que poderá recorrer quer nas diversas implementações didácticas quer para esclarecer dúvidas próprias ou alheias. A construção dos números reais por sucessões ou cortes de Dedekind, por exemplo, não tem lugar neste contexto.

Hung-Hsi Wu

Wu, questionado, deu vários exemplos concretos de que o conhecimento superior de alguns tópicos não ajuda à introdução dos respectivos conceitos no ensino não superior. Às vezes é preferível um conhecimento menos sofisticado. É natural as matérias sugerirem a respectiva didáctica, e o enquadramento superior pode atrapalhar em vez de ajudar. Wu ilustrou com o ensino da parábola: aos futuros professores pouco interessa ver a parábola no contexto do Cálculo Infinitesimal, uma aproximação mais elementar é aqui vantajosa. Aqui, como é habitual na matemática, "elementar" não é sinónimo de "fácil". Essa confusão já fez vítimas em demasia...

Quando um elemento da assistência lhe perguntou qual a profundidade de conhecimentos que preconizava para um professor, Wu chocou alguns dizendo: "Um professor do ano *n* deve saber bem a matéria até ao ano *n*+3." Isto quer dizer que a Matemática do 12.º chega, na sua opinião, para formar um bom professor do 9.º.

O termo *Engenharia Matemática* é utilizado por Wu para referir o processo de criar matemática correcta e útil para os futuros professores. Há várias categorias de alunos que recebem as disciplinas de matemática de forma adaptada às suas necessidades futuras (estudantes de engenharia, informática, biologia, etc.). Porque é que não se passa o mesmo com os futuros professores? Noutra conferência na FCUL, Hung-Hsi Wu particularizou esta ideia, explanando o tratamento que defende para a Geometria na formação de professores, inspirado essencialmente no *Erlanger Program* de Klein.

A tarefa que Wu propõe parece-nos da maior importância, mas sabemos que é de difícil execução. Não é mais fácil ensinar a todos da mesma forma, ou fazê-lo de forma incipiente?

O ensino da matemática entre nós, os resultados mostram-no, precisa de melhorar. Para tal os agentes têm de conseguir consensos mínimos. O nosso debate tem estado inquinado e radicalizado. Felizmente, nos últimos anos surgiram críticos que apontam incessantemente a nudez do rei. É bom que o façam, sempre! O passado recente é trágico. Contudo, neste diálogo de surdos não basta calar o adversário e afastá-lo da ribalta. Muito menos se resolverão os nossos problemas com recurso a métodos, ideias e agentes de um passado mais remoto.

É importante que as instituições e as pessoas com longa experiência na formação de professores – departamentos de matemática, de educação, ESEs – confrontem as suas ideias. Mais do que apoucar o adversário, é premente procurar terreno comum, em que o diálogo seja viável.

Estamos tão preocupados com o aspecto utilitário do ensino que esquecemos a estética da matemática e de como as nossas escolas a têm escamoteado aos nossos filhos.

Um outro matemático que abandonou o ensino universitário para explorar as escolas foi Paul Lockhart, que escreveu *A Mathematician's Lament* (Bellevue Literary Press 2009), um livro que é um enorme grito de revolta: o que é que aconteceu à belíssima matemática e ao supremo prazer de pensar? Vale a pena ler esse livro-queixume, talvez utópico, mas que nos recorda os aspectos menos pragmáticos e mais artísticos da rainha das ciências, e nos mostra quão longe nós estamos de promover a sua apreciação entre os jovens.

Caderno_2
quarta-feira, 23 de Junho de 2010 14:07:38

Bartoon

por **Luis Afonso**

Publicação gentilmente autorizada pelo autor. Público, 31/03/2010

Ficha Técnica

Director Jorge Buescu [Universidade de Lisboa]

Vice-Directores J. Pimentel Nunes [Instituto Superior Técnico]
Adérito Araújo [Universidade de Coimbra]
Rogério Martins [Universidade Nova de Lisboa]

Conselho Editorial Afonso Pedrosa Pinto [Escola S/3 S. Pedro Vila Real]
Carlota Simões [Universidade de Coimbra]
Elisabete Rodrigues [Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Lisboa]
Graciano de Oliveira [Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia]
Henrique Leitão [Universidade de Lisboa]
João Filipe Queiró [Universidade de Coimbra]
José Francisco Rodrigues [Universidade de Lisboa]
José Miguel Rodrigues de Sousa [Escola Secundária Felismina Alcântara, Mangualde]
Juan-Miguel Gracia [Univ. Vitoria, Espanha]
Lina Fonseca [Escola Superior de Educação, Viana do Castelo]
Luís Madureira [antigo professor na Esc. Sec. Padre António Vieira]
Maria do Céu Pinto [Universidade de Coimbra]
Manuel Domingos Oliveira Cadete [Universidade Agostinho Neto]
Paulus Gerdes [Universidade Eduardo Mondlane, Maputo, Moçambique]
Raquel Escórcio [E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho]
Roberto Ramalho [Univ. Pernambuco, Recife, Brasil]
Teresa Almada [Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia]

Redactores António Pereira Rosa [ES Mª Amália Vaz de Carvalho]
Daniel Pinto [Universidade de Coimbra]

Assistentes Editoriais Renata Ramalho [SPM]
Ana Figueiredo [SPM]
Sílvia Dias [SPM]

Revisão Margarida Robalo

Concepção e mantuenção do portal Web Pedro Quaresma [Universidade de Coimbra]

Design Filipe Branco

Impressão Dossier - Comunicação e Imagem.

Propriedade Sociedade Portuguesa de Matemática,
Av. da República 45, 3º Esq. 1050-187 Lisboa
Tel.: 21 793 97 85 | Fax: 21 795 23 49
E-mail: spm@spm.pt

Tiragem 2.000 Exemplares

ISSN 0373-2681

ICS 123299

Depósito Legal 159725/00

Capa Ilustração de Filipe Branco alusiva ao artigo "Matemática e Futebol"

Encontro Nacional
Sociedade Portuguesa de Matemática

8, 9 e 10 de Julho

Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Instituto Politécnico de Leiria

Suplemento 2010

www.enspm10.ipleiria.pt

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

IPL instituto politécnico de leiria

Caderno_2
quarta-feira, 23 de Junho de 2010 14:08:23

por Sílvia Nogal Dias
[Gabinete de Comunicação da SPM]

Oradores convidados ENSPM2010

Liping Ma (Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching)

Liping Ma era ainda estudante quando foi enviada de Xangai para uma remota região rural da China para ser "reeducada" por camponeses, vindo a tornar-se professora na aldeia em que vivia. A sua carreira no ensino de Matemática Elementar começava assim no contexto da Revolução Cultural Chinesa. Durante os sete anos seguintes, leccionou os cinco níveis de escolaridade e tornou-se directora da escola local. Mais tarde, foi contratada como Directora-Geral da Educação Básica de todo o concelho. De regresso ao meio urbano, fez uma pós-graduação em Educação em Xangai e, em 1988, rumou aos Estados Unidos para estudar na Michigan University. Ali trabalhou em diferentes áreas, como formação de professores, educação matemática e educação comparada.

Liping Ma

Mas foi quando participou num inquérito nacional sobre a compreensão matemática dos professores americanos do Ensino Básico que se apercebeu dos equívocos que existiam entre eles, o que a levou a fazer comparações com os docentes chineses. Iniciou assim uma investigação sobre o ensino da matemática nos dois países, que daria origem ao aclamado livro *Saber e Ensinar Matemática Elementar*, recentemente publicado na colecção SPM/Gradiva "Temas de Matemática". A obra, elaborada no âmbito do doutoramento que realizou na Stanford University e do pós-doutoramento concluído em Berkeley, traça algumas diferenças entre o ensino na China e o ensino nos EUA. Nela, Liping Ma lançou novas ideias para o debate sobre a educação e os métodos de ensino, estabelecendo relações entre a formação dos professores, as práticas docentes e a aprendizagem de crianças e jovens.

Actualmente, Liping Ma é investigadora na Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching e uma das vozes mais ouvidas no debate sobre o ensino.

Robin J. Wilson (Open University e Oxford)

Recentemente reformado da Open University, o matemático britânico Robin J. Wilson tem uma carreira com interesses bastante variados, entre os quais têm destaque a História da Matemática e a sua divulgação. Deixou o seu legado na *European Mathematical Society Newsletter*, de que foi editor-chefe entre 1999 e 2003, e, até à data, publicou cerca de trinta obras, incluindo livros muito populares sobre o jogo *Sudoku* ou o Teorema das Quatro Cores.

Em 2008, lançou *Lewis Carrol in Numberland*, traduzido para espanhol e japonês. Numa alusão a

Alice no País das Maravilhas e a *Alice do Outro Lado do Espelho*, Wilson desconstrói o trabalho de Lewis Caroll à luz da matemática. Entre as suas obras contam-se também *Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History*, de 2004, e *Four Colours Suffice: How the Map Problem Was Solved*, de 2002. Durante o encontro da Sociedade Portuguesa de Matemática, lançará *4000 Anos de Geometria*, livro organizado por Suzana Nápoles (Universidade de Lisboa) a partir das suas palestras.

Robin J. Wilson

Nascido em 1943, o matemático é filho de Harold Wilson, antigo primeiro-ministro britânico. Iniciou a vida académica na University College School, em Hampstead. Pertenceu ao quadro de honra do Balliol College, em Oxford, e obteve os títulos de mestre e de doutor na Pennsylvania University. Mas nem só de ciências exactas é feito o seu histórico académico. Revelando sempre um perfil multifacetado, repetiu a proeza de pertencer ao quadro de honra quando frequentava o curso Humanidades com Música, na Open University.

Ao longo da sua carreira, tem vindo a demonstrar particular interesse pela Teoria dos Grafos, nomeadamente pelos problemas de coloração, como o das quatro cores, e por história da matemática.

André Neves (Imperial College)

André Arroja Neves nasceu em 1975, em Lisboa, e tem desenvolvido investigação nas áreas de geometria diferencial e análise de equações com derivadas parciais. Actualmente professor do Departamento de Matemática Pura, do Imperial College, em Londres, iniciou a vida académica no Instituto Superior Técnico (IST). Além de Luís Barreira, orientador de licenciatura, vários nomes ligados ao IST, como Miguel Abreu, Rui Loja Fernandes, Carlos Rocha e Ana Cannas, influenciaram o seu percurso. Terminada a licenciatura em Matemática, em 1999, partiu para os EUA para prosseguir os seus estudos. Na Stanford University obteve o doutoramento em Matemática, que fez entre 2000 e 2005, orientado por Richard Schoen. A partir de 2007 integrou a Princeton University como instrutor, passando mais tarde a trabalhar como professor assistente na mesma instituição.

André Neves com a filha de 17 meses

André Neves recebeu vários prémios e bolsas de diversas instituições. Em 2004, a Fundação Calouste Gulbenkian atribuiu-lhe uma bolsa de investigação com a duração de um ano. No ano seguinte recebeu do Clay Mathematics Institute o "Clay Lifto Fellow", que apoia recentes doutorados. Em 2006 foi galardoado com o "Excellence in Teaching Award", pelo Enginnering Council de Princeton, e a National Science Foundation concedeu-lhe uma nova bolsa entre 2006 e 2009.

O seu percurso profissional tem sido marcado pela presença em diversos eventos internacionais. No seu currículo tem também inúmeros artigos publicados, muitos deles relacionados com topologia, como por exemplo "Singularities of Lagrangian Mean Curvature Flow: Zero-Maslov", apresentado em 2007 na revista *Inventiones Mathematicae*.

por **Renata Ramalho**
[Gabinete de Comunicação da SPM]

Os Escritos Económicos de Bento de Jesus Caraça

Foi um dos maiores nomes da cultura científica portuguesa no século XX. Conhecido como matemático, divulgador, professor e até activista político, esteve, no entanto, toda a sua vida profissional numa Escola Superior de Economia e Gestão, antecessora do Instituto que hoje tem o mesmo nome. No livro *Bento de Jesus Caraça – Inéditos de Economia Matemática*, textos seus reunidos pelo economista Carlos Bastien permitem desvendar esta sua faceta tão pouco explorada.

Como é que surgiu a ideia deste livro?

Fui aluno e sou professor do Instituto Superior de Economia e Gestão (ISEG), a escola de Bento de Jesus Caraça. Não o conheci pessoalmente, mas a sua intervenção na vida política e cultural do País e a sua condição de matemático e de académico fizeram dele uma figura marcante cuja memória está presente desde a sua época, influenciando sucessivas gerações. Quando procurei entender com algum pormenor a sua acção, verifiquei que existiam diversos estudos sobre o seu perfil enquanto matemático e professor e até alguma literatura de história política que o nomeava. Mas intrigou-me a quase completa ausência de referência ao seu pensamento económico. E que, aos 18 anos, entra como aluno na escola superior, faz um Curso de Comércio, que era o Curso de Economia na designação da época, lecciona toda a vida numa escola de economia, dirige um Centro de Matemática Aplicada à Economia (CEMAE), produz algumas linhas de orientação económicas enquanto dirigente político e é consultor económico de organizações sindicais. Alguma coisa Caraça havia de pensar a respeito de economia. Embora sabendo que a sua carreira académica tenha sido a de professor de matemáticas superiores, parti em busca desse seu lado oculto sobre o qual só tinha encontrado uma ou outra alusão circunstancial.

Onde é que encontrou os textos agora publicados?

Em parte, no arquivo do próprio ISEG, onde existe o seu processo de aluno, contendo alguns dos seus trabalhos académicos. Existe ainda o seu arquivo pessoal, um conjunto vasto de manuscritos que foram conservados pela família e depositados na Fundação Mário Soares. A fundação digitalizou e catalogou toda essa documentação, o que constituiu um enorme progresso para a investigação. Encontrei ali uma série de documentos, na sua maior parte nunca referidos nos estudos já publicados. Encontrei em boa medida o Caraça que procurava, uma dimensão sem dúvida importante para a reconstituição do seu perfil enquanto homem de cultura e enquanto cidadão.

Há algum texto que destaque particularmente?

Há dois textos relevantes que são completamente inéditos. Um é a tese de licenciatura, um texto de economia neoclássica de 1923. Corresponde a uma forma de apresentação da teoria económica que era praticamente desconhecida em Portugal. Ocupa-se aí de uma economia muito diferente da que lhe tinha sido apresentada enquanto estudante do Curso de Ciências Económicas. Embora esse seu texto não trouxesse inovação na cena internacional, supunha uma inquietação teórica e uma atenção ao que se ia fazendo lá fora pouco comuns num estudante de licenciatura. É um texto obscuro na sua função, pois o regulamento do Instituto não previa a apresentação de teses de licenciatura, mas antes a realização de estágios profissionais. Aliás, Caraça realizou três destes estágios, cujos relatórios também estão publicados no livro. Mas a tese é algo misteriosa. Como Caraça exercia já funções docentes e se propunha a uma carreira académica, é possível que lhe tenha sido solicitado esse trabalho ou que ele mesmo tenha tido a iniciativa de o apresentar. O segundo texto, "Definições e Fórmulas", é um exercício de economia marxista, o único que Caraça elabora, pelo menos se entendermos aqui a expressão 'marxista' em sentido estrito. E um texto que discute as contradições do capitalismo. Corresponde, aliás, a uma apresentação muito própria, original e pouco vulgar em relação ao que os teóricos da época e mesmo posteriores, na sua generalidade, fizeram sobre a dinâmica do sistema económico capitalista.

Bento de Jesus Caraça nasceu em Vila Viçosa, em 1901, filho de trabalhadores rurais. A ele se devem várias obras de matemática de elevada qualidade, que modernizaram o ensino desta disciplina. A ele se devem também várias obras de divulgação e de intervenção, nomeadamente os célebres *Conceitos Fundamentais de Matemática* e *A Cultura Integral do Indivíduo*. O Governo de Salazar expulsou-o do ensino universitário em 1946. Faleceu em Lisboa, em 1948, vítima de doença cardíaca. E uma figura maior da matemática, da cultura científica e da liberdade. (retirado da contracapa de *Bento de Jesus Caraça – Inéditos de Economia Matemática*)

O marxismo influencia a sua investigação?

O marxismo de Caraça é bastante heterodoxo. Não tem a visão da economia marxista como expressão de interesses de classes oprimidas. Para ele, a ciência é una. A ideia que tem sobre a cultura popular, designadamente a económica, é a de uma cultura elaborada e difundida pelos intelectuais e não uma espécie de contracultura. E esse o sentido da sua acção na Universidade Popular e na direcção da Biblioteca Cosmos. Mesmo quando se refere à História da Economia Política, não defende a ideia de que Marx representa uma ruptura na História da Economia. A ruptura é para ele a matematização da economia. Há uma economia literária, pré-histórica, e uma economia científica que é matematizada, construída à semelhança da Física e das Ciências da Natureza.

Caraça tem uma preocupação muito grande em oferecer cursos de Matemática Aplicada à Economia no CEMAE, cursos de pós-graduação em que a matemática está fortemente presente...

A maioria dos colaboradores vem mesmo da matemática pura, até porque as pessoas que colaboram, como o Manuel Zaluar Nunes ou o José Morgado, têm formação matemática e não económica. No CEMAE, Caraça procura oferecer uma formação de base em matemática como condição do desenvolvimento quer da econometria quer do cálculo actuarial, que são as duas áreas em cujo desenvolvimento aposta mais claramente. No último ano antes da extinção do CEMAE, surge também a problemática da contabilidade nacional, justamente quando se apercebe de que essa é uma das temáticas importantes da agenda científica e prática da época. Aliás, o sistema de contabilidade nacional foi em boa parte construído por pessoas que frequentaram o CEMAE e que mantiveram uma relação muito próxima com Caraça. Refiro-me a Amaro Guerreiro, por sinal um economista a quem o Instituto recusou o doutoramento por razões puramente ideológicas, mas existiram outros casos semelhantes.

Qual é o impacto que esses cursos têm nos cursos que o ISEG oferece hoje?

Grande. Hoje todos os cursos de Economia têm uma componente matemática significativa, sendo que o ISEG acabou por acompanhar com algum atraso a tendência internacional. O momento-chave é a reforma dos estudos de economia em 1949. Mas, em termos directos, Caraça tem pouco a ver com esse processo, porque ele já tinha falecido e as pessoas que trabalharam com ele já tinham sido afastadas da escola ou nem sequer lhes tinha sido permitido iniciar uma carreira académica. A reforma acaba por ser protagonizada por uma nova geração, na qual se destaca – no que em particular respeita à introdução dos métodos quantitativos – o Professor Bento Murteira. Mas o trabalho que realizaram não terá sido totalmente perdido. Alguma memória terá ficado.

Caraça tinha grande contacto e interesse pela matemática. Porque é que não procurou ser formalmente um matemático?

Quando ele iniciou a sua carreira, a matemática e a economia eram campos separados. Predominava no Instituto, e não só, uma economia literária cientificamente pouco relevante, entregue a professores com formação jurídica. Não sabiam matemática nem queriam saber, e em muitos casos não eram exemplo de actualização científica. Ao seu lado existia a matemática, por sinal a área em que os professores do ISEG – designadamente Mira Fernandes e o próprio Bento Caraça – atingiram maior projecção científica, mas a sua acção era completamente desligada da economia. Mira Fernandes era um matemático, não tinha formação económica. Embora no mundo já houvesse correntes de pensamento económico que faziam forte uso da matemática, no Instituto esta era entendida como uma forma de disciplinar o raciocínio dos estudantes e não mais do que isso. E possível que a opção de Caraça pela matemática em detrimento da economia tenha sido resultado do seu contacto com Mira Fernandes.

Pode-se dizer que Caraça era mais um educador do que um investigador?

Não sou a pessoa mais adequada para fazer uma avaliação, mas tudo o que tenho lido e ouvido é que tinha uma excepcional capacidade pedagógica, aliás testemunhada pelas pessoas que frequentavam as suas aulas. Não todos os alunos, pois os maus alunos não tinham nenhum gosto pelas aulas de Caraça. Eram concebidas para um patamar de bons alunos, eram aulas exigentes. Caraça era pouco tolerante com alunos "cábulas". Para mim, e creio que para muitas outras pessoas de diferentes gerações, o Bento Caraça matemático e educador é o autor dos fascinantes *Conceitos Fundamentais de Matemática*, que não é uma obra de investigação.

Há também uma preocupação em criar as bases para a investigação em Portugal...

Na sua acção à frente do CEMAE, é manifesta a intenção de lançar as bases de uma investigação organizada no campo da economia quantitativa. Procurou criar grupos de investigadores, proporcionando-lhes uma formação de base sólida. Caraça tem significado no campo da economia matemática não tanto porque tenha feito grande trabalho no plano da investigação económica pura ou aplicada, mas justamente porque procurou lançar os alicerces da investigação nesse campo. M

Bento de Jesus Caraça
Inéditos de Economia Matemática

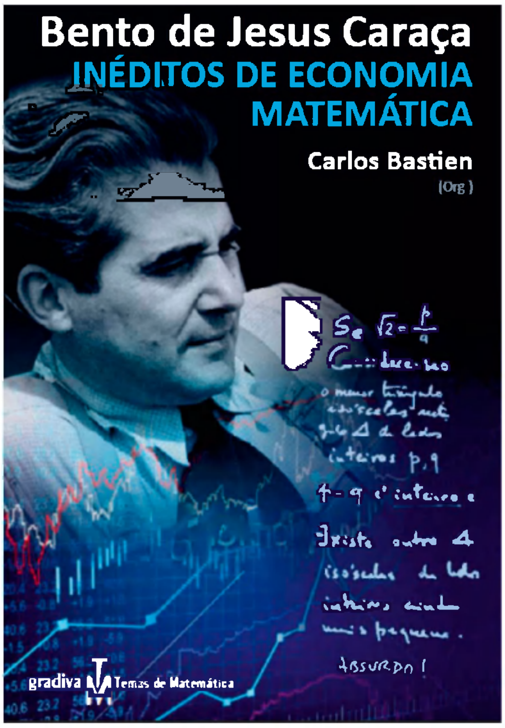
Prefácio

O livro que aqui se apresenta ao leitor revela uma face menos conhecida de Bento de Jesus Caraça – a de um matemático preocupado com questões de economia e de teoria económica. Na sua esmagadora maioria, os textos são inéditos e foram reproduzidos a partir de originais encontrados na Fundação Mário Soares, que acolheu, catalogou e conserva o espólio do autor, assim como no Instituto Superior de Economia e Gestão (ISEG), escola onde Caraça se formou e leccionou.

Nascido em Vila Viçosa de origem humilde – os pais eram trabalhadores rurais –, Bento de Jesus Caraça destacou-se desde muito novo pelo seu extraordinário vigor intelectual. Apoiado pela esposa do empregador do pai, concluiu a instrução primária na sua terra natal, estudou em Santarém e depois no Liceu Normal de Pedro Nunes, onde terminou o curso liceal, entrando para o então Instituto Superior de Comércio. Na altura, esse estabelecimento, formado em 1911, já na Rua do Quelhas, onde permanece, era uma sombra daquilo que se tornaria mais tarde, com o nome de Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras (1930), Instituto Superior de Economia (1972) e, finalmente, Instituto Superior de Economia e Gestão (1990).

Entretanto, o ISEG progrediu imensamente. Bento de Jesus Caraça, assim como o seu professor Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958) e alguns dos que se seguiram, entre os quais Bento Murteira (n. 1924), foram agentes cruciais do grande progresso registado. Bento de Jesus Caraça, em particular, pelas suas excepcionais qualidades docentes, pelo seu conhecimento profundo da matemática, pelo seu empenho na divulgação da ciência e pelo brilho entusiasta que trazia a tudo aquilo em que se empenhava, foi um factor primordial para o progresso do instituto.

Será justo realçar que, em geral, os matemáticos e estatísticos – e o empenho no estudo e na investigação matemática e estatística – foram decisivos para o progresso dos estudos de economia, de finanças e de gestão, tanto naquela escola como no País e no mundo. Trouxeram um rigor novo, trouxeram critérios científicos novos, trouxeram – tanto com Mira Fernandes como na actualidade – uma internacionalização que é a marca da ciência.



Bento de Jesus Caraça - Inéditos de Economia Matemática
Bento de Jesus Caraça
Carlos Bastien (org)
"Temas de Matemática" SPM/Gradiva
240 páginas | 14,50€

[Bento de Jesus Caraça. Inéditos de Economia Matemática]

Quando Bento de Jesus Caraça entrou na Rua do Quelhas em 1918, foi imediatamente notado pelo seu professor Mira Fernandes, que o convidou para assistente, ainda estudante. Terminou o curso em 1923 com altas classificações. Nesse mesmo ano foi nomeado Professor Extraordinário e em 1929 Catedrático. Em 1938, em conjunto com os professores Mira Fernandes e Beirão da Veiga, fundou o Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia, do qual foi director até Outubro de 1946, ano da sua extinção por decisão ministerial. Este centro constituiu o primeiro grupo organizado de estudos sociais de base quantitativa. E o antecessor do actual Centro de Matemática Aplicada à Economia e Gestão (Cemapre), que também patrocina este livro.

Bento Jesus Caraça envolveu-se activamente na vida intelectual e científica portuguesa. Em 1940, foi um dos fundadores da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), de que foi presidente no biénio de 1943-1944. Foi colaborador frequente da *Gazeta de Matemática* e delegado da Sociedade a vários congressos internacionais.

Interveio criticamente em defesa da liberdade e do espírito crítico científico que, para ele, eram duas faces da mesma posição humanista. A sua verticalidade levou-o a ser expulso da escola que ajudou a construir.

Mas a sua actividade não esmoreceu. Passou o resto da vida a escrever, publicar, ensinar e intervir.

A sua actividade foi imensa e variada. Este livro, cuidadosamente organizado pelo professor Carlos Bastien, dá-nos conta de uma vertente menos conhecida. O estudo com que o nosso ilustre colega nos inicia na leitura ajuda-nos a perceber a época em que Caraça viveu e a sua herança intelectual. Ajuda-nos a perceber a sua confluência de interesses sociais e científicos. Leva-nos a percorrer com segurança estas páginas inéditas.

Numa edição como esta, as dívidas são muitas. Agradecemos ao nosso colega e amigo Carlos Bastien pelo seu incansável trabalho de estudo e edição. Agradecemos à Fundação Mário Soares e ao Instituto Superior de Economia pela ajuda no acesso aos originais. Agradecemos a João Caraça o incentivo e a autorização de publicação. Agradecemos à Gradiva e ao seu editor Guilherme Valente, herdeiros do espírito livre de Caraça e da sua histórica colecção Cosmos, pelo acolhimento dado a esta edição.

É uma coincidência feliz que este livro saia na colecção SPM/Gradiva, patrocinado pela Sociedade que o autor ajudou a fundar, e com apoio do Cemapre, que herda o seu interesse pelos estudos de economia matemática.

Matemática e Comboios
100 Desafios Matemáticos Relacionados com os Comboios

Helder Pinto

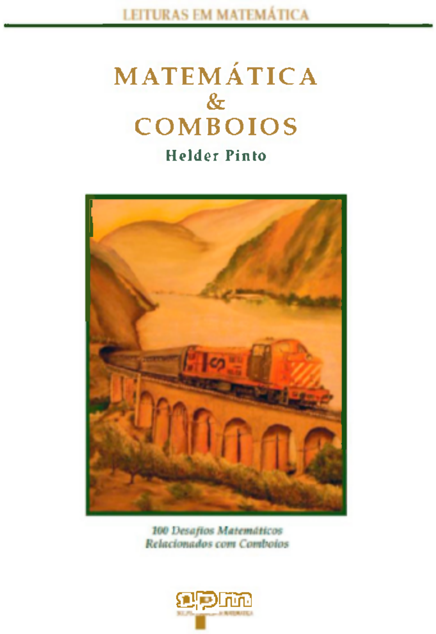
"Partimos finalmente. Escassos minutos depois, deixávamos a terra espanhola e entravámos na fronteira portuguesa. Aqui ninguém me perguntou pelo passaporte, apenas me pediram o nome. Ao dizê-lo repetiram-no mal e escreveram-no certamente ainda pior. Alegrei-me, como se tivesse chegado à minha pátria, pois havia alcançado o país no qual me esperavam amigos e um novo lar. E todo o trajecto era agora por caminho–de-ferro."

Hans Christian Andersen, *Uma visita em Portugal em 1866*

Prefácio

O comboio é um meio de transporte único que, de facto, possui uma mística que o difere dos restantes. Distingue-se pelo seu conforto e pela liberdade de movimentos que permite aos seus ocupantes; evidencia-se pelas paisagens únicas que, muitas vezes, apenas podem ser apreciadas na plenitude quando se viaja pelas linhas férreas e sobressai pelo convívio alegre entre amigos e familiares que mais nenhum meio de transporte consegue proporcionar. Por outro lado, muitos de nós cresceram a viajar de comboio – quer no dia-a-dia quer nas férias – e ainda hoje guardam a nostalgia desse tempo. No meu caso pessoal, nunca esquecerei as viagens de comboio na linha do Douro que fiz na minha infância para ir à aldeia dos meus avós. Era uma viagem que demorava uma tarde inteira, mas não fazia mal, pois a vida nesse tempo corria mais devagar… Não se pense, contudo, que este fascínio pelo comboio é coisa do passado, pois este ainda persiste nas novas gerações. Ainda hoje é possível encontrar, frequentemente, crianças fascinadas na sua primeira viagem de comboio coladas aos vidros da janela a ver a paisagem a passar; a saltar de banco em banco à procura de tudo ver; a ouvir atentamente o picar dos bilhetes e a imitar alegremente o barulho constante das rodas a passar pelas junções dos carris...

Helder Pinto é licenciado em Matemática (ramo educacional) pela FCUP e mestre em Matemática Pura pela FCTUC, estando actualmente a frequentar o doutoramento em História da Matemática da FCUL. Foi bolseiro na associação Atractor e publicou em 2009 o livro *História da Matemática na Sala de Aula* pela Associação Ludus.



Matemática e Comboios. 100 Desafios Matemáticos Relacionados com os Comboios
Helder Pinto
"Leituras em Matemática" SPM
Preço sob consulta

A matemática provoca o mesmo tipo de fascínio mas, infelizmente, num número muito mais restrito de pessoas. Ao longo da minha vida encontrei muitas (demasiadas, digo eu…) que detestavam matemática mas que achavam curioso o meu entusiasmo pelas viagens de comboio. Deste facto surgiu a ideia de escrever um livro que pudesse conjugar estas duas realidades: os comboios e a matemática. De modo a ser um livro acessível a todos, a escolha recaiu na adaptação de alguns enigmas matemáticos à temática ferroviária nas suas diversas vertentes – alguns verdadeiros clássicos que ao longo do tempo têm sido apresentados com diferentes "roupagens". Acrescentaram-se ainda alguns originais e o resultado final é o que se apresenta nas páginas que se seguem. Os enunciados dos desafios são acessíveis a uma vasta gama de leitores, embora a resolução de alguns (poucos) exija um pouco mais de conhecimentos matemáticos. Estes últimos mantiveram-se, pois as dificuldades na sua resolução podem ser bastantes instrutivas, quando mais não seja para mostrar que, em certos casos, problemas bastante simples podem necessitar de matemática mais "complexa".

Boa leitura e boas viagens de comboio.

Uma viagem no Douro

Uma das linhas de caminho-de-ferro mais belas de Portugal é a linha do Douro. O rio Douro, acompanhado pelas vinhas em socalcos a partir das quais é feito o famoso Vinho do Porto, é o principal atractivo que leva muitos turistas a fazer a viagem de comboio entre a estação de Porto São Bento e a estação do Pocinho. O Tiago e o seu pai decidiram um dia fazer este percurso, saindo de manhã de Porto São Bento. Ao fim de algum tempo, pergunta o Tiago ao pai:

- Quanto é que já andámos de comboio?

O pai responde-lhe da seguinte forma:

- Metade da distância a que estamos agora da estação da Régua.

O Tiago deu-se por satisfeito mas, bastante mais tarde, voltaria a questionar o pai:

- Que distância falta percorrer para chegarmos ao Pocinho?

- Percorremos 117 km desde a tua última pergunta. Curiosamente, a resposta à tua nova pergunta é a mesma de antes: "metade da distância a que estamos agora da estação da Régua".

Qual a distância entre a estação de Porto São Bento e a estação do Pocinho?

Os Instrumentos Náuticos de Navegação e o Ensino da Geometria

Margarida Pinto

Prefácio

O grande objectivo deste trabalho, que se apoia numa tese do Mestrado em Matemática para o Ensino da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, é a Geometria nos Ensinos Básico e Secundário. Abordando temas em geral aliciantes para os jovens, como o são a História da Expansão Portuguesa e a Astronomia, visitamos alguns resultados de Geometria, constantes ou não dos programas curriculares, mas sempre ao alcance dos alunos destes graus de ensino.

Assim, após uma breve incursão na Astronomia, onde nos limitamos à apresentação de alguns nomes e definições, analisamos o processo de construção e utilização dos instrumentos de determinação da altura de astros que se podiam encontrar a bordo de naus e caravelas. Leva-nos esta viagem a noções de Geometria como, entre outras, a relação entre a amplitude de um ângulo inscrito e a do correspondente ângulo ao centro, ou a de ângulos verticalmente opostos, além de aplicações elementares de Trigonometria Plana.

E porque nenhum dos instrumentos mencionados é funcional se não estiver convenientemente graduado, abordamos a construção geométrica de ângulos de diversas amplitudes, revisitando itens como a construção da mediatriz de um segmento, a bissecção de um ângulo por processos como a construção tradicional da bissectriz, a relação entre ângulos inscritos e ao centro ou utilizando uma ferramenta como o esquadro de carpinteiro. Deixamos uma palavra especial para a trissecção de um ângulo, impossível de efectuar se nos restringirmos à utilização de compasso e régua não graduada, mas possível com outros recursos, e que, além da inerente aplicação geométrica, pode permitir um passeio agradável e produtivo na História da Matemática.

Margarida Matias Pinto é mestre em Ensino da Matemática pela FCUL. Professora do ensino secundário, leccionou vários anos cadeiras dos departamentos de Matemática da FCUL e da FCTUN. Pertence ao quadro da Escola Secundária com 3.º ciclo de Gama Barros, onde é professora, funções que acumula com actividades de coordenação das Olimpíadas Portuguesas de Matemática.

O capítulo dedicado à construção de tabelas trigonométricas, indispensáveis a alguns dos Instrumentos de Navegação, é uma aplicação de propriedades trigonométricas de triângulos rectângulos complementada pela justificação geométrica dos valores de sin 0^0 e sin 90^0 e pela dedução de algumas expressões conhecidas como a fórmula de sin a/2 e a do seno da soma de dois ângulos.

No capítulo Aplicação aos Programas dos Ensinos Básico e Secundário, além de uma menção especial ao papel da História Universal e da Matemática na sala de aula, analisamos a determinação de um valor aproximado de por Arquimedes.

O desenvolvimento tecnológico trouxe aparelhos que permitem a navegação e a localização de rotas que dispensam os cálculos que eram uma constante até há poucas dezenas de anos. Apesar disso, as escolas superiores continuam a insistir que o ensino dos métodos tradicionais de navegação deve ter um forte peso na formação dos pilotos. Não o fazem por masoquismo mas porque não há tecnologias 100% fiáveis. Uma avaria em satélites ou uma decisão política de desligar alguns poderá deixar os navios sem qualquer meio de informação, abandonados à sua sorte no mar alto.

Hoje, como há séculos, é fundamental que pilotos e navegadores sejam capazes de recorrer às técnicas menos elaboradas para, em caso de necessidade, chegar a bom porto.

Os Instrumentos Náuticos e de Navegação e o Ensino da Geometria
Margarida Pinto
"Leituras em Matemática" SPM
Preço sob consulta

4000 Anos de Geometria

Robin Wilson

Capítulo "Platão"

O segundo grande período da Matemática Grega teve lugar em Atenas com a fundação da Academia de Platão por volta de 387 a.C. num subúrbio de Atenas chamado "Academia" — de onde deriva a designação. A Academia de Platão está retratada por Rafael no fresco *A escola de Atenas* com Platão e Aristóteles no topo das escadas.

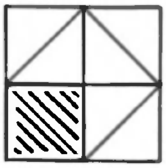
A Academia de Platão rapidamente se tornou o foco do estudo matemático e pesquisa filosófica. Diz-se que sobre a entrada estavam as palavras: *Que ninguém ignorante em geometria passe por estas portas*.

Platão escreveu um pequeno diálogo chamado *Meno* em que Sócrates pergunta a um jovem escravo como se duplica a área de um quadrado. O rapaz começou por sugerir que se duplicasse o lado do quadrado, mas isso multiplicaria a área por quatro.

Eventualmente ele irá pensar no quadrado cujo lado é a *diagonal* do quadrado inicial.

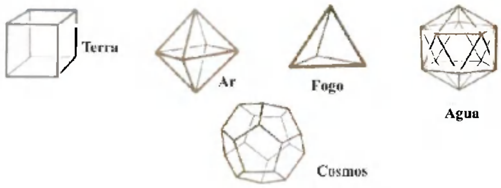
Robin Wilson, que colaborou em 1977 com Paul Erdos e tem o número Erdos 1, foi professor em Oxford, na Open University e no Gresham College. Tem importantes contributos na teoria dos grafos, no clássico problema das colorações de mapas e na história da matemática. É igualmente um dos mais conhecidos e respeitados divulgadores ingleses de matemática. (veja a biografia na página 26)

E um excelente exemplo do ensino por experimentação e está muito longe de qualquer coisa que se fizesse no Egipto ou na Mesopotâmia.

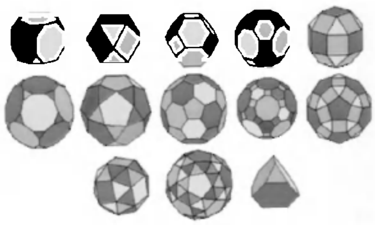


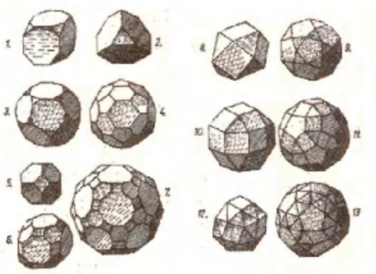
Platão acreditava que o estudo da matemática proporcionava o melhor treino para os que desejavam atingir cargos de responsabilidade no Estado. Na *República* discute exaustivamente a importância das artes matemáticas: aritmética, geometria, astronomia e música.

O livro *Timaeus* de Platão tem também interesse matemático e inclui a discussão dos cinco sólidos platónicos – o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro – nos quais as faces são todas polígonos regulares do mesmo tipo e a disposição dos polígonos em cada vértice é a mesma: por exemplo, o cubo tem seis faces quadradas em que três se encontram em cada vértice. Também associou quatro destes poliedros com os quatro elementos gregos – terra, ar, fogo e água – e associou o cosmos ao então recém-descoberto dodecaedro.



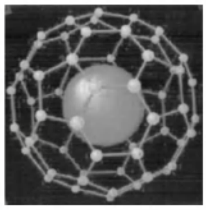
Cem anos mais tarde Arquimedes haveria de encontrar todos os sólidos semi-regulares, nos quais todas as faces são polígonos regulares mas não todos iguais.





Existem apenas 13 destes sólidos – por exemplo, o cubo truncado, obtido a partir de um cubo através do corte dos vértices, é formado por triângulos e octógonos. Têm nomes deliciosos, tais como o *Grande rombicosidodecaedro*, e foram posteriormente estudados por Johannes Kepler.

Alguns destes poliedros aparecem na Natureza como cristais e o icosaedro truncado, formado por pentágonos e hexágonos, surge na vida real como uma bola de futebol.



Curiosamente, acontece que *qualquer poliedro feito de pentágonos e hexágonos, com três faces a encontrarem-se em cada vértice (como numa bola de futebol), tem exactamente doze pentágonos*. Estes poliedros surgem também em química e na arquitectura.

Em química são designados por *fulerenos* ou *buckyballs*, e são moléculas cuja estrutura é a de um icoseadro truncado (C_{60}) ou outro poliedro formado por pentágonos e hexágonos.

4000 Anos de Geometria
Robin Wilson
"Leituras em Matemática" SPM
Preço sob consulta

Estas designações derivam do nome do arquitecto americano Buckminster Fuller, que desenhou a *cúpula geodésica*, uma estrutura muito leve e resistente, com uma relação qualidade/preço melhor do que qualquer outra. A sua aplicação mais conhecida foi no pavilhão americano na Feira Mundial "Expo 67".

FEIRA DE AUTORES ENSPM2010

9 de Julho | Instituto Politécnico de Leiria | 17h45 às 19h

Carlos Bastien
Jorge Buescu
Nuno Crato
Margarida Fonseca
Lipping Ma
Helder Pinto
Robin Wilson
e outros autores

Programa do ENSPM2010

Quinta-feira, 8 de Julho de 2010

- **9h00 - 13h00** - 3.º Mat Oeste
- **Almoço**
- **14h30 - 15h00** - Abertura do ENSPM
- **15h00 - 16h30** - Plenária + Mesa Redonda do Ensino, Liping Ma
- **16h30 - 17h00** - Café
- **17h00 - 18h15** - Sessão Temática I
- **18h15 - 19h00** - Prémio Doutor Pedro Matos
- **19h00 - 20h30** - Porto de Honra no Castelo

Sexta-feira, 9 de Julho de 2010

- **9h00 - 10h00** - Sessão Plenária, Jorge M. Pacheco, U. Minho
- **10h00 - 10h20** - Café
- **10h20 - 11h35** - Sessão Temática II
- **11h35 - 11h45** - Intervalo
- **11h45 - 13h00** - Sessão Temática III
- **Almoço**
- **14h30 - 16h00** - Plenária + Mesa Redonda da Investigação, André Neves
- **16h00 - 16h30** - Café
- **16h30 - 17h45** - Sessão Temática IV
- **17h45 - 19h00** - Feira de Autores
- **20h00** - Jantar do ENSPM2010

Sábado, 10 de Julho de 2010

- **9h00 - 10h00** - Sessão Plenária, Mário J. Edmundo, U. Aberta
- **10h00 - 10h20** - Café
- **10h20 - 11h50** - Plenária + Mesa Redonda da Divulgação, Robin Wilson
- **11h50 - 13h00** - Assembleia Geral da SPM
- **Almoço**
- **14h30 - 16h00** - Sessão Temática V
- **15h45 - 16h00** - Intervalo
- **16h00 - 17h15** - Sessão Temática VI
- **17h15 - 18h30** - Beberete

por Miguel Abreu e Filipe Oliveira
[Vice-presidentes da SPM]

Sobre a Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo

A Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo aferiu os alunos portugueses de doze anos por uma bitola inferior à que é usada internacionalmente para alunos de dez anos.

Na manhã do passado dia 7 de Maio tiveram lugar as Provas de Aferição de Matemática do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Foram realizadas por mais de duzentos mil alunos dos 4.º e 6.º anos de escolaridade. Na tarde desse mesmo dia, o Gabinete do Ensino Básico e Secundário da SPM divulgou um parecer bastante crítico sobre os enunciados destas provas (*http://www.spm.pt/files/outros/parecerafericao2010.pdf*). Fizemos parte do grupo de trabalho que o escreveu e subscrevemo-lo na totalidade. No entanto, em conversas posteriores com colegas de vários níveis de ensino, verificámos que há ainda um grande desconhecimento na comunidade matemática quanto ao baixo grau de exigência a que se chegou nestas provas de aferição.

O propósito deste pequeno artigo é contribuir para colmatar essa lacuna. Concentra-se na prova do 2.º Ciclo, dando exemplos concretos que serviram de base para o parecer da SPM e ilustram o seguinte facto grave:

• Cerca de 50% das perguntas da prova do 2.º Ciclo, para alunos do 6.º ano, são de 1.º Ciclo e, em geral, mais simples do que as perguntas sobre os mesmos tópicos que constam das provas do TIMSS para alunos do 4.º ano.

Informação Geral sobre as Provas de Aferição

Segundo a informação disponibilizada pelo Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação (GAVE) em *http://www.gave.min-edu.pt/np3/7.html*, as Provas de Aferição de Matemática dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico têm "por referência os aspectos da competência matemática apresentados no documento *Currículo Nacional do Ensino Básico* – Competências Essenciais, o programa em vigor e o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (em aplicação num número limitado de escolas)".

Os actuais Programas e Orientações Curriculares dos 1.º e 2.º Ciclos estão disponíveis em

http://sitio.dgidc.min-edu.pt/basico/Paginas/Programas_OrientacoesCurriculares.aspx, e o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico está disponível em

http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Os enunciados e critérios de correcção das provas de aferição estão disponíveis no *site* do GAVE referido acima.

Informação Geral sobre o TIMSS

O TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) é um estudo internacional conduzido pelo IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), sendo utilizado pelos países participantes para aferir, de forma comparável ao longo do tempo, os conhecimentos de matemática e ciência que os seus estudantes adquirem no final dos 4.º e 8.º anos dos respectivos ciclos de estudo.

O TIMSS foi implementado ao nível do 4.º ano em 1995 (26 países), 2003 (25 países) e 2007 (36 países), e ao nível do 8.º ano em 1995 (41 países), 1999 (38 países), 2003 (46 países) e 2007 (48 países). Os relatórios com os resultados de todos estes estudos podem ser consultados em *http://nces.ed.gov/timss/*, onde está também disponível metade das perguntas utilizadas nas provas realizadas até 2003 (inclusive). Portugal participou apenas em 1995, tendo obtido resultados muito fracos.

A Prova de Aferição de Matemática do 2.° Ciclo

Tanto no programa em vigor como no Novo Programa de Matemática, há grandes temas comuns aos três ciclos do Ensino Básico: "Números e Operações", "Grandezas e Medida", "Espaço e Forma" e "Organização e Tratamento de Dados". Apresentamos para cada um destes temas algumas questões da prova de aferição do 2.° Ciclo. Verifica-se facilmente, à luz dos documentos oficiais do Ministério da Educação, que são de facto questões do 1.° Ciclo de escolaridade.

Por outro lado, procurando estabelecer uma correspondência com os níveis de conhecimentos considerados adequados pela comunidade internacional, apresentamos questões extraídas das provas do TIMSS para alunos do 4.° ano de escolaridade. Estas questões são muito semelhantes às da prova de aferição portuguesa para alunos do 6.° ano, sendo mesmo em muitos casos de dificuldade e complexidade superiores.

EXEMPLO 1: Números e Operações

O programa em vigor e o Novo Programa de Matemática para o 1.° Ciclo estabelecem as seguintes metas:

• Identificar a metade, a terça parte, a quarta parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção.

• Compreender e usar os operadores: dobro, triplo, quádruplo e quíntuplo e relacioná-los, respectivamente, com a metade, a terça parte, a quarta parte e a quinta parte.

A Prova de Aferição agora realizada contemplava as seguintes questões:

Questão 2. O Rui partiu um chocolate em oito bocados iguais e comeu alguns dos bocados do chocolate. O Rui comeu 1/4 do chocolate. Quantos bocados de chocolate comeu o Rui?

Questão 11. Na piscina há 30 chapéus-de-sol: 1/3 são azuis, 1/5 são vermelhos e os restantes são verdes. Quantos chapéus-de-sol são verdes?

Como podemos ver, estas questões relacionam-se sem qualquer ambiguidade com os objectivos traçados para o 1.° Ciclo de escolaridade.

Na prova do 4.° ano do TIMSS realizada em 2003 perguntava-se o seguinte:

Questão M031065. Há 600 bolas numa caixa, e 1/3 das bolas são encarnadas. Quantas bolas encarnadas há na caixa?

Questão M012119. Janis, Maija e a sua mãe estavam a comer um bolo. Janis comeu 1/2 do bolo. Maija comeu 1/4 do bolo. A mãe comeu 1/4 do bolo. Quanto sobrou do bolo?

A. 3/4
B. 1/2
C. 1/4
D. Nada

São questões de dificuldade comparável que versam sobre a mesma matéria. De notar, no entanto, que a Questão M031065 do TIMSS menciona um número de bolas (600) que não pode ser representado pictoricamente pelo aluno. Em contraponto, no que diz respeito à questão 2 da Prova de Aferição nacional, o enunciado é acompanhado do seguinte desenho, que representa os oito bocados de chocolate:

Assim, contrariamente ao que sucede na prova internacional, o aluno do 6.° ano poderá em última análise visualizar o cálculo a efectuar, como quem conta pelos dedos, e chegar à resposta correcta mesmo sem dominar na totalidade os objectivos traçados no programa do 4.º ano transcritos mais acima.

De salientar ainda que o aluno que se apresenta à prova de aferição do 6.º ano pode usar a máquina de calcular, contrariamente aos alunos confrontados com a prova do TIMSS para o 4.º ano.

EXEMPLO 2: Grandezas e Medida

Alguns objectivos no programa em vigor e no Novo Programa de Matemática para o 1.º Ciclo:

- Relacionar a hora, o minuto e o segundo.
- Utilizar instrumentos da vida corrente relacionados com o tempo.

A Questão 19 da Prova de Aferição do 2.º Ciclo foi:

A Teresa e o Rui combinaram encontrar-se na piscina às 10 horas. A Teresa chegou três quartos de hora antes da hora marcada e o Rui atrasou-se um quarto de hora. Quantos minutos chegou o Rui depois da Teresa?

Já na prova do TIMSS de 2003 para o 4.º ano de escolaridade colocam-se os seguintes problemas:

Questão M031008. O Simon quer ver um filme que tem uma duração entre 1 ½ e 2 horas. Qual dos seguintes filmes devia escolher?

A. Filme de 59 minutos
B. Filme de 102 minutos
C. Filme de 121 minutos
D. Filme de 150 minutos

Questão M012119. O George treina futebol seis vezes por semana.

Em 3 dos dias ele treina durante 45 minutos cada dia.

Em 3 dos dias ele treina durante 20 minutos cada dia.

Em horas e minutos, qual é o tempo total que o George treina nesses seis dias?

A. 2 horas e 20 minutos
B. 2 horas e 55 minutos
C. 3 horas e 5 minutos
D. 3 horas e 15 minutos

É notória a complexidade superior das questões do TIMSS, embora se destinem a alunos dois anos mais novos. Esta discrepância torna-se ainda mais evidente se atendermos ao facto de estes alunos não poderem recorrer a uma calculadora, contrariamente aos alunos portugueses.

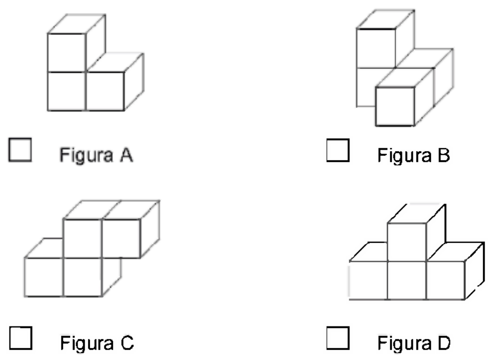
EXEMPLO 3: Espaço e Forma

Alguns objectivos no programa em vigor e no Novo Programa de Matemática para o 1.º Ciclo:

- Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço.
- Os alunos devem ser capazes de identificar e interpretar relações espaciais.

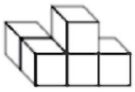
Observe-se a Questão 21 da Prova de Aferição do 2.º Ciclo:

A irmã do Rui fez construções com cubos. Os cubos não estão encaixados nem colados uns aos outros. Qual das seguintes figuras representa uma construção que ela não pode ter feito?

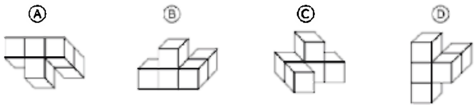


Aparentemente, pretende-se que o aluno assinale a Figura C, uma vez que esta possui um cubo que, não estando colado, cairia. Parece evidente que se trata de uma questão ao alcance de um aluno do 1.º Ciclo. A prova do TIMSS do 4.º ano de 2003 confronta os alunos com o seguinte problema de visualização espacial bem mais interessante e adequado:

Questão M012069. A seguinte figura será colocada numa posição diferente:



Qual destas figuras poderá ser o resultado final?



EXEMPLO 4: Organização e Tratamento de Dados

Alguns objectivos no programa em vigor e no Novo Programa de Matemática para o 1.º Ciclo:

• Construir e utilizar tabelas.

Observe-se a Questão 6 da Prova de Aferição do 2.º Ciclo:

O grupo da Teresa fez um inquérito sobre os desportos praticados pelos alunos da turma. Todos os alunos responderam ao inquérito, incluindo o grupo da Teresa.

Os dados sobre os desportos praticados pelos alunos estão registados na tabela seguinte.

Desportos praticados	**Contagem**
Natação	𝍸
Andebol	𝍸 ||
Basquetebol	𝍸 |||
Karaté	|

Legenda
𝍸 = 5

6.1. Quantos alunos da turma praticam andebol?

6.2. Escreve uma outra **informação** que possas tirar a partir dos dados da tabela.

Não podemos deixar de manifestar a nossa perplexidade face ao teor destas duas alíneas. O que é que se pretende exactamente aferir? Perguntas deste tipo são desadequadas até para alunos do 4.º ano. Aliás, a prova do TIMSS de 2003 para o 4.º ano contém a seguinte questão:

Questão M031265. O dono de uma loja decidiu verificar quantos lápis, canetas, borrachas e réguas foram comprados no dia em que a escola abriu. Fez a seguinte tabela:

Canetas	**Lápis**	**Borrachas**	**Réguas**
𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	𝍸 𝍸 ||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||

Quantos mais lápis do que réguas foram vendidos?

Conclusão

As questões 2, 6.1, 6.2, 7, 9, 11, 12, 14, 18, 19, 21, 23, 24 e 25 da Prova de Aferição do 2.º Ciclo são, na realidade, questões do 1.º Ciclo, quer à luz dos documentos oficiais do Ministério da Educação quer à luz daquilo que a comunidade internacional entende serem o nível de conhecimentos e os graus de dificuldade e complexidade adequados a alunos do 1.º Ciclo. Não as transcrevemos todas aqui por razões de espaço. Como foi mencionado acima, o enunciado pode facilmente ser consultado no *site* do GAVE.

Assim, esta Prova de Aferição parece indicar que os objectivos fixados para o 1.º Ciclo de escolaridade apenas precisam de ser atingidos no final do 2.º Ciclo e afere os alunos portugueses de doze anos por uma bitola inferior à que é usada internacionalmente para alunos de dez anos.

Tal como está escrito no parecer da Sociedade Portuguesa de Matemática,

"... provas destas não valorizam o empenho, o rigor e o conhecimento, desorientando tanto os alunos como os professores. Os alunos, por estarem habituados a outro tipo de questões, com um grau de dificuldade mais avançado e adequado ao seu nível etário. Os professores, por ser um desincentivo ao seu trabalho. Esta continuada tendência não pode deixar de causar reflexos muito negativos." M

por Roger Picken
[Instituto Superior Técnico]

A Teoria de Nós?

A teoria de nós pretende identificar nós equivalentes e distinguir nós diferentes. É uma área particularmente acessível da topologia, com ligações subtis à física.

Imaginemos que damos uma corda a cada uma de duas pessoas para fazerem um nó. Fazem o nó, juntam as duas pontas de tal forma que não se nota onde está a junção e devolvem-nos as cordas. A nossa tarefa é dizer se os dois nós são equivalentes ou não, ou seja, se podemos deformá-los para ficarem com um aspecto idêntico (sem cortar as cordas, obviamente!) ou se tal objectivo é impossível. Eis a questão central a que a teoria de nós tenta dar resposta. Desta pergunta simples, aparentemente inocente, resultaram ideias matemáticas riquíssimas, que influenciaram bastante muitos desenvolvimentos em geometria e topologia, incluindo as grandes questões relacionadas com a topologia em dimensão 3 e 4, com impacto também em áreas de aplicação, como a física e a bioquímica. Nestes contextos mais abrangentes, um nó tipicamente representa algo bastante mais sofisticado do que uma mera corda.

Nós e enlaces (um enlace é feito de duas ou mais cordas – ver figura 1) surgiram desde cedo em trabalhos de vários matemáticos e físicos, incluindo Vandermonde, Gauss e Maxwell. A abordagem à teoria que usamos hoje em dia começou de forma engraçada. O físico William Thompson (que passou a ser Lord Kelvin), conhecido principalmente pelas suas contribuições na termodinâmica e na teoria de electricidade, tinha concebido um modelo dos átomos que seriam vórtices no éter, inspirado em parte pelos anéis intricados de fumo que o seu colega, Peter Tait, um físico escocês, tinha conseguido produzir. Na esperança de encontrar a tabela periódica dos elementos, Tait construiu uma lista grande de nós, de complexidade cada vez maior, medida em termos do número minimal de cruzamentos numa representação planar do nó, formulando ainda uma série de conjecturas acerca destes diagramas. O modelo de Kelvin revelou-se depois inútil, com a demonstração experimental da inexistência do éter, mas, de qualquer forma, nasceu assim o estudo sistemático dos nós através da análise das suas representações em diagramas.

Figura 1: a) nó trivial; b) o trifólio; c) o espelho do trifólio, inequivalente ao trifólio; d) o nó oito (exercício não-trivial: mostrar que é equivalente ao seu espelho); e) o enlace de Hopf, inequivalente a dois nós triviais separados (com setas a indicar uma orientação, uma noção usada adiante).

Os diagramas de nós constituem, de facto, o conceito-chave no teorema fundamental da teoria, o teorema de Reidemeister. Um nó matemático é uma aplicação injectiva e contínua de uma circunferência para o espaço 3-dimensional, onde normalmente se impõe uma condição adicional, por exemplo, que a aplicação seja poligonal ou suave, para evitar certos exemplos patológicos, chamados nós selvagens. Um diagrama de nó é uma projecção de um nó no plano, tal que a projecção é injectiva excepto num número finito de pontos, onde dois pontos do nó são projectados num único ponto de cruzamento transversal no diagrama. Usando uma convenção gráfica óbvia, o diagrama indica qual é a parte do nó que passa por cima e qual a que passa por baixo em cada cruzamento. O teorema de Reidemeister afirma que a equivalência entre dois nós, ou seja, a possibilidade de deformar um no outro, corresponde a uma equivalência entre diagramas de nós, que passa por deformações do diagrama no plano (às vezes chamados movimentos de Reidemeister 0), e três passagens locais entre diagramas que são mesmo diferentes na estrutura dos seus cruzamentos, chamadas movimentos de Reidemeister 1, 2 e 3 (figura 2). Todos os movimentos podem ser executados em ambos os sentidos, portanto, dois nós são equivalentes se, e só se, qualquer diagrama de um deles puder ser obtido de qualquer diagrama do outro, através de uma sequência de deformações planares e movimentos de Reidemeister 1-3.

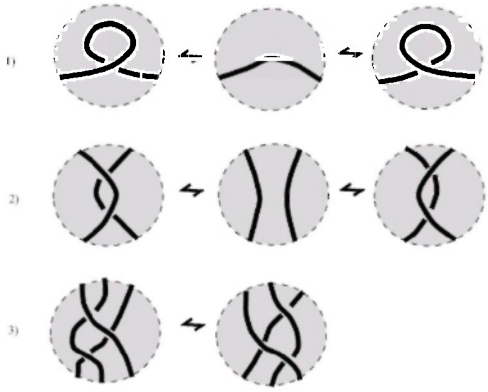


Figura 2: Os três movimentos de Reidemeister. Os movimentos afectam só a região do plano indicada com cor cinzenta, deixando o resto do diagrama inalterado.

Dispomos assim de uma ferramenta poderosa para distinguir entre nós, porque basta encontrar uma grandeza, por exemplo um número, que podemos atribuir a diagramas, tal que seja invariante sob os movimentos de Reidemeister. Se esse invariante tomar um valor diferente em dois diagramas, temos a certeza de que os nós correspondentes são inequivalentes. Um exemplo simples de uma construção deste género passa por colorir os arcos, em que um arco num diagrama de nó é uma linha ininterrupta que começa e termina num cruzamento, onde passa por baixo. Definimos um invariante como sendo o número de maneiras diferentes que existem para colorir os arcos de um diagrama, usando somente três cores, sujeito a termos em cada cruzamento ou três arcos com a mesma cor ou três arcos com três cores diferentes (figura 3). Não é difícil convencer-se de que esse número é realmente invariante sob os movimentos de Reidemeister, e vê-se logo que toma valor 3 para o não-nó, e 9 para o nó trifólio, o que prova o facto, intuitivamente óbvio, de que esses dois nós são inequivalentes. Aliás, existem generalizações bem mais sofisticadas desta abordagem, usando "paletas" de cores algébricas, chamadas *quandles* ou módulos cruzados.

Figura 3: Diagramas de nós com os arcos coloridos.

Podemos ganhar informação acerca do nó considerando o seu complementar, ou seja o espaço obtido do espaço tridimensional R^3, escavando um túnel na forma do nó. Por exemplo, podemos concluir que dois nós são diferentes se o grupo fundamental do seu complementar for diferente (o grupo fundamental de um espaço é um grupo cujos elementos são obtidos de lacetes fechados contidos no espaço (ver "O que é o grupo fundamental", *Gazeta de Matemática* 155, págs. 48/9, por Gustavo Granja). Um diagrama de nós permite caracterizar o grupo fundamental do seu complementar através de geradores e relações – cada arco fornece um gerador e cada cruzamento, uma relação da forma

$$b = c^{-1} a c$$

(note que o grupo fundamental é não-comutativo em geral), onde c é o arco que passa por cima no cruzamento (figura 4). Infelizmente, não é uma tarefa fácil dizer quando duas caracterizações deste género correspondem a grupos iguais ou diferentes. Em 1923, Alexander encontrou uma maneira de extrair informação do grupo fundamental do complementar do nó, que não sofria de ambiguidade nenhuma: um polinómio numa variável com coeficientes inteiros. Durante muitos anos, o polinómio de Alexander foi o invariante principal usado pelos matemáticos que estudavam nós. Uma contribuição interessante veio de John Conway, com a introdução de um polinómio equivalente, que satisfaz uma equação, chamada "relação de *skein*", relacionando o polinómio de Alexander-Conway de três diagramas quase idênticos de nós ou enlaces (figura 5). Esta propriedade é muito forte, mas não pode servir como definição do polinómio sem uma prova da sua existência.

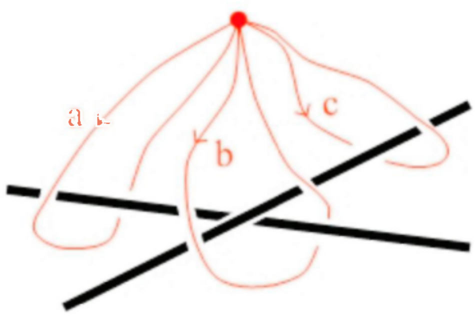


Figura 4: Os geradores do grupo fundamental do complementar, que obedecem à relação $b = c^{-1} a c$.

Figura 5: A "relação de *skein*" para o polinómio de Alexander-Conway. Os argumentos indicam diagramas que diferem só na região indicada. As setas indicam a orientação. Exercício: sabendo que o nó trivial tem polinómio 1, mostre que o trifólio tem polinómio $1+z^2$, independentemente da escolha de orientação.

Nem o invariante de coloração descrito acima nem o grupo fundamental do complementar do nó conseguem distinguir pares de nós chirais, sendo nós inequivalentes que são a imagem-espelho um do outro, como por exemplo o trifólio e a sua imagem-espelho. Mas em 1983 houve um avanço muito substancial, com a chegada de um novo invariante, o polinómio de Jones, bastante mais poderoso do que o polinómio de Alexander, já conseguindo distinguir pares chirais (embora nem todos). Surpreendentemente, a descoberta veio dos estudos de Vaughan Jones numa área bem diferente, as álgebras de operadores. Nesse contexto ele conseguiu encontrar uma noção de traço para uma representação do grupo das tranças, que tinha as propriedades necessárias para dar um invariante de nós (as tranças são objectos estreitamente relacionados com nós, sendo obtidas de um número fixo de cordas descendentes – ver figura 6). Só depois de ele ter conversado com Joan Birman, especialista na teoria de nós, é que as implicações da construção se tornaram claras (o que mostra a importância da comunicação entre áreas diferentes de especialização!). O polinómio de Jones também satisfaz uma "relação de *skein*", o que ajudou Louis Kauffman a encontrar um polinómio equivalente ao polinómio de Jones. O método de Kauffman consiste na atribuição de pesos a certos diagramas, chamados estados, obtidos do diagrama do nó, resolvendo os cruzamentos de duas maneiras diferentes (figura 7), fazendo no fim uma soma das contribuições de todos os estados.

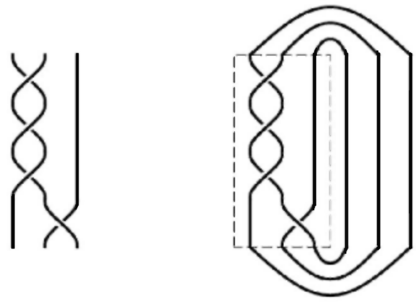


Figura 6: Uma trança com três fios, à esquerda. Depois de fechar a trança como na figura à direita, resulta um nó, o trifólio.

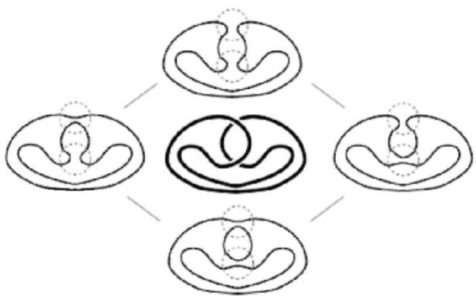


Figura 7: Os quatro estados para o cálculo do polinómio de Kauffman do nó no meio (equivalente ao nó trivial).

Depois do polinómio de Jones, houve uma explosão de desenvolvimentos na teoria de nós. Num artigo de 1989, de tremendo impacto, o físico Edward Witten encontrou uma abordagem completamente nova ao polinómio de Jones, através da teoria quântica do campo. A ideia tinha surgido em conversas entre ele e os matemáticos Michael Atiyah e Graeme Segal numa conferência sobre física-matemática (Atiyah usa muitas vezes este episódio para encorajar as pessoas a discutirem entre si em encontros científicos!). Aliás, isto foi só uma das vertentes de um diálogo muito fértil entre a física e a matemática, cujos protagonistas têm sido exactamente Atiyah e Witten. Um aluno de doutoramento de Witten, Dror Bar-Natan, investigou a ligação entre os coeficientes na expansão em série de potências do integral de caminho de Feynman subjacente ao modelo físico e novos invariantes de nós que tinham surgido entretanto, os chamados invariantes de Vassiliev. Estes invariantes resultam da extensão da teoria para incluir também nós singulares, com um número finito de auto-intersecções transversais. Um invariante de Vassiliev é qualquer invariante que obedeça a uma "relação de *skein*", envolvendo os dois tipos de cruzamento e uma auto-intersecção na mesma região dentro de um diagrama de nó singular (figura 8), e que é simultaneamente "de tipo finito", o que significa que se anula para nós com mais de um determinado número finito (mas arbitrário) de auto-intersecções. Porque estas condições traduzem limitações algo fracas ao universo de todos os invariantes de nós, é natural conjecturar que os invariantes de Vassiliev são suficientemente fortes para classificar completamente os nós, mas esta conjectura ainda está em aberto. Convém mencionar que todos os invariantes de Vassiliev de um determinado nó estão contidos num único integral, de grande subtileza e difícil de calcular, o integral de Kontsevich do nó. Aliás, este integral é de certo modo análogo a integrais inventados por Gauss (1777-1855) para determinar invariantes de enlaces, ou seja, vê-se aqui a história a repetir-se.

Figura 8: A "relação de *skein*" para um invariante de Vassiliev.

Para concluir, a última inovação na teoria de nós chama-se "homologia de nós" e foi inventada por Mikhail Khovanov. Seria ir longe demais tentar descrever aqui o que é a homologia, mas é uma teoria que, entre muitos outros invariantes topológicos, dá origem à característica de Euler, que já foi descrita por Lucía Fernández-Suarez na *Gazeta de Matemática* 158, págs. 42/5. Na abordagem de Khovanov, o polinómio de Jones revela-se como sendo meramente a característica de Euler de uma homologia muito mais rica, construída à custa dos diagramas de estados usados por Kauffman, referidos anteriormente. Esta nova visão de Khovanov sobre os invariantes de nós enquadra-se numa tendência na matemática moderna chamada "categorificação", prometendo ter um impacto maior também em áreas mais abrangentes da topologia, da geometria e da álgebra.

Soluções dos exercícios

Exercício na figura 1d): *http://www.popmath.org.uk/exhib/pagesexhib/mirror.html*

Exercício na figura 5: *http://en.wikipedia.org/wiki/Knot_theory*

Agradecimentos a todos os colegas e alunos que partilharam comigo os seus conhecimentos sobre teoria de nós, e uma palavra especial de agradecimento para Isabel Neves, João Faria Martins, Marco Mackaay e Marko Stošić pela leitura cuidada do artigo e comentários.

Referências:

Adams, Colin, (2004). *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, American Mathematical Society.

Rolfsen, Dale, (2003). *Knots and Links*, American Mathematical Society.

por Graciano de Oliveira
[Universidade Lusófona de Lisboa]

Avaliações e *Rankings*

Avaliação e ordenação de pessoas e instituições são grandes objectivos da nossa era. O assunto merece meditação. Ele não é simples e leva a questões pouco (ou nada) abordadas. Que pensarão os professores de um *ranking* dos professores?

Os *rankings* constituem uma das grandes obsessões dos nossos dias. O termo *ranking* tem um ar científico e misterioso que ultrapassa a palavra ordenação, demasiado corriqueira. Mas, para dizer a verdade, fazer um *ranking* de pessoas não é mais do que pô-las em carreirinhas: uma é a primeira, outra a segunda, etc., até à última. Convém fazê-lo só com pessoas de maior idade, com menores corre-se o risco de os traumatizar para toda a vida. Falemos mais matematicamente: dado um conjunto de professores, pretende-se definir nele uma ordem total. É de esperar que os matemáticos questionem logo: mas por que não uma ordem parcial? O certo é que, tanto quanto se sabe, os matemáticos não questionaram, o que é de admirar pois os matemáticos complicam sempre ou quase sempre. Portanto, prossigamos pela via mais simples ou mesmo simplória: queremos uma ordem total.

Conviria que a ordenação tivesse alguma coisa a ver com a qualidade do respectivo desempenho, embora, se não tiver, o problema não seja grave. O que importa é que todos (ou quase todos) acreditem que tem.

Idealmente deveria ser assim: o professor A é melhor do que o professor B se e só se, na tal ordem total, $A \geqslant B$. Está fora de questão que A e B não sejam comparáveis pois, por razões ainda não esclarecidas, rejeita-se a ordem parcial.

Mas há mais dificuldades, não quanto à ordem total e ao significado de $A \geqslant B$, mas quanto à definição de "o professor A é melhor do que o professor B".

O que é que isto significa? Podemos considerar vários significados, como, a título de exemplo:

O professor A é melhor do que o professor B se e só se (i) os alunos do professor A se sentem mais felizes do que os do professor B, (ii) os alunos de A aprendem mais, em quantidade, do que os do professor B, (iii) os alunos de A aprendem o mesmo do que os de B mas mais rapidamente, (iv) os pais dos alunos de A dizem que os seus filhos estão melhor com A do que com B, (v) os alunos acham mais piada a A do que a B, (vi) os avaliadores definidos por lei dizem que A é melhor do que B.

Poderia ainda distinguir-se o sentido forte e o sentido fraco nesta relação, o que se conseguiria, tendo, por exemplo, em linha de conta a origem social dos alunos, etc., etc. São questões filosóficas que normalmente não são abordadas mas que estão na base de tudo e a sua falta de discussão explícita está na origem de muito desentendimento.

Concentremo-nos num ponto: as aulas assistidas para efeitos de avaliação.

Entende-se que alguém assiste às aulas dos diversos professores e lhes atribui uma pontuação. Levantam-se vários problemas: quem assiste e em que condições?

Como primeira hipótese, pode parecer que deveriam ser os alunos a assistir e a emitir uma opinião. São eles os utentes do serviço prestado pelo professor. Um exame mais cuidado conduz a dificuldades difíceis de superar. De facto, aqui, "utente" e "serviço" não têm o mesmo significado que noutras circunstâncias em que há alguém que serve alguma coisa e um utente que deve ficar satisfeito com o serviço pelo qual paga e do qual pode desistir, ou mudar de fornecedor, se não gostar. Pense-se, por exemplo, num restaurante.

Mais, se um aluno influir na classificação de um professor, este perde autoridade e ele tem de ter alguma, pois não se deve limitar a satisfazer os gostos e solicitações dos alunos, mas obrigá-los (quem não gostar desta palavra pode substituí-la por um eufemismo) a aprender. Salvo se se alterar a concepção (ou seja, a definição) de escola, outra via a explorar.

Pior, se o aluno classifica o professor, será inevitável a tendência deste para subir a classificação que, por seu turno, deverá dar ao aluno. Corre-se o risco de um inflacionar de notas. No caso da Matemática talvez não fosse muito grave mas, imagine-se, num curso de Medicina, um professor de cirurgia a fugir das retenções (em português corrente, chumbos) ou a distribuir dezanoves e vintes a alunos que não sabem distinguir um bisturi de um facalhão de matar porcos.

Segunda hipótese: é um (ou mais do que um) professor a assistir.

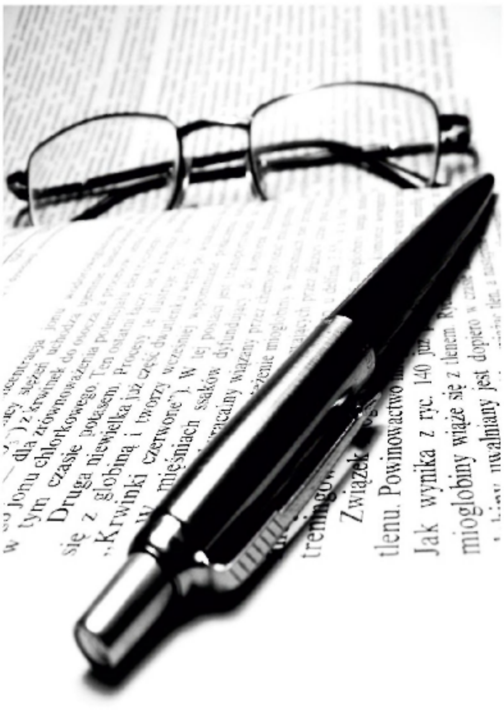
Terceira hipótese: são os pais dos alunos.

Examinada a primeira hipótese, passemos à segunda e à terceira (podendo imaginar-se mais). É fácil verificar que qualquer uma tem inconvenientes, muitos de peso, e, provavelmente, é a segunda que concita menor oposição. Vejamo–la em pormenor, pois há algumas dificuldades técnicas a ultrapassar.

O professor avaliado deverá ser avisado previamente de que, na data tal, terá outro professor a assistir à sua aula? Se sim, a aula não será igual às outras, será especialmente preparada (como é costume nas provas de agregação dos professores universitários que ninguém toma como exemplo de uma aula normal). Se não, a presença inesperada de um avaliador introduzirá fatalmente perturbações que tornarão a aula diferente das outras. Há uma outra solução: o avaliador assiste à aula sem que o avaliado saiba que está a ser espiado (por exemplo, através de um orifício na parede). A virtude é óbvia: assistir-se-á a uma aula (ou mais) normal, não perturbada por acontecimentos estranhos. Mas quem se atreverá a defender este método? Ainda há muita gente que pensa que os professores merecem respeito e não aprovará. Mas, então, que outras hipóteses restam para uma boa avaliação das aulas?

Perante tamanhas dificuldades, a *Gazeta de Matemática* foi ouvir opiniões de professores.

Claramente, o *Inquérito* não pretende tirar conclusões com valor estatístico tão-somente expor opiniões (curtas) que fomentem a meditação. O tema de hoje é complexo mas, por razões de espaço, as respostas têm de ser, como sempre, muito breves. Limitamo-nos a perguntar aos nossos colaboradores: o que lhe apraz dizer sobre o tema exposto?



Maria Manuela Teixeira Moutinho (Escola EB 2,3/S, Carrazeda de Ansiães)

A avaliação é sempre um assunto delicado, que exige muita ponderação, reflexão cuidada e muito bom senso.

Não sou contra a avaliação docente, considero que os professores devem ser avaliados e os "bons" professores devem ser premiados, se não de outra forma, pelo menos pelo reconhecimento do seu trabalho.

O problema, em minha opinião, está em definir critérios que permitam fazer uma avaliação justa do trabalho de um professor.

Dentro do universo de todos os docentes há imensos subgrupos que têm especificidades muito diferentes: deverá um professor de Educação Tecnológica ser avaliado segundo os mesmos parâmetros que um professor de Matemática? Deverão, por exemplo, os professores do 1.º ciclo e os do ensino secundário ser avaliados mediante os mesmos parâmetros? Será justo um professor ser avaliado em função dos resultados escolares dos seus alunos? E quem exactamente, e de acordo com que critérios específicos, vai intervir na avaliação dos professores?

Todo o professor sabe que avaliar é extremamente difícil e não muito objectivo. Provavelmente é a parte mais complicada e mais angustiante do nosso trabalho.

A posição do professor avaliado não é confortável, sobretudo se pensarmos numa aula assistida com uma turma mais indisciplinada ou com fraco aproveitamento à disciplina, mas acredito que a posição do professor avaliador também esteja longe de ser uma posição fácil. Vejamos, enquanto professores, todos nós temos de avaliar e sabemos muito bem como é difícil traduzir num número o trabalho desenvolvido pelos nossos alunos ao longo de todo um ano lectivo. E passamos com eles um tempo considerável!

O professor avaliador vai assistir a um número reduzidíssimo de aulas e tem de classificar o trabalho do colega! E com base em que parâmetros é feita essa avaliação? O que é afinal uma boa aula? Uma boa aula, para mim, será também uma boa aula para outro dos meus colegas?

É urgente adoptar e adaptar um modelo de avaliação que realmente tenha em consideração o que é o trabalho de um professor na sua generalidade mas também em toda a sua especificidade. Lidamos com alunos que são pessoas que podemos educar e orientar e não com máquinas que podemos dominar e controlar.

Helena France (Escola Secundária de Viriato, Viseu)

Um *ranking* dos professores é um disparate ainda maior do que um *ranking* de escolas. Como se pode comparar escolas com alunos tão diferentes? Como se pode comparar professores que trabalham em condições tão distintas? A avaliação é um processo complexo, qualquer que seja a situação. No caso dos professores, é ainda mais. Ser avaliado, quando não se dominam todos os factores que influenciam a avaliação, é quase uma experiência aleatória: é uma sorte termos alunos interessados no seu futuro e que dão a devida importância ao seu percurso escolar (não necessariamente muito bons alunos); é uma sorte termos pais (E.E.) que compreendem a importância da escola na educação dos seus filhos; é uma sorte estarmos numa escola "boa" e que, por isso, tem uma quota considerável para classificações "Muito Bom" e "Excelente". Por outro lado, temos um problema de "extremos" ou, mais propriamente de "máximos relativos". O que eu quero dizer com isto é que, em determinados parâmetros de avaliação, os avaliados são inevitavelmente comparados com outros colegas (as quotas a isso obrigam). Assim, a classificação pode ser influenciada pelo desempenho de outros colegas e o melhor professor numa escola poderia não ser o melhor se estivesse noutra escola.

No actual modelo de avaliação de desempenho de um professor há partes que são objectivamente avaliadas, mas também há aquelas que dependem bastante da capacidade que um professor tem de mostrar o que faz. De facto, não basta fazer! É necessário mostrar que se faz! Há também o perigo de se valorizar a quantidade em detrimento da qualidade.

Com tudo isto, corre-se o risco de deixar para segundo plano o que realmente é importante: o trabalho diário com os alunos.

Sou de opinião de que uma avaliação deve ser feita (mas não com o objectivo de construir um *ranking*). Como? Não sei.

Quem é que tem mais mérito? O professor que à partida tem alunos bons e empenhados que naturalmente conseguem obter as melhores classificações ou o professor que tem alunos com grandes dificuldades e que, não desistindo desses alunos, consegue que eles trabalhem e progridam na sua aprendizagem, ainda que com resultados modestos?

O que motiva um professor são os seus alunos. Um professor deve estar concentrado na preparação das suas aulas e na evolução dos seus alunos e em tudo o que isto envolve. Tudo o resto é "cosmética"!

A Matemática pelo Basquetebol

Será possível prever o resultado de uma partida de basquetebol? Além das análises dos dados estatísticos, como pode a matemática contribuir para o basquetebol? Curiosamente, a ferramenta que ordena as ligações apresentadas pelo motor de busca *Google* recorre a conceitos que podemos aplicar na previsão de um resultado para uma partida de basquetebol.

1. Introdução

A ideia de recorrer a computadores para cálculos matemáticos aplicados ao basquetebol já existia, pelo menos, desde 1958, quando Donald Knuth se envolveu com a equipa de basquetebol *Case* na aplicação de uma fórmula para atribuir valores aos jogadores. Com o impulso dado por este caso, e por se pretender para o basquetebol português mais matemática do que a análise das estatísticas de jogo, foi-se concretizando a ideia da aplicação da matemática a esta modalidade, que acabou por tomar forma numa tese de mestrado[1]. Este artigo pretende ter um carácter de divulgação matemática, mostrando como a matemática se pode aplicar a um desporto, com algo mais do que o cálculo de percentagens e médias.

2. O basquetebol

Apesar de existirem referências à ideia de um jogo/ritual, cujo objectivo era introduzir um objecto dentro de um aro, nas civilizações Maia e Azteca, o basquetebol como desporto é tido como tendo surgido em 1891.

Em Dezembro de 1891, o presidente do Departamento de Educação Física da School for Christian Workers[2] incumbiu o professor de Educação Física James Naismith de inventar um jogo para entreter os atletas da escola durante a época de Inverno.

Figura 1: James Naismith

Depois de reflectir sobre os princípios fundamentais da sua nova actividade[3], decidiu testar o seu jogo. A caminho do ginásio, Naismith pediu ao porteiro duas caixas, que serviriam de alvo para a bola (que começou por ser uma bola de futebol)[4]. O porteiro respondeu: "Tenho dois cestos de apanhar pêssegos! Se servirem de alguma coisa..." Apresentava-se assim o jogo constituído por dois cestos (*basket*) e uma bola (*ball*) – o *basketball*.

3. O que se estuda

O basquetebol é, actualmente, uma modalidade desportiva de nível mundial. Em [1] refere-se que este jogo "é praticado por mais de 11% da população

[1] Ver [2].
[2] Actualmente Springfield College.
[3] Os cinco princípios iniciais que iriam definir a nova actividade podem ser vistos em [3].
[4] As bolas de futebol só foram substituídas por bolas de basquetebol em 1894.

mundial, chegando inclusivamente a ultrapassar o número de praticantes de futebol em muitas regiões do globo".

Dean Oliver[5] tem vários artigos publicados no seu *site*[6] onde apresenta diversas abordagens e análises ao jogo. Por exemplo, num artigo de Dezembro de 1995 – *Basketball's Bell Curve* – apresenta a distribuição dos pontos marcados por uma equipa. Mais especificamente, o autor refere-se à curva de Gauss como representação da distribuição dos pontos marcados pela equipa para jogos como visitante e jogos como visitado. Comparando as duas distribuições, poder-se-á inferir a vantagem do factor casa. As análises apresentadas permitem desenhar estratégias de jogo relevantes. Por exemplo, tendo em conta as observações feitas, uma equipa não favorita deverá apostar na variação ou inconsistência contra uma equipa favorita. Se for previsível para a equipa não favorita um resultado de 104 contra 106 da favorita, uma estratégia ofensiva a considerar será a aposta nos lances triplos, de forma a tentar beneficiar com o aumento do desvio padrão.

Figura 2: Cestos de pêssegos e bola

Uma abordagem interdisciplinar interessante é feita por Yilmaz e Chatterjee[7]. No seu estudo faz-se uma análise ao desempenho na NBA ao longo de cinco décadas. O ponto de vista considerado é que torna esta abordagem curiosa – o ponto de vista evolucionista da biologia. A teoria evolucionista defende que as espécies progridem, através de mudanças ao longo do tempo, de organismos primitivos para seres mais complexos. O processo que envolve tais mudanças e que permite a sobrevivência dos mais aptos, eliminando os menos aptos, é designado por selecção natural. O biólogo Stephen Jay Gould recorreu a estas ideias para interpretar o desempenho no *baseball*. Tendo em conta os longos anos de evolução de tal desporto, é possível concluir que, tal como num sistema biológico, há uma moderação dos extremos à medida que o sistema adquire estabilidade. Os autores do artigo anteriormente referido examinaram, nesta perspectiva, o desempenho de equipa na NBA. Após a análise dos dados, Yilmaz e Chatterjee concluíram que, enquanto no *baseball* a variabilidade nas medidas de desempenho das equipas apresenta uma diminuição estável, na NBA tal estabilidade ainda não é observável. Tal como já mencionado, o tempo de vida maior do *baseball* profissional em relação ao do basquetebol e as poucas mudanças nas regras do primeiro desporto serão algumas das justificações para tais resultados. No entanto, como referem os mesmos autores em [4], o padrão verificado no *baseball* começa a emergir no basquetebol.

O basquetebol, sendo um desporto que envolve o lançamento de um objecto, está também sujeito a uma análise do ponto de vista da física. Uma ideia, talvez bastante comum, será a de que os jogadores profissionais de basquetebol, as grandes estrelas, serão, pela prática que têm, exímios marcadores nos lances livres. Gablonsky e Lang recorrem ao exemplo do conhecido jogador Shaquille O'Neal que, na época regular 2004/2005 do campeonato norte-americano, tinha uma eficácia de 53,1%. Tendo em conta os dois factores essenciais num lançamento livre – ângulo e velocidade – Gablonsky e Lang[8] apresentam um modelo matemático para este tipo de lançamento. Baseados na segunda lei de Newton e nas equações de movimento de um projéctil, os autores desenvolvem modelos, partindo de um modelo simples, bastante geral, até um modelo mais realista com mais condições. Uma conclusão que surge do estudo das margens de erro nos dois factores importantes no lançamento é a de que é mais importante ser preciso na velocidade do que no ângulo. Uma conclusão

[5] Actualmente, *director of quantitative analysis* na equipa americana Denver Nuggets.
[6] Ver [5].
[7] Cf. [6].
[8] Cf. [7].
[9] Imagem em *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Markov.html*

curiosa sobre a trajectória da bola, apresentada pelos autores, é a de que o jogador não deve, ao preparar o lançamento livre, apontar para o centro do cesto, mas sim para algum ponto entre o centro e a parte de trás do aro. Além disso, quanto mais baixo for o jogador, mais atrás deve ser esse ponto.

4. Cadeias de Markov

Em 1907 Andrei Andreyevich Markov (1856–1922)[9] iniciou o estudo de processos aleatórios em que apenas o resultado da experiência mais recente afecta o resultado da experiência seguinte.

As cadeias de Markov, a partir daí desenvolvidas, são amplamente usadas em diversas áreas, inclusive no algoritmo *PageRank*, usado pelo motor de busca *Google* e desenvolvido pelos seus fundadores enquanto estudantes universitários[10].

Definição

Considere-se um conjunto de estados $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$. Cada passo do processo consiste na passagem ou transição de um estado para outro. Estando a cadeia de estados actualmente no estado e_i, esta passa, no passo seguinte, para o estado e_j com uma probabilidade P_{ij}. A probabilidade P_{ij} chama-se *probabilidade de transição* do estado e_i para o estado e_j. A *propriedade de Markov* estabelece que o estado da cadeia num instante futuro, dado o conhecimento do estado da cadeia no passado e no presente, depende apenas do presente e não do passado. Simbolicamente, sendo a cadeia um conjunto de variáveis aleatórias X_1, X_2, X_3, ... que tomam como valores os estados e_i, a propriedade descrita consiste no facto de que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e_{i_1}, \ldots,\ e_{i_n},\ e_j \in E$$

$$P\left(X_{n+1} = e_j \mid X_n = e_{i_n}, X_{n-1} = e_{i_{n-1}}, \ldots, X_1 = e_{i_1}\right) =$$
$$= P\left(X_{n+1} = e_j \mid X_n = e_{i_n}\right).$$

Por outras palavras, a probabilidade de a cadeia se encontrar num determinado estado depende apenas do estado anterior. Em geral, começa-se por especificar um estado inicial para o processo ou um vector de probabilidades para tal estado.

Exemplo

Imaginemos um local onde nunca há dois dias seguidos de bom tempo. Se num dia estiver bom (B) tempo, no dia seguinte há a mesma probabilidade $\left(\frac{1}{2}\right)$ de haver chuva (C) ou neve (N). Havendo chuva ou neve, há uma probabilidade de $\frac{1}{2}$ de se repetir o tempo no dia seguinte. Por outro lado, estando chuva ou neve, se o tempo mudar no dia seguinte, só metade das vezes muda para bom tempo.

Com os dados anteriores pode-se construir um modelo de Markov[11]. Sejam B, C e N os três estados de tempo possíveis. Com os dados fornecidos, facilmente se determinam as probabilidades de transição entre os estados. Com estas pode-se produzir uma matriz $P = [P_{ij}]_{ij}$, em que P_{ij} representa a probabilidade de transição do estado i para o estado j:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{C} & \mathrm{B} & \mathrm{N} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{C} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{N} \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Assim, por exemplo, a probabilidade de no dia seguinte a um dia de chuva (C) nevar (N) é igual a $P_{13} = \frac{1}{4}$.

A uma matriz como esta, que contém as probabilidades de transição, chama-se *matriz de transição*.

5. Um jogo de basquetebol

Para definir o modelo de Markov, considerou-se que a jogada de cada equipa pode percorrer seis possíveis estados, tendo-se assim, no total, os seguintes doze estados:

- e_1: equipa A com posse de bola, zona de 3 pontos;
- e_2: equipa A lança ao cesto, zona de 3 pontos;
- e_3: equipa A marca;
- e_4: equipa A falha;
- e_5: equipa A com posse de bola, zona de 2 pontos;
- e_6: equipa A lança ao cesto, zona de 2 pontos;
- e_7: equipa B com posse de bola, zona de 3 pontos;
- e_8: equipa B lança ao cesto, zona de 3 pontos;
- e_9: equipa B marca;
- e_{10}: equipa B falha;

[10] Um relatório técnico onde o *PageRank* é apresentado – *The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web* – pode ser encontrado em [8].

[11] Recorde-se que teremos uma cadeia de Markov, pois admitimos que o estado do tempo de um determinado dia depende apenas do estado do tempo do dia anterior.

- e_{11}: equipa B com posse de bola, zona de 2 pontos;
- e_{12}: equipa B lança ao cesto, zona de 2 pontos.

O modelo de Markov, com os estados descritos anteriormente, pode ser representado pelo grafo apresentado na figura 3.

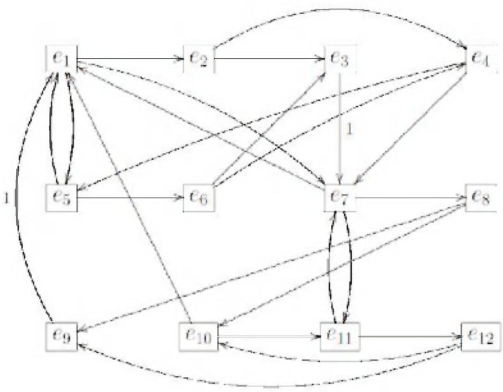


Figura 3: Transições possíveis

O modelo de Markov construído recorre a diversas probabilidades de transição. Por exemplo: P_{12} representa a probabilidade de a equipa A lançar ao cesto da zona de 3 pontos; P_{71} representa a probabilidade de a equipa B perder a bola (*turnover*) na zona de 3 pontos. Os valores utilizados para as probabilidades de transição foram estimados com base nas frequências relativas correspondentes.

6. O simulador

O simulador foi desenvolvido com base no *software Mathematica* e tem uma utilização bastante acessível, já que se desenvolveu para o efeito um *interface* gráfico para o utilizador. O seu aspecto, ao ser iniciada a simulação, é apresentado na figura 4.

Depois de introduzidas as estimativas das probabilidades de transição, o utilizador pressiona o botão "Jogar". O estado inicial da cadeia de Markov é um dos dois estados possíveis, e_1 ou e_5, decidido de forma aleatória e com a mesma probabilidade para ambos. No final da simulação, uma mensagem indica que aquela terminou e é apresentado o resultado previsto para as duas equipas.

Figura 4: O simulador.

7. Simulação de jogos

Recorrendo à análise de dados disponíveis sobre as equipas de basquetebol portuguesas, estudaram-se alguns jogos e recorreu-se ao simulador para efectuar previsões antes dos jogos.

Um dos jogos para o qual se aplicou o simulador foi o Porto/Ovarense, ocorrido a 13 de Fevereiro de 2007, no âmbito da 24.ª jornada da época regular 2006/2007.

Estimadas as probabilidades de transição e definido o número de jogadas, tais elementos foram introduzidos no simulador. Uma das previsões produzidas[12] foi:

Porto	69,81
Ovarense	70,64

No final do jogo, verificou-se que o resultado (sem lances-livres) foi Porto-58, Ovarense-68. Verifica-se que a previsão relativa à equipa do Porto é superior à pontuação conseguida. No que diz respeito à equipa da Ovarense, a previsão é bastante próxima do verificado.

As previsões e os resultados reais eram, frequentemente, discutidos no final dos jogos com o treinador da equipa do Porto, o que permitia compreender as eventuais diferenças entre as duas pontuações e acentuava o carácter de ligação à prática deste projecto.

[12] Para cada jogo efectuam-se previsões em diversos cenários, dependentes do número de jogadas total.

8. A partir daqui...

Este artigo ambiciona apenas abrir possíveis caminhos que podem agora ser prolongados pelo leitor que os pretenda aprofundar.

A compreensão do lance livre e o seu estudo físico-matemático, adaptado às equipas portuguesas, revelam-se como um campo de aplicação interessante.

Vários momentos do jogo de basquetebol são baseados em estratégias de acção. A teoria de jogos terá também, certamente, uma contribuição relevante a dar.

A geometria poderá contribuir para análises das equipas e da relação entre os jogadores. Enriquecerá as observações, já que difere bastante das análises convencionais feitas aos jogos. Nesta área, assim como noutras, a tecnologia poderá ser bastante útil. Tais ferramentas poderiam até auxiliar no aumento de dados disponíveis como, por exemplo, o tempo de jogada ou o número de passes de bola por jogada.

O estudo das estatísticas das equipas e a comparação dos valores MVP (*most valuable player*) com as classificações das equipas constitui um passo a desenvolver. Aliás, até Donald Knuth sugeriu, em resposta a umas questões sobre os resultados obtidos *"Can you go back to ten or more previous seasons, to get more numbers?"*

Relativamente ao simulador desenvolvido, este constitui um ponto de partida que poderá ser desenvolvido para fornecer pontuações mais precisas ou outras informações. O próprio simulador seria mais completo (e certamente mais complexo) se tivesse em conta a influência de certos jogadores no desempenho de outros da mesma equipa, algo que passará despercebido numa leitura simples de muitos dados de um jogo.

Agradecimento

O autor agradece as sugestões apresentadas pelo *referee*, por terem contribuído bastante para melhorar o presente texto.

Referências

[1] **Sampaio, J.** (2000). "O poder discriminatório das estatísticas do jogo de basquetebol: novos caminhos metodológicos de análise.". Tese de Doutoramento, Departamento de Desporto da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

[2] **Machado, R.** (2007). "Basquetemática: Uma incursão da matemática pelo basquetebol.". Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

[3] "Dr. James Naismith Foundation.". *http://epe.lac-bac.gc.ca/100/205/301/ic/cdc/naismith/index.htm*

[4] **Chatterjee, S. & Yilmaz, M.** (1999). "The NBA as an evolving multivariate system.". *The American Statistician*, (3) 53.

[5] **Oliver, D.** "Journal of Basketball Studies.". www.rawbw.com/~deano

[6] **Yilmaz, M. & Chatterjee, S.** "Patterns of NBA team performance from 1950 to 1998." *www.metapress.com/content/cc65d0x4wbxwllbc/?p=0e826fd40c1a4d13bd9510a4a3a21dee\&pi=2*

[7] **Gablonsky, J. & Lang, A.** (2005). "Modeling basketball free throws.". *SIAM Review*, (4) 47.

[8] "Publication Server of the Stanford InfoLab." *http://ilpubs.stanford.edu:8090*

por José Francisco Rodrigues
[Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, Universidade de Lisboa]

Portugaliae Mathematica e *Interfaces and Free Boundaries*, duas revistas científicas contemporâneas editadas a partir de Portugal

É impossível compreender o presente sem conhecer o passado. Neste artigo passamos em revista a história e o presente das publicações internacionais de investigação em matemática em Portugal.

Para entender a importância da investigação científica em matemática no nosso país e o papel dos matemáticos portugueses no panorama europeu no início deste século é necessário também conhecer com rigor a realidade editorial das publicações de investigação internacionais periódicas. Numa carta da Direcção da SPM [1], publicada no número 161, da *Gazeta de Matemática*, de Abril de 2010, na qual se inclui uma fotografia de Aniceto Monteiro, fazendo uma justa homenagem ao fundador da *Portugaliae Mathematica*, refere-se imprecisamente que esta "é hoje a única revista regular de investigação internacional com sede no nosso país".

Quando Francisco Gomes Teixeira, em 1877, fundou o *Jornal das Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, que pode ser considerado o primeiro periódico de investigação matemática português com alguma divulgação internacional, podia dizer-se que essa revista teve sede em Coimbra até 1883, data em que aquele matemático e professor universitário se transferiu para a Academia Politécnica do Porto. Apesar de esse jornal ter sido inicialmente publicado regularmente na imprensa da Universidade de Coimbra, foi uma publicação independente de qualquer instituição até 1902 e, em certa medida, foi continuada entre 1905 e 1922, nos *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*. Os autores que publicaram nessa revista eram na sua maioria portugueses, mas nela encontram-se contribuições de C. Hermite, de E. Cesaro ou C. de la Vallée Poussin e "os títulos dos artigos do *Jornal de Teixeira* foram incluídos regularmente em *Le Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques* e no *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*" [2].

Num balanço de cinco anos da introdução do modernismo matemático em Portugal, Aniceto Monteiro [3] refere a fundação em Lisboa da *Portugaliae Mathematica*, em 1937, da *Gazeta de Matemática*, em 1939, e da própria Sociedade

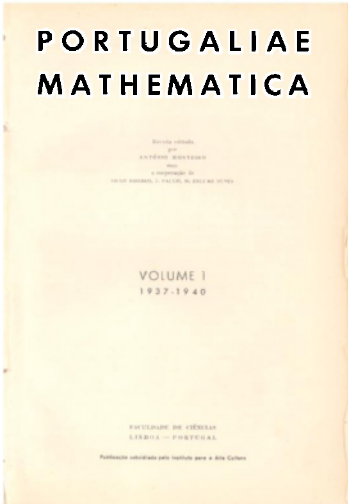


Figura 1: Capa do Vol. 1 da *Portugaliae Mathematica* (primeiro publicado em Portugal)

Portuguesa de Matemática, em 1940. Enquanto esta revista era dirigida a estudantes e professores de matemática, a *Portugaliae* foi criada como uma revista de investigação com o propósito explícito de contribuir para o estudo da matemática em Portugal e publicar os artigos de autores portugueses, reflectindo o movimento matemático do País e contribuindo para a cooperação internacional.

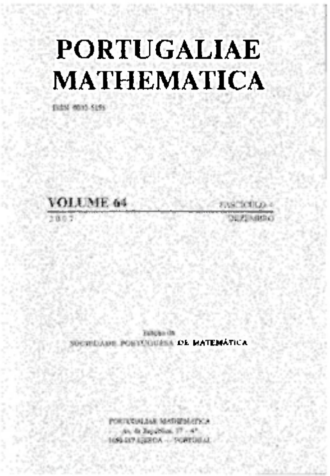


Figura 2 Capa do n.º 4 Vol. 64 (Dez 2007) da *Portugaliae Mathematica* (último publicado em Portugal)

No cinquentenário da revista, Hugo Ribeiro [4], o único dos fundadores vivo na altura, testemunhou *"I worked frequently with Monteiro, Zaluar Nunes and Silva Paulo in some old office room of the School of Science at the University of Lisboa. All of us did, of course, our best to help but I must here emphasize, for it was and is my understanding, that Monteiro, alone, started the journal and took all crucial initiatives."*

Os primeiros três volumes da *Portugaliae Mathematica*, nos quais foram publicados artigos de jovens matemáticos, como o próprio Aniceto Monteiro, Hugo Ribeiro e José Sebastião e Silva, ainda tiveram financiamento público do Instituto de Alta Cultura. Mas a sua continuação só foi possível pelo apoio financeiro privado da Junta de Investigação Matemática, uma iniciativa baseada no Porto por influência de Ruy Luís Gomes, e pela determinação da geração de quarenta que, apesar de obrigada ao exílio, conseguiu manter a publicação regular em Portugal, com "sede" em Lisboa, apesar de a revista ser dirigida editorialmente, de 1945 a 1967, por Manuel Zaluar Nunes a partir do Brasil [5].

Na primeira fase da *Portugaliae* podemos encontrar artigos de quase todos os matemáticos portugueses relevantes do século XX, desde J. Vicente Gonçalves a A. Mira Fernandes, com destaque para J. Sebastião e Silva que, no volume 9 (1950), aí publicou a sua tese "As funções analíticas e a análise funcional", apresentada à Faculdade de Ciências de Lisboa. Mas podemos também encontrar autores maiores da matemática desse século como, por exemplo, ainda no volume 3 (1942) um longo artigo de John Von Neumann, sobre "Approximative properties of matrices of high finite order". Como testemunho de uma notável internacionalização da jovem revista, podemos encontrar também nesse volume um artigo de Maurice Fréchet e outro de Renato Cacciopoli.

Após a fase inicial, a *Portugaliae Mathematica* diminuiu o número de publicações de autores portugueses, mas continuou a contar sobretudo com apoio internacional, quer através das assinaturas e das trocas que a mantiveram visível e que atraíram colaboração de alto nível científico quer de "matemáticos distintos, como os já mencionados M. Fréchet, J. Von Neumann, R. Cacciopoli, G. Ascoli e H. Höpf, mas também W. Sierpinsky (vols. 5 e 15), L. Nachbin (vol. 6), L. De Broglie e P. Erdös (vol. 8), I. Kaplansky e M. Peixoto (vol. 10), J. Dieudonné (vols. 11 e 14), G. Köthe (vol. 13), C. Foias (vol. 19) e de J.-L. Lions" [2], que publicou *"Les semi groupes distributions"*, no volume 19 (1960).

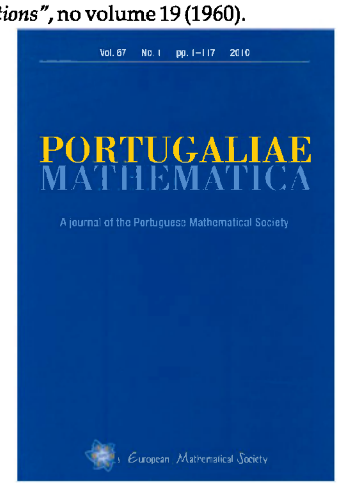


Figura 3 Capa do n.º 1 Vol. 67 (2010) da *Portugaliae Mathematica*

Após a reconstrução da SPM, em 1977, a então única revista de investigação matemática com "sede" em Portugal iniciou um processo de reorganização e regularização editorial. Sob a direcção de Alfredo

Pereira Gomes, entre 1978 e 1996, contando com apoios financeiros da Fundação Calouste Gulbenkian e do Instituto Nacional de Investigação Científica (INIC), a *Portugaliae Mathematica* restabeleceu a publicação regular, com colaboração internacional de nível científico arbitrado e tornou-se propriedade da SPM, que a publicou até Dezembro de 2007.

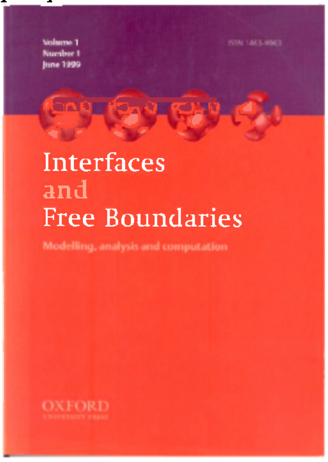


Figura 4 Capa do n.º 1 (1999, OUP) da *Interfaces and Free Boundaries*. Legenda da ilustração: Simulação da evolução de uma superfície por fluxo de curvatura média (PhD. de K S Baba, U. Sussex, 1998)

Com o apoio do CMAF (Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais) e de outros centros do INIC, a *Portugaliae* reorganizou e estabeleceu a sua biblioteca de permuta com sede na Universidade de Lisboa, a qual presta actualmente serviço à comunidade matemática portuguesa. Nos anos noventa, sob o impulso de João Paulo Dias, director de 1997 a 2007, a revista prosseguiu a sua consolidação internacional, utilizando a composição em TEX desde o volume 44 (1987) e mantendo a sua "sede" na sede da SPM em Lisboa. Estabeleceram-se acordos com a Biblioteca Nacional de Portugal, para a digitalização dos primeiros cinquenta volumes [6] e com o EMIS (The European Mathematical Information Systems) para a sua primeira versão electrónica residente na mais antiga biblioteca electrónica de matemática de acesso livre [7].

A partir do volume 65 (2008), sob a direção de Rui L. Fernandes, do IST/Universidade Técnica de Lisboa, a *Portugaliae Mathematica* passou a ser publicada pela European Mathematical Society (EMS) [8], cuja Publishing House tem sede no ETH-Zentrum, em Zurique, e continuou a ser um título da SPM (*A Journal of the Portuguese Mathematical Society*), que entretanto passou a sua sede legal para Coimbra.

Em Fevereiro de 1992, a European Science Foundation (ESF) promoveu um *workshop* sobre o *Mathematical Treatment of Free Boundary Problems*, sob proposta de J.F. Rodrigues (Universidade de Lisboa) e J. I. Diaz (Universidade Complutense de Madrid), que daria lugar ao programa científico homónimo de matemática entre 1993 e 1998, tendo publicado catorze *newsletters* [9] a partir do CMAF, na Universidade de Lisboa.

Numa pequena nota bibliográfica acerca de algumas publicações sobre a matemática dos problemas com fronteiras livres [10], publicada no nº 3 do *FBP News* de Novembro/Dezembro de 1993 [9], foi levantada a questão da necessidade de um novo jornal matemático dedicado àquele tópico interdisciplinar, opinando e fazendo-se eco de uma discussão levantada por John Ockendon na última reunião desse ano do Steering Committee daquele programa da ESF, realizada no Institut Henri Poincaré, em Paris.

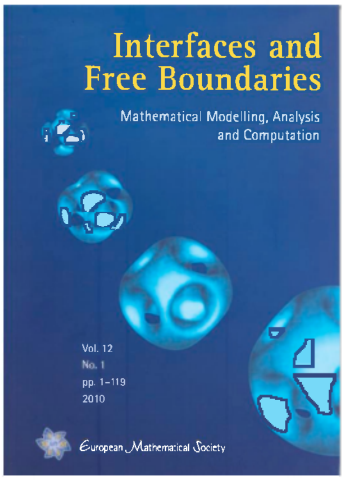


Figura 5 Capa do n.º 1 do Vol. 12 (2010, EMS) da *Interfaces and Free Boundaries*

No último ano do programa FBP/ESF, a 12 de Abril de 1997, numa reunião realizada no CMAF, em Lisboa, H.W. Alt (U. Bonn), H. Berestycki (U. Paris VI), C. Elliott (U. Sussex), M. Primicerio (U. Firenze) e J.F. Rodrigues (U. Lisboa) ultimaram uma proposta, feita à Oxford University Press, de um novo jornal de matemática: *Interfaces and Free Boundaries* [11]. Após dois anos de preparação, o primeiro número foi lançado em Julho de 1999, durante o 4.º ICIAM (*International Congress on Industrial and Applied Mathematics*) em Edinburgh.

O primeiro número abriu com o artigo de J.-L. Lions "Parallel algorithms for the solution of variational inequalities" [11], na qual se propunha um método geral de algoritmos paralelos estáveis para a aproximação de soluções de problemas com fronteiras livres que correspondem a problemas unilaterais e no qual se levantava a questão, ainda hoje em aberto, da sua generalização a problemas com constrições não locais, como o caso dos escoamentos de Bingham. No editorial desse número, explicitando o carácter interdisciplinar do âmbito da revista (modelação matemática, análise e computação), pode ler-se: "*Interfaces and Free Boundaries embrace a broad spectrum of mathematical problems in the physical, life, environmental, engineering and other applied sciences. The combination of theory and applications requires the development of mathematical sciences and their complex interactions with classical and new models for the relevant phenomena.*"

Em 2002, quando a EMS – Publishing House se iniciou na publicação de revistas de investigação matemática, interessou-se pela *Interfaces and Free Boundaries* e comprou o título à Oxford University Press, a qual publica desde 2003. A direcção editorial continuou a ser coordenada por J.F. Rodrigues e o *editorial office* continuou a ter sede no CMAF/Universidade de Lisboa.

Como se pode concluir, hoje em dia não faz muito sentido falar de "sede" de um periódico internacional de investigação matemática e não creio que haja nenhum que se publique actualmente no nosso país. Podemos contudo dizer que, em 2010, há pelo menos duas revistas internacionais de matemática que são editadas a partir de Portugal e ambas são publicadas pela European Mathematical Society, apesar de uma única ser propriedade de uma instituição "com sede no nosso país", a SPM.

Referências

[1] **Crato, N.** "O Muito que Falta Fazer", *Gazeta de Matemática*, nº 160 (2010), 62-64.

[2] **Rodrigues, J. F.** "Revistas de matemática portuguesas. Alguns aspectos das publicações de investigação (quase) periódicas", *Boletim da SPM* n.º 50 (Maio de 2004), 19-36.

[3] **Monteiro, António A.** " Movimento Matemático", *Gazeta de Matemática*, nº 10 (1942), 25-26.

[4] **Ribeiro, Hugo** "Just half a century ago… ", *Portugaliae Math.* v. 44 (1987), iii-iv.

[5] **Gomes, A. Pereira** "Portugaliae Mathematica, um marco histórico na investigação matemática portuguesa", *Publicações de História e Metodologia da Matemática*, nº 5 Dep. Matemática, Univ. Coimbra, 1997.

[6] Vol. 1-50 (1937-1993) *http://purl.pt/index/pmath/PT/index.html*

[7] Vol. 51-63 (1994-2006) *http://www.emis.de/journals/PM/*

[8] Vol. 64-67 (2007-2010) *http://www.ems-ph.org/journals/journal.php?jrn=pm*

[9] FBP/ESF Scientific Programme *http://newsletter.fbpnews.org/*

[10] **Rodrigues, J. F.** "Bibliographical notes on some recent publications on the mathematics of free boundary problems", *FBPNews* nº3 (Nov/Dec 1993), 12-13, in [FBP].

[11] Vol. 1-12 (1999-2010) *http://www.ems-ph.org/journals/journal.php?jrn=ifb*

Este texto foi escrito ao abrigo do novo Acordo Ortográfico.

Martin Gardner (1914-2010)

Faleceu, no passado mês de Maio, o mais popular e talvez o mais talentoso divulgador de matemática das últimas décadas. Nascido em 1914, em Tulsa, no Estado de Oklahoma, onde o seu pai geólogo criou uma empresa petrolífera, Martin Gardner viria a licenciar-se em Filosofia, na Universidade de Chicago, em meados da década de trinta. Depois de algumas experiências profissionais na imprensa e de uma passagem pela Marinha, Gardner optou, nos anos 50, por uma carreira de escritor *freelancer*, tendo a sua coluna na revista *Scientific American* inspirado várias gerações, não só de matemáticos. Essa era, aliás, uma das características de Martin Gardner: a capacidade de tornar simples os mais complicados temas, alargando a sua comunidade de leitores muito para além do habitual grupo de pessoas que procura artigos sobre *puzzles* ou jogos matemáticos. Gardner costumava explicar esse sucesso pela sua própria dificuldade em entender os assuntos (uma vez que a sua formação matemática era escassa), o que o obrigava a estudar aturadamente e a confrontar-se com os problemas mais comuns para quem aborda um tema pela primeira vez. Provavelmente, essa é apenas uma das muitas razões que contribuíram para que Gardner fosse, em vida, um escritor tão admirado e, hoje, depois da sua morte, recordado com tanta saudade.

A Matemática tem os seus Encantos

Dez anos após o Ano Internacional da Matemática, a Fundação Calouste Gulbenkian decidiu organizar um ciclo de conferências dedicado aos encantos da matemática, como forma de assinalar a efeméride. Jorge Picado, António Machiavelo e Ana Cannas foram os oradores convidados. Mais detalhes podem ser encontrados em *http://www.gulbenkian.pt*.

Xadrez na Índia

O comité organizador do International Congress of Mathematicians 2010 (ICM) está a preparar uma partida simultânea de xadrez, em que o Grande Mestre indiano Anand irá enfrentar 40 participantes da conferência. O evento decorrerá no dia 24 de Agosto, cinco dias depois do início do ICM, que decorre entre 19 e 27 de Agosto, e da atribuição da medalha Fields. Anand é o actual campeão mundial de xadrez e notabilizou-se no início da década de 1990, ao vencer torneios de prestígio, deixando para trás nomes como Garry Kasparov e Anatoly Karpov.

Sementes da Ciência

Gonçalo Pena, Jaime Carvalho e Silva e Margarida Melo são três matemáticos da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, mas não é o facto de leccionarem e investigarem na mesma instituição que faz com que os seus nomes apareçam juntos na frase de abertura desta notícia. A razão é outra e explica-se também numa frase: no passado dia 22 de Maio, no Casino da Figueira, Gonçalo Pena, Jaime Carvalho e Silva e Margarida Melo receberam o Prémio Seeds of Science, na categoria Ciências Exactas, atribuído pelo jornal *online Ciência Hoje*.

Jaime Carvalho e Silva é o actual secretário-geral da Comissão Internacional para a Instrução da Matemática (o primeiro português a ocupar o cargo) e investigador em Análise e História e Metodologia da Matemática. Em 2005, Jaime Carvalho e Silva recebeu o prémio José Sebastião e Silva, que distingue os autores dos melhores manuais escolares. Gonçalo Pena investiga na área da Dinâmica de Fluidos Computacional e, recentemente, recebeu um prémio, atribuído pela Fundação Calouste Gulbenkian no âmbito do Programa de Estímulo à Investigação, para desenvolver um programa de simulação em computador capaz de reproduzir o fluxo sanguíneo e a sua interacção com as artérias. Margarida Melo investiga sobretudo temas relacionados com a Geometria Algébrica, uma área da matemática que fornece ferramentas essenciais para o desenvolvimento da Física Teórica moderna. Margarida Melo foi distinguida, em 2009, com o prémio Michele Cuozzo, da Univerisità degli Studi di Roma Tor Vergata, pela sua tese de doutoramento, considerada a melhor tese de matemática publicada em Itália.

Festival de Jogos Matemáticos

Konane, *Semáforo*, *Hex* e *Avanço* são quatro nomes estranhos apenas para quem não esteve no Festival de Jogos Matemáticos, que decorreu nas instalações do Instituto Superior Técnico, no passado dia 2 de Maio. Para além das actividades de competição, o festival contou ainda com a actuação dos *Matemágicos Silva* e com uma palestra dedicada à magia do baralho de cartas.

Prémio Shaw

Ao contrário de outros prémios, o Prémio Shaw não se destina apenas a uma área específica, mas sim a três: Astronomia, Ciências da Vida e Ciências Matemáticas. Em 2010, o vencedor, nesta última categoria, foi Jean Bourgain, investigador no Instituto de Estudos Avançados de Princeton. Bourgain foi distinguido pelo seu trabalho em análise matemática e as aplicações desta em diversas áreas, das equações diferenciais à física-matemática, passando pela combinatória, teoria de números, teoria ergódica e ciência de computadores. Na categoria de Astronomia, houve três vencedores *ex aequo*: Charles Bennett, da Universidade John Hopkins, Lyman Page Jr, da Universidade de Princeton, e David Spergel, também de Princeton. David Julius, da Universidade de Chicago, foi o vencedor na categoria de Ciências da Vida.

SPM chumba Provas de Aferição

A Sociedade Portuguesa de Matemática emitiu um parecer sobre as Provas de Aferição de Matemática dos 4.º e 6.º anos, que se realizaram em Maio de 2010. Segundo o Gabinete do Ensino Básico e Secundário da SPM, as provas deste ano "não valorizam o empenho, o rigor e o conhecimento, desorientando tanto os alunos como os professores". O parecer pode ser lido, integralmente, em *http://www.spm.pt/files/outros/parecerafericao2010.pdf*.

Maxim Kontsevich em Portugal

As *Pedro Nunes Lectures* e as *Jornadas SPM/CIM* trouxeram Maxim Kontsevich ao nosso país, para participar em algumas palestras. No âmbito das *Lectures*, a Universidade do Porto recebeu o matemático no dia 5 de Julho e, no dia 7, o vencedor do prémio Henri Poincaré e da medalha Fields deslocou-se à Universidade de Lisboa. No mesmo dia, Kontsevich participou num cruzeiro no rio Tejo, a bordo do "Príncipe Perfeito", para uma *Jornada SPM/CIM* que reuniu vários matemáticos. Num ambiente informal discutiram-se os avanços mais recentes na área da Geometria Quântica. O encontro consistiu em quatro apresentações, seguidas de um debate com Kontsevich.

Entre Braga e Santiago

É sabido que a geografia, a língua, a gastronomia e a herança celta são elementos que aproximam o Norte de Portugal da Galiza. A partir de Julho de 2010, através das actividades do MatCampus, também a matemática contribuirá para o fortalecimento da cooperação entre as duas regiões. O MatCampus 2010 é uma iniciativa do Departamento de Matemática e Aplicações da Universidade do Minho, do Centro Internacional de Matemática (CIM) e da Faculdade de Matemática da Universidade de Santiago de Compostela. Dirigida a jovens portugueses e galegos entre os 16 e 17 anos, o MatCampus 2010 realiza-se entre 18 e 31 de Julho, sendo a primeira semana passada em Braga e a segunda em Santiago de Compostela.

Olimpíadas Ibero-Americanas

Os resultados das Olimpíadas Ibero-americanas de Matemática Universitária de 2009 já foram divulgados, tendo a equipa portuguesa conquistado as seguintes medalhas: Jorge Miranda (Medalha de Ouro), João Matias e João Guerreiro (Medalha de Prata), João Pereira, Pedro Vieira, Diogo Poças e Eloísa Pires (Medalha de Bronze). Filipe Valeriano, Ricardo Campos e Miguel Couto obtiveram menções honrosas. Os diplomas serão entregues aos vencedores durante o Encontro Nacional da SPM.

A Matemática e os Têxteis

No final da Primavera, a Covilhã foi o centro de muitas notícias devido ao estágio da Selecção Portuguesa de Futebol. Mas, nesse período, outras actividades fizeram pulsar a cidade, talvez de uma forma mais discreta, sem tantas câmaras, luzes e vuvuzelas. Por exemplo, entre 1 e 11 de Junho, quem passou pela Covilhã teve oportunidade de visitar a exposição "A Matemática e os Têxteis", que reuniu os trabalhos de um concurso promovido pela Delegação Regional Centro da Sociedade Portuguesa de Matemática e pela Universidade da Beira Interior (UBI). Os que escolheram o dia da inauguração para se deslocar ao Museu de Lanifícios da UBI puderam ainda assistir à palestra de Nuno Crato sobre "A Matemática das Coisas".

O Segredo dos Números

Talvez John Tate nunca tenha dedicado especial atenção ao número "um milhão" até ter recebido, em Maio, um milhão de dólares por ter ganho o Prémio Abel 2010. No entanto, foi precisamente o cuidado e a originalidade no estudo das propriedades dos números que lhe valeram essa distinção, uma das maiores para um matemático do século XXI. John Tate é professor da Universidade do Texas e foi responsável, durante décadas, por incontáveis avanços na área da matemática habitualmente designada por Teoria dos Números, bem como na ligação desta com outros tópicos de investigação. Antes de chegar à Universidade do Texas, Tate deu aulas, durante 36 anos, na Universidade de Harvard.

Leiria recebe Mat-Oeste em dia de Encontro Nacional

A terceira edição do Mat-Oeste decorre no dia 8 de Julho na Escola Superior de Tecnologia e Gestão (ESTG) do Instituto Politécnico de Leiria. O evento vai articular-se com o Encontro Nacional da SPM (ENSPM), que terá início nessa tarde, no mesmo local. Os participantes no 3.º Mat-Oeste têm assim assegurada a participação no primeiro dia do ENSPM. Organizado pelo Departamento de Matemática da ESTG, o 3.º Mat-Oeste pretende promover a divulgação, a discussão e a partilha de ideias e experiências junto de docentes de todos os níveis de ensino e do público em geral. Nesta edição, a Geometria será a área em destaque.

Pedro Nunes Lectures

Para promover a visita de matemáticos importantes a universidades portuguesas, o Centro Internacional de Matemática e a Sociedade Portuguesa de Matemática, com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian, têm vindo a organizar um ciclo de conferências a que chamaram *Pedro Nunes Lectures*. Sir Michael Atiyah (que viu a sua primeira visita a Portugal adiada por causa do vulcão islandês) será o próximo convidado. Mais informações podem ser encontradas em *http://www.cim.pt*.

Encontro no Douro

De 2 a 4 de Outubro, as vinhas que serpenteiam as margens do Douro servirão de cenário ao Encontro "Equações Diferenciais e Aplicações". As Universidades do Minho e de Trás-os-Montes e Alto Douro são as entidades organizadoras deste evento que permitirá aos participantes estar em contacto com a temática das equações diferenciais parciais, equações diferenciais ordinárias e as suas aplicações.

Publicações da SPM à venda na Fnac e noutras livrarias

Os livros publicados pela SPM já podem ser encontrados na Fnac e em muitas outras livrarias espalhadas pelo País. Almedina, Bisturi dos Livros, Escolar Editora, Pó dos Livros e a Loja do Pavilhão do Conhecimento são apenas alguns exemplos. A lista completa dos pontos de venda está *online* em *http://www.spm.pt/pontos_venda_livros*. Também a *Gazeta de Matemática* passou a estar disponível nas bancas de Braga, Coimbra, Estremoz, Évora, Lisboa e Porto. Veja onde adquiri-la em *http://www.spm.pt/pontos_venda_gazeta*.

por: **Joana Teles**
[Universidade de Coimbra]

Sinal Mais nas Olimpíadas de Matemática

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática vão chegar a todos os ciclos do ensino e, no próximo ano, realiza-se em Portugal a primeira edição das Olimpíadas de Matemática da Lusofonia.

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), criadas há 28 anos por um grupo de professores em Coimbra, são o evento científico que mais jovens movimenta em Portugal. Das 151 escolas e dos 6028 estudantes participantes na primeira edição, foram atingidos, este ano, mil escolas e cerca de 30 mil alunos. E estes números não vão ficar por aqui. O próximo ano "olímpico" português trará uma grande novidade: a expansão das OPM. A partir da próxima edição das OPM, todos aqueles que, desde cedo, sonham em participar nas OPM poderão fazê-lo.

Os alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade (primeiro ciclo) terão a oportunidade de realizar uma prova das OPM no 3.º período. As Pré-Olimpíadas, até agora realizadas no 7.º ano, passam a ser realizadas pelos alunos do 5.º ano. Aparece uma nova categoria, a categoria Júnior, destinada a alunos dos 6.º e 7.º anos. Esta nova categoria é realizada nos mesmos moldes que as categorias A (8.º e 9.º) e B (10.º, 11.º e 12.º) já existentes. Ou seja, aqueles que conseguirem superar as provas realizadas na escola e na sua região terão oportunidade de participar na grande festa que é a Final Nacional das OPM.

Olimpíadas de Matemática da Lusofonia

A Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) organizou em Lisboa, no dia 29 de Março de 2010, um encontro com participantes de todos os países onde o português é uma das línguas oficiais, com vista à possibilidade da realização de umas Olimpíadas de Matemática em língua portuguesa. Nos países com alguma experiência de Olimpíadas (Brasil, Moçambique e Cabo Verde) foram convidados os respectivos responsáveis. Nos restantes países lusófonos (Angola, Guiné-Bissau, Timor-Leste e São Tomé e Príncipe) a SPM fez convites pessoais ou enviou o convite às escolas portuguesas sedeadas nestes locais.

Alguns dos participantes na reunião de Lisboa

No início do encontro foram apresentadas as experiências de Olimpíadas já realizadas, relatando as dificuldades encontradas e os sucessos obtidos. Posteriormente, foram descritas as características específicas de cada país e as principais dificuldades existentes. Houve oportunidade de verificar que muitos problemas são comuns, o que reforçou o interesse de realizar actividades em conjunto. Todos os presentes consideraram importante a criação de um espaço comum de encontro matemático, de alunos e professores de vários países, em língua portuguesa. A conclusão do encontro levou à assinatura de uma declaração de intenções, que se denominou CARTA DE LISBOA. Por unanimidade, os participantes decidiram:

a) Criar uma Olimpíada de Matemática da Lusofonia (OML) a realizar anualmente, com a primeira edição prevista para 2011, em Portugal, e as seguintes no Brasil e em Moçambique.

b) Constituir uma comissão internacional, com a participação de representantes de todos os países de língua portuguesa (CIOML), que se reunirá uma vez por ano, presencialmente ou através das novas tecnologias de informação e comunicação, para acompanhar o progresso do trabalho realizado em cada um dos países; traçar estratégias de apoio aos trabalhos desenvolvidos nacionalmente; designar as comissões que organizarão a OML e estabelecer datas comuns para os eventos envolvidos.

c) Organizar em cada ano uma reunião matemática (Semana Olímpica de Matemática da Lusofonia) de alunos premiados nas Olimpíadas Nacionais e de professores, com a realização de cursos e conferências de matemática, propiciando momentos de reflexão e de troca de experiências entre os vários países.

d) Incentivar a criação e a difusão de textos matemáticos relacionados com as Olimpíadas de Matemática.

e) Incentivar a cooperação entre os vários países para a criação e a realização de projectos visando o ensino de qualidade da matemática, particularmente a oferta de cursos para professores de matemática.

f) Incentivar a criação de sociedades científicas de matemática nos diversos países.