N. 0163

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXII | Mar. 2011 | 4,20€

Como Partilhar um Segredo

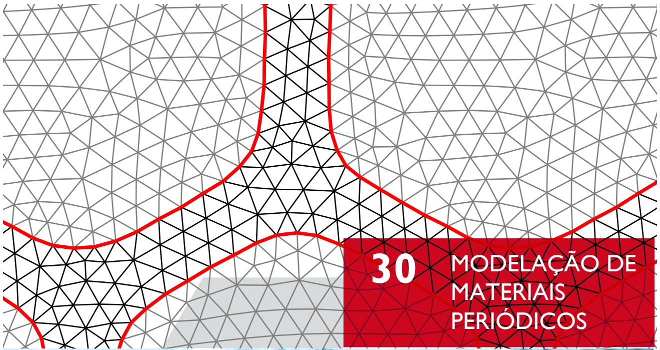
ANTÓNIO PEREIRA ROSA

O Problema dos Três Corpos e o Caos

CARLOS FIOLHAIS

Mira Fernandes 1884-1958

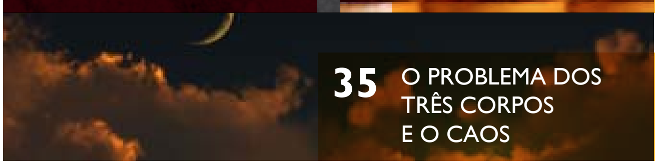
LUÍS TRABUCHO DE CAMPOS


30 MODELAÇÃO DE MATERIAIS PERIÓDICOS


26 COMO PARTILHAR UM SEGREDO


40 JOSÉ RIBEIRO DE ALBUQUERQUE


50 LÍDERES E TOMADA DE DECISÃO


35 O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS E O CAOS

ÍNDICE

TABELA DE **PUBLICIDADE 2011**

Características Técnicas da Revista

Periodicidade: Quadrimestral
Tiragem: 3.000
Nºde páginas: 64
Formato: 20.2 x 26.6 cm
Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

Condições Gerais:

Reserva de Publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência miníma de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

Contactos

Ana Rita Ferrer
Tel 21 7939785 Tlm: 96 184 89 66
rita.ferrer@spm.pt

Especificações Técnicas:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK
Resolução: 300 dpi (alta resolução)
Margem de corte: 4mm

Localizações Específicas:

Verso capa: 1240€
Contracapa: 1100€
Verso da Contracapa: 990€

	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	**590€**	**390€**	**220€**	**120€**	**220€**
PAR	**490€**	**290€**	**170€**	**120€**	**170€**

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.

Rogério Martins
Universidade Nova
de Lisboa
roma@fct.unl.pt

O **ORGULHO** DE **PUBLICAR** NA **GAZETA**

É uma honra poder servir a comunidade matemática portuguesa nesta nova equipa editorial da *Gazeta de Matemática*, uma revista que tem um impressionante currículo de fundadores e colaboradores.

Gostaria de homenagear o anterior director, o Prof. Jorge Buescu, que transformou a *Gazeta de Matemática* no que nós conhecemos hoje. Perdemos um excelente director, contudo ganhámos um talentoso divulgador de matemática: já a partir do próximo número vamos ter uma nova secção permanente da sua autoria. Gostaria também de agradecer aos membros da antiga equipa editorial, em particular aos que decidiram não integrar a nova, o Prof. Adérito Araújo, o Prof. João Pimentel Nunes e a Dra. Renata Ramalho, pois o esforço deles foi determinante para o sucesso desta empresa nos últimos anos.

Desde o ano 2000, ano em que renasceu a *Gazeta de Matemática* (a sua publicação tinha sido interrompida em 1976) que esta revista tem tido uma derivada positiva. Tem sido com grande regozijo que temos visto os conteúdos deste periódico tornarem-se cada vez mais interessantes e apelativos para o nosso público, temos tido colaboradores permanentes de grande talento, que vão continuar a colaborar com a *Gazeta*.

O nosso passado, enquanto comunidade portuguesa de matemática, está muito justamente representado neste número com o artigo sobre a vida e a obra do Prof. Mira Fernandes, da autoria do Prof. Luís Trabucho, que faz a capa deste número, e o artigo sobre o Prof. José Ribeiro de Albuquerque, um matemático da geração de 40, que completou recentemente o centenário do seu nascimento e que nos é trazido pelas mãos de nada menos do que o seu sobrinho, o Prof. Rui Albuquerque. Uma geração de matemáticos que está ligada à criação desta revista e que continua a ser referência para todos nós em vários aspectos, enquanto matemáticos e como agentes activos de intervenção social.

Embora tenhamos tido a oportunidade de publicar nos últimos anos trabalhos de grande valor, somos ambiciosos e queremos mais, gostaríamos que se generalizasse o verdadeiro orgulho de publicar na *Gazeta de Matemática*, gostaríamos que o melhor que se faz em Portugal em matemática esteja representado na *Gazeta*. Claro que não ambicionamos competir com as revistas técnicas, não é essa a nossa natureza, contudo é seguramente possível apresentar à comunidade, e principalmente aos nossos mais jovens leitores, o fruto do nosso suor. Esta é uma tarefa que, além do mais, nos ajuda a clarificar o nosso próprio trabalho, como dizia Albert Einstein: "Não entendeste realmente algo até que o consigas explicar à tua avó". Temos excelentes exemplos deste esforço bem-sucedido nos artigos que publicamos neste número, o artigo da autoria do Prof. Cristian Barbarosie e da Prof. Anca Toader em teoria da homogeneização e o artigo do Prof. Alberto Pinto e colaboradores, que nos dão o prazer de poder espreitar o seu trabalho sobre teoria dos jogos aplicada ao estudo das interacções entre indivíduos de uma população.

Se tiver um bom pedaço de matemática para nos contar não hesite, envie-nos, nós trataremos de lhe dar eco…

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* . Quaisquer reacções ou sugestões serão bem- vindas para *atractor@atractor.pt*

ATRACTOR DE SIERPINSKI

Na realidade o número de sorteios é infinito. Nenhuma decisão é final, todas se ramificam noutras. Os ignorantes supõem que infinitos sorteios requerem um tempo infinito: na verdade basta que o tempo seja infinitamente divisível, como o ensina a famosa parábola da corrida com a tartaruga. Esta infinidade condiz de maneira admirável com os sinuosos números do acaso.

Jorge Luis Borges, "A Lotaria na Babilónia"

Figura 1

À entrada da exposição "Matemática Viva", agora encerrada, encontrava-se um módulo que, ao longo de quase uma dezena de anos, construiu uma imagem que foi sendo uma aproximação cada vez mais perfeita de um *atractor*. O desenho, que se projectava numa das paredes do Pavilhão do Conhecimento, é resultado de uma escolha inicial, em 2000, de um dos vértices de um triângulo equilátero previamente fixado, pintados de azul, verde e encarnado, e da iteração de um processo simples – e ao visitante bastava accionar um botão que lançava um dado. Este cubo tinha as faces pintadas com aquelas três cores, a mesma cor em cada par de faces opostas; um sensor tomava nota da cor que saía no lançamento e era então adicionado à imagem o ponto médio do segmento que une o vértice dessa cor ao ponto anteriormente assinalado (figuras 2 e 3).

Assim, a partir da primeira imagem com apenas três pontos coloridos dispostos nos vértices do triângulo equilátero, foram-se formando, no triângulo (e no seu interior), confi-

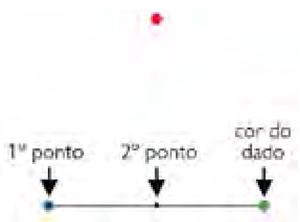


Figura 2

Figura 3

gurações de aspecto complicado cujo limite, que designaremos por L (figura 1), não está ao nosso alcance desenhar mas podemos descrever. Suponhamos que o ponto inicial, digamos P, é o vértice azul do triângulo (considerações análogas são válidas se a escolha recair sobre outro vértice). O que foi surgindo na parede são pontos da *órbita* de P por um *sistema dinâmico aleatório*: se f_A, f_V e f_E são as funções que a cada ponto do plano fazem corresponder o ponto médio do segmento que une esse ponto ao vértice azul (A), verde (V) e encarnado (E), respectivamente, então, em cada instante, o novo ponto desenhado na parede é o resultado da composição $f_{a_n} f_{a_{n-1}} \dots f_{a_1}(P)$, na qual $(a_n)_{n \in N}$ é a sucessão de cores determinada pelos lançamentos do dado. A figura seguinte mostra as imagens que se teriam obtido se, no dado, tivesse saído: (a) sempre a cor azul; (b) alternadamente azul e verde; (c) azul, verde e encarnado, repetidas nesta ordem.

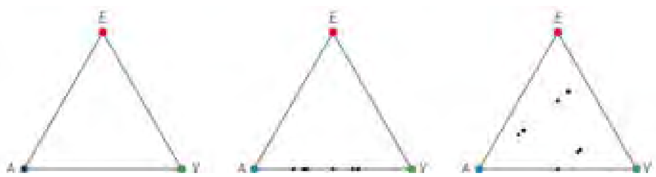
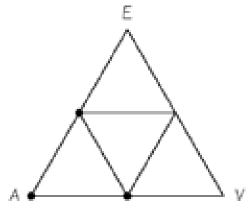


Figura 4

Observe-se que, depois de determinada uma cor, o processo exposto consiste em aplicar ao ponto anteriormente pintado uma homotetia de razão 1/2 e centro no vértice dessa cor. Deste modo, após a primeira aplicação do processo, o ponto obtido terá de ocupar uma das três posições indicadas na figura 5, que são os vértices de um dos quatro triângulos equiláteros em que se divide o triângulo original [AEV]. Analogamente, após o segundo lançamento do dado, o novo ponto terá de ocupar uma das nove posições assinaladas na figura 6, que são vértices de alguns dos doze triângulos equiláteros iguais em que se dividem três da geração anterior – a região triangular central, sem o bordo, da figura 5 não voltará a intervir no processo. Em geral, na n-ésima iteração, o ponto que se acrescenta tem de pertencer aos vértices de uma família de triângulos pequeninos, equiláteros e iguais, em que se dividem os da geração anterior, saindo da jogada as correspondentes regiões triangulares centrais sem o bordo. Assim, o conjunto L_n, formado pelas n primeiras iterações de P, determinadas pelas cores que os sucessivos lançamentos do dado seleccionam, está contido na intersecção S da família infinita de regiões triangulares, com bordo, que em cada etapa perduram. Como veremos, L_n não é S para nenhum n. Contudo, como sugeria o módulo no Pavilhão do Conhecimento, se o processo que gera a sucessão de cores é aleatório e n é suficientemente grande, então L_n é uma boa aproximação de S.



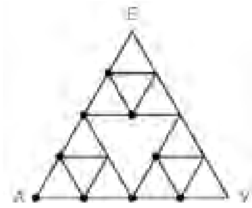


Figura 6


Figura 7

A figura S, conhecida como *triângulo de Sierpinski*, é o resultado do seguinte procedimento de corte na região triangular R_1 cujo bordo é o triângulo equilátero [AEV]. De R_1, retira-se o interior do triângulo médio, o que tem vértices nos pontos médios dos lados do bordo de R_1; obtemos uma região R_2 formada por três regiões equiláteras, cada uma com 1/4 da área de R_1; prosseguimos de modo análogo, suprimindo de cada uma delas o interior do triângulo médio, obtendo-se R_3. A figura S é a intersecção de todos os R_i's. Por construção, S é um conjunto não vazio, compacto, conexo e de área nula. E coincide com a união dos bordos das regiões R_i que são os lados dos pequenos triângulos equiláteros que sobrevivem ao sucessivo esburacar do triângulo inicial. Consideremos o lado deste triângulo (que supomos ter comprimento 1) de extremos A e V. Note-se que a marcação de pontos neste lado, pelo processo que constrói cada L_n, pressupõe que a cor encarnada não sai nos lançamentos do dado. Após o primeiro lançamento, pode ficar marcado o ponto A ou o ponto médio do segmento [AV]; com o segundo lançamento, são dois os novos pontos que se podem acrescentar: os que se encontram, respectivamente, a uma distância de 1/4 e 3/4 de A. Em geral, qualquer ponto de [AV] seleccionado por este sistema dinâmico aleatório dista de A uma fracção do conjunto de racionais $D = \{\frac{a}{b} : a$ e b inteiros, $0 \leq a \leq b$ e b é uma potência de expoente não negativo de 2$\}$. Em particular, o ponto do segmento [AV] que dista 1/3 de A não consta de nenhum L_n, mas pertence a S, que contém todo o segmento $[AV]$.

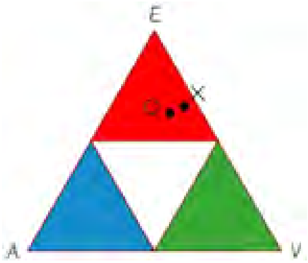


Figura 8

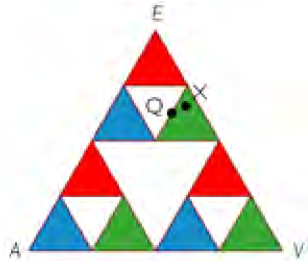


Figura 9

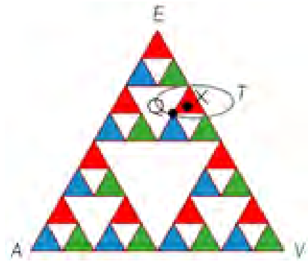


Figura 10

Como o processo de lançamento do dado é aleatório, fixado um ponto X de S e um erro ε, existe um natural n e um ponto de L_n que dista de X menos de ε. Como é que, em geral, utilizando elementos da órbita definida, poderemos chegar perto de um ponto X de S? Exemplifiquemos com um erro máximo permitido de 1/8 e o ponto X da figura 8. Como indicam as figuras 9 e 10, X pertence à região R_3 e está a uma distância inferior a 1/8 do ponto Q, vértice de T. Ora, a região pintada de encarnado na figura 8 é precisamente a imagem do triângulo inicial por uma homotetia de centro no vértice encarnado e razão 1/2 . (Afirmações análogas valem para as outras cores na figura, e também para as subdivisões em triângulos menores indicadas nas figuras 9 e 10).

Daqui deduzimos que Q pode ser marcado ao fim de três lançamentos do dado, desde que a sucessão de cores contenha, nos três primeiros termos, as cores encarnado, verde e encarnado, por esta ordem (Figura 11).

Note-se, contudo, que, mesmo sendo a sucessão de cores gerada por um processo aleatório, não sabemos se ela tem esta propriedade. Embora, no caso geral, seja complicado encontrar na sucessão de cores um bloco que nos sirva para, a partir do vértice azul, chegar perto de X, podemos afirmar que, com probabilidade 1, existe na sucessão de cores um tal bloco.

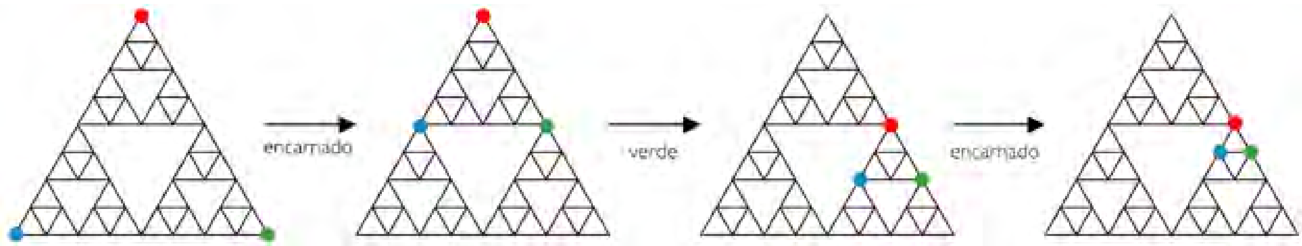


Figura 11

RECREIO

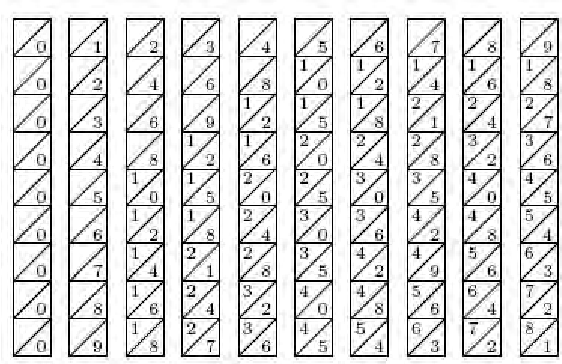
Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

O ÁBACO DE NAPIER

John Napier inventou um método de cálculo, usando um simples tabuleiro de xadrez, que foi ofuscado pelas suas outras criações. Descreveremos como operar no tabuleiro, seguindo de perto exemplos do próprio Napier.

De John Napier (1550-1617), o pai dos logaritmos, também são bem conhecidos os pauzinhos com números, utilizados para realizar operações aritméticas pelo método da gelosia, os Ossos de Napier.

Na obra em que Napier introduz este recurso de cálculo, "*Rabdologiæ*" (1617), descreve também como se pode usar um tabuleiro de xadrez e algumas peças para efectuar somas, subtracções, multiplicações, divisões e extracções de raízes quadradas!

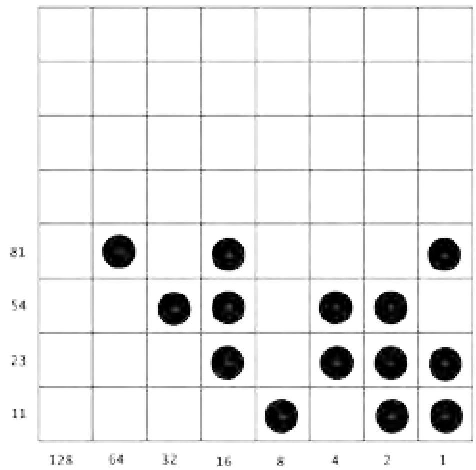


Os Ossos de Napier

RABDOLOGIÆ, SEV NVMERATIONIS PER VIRGULAS LIBRI DVO:
Cum Appendice de expeditissimo Multiplicationis Promptuario.
Quibus accessit & Arithmeticæ Localis Liber vnus.
Authore & Inventore Ioanne Nepero, Barone Merchistonii, &c. Scoto.
EDINBVRGI,
Excudebat Andreas Hart. 1617.

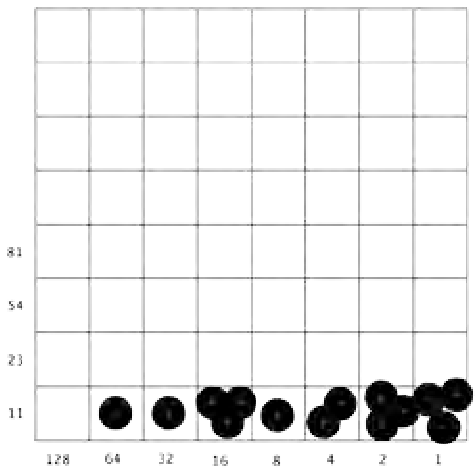
Para começar, devemos escrever os números em base 2.

Ilustremos a soma. Suponhamos que pretendemos calcular 11+23+54+81. Passar da notação binária para o tabuleiro é simples:



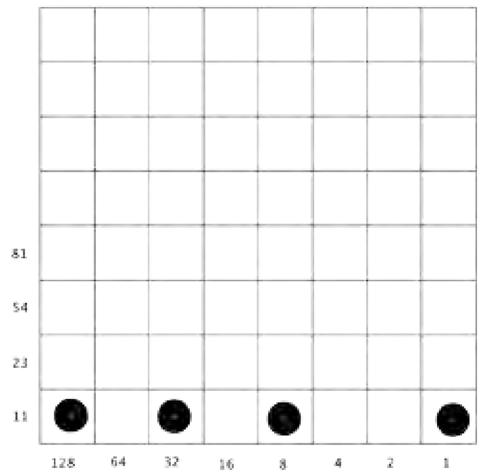
$11 + 23 + 54 + 81 = \ldots$

Basta agora baixar todas as peças em cada coluna, obtendo:



$11 + 23 + 54 + 81 = 64 + 32 + 3 \times 16 + 8 + 2 \times 4 + 3 \times 2 + 3 \times 1$

Agora, da direita para a esquerda, substitui-se cada par de peças numa casa por uma peça na casa imediatamente à esquerda (o "e vai um" em binário), obtendo-se a resposta na primeira linha, fácil de interpretar em base 2:

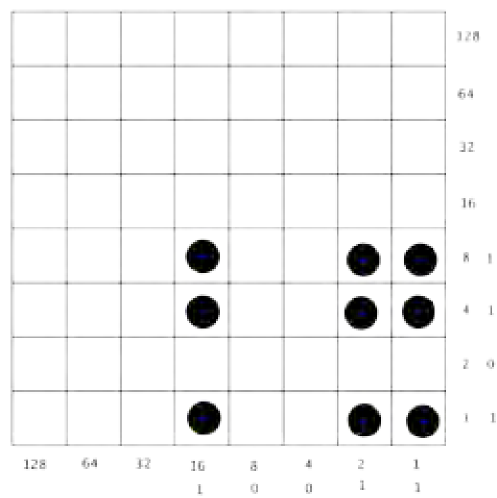


$11 + 23 + 54 + 81 = 169$

A subtracção usa processo semelhante.

Para efectuar uma multiplicação procede-se do seguinte modo: 1) marcam-se, com os coeficientes binários, os factores – um sob a primeira linha, o outro à direita do tabuleiro; 2) coloca-se uma peça em cada casa do tabuleiro que seja intersecção de linhas e colunas correspondentes a 1s dos factores, marcados no passo 1).

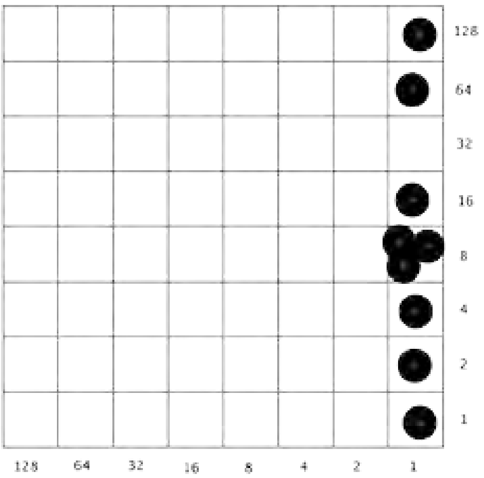
Antes de passarmos ao último passo, ilustremos com um exemplo: 13×19. Sob a primeira linha temos a representação de 19, (10.011) à direita, a de 13 (1011):

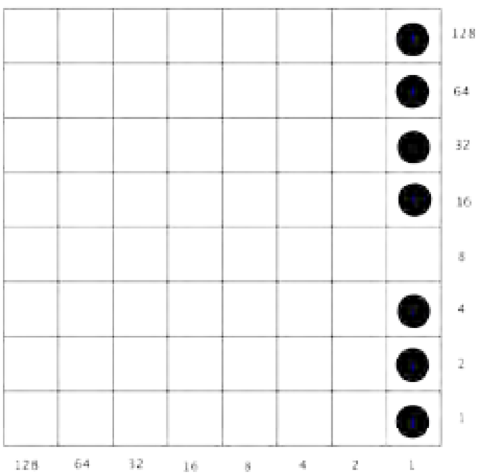


$13 \times 19 = \ldots$

3) desloquemos todas as peças, em diagonal, na direcção NE (para cima e para a direita) até atingirem a coluna da di-

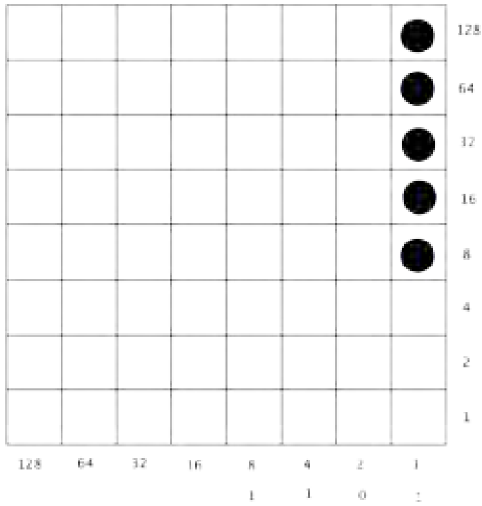
reita e simplifiquemos, trocando cada par de peças numa casa por uma peça na casa imediatamente acima. O resultado lê-se finalmente na coluna da direita.





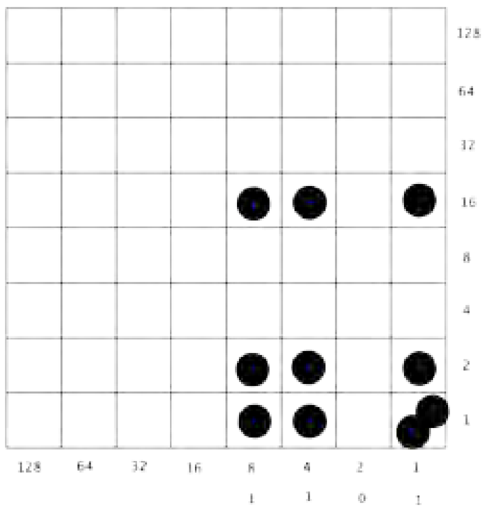
$13 \times 19 = 247$

Como a divisão é a operação inversa da multiplicação, começamos com o dividendo e o divisor e tentamos construir um padrão semelhante ao do algoritmo da multiplicação. Exemplifiquemos com $248 \div 13$. Representemos 248 na coluna da direita da forma habitual e 13 sob a primeira linha.



$248 \div 13 = \ldots$

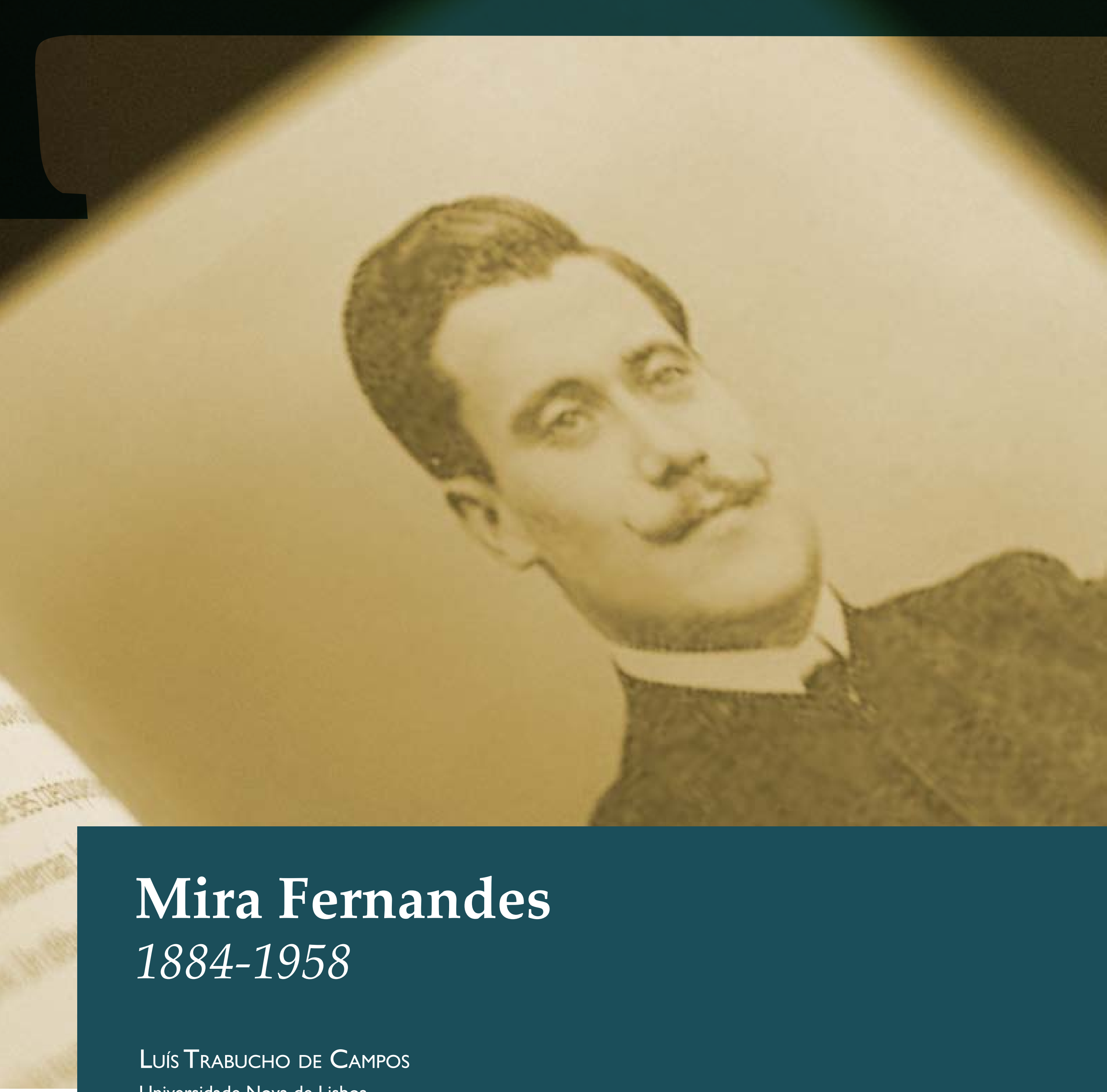
Agora devemos tentar, movendo as peças da coluna da direita em diagonal na direcção SO (para baixo e para a esquerda), construir um padrão em que se repita o mesmo número, com peças somente nas colunas correspondentes aos 1s da representação binária de 13. Isto faz-se por tentativa e erro, começando com as peças de maior valor posicional. Pode recorrer-se a trocas de uma peça por duas na casa imediatamente abaixo. Após algumas tentativas, chegamos à situação seguinte:



$248 \div 13 = 19$ e o resto é 1

Reconhece-se que, a menos de uma peça a mais no canto inferior direito, a situação representada corresponde ao cálculo de 13×19, pelo que concluímos que 19 é o quociente procurado e o resto é 1.

A raiz quadrada fica para uma próxima oportunidade...



Mira Fernandes
1884-1958

Luís Trabucho de Campos
Universidade Nova de Lisboa

Com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian, acaba de ser publicado o terceiro e último volume das Obras do Prof. Mira Fernandes. O primeiro volume abrange os anos 1910-1927, o segundo os anos 1928-1934 e o terceiro, os anos 1935-1957.

A ideia de publicar as Obras do Prof. Mira Fernandes é antiga mas só começou a ser concretizada em 1971 e está resumida na nota à edição dos diferentes volumes, da qual transcrevemos e adaptamos alguns excertos.

Data daquela altura um volume coordenado e prefaciado pelo Prof. Vicente Gonçalves, que iniciou uma tentativa de edição completa das Obras, tendo o livro saído sob a chancela do Centro de Estudos de Estatística Económica do então Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras.

Por essa razão, as Obras abrem com uma extensa e completa nota do Prof. Vicente Gonçalves sobre a vida e a obra do Prof. Mira Fernandes. Trata-se do mesmo texto que abria aquele volume publicado pelo Prof. Vicente Gonçalves em 1971 (I, p.1)*.

Por razões de vária ordem a edição não prosseguiu e o Professor Vicente Gonçalves veio a falecer em 1985. Ao longo dos últimos anos foram várias as tentativas feitas para completar a edição das Obras do Professor Mira Fernandes mas, pelas mais variadas razões, nenhuma teve êxito. Porém, por ocasião do cinquentenário da sua morte e assinalando o centésimo vigésimo quinto ano do seu nascimento, juntaram-se várias instituições e personalidades para evocar o seu exemplo, através de diversas actividades. Parte integrante dessa evocação foi a publicação das Obras do homenageado.

Esta edição apenas foi possível pela generosidade da herdeira do autor e pelos esforços de muitos discípulos e amigos do mestre. São inúmeras as personalidades que ao longo dos anos contribuíram para que a edição das obras do Professor Mira Fernandes se tornasse possível. Por desconhecimento, é-nos impossível mencioná-las exaustivamente.

Mais recentemente, a Dr.ª Dulce Cabrita fez uma competente escolha de materiais. Os professores Bento de Jesus Murteira, Eduardo Arantes e Oliveira, Eduardo Borges Pires, Jacinto Nunes, Jaime Campos Ferreira, Joaquim Moura Ramos, Luís Canto de Loura e Nuno Crato contribuíram decisivamente para que esta edição se pudesse concretizar.

O momento da edição resultou da iniciativa da Universidade Técnica de Lisboa, em particular do Instituto Superior de Economia e Gestão e do Instituto Superior Técnico, escolas que tiveram o privilégio de ter contado com o Professor Mira Fernandes no seu corpo docente. O Centro de Matemática Aplicada à Previsão e Decisão Económica (Cemapre), continuador hodierno do Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia, fundado em 1938 por Mira Fernandes, Bento Caraça e Beirão da Veiga, disponibilizou os recursos de preparação final dos documentos bem como a assistência editorial da Dr.ª Vera Lameiras. A Sociedade Portuguesa de Matemática, de que Mira Fernandes foi fundador e primeiro Presidente da Assembleia Geral, em 1940, associou-se a este esforço. A Academia das Ciências de Lisboa contribuiu generosamente com a abertura dos seus arquivos. A Universidade de Coimbra, através da sua Biblioteca Geral e da sua Biblioteca do Departamento de Matemática, facilitou o uso franco dos seus documentos.

Nestes volumes estão reunidos todos os trabalhos de carácter académico de publicação originalmente promovida ou autorizada pelo autor. Excluem-se textos de carácter pessoal, por exemplo, epistolar, ou de conteúdo académico geralmente menos significativo, como pareceres e louvores. Excluem-se, também, apontamentos de aulas, manuscritos, ou outros textos que não haja a certeza de o Professor Mira Fernandes ter considerado estarem em forma susceptível de publicação. Os trabalhos estão reproduzidos em *facsimile*. A ordenação é de carácter cronológico, com excepção dos textos com continuação e do texto final. No primeiro caso, optou-se por incluir todas as partes em sequência, mesmo que entre a primeira e a segunda parcelas de um mesmo trabalho outros tenham sido publicados. No segundo, reproduz-se um discurso do Professor Mira Fernandes, datado de 1954, o ano da sua jubilação.

O Prof. Aureliano Lopes de Mira Fernandes nasceu a 16 de Junho de 1884 em S. Domingos, concelho de Mértola e faleceu a 19 de Abril de 1958 em Lisboa. Foi um dos maiores matemáticos e homens de ciência portugueses do século XX.

*Para comodidade do leitor, indicaremos por $(\alpha, \beta), \alpha \in \{I, II, III\}, \beta \in \mathbb{N}$, o volume e a página das Obras, referentes aos trabalhos mencionados.

Mira Fernandes doutorou-se em Março de 1911 na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra. Em Novembro desse mesmo ano foi convidado por Alfredo Bensaúde, primeiro director do Instituto Superior Técnico, para ser professor deste instituto. Começou por leccionar Matemáticas Gerais, mas os seus tópicos de eleição e que leccionou até ao seu jubileu foram Cálculo Diferencial, Integral e das Variações (2º ano) e Mecânica Analítica (3º ano). Além disso, a partir de 1918 tornou-se, também, regente da disciplina de Análise Matemática na antiga Escola Superior de Comércio.

O seu primeiro artigo científico foi, segundo o próprio, *Sur l'écart géodésique, la courbure riemannienne et la courbure associée de Bianchi*, (II, p. 15), publicado nos *Rendiconti della Realle Academia Nazionale dei Lincei*, em Março de 1928. Neste trabalho, Mira Fernandes apresenta uma fórmula fundamental, generalizando outra de Levi-Civita. Este foi o início de uma longa e frutuosa correspondência entre os dois cientistas. Entre 1928 e 1938, os resultados mais importantes da investigação científica do Prof. Mira Fernandes, em Análise Matemática, Geometria Diferencial, Mecânica e Física Matemática, foram publicados pela *Academia Nazionale dei Lincei*, tendo a sua maioria sido apresentada, para publicação, por Levi-Civita. Nestes notáveis trabalhos sobressaem três notas sobre a Teoria Unitária do Espaço Físico (1932-1934) (II, pp. 363, 387 e 447) e um outro sobre Conexões Finitas, onde, cortezmente, mostra uma incoerência, numa dedução feita por A. Einstein no artigo *Bivector Fields II*, conforme, adiante, se mencionará.

O seu último trabalho científico, intitulado *Estensori jacobiani parziali e derivati* (III, p.465), publicado na Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa, data de 1957, um ano antes da sua morte.

Só é possível ter uma ideia completa da importância e do alcance das obras de Mira Fernandes lendo-as. Porém, para que o leitor possa ter um vislumbre do seu alcance, nada melhor do que reproduzir alguns excertos introdutórios e pequenas notas dos seus trabalhos.

Para o acto de conclusões magnas na Universidade de Coimbra, escreveu a dissertação inaugural **Theorias de Galois/I/Elementos da theoria dos grupos de substituïções de ordem finita** (Coimbra, 1910) (I, p.21) primeira obra em língua portuguesa sobre o assunto. Começa deste modo:

O importantíssimo problema da resolução algebrica das equações, largamente tratado por Lagrange e Abel, tomou uma feição nova com as theorias e methodos de Evaristo Galois.

Na sua Memoria Sur les Conditions de Résolubilité des Équations par Radicaux, publicada em 1846 no Journal de Mathéma-

tiques Pures et Appliquées de LIOUVILLE, *quatorze annos depois da morte do auctor, prova* GALOIS *que a toda a equação algebrica corresponde um determinado grupo de substituïções sobre as respectivas raizes, de cujas propriedades, intimamente ligadas com as da equação, se póde concluir a possibilidade ou impossibilidade da sua resolução por meio de equações secundarias.*

O primitivo problema baseia-se, desde então, na theoria dos grupos de substituïções.

Sam os elementos d'essa theoria o objecto d'este despretensioso trabalho que terá como complemento o estudo da resolução algebrica das equações, segundo GALOIS.

No ano lectivo de 1922/1923 realizou no Instituto Superior Técnico um curso livre sobre *Geometria Infinitesimal*. Deste curso resultaram, mais tarde, duas monografias importantes, das quais se transcreve o início.

Elementos da Teoria das Formas Quadráticas – Lisboa – 1924 (I, p.189).

A teoria das formas quadráticas é um dos mais notáveis e preciosos instrumentos da sciência moderna.

À fecunda utilização das formas algébricas nas teorias clássicas da álgebra e das formas diferenciais na geometria infinitesimal, acresce a sua primacial importância na exposição das teorias e métodos do cálculo tensorial e do cálculo diferencial absoluto.

Os conceitos de invariante e de parâmetro diferencial, e a facilidade da sua construção, para uma forma dada, mediante uma forma covariante auxiliar; a noção de derivada covariante, que tão simplesmente se presta também à formação de parâmetros diferenciais; o uso dos símbolos de Christoffel e de Riemann, facilitando o êmprego e abreviando a transformação de complicadas expressões analíticas, são as razões fundamentais da fecundidade da teoria das formas quadráticas.

e **Fundamentos da Geometria Diferencial dos Espaços Lineares** – Lisboa – 1927 (I, p.301)

A sistematização do conceito de espaço homogéneo, por correspondência ao conceito de grupo, pela primeira vez realizada por F. Klein no célebre «Programa de Erlangen» (Vergleichende Betrachtungen über neure geometrische Forschungen), excluía os espaços não homogéneos, isto é, aqueles cujas propriedades não subsistem para tôdas as transformações dum determinado grupo.

A noção de espaço não homogéneo tinha sido definida por B. Riemann (Über die Hypothesen Welche der Geometrie zu Grunden liegen) alguns anos antes da publicaçao do «Programa de Erlangen» e estava-lhe destinado, no estabelecimento e na generalização recentes das doutrinas de Einstein, um lugar proeminente no desenvolvimento da teoria física.

Sabia-se que o espaço riemanniano (o mais simples dos espaços lineares não homogéneos) admite uma homogeneidade infinitesimal, por correspondência biunívoca de cada ponto duma vizinhança infinitesimal do ponto M a um ponto do espaço euclidiano tangente a M.

Mas foi só em 1917 que Levi-Civita, definindo o conceito de deslocamento paralelo, estabeleceu duma maneira precisa a possibilidade de relacionar entre si biunìvocamente os espaços euclidianos tangentes a um mesmo espaço riemanniano, em dois pontos quaisquer M e N, desde que seja definida a trajectória $\overline{MN}$. *O conceito de Levi-Civita (que é aliás um dos infinitos modos possíveis de conferir ao espaço de Riemann uma conexão euclidiana) veiu sugerir um critério de sistematização dos espaços não homogéneos: o critério de transporte.*

Faltava, porém, relacionar os espaços não homogéneos com o conceito de grupo, base do «Programa de Erlangen». Essa relação foi recentemente estabelecida por E. Cartan, o criador do conceito de grupo de holonomia. Êste grupo desempenha na classificação dos espaços não homogéneos, em relação ao espaço euclidiano, um papel análogo ao do grupo de Galois na classificação das equações algébricas.

O intento dêste livro é classificar os transportes lineares e conseqüentemente as geometrias diferenciais a que êles servem de base, resumindo as recentes investigações de Weyl, Schouten, Struik, Blaschke, etc.

Dêsses transportes há alguns (como o transporte affim de Eddington e o transporte conforme de Weyl) que já hoje têm uma utilização importante nas teorias relativistas.

Na continuação dos trabalhos de Doutoramento, de Março de 1911, redigiu duas monografias que publicou sucessivamente em 1929 e 1931: **Grupos de Substituïções e de resolubilidade Algébrica I e II** (II, p.57 e p.251), onde se afirma :

Ampliando, em termos de maior minúcia, os princípios da teoria dos grupos de substitüições de ordem finita, que, em tempo, publiquei com o título de «Teoria de Galois»; e acrescentando-lhes os fundamentos da teoria da resolubilidade algébrica, para a qual o conceito de grupo é o principal instrumento de análise, êste livro pretende apenas, pelo caminho mais curto e nos termos mais simples, expor sumàriamente e elementarmente um dos mais belos e importantes capítulos da álgebra moderna. Não tem pretensões de tratado, mas sòmente modestos intuitos de iniciação.

Em 1945/1946 aparece a quinta monografia **Geometria das Distâncias**, Cadernos de Análise Geral 13, 17 e 18 – Porto, (III, p.219, 237 e 255).

Todas estas monografias são muitíssimo importantes ou porque são as primeiras obras em português sobre as teorias de Galois ou porque constituíram a fronteira do conhecimento na época.

Outra grande preocupação de Mira Fernandes era a clarificação das ideias matemáticas e as suas sistematização e generalização.

São exemplo dessa sistematização as suas lições **Modernas Concepções da Mecânica** (II, p.395), nas quais de uma forma original e magistral se vai da Mecânica Newtoniana à Mecânica Quântica, passando pela Relatividade Restricta e Generalizada, ou ainda o artigo **Equazioni della Dinamica** (III, p.115), onde escreve:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial e'_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu.$$

È questa la forma piú condensata per scrivere le equazioni della dinamica, per le forze ordinarie, e da essa risultano immediatemente le forme usuali di Appell e di Maggi.

É exemplo dessas clarificação e generalização a publicação **Curvatura Linear** (II, p.245), que abre do modo seguinte:

A análise das singularidades que podem apresentar os conceitos fundamentais da geometria dos espaços de Riemann, quando os coeficientes da forma diferencial quadrática, que define a métrica, não são funções regulares das coordenadas, está quási completamente por fazer. Numa Nota das suas «Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann», o prof. Cartan examina uma hipótese de singularidade dos referidos coeficientes que o conduz, nos espaços riemannianos a três dimensões, ao conceito de curvatura linear do espaço; conceito que generaliza, neste caso singular, o da curvatura riemanniana ordinária que é, como se sabe, superficial.

É objecto desta Nota, seguindo de perto o raciocínio de Cartan, estabelecer um conceito semelhante para as superfícies do espaço ordinário.

É exemplo de rigor o artigo **Conexões Finitas** (III, p.207) de 1945, no qual se comenta e generaliza o trabalho *Bivector Fields* de A. Einstein publicado no Annals of Mathematics, vol. 45, Jan. 1944. Afirma-se no início:

Numa nota recente define o Prof. Einstein a conexão afim não-infinitesimal, numa variedade V_n $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ à custa de certos bivectores cujas componentes são funções das coordenadas de dois pontos da variedade; e não apenas dum ponto, como as do tensor métrico de Riemann.

Seguidamente, resume-se o início da referida nota e enumeram-se os postulados impostos por A. Einstein sobre as equações obtidas, que o autor designa por : *I, I_a, I_b, II, II_a, II_b* e *III.*

Segue-se uma análise das consequências destes postulados e tem-se:

... Certamente por lapso, o professor Einstein afirma que 9) resulta de 8) , em virtude de I_a. Ora...

Isto é, de III e I_a resulta apenasI_b. De resto, se de III e I_a resultasse...

Isto é, os postulados II_a e II_b seriam consequência de III e I_a; e haveria apenas dois postulados distintos: I e III.

Esta circunstância tornaria ilusória, como já vamos ver, a generalização da teoria, formulada mais adiante...

Fizemos tão pormenorizada referência ao artigo do Prof. Einstein para podermos analizar a generalização da teoria...

Para além dos artigos científicos, o Prof. Mira Fernandes deixou-nos inúmeras outras obras, que também podem ser encontradas nestes volumes e que passamos a descrever.

Estudos sobre instituições :

O Instituto Superior de Comércio de Lisboa (I, p.129)

Bodas de Prata (25 anos do IST) (III, p.47)

Bodas de Prata (25 anos da revista Técnica) (III, p.319)

Palestras de abertura de eventos:

Oração de Sapientia (II, p.1)

Congresso de História da Actividade Científica Portuguesa (II, p.97)

Várias notas sobre tópicos científicos:

A teoria das equações diferenciais e a ciência Francesa (II, p.457)

Evolução do Cálculo Variacional (III, p.25)

Em 25 anos (evolução científica entre 1911 e 1936) (III, p.17)

Notas sobre a vida e a obra de diversos cientistas pelas mais diversas ocasiões, nomeadamente:

Galileo (II, p.9)

Poincaré (II, p.239)

Painlevé (II, p.437)

Heisenberg, Schrödinger e Dirac (II, p.443)

Lagrange (III, p.11)

Levi-Civita (III, p.143)

Sophus Lie (III, p.167)

Riemann (III, p.449)

Ideias sobre o ensino da Matemática:

O espírito matemático e a Cultura Geral (II, p.21)

O Livro e o Mestre (III, p.281)

Epítomes (III, p.381)

Tal como afirmado, muito ainda ficou por publicar. O que resta da correspondência e de notas pessoais poderá ter interesse, nomeadamente, a troca de ideias com outros cientistas; o convite para leccionar em Princeton no início dos anos 30 do século XX e que recusou; os diversos convites para ocupar cargos públicos e que, também, foram recusados; os poemas; as notas sobre os mais variados assuntos culturais. Mas, sobretudo, valeria a pena rever e publicar as notas dos seus cursos, das quais existem várias versões redigidas pelos seus alunos. São estes:

Cálculo Integral, Diferencial e das Variações

Mecânica Racional

Matemáticas Geraes

Três obras que, ainda hoje, seriam de grande utilidade para inúmeros estudantes e professores.

BIBLIOGRAFIA

J. VICENTE GONÇALVES, «Obras Completas de Aureliano de Mira Fernandes»: Vol. I, Centro de Estudos de Estatística Económica do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, Lisboa, 1971.

M. J. de ABREU FARO, «Professor Mira Fernandes», Boletim do Centro Internacional de Matemática (CIM), nº 2, p.7-8, Coimbra, 1997.

M. J. de ABREU FARO, «Aureliano de Mira Fernandes, Professor do Instituto Superior Técnico», Técnica, nº 449/450, Ano LIII, Vol. XL, p. 1-10, Lisboa, 1978.

«Aureliano de Mira Fernandes, Obras I, 1910-1927», Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2010.

SOBRE O AUTOR

Luís Trabucho de Campos é Professor do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e membro do Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais (CMAF) da Universidade de Lisboa.

Alexander Kovačec
Universidade de Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

RENOVAÇÃO DE CASAS NA VILA DE POUCO-LARGAS E NA ALDEIA DE MUITO-ESTREITAS*

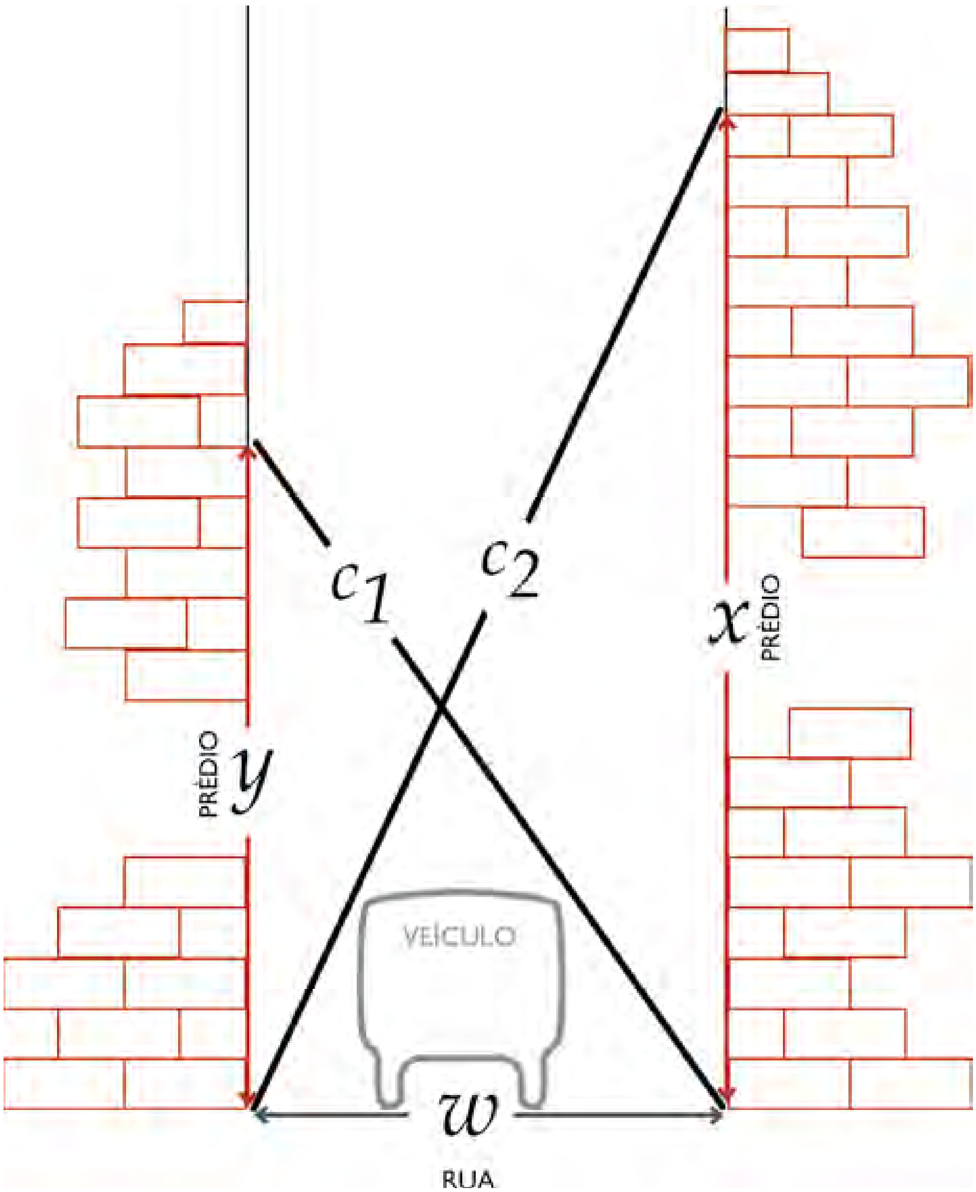
Súmula: apresenta-se um problema de índole geométrica e o seu inverso, os quais podem surgir na construção civil. Pensamos que são acessíveis para alunos a partir do 10º ano. A solução de um dos problemas levará a um polinómio do quarto grau, mostrando assim que há problemas do dia-a-dia em que tais polinómios podem surgir.

Na Vila de Pouco-Largas há dois prédios que precisam de renovação. Situam-se em lados exactamente opostos dum beco tão estreito que para fixar as escadas usadas para aceder às paredes, o melhor é encostá-las com as suas extremidades inferiores na base das paredes opostas. Sabe-se a largura w da rua e as alturas x e y onde as paredes das casas precisam de tinta fresca. A empresa quer saber exactamente os comprimentos precisos c_1 e c_2 das escadas, enquanto a repartição responsável pelas obras gostaria de saber que veículos podem passar por baixo das escadas. Veja a figura.

Problema 1. Escreva um curto relatório útil tanto para os empreiteiros como para a Junta de Freguesia, contendo de forma convincente a resolução das questões colocadas. Quanto aos carros, tente dar uma resposta que caracterize por uma desigualdade linear exactamente a largura e a altura dos veículos que podem passar.

A pacata Aldeia de Muito-Estreitas tem igualmente um número elevado de casas em sítios opostos que precisam de renovação. Ela tem o problema inverso ao exposto, que é bem mais complexo. Existem apenas duas escadas potencialmente

*O autor agradece a Bernardete, aos editores e à designer que contribuíram muito para que o português e o desenho do presente autor apareçam a uma luz mais favorável.



xarem? (As pontas das escadas devem apoiar-se nas paredes; não devem exceder a altura das paredes.)

Nota: para uma solução *exacta* das questões relativamente às alturas mínimas e larguras máximas será necessário encontrar uma raiz positiva de uma equação do quarto grau. Pode mostrar-se que os polinómios que aqui surgem têm exactamente uma tal raiz e que esta pode ser determinada por meios numéricos. No entanto, não são necessários meios electrónicos para resolver a segunda questão.

Para o leitor aprofundar os seus conhecimentos da teoria das equações de grau superior, podemos aconselhar artigos publicados na *Gazeta* da autoria de António Pereira Rosa; ver [1], [2].

As soluções propostas têm, em relação a soluções geométricas, não apenas o mérito de serem

úteis na aldeia. Estas têm comprimentos conhecidos c_1 e c_2. Para não enfurecer os peões exige-se que a passagem formada pelas escadas tenha uma certa altura mínima h. Assim, a Freguesia encomenda um relatório relativamente ao problema seguinte.

Problema 2. Quais são as alturas mínimas das casas e larguras máximas das ruas que permitam colocar as referidas escadas tal como na figura e de modo a que pessoas de alturas menores do que h possam passar por baixo delas sem se baixarem? Resolva sem meios electrónicos: se temos escadas de comprimentos $c_1 = 4\ m$; $c_2 = 10\ m$; mas não há prédios na aldeia com mais do que 9.5 m de altura, podemos criar um túnel pelo qual homens de 2 m de altura possam passar sem se bai-

mais exactas, mas sobretudo de serem implementáveis num programa. Assim, centenas de problemas deste tipo podem ser solucionados pressionando uns botões: *nada é mais prático do que uma boa teoria*, dizia pessoa famosa cujo nome agora não recordo.

Naturalmente haverá outros enredos em que o cerne das questões geométrico-algébricas aqui tratadas pode ser 'vendido'; e muito gostariam, outros leitores, professores da *Gazeta* (e nós), de saber de solucionistas que encontrem tais contextualizações diferentes.

Bom, como temos ainda espaço disponível, prosseguimos com a solução de um problema do **Canto Délfico na Gazeta Nº 159, Dezembro de 2009: Máquinas de Turing.** Pedimos, entre outros, a solução do seguinte:

1R2	1R2
0L6	0R3
0L4	0R2
0L4	1R5
1L6	
0L6	1O7

Problema 1. Mostre que o conjunto $X = \{1, 3, 5, ...\}$ dos naturais ímpares é decidível. Para tal mostre que, se a máquina acima arrancar com uma fita da forma $0\overset{1}{1}11\ldots1$ com n 1s, ela devolve $0\overset{7}{1}$ se n for ímpar, e $0\overset{7}{1}1$ se n for par.

Consideremos, como exemplo, abaixo à esquerda e à direita, a actuação da máquina sobre as fitas $0\overset{1}{1}1111$ de cinco 1s e $0\overset{1}{1}11111$ de seis 1s respectivamente.

$0\overset{1}{1}1111$	$0\overset{1}{1}11111$
1R2	1R2
$01\overset{2}{1}111$	$01\overset{2}{1}1111$
0R3	0R3
$010\overset{3}{1}11$	$010\overset{3}{1}111$
0R2	0R2
$0100\overset{2}{1}1$	$0100\overset{2}{1}11$
0R3	0R3
$01000\overset{3}{1}$	$01000\overset{3}{1}1$
0R2	0R2
$010000\overset{2}{0}$	$010000\overset{2}{1}$
0L6	0R3
$01000\overset{6}{0}0$	$0100000\overset{3}{0}$
0L6 várias vezes	0L4
$0\overset{6}{1}000000$	$010000\overset{4}{0}0$
1O7	0L4 várias vezes
$0\overset{7}{1}00000$	$0\overset{4}{1}00000$
	1R5
	$01\overset{5}{0}00000$
	1L6
	$0\overset{6}{1}10000$
	1O7
	$0\overset{7}{1}10000$

Vemos que no início as actividades da máquina são exactamente iguais, sendo que ao substituir 1s por 0s, ela assume alternadamente os estados 2 e 3. Em consequência disto, ao chegar ao primeiro 0 à direita do bloco original de 1s, no caso de um número ímpar de 1s na fita original, lê o 0 em estado 2; mas no caso de um número par de 1s, lê o 0 em estado 3. A partir daqui, vai para a esquerda; mas no `caso ímpar' assume nesta andança o estado 6, e no `caso par' o estado 4. Esta diferença de estados vai permitir no fim fazer com que os cálculos terminem com 1 e 11 respectivamente.

O único livro que conhecemos que apresenta máquinas de Turing sistematicamente por tabelas é "An Introduction to Mathematical Logic" [3], livro de interessante arquitectura, mas infelizmente com inúmeras gralhas com alguma gravidade. Concluímos informando que Turing foi referido na *Gazeta* em pelo menos dois artigos recentes: pela sua importante contribuição na descodificação da máquina criptográfica Enigma da Alemanha-Nazi "Enigma: uma história que devia ser mais bem conhecida" [4], e em "O Problema P≠NP?"[5] por causa da possibilidade de com máquinas de Turing ou as suas alternativas se poder definir o conceito da complexidade computacional.

Esperamos que a importância de equações algébricas e de máquinas de Turing incentive os leitores a resolverem os problemas aqui postos e os restantes problemas do Canto da *Gazeta* número 159. Nós, do Projecto Delfos, sabemos que ambas as coisas são exigíveis a alunos especialmente interessados, portanto, envolvê-los nestas actividades pode enriquecer o ensino. Sabemos também, aliás, que não precisam de muita motivação para apreciarem o núcleo matemático de questões como as aqui abordadas.

Enviem soluções dos problemas aqui referidos, de preferência em papel, para

Projecto Delfos,
Departamento de Matemática da FCTUC,
Apartado 3008,
EC Universidade,
3001-454 Coimbra
e-mail: *delfos@mat.uc.pt*

REFERÊNCIAS

[1] António Pereira Rosa (2009), "Transformações de Gráficcos, Substituições e Equações do Terceiro Grau", Gazeta 158, págs. 53-59.

[2] António Pereira Rosa (2009), "A Transformação de Tschirnhaus", Gazeta 159, págs. 49-59.

[3] Jerome Malitz (1979), "An Introduction to Mathematical Logic", UTM, Berlin: Springer.

[4] António Machiavelo (2004), "Enigma: uma história que devia ser mais bem conhecida", Gazeta 147, págs. 14-15.

[5] Paulo Mateus (2009), "O Problema P≠NP?", Gazeta 157, págs. 49-51.

Fabio Chalub
Universidade Nova
de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

ABELHAS VIAJANTES

Conhecem o Manuel? Todos os dias acorda à mesma hora, veste-se, compra o jornal na esquina, vai ao café tomar o pequeno-almoço e chega à paragem de autocarro um minuto antes da hora certa. Depois apanha o metro, e outro autocarro, sempre minimizando o tempo de espera, e chega ao trabalho a tempo de ter a sua pontualidade elogiada pelo chefe. Um dia... o café fecha e ele tem de reorganizar toda a sua vida. Como é que ele vai fazer: começa do princípio? Ou modifica ligeiramente a sua rotina?

Figura 1: Rota óptima que visita as 15 maiores cidades da Alemanha.

O problema do caixeiro-viajante é um dos desafios clássicos da matemática. Tendo de visitar um certo número de cidades, um vendedor deseja passar apenas uma vez em cada e com a menor rota possível. Como encontrar o caminho óptimo? A dificuldade de resolver esta questão reside na enorme quantidade de maneiras de visitar todas as cidades. Desta forma, a ideia ingénua de calcular as distâncias para todos os percursos possíveis e verificar qual deles é o menor, apesar de formalmente correcta, é impraticável. Para apenas 15 cidades (como na figura 1), o número de possibilidades é da ordem de 40 mil milhões. Analisando 1000 possibilidades por segundo, um computador demoraria cerca de dois anos a obter a solução óptima. O que dizer então de visitar 25.000 cidades, como na figura 2?

O número de possibilidades pode ser facilmente obtido: fixamos uma primeira cidade qualquer e definimos apenas a ordem em que as outras $N-1$ localidades hão-de ser visitadas; por fim, dividimos por 2, pois a ordem exacta da viagem (numa ou noutra direcção) não influencia a distância. O resultado é o astronómico número de $N-1$ factorial dividido por 2.

Se para nós é tão difícil assim resolver este problema, o que dizer de simples abelhinhas? Ora, o dia-a-dia das nossas queridas melíferas consiste em visitar sucessivamente várias flores em busca de alimento, carregando pólen de um lado

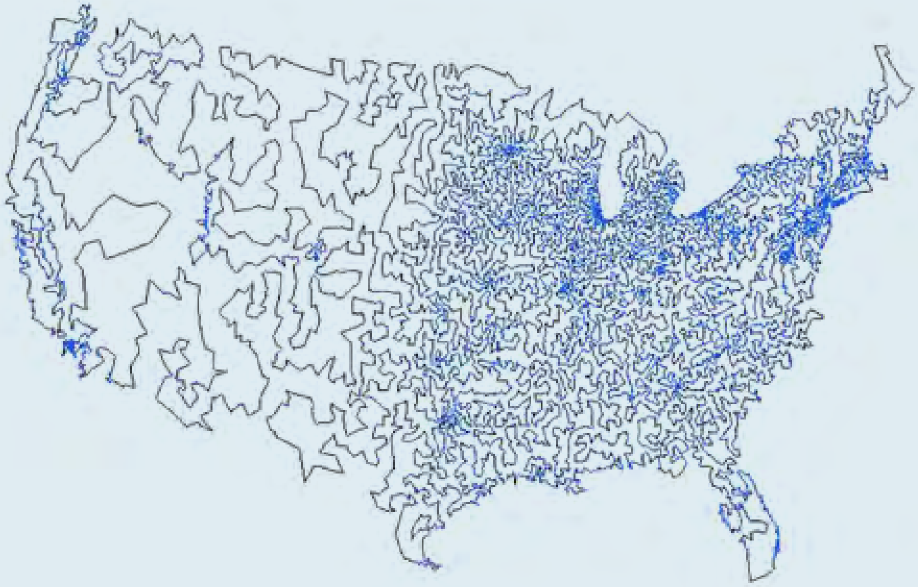


Figura 2: Rota quase óptima para 25.000 cidades nos EUA. O seu comprimento excede a rota óptima em menos de 0.01%. Figura gentilmente cedida por Bill Cook. Veja http://www.tsp.gatech.edu/

para o outro. As suas jornadas não são simples passeios: quem as fizer de forma mais eficiente tem enormes vantagens evolutivas. Assim, as abelhas devem aprender rapidamente onde estão as melhores fontes de recursos, qual o horário das novas fornadas e desta forma optimizar o seu percurso. Por outras palavras, a evolução deve tê-las dotado de uma forma natural de solucionar o problema do caixeiro-viajante.

Para testar esta ideia, Lihoreay, Chittka e Raine, a trabalharem no Reino Unido, desenharam uma experiência, colocando desafios a vários abelhões de nome científico *Bombus terrestris* (um parente próximo da abelha comum produtora de mel, muito comum em Portugal) [1]. A tarefa consistia em visitar um pequeno conjunto de flores artificiais (o fornecimento de nutriente – sacarose – era controlado de forma a não haver paragens preferidas) que lhes eram apresentadas aos poucos. Inicialmente a configuração tinha apenas 2 pontos (o ponto de partida e a única flor); paulatinamente, eram apresentadas novas flores e as abelhas que apenas acrescentassem mais uma paragem na sua jornada tinham um caminho não optimizado; para o obter era preciso repensar o problema do início, e não fazer pequenas adaptações. Aos poucos, elas trocavam a ordem de visitação de forma que ao fim de apenas algumas horas de treino já tinham encontrado a rota óptima. Veja a figura 3.

Quando submetidas à mesma experiência no dia seguinte, conseguiam encontrar a rota óptima em significativamente menos tempo, mostrando que de alguma forma este caminho mais eficiente ficou retido na sua memória (as flores artificiais eram constantemente trocadas e higienizadas de forma a que fosse impossível as abelhas deixarem marcadores químicos).

Curiosamente, cada abelha, ao encontrar a rota óptima, não se fixava nesta, constantemente experimentando novos caminhos. Isto leva-nos de volta à discussão inicial, ou seja, como resolver o problema do caixeiro-viajante. Este é omnipresente: aparece em planeamento de tráfego, logística e redes de telecomunicações, por exemplo, não permitindo que nos demos ao luxo de ignorar o facto de que uma solução é necessária. Não há como obter, de forma prática, a sua solução óptima. Mas podemos desenvolver algoritmos que nos forneçam soluções quase óptimas.

O matemático Austríaco Karl Menger foi o primeiro a verificar, numa série de exemplos, que um dos algoritmos aproximados mais populares (o de ir sempre para o vizinho mais próximo) não apenas não era óptimo mas, numa série de situações típicas fornecia uma resposta muito ruim (ou seja, muito maior do que a solução óptima). Outra possibilidade

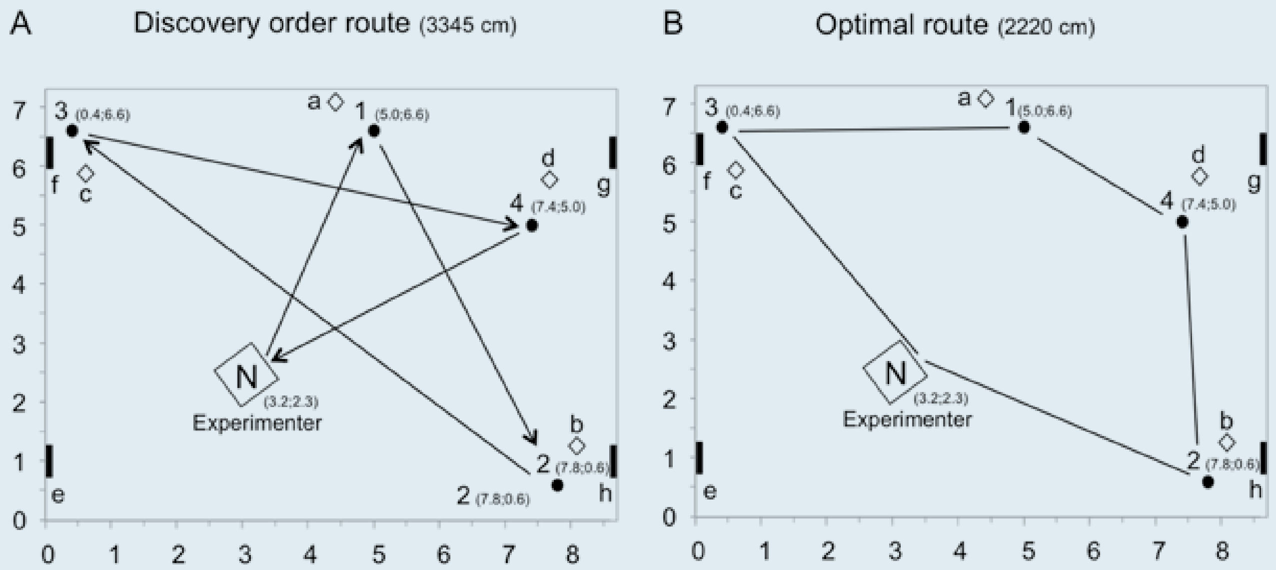


Figura 3: À esquerda vemos a ordem em que as cores artificiais eram descobertas pelas abelhas. À direita, a rota óptima, encontrada depois de algum tempo. (Figura gentilmente pelos autores do artigo [1].)

é escolher uma rota qualquer e depois procurar séries de pequenas modicações que sejam capazes de diminuir a distância viajada. Usado com cuidado, é um bom ponto de partida para algoritmos mais sofisticados, como o popular *"simulated annealing"*, com origens na física estatística.

Com as maiores capacidades computacionais actualmente disponíveis e usando muitos truques de simetria, foi possível a um grupo na Georgia Tech, E.U.A., resolver a um problema com quase 34 mil cidades. Recomenda-se o site do grupo, *http://www.tsp.gatech.edu/*, para quem quiser sentir-se como uma abelha num laboratório. Além disto é possível concorrer a um prémio de 100 dólares (não o faça pelo dinheiro!). O problema do caixeiro-viajante, no entanto, já foi resolvido, com soluções aproximadas em 1% do seu valor óptimo, para algumas dezenas de milhares de pontos de visitação. Resolver este desafio foi necessário para o desenho de *microchips*.

REFERÊNCIAS

[1] Mathieu Lihoreau, Lars Chittka & Nigel E. Raine (2010), "Travel Optimization by Foraging Bumblebees Through Readjustments of Traplines After Discovery of New Feeding Locations". American Naturalist 176: pp. 744-757.

APANHADOS NA REDE

António Machiavelo
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

O PEQUENO MISTÉRIO DO ALGORITMO DA DIVISÃO

Conhece o leitor as variações do algoritmo da divisão ensinado no primeiro ciclo? Sabe que não se aprende exactamente o mesmo procedimento em todos os países, mesmo na Europa? E que um livro escrito em Portugal há pouco mais de duzentos anos tem este algoritmo descrito de um modo um pouco diferente do usual?

A meio de uma aula prática de Cálculo Infinitesimal, que eu leccionava a alunos de Engenharia, como *teaching assistant* na Universidade de Cornell, nos EUA (já lá vão uns anos), precisei de fazer uma pequena divisão no quadro, a meio da resolução de um exercício. Quando terminei e encarei os alunos, estes estavam pasmados, com caras de assombro fixas na divisão que eu tinha feito. Um deles perguntou, atónito:

– *O que fez aí no quadro?*

Foi a minha vez de ficar perplexo. Por momentos interroguei-me, meio incrédulo, se aqueles alunos nunca teriam aprendido o algoritmo da divisão.

– *Simplesmente dividi este número por aquele* – respondi, com uma voz cheia de surpresa, apontando os números em questão.

– *É assim que se divide em Portugal?* - inquiriu o mesmo aluno, com espanto.

– *Não é assim que vocês dividem?* - retorquei eu, não menos espantado.

– *Não!* – exclamaram os alunos em coro.

Perguntei então como é que faziam, e um aluno mostrou-me algo como o que está representado no lado direito da figura 1.

1457	19			76
127	76		19	1457
13				-133
				127
				-114
				13

Figura 1: Duas maneiras de fazer a mesma divisão.

	0,00000252&c.
2853,43	0,0072000000.
	14931454
	0066426
	0935

Figura 2: A divisão na página 43 do livro de Anastácio da Cunha.

E foi assim que descobri, para minha grande surpresa, que os detalhes do algoritmo da divisão ensinado na primária não são universais! Há que concordar que as diferenças não são substanciais. São apenas maneiras ligeiramente diferentes de dispor as mesmas contas, que não passam de subtracções sucessivas feitas em bloco, usando as vantagens da numeração posicional, num caso fazendo-se as subtracções mentalmente, no outro explicitamente. Há, no entanto, uma pequena vantagem logística na disposição usada nos EUA: quando se efectuam divisões "com vírgulas", ou seja, quando se calculam alguns algarismos da dízima correspondente à fracção envolvida na divisão, então a disposição da direita na figura 1 tem a vantagem de os zeros após a vírgula que se vão acrescentando ao dividendo não chocarem com a barra vertical que o separa do divisor.

Alguns anos mais tarde, a dar uma aula no Porto e com o propósito de distinguir a divisão em si do algoritmo usado para a efectuar, contei a história acima. Entre os alunos havia uma pessoa de origem chinesa que me informou que também tinha aprendido uma disposição semelhante à usada pelos meus ex-alunos americanos. Uma outra aluna, filha de pais imigrantes num país europeu do qual não me recordo agora (talvez Suíça), interveio nessa mesma aula para informar que também ela tinha aprendido o mesmo arranjo dos cálculos intermédios na divisão. Isto destruiu a ideia que eu tinha feito de que talvez a utilização do "outro" algoritmo fosse restrita aos países de influência britânica, que gostam de ser diferentes, com os seus estranhos sistemas de medidas e condução no lado errado da rua.

Uma rápida consulta à Wikipédia (em inglês), conduziu à página: *http://en.wikipedia.org/wiki/Long_division* na qual se mencionam algumas das diferenças na disposição do algoritmo da divisão e que a "nossa" maneira é compartilhada pela Rússia e por países de influência francófona. No entanto, esta é uma página que não menciona fontes para as afirmações feitas, o que não inspira muita confiança quanto à exactidão do seu conteúdo.

Tudo isto me deixou a pensar: exactamente onde é que se fará como em Portugal? O que é que levou às diferenças? Acabei por esquecer o assunto até que, ao consultar o livro de Anastácio da Cunha "*Principios Mathematicos*"[1], escrito no final do século XVIII, deparei-me com a divisão que reproduzo na figura 2.

Afinal, em Portugal, em 1790, também se dispunham os cálculos com o dividendo e o divisor trocados relativamente ao que hoje se faz! O que é que terá levado à mudança? Este é um pequeno mistério que não consegui ainda desvendar. Fica aqui o desafio aos leitores de tentarem averiguar o que se terá passado. Talvez algum possa escrever um artigo interessante sobre este assunto para a *Gazeta*.

Um algoritmo de divisão em que o arranjo dos cálculos é radicalmente diferente do usual, e que foi usado durante séculos até, mais ou menos, ao século XVI, é conhecido por "divisão em galera". É um algoritmo interessante que merece ser um pouco mais conhecido, sendo económico em gasto de papel e com algum encanto visual. Só para aguçar o apetite aqui fica o exemplo do resultado da divisão, por este método, de 88888800000008888000000000888888 por 9999900000000999000000000 9999, dado por Niccolò Fontana, mais conhecido por Tartaglia, no seu "General Trattato di Numeri et Misure" (Veneza, 1556), e que deixa clara a razão de ser do nome deste algoritmo:

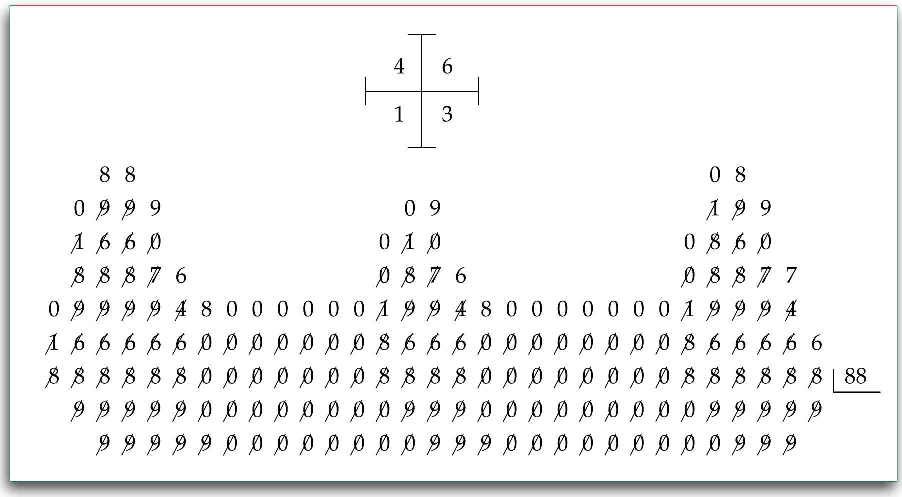


Figura 3: Resultado de uma divisão em galera.

[1] Reprodução *fac-simile* da edição publicada em Lisboa em 1790 feita pelo Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra em 1987.

A "vela" desta magnífica galera consiste na "prova dos sete", que Tartaglia explica umas páginas antes no seu "*Trattato*"[2]. Esta obra pode ser consultada no *site* ECHO (*European Cultural Heritage Online*), com o seguinte endereço, pesquisando "Tartaglia", *http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de*.

A imagem reproduzida na figura 3 encontra-se na p. 35 do "Libro Secondo de La Prima Parte" (p. 84 do documento digital relativo ao vol. 1).

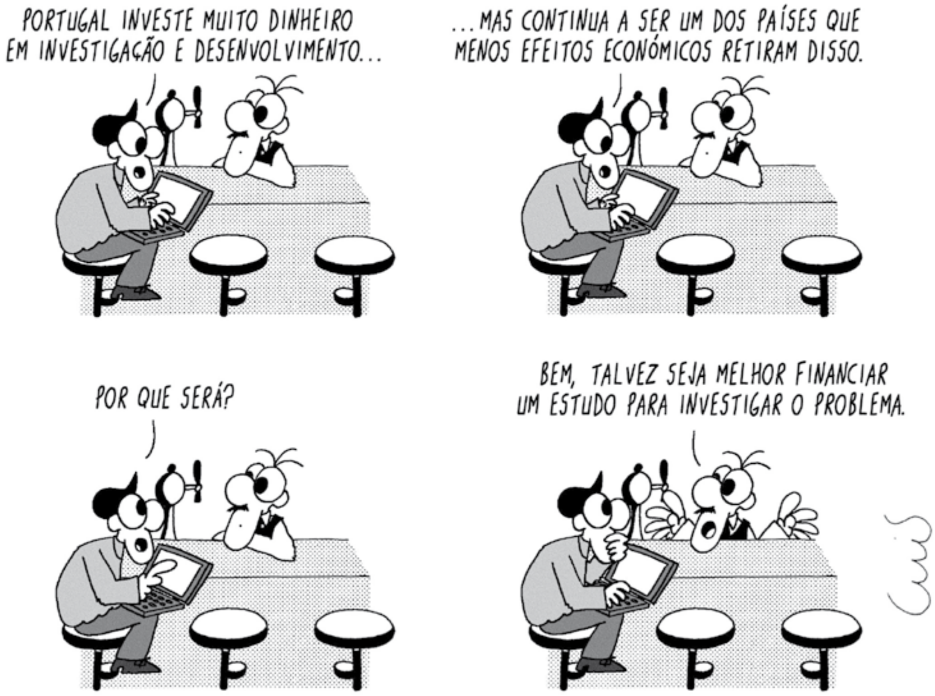
O leitor interessado em aprender a dividir em galera poderá começar por consultar a página *http://en.wikipedia.org/wiki/Galley_division* e, de seguida, consultar uma explicação detalhada em: *http://mathforum.org/library/drmath/view/61872.html*.

Para exemplos de ilustrações lindíssimas em livros antigos, de divisões em galera, ver o artigo "Mathematical Tresures", no endereço *http://mathdl.maa.org/mathDL/46*, em especial os números 43 ("Opus Arithmetica" de Honoratus) e 58 ("Epitome Arithmetica Practica" de Clavius).

Os algoritmos que são usados nas máquinas de calcular e nos computadores são, esses sim, muito diferentes dos aqui referidos que, de facto, na sua essência, são bem mais iguais do que parecem à primeira vista; são algoritmos muito mais sofisticados e computacionalmente muito eficientes e rápidos. Mas isso é toda uma outra história que terá de ficar para uma outra vez.

[2] Agradeço à Maria do Céu Silva a preciosa ajuda neste ponto.

Luis Afonso



Publicado originalmente no jornal Público, em 02/02/2011. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRECTOR:
Rogério Martins Universidade Nova de Lisboa

VICE-DIRECTORES:
Alessandro Margheri Universidade de Lisboa • **Daniel Pinto** Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:
Afonso Pedrosa Pinto E. S./3 S. Pedro Vila Real • **António Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho • **Carlota Simões** Universidade de Coimbra • **Elisabete Rodrigues** E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** E. S. Felismina Alcântara • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação de Viana do Castelo • **Maria do Céu Pinto** Universidade de Coimbra • **Manuel Domingos Oliveira Cadete** Universidade Agostinho Neto • **Paulus Gerdes** Universidade Eduardo Mondlane, Moçambique • **Raquel Escórcio** antiga professora na E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • **Roberto Ramalho** Universidade de Pernambuco, Brasil • **Teresa Almada** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • **Juan-Miguel Gracia** Universidad del País Vasco, Espanha

ASSISTENTES EDITORIAIS:
Ana Figueiredo SPM • **Sílvia Dias** SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

CONCEPÇÃO E MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB:
Pedro Quaresma Universidade de Coimbra

IMPRESSÃO:
Dossier – Comunicação e imagem

PROPRIEDADE:
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM **1900 Exemplares**
ISSN **0373-2681**
ICS **123299**
DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

Como partilhar um segredo

António Pereira Rosa
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho
antoniopereirarosa@gmail.com

Os métodos de partilha de segredos têm vindo a adquirir grande importância em organizações como as Forças Armadas e os bancos. Em 1979, o criptógrafo israelita Adi Shamir descobriu um processo de partilha de segredo que recorre apenas a propriedades elementares dos polinómios e dos sistemas de equações lineares, podendo assim ser explicado a alunos do 11º ano.

1. UM SEGREDO A PARTILHAR

Uma base de mísseis nucleares é comandada por um general G, pessoa de absoluta confiança do Governo e que é a única pessoa que conhece o código de lançamento dos mísseis (uma sequência de números *inteiros*, como, por exemplo, $8, -1, 3, 6$). Para impedir que a base seja colocada fora de serviço se o general ficar incapacitado, os seus quatro adjuntos A, B, C e D também têm de conhecer o segredo. No entanto, o grau de confiança que o Governo deposita nestes adjuntos é menor e, para evitar problemas, pretende-se que tenham um conhecimento parcial do segredo, nos seguintes termos:

- nenhum dos adjuntos sabe o código;
- dois quaisquer deles, trabalhando em conjunto, são incapazes de reconstituir o código;
- três quaisquer deles, trabalhando em conjunto, são capazes de reconstituir facilmente o código.

Será possível conceber um tal sistema de partilha do segredo?

Três pessoas podem guardar um segredo se duas delas estiverem mortas.

Benjamin Franklin

2. UMA SOLUÇÃO ELEMENTAR

Vamos apresentar por meio de um exemplo uma solução simples para este problema, baseada em propriedades elementares dos polinómios[1] e que é devida ao criptógrafo israelita Adi Shamir, um dos inventores do famoso sistema RSA (o "S" é de Shamir), que a descreveu em[1], no ano de 1979.

Suponhamos que o código é (4, 5, 7). O general G considera o polinómio $p(x) = 4x^2 + 5x + 7$ e dá a cada um dos adjuntos a informação que consta da seguinte tabela:

Adjunto	Informação [2]
A	$p(0) = 7$
B	$p(1) = 16$
C	$p(2) = 33$
D	$p(3) = 58$

Supomos, é claro, que os adjuntos sabem como funciona o processo, isto é, que o código é (a, b, c), sendo a, b e c os coeficientes do polinómio $p(x) = ax^2 + bx + c$ e que nenhum deles pode descobrir sozinho a informação dada aos outros.

É fácil ver que o sistema apresentado cumpre as condições impostas.

Com efeito, suponhamos que o adjunto B tentava descobrir o código sozinho; de $p(1) = 16$ vem a equação com três incógnitas $a \times 1^2 + b \times 1 + c = 16 \Leftrightarrow a + b + c = 16$ e, como há uma infinidade de valores possíveis para a, b e c, a tentativa falha.

Se dois adjuntos (digamos C e D) trabalharem em conjunto, vem

$$\begin{cases} p(2) = 33 \\ p(3) = 58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 33 \\ 9a + 3b + c = 58 \end{cases},$$

sistema este que é indeterminado e a tentativa de descobrir o código falha novamente.

[1] O que está em jogo é o seguinte resultado: "O conhecimento das coordenadas de $n+1$ pontos do gráfico de um polinómio de grau n determina completamente esse polinómio." Assim, uma recta é definida por dois quaisquer dos seus pontos, uma função quadrática por três pontos, uma função cúbica por quatro e assim sucessivamente.

[2] É claro que pode ser dada ao adjunto A apenas a indicação (0, 7), ao adjunto B a indicação (1, 16), etc. Repare-se ainda que nada obriga a que as abcissas dos pontos sejam igualmente espaçadas.

Finalmente, se se juntarem três adjuntos (digamos B, C e D), eles conseguem descobrir facilmente o segredo. Com efeito, obtêm um sistema de três equações com três incógnitas possível e determinado:

$$\begin{cases} p(1) = 16 \\ p(2) = 33 \\ p(3) = 58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 16 \\ 4a + 2b + c = 33 \\ 9a + 3b + c = 58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ c = 7 \end{cases}$$

e o código é (4, 5, 7). É fácil de ver que se obtém o mesmo resultado se se escolher outra qualquer das quatro hipóteses possíveis para o conjunto de três adjuntos em colaboração.

O processo descrito por meio deste exemplo é perfeitamente geral, podendo ser aplicado a códigos de qualquer comprimento.

É interessante dar uma interpretação geométrica[3] a este processo: se considerarmos os sistemas apresentados, podemos pensar que a informação dada a cada adjunto é uma equação de um plano no espaço tridimensional usual, correspondendo o segredo às coordenadas do ponto de intersecção. Assim, por exemplo, a tentativa falhada dos adjuntos B e C anteriormente descrita reflecte apenas que dois planos distintos não podem ter apenas um ponto em comum, têm de ter uma recta.

A interpretação geométrica sugere um refinamento do sistema: em vez de o segredo corresponder às três coordenadas, pode convencionar-se que será apenas uma delas, digamos a cota.

Este refinamento corresponde a "esconder" o código (que será agora um número inteiro) no termo constante de um polinómio conveniente. Vejamos como proceder, recorrendo de novo ao exemplo do general G e seus adjuntos com o código (4, 5, 7), que será agora o número "457".

Para tanto, basta seleccionar aleatoriamente dois números para os coeficientes dos termos quadrático e linear do polinómio do segundo grau $p(x) = ax^2 + bx + c$ e atribuir a c o valor 457. Depois, damos a cada um dos três adjuntos o conhecimento do valor de $p(x)$ num ponto conveniente (em zero não, é claro!) e o resto do esquema é igual ao já descrito.

3. VARIANTES DESTE SISTEMA DE PARTILHA DO SEGREDO

Uma primeira observação é a de que o sistema é independente do número de adjuntos: se o general G passasse a ter mais dois adjuntos, E e F, bastaria indicar ao primeiro o valor $p(4) = 91$ e ao segundo o valor $p(5) = 132$ e o sistema funcionaria exactamente da mesma forma.

Uma modificação óbvia diz respeito ao grau do polinómio: se trabalhássemos com um polinómio do terceiro grau, seria fácil construir da mesma forma um sistema em que seria necessário a colaboração de quaisquer quatro adjuntos para reconstituir o segredo. A generalização a graus superiores é imediata.

Descrevemos a seguir uma modificação mais interessante.

No exemplo que demos, todos os adjuntos eram iguais no que diz respeito ao conhecimento do segredo. É fácil modificar o sistema de modo a passar a haver um "adjunto de 1ª classe" (A, um brigadeiro) e três "adjuntos de 2ª classe" (B, C e D, coronéis), no seguinte sentido:

- o brigadeiro A pode, em colaboração com qualquer dos coronéis, descobrir facilmente o segredo;
- se o brigadeiro não participar, os três coronéis terão de agir em conjunto para obter o código.

É fácil ver que para isto basta distribuir a informação de acordo com a seguinte tabela:

Adjunto e posto	Informação
A, brigadeiro	$p(0) = 7$ $p(1) = 16$
B, coronel	$p(2) = 33$
C, coronel	$p(3) = 58$
D, coronel	$p(4) = 91$

Para simplificar, usámos sempre polinómios de coeficientes naturais ou nulos, sucedendo o mesmo com as abcissas dos pontos. Pode então perguntar-se: por que motivo não nos limitamos a considerar segredos consistindo apenas em sequências de números *naturais*? A resposta é que essa alteração enfraqueceria consideravelmente o sistema, permitindo a um dos adjuntos descobrir sozinho (com algum trabalho…) o código, pelo que deve ser rejeitada.

Para vermos qual é o problema, pensemos no adjunto B: ele está na posse da equação $a + b + c = 16$. Se souber que apenas devem considerar-se as soluções *naturais* desta equação, haverá um número finito de códigos possíveis (repare-se que, nesta hipótese, a, b e c serão números naturais inferiores a 16; pode mesmo mostrar-se, por um argumento combinatório[4], que esta equação tem $(16 - 1) \times (16 - 2)/2 = 105$ soluções naturais), e o segredo poderá ser desvendado por tentativas sistemáticas![5] Uma solução alternativa é admitir o uso de números inteiros negativos nas abcissas dos pontos; assim, os segredos podem ser sequências de números naturais.

4. OBSERVAÇÕES FINAIS

Os esquemas descritos até aqui são elementares e perfeitamente compreensíveis por um aluno do Ensino Secundário; o autor utilizou o esquema de Shamir no tema I de Matemática A do 11º ano para dar um exemplo de aplicação do estudo dos sistemas de três equações com três incógnitas[6]. Há, no entanto, sistemas matematicamente mais sofisticados, como os baseados no Teorema Chinês dos Restos. Muito resumidamente, seja S o segredo, n o número total de adjuntos e k o número mínimo de adjuntos que podem desvendar o segredo trabalhando em conjunto. Seleccionam-se números primos[7] $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$ tais que

$$\prod_{i=n-k+2}^{n} m_i < S < \prod_{i=1}^{k} m_i$$

e dá-se ao i-ésimo adjunto o valor s_i que é o resto de S quando dividido por m_i. Resulta do Teorema Chinês dos Restos que o conjunto de condições (sistema de congruências) que se obtém juntando quaisquer k dos adjuntos tem uma solução única, menor do que o produto dos inteiros correspondentes e que é precisamente o segredo pretendido. Para os detalhes e variantes deste esquema, o leitor pode consultar [5], [6] ou [7].

5. REFERÊNCIAS

[1] Shamir, A. (1979), "How to Share a Secret", Communications of the ACM **22** (11): 612 - 613 (disponível em *http://www.cs.tau.ac.il/~bchor/Shamir.html*).

[2] "Secret Sharing" (artigo na Wikipedia).

[3] Simões Pereira, J. M. S. (2006), "Tópicos de Combinatória", Editora Luz da Vida, Lda., Coimbra.

[4] Silva, J. N. (2009), "Polinómios", *Gazeta de Matemática*, 157, 5-6.

[5] "Secret Sharing with the Chinese Remainder Theorem" (artigo na Wikipedia).

[6] Koblitz, N. (1994), "A Course in Number Theory and Criptography" (2nd edition), Springer-Verlag, New York.

[7] K. Kaya, A. A. Selcuk, Z. Tezcan (2006), "Threshold Cryptography Based on Asmuth-Bloom Secret Sharing", The 21st International Symposium on Computer and Information Sciences (ISCIS 2006). Lecture Notes in Computer Science v. 4263, Springer-Verlag. Istanbul, Turkey (disponível em *http://www.cs.bilkent.edu.tr/~selcuk/publications/ab_ISCIS06.pdf*)

[3] Também em 1979, e independentemente de Shamir, o criptógrafo americano George Blakley descobriu um sistema de partilha de segredo que corresponde essencialmente à versão geométrica que a seguir se apresenta. Para uma descrição deste sistema e suas relações com o sistema de Shamir, veja-se [2].

[4] Veja-se [3], páginas 142 e 144.

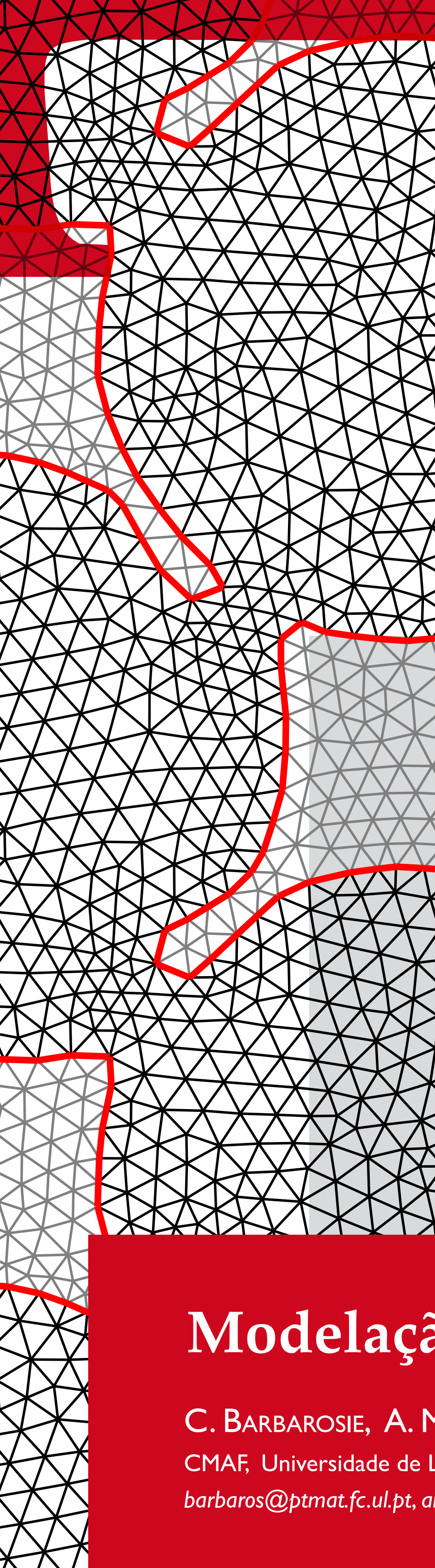
[5] Para um exemplo ainda mais pertinente do perigo deste tipo de restrições, veja-se [4].

[6] Uma alternativa à resolução por meio de sistema é a utilização da regressão quadrática para a determinação directa do polinómio; este processo pode ser feito facilmente numa sala de aula recorrendo às calculadoras gráficas existentes no mercado ou a *software* imediatamente disponível, como o *Geogebra*.

[7] Rigorosamente falando, basta que sejam primos entre si dois a dois.

SOBRE O AUTOR

António Pereira Rosa é licenciado em Matemática (1986) e mestre em Matemática para o Ensino (2008) pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É professor do quadro da Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho desde 1994.



Modelação de Materiais Periódicos

C. Barbarosie, A. M. Toader

CMAF, Universidade de Lisboa

barbaros@ptmat.fc.ul.pt, *amtan@ptmat.fc.ul.pt*

Este trabalho apresenta diferentes noções de periodicidade no espaço $\mathbb{R}^2$ (relacionadas com o padrão repetitivo utilizado em pavimentações) e as suas aplicações na modelação de materiais periódicos.

Imaginemos um corpo cujas propriedades mecânicas variam de ponto para ponto. Um exemplo típico é o dos materiais compósitos: uma matriz de *epoxy* com inclusões de alumínio, ou uma peça de resina reforçada com fibras de vidro (ou de carbono). Outro exemplo seria o dos materiais porosos. A figura 1 ilustra o caso dum material bidimensional em que as inclusões estão distribuídas de maneira periódica. Note-se que as cores usadas (cinzento e branco) podem ter significados diferentes: podem representar material e buraco, ou então dois materiais com propriedades diferentes. Note-se igualmente que as propriedades do material podem referir-se a diferentes grandezas físicas: no caso dum corpo condutor de calor, a propriedade que caracteriza o comportamento do material é a condutividade térmica; no caso dum condutor eléctrico estaríamos a falar da sua condutividade eléctrica, enquanto para um corpo elástico a propriedade mecânica relevante é o tensor da elasticidade (o objecto matemático que reúne as várias grandezas físicas que caracterizam o comportamento elástico).

Quando dizemos que as inclusões (ou buracos) estão distribuídas de maneira periódica, convém especificar claramente a noção de periodicidade considerada, pois muitos arranjos periódicos são possíveis. Por exemplo, as figuras 1 e 2 mostram dois arranjos periódicos diferentes. É natural que as propriedades mecânicas macroscópicas das duas misturas representadas nas figuras 1 e 2 sejam diferentes, mesmo se os materiais de base forem os mesmos e apesar de a forma do buraco (ou da inclusão) ser idêntica.

Muitos autores definem a periodicidade especificando uma *célula de periodicidade*. No caso bidimensional, a célula de periodicidade pode ser o quadrado $[0,1]^2$, dando lugar a padrões como o da figura 1 ou um paralelogramo arbitrário (no caso da figura 2, a célula de periodicidade é um losango com ângulo de 60°). Contudo, é fácil constatar que a correspondência entre célula de periodicidade e arranjo periódico não é biunívoca. Por exemplo, a figura 3 mostra uma célula (paralelogramo com ângulo de 45°) que gera exactamente o mesmo padrão de periodicidade da figura 1, e a figura 4 mostra uma outra célula que define a mesma noção de periodicidade da figura 2.

Uma definição coerente de periodicidade deve passar pela noção de *grupo de periodicidade* (ver os artigos [6] e [8]). Um arranjo tem natureza periódica se for invariante a um grupo de translações do espaço (ou do plano, pois esta apresentação limitar-se-á ao caso bidimensional). Recordamos que uma translação é uma aplicação do tipo $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, em que $\vec{v}$ é um vector fixo chamado vector de translação. Por exemplo, a figura 1 ficará inalterada se lhe aplicarmos a translação $x \mapsto x + (0,1)$. Se um arranjo for invariante a duas translações, também será invariante à composição das duas, o que prova que o conjunto de translações é um grupo relativamente à operação de composição. É este grupo de translações que caracteriza (univocamente) o carácter periódico dum padrão geométrico. Por exemplo, as figuras 1 e 3 são periódicas relativamente ao mesmo grupo, enquanto as figuras 2 e 4 são periódicas relativamente a um outro grupo de translações.

Observamos que cada translação pode ser identificada com o respectivo vector, e que a composição de translações corresponde à soma dos seus vectores. Portanto podemos falar de subgrupos aditivos de $\mathbb{R}^2$ em vez de grupos de translações. Para fixar ideias, especificaremos que o grupo de periodicidade deve ter um conjunto de dois

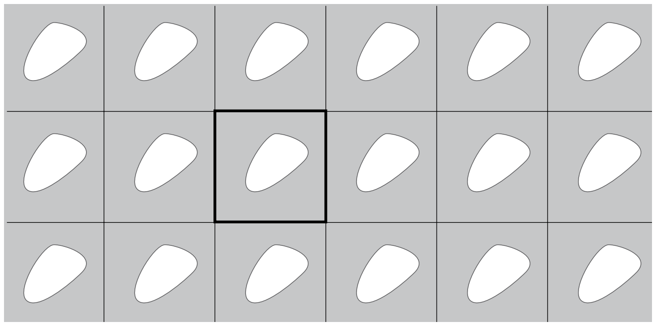


Figura 1: Exemplo de material periódico.

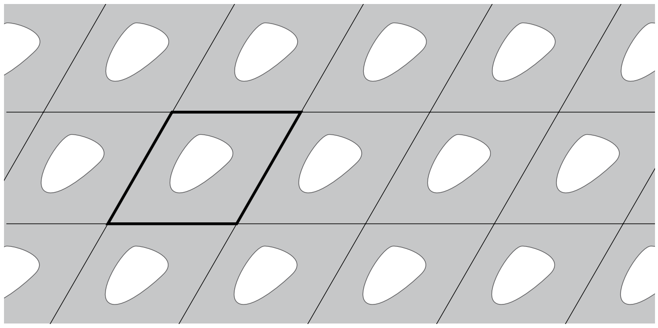


Figura 2: Arranjo periódico diferente.

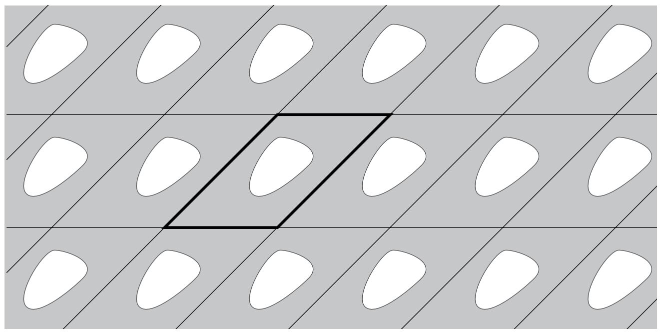


Figura 3: Célula com ângulo de 45°.

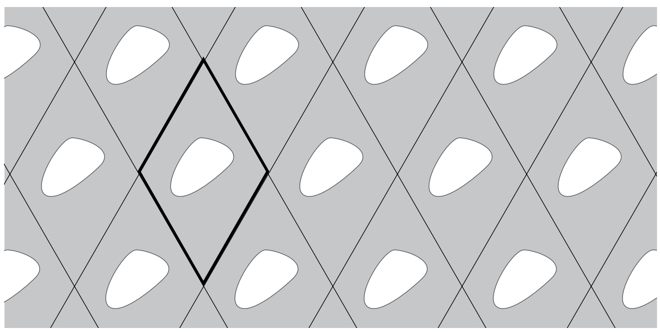


Figura 4: Outra célula de periodicidade.

geradores (dois vectores linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$). Note-se contudo que, para um dado grupo de periodicidade, o conjunto de geradores não é único: a figura 5 mostra dois conjuntos de geradores que definem o mesmo grupo de periodicidade, $\mathbb{Z}^2$. Observamos igualmente que a partir dum conjunto de dois geradores é possível construir uma célula de periodicidade (ver a figura 5), o que confirma que o mesmo grupo de periodicidade pode ser obtido com diferentes células de periodicidade.

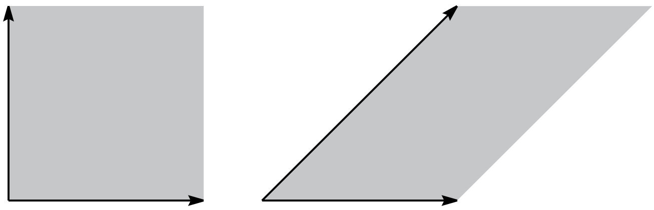


Figura 5: Dois conjuntos de geradores para $\mathbb{Z}^2$, e as respectivas células.

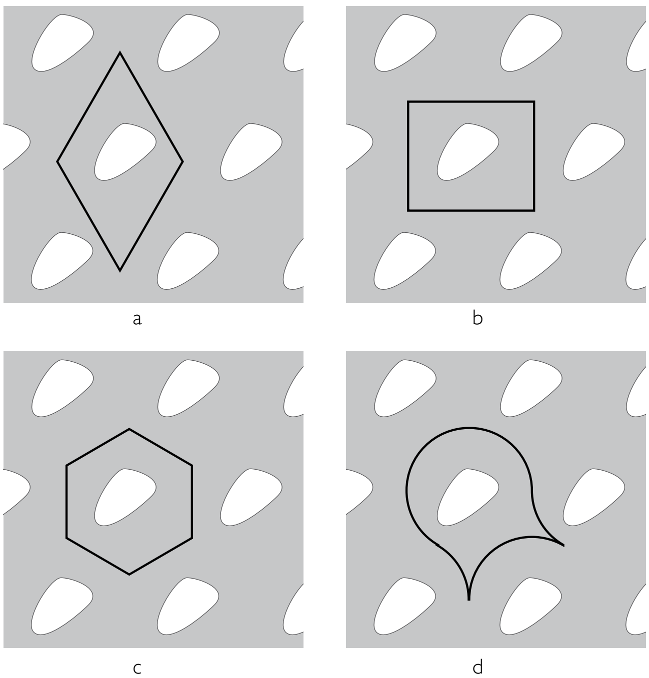


Figura 6: Quatro domínios representativos para o grupo de periodicidade``hexagonal'.

Há ainda outra noção relacionada com a periodicidade: a noção de *domínio representativo*, um conjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^2$ com as seguintes propriedades:

- Se τ for uma translação pertencente ao grupo de periodicidade, $\tau \neq Id$, então $D \cap \tau(D)$ é um conjunto desprezável (de área nula);
- A união de todos os conjuntos da forma $\tau(D)$, em que τ percorre o grupo de periodicidade, é igual ao plano $\mathbb{R}^2$ inteiro.

Qualquer célula de periodicidade é um domínio representativo, mas a recíproca não se verifica: há domínios representativos que não são paralelogramos definidos por dois geradores do grupo de periodicidade. A figura 6 mostra quatro domínios representativos para o mesmo grupo de periodicidade que aparece nas figuras 2 e 4. Este tipo de periodicidade é chamado ``hexagonal", devido à possibilidade de definir um domínio representativo hexagonal (ver figura 6c). Podemos observar que todos os domínios representativos dum mesmo grupo de periodicidade têm necessariamente a mesma área. Conforme a especificidade do problema em estudo, qualquer domínio representativo pode ser utilizado.

As ferramentas matemáticas necessárias para descrever o comportamento mecânico macroscópico dum corpo apresentando uma microestrutura periódica abrangem equações com derivadas parciais, variedades de Riemann e multifunções sobre variedades. No entanto, a complexidade matemática destas noções ultrapassa o âmbito desta apresentação, podendo o leitor interessado consultar, por exemplo, os artigos [1], [2] e [3]. Uma característica distintiva destas equações é o carácter periódico das funções envolvidas. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é *periódica* em relação a um certo grupo de periodicidade se f for invariante à composição com translações pertencentes ao grupo. Por outras palavras, f é periódica se $f(x + \vec{v}) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$, em que $\vec{v}$ é um vector arbitrário pertencente ao grupo de periodicidade.

Observamos que uma função periódica é unicamente determinada pela sua restrição a um domínio representativo. Ou seja, se f e g são duas funções periódicas que coincidem num domínio representativo D, então f=g em todo o plano $\mathbb{R}^2$. Reciprocamente, se tivermos uma função $h : D \to \mathbb{R}$, ela

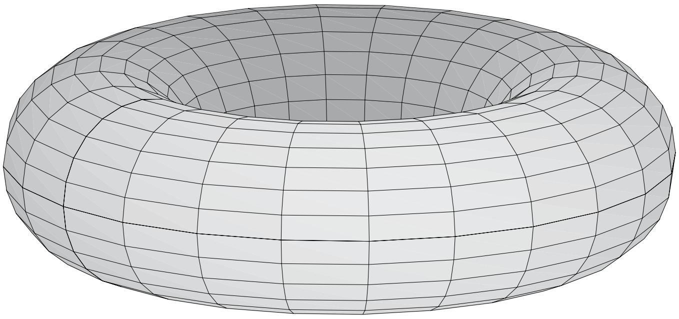


Figura 7: Um toro com curvatura não-nula

poderá ser estendida a uma função periódica $\tilde{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, desde que a função h satisfaça certas condições sobre a fronteira de D. Recordamos que por convenção D é um conjunto compacto, portanto fechado, pelo que a fronteira de D está incluída em D. Portanto, é necessário que h tome valores iguais em pontos da fronteira de D que se correspondem através do grupo de periodicidade. No caso duma célula de periodicidade, basta identificar as arestas opostas do respectivo paralelogramo. Para outros domínios representativos, a imposição das condições de periodicidade pode ser mais intricada. Por exemplo, para o domínio hexagonal que aparece na figura 6, é necessário identificar três pares de faces opostas.

É possível identificar as funções periódicas definidas em $\mathbb{R}^2$ com funções definidas sobre o toro bidimensional, definido como variedade quociente. Esta variedade é obtida identificando os pontos de $\mathbb{R}^2$ que se correspondem através do grupo de periodicidade. Uma maneira mais intuitiva de definir o toro é considerando um domínio representativo D e ``colando'' as faces opostas da sua fronteira. Convém, contudo, notar que esta operação é abstrata: a variedade não fica curvada, mas permanece localmente plana. Como consequência, não é possível mergulhar em $\mathbb{R}^3$ o toro assim definido, não sendo possível representá-lo graficamente. Existe uma superfície em $\mathbb{R}^3$ comummente chamada ``toro'' (ver a figura 7) que é topologicamente isomorfa à variedade quociente acima introduzida; contudo, os dois espaços não são isomorfos do ponto de vista métrico (como variedades de Riemann). A superfície representada na figura 7 tem curvatura não-nula, enquanto o toro definido como variedade quociente tem curvatura nula (sendo localmente plano). Convém salientar que dois toros associados a dois grupos diferentes de periodicidade são variedades de Riemann distintas.

Nos artigos [5], [6] e [3], as equações que descrevem o comportamento mecânico das microestruturas são reformuladas em termos de funções que se escrevem como a soma de uma função linear com uma periódica. É interessante notar que as funções deste tipo não correspondem a funções definidas sobre o toro, mas podem ser identificadas com *multifunções* sobre o toro. Uma multifunção pode ser imaginada como uma função que, após uma volta completa ao toro, não volta a ter os mesmos valores, mas toma valores um nível mais acima ou mais abaixo, dando origem a ``foliações'' sobre o toro.

Apresentamos alguns exemplos de microestruturas periódicas modeladas usando a noção de grupo de periodicidade acima introduzida. O método dos elementos finitos foi adaptado para tomar em conta condições de periodicidade. As microestruturas foram optimizadas usando optimização de forma e de topologia (igualmente adaptadas ao contexto periódico). Todos os exemplos referem-se a um corpo linearmente elástico, com microperfurações periódicas. Na figura 8 é representada uma microestrutura optimizada para resistir à pressão hidrostática, com periodicidade ``quadrada'' (grupo de periodicidade $\mathbb{Z}^2$). Na figura 9 é representada uma microestrutura na mesma situação, mas com grupo de periodicidade ``hexagonal'', e com buracos maiores. Na página *http://cmaf.ptmat.fc.ul.pt/~barbaros/en/optper/* pode ser visualizado um processo de optimização que usa alternadamente variações de forma e variações de topologia para chegar a esta estrutura. Na figura 10 é representada uma microestrutura optimizada para resistir a uma solicitação de corte. Na figura 11 é representada uma microestrutura optimizada para resistir a uma presão uniaxial oblíqua. Na figura 12 é representada uma microstrutura com coeficiente de Poisson negativo, em que foram usados dois buracos independentes na célula de periodicidade. Para mais pormenores, ver os artigos [5], [6], [3] e [4]. As mesmas ferramentas de análise e optimização podem ser usadas para optimizar corpos macroscópicos que apresentem microperfurações localmente periódicas; veja-se o artigo [7] e a página *http://cmaf.ptmat.fc.ul.pt/~barbaros/en/examples-2009.html.*

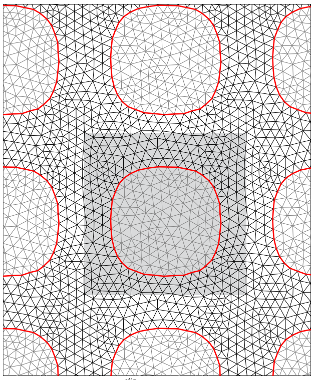


Figura 8: Pressão hidrostática, periodicidade "quadrada".

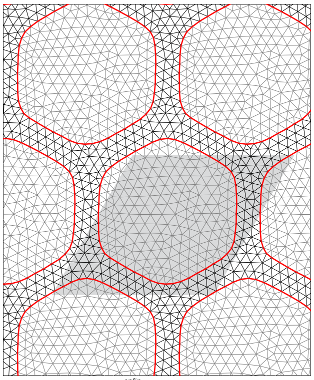


Figura 9: Pressão hidrostática, periodicidade "hexagonal".

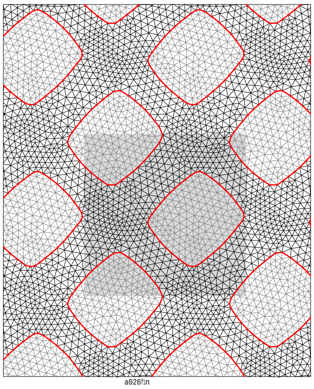


Figura 10: Tensão de corte, periodicidade "quadrada".

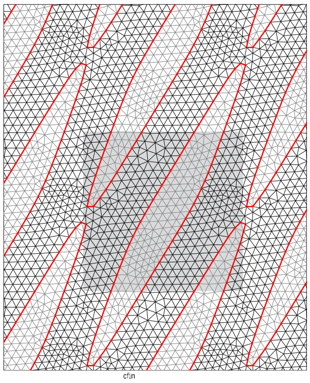


Figura 11: Pressão uniaxial, periodicidade "quadrada".

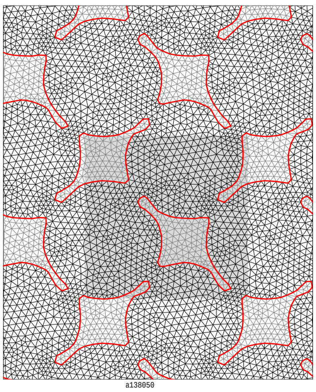


Figura 12: Coeficiente de Poisson negativo, periodicidade "quadrada", dois buracos.

REFERÊNCIAS

[1] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Anal., 23, n. 6 p. 1482-1518 (1992)

[2] G. Allaire, Shape Optimization by the Homogenization Method, Applied Mathematical Sciences 146, Springer (2002)

[3] C. Barbarosie, A.M.Toader, Shape and Topology Optimization for periodic problems, Part I, The shape and the topological derivative, Structural and Multidisciplinary Optimization, 40, p. 381-391, 2010

[4]C. Barbarosie, A.-M. Toader, Shape and Topology Optimization for periodic problems, Part II, Optimization algorithm and numerical examples, Structural and Multidisciplinary Optimization, 40, p. 393-408, 2010

[5] C. Barbarosie, Optimization of perforated domains through homogenization, Structural Optimization, 14(4), p. 225-231, 1997

[6] C. Barbarosie, Shape optimization of periodic structures, Computational Mechanics, 30, p. 235-246, 2003

[7] C. Barbarosie, A. M. Toader, Optimization of bodies with locally periodic microstructure, submetido para publicação, pré-print CMAF-UL Pre-2009-021 em *http://cmaf.ptmat.fc.ul.pt/preprints.html*

[8] A. M. Toader, The topological derivative for homogenized elastic coefficients of periodic microstructures, submetido para publicação, pré-print CMAF-UL Pre-2010-001 em *http://cmaf.ptmat.fc.ul.pt/preprints.html*

SOBRE OS AUTORES

Cristian Barbarosie é licenciado em Matemática pela Universidade de Lisboa, e obteve o Doutoramento pela mesma Universidade. Actualmente é docente na faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e pertence ao Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais da mesma Universidade.

Anca-Maria Toader é licenciada em Matemática pela Universidade de Lisboa e em Matemática Mecânica pela Universidade de Bucareste; obteve o Doutoramento em Matemática pela Universidade de Lisboa. Actualmente é docente na faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e pertence ao Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais da mesma Universidade.

Hoje, de posse de computadores sofisticados que permitem cálculos astronómicos a muito longo prazo, sabemos que o sistema solar exibe um comportamento caótico. O francês Jacques Laskar verificou mesmo que, a longo prazo, a órbita do nosso planeta não é tão estável como esperávamos.

O Problema dos Três Corpos e o Caos

CARLOS FIOLHAIS
Universidade de Coimbra
tcarlos@teor.fis.uc.pt

O Sol e a Lua vistos da Terra.

A obra maior do físico inglês Isaac Newton intitula-se "Princípios Matemáticos de Filosofia Natural" (1687), pois nela a matemática está omnipresente. Surgiu aí a expressão matemática de força da gravitação universal, uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre dois corpos, com qual se consegue descrever o movimento da Lua em volta da Terra ou o movimento da Terra em volta do Sol. Mas, embora o génio de Newton tivesse intuído a universalidade da força gravitacional (é com base nessa universalidade que, por exemplo, simulamos hoje choques de galáxias num supercomputador), e embora as poderosas ferramentas do cálculo infinitesimal tivessem desde logo ficado disponíveis, muitos problemas da chamada "mecânica celeste", o estudo do movimento dos corpos celestes, ficaram em aberto. Desde logo o movimento conjunto do Sol, da Terra e da Lua, um exemplo do chamado "problema dos três corpos". Essa questão tem desafiado os matemáticos e os físicos até à actualidade e está, de certo modo, na base da moderna teoria do caos. A aparente regularidade do movimento dos três corpos esconde uma insuspeita complexidade, que se manifesta quando se quer conhecer o futuro com precisão.

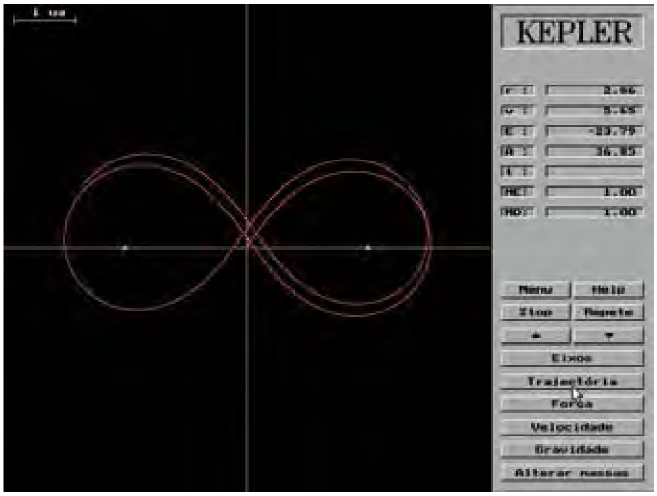
O poder da teoria newtoniana era enorme: ela conseguia descrever e explicar tanto a órbita aproximadamente circular da Lua em torno da Terra como a órbita, também aproximadamente circular, da Terra em volta do Sol, com base apenas na fórmula da força e na indicação das condições iniciais, isto é, a posição e a velocidade da Terra e da Lua. Cada um desses problemas diz-se um "problema de dois corpos". De facto, pode mostrar-se que esses problemas de dois corpos se reduzem com facilidade ao problema de um só corpo: por exemplo, o sistema Terra-Sol pode ser substituído pelo movimento de um astro com a massa reduzida da Terra e do Sol (que é praticamente a massa da Terra, tal é a desproporção entre as duas) em torno do centro de massa (que coincide praticamente com a centro do Sol, pela mesma razão). Na mecânica de Newton, esse problema de um corpo tem solução analítica, isto é, a equação diferencial de segunda ordem no tempo que descreve o movimento pode ser integrada para dar uma função conhecida, a função que descreve uma órbita elíptica.

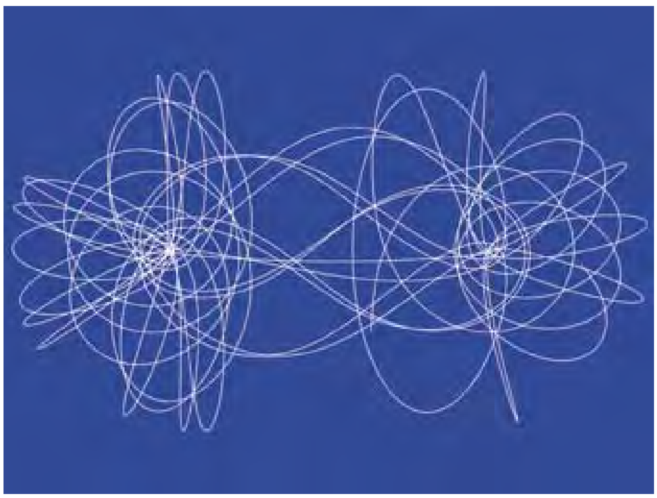
Os matemáticos apreciam o maior grau de generalidade possível, pelo que alguns preferem tratar, em vez do problema de três corpos, o problema de n corpos e depois fazer $n = 3$. Em geral, o problema de n corpos consiste na resolução do seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$m_j \ddot{\mathbf{q}}_j = G \sum_{k \neq j} \frac{m_j m_k (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j)}{\mid \mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j \mid^3}, j = 1, \ldots, n \qquad (01)$$

em que m_j é a massa de cada um dos corpos (partículas), $\mathbf{q}_j$ são os seus vectores posicionais (os dois pontos por cima de $\mathbf{q}_j$ no primeiro membro significam segunda derivada em ordem ao tempo) e G é a constante de gravitação universal, uma vez dadas as posições iniciais $\mathbf{q}_j(0)$ e as velocidades iniciais $\dot{\mathbf{q}}_j(0)$ dos n corpos ($j = 1,\ldots, n$).

No entanto, o problema de três corpos (Eq. (1) com $n = 3$), que interagem por meio da força de gravitação universal, cedo se revelou muito mais complicado do que o problema de dois corpos. Foi resistindo aos vários ataques que os sucessivos desenvolvimentos do cálculo infinitesimal foram permitindo. Métodos habilidosos, que apesar do seu engenho conduziam a resultados apenas aproximados, levaram à descrição dos movimentos dos planetas do sistema solar tendo em conta não apenas a interacção com o astro-rei mas também as suas interacções recíprocas: a coroa de glória da mecânica de Newton foi, sem dúvida, a descoberta do planeta Neptuno, efectuada apenas com "a ponta do lápis": os cálculos, na altura somente manuais, necessários para





Simulações do problema de três corpos restrito.
(em cima: Simulação no programa Kepler, gentilmente cedido pelos autores; em baixo: Simulação do físico J. C. Sprott, *http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/3body.gif*)

descrever a órbita conhecida do planeta Urano implicavam a perturbação por um planeta então desconhecido, precisamente Neptuno. O astrónomo alemão Johann Gallé que olhou pelo telescópio em 1846 para o sítio que tinha sido indicado, independentemente, pelo inglês John Adams e pelo francês Urbain Le Verrier (há alguma controvérsia sobre a primazia da descoberta), limitou-se a confirmar a previsão teórica.

O sucesso só foi possível porque a perturbação planetária era pequena. Casos mais intrincados estavam longe de ser simples. Um dos grandes herdeiros da mecânica de Newton, o matemático suíço Leonard Euler, mostrou em 1760 o seu génio ao propor certas soluções particulares para um modelo simplificado do problema de três corpos, chamado problema de três corpos restrito: nesse modelo, dois dos corpos, de maior massa, consideram-se fixos e o terceiro corpo está móvel. O modelo, que admite algumas soluções analíticas, é, em boa verdade, um problema de um corpo no campo criado por dois centros de força. Apesar de ser interessante do ponto de vista matemático (o matemático francês Joseph-Louis Lagrange deu, logo a seguir a Euler, uma outra importante contribuição), não tem correspondência física exacta: é impossível, na prática, "congelar" as posições e as velocidades dos dois astros de maior massa, por estes estarem sujeitos a atracção mútua.

O problema de três corpos tornou-se foco das atenções. Como os grandes problemas atraem os maiores génios, não admira que o grande matemático francês Henri Poincaré tenha, no final do século XIX, trabalhado nele. Em 1887, respondeu a um concurso do reino da Suécia e da Noruega que atribuía um prémio chorudo por ocasião da comemoração dos 60 anos do rei Óscar II. Pedia-se uma resposta à questão de encontrar uma solução na forma de uma série convergente para o problema de três corpos, o que seria um importante passo para conhecer a estabilidade a longo prazo do sistema solar. Poincaré não resolveu completamente o problema proposto, mas o seu trabalho sobre o problema de três corpos restrito foi distinguido. Um dos membros do júri, o matemático alemão Karl Weierstrass, afirmou: "Este trabalho não pode ser considerado realmente como fornecedor da solução completa para a questão proposta, mas o que de mais importante tem esta publicação é que ela inaugura uma nova era na história da mecânica celeste." Com efeito, Poincaré, ao embrenhar-se na complexidade do problema considerado, tornou-se, sem ter consciência disso, o pai da moderna teoria do caos...

Vendo bem, não admira que o problema geral de três corpos não tenha solução analítica. Os físicos sabem que os problemas de mecânica podem simplificar-se quando há quantidades físicas que se conservam. O problema gravitacional de dois corpos reduz-se ao problema de um corpo e este tem solução analítica graças à conservação de um certo número de grandezas, como a posição e o momento linear do centro de massa, o momento angular e a energia. É fácil verificar que o problema geral de três corpos tem muito mais variáveis do que grandezas que se mantenham constantes: provou-se um teorema segundo o qual só há dez grandezas que se conservam, as grandezas indicadas, ao passo que o problema de três corpos no espaço tridimensional tem 3 × 3 × 2 = 18 variáveis. Hoje em dia, depois do advento dos modernos computadores, problemas sem solução analítica têm solução numérica graças a técnicas de integração numérica. Dadas as forças e as condições iniciais dos corpos em causa, podem conhecer-se todas as trajectórias em qualquer momento. Dizemos que o sistema é determinista, no sentido de que é possível conhecer o futuro a partir do passado: consegue-se calcular todas as órbitas dos astros intervenientes a partir das suas posições e velocidades.

Henri Poincaré

No entanto, tanto os físicos como, principalmente, os matemáticos gostam de dispor de soluções analíticas. Os métodos numéricos são eficazes, mas o resultado não é mais do que uma longa tabela de números, que apesar de poderem representar-se sob a forma gráfica, não fornecem necessariamente uma compreensão geral da dinâmica. E foi assim que o problema de n corpos, incluindo o caso $n = 3$, continuou até aos nossos dias a ser objecto de investigação dos que preferem teoremas e expressões analíticas a listas de números ou desenhos de curvas. Os tratamentos analíticos são dificultados por existirem na mecânica celeste as chamadas singularidades, correspondentes a aproximações muito grandes, choques mesmo, de dois corpos quaisquer, quando a distância é muito pequena e a força gravitacional é, por isso, muito alta. Um teorema notável a respeito do problema gravitacional de três corpos foi provado em 1912 pelo matemático finlandês Karl Sundman: ele mostrou que, excluindo as singularidades, existe uma solução na forma de uma série de potências da raiz cúbica do tempo, $t^{1/3}$, série essa que é convergente para todos os valores reais t. O problema geral acabou também por não resistir aos porfiados esforços dos matemáticos. Em 1991, o matemático norte-americano de origem chinesa Qiudong Wang generalizou o resultado de Sundman para valores arbitrários de n.

Os métodos analíticos e numéricos são complementares, já que iluminam o problema de maneira diferente. No caso do problema de n corpos, o cálculo de numerosos termos de séries (séries de convergência muito lenta) não é mais fácil do que a integração numérica directa, que hoje se faz trivialmente se se dispuser de um computador pessoal e de um algoritmo adequado (um dos algoritmos mais simples de integração de equações diferenciais tem o nome de Euler: o método de Euler é demasiado grosseiro, mas uma sua modificação simples tem grande valor pedagógico, dando resultados muito razoáveis).

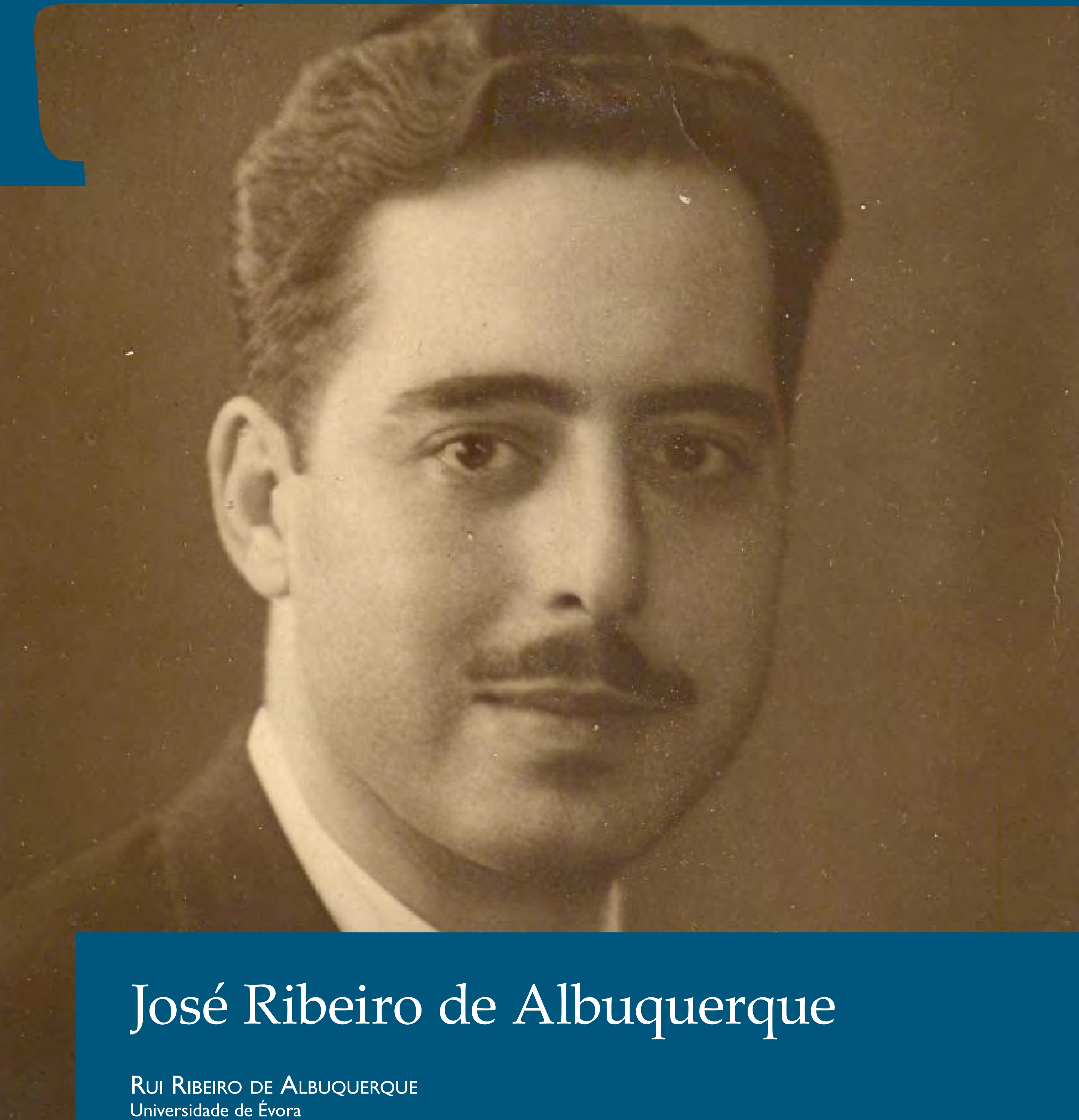
O que é que revelaram os computadores, de uma maneira muito mais clara e directa do que os métodos analíticos? Revelaram que o sistema de três corpos celestes, apesar de ser determinista (as equações são bem conhecidas, não havendo nenhum elemento de acaso), mostra um comportamento caótico, no sentido de que duas condições iniciais muito próximas conduzem a órbitas que se tornam rapidamente muito diferentes. A palavra "caos", que é de uso corrente, tem em física e matemática um significado preciso: extrema sensibilidade às condições iniciais, quer dizer, divergência de soluções inicialmente próximas. A teoria do caos surgiu, muitos anos após o caos ter sido entrevisto por Poincaré, quando, em 1963, um meteorologista do MIT, o norte-americano Edward Lorenz, estudava numericamente as soluções de um problema de três equações diferenciais não lineares de primeira ordem que descreve um fluxo de uma camada de fluido sujeita a um aquecimento por baixo. Não foi sem surpresa que verificou que duas entradas de dados muito próximos correspondiam a resultados que a prazo eram muito afastados. O interesse pelo caos explodiu com a democratização dos computadores que se verificou no início dos anos 80 do século passado. Pode mesmo dizer-se que o novo instrumento possibilitou o aparecimento de uma "ciência nova". Abordagens numéricas e analíticas fertilizaram-se mutuamente, seja em questões de meteorologia (uma tempestade no Brasil pode ser provocada por um bater de asas de uma borboleta na China, o chamado "efeito borboleta"), seja em questões de vários outros domínios. A descoberta do caos na mecânica celeste é, de certo modo, paradoxal: pois não é a descrição do sistema solar que hoje possuímos um triunfo dos métodos analíticos devidos a Newton e uma confirmação da extraordinária capacidade de previsão da física-matemática? Sim, mas, há quase cinco mil milhões de anos, no início do sistema solar, este, em vez de essencialmente ordenado como hoje, era caótico e só uma "selecção natural" das órbitas "mais aptas" levou à situação de ordem actual (e, já agora, esse "darwinismo cósmico" esteve na base da selecção natural que se seguiu ao aparecimento da vida no terceiro planeta a contar do Sol). Os choques cósmicos levaram à perda de muitos corpos celestes. E, mesmo hoje, na posse de computadores sofisticados que permitem cálculos astronómicos a muito longo prazo, sabemos que o sistema solar exibe um comportamento caótico. O físico-matemático francês contemporâneo Jacques Laskar verificou mesmo que, a longo prazo, a órbita do nosso planeta não é tão estável como esperamos.

Pois os céus que eram, no tempo de Newton, o reino da ordem, são, no tempo de Laskar, o reino da desordem. Como que a prová-lo aparecem inesperadamente asteróides, alguns dos quais podem constituir um perigo para a Terra (ou, mais propriamente, para a vida na Terra). Poincaré permanece actual, pois alguns dos problemas que estudou continuam em aberto, agora aligeirados por progressos substanciais de compreensão: o matemático francês não conseguiu progredir mais apenas porque lhe faltava na época o computador digital. Hoje, esse é um instrumento tão importante para observar o céu como o telescópio. O telescópio permite observar no céu o presente, ou melhor, o passado, pois a luz, com velocidade constante, demora tempos diferentes a vir de astros a distâncias diferentes. Mas o computador permite "observar" tanto o futuro como o passado, é uma verdadeira máquina de viajar no tempo. Porém, com a incerteza intrínseca associada à noção de caos, estamos condenados a desconhecer com precisão o futuro astronómico, mesmo que conheçamos muito bem as condições actuais dos astros à nossa volta. O nosso futuro, mesmo do ponto de vista astronómico, é incerto!

SOBRE O AUTOR

Carlos Fiolhais é Doutor em Física pela Universidade Goethe, em Frankfurt, Alemanha. É professor da Universidade de Coimbra, onde ensina Sistemas Dinâmicos e Complexos e História da Física. É membro do Centro de Física Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e director da Biblioteca Geral da mesma Universidade. É autor de vários livros científicos e de divulgação científica.


RECREATIONAL
MATHEMATICS
COLLOQUIUM II
April 27th - April 30th 2011
University of Evora
Ludus
spm



José Ribeiro de Albuquerque

Rui Ribeiro de Albuquerque
Universidade de Évora
rpa@uevora.pt

José Ribeiro de Albuquerque foi professor de Matemática no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, actual ISEG. Conta-se entre os matemáticos da geração de 40 que foram estudar para o estrangeiro com bolsas da Junta de Educação Nacional, mais tarde instituto para a alta cultura. Esteve em Paris (Sorbonne), Nancy e Roma. Inspirou diversas gerações.

José Ribeiro de Albuquerque, filho de António de Pina Cabral Ribeiro de Albuquerque e de Alda Amélia de Sacadura Freire Cabral, irmã do aviador, nasceu algures em Lisboa e cresceu na Rua dos Fanqueiros, nº 122, frente ao Largo de São Nicolau; terceiro filho de uma família de seis irmãos, cedo mostrou habilidade para as ciências e humanidades. Casou-se com Maria Helena De Oliveira Valadas Preto. Seu pai era licenciado em Farmácia e republicano, o que provocou corte de relações do avô, monárquico, que não admitiu que o filho não o fosse também.

Da edição do *curriculum vitae* de 1969, sabe-se que obteve em 1936 licenciatura em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, seguindo-se o curso de Engenheiro Geógrafo da mesma FCUL em 1938.

Em 1938-39 foi bolseiro do Instituto para a Alta Cultura, o que o levou à Universidade de Nancy para fazer estudos de Topologia Geral e Combinatória com os professores Jean Leray e Jean F. A. Delsarte. Foi bolseiro do governo francês no mesmo ano na Universidade de Paris. Tal como António Aniceto Monteiro, Ribeiro de Albuquerque foi aluno de Maurice Fréchet na Sorbonne, onde fez estudos de Topologia, como bolseiro do IAC em 1939-40 (cf. Historia de la Probabilidad y la Estadistica III, p.213 [1], a propósito da correspondência trocada entre os três matemáticos). Testemunhou em Paris o infortúnio dos gauleses, com eles deplorando a ocupação nazi (nos Champs-Elysées, com a esposa, terá virado as costas às tropas da Wehrmacht).

A história está cheia de "ilustres desconhecidos". Deixem-me apresentar-vos um matemático da geração de 40.

É hoje evidente para nós o mesmo tipo de influências em J. Ribeiro de Albuquerque que as que formaram a corrente *Bourbaki* (o conhecido grupo científico, recorde-se, do qual J. Delsarte foi sempre grande impulsionador, surgiu nos anos 30 na École Normale Supérieure). Princípios de ordem humana, cultural e científica que veio a construir, de modo independente, durante toda a vida em Portugal.

Entre 1940-43 foi bolseiro do IAC no Centro de Estudos de Matemática e no Seminário de Análise Geral, em Lisboa, onde realizou estudos e investigação matemática com A. Aniceto Monteiro.

De 1943 a 1946 foi aluno de Análise Geral e Teoria dos Conjuntos de Luigi Fantappié e Francesco Severi no Istituto Nazionale di Alta Matematica, em Roma, de novo como bolseiro do IAC. Isto de acordo com o *curriculum* e julgando também pelas referências que lhe ouvimos. Em Itália foi colega dos matemáticos portugueses Virgílio Barroso e José Sebastião e Silva.

Então, José Ribeiro de Albuquerque e a esposa Maria Helena, vizinhos de Luciana Stegagno Picchio, trocaram aulas de italiano por outras de português, partilhando culturas e ajudando-se na difícil sobrevivência aos tempos da guerra, do fascismo e da ocupação alemã (os portugueses auferiam de um estatuto *neutral* que porventura lhes permitia moverem-se melhor do que alguns italianos). Marcaram de forma indelével a jovem italiana, que como se sabe, veio a tornar-se a prestigiada filóloga especializada em literatura portuguesa. Como Luciana Picchio conta em [2], foram ainda aqueles jovens portugueses politizados, incluindo os outros dois matemáticos, que lhe `ensinaram o antifascismo'.

Segundo o *curriculum*, Albuquerque fez ainda estudos na Universidade de Pádua com o professor Scorza, em 1946-47. Trata-se certamente do matemático G. Scorza-Dragoni, a avaliar por [3].

Segundo o relato em [4], o matemático Ribeiro de Albuquerque representou Portugal no Congresso Internacional de Filosofia em Roma, 1946. Apresentou uma comunicação ``Lógica dos Antagonismos'', que se encontra nas Actas do Congresso e em [5]. Congresso que naturalmente na Itália libertada ficou marcado por intensa discussão em torno do Materialismo Dialéctico. A sua filiação ideológica era conhecida.

Encontro de Matemática na FCUL, 1942

Em 1937, José Ribeiro de Albuquerque fez publicar em Lisboa, apresentando-se como licenciado em Ciências Matemáticas, uma "Teoria Geral das Curvas Algébricas Complementos de Cálculo Integral'' [6] que nos parece de um fulgor e de um avanço extraordinários para o local em que foi feita. Nela aparecem citações dos maiores autores da teoria das curvas algébricas, de finais do séc. XIX, terminando na aplicação ao estudo dos integrais elípticos e hiper-elípticos – um trabalho que foi, atrevemos-nos a julgar, de grande originalidade nas escolas portuguesas. Infelizmente porém o dizemos, pois nos parece que o estudo da Geometria Algébrica cedo partiu de Portugal, com Pedro Nunes.

A Tese de doutoramento "Teoria dos Conjuntos Projectivos'' está publicada na revista da Faculdade de Ciências de Lisboa, Volumes 1-2, 1951.

Em 1961, já com a Agregação pela Universidade de Lisboa, publica "Mesure et Intégration'', de novo numa edição de autor, baseada nas suas lições no "Curso de Matemáticas Superiores Professor Mira Fernandes" de 58/59. Para tal foi encorajado por Vicente Gonçalves, director do curso. Trata-se de uma obra avançada de teoria da medida e integração, que reputaríamos de grande actualidade.

A par de inúmeros artigos científicos, desde 1941, para a Portugaliae Mathematica, para a revista da FCL, para a Gazeta de Matemática e para o Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências, aparecem durante os anos 60 edições da Associação Académica do ISCEF com vários temas das matérias que leccionava: lógica e álgebra abstracta, topologia, espaços vectoriais. O avultado compêndio "Análise Matemática" [7], de mais de oitocentas páginas, é uma obra de enormíssimo valor, que vai desde a teoria de conjuntos ao cálculo variacional. Passando por capítulos incomuns como o da geometria de contacto em $\mathbb{R}^n$ ou o das equações às diferenças.

Ribeiro de Albuquerque foi um antifascista consequente, desde sempre. Realizaram-se em sua casa em Campo de Ourique várias reuniões do Partido Comunista Português na clandestinidade. Desconhecemos ainda quem foram, até porque os donos da casa não os viram a todos, os intervenientes desses encontros, mantidos secretos até depois do 25 de Abril. Segundo o professor Paulo Almeida, IST-UTL, que garantidamente ouviu relatar do próprio Alfredo Pereira Gomes, célebre matemático da FCUL e dirigente da SPM, o que se terá passado por volta de 1945 durante uma visita deste a casa de J. Ribeiro de Albuquerque, o famoso escritor Soeiro Pereira Gomes, irmão, terá lá ficado escondido da PIDE durante alguns tempos, quando abraçou a luta clandestina contra o fascismo.

A avaliar pelo que se conhece das ligações com o PCP dos três matemáticos que confraternizaram com Luciana S. Picchio em Roma, através de quem ela diz que, pouco depois de lá saírem, se comprometeu em receber *Avantes!*, via a hospedeira da TAP Ana Féria (`Margarida'), para os fazer passar a exilados políticos e aos amigos italianos, julgamos ter por certo que foi o Prof. Albuquerque o verdadeiro dinamizador em Lisboa dessas distribuições em 1947-48 (cf. [2]).

O economista e ex-deputado no Parlamento Europeu Sérgio Ribeiro aponta-o como o professor a quem a Associação Académica recorreu, aquele que ``foi importante nessa ajuda'', quando quiseram assinalar os 10 anos do desaparecimento de Bento de Jesus Caraça [8]. Foi sempre fiel aos alunos e ao ensino, que em finais dos anos 70 começaram a organizar protestos anti-regime no ISCEF. Depois do 25 de Abril, publicou textos de economia marxista em conjunto com o colega Carlos Silva Ribeiro, hoje professor catedrático de Matemática do ISEG.

Nos anos 80, o catedrático jubilado José Ribeiro de Albuquerque desenvolveu trabalhos de artes plásticas, pintura de paisagens e desenhou inúmeras caricaturas de episódios políticos quotidianos. A partir 1985, estudou e escreveu centenas de páginas sobre Física da Relatividade e Nuclear, que distribuiu em fotocópias pelos discípulos mais chegados, em forma de 11 notas (somos depositários de quase todos esses trabalhos).

José Ribeiro de Albuquerque foi o professor de Análise Matemática de figuras conhecidas da sociedade em geral, como Sérgio Ribeiro, Carlos Carvalhas, João Ferreira do Amaral, e outros mais distantes do seu posicionamento e ensinamentos, como Víctor Constâncio, Ernâni Lopes, Helena Sacadura Cabral, Cavaco Silva ou Abdool M. Karim Vakil.

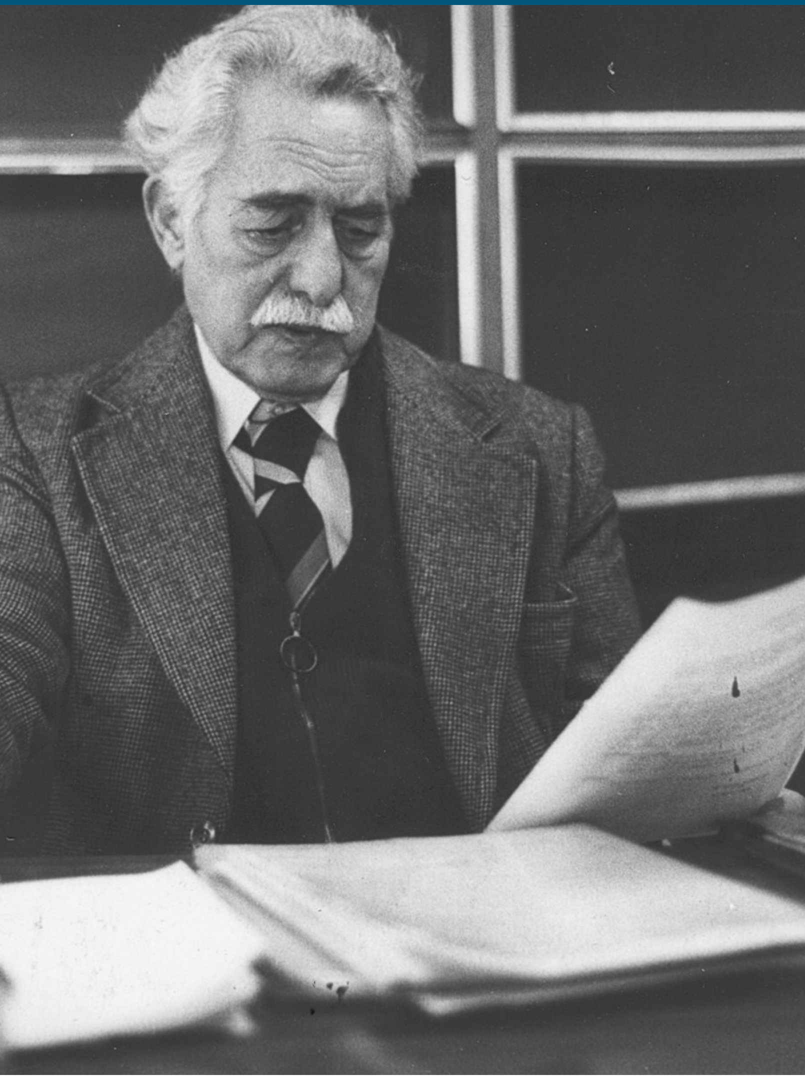
O 'tio Zé' e a 'tia Lena' não deixaram descendentes directos, mas foram muito queridos de muitos sobrinhos e sobrinhos-netos. Dentre estes, o autor destas linhas, que aprendeu muito em muitos encontros com o prof. José Ribeiro de Albuquerque até perto do seu desaparecimento, 10/12/1991. Deu-se a circunstância de o autor ter feito o liceu nos anos 80, na E. S. Machado de Castro, perto da sua residência de quase sempre, na Rua Tomás da Anunciação, 27, 4º E, Campo de Ourique. Longas tardes passadas a ouvir a sua profunda cultura, feita de vivências, conhecimento histórico, ciência e matemática, ligados ao Homem e à sociedade.

José Ribeiro de Albuquerque nasceu em 26 de Maio de 1910, comemoramos o centésimo aniversário do seu nascimento.

Em cima: **Encontro de Matemática na FCUL, 1942.**
Pormenor (em baixo): **J. R. Albuquerque, Maurice Fréchet e António Aniceto Monteiro.**

Da esquerda para a direita: Hugo Ribeiro, Armando Gibert, António Monteiro, Manuel Zaluar Nunes, Bento de Jesus Caraça, Maurice Fréchet, José Sebastião e silva, Ruy Luís Gomes, José Ribeiro de Albuquerque, Augusto Sá da Costa.

Esta é a foto do encontro de matemática na FCUL e de que havia dúvida sobre quem era o segundo matemático a contar da direita.[1]



J. R. Albuquerque nos anos 80

“Tio Zé”, vários anos.

“Tia Lena”

SOBRE O AUTOR

Rui Ribeiro de Albuquerque é licenciado em Matemática e Mestre em Geometria e Topologia pela Universidade de Lisboa, Doutor em Matemática pela Universidade de Warwick (RU). Professor Auxiliar da Universidade de Évora. Investigador em Geometria Riemanniana e em Geometria Complexa e Simpléctica.

REFERÊNCIAS

[1] Marc Barbut, 2006, “Un Episode Insolite...”, , in “Historia de la Probabilidad y la Estadística III”. Pela Asociación de Historia de la Estadística y de la Probabilidad en España (AHEPE), editores Jesús Santos del Cerro, Marta García Secades, Delta Publicaciones Universitarias, S.L. 2006.

[2] Alessandra Mauro (org.), 2001, “A Língua Outra – Luciana Stegagno Picchio: uma Fotobiografia”, Instituto camões. *http://cvc.instituto-camoes.pt/component/docman/doc_download/17-a-lingua-outra-luciana-stegagno-picchio-uma-fotobiografia.html*

[3] E. Magenes, “Giuseppe Scorza-Dragoni”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Volume 172, n° 1, 1-3.

[4] “Congresso Internacional de Filosofia”, *S. T. Revista Portuguesa de Filosofia*, T. 3, Fasc. 2 (Apr. - Jun., 1947), pp. 186-188.

[5] J. Ribeiro de Albuquerque e Silva Ribeiro, 1976, “Teoremas da Economia Marxista”, col. Arma/Crítica revista da AEISE.

[6] J. Ribeiro de Albuquerque, 1937, “Geometria e Análise Teoria Geral das Curvas Algébricas Complementos de Cálculo Integral”, Lisboa. Cópia em *http://home.uevora.pt/~rpa/teoriageraldascurvasalgebricas.pdf*

[7] J. R. Albuquerque “Análise Matemática, Apontamentos baseados nas lições proferidas pelo [...] 1956/57”, Edição da AAISCEF-UTL.

[8] “Centenário do Nascimento de Bento de Jesus Caraça”, *http://www.cgtp.pt/bjc/testemunhos/ribeiro.htm*

[1] Em relação à célebre fotografia que recorda a passagem de Maurice Fréchet pela FCUL em Janeiro de 1942, sempre tive para mim que era José Ribeiro de Albuquerque o segundo a contar da direita e não Luís de Albuquerque, como inúmeras vezes se tem visto escrito. O penetrante erro foi agora duplamente esclarecido, começando pela nota do prof. Jorge Rezende, avisado pelo prof. José Vitória, em *http://ruyluisgomes.blogspot.com/2010/12/jose-ribeiro-de-albuquerque-e-luis-de.html*

Rui Rodrigues
Universidade Nova
de Lisboa
rapr@fct.unl.pt

O QUE É UMA **WAVELET?**

Investigadores de visão de computador, geofísicos, físicos, matemáticos e engenheiros electrotécnicos trabalhando em processamento de sinal criaram as diversas componentes de uma ferramenta que hoje é largamente utilizada no processamento de dados.

Muitas vezes é útil ter uma representação de uma função que saliente características que não se evidenciam quando conhecemos apenas o valor da função em cada um dos seus pontos.

Uma dessas características é o "peso" de uma dada frequência na função: pretende-se com isto saber "quanto a função oscila a uma dada frequência".

No que se segue, uma função será um dos dois objectos seguintes:

- Uma função real, $f(x)$, definida no intervalo $[0,T]$. Diremos que este é o objecto contínuo, embora a função considerada não seja necessariamente contínua.

- A versão discreta do objecto anterior será um vector de n números reais $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. Este vector poderá representar, por exemplo, os valores da função $f(x)$, nos pontos $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, do intervalo $[0,T]$. As funções consideradas serão objectos deste segundo tipo quando estivermos a trabalhar com dados reais: registos sísmicos, sinais biomédicos, sinais sonoros ...

Representaremos por $c(f,g)$ a *correlação* entre duas funções f e g. No caso discreto, com $f = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ e $g = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ tem-se

$$c(f,g) = \sum_{i=1}^{n} y_i w_i$$

e, no caso contínuo,

$$c(f,g) = \int_0^T f(x)g(x)\,dx.$$

Quando as duas funções estão normalizadas (média zero e variância 1), $c(f,g)$ pode ser considerada uma medida da semelhança da forma do gráfico das duas funções.

A *Análise de Fourier* mede o peso de uma frequência, θ, na função f, efectuando a correlação entre a função f e uma sinusóide (um seno ou coseno) de frequência θ. As funções f e a sinusóide considerada podem estar 'desfazadas' e isso afectará o valor da correlação obtida. Em vez de se procurar a sinusóide que está mais 'em fase' com f, basta calcular as correlações com o seno e o coseno correspondentes à frequência θ e tomar a raiz quadrada da soma dos quadrados destas correlações.

Por vezes estamos interessados em conhecer não apenas quanto uma função oscila a uma dada frequência, mas também em que partes do seu domínio ela oscila a essa frequência. Uma analogia que se costuma utilizar consiste em não estar apenas interessado em saber quantas vezes é tocada uma determinada nota musical, numa sinfonia, mas também saber em que **momentos** essa nota musical é ouvida, durante a sinfonia. É esta a motivação para o surgimento das *wavelets*.

No entanto, existe um princípio de incerteza: não é possível obter simultaneamente uma resolução absoluta no tempo (a nossa variável x) e na frequência. O produto das variâncias, de uma função, no tempo e na frequência, é sempre maior ou igual a uma constante estritamente positiva. Essa constante é a mesma para qualquer função, desde que normalizada a sua escala. Uma *wavelet* será uma função que terá a sua energia 'centrada' num dado instante e numa dada frequência, mas a sua energia vai estar dispersa por um intervalo de tempo e por um leque de frequências.

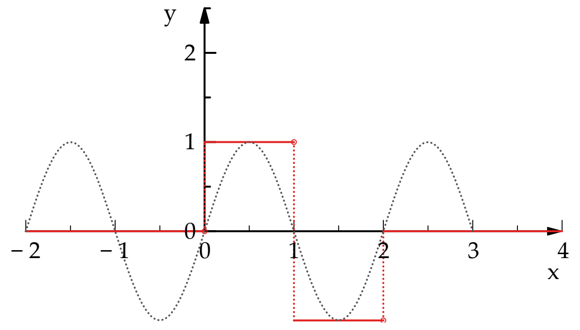


Figura 1: Sinusóide (cinzento) e a *wavelet* de Haar com a mesma frequência central (vermelho).

Efectuando a correlação de uma função $f(x)$ com a *wavelet*, $\psi(x)$, da figura, mediremos a presença da gama de frequências de ψ, na função f, na vizinhança de $x = 1$. Para medir a presença da mesma gama de frequências noutro ponto do domínio, $x = j$, usaremos uma translação de ψ, $\psi(x-j)$. A utilização da função $\psi(x/2^i)$, $i \in \mathbf{N}$ em vez de $\psi(x)$, permitirá detectar frequências da ordem da gama de frequências de ψ, dividas por 2^i. Assim a utilização de uma *wavelet* para a detecção de frequências está associada a um factor de escala, 2^i. Por esta razão quando se usam *wavelets* fala-se mais de *escalas* do que de frequências.

No que se segue efectuaremos a transformada *wavelet* de uma função. Usaremos, pela sua simplicidade, a *wavelet* de Haar, mas com outra *wavelet* o essencial não seria muito diferente.

Vamos identificar as nossas funções a um vector $(y_1, y_2, \cdots, y_8)$. A correspondentete *wavelet* de Haar é definida por um vector com todas as entradas iguais a zero, excepto duas consecutivas em que a primeira é 1 e a segunda -1.

Para efectuar a transformada *wavelet* necessitaremos, além da chamada *wavelet* 'mãe', da *função de escala* a ela associada. No caso da *wavelet* de Haar, a função de escala será representada por um vector com todas as entradas iguais a zero, excepto duas consecutivas iguais a 1. Como $8 = 2^3$ iremos considerar três escalas no nosso exemplo.

Para concretizar, seja $f_0 = (1, 1, 3, 4, -1, 2, 7, 0)$.

No primeiro passo, efectuaremos a correlação de f_0 com as *wavelets* $(1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1)$ e com as funções de escala $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$. O resultado será guardado num vector com a mesma dimensão: $f_1 = (0, -1, -3, 7, 2, 7, 1, 7)$. Os quatro primeiros coeficientes correspondem a diferenças de pares de elementos consecutivos e os últimos quatro correspondem a somas (médias, se fossem divididos por 2).

No segundo passo, alteraremos apenas os quatro últimos elementos do vector f_1. Eles representam o vector inicial f_1, depois de multiplicado por 2, a uma escala mais pequena, 1/2. O vector $(2, 7, 1, 7)$ será substituído pela correlação com as *wavelets* $(1, -1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, -1)$ e as funções de escala $(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 1)$. Desta forma obtemos o vector $f_2 = (0, -1, -3, 7, -5, -6, 9, 8)$.

Na escala 1/4 o vector inicial (depois de multiplicado por 4) é representado por $(9, 8)$. No terceiro passo, substituiremos estas duas entradas do vector f_2 pela sua correlação com a *wavelet* $(1, -1)$ e a função de escala $(1, 1)$, dando origem ao vector $f_3 = (0, -1, -3, 7, -5, -6, 1, 17)$. Reparemos que o último coeficiente, depois de dividido por 2^3, é a média do vector inicial f_0.

Todas as operações realizadas são reversíveis, pelo que podemos recuperar o vector inicial a partir da sua transformada *wavelet*.

A representação *wavelet* obtida no exemplo anterior tem o mesmo número de coeficientes da representação inicial: é uma representação minimal. De facto, a representação foi obtida a partir de uma família minimal de *wavelets*, uma família *ortogonal*. Este tipo de representação é usado, por exemplo, para compressão de dados: se não necessitássemos de todos os detalhes de f_0, poderíamos usar apenas os últimos quatro coeficientes de f_3 e com eles poderíamos reconstruir f_0 à escala 1/2.

Há situações em que é melhor utilizar uma representação redundante dos dados originais: é o caso se quisermos uma representação (quase) invariante por translação. Nesta situação utilizaremos uma família maior de *wavelets*, por exemplo, considerando todas as translações possíveis da *wavelet* original. Muitas vezes é isto que se faz quando se pretende localizar, num sinal, uma zona característica.

A quantidade de *wavelets* diferentes que existem está também associada às características que se pretende obter da representação *wavelet* e do tipo de funções (sinais) que se pretende representar. Se se pretender uma representação em que aos pontos de continuidade de uma função corresponda um número pequeno de coeficientes da transformada *wavelet*, de valor não desprezável, então a *wavelet* 'mãe' terá também de apresentar um certo grau de regularidade, o que não acontece com a *wavelet* de Haar.

ção, com um pequeno número de coeficientes não-nulos, para imagens que têm contornos ao longo de linhas regulares [1].

Existe uma larga bibliografia sobre este assunto, por isso faremos uma selecção, com base numa opção muito pessoal. Para uma apresentação global do assunto sugere-se [2], para uma introdução com maior ênfase nos sinais discretos, [3], e para uma apresentação feita por uma autora não matemática, realizada com base em entrevistas aos diversos matemáticos envolvidos no surgimento das *wavelets* [4].

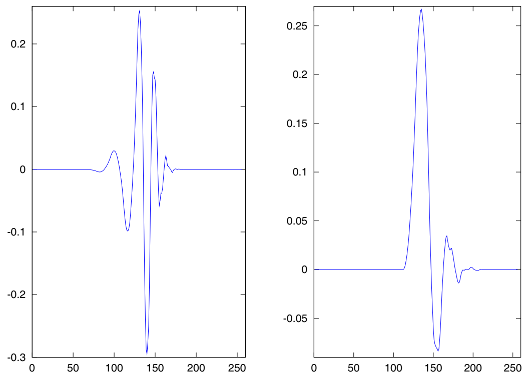


Figura 2: 'Wavelet mãe' Daubechies-10 (esq.)
e função de escala associada (dta.)

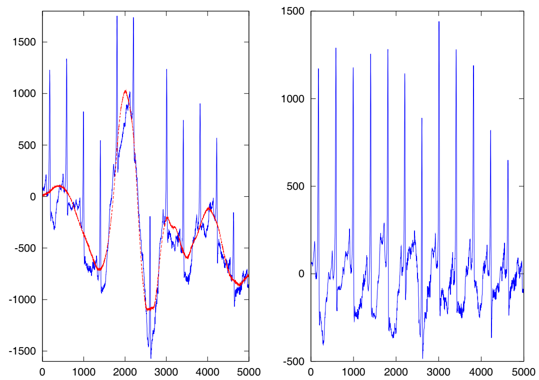


Figura 3: Esquerda, electrocardiograma com desvio da linha
de base; Direita, correcção do desvio da linha de base.

Em seguida apresentamos um exemplo de utilização das *wavelets* em que se pretende eliminar uma perturbação correspondente a baixas frequências. Esta perturbação é localizada no tempo, pelo que a Análise de Fourier clássica não poderia ajudar.

Na Figura 3, esquerda, vê-se um electrocardiograma com d*esvio da linha de base.* Trata-se de uma interferência na aquisição do sinal pretendido, o potencial eléctrico gerado no coração. Usando apenas as 6 últimas (de 16) escalas, obtemos as componentes de baixas frequências do sinal adquirido que constituem uma boa aproximação do desvio da linha de base (a vermelho).

Reconstruindo o sinal, depois de igualar a zero os coeficientes das 6 últimas escalas, conseguimos corrigir o desvio da linha de base (Figura 3, direita).

A utilização de *wavelets* não se limita a funções de uma variável. É vasto o conjunto de aplicações em dimensões maiores, o sistema de codificação de imagem JPEG2000 é disso um exemplo. Mas em dimensões maiores são necessárias outras famílias de funções, por exemplo, para obter uma boa aproxima-

REFERÊNCIAS

[1] E. Candès and D. Donoho. "New Tight Frames of Curvelets and Optimal Representations of Objects with Piecewise C2 Singularities". Comm. Pure Appl. Math., 57(2): págs. 219-266, 2004.

[2] Mallat, "A Wavelet Tour of Signal Processing The Sparse Way", Academic Press, 2009.

[3] Gilbert Strang and Truong Nguyen, "Wavelets and Filter Banks", Wellesley Cambridge Press.

[4] Barbara Burke Hubbard, "The World According to Wavelets: the Story of a Mathematical Technique in the Making", A. K. Peters, Wellesley. Massachusetts.

SOBRE O AUTOR

Rui Rodrigues é licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e doutorado em Matemática (equações diferenciais) pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. É docente do Departamento de Matemática da FCT/UNL desde 1984.

Líderes e Tomada de Decisão

Alberto A. Pinto[a] aapinto@fc.up.pt
Leandro Almeida[b] leandro@ie.uminho.pt
José Cruz[c] jcruz@psi.uminho.pt
Helena Ferreira[d] helenaisafer@gmail.com

Como é que os líderes influenciam os seus seguidores sob um ponto de vista de teoria de jogos?

1. INTRODUÇÃO

O objectivo principal da Teoria do Comportamento Planeado (ver Ajzen [1]) é entender e prever como é que os indivíduos transformam as suas intenções em comportamentos. Almeida, Cruz, Ferreira e Pinto [2] criaram um modelo de teoria de jogos, inspirado nos trabalhos de Cownley e Wooders [3], no qual são considerados dois tipos de características dos indivíduos, descritos como tipo pessoal e tipo observável. O tipo pessoal refere-se às características do indivíduo não observáveis pelos outros indivíduos e que influenciam a sua tomada de decisão. O tipo observável de um indivíduo refere-se às características do indivíduo observáveis pelos outros e que influenciam a tomada de decisão dos outros. Almeida, Cruz, Ferreira e Pinto [4] apresentaram um modelo de teoria de jogos para estudarem a influência dos líderes sobre os seus seguidores (ver Daya et al. [5] e Sternberg [6]). Aqui fazemos uma breve exposição deste modelo seguindo os trabalhos de Almeida, Cruz, Ferreira e Pinto [4, 2].

2. MODELO

Almeida et al. [2] construíram um modelo de teoria de jogos que passamos a descrever. Denotemos por S o conjunto de todos os indivíduos. Para cada indivíduo $s \in S$, podemos distinguir dois tipos de características: o tipo pessoal e o tipo observável. A cada indivíduo $s \in S$ associamos o seu *tipo pessoal* $\mathcal{T}(s) = t \in T$ que determina as características do indivíduo não observáveis pelos outros indivíduos e que influenciam a sua tomada de decisão. A cada indivíduo $s \in S$

[a] Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto; LIAAD-INESC Porto LA, Universidade do Porto // [b] Instituto de Educação, Universidade do Minho // [c] Escola de Psicologia, Universidade do Minho // [d] LIAAD-INESC Porto LA, Universidade do Porto.

associamos o seu *tipo observável* $\mathcal{C}(s) = c \in C$ que determina as características do indivíduo observáveis pelos outros e que influenciam a tomada de decisão dos outros. Na Teoria do Comportamento Planeado, as variáveis intrapessoais, atitude e auto-eficácia estão associadas ao tipo pessoal e as variáveis interpessoais, socioculturais e normas sociais estão associadas ao tipo observável (ver Almeida et al. [2]).

Os indivíduos definem uma *estratégia* $\mathcal{G} : S \to G$, i.e cada indivíduo $s \in S$ escolhe o grupo/comportamento $\mathcal{G}(s)$. Cada estratégia $\mathcal{G}$ corresponde a uma intenção na Teoria do Comportamento Planeado. Dado um grupo/comportamento, $\mathcal{G} : S \to G$, o *vector observável* $m(\mathcal{G}) \in (\mathbb{N}^C)^G$ é o vector cujas componentes $m_c^g = m_c^g(\mathcal{G})$ indicam o número de indivíduos em g com tipo observável $c \in C$, i.e.

$$m_c^g = \# \{ s \in S : \mathcal{G}(s) = g \wedge \mathcal{C}(s) = c \} .$$

Denotemos por $s_{t,c}$ o indivíduo s com tipo pessoal t e tipo observável c. O bem-estar, ou a satisfação pessoal, que um indivíduo tem ao pertencer a um grupo/comportamento $g \in G$, com *vector observável* $m = m(\mathcal{G})$, é determinado pela sua função de utilidade $u_{t,c} : G \times (\mathbb{N}^C)^G \to \mathbb{R}$ definida por

$$u_{t,c}(g, m) = V_{t,c}^g + f_{t,c}^g(m),$$

em que (i) $V_{t,c}^g$ mede o grau de satisfação de cada indivíduo $s_{t,c}$ por escolher o grupo/comportamento $g \in G$, (ii) $f_{t,c}^g(m)$ mede o grau de satisfação de cada indivíduo $s_{t,c}$ tendo em conta a sua interacção com os elementos $m_{c'}^g$, de tipo observável $c' \in C$, que escolhem o mesmo grupo/comportamento $g \in G$.

A estratégia $\mathcal{G}^* : S \to G$ do grupo/comportamento é um *equilíbrio de Nash* se, considerando as escolhas de todos os indivíduos, nenhum indivíduo se sente motivado para mudar de grupo/comportamento, i.e. a sua utilidade não aumenta com a mudança do seu grupo/comportamento (ver Pinto [7]).

O dicionário entre Teoria de Jogos e Teoria do Comportamento Planeado está sumarizado na figura 1 (ver Almeida et al. [2]).

No que se segue, para o indivíduo $s_{t,c}$ que escolhe o grupo/comportamento $g \in G$, assumimos, por simplicidade, que $f_{t,c}^g : (\mathbb{N}^C)^G \to \mathbb{R}$ é afim, i.e.

$$f_{t,c}^g(m) = -A_{t,c}^{g,c} + \sum_{c' \in \mathscr{C}} A_{t,c}^{g,c'} m_{c'}^g, \qquad (1)$$

em que $A_{t,c}^{g,c'}$ avalia a satisfação que cada indivíduo $s_{t,c}$ tem na presença de um indivíduo com tipo observável $c' \in g$. Notamos que $-A_{t,c}^{g,c}$ aparece na fórmula (1) porque o indivíduo $s_{t,c}$ não está incluído na contagem do número de indivíduos $s_{t,c}$ com o mesmo tipo observável que ele e que, também, escolhem o mesmo grupo/comportamento g.

Denotemos por $S_{(t,c)}$ o grupo de todos os indivíduos com o mesmo tipo pessoal $t \in T$ e o mesmo tipo observável $c \in C$ e denotemos por $n(t,c)$ o número de indivíduos em $S_{(t,c)}$.

Observação 1 *Uma forma alternativa para interpretar $S_{(t,c)}$ é considerar que $n(t,c)$ é o número de vezes que um mesmo indivíduo $s_{t,c}$ tem de tomar uma acção. Neste caso, $A_{t,c}^{g,c} > 0$ pode ser interpretado como a recompensa individual positiva obtida pela repetição da escolha do mesmo grupo/comportamento $g \in G$, ou seja, o indivíduo $s_{t,c}$ não sente um efeito de saturação por repetir a mesma escolha. Por outro lado, $A_{t,c}^{g,c} < 0$ pode ser interpretado como a recompensa individual negativa obtida pela repetição da escolha do mesmo grupo/comportamento $g \in G$, ou seja, o indivíduo $s_{t,c}$ sente saturação, tédio ou frustração por repetir a mesma escolha.*

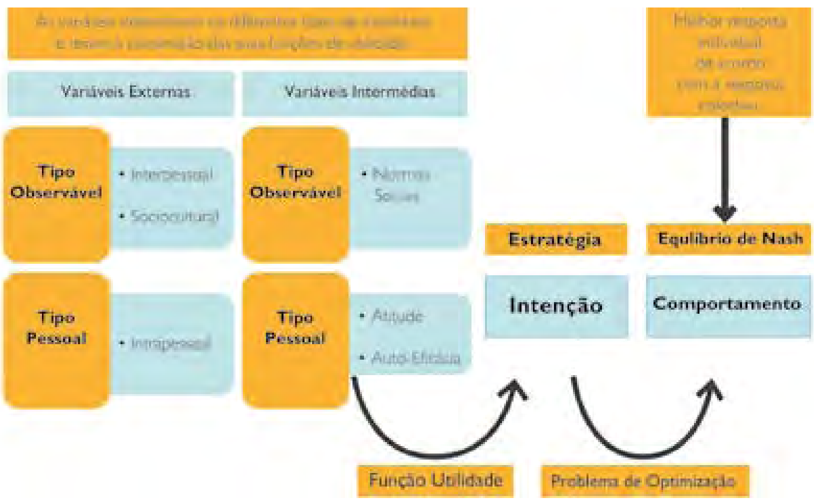


Figura 1. Modelo Teórico/Teoria do Comportamento Planeado.

3. LÍDERES

Um líder é um indivíduo que pode influenciar os outros na escolha de um determinado grupo/comportamento. Consideramos que o líder escolhe o seu grupo/comportamento $g \in G$ antes dos outros indivíduos e, por isso, os outros indivíduos já sabem a decisão do líder antes de fazerem a sua própria escolha. Vamos estudar de que forma o líder s_{t^l,c^l} pode influenciar os seus seguidores s_{t^f,c^f} a escolherem o mesmo grupo/comportamento g que ele. Caracterizamos o líder com os seguintes parâmetros (α, R, V, L), que passsamos a descrever:

- *Líderes altruístas e individualistas*. O líder s_{t^l,c^l} valoriza V o grupo/comportamento g e tem a capacidade de doar uma parte $(1-R)V$ aos seus seguidores. Portanto, o parâmetro R determina a fracção $(1-R)V$ do bem V doado pelo líder aos seguidores. Após a doação, a nova valorização do líder s_{t^l,c^l} para o grupo/comportamento g é $V^g_{t^l,c^l} = RV$. O líder *altruísta* é o líder que provoca uma valorização do grupo/comportamento g para os seguidores que o escolham, i.e. $0 < R < 1$. O líder individualista é o líder que provoca uma desvalorização, ou dívida, do grupo/comportamento g para os seguidores que o escolham, i.e. $R > 1$.

- *Seguidores criadores e consumidores de riqueza*. Definimos α como o parâmetro de consumo ou criação de riqueza pelos seguidores na valorização do bem distribuído pelo líder. Portanto, a valorização dos seguidores s_{t^f,c^f} é dada por

$$V^g_{t^f,c^f} = \bar{V}^g_{t^f,c^f} + \frac{\alpha(1-R)}{n(t^f,c^f)}V,$$

em que $\bar{V}^g_{t^f,c^f}$ corresponde à valorização do grupo g pelos seguidores s_{t^f,c^f} anterior à dádiva do líder. Quando $0 < R < 1$, se $\alpha > 1$, há uma criação de riqueza pelos seguidores s_{t^f,c^f} a partir da riqueza que o líder distribui; mas, se $0 < \alpha < 1$, há um consumo de riqueza pelos seguidores s_{t^f,c^f} da riqueza que o líder distribui. Quando $R > 1$, se $0 < \alpha < 1$, há uma diminuição da dívida (criação de riqueza) pelos seguidores s_{t^f,c^f} a partir da dívida que o líder distribui, mas, se $\alpha > 1$, há um aumento (consumo de riqueza) da dívida pelos seguidores s_{t^f,c^f} a partir da dívida que o líder distribui. Os seguidores são *criadores de riqueza* quando $0 < R < 1$ e $\alpha > 1$ ou quando $R > 1$ e $0 < \alpha < 1$. Os seguidores são *consumidores de riqueza* quando $0 < R < 1$ e $0 < \alpha < 1$ ou quando $R > 1$ e $\alpha > 1$.

- *Líderes influentes e persuasivos*. A influência ou persuasão do líder s_{t^l,c^l} nos seguidores s_{t^f,c^f} é medida pelo parâmetro L em que

$$A^{g,c^l}_{t^f,c^f} = LA^{g,c^f}_{t^f,c^f}$$

corresponde à satisfação que os seguidores têm quando decidem escolher o mesmo grupo/comportamento que o líder. De forma equivalente, podemos considerar que $A^{g,c^l}_{t^f,c^f} = A^{g,c^f}_{t^f,c^f}$ e que os seguidores têm uma nova valorização $V^{g'}_{t^f,c^f} = V^{g'}_{t^f,c^f} + (1-L)A^{g,c^f}_{t^f,c^f}$ ao escolherem o grupo/comportamento $g' \in G \setminus \{g\}$ sob a influência do líder. Quando $A^{g,c^f}_{t^f,c^f} > 0$, se $L < 1$, os seguidores têm uma menor satisfação em estarem com o líder do que com os seguidores ou, de forma equivalente, têm uma maior valorização ao escolherem um grupo/comportamento diferente do do líder; mas, se $L > 1$, os seguidores têm uma maior satisfação em estar com o líder do que com os seguidores, ou de forma equivalente, têm uma menor valorização ao escolherem um grupo/comportamento diferente do do líder. Quando $A^{g,c^f}_{t^f,c^f} < 0$, se $L > 1$, os seguidores têm uma menor satisfação em estarem com o líder do que com os seguidores ou, de forma equivalente, têm uma maior valorização ao escolherem um grupo/comportamento diferente do do líder; mas, se $L < 1$, os seguidores têm uma maior satisfação em estar com o líder do que com os seguidores, ou de forma equivalente, têm uma menor valorização ao escolherem um grupo/comportamento diferente do do líder. O líder é influente ou persuasivo quando $A^{g,c^f}_{t^f,c^f} > 0$ e $L > 1$ ou quando $A^{g,c^f}_{t^f,c^f} < 0$ e $L < 1$.

Definimos o valor dos *piores vizinhos* $P_g(t^f,c^f)$ do indivíduo s_{t^f,c^f} na escolha do grupo/comportamento g por

$$P_g(t^f,c^f) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{c' \in C,\, A^{g,c'}_{t^f,c^f} < 0} A^{g,c'}_{t^f,c^f} \sum_{t' \in T \setminus \{t^l\}} n(t',c'), & \text{se} \quad A^{g,c^f}_{t^f,c^f} \geq 0 \\ \displaystyle -A^{g,c^f}_{t^f,c^f} + \sum_{c' \in C,\, A^{g,c'}_{t^f,c^f} < 0} A^{g,c'}_{t^f,c^f} \sum_{t' \in T \setminus \{t^l\}} n(t',c'), & \text{se} \quad A^{g,c^f}_{t^f,c^f} < 0. \end{cases}$$

Definimos o valor dos *melhores vizinhos* $M_{g'}(t^f,c^f)$ do indivíduo s_{t^f,c^f} na escolha do grupo/comportamento g' por

$$M_{g'}(t^f,c^f) = \begin{cases} \displaystyle -A^{g',c^f}_{t^f,c^f} + \sum_{c' \in C,\, A^{g',c'}_{t^f,c^f} > 0} A^{g',c'}_{t^f,c^f} \sum_{t' \in T \setminus \{t^l\}} n(t',c'), & \text{se} \quad A^{g',c^f}_{t^f,c^f} \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{c' \in C,\, A^{g',c'}_{t^f,c^f} > 0} A^{g',c'}_{t^f,c^f} \sum_{t' \in T \setminus \{t^l\}} n(t',c'), & \text{se} \quad A^{g',c^f}_{t^f,c^f} < 0. \end{cases}$$

Teorema 1 *Considere-se que o líder s_{t^l,c^l} escolhe o grupo/comportamento $g \in G$. Se, para todo $g' \in G \setminus \{g\}$,*

$$\frac{\alpha(1-R)}{n(t^f,c^f)} V + LA^{g,c^f}_{t^f,c^f} > V^{g'}_{t^f,c^f} - \bar{V}^{g}_{t^f,c^f} + M_{g'}(t^f,c^f) - P_g(t^f,c^f) \qquad (02)$$

então $\mathcal{G}^*(s_{t^f,c^f}) = g$, para todo equílibrio de Nash $\mathcal{G}^*$.

A desigualdade (2) traduz uma condição suficiente no valor da doação $(1-R)V$ e na influência ou persuasão L do líder e no consumo ou na criação de riqueza α dos seguidores para que os seguidores escolham o mesmo grupo/comportamento do líder. Conclui-se, a partir da desigualdade (2), que o líder individualista poderá ter de ser mais persuasivo do que o líder altruísta para conseguir convencer os seguidores a escolherem o mesmo grupo/comportamento do líder.

Demonstração 1 *Suponhamos, por redução ao absurdo, que $\mathcal{G}^*$ é um equílibrio de Nash no qual, pelo menos, um dos seguidores s_{t^f,c^f} escolhe um grupo/comportamento $g' = \mathcal{G}^*(s_{t^f,c^f}) \in G \setminus \{g\}$. Por construção do valor dos melhores vizinhos $M_{g'}(t^f,c^f)$, a sua utilidade é limitada superiormente por*

$$u_{t^f,c^f}(g',m) \leq V^{g'}_{t^f,c^f} + M_{g'}(t^f,c^f) \; .$$

Se esse seguidor s_{t^f,c^f} alterar a sua escolha para o grupo/comportamento g, por construção do valor dos piores vizinhos $P_g(t^f,c^f)$, a sua utilidade é limitada inferiormente por

$$u_{t^f,c^f}(g,m) \geq \bar{V}^{g}_{t^f,c^f} + P_g(t^f,c^f) + \frac{\alpha(1-R)}{n(t^f,c^f)} V + LA^{g,c^f}_{t^f,c^f}.$$

Pela desigualdade (2), obtemos que

$$u_{t^f,c^f}(g,m) > u_{t^f,c^f}(g',m) \; .$$

Logo, $\mathcal{G}^*$ não é um equílibrio de Nash, o que é uma contradição.

4. CONCLUSÃO

Construímos um dicionário entre a Teoria de Jogos e a Teoria do Comportamento Planeado e propusemos o equilíbrio de Nash como um, de muitos, mecanismos possíveis de transformar intenções individuais em decisões. Estudámos de que forma as características do líder e dos seus seguidores, neste modelo de teoria de jogos, podem influenciar as decisões dos seguidores.

AGRADECIMENTOS

Versões anteriores deste trabalho foram apresentadas no International Congress of Mathematicians ICM 2010, the Second Brazilian Workshop of the Game Theory Society in honor of John Nash BWGT 2010, EURO 2010, ICDEA 2009 e LAMES 2008. Este trabalho foi destacado no artigo [8], após ter sido apresentado no ICM 2010. Agradecemos à LIAAD-INESC Porto LA, Fundação Calouste Gulbenkian, PRODYN-ESF, POCTI e POSI da FCT e Ministério da Ciência e da Tecnologia, e Programa de Financiamento Plurianual da FCT ao LIAAD-INESC Porto LA, Universidade do Minho e Universidade do Porto pelo seu apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

[1] Ajzen, I., "Perceived Behavioral Control, Self-efficacy, Locus of Control, and the Theory of Planned Behavior". *Journal of Applied Social Psychology* 32 665-683 (2002).

[2] Almeida, L., Cruz, J., Ferreira, H. e Pinto, A. A., "Bayesian-Nash Equilibria in Theory of Planned Behavior". *Journal of Difference Equations and Applications* (aceite).

[3] Conley, J. and Wooders, M., "Tiebout Economies with Differential Genetic Types and Endogenously Chosen Crowding Characteristics". *Journal of Economic Theory* 98 2 261-294 (2001)

[4] Almeida, L., Cruz, J., Ferreira, H. e Pinto, A. A., "Leadership Model". *Dynamics, Games and Science I*. Eds: M. Peixoto, A. A. Pinto and D. Rand. Proceedings in Mathematics series, Springer-Verlag 55-62 (2011).

[5] Daya, D., Gronnb, P. e Salas, E., "Leadership Capacity in Teams". *The Leadership Quarterly* 15 857-880 (2004).

[6] Sternberg, R., "WICS: A Model of Leadership". *The Psychologist-Manager Journal* 8 1 29-43 (2005).

[7] Pinto, A. A., "Duopoly Models and Uncertainty". Interdisciplinary Applied Mathematics Series. Springer-Verlag (aceite).

[8] Mudur, G. S., "Maths for Movies, Medicine & Markets". *The Telegraph Calcutta*, India (2010).

Ciclo de Colóquios

A Matemática das Coisas

Entrada Gratuita

2011 | Auditório do Pavilhão do Conhecimento – Ciência Viva
Parque das Nações
Sábados, 15h30

5 Março
A Matemática e a Democracia
André Freire, Centro de Investigação e Estudos de Sociologia do ISCTE, Universidade de Lisboa
Miguel Gouveia, Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais da Universidade Católica Portuguesa

2 Abril
A Matemática e a Pintura
Isabel Sabino, Faculdade de Belas-Artes da Universidade de Lisboa
Lucía Fernández, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa e CMAT-UM

7 Maio
A Matemática e as Redes Sociais
Patrícia Dias da Silva, Instituto de Ciências Sociais da Universidade de Lisboa
José Fernando Mendes, Departamento de Física da Universidade de Aveiro

4 Junho
A Matemática e as Finanças Pessoais
Pedro Catarino, DECO
Paulo Mota, Faculdade de Economia da Universidade do Porto

Tradução simultânea em Língua Gestual Portuguesa
Inscrição obrigatória com uma semana de antecedência
para: acesso@cienciaviva.pt

www.pavconhecimento.pt

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

Ana Paula Santana e João Filipe Queiró
(488 páginas; €18,17)

Um dia alguém disse que quando um livro de Matemática tem no título «Introdução...», há que ter muito cuidado: geralmente são os melhores e também os mais completos. Este livro de Ana Paula Santana e João Filipe Queiró, editado pela Gradiva como 10º volume da colecção Trajectos Ciência, não foge à regra. Aliás, se dúvidas houvesse bastaria ler o prefácio para as dissipar. Diz assim:

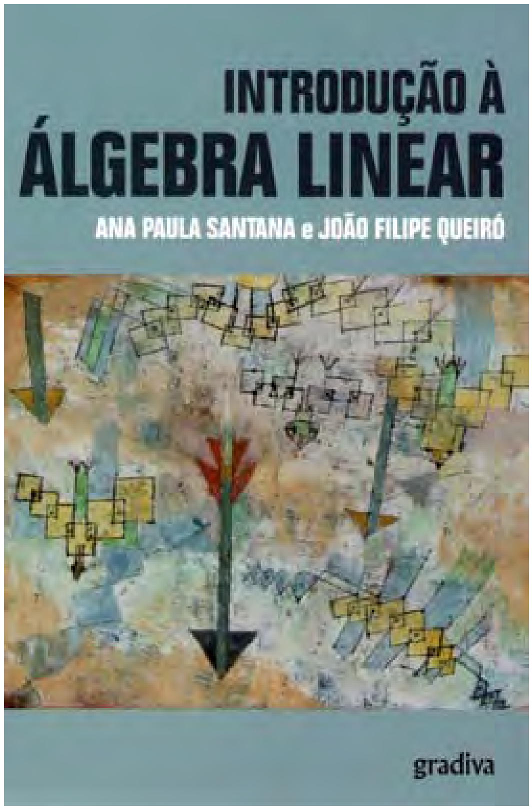
«*... em muitos cursos de Engenharia, Economia e Ciências apenas se dedica um semestre à Álgebra Linear, o que levanta um problema de selecção de matérias e de escolha na ordem da exposição.*

A nossa opção foi abordar inicialmente a parte mais concreta e computacional da Álgebra Linear. Em seguida, começamos o estudo da "geometria linear", mas ainda apenas no contexto particular de $\mathbb{R}^n$. Em ambos os capítulos as demonstrações dos teoremas são levadas a cabo tanto quanto possível usando apenas a estrutura linear de $\mathbb{R}^n$, evitando utilizar coordenadas.

...

Antes dos espaços vectoriais estudamos a geometria analítica do 1º grau. Logo a seguir, abordamos o importante tema dos vectores próprios e valores próprios de matrizes quadradas, referindo algumas aplicações interessantes, incluindo a clássica geometria analítica do 2º grau, mas também outras mais modernas, como a decomposição dos valores singulares, a compressão de imagens e o funcionamento do Google. Faz-se o estudo completo da forma normal de Jordan, incluindo a sua unicidade.

Os capítulos finais são dedicados à Álgebra Linear abstracta, estudando-se e classificando-se os espaços vectoriais gerais sobre corpos arbitrários (incluindo os espaços de dimensão infinita), as transformações lineares entre eles, e os espaços com produto interno.»



Está tudo e com todo o rigor, pois:

«*O livro caracteriza-se também por todos os resultados fundamentais serem demonstrados (exceptuando-se três, o teorema Fundamental da Álgebra, o Lema de Zorn e o Teorema de Schröder-Bernstein, que não são parte da Álgebra Linear).*»

Além disso, o livro contém inúmeros exemplos e exercícios propostos, porém :

«*As várias secções terminam com exercícios, mas optámos por quase não incluir exercícios numéricos. Há no texto muitos exemplos práticos ilustrativos completamente tratados, mas os exercícios orientam-se em geral para o estudo de factos adicionais, por vezes necessários mais tarde no próprio texto, outras vezes abrindo perspectivas para desenvolvimentos e explorações.*»

No entanto, aqueles que necessitarem de exercícios com um carácter mais numérico, sugestões para a resolução dos exercícios, as suas soluções ou ainda de complementos sobre o texto, podem recorrer a um endereço electrónico onde todos estes aspectos se encontram ao dispor.

Tal como mencionado no prefácio, o livro serve a todos, na verdade:

> «*As matérias estudadas num curso introdutório de Álgebra Linear são razoavelmente* standard. *Uma característica deste livro é a apresentação sistemática dessas matérias, mas de forma modular, de modo a ser possível conceber vários cursos com ele.*
>
> *Em particular, uma disciplina semestral de Álgebra Linear que não tenha como objectivo principal o estudo dos espaços vectoriais pode ser construída a partir dos capítulos 1 a 7. Pensando nesse cenário, incluímos nos capítulos 4 e 5 uma breve referência aos espaços abstractos e aos produtos internos abstractos. Uma disciplina semestral em que se deseje contemplar esses espaços de forma profunda e completa pode tratar os capítulos 1 a 3 e depois passar directamente para o capítulo 8, com referências ocasionais a temas tratados nos capítulos anteriores.*
>
> *São possíveis outras configurações e outros usos do texto, inclusive para disciplinas mais avançadas ou como apoio a disciplinas de Análise Numérica ou Álgebra Linear Numérica.*»

De facto, um bom aluno de outra disciplina que, numa primeira abordagem, esteja apenas interessado nos resultados poderá, sem dificuldade, ler o texto sem atender às demonstrações, estudar os exemplos e, mais tarde, se assim o entender, deter-se em todos os detalhes matemáticos.

Para o leitor ficar com uma ideia mais concreta do seu conteúdo, listamos os títulos dos capítulos:

0 Os números complexos
1 Matrizes
2 Sistemas de equações lineares
3 Determinantes
4 O espaço $\mathbb{R}^n$, subespaços, dimensão
5 Ângulos e distâncias em $\mathbb{R}^n$
6 Planos em $\mathbb{R}^n$
7 Valores próprios e vectores próprios de matrizes
8 Espaços vectoriais
9 Transformações lineares
10 Espaços vectoriais com produto interno
11 Apêndices

Nos Apêndices temos: História dos números complexos; Permutações; Teorema de Laplace; Teorema de Perron; Cardinais e, por fim, uma introdução a alguns comandos do Matlab.

O livro termina com uma completa Bibliografia, um índice de símbolos e um índice alfabético.

Em resumo: um excelente livro. Completo, preciso, conciso e que ficará, cremos, como uma referência na área, por muitos anos.

Luís Trabucho de Campos
FCT/UNL

TREZE VIAGENS PELO MUNDO DA MATEMÁTICA

Carlos Correia de Sá e Jorge Rocha (Editores)
(U. Porto Editorial; 566 páginas)

A expressão "ficar a meio do caminho" está habitualmente conotada com alguma insatisfação, como se o objectivo final de uma jornada ficasse por cumprir. Mas aqui, vamos utilizá-la com outro sentido e, por isso, não deixa nenhum amargo de boca dizer que *13 Viagens pelo Mundo da Matemática* fica a meio do caminho entre um livro de divulgação e um volume para especialistas ou candidatos a especialistas. Simplificando muito a abordagem, digamos que o livro alberga mais fórmulas e teoremas do que o leitor comum, pouco habituado à notação e ao jargão matemáticos, costuma tolerar, não estando, contudo, elaborado num tom demasiado hermético, nem caindo na ratoeira de afunilar os temas para lá do que seria razoável numa publicação deste género. Esta aparente indefinição poderia ser um defeito e um estorvo à clareza se os editores pretendessem criar um livro para todos ou, em alternativa, encaminhá-lo na direcção de uma ou duas populações de investigadores. Como a intenção, sublinhada na introdução de Carlos Sá e Jorge Rocha, foi precisamente a de preencher esse espaço intermédio, *13 Viagens pelo Mundo da Matemática* nunca sofre do mal de querer ser um livro que não é. E tem outras virtudes. A primeira das quais passa, sem dúvida, pela escolha dos temas. A opção de misturar detalhes importantes de tópicos muito gerais (como a Teoria dos Números, a Lógica, a Geometria, a Convergência de Séries ou a Teoria de Grafos) com exemplos de aplicações relevantes (que incluem a noção de perspectiva na pintura renascentista e a criptografia), juntando pelo meio algumas curiosidades (onde fica o centro de Portugal? quantos pontos existem numa linha recta? de quantas cores precisamos para colorir um mapa?), permite que o leitor mais exigente não fique refém de uma superficialidade pouco estimulante, piscando simultaneamente o olho a quem pretenda seguir estas viagens com alguma leveza ou não possua os conhecimentos imprescindíveis para perceber todos os pormenores, sobretudo os mais exigentes do ponto de vista científico. Será natural que o leitor com uma formação menos robusta em matemática tropece nalguns problemas técnicos ao longo dos diversos capítulos, mas (e esta é também uma boa lição deste livro) não há razões para desânimo pois, tantas vezes, o aparecimento de dificuldades inesperadas acaba por contribuir, logo em seguida, para tornar mais fácil a vida das pessoas. Quando, no intervalo do almoço, antes de atacarmos o arroz de pato, preparamos as férias de Verão e pagamos, *online*, um quarto em Istambul com o número do cartão de crédito que trazemos na carteira, estamos implicitamente a confiar na matemática que protege os nossos dados da cobiça de piratas e gatunos. Na verdade, a confidencialidade da transacção pode ser garantida porque é provável que um processo de codificação semelhante ao RSA (criado em 1978) esteja em funcionamento, e "o Sistema RSA baseia a sua segurança na dificuldade em factorizar números com um certo tamanho, quando comparada com a relativa facilidade em gerar números primos da mesma ordem de grandeza" (A. Machiavelo, p. 59). A percepção da dificuldade e a identificação de formas menos agrestes de chegar a bom porto são, historicamente, duas alavancas complementares para o sucesso da nossa civilização, como aliás se percebe nesta passagem: "as relações entre medidas de amplitude de ângulos e medidas de comprimento de segmentos serão instrumentos essenciais para a determinação de distâncias, em particular para a cartografia e a medição de terrenos, uma vez que a medição directa de ângulos é tarefa muito mais facilmente exequível do que a medição directa de distâncias". Esta última citação faz parte de um fragmento do capítulo "Geometria: da intuição ao rigor", talvez o texto mais exigente desta colectânea, pois o autor preocupa-se essencialmente com problemas relacionados com os fundamentos da Geometria, a montante daqueles que costumam surgir nas salas de aula. No entanto, António Bivar desmonta, com cuidado e talento, cada um desses problemas, pelo que vale a pena não saltar este capítulo – um dos mais bem escritos do livro (embora algumas longas notas de rodapé pudessem ter sido incluídas no corpo do texto) – para perceber como determinados conceitos empíricos motivaram o aparecimento dos objectos e das relações básicas da Geometria, dando forma, primeiro, à axiomática de Euclides e, mais tarde, à de Tarski.

A frequente presença de exemplos e figuras (se espera um bloco uniforme de texto, desengane-se; trata-se de um livro bem e abundantemente ilustrado), coloca a intuição do leitor sob uma atenção especial, sendo esta espicaçada sempre que necessário, apesar de aqui e ali surgirem alertas para as armadilhas do tipo mais comum de intuição que, segundo Maria Pires de Carvalho, "naturalmente se alimenta de cenários finitos" e o infinito é, como se costuma dizer, outra loiça. Alguns dos autores, para além do imprescindível conteúdo matemático, preocupam-se com a inclusão de actividades dirigidas a alunos e curiosos. Quem se interessa por novas tecnologias (em rigor, cada vez menos novas) gostará de saber que Samuel Lopes, no capítulo "Espelhos meus", inventa algumas boas receitas para trabalhar certos problemas geométricos através da mediação gráfica do programa Geogebra.

Se é verdade que o livro apresenta quase sempre uma grande qualidade na forma como ilumina os assuntos, também não será mentira que muitos desses assuntos são objecto de vasta literatura pelo mundo fora. Assim, merecerá provavelmente destaque a originalidade do capítulo que António Guedes de Oliveira escreveu sobre decomposições perfeitas de rectângulos (decomposições em quadrados distintos), introduzindo na resolução do problema, de forma elegante e engenhosa, o uso de poliedros. Ainda que o livro exiba uma louvável diversidade de estilos, julgamos que haveria algo a ganhar com um pouco mais de coerência na estrutura interna dos capítulos. Percebe-se um acentuado contraste entre a forma livre de alguns textos e a arrumação mais convencional de outros, que separam as definições e os teoremas da restante prosa. Ao contrário de grande parte das publicações com origem nas Universidades portuguesas, *13 Viagens pelo Mundo da Matemática* tem uma paginação cuidada (de José Carlos Santos), o que facilita a leitura, mesmo nas partes mais densamente povoadas por notação matemática. A ideia de incluir bibliografias comentadas em vez de apenas listas de títulos parece-nos muito adequada ao âmbito desta edição. Treze, afinal, é número da sorte. Mas só para quem ler este livro (e é o que deve fazer sem temor nem demora).

Daniel Pinto
FCT/UC

FINAL DAS **OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA** EM BRAGA

A final das Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM) realiza-se entre os dias 7 e 11 de Abril, na Escola Secundária de Carlos Amarante, em Braga. Esta edição das OPM reúne o maior número de participantes na sua história (cerca de 42 mil estudantes), um aumento que reflecte a introdução de novas categorias na competição. Além das Mini Olimpíadas, criadas para os alunos dos 3º e 4º anos, surgiram as Pré-Olimpíadas, destinadas aos alunos do 5º ano, e a Categoria Júnior, para os alunos dos 6º e 7º anos. Mantiveram-se as Categorias A e B para os estudantes dos 8º e 9º anos e para os dos 10º, 11º e 12º, respectivamente. Na final em Braga participarão os estudantes que obtiveram os dez primeiros lugares na sua categoria e região (Norte, Centro e Sul).

PORTUGAL RECEBE **PRIMEIRAS OLIMPÍADAS DA LUSOFONIA** EM JULHO

Está a aproximar-se a primeira edição das Olimpíadas de Matemática da Lusofonia (OML), que se realizaará entre 23 de Julho e 1 de Agosto, em Portugal. A par da competição decorrerá a Semana Olímpica da Lusofonia, com cursos e conferências. O evento pretende unir estudantes dos países lusófonos através da matemática, incentivar o desenvolvimento da disciplina nestes países, aprofundar a sua cooperação nesta área e apoiar a criação de sociedades científicas.

ESTREIA DAS **MINI OLIMPÍADAS** EM MAIO

A estreia das Mini Olimpíadas de Matemática está marcada para o mês de Maio. As inscrições terminam no dia 30 de Abril e podem ser feitas através do endereço *http://mopm.mat.uc.pt/MOPM/*. A competição destina-se aos alunos dos 3º e 4º anos do Ensino Básico e será constituída por uma prova única realizada nas escolas participantes.

CLUBE DE MATEMÁTICA CONQUISTA CIBERNAUTAS

O Clube de Matemática da SPM regressou em força. Depois de algum tempo de inactividade, o Clube voltou no início deste ano, em *www.clube.spm.pt*, com coordenação de Carlos Marinho e recheado de novidades. Actualizado diariamente, este espaço tem recebido um elevado número de visitas e despertado a atenção dos meios de comunicação social, que o dão como um bom exemplo de aproximação entre o grande público e a matemática. Artigos e entrevistas, histórias, passatempos e prémios são os ingredientes deste *site*, em que é possível encontrar não só trabalho mas também diversão. O Clube de Matemática nasceu em 2007, com o objectivo de promover o intercâmbio entre clubes de matemática já existentes e incentivar a formação de novos clubes, divulgar livros, exposições, concursos e actividades matemáticas. A sua criação esteve ainda integrada nas comemorações do centenário do matemático António Aniceto Monteiro, um grande incentivador dos clubes de matemática e divulgador desta disciplina.

SÍLVIA BARBEIRO PREMIADA COM MEDALHA DE HONRA L'ORÉAL PORTUGAL

Sílvia Barbeiro, professora na Universidade de Coimbra e membro da direcção da Delegação Centro da SPM, foi galardoada com a Medalha de Honra L'Oréal Portugal para as Mulheres na Ciência. A medalha, atribuída anualmente a jovens cientistas que façam investigação em Portugal, premiou a investigadora pela sua contribuição para o avanço da medicina. Com o seu trabalho, Sílvia Barbeiro pretende explicar, utilizando equações, o que acontece ao colocar-se um implante dentário. Ou seja, através das equações será possível perceber de que forma se comportam as células no processo de produção do osso. "O objectivo é optimizar os implantes dentários", disse a matemática, que integra também a Comissão de Problemas das Olimpíadas Portuguesas de Matemática, em entrevista ao jornal Público. Mas o seu estudo pode também ter repercussões no tratamento da osteoporose. A Medalha de Honra L'Oréal Portugal para as Mulheres na Ciência é atribuída desde 2004 e conta com o apoio da Fundação Nacional da UNESCO e da Fundação para a Ciência e Tecnologia. Nesta edição, foram premiadas três investigadoras portuguesas, cujo trabalho está a ter um impacto positivo no avanço da medicina.

TARDES DE MATEMÁTICA DE NORTE A SUL

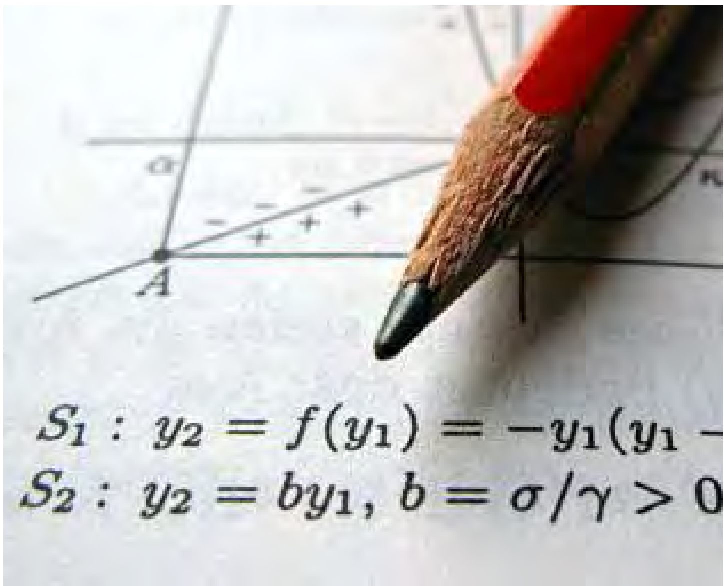
Lisboa, Évora, Portimão, Vila Nova de Gaia e Vila Real. São estas as cidades anfitriãs de mais um ciclo das Tardes de Matemática. Estas palestras, que decorrem ao longo do ano em vários pontos do País, dão a conhecer os segredos da matemática e a forma como esta ciência influencia o nosso quotidiano. Matemáticos, por vezes acompanhados de especialistas nos temas abordados, continuarão a levar a matemática das redes sociais, da magia, dos referendos ou da pintura a um público cada vez mais vasto, numa linguagem acessível e cativante. As Tardes de Matemática foram criadas pela SPM em 2001, para dar resposta à necessidade de divulgar esta disciplina e de mostrar como a matemática está presente em todos os aspectos da nossa vida. Visite o *site* da SPM para consultar o calendário das diferentes sessões.

STOP - ESCOLA DE VERÃO DO IST

Em Junho, entre os dias 24 e 29, o Instituto Superior Técnico acolherá a escola internacional de Verão STOP – Selected Topics Operator Theory. O evento oferece cursos sobre Classes de Operadores Pseudodiferenciais, Problemas de Valores de Fronteira e Teoria da Factorização e um *workshop* com diversos oradores. Para estudantes do Instituto Superior Técnico e membros do Centro de Análise de Funcional e de Aplicações a inscrição é gratuita, mas obrigatória.

CANDIDATURAS ABERTAS PARA **PRÉMIO SEBASTIÃO E SILVA**

Estão abertas até ao dia 31 de Maio as candidaturas para o Prémio Sebastião e Silva, que distingue manuais de Matemática destinados ao terceiro ciclo do Ensino Básico e ao Ensino Secundário. O galardão existe desde 1997 e tem vindo a premiar a qualidade científica e pedagógica dos livros a concurso enquanto instrumentos fundamentais de transmissão de conhecimento. José Sebastião e Silva deu um grande contributo para a modernização do ensino da matemática no século XX, nomeadamente através dos livros didácticos que escreveu sobre a disciplina.



A **MATEMÁTICA** SEM **LIMITES NA FCUL**

O que terá a ver Euler com o "golo maravilha" de Roberto Carlos? Será que há lógica na democracia? E o Google, como funciona? Todas estas perguntas obterão resposta durante o ciclo de conferências "Matemática sem Limites", que decorre até ao final de Maio na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL). Quinzenalmente, vários matemáticos apresentarão, de forma original e apelativa, os mais diversos temas relacionados com a matemática. As conferências, dirigidas ao grande público, realizam-se às quintas-feiras pelas 18h30. O programa completo pode ser consultado na página do evento, em *http://matsemlimites.fc.ul.pt.* O programa "Câmara Clara" (RTP 2) recebe, às quartas-feiras, os oradores do ciclo na véspera das respectivas conferências.

MATEMÁTICA E INDÚSTRIA NA UNIVERSIDADE DO PORTO

Entre 28 e 30 de Abril, a Universidade do Porto acolherá a conferência "Mathematics for Industry". Durante o encontro serão exploradas as aplicações possíveis da matemática na resolução de problemas associados ao sector da indústria. Será também promovida a colaboração entre os campos académico e industrial. As inscrições terminam a 15 de Abril.

COIMBRA RECEBE **BRIDGES 2011**

Entre 27 e 31 de Julho a Universidade de Coimbra, com o apoio da SPM, receberá a conferência Bridges 2011. Este evento tem vindo a promover a reflexão sobre a relação entre a matemática e a arte e nesta edição pretende reunir, mais uma vez, matemáticos, músicos, escritores, escultores, engenheiros e tantos outros estudiosos para uma partilha de conhecimentos e experiências. Durante cinco dias, a universidade mais antiga do País acolherá *workshops*, palestras e outras actividades. Mais informações em *www.bridgesmathart.org.*

24.º ENCONTRO DO SEMINÁRIO NACIONAL DE **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**

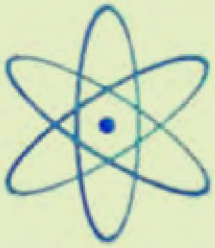
O 24º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática realiza-se nos dias 3 e 4 de Junho, na Escola Naval do Alfeite, em Almada. Mariano Esteban Piñeiro e Isabel Vicente Maroto, do Instituto de História Simancas (Universidade de Valladolid) são os oradores convidados. O encontro terá um espaço para apresentação de comunicações, cujos resumos devem ser enviados até 7 de Abril. As inscrições sem comunicações podem ser efectuadas até ao dia 7 de Maio. Estudantes de mestrado e doutoramento e sócios de algumas instituições, nomeadamente a SPM, beneficiam de um desconto na inscrição. Mais informações através do e-mail: *24snhm@gmail.com.*

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA CELEBRA CENTENÁRIO

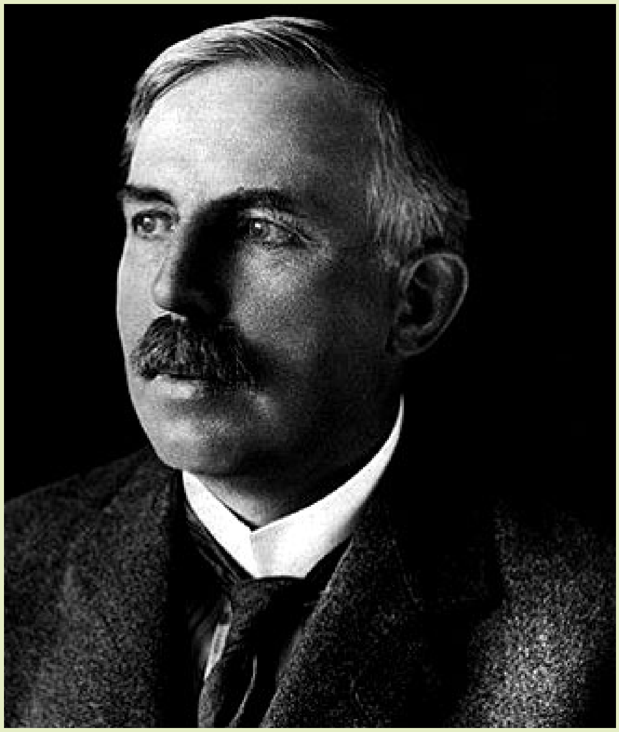
Durante todo o ano de 2011, a Real Sociedad Matemática Española (RSME) organizará inúmeros debates conferências, exposições e colóquios por toda a Espanha para celebrar os 100 anos de existência. Ao longo da sua história, a RSME tem desenvolvido actividades no sentido de promover a investigação e o ensino da matemática em Espanha, investindo também nas parcerias internacionais. Em conjunto com a SPM realiza o Encontro Ibérico de Matemática, que teve a sua 3ª edição no ano passado, em Braga. Este Encontro visa incentivar a colaboração entre matemáticos portugueses e espanhóis e desenvolver a investigação matemática na Península Ibérica.

MATHJAX REVOLUCIONA INTRODUÇÃO DE **FÓRMULAS MATEMÁTICAS** EM PÁGINAS **WEB**

Tornar a matemática "bonita" em todos os *browsers*. É isso que promete o MathJax, uma ferramenta que permite inserir fórmulas matemáticas em páginas *web* de uma forma simples. A informação pode ser introduzida através de diferentes formatos, como o Tex, o MathML ou o LaTex, e o resultado é compatível com diversos *browsers*, sistemas operativos e plataformas, como blogues, "wikis" e outras páginas *web*. Para visualizar a informação não é necessário executar *plugins*, fazer *downloads* ou instalar *software*. Esta aplicação está já a ser utilizada por várias publicações científicas e na submissão de candidaturas para projectos da Fundação para a Ciência e Tecnologia que está agora em curso. Visite o *site* do MathJax em *www.mathjax.org* para saber mais sobre esta ferramenta.



NÚCLEO ATÓMICO DESCOBERTO HÁ 100 ANOS



Foi Ernest Rutherford, físico neozelandês, que há um século descobriu a existência de uma região central no átomo, que concentra toda a sua carga eléctrica e quase toda a sua massa. A descoberta do núcleo central teve um grande impacto no desenvolvimento da física e de outras ciências associadas. Posteriormente à investigação de Rutherford, alguns cientistas constataram que o átomo não é constituído por uma partícula apenas, mas antes por pequenas partículas subatómicas.

INSTITUIÇÕES CIENTÍFICAS NA BULGÁRIA PEDEM APOIO INTERNACIONAL

A SPM associou-se a diversas instituições científicas internacionais no apoio ao Movimento Civil pela Ciência e Educação da Bulgária. O financiamento destinado à Academia de Ciências Búlgara e à Universidade de Sofia, que concentram grande parte da comunidade científica do país, tem sofrido sucessivos cortes, o que motivou protestos que transpuseram as fronteiras búlgaras. De forma a obter o apoio de outras instituições científicas e da comunidade civil, foi criada uma petição, divulgada a nível internacional, para sensibilizar o Governo búlgaro para a necessidade de investir na área do ensino superior e na investigação científica. A petição está disponível no endereço *www.science.nauka2010.com*.

PRÉMIO RAMANUJAN 2010

Já é conhecido o vencedor do Prémio Ramanujan 2010. Yuguang Shi, da Escola de Ciências Matemáticas da Universidade de Pequim, foi distinguido pelas suas contribuições para o estudo da geometria de variedades Riemannianas não compactas. Além da investigação nesta área, foi também reconhecido o contributo de Shi nos últimos 15 anos para o desenvolvimento da matemática na China. O Prémio Ramanujan é atribuído todos os anos a investigadores de até 45 anos de idade que tenham efectuado o seu trabalho em países em desenvolvimento.

Ilda Perez
Universidade de Lisboa
isilva@cii.fc.ul.pt

DIVULGAÇÃO MATEMÁTICA: O PAPEL DA SPM

No mundo desenvolvido, sociedades científicas, universidades, centros de investigação, têm iniciativas e até programas de divulgação visando sensibilizar e dar a conhecer, a públicos específicos e ao público em geral, o produto da sua actividade. Interessar estudantes, especialistas de outras áreas científicas, tecnológicas e culturais, políticos – a sociedade em geral – pela actividade científica é fundamental para a evolução e a continuidade dessa mesma actividade.

Aproximar o público dos resultados de ponta em ciência, em particular em matemática, não é fácil. Exige criatividade e formação científica por parte dos comunicadores, curiosidade e sensibilidade para a ciência por parte do público.

A curiosidade e o interesse pela ciência devem começar a ser despertados com a educação básica, o que em Portugal, tal como na maioria dos países, não acontece, pelo menos, tão massivamente como seria desejável.

As sociedades científicas, exprimindo esta preocupação da comunidade científica, assumem por isso hoje, em todo o mundo, um papel importante na concentração e na organização de esforços visando a actualização e o fornecimento de materiais educativos apropriados para os vários níveis de ensino e a divulgação para o grande público.

Ao longo dos últimos 20 anos, e em especial nos últimos dez, a Sociedade Portuguesa de Matemática manteve, aperfeiçoou e lançou uma série de iniciativas visando sensibilizar a opinião pública portuguesa para a matemática, área na qual Portugal evidencia ainda fortes carências a nível de formação básica.

A comunidade matemática, através da Sociedade Portuguesa de Matemática, assegura actualmente as seguintes iniciativas de divulgação matemática (informação detalhada no *site* da SPM: *www.spm.pt*):

Duas revistas periódicas de divulgação matemática:

Gazeta de Matemática – Uma revista quadrimestral de divulgação matemática dedicada a professores de matemática e a estudantes pré-universitários e universitários.

Jornal de Matemática Elementar – Publicação trimestral dedicada a professores de matemática do Ensino Básico.

Exposições itinerantes para as escolas : NOVO!

A SPM está a produzir uma série de exposições itinerantes, que disponibiliza mediante pedido.

Actualmente estão disponíveis duas exposições: "Medir o Tempo, Medir o Mundo, Medir o Mar" (2010) e "A Matemática de M.C. Escher" (2011).

Tardes de Matemática:

Para crianças e famílias em várias cidades do País.

O Clube de Matemática da SPM: NOVO!

O Clube de Matemática está de novo *online* no *site* da SPM, desde Janeiro de 2011, com novo formato e com rubricas para todas as idades.

É com enorme satisfação que verificamos que a Gazeta de Matemática se tem tornado uma revista cada vez mais apreciada por professores e alunos das universidades, que a exposição "Medir o Tempo, Medir o Céu, Medir o Mar" ainda não parou de circular, com os pedidos que tem tido das escolas, que as Tardes de Matemática de 2011, com novos temas, estão a começar em Lisboa, Évora, Portimão, Vila Nova de Gaia e Vila Real!

A SPM tem, com a actual direcção, como prioridade na área da divulgação dar continuidade a todas estas iniciativas, que começam a criar hábitos nos vários públicos a que se destinam, e que exigem não só a mobilização dos vários sectores da comunidade matemática portuguesa como a conjugação de esforços com outras instituições científicas e culturais.

Estas iniciativas têm sido, e continuarão a ser, acompanhadas por uma política editorial, nas colecções **Leituras de Matemática** e **Temas de Matemática**, atenta aos problemas e temas da educação, com uma forte componente na área da divulgação, reflectindo como prioridade da SPM a preocupação com o apoio a Professores de Matemática do Ensino Secundário.

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt***.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2011

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

http://www.spm.pt

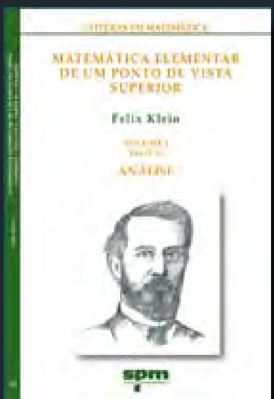
E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

http://www.mat.uc.pt/~gazeta

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3º esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*

PUBLICAÇÕES SPM: COMPLETE A SUA COLECÇÃO!

NOVIDADE!



spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR