



40 PALAVRAS EM CÍRCULO



26 O ASNO, O TRIÂNGULO E UMA ANTIGA REFUTAÇÃO DO POSTULADO QUINTO DOS "ELEMENTOS"



32 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÕES

50 A MATEMÁTICA DO SISTEMA CARDIOVASCULAR



04 ATRACTOR ÁREAS E VOLUMES

03 EDITORIAL | Rogério Martins

04 ATRACTOR  
Áreas e Volumes

08 RECREIO | Jorge Nuno Silva  
A Informalidade da Lógica Formal

*artigo de capa*

10 CIRURGIA PLÁSTICA  
DO PONTO DE VISTA MATEMÁTICO  
Gueorgui Smirnov e Vera Sá

19 CANTO DÉLFICO | Amílcar Branquinho  
Tomografia de Papel

22 NA LINHA DA FRENTE | Fabio Chalub  
Em Ventos Turbulentos

24 APANHADOS NA REDE | António Machiavelo  
Números Hipergigantescos

26 O ASNO, O TRIÂNGULO E UMA ANTIGA  
REFUTAÇÃO DO POSTULADO QUINTO  
DOS "ELEMENTOS"  
Bernardo Mota

32 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH  
E APLICAÇÕES  
Christiane Rousseau

40 PALAVRAS EM CÍRCULO  
Diogo Pernes da Cunha

47 PONTO CRÍTICO | coord. Daniel Pinto  
A História da Matemática Levada a Sério  
por Henrique Leitão

49 BARTOON | Luis Afonso

50 A MATEMÁTICA DO  
SISTEMA CARDIOVASCULAR  
Alexandra Moura e Adélia Sequeira

57 NOTÍCIAS

63 CARTAS DA DIRECÇÃO | Filipe Oliveira  
Em Prol da Qualidade de Ensino

# Gazeta de Matemática

## TABELA DE PUBLICIDADE 2011

### CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral  
Tiragem: 1900  
Nº de páginas: 64  
Formato: 20,2 x 26,6 cm  
Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

### CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

### CONTACTOS

Ana Rita Ferrer  
Tel.: 21 793 97 85 Tlm.: 96 184 89 66  
[rita.ferrer@spm.pt](mailto:rita.ferrer@spm.pt)

### ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK  
Resolução: 300 dpi (alta resolução)  
Margem de corte: 4 mm

### LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€  
Contracapa: 1100€  
Verso contracapa: 990€



	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.



ROGÉRIO MARTINS  
Universidade Nova  
de Lisboa  
[roma@fct.unl.pt](mailto:roma@fct.unl.pt)

## APOLOGIA DAS APLICAÇÕES

Condicionar a liberdade criativa de um matemático pelo potencial de aplicação que a sua matemática possa dar é um pecado, que aliás tem sido praticado em algumas situações por entidades financiadoras, ao discriminarem o financiamento de projectos tendo a aplicabilidade como um critério determinante. Contudo, a verdade é que é necessário avaliar a qualidade da matemática produzida.

Quando fazemos matemática, necessitamos de critérios que nos permitam fazer escolhas e avaliar a qualidade do material que produzimos. Nem toda a matemática que faz sentido é interessante, como frequentemente ouço o meu ex-orientador, Rafael Ortega, dizer: “Um matemático deve escolher os temas em que trabalha, caso contrário seria como um poeta que escreve todos os poemas possíveis. O trabalho de um poeta é escolher de entre os poemas possíveis aqueles que além disso são interessantes.”<sup>1</sup> Seguramente que a beleza matemática é um dos primeiros critérios, como defendia Hardy, mesmo sendo a beleza matemática algo que toda a gente que já estudou matemática sabe o que é mas ninguém sabe definir, porventura porque o conceito contém uma boa dose de subjectividade. A simplicidade de um argumento, as conexões de uma teoria às restantes áreas, a quantidade destas conexões, ou simplesmente o tempo que nos custou resolver um problema, são algumas boas razões para dizer que uma porção de matemática é bela. O que pretendo defender aqui é que a aplicabilidade é mais um critério para o nosso ideal de beleza matemática e, conseqüentemente, também torna legítimo o seu uso na escolha da boa matemática.

Não me refiro necessariamente à aplicabilidade no sentido restrito de aplicabilidade imediata na resolução de problemas tecnológicos ou outros problemas concretos, refiro-me a uma aplicabilidade em sentido lato, uma sensação de que o que produzimos faz sentido quando enquadrámos a matemática no real. O próprio Poincaré, em “Science et Méthode”, ao procurar formas de distinguir a matemática de qualidade, acaba por chegar à conclusão de que “... a procura do belo leva-nos às mesmas escolhas que a procura do útil.”

Neste número reunimos alguns excelentes artigos sobre aplicações da matemática, em particular aplicações na medicina. Podemos ver o que tem a matemática a dizer sobre a cirurgia plástica no artigo de Gueorgui Smirnov e Vera Sá, além de podermos dar uma espreitadela ao trabalho desenvolvido no CEMAT, no artigo sobre a modelação do sistema cardiovascular, de Adélia Sequeira e Alexandra Moura.

<sup>1</sup> Não é clara a origem desta frase, possivelmente é de Poincaré.



No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atrator, este é um espaço da responsabilidade do Atrator, relacionado com conteúdos interactivos do seu site [www.atrator.pt](http://www.atrator.pt). Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para [atrator@atrator.pt](mailto:atrator@atrator.pt).

## ÁREAS E VOLUMES

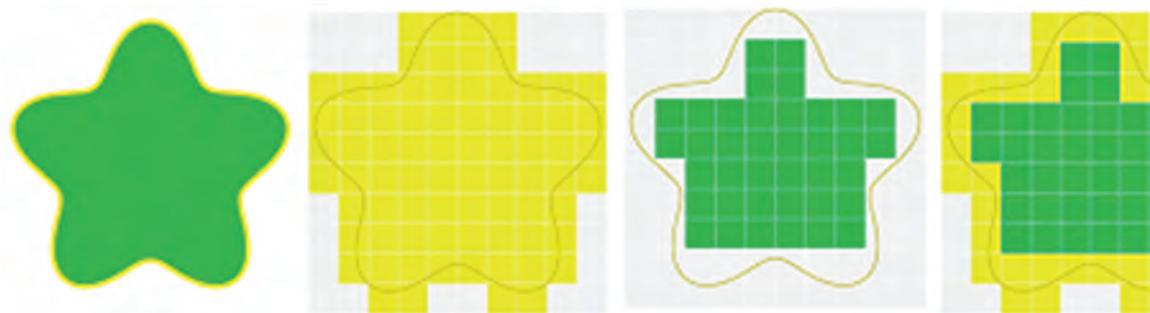
Na dedução da fórmula do volume de um prisma, a dificuldade está em provar que dois prismas com bases de igual área e alturas correspondentes iguais têm o mesmo volume. Cavalieri, aluno de Galileu, resolveu-a cortando-os em fatias.

Se um aluno do ensino básico ou secundário, ou alguém com preparação equivalente, perguntar como se justifica que uma certa fórmula permita calcular a área de uma determinada figura plana ou o volume de um sólido, como responder? Claro que não se pode confundir a resposta, seja ela qual for, com uma demonstração, como a entendem os matemáticos. Desde logo, porque seria necessário, para se poder proceder a uma demonstração, dispor de uma definição precisa de área ou de volume e essas noções requerem cuidados que não são acessíveis a esse nível. Mas é possível e desejável dar uma justificação, entendida como uma dedução a partir de outras propriedades básicas da noção de área e de volume, que facilmente serão aceites «intuitivamente» sem demonstração. Por exemplo, se se descrever um método que torne plausível a fórmula, nada evidente a priori, que dá o volume de uma esfera<sup>1</sup>, isso é positivo, mesmo que esse método invoque sem demonstração algumas propriedades básicas e «intuitivas» das noções de área e volume.

Neste texto, exploram-se algumas propriedades que se revelam úteis em «justificações» entendidas no sentido acima descrito. As figuras são extraídas de conteúdos interactivos desenvolvidos pelo Atrator para o efeito.

### NOÇÕES BÁSICAS

Partindo de um quadrado de lado unitário, ao qual atribuímos área 1, e subdividindo o lado em  $n$  segmentos de igual comprimento, definimos uma grelha que se estende a todo o



plano. Para qualquer reunião finita de  $k$  tais pequenos quadrados, a sua área define-se sem problemas: é  $k/n^2$ . A imagem seguinte sugere como se pode estender a noção de área a outros conjuntos do plano, por forma que sempre que um conjunto está contido noutro (ambos com área) a área do primeiro seja menor ou igual à do segundo.

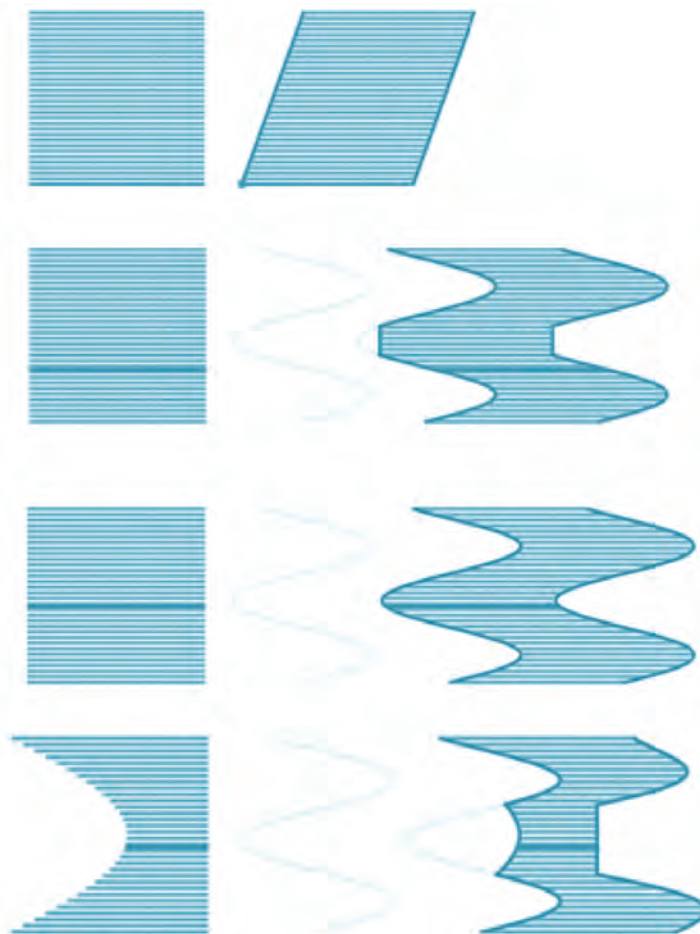
Considerado o conjunto da esquerda nessa imagem e fixada uma grelha por subdivisão de um quadrado de lado unitário e por prolongamento ao plano, seguem-se: a amarelo, a reunião mínima de pequenos quadrados dessa grelha que contém o conjunto; a verde, a reunião dos pequenos quadrados nele contidos; a seguir ambas as reuniões conjuntamente; e depois, o conjunto da diferença dos dois anteriores; finalmente, a última figura (da direita) representa o mesmo que a precedente, mas para uma grelha (quatro vezes) mais fina.

Queremos, naturalmente, que a área (a definir) esteja compreendida entre as áreas, já conhecidas, da segunda e da terceira figuras, respectivamente a amarelo e a verde. Isto, para todas as grelhas, por mais finas que sejam. Ora, se, como parece neste caso – e realmente sucede –, as áreas representadas nas duas últimas figuras puderem ser tornadas tão pequenas quanto se quiser, apenas pela consideração de grelhas suficientemente finas, só haverá um número entre todos os associados aos conjuntos amarelos contendo a figura e todos os associados aos conjuntos verdes contidos na figura. Esse número é a área da figura inicial.

Como é que varia a área de um conjunto, quando se lhe aplica uma transformação do plano? Algumas transformações não alteram a área: é o caso das isometrias (que conservam distâncias), em particular das rotações, das translações e das reflexões. Outras alteram-na: por exemplo, uma homotetia de razão  $k$  conduz a uma figura cuja área é  $k^2$  vezes a área da figura inicial. Olhando para as figuras anteriores, esta propriedade é clara para os conjuntos que são reuniões de quadrados da grelha e isso implica que também seja válida para os outros.

Há outra propriedade que importa destacar: dadas duas regiões planas limitadas<sup>2</sup>, tais que qualquer recta horizontal as intersecta segundo segmentos com o mesmo comprimento,

então as duas regiões têm a mesma área. Em particular, uma transformação que consista em «empurrar» uma região com uma curva, como indicado nas imagens seguintes, conserva a área:



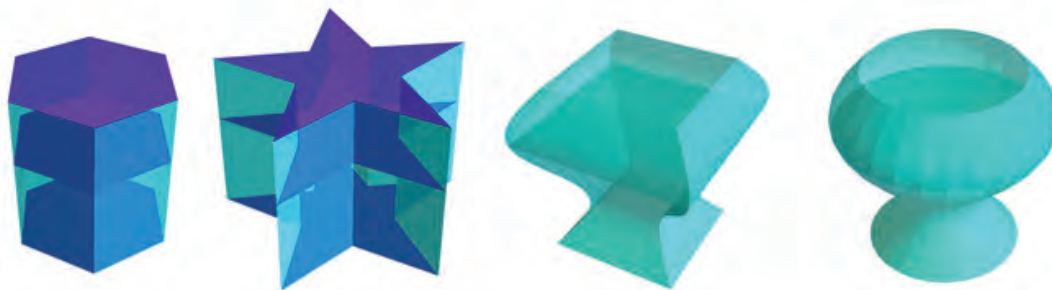
Nos três primeiros pares começa-se com um rectângulo, que é «empurrado» da esquerda, por um segmento inclinado no primeiro caso e por uma sinusóide vertical nos outros dois. No último grupo, a figura da esquerda não é seccionada pelas rectas horizontais segundo segmentos de largura constante, mas, a cada nível, o comprimento da secção é o mesmo na primeira figura e na segunda. Em todos os quatro pares, as áreas das duas figuras são as mesmas.

Para o volume de um objecto no espaço, são pertinentes considerações análogas às feitas para a área, uma vez adapta-



<sup>1</sup> Foi aliás uma pergunta de um aluno do 6º ano do Básico sobre a razão de ser de tal fórmula, que esteve na origem deste trabalho do Atractor.

<sup>2</sup> Estamos a supor que essas regiões têm áreas.



das à nova situação. Limitamo-nos a enunciar a adaptação da última propriedade descrita para a área: dados dois conjuntos limitados no espaço<sup>3</sup>, tais que qualquer plano horizontal os intersecta segundo regiões planas com a mesma área, então os dois conjuntos têm o mesmo volume. Referindo-nos à figura acima, nos dois primeiros prismas, não só as áreas das secções ao mesmo nível são iguais, como essas áreas não dependem da altura do plano de corte. Já o mesmo não sucede com as duas outras figuras: cada plano horizontal corta figuras com a mesma área (um quadrado e um círculo), mas essa área é variável com a altura do plano. Em ambos os casos, a conclusão é a mesma: os dois prismas têm o mesmo volume e os dois outros sólidos têm os dois o mesmo volume.

Das propriedades indicadas decorre imediatamente que, para que quaisquer dois prismas ou cilindros de mesma altura, rectos ou inclinados, tenham o mesmo volume, basta que as bases, independentemente da forma que tiverem, tenham a mesma área. Um argumento muito simples permite concluir que, também para pirâmides e cones da mesma altura, o volume é idêntico, se as áreas das bases forem idênticas. Basta notar que todas as secções por planos paralelos à base são figuras homotéticas das bases, com uma razão de homotetia que só depende da altura do plano de corte. Portanto, se as bases de duas pirâmides (ou cones) têm a mesma área, também as secções têm as duas a mesma área, qualquer que seja a altura do plano de corte. Portanto, o volume de qualquer cone ou pirâmide só depende da área da base e da altura e, para o

calcular, basta fazê-lo para uma pirâmide em particular, por exemplo, uma pirâmide de base triangular. A figura abaixo mostra vários sólidos com mesma altura: as áreas das bases dos sólidos são iguais, portanto as secções representadas, que estão à mesma altura, também têm entre si a mesma área, pelo que os volumes dos diferentes sólidos também são idênticos.

Vejamos agora como determinar o volume de uma pirâmide de base triangular qualquer. Na figura da direita partimos de uma pirâmide (1), juntamos-lhe outra (2) com três vértices comuns à anterior<sup>4</sup> e o outro vértice na intersecção de paralelas a duas arestas da face mais próxima do observador na pirâmide dada (1). A imagem seguinte (3) mostra, de outro ponto de vista, as duas pirâmides, seccionadas por um plano paralelo às (novas) bases. Essas bases têm a mesma área, pelo que as duas pirâmides – a dada e a nova – têm o mesmo volume. Um processo idêntico ao anterior permite colar sobre a face mais próxima da segunda pirâmide (em 3) uma terceira pirâmide, com volume igual ao da segunda (4 e 5). As duas últimas imagens (6 e 7) mostram o prisma triangular obtido a partir da reunião das três pirâmides. Como elas têm todas o mesmo volume, concluimos que o volume da pirâmide inicial é um terço do volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura, pelo que o mesmo sucede para qualquer pirâmide ou cone (ou dupla pirâmide ou duplo cone).

Num próximo texto veremos como proceder para determinarmos o volume da esfera.

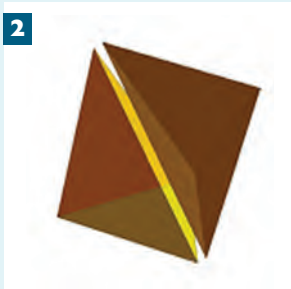




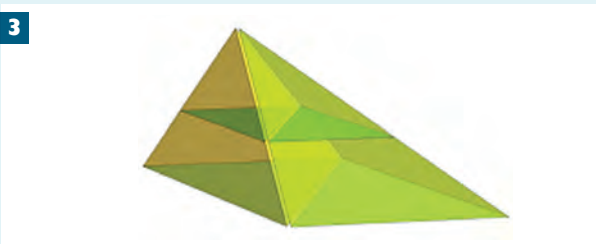
1



2



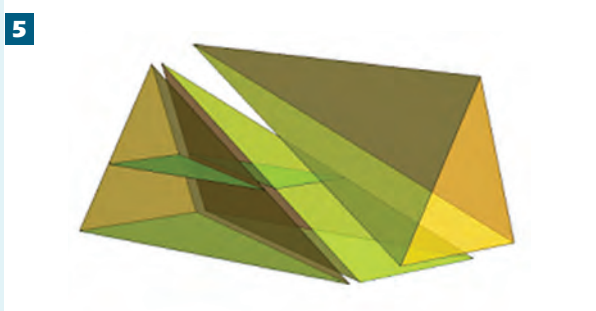
3



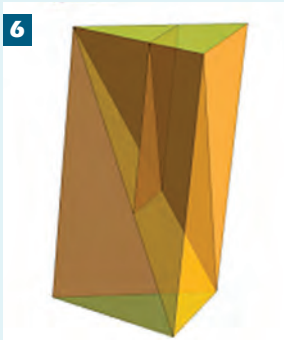
4



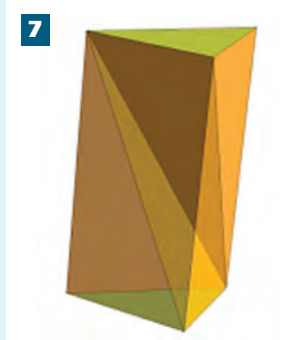
5



6



7



<sup>3</sup> Supomos também que esses conjuntos têm volume.

<sup>4</sup> Na figura, para melhor visibilidade, algumas pirâmides estão representadas um pouco afastadas.

# tardes de matemática

29 outubro 2011  
O baralho de cartas  
e a Matemática

Jorge Nuno Silva  
Universidade de Lisboa

15:30 Auditório da Biblioteca Pública e  
Arquivo Regional de Ponta Delgada

## informações

Sociedade Portuguesa de Matemática  
217 939 785 | [www.spm.pt](http://www.spm.pt)

## Apoios:





JORGE NUNO SILVA  
Universidade de Lisboa  
jnsilva@cal.berkeley.edu

## A INFORMALIDADE DA LÓGICA FORMAL

Raymond Smullyan é bem conhecido por ser um lógico e filósofo eminente. A sua obra mais popularizada, contudo, pertence à matemática recreativa. Nesta área são de leitura obrigatória “The Lady and the Tiger” (Dover, 2009), focado em *puzzles* lógicos, e “The Chess Mysteries of the Arabian Knights” (Oxford, 1992), um tratado de análise retrógrada em problemas de xadrez, para citar somente duas das suas muitas obras.



A mais recente publicação de Raymond Smullyan, “Logical Labyrinths” (AK Peters, 2009), é utilizada em Harvard num curso semestral de Lógica, contudo Smullyan continua a utilizar os *puzzles* como fio condutor e motivador da narrativa científica. O rigor e a profundidade da obra não saem diminuídos desta associação, antes colaboram na produção de um texto divertido e motivador que, partindo da informalidade de um quebra-cabeças, atinge toda a formalidade de lógica de primeira ordem.

A acção desenrola-se de início na já habitual ilha dos seres de dois tipos, os Verdadeiros, que falam sempre verdade, e os Falsos, que sempre mentem.

Os primeiros quebra-cabeças são clássicos. Vejamos dois exemplos.

1. No dia da sua chegada à ilha, o visitante Abercrombie encontra três habitantes: A, B e C. Pergunta a A: “Você é Verdadeiro ou Falso?”, mas não ouve a resposta. Diz o B: “Ele disse que é um Falso”, mas C acrescentou: “Não acredite em B, está a mentir”. **O que é que se pode concluir sobre C?**



2. Se os três nativos tivessem respondido:

A: "Exactamente um de nós é Falso."

B: "Exactamente dois de nós são Falsos."

C: "Somos todos Falsos."

**Qual seria a natureza de cada um?**

Para preparar caminho à correcta utilização de quantificadores, Smullyan propõe um outro tipo de questão:

Numa visita de Abercrombie, todos os habitantes lhe disseram "Somos todos da mesma natureza". O que é que pode o nosso visitante concluir? E se a afirmação geral fosse "Alguns de nós são Verdadeiros, outros são Falsos"?

Numa outra ilha, ouviu Abercrombie de todos: "Alguns Falsos desta ilha fumam." O que é que se pode concluir sobre os hábitos tabágicos dos ilhéus?

Para ilustrar a natureza de alguns conjuntos infinitos, Raymond Smullyan propõe variantes do seguinte jogo: Um jogador escolhe dois números inteiros,  $a$  e  $b$ . O segundo tem direito a um palpite por dia (isto é, pode nomear um inteiro), na tentativa de acertar em ambos. Será que existe uma estratégia que garanta ao segundo jogador ganhar em tempo finito?

A discussão das estratégias empregues promove a compreensão sobre conjuntos numeráveis (no nosso exemplo,  $\mathbb{Z}^2$ ).

Imaginemos um livro com uma infinidade de páginas: página 1, página 2, ..., página  $n$ , e que cada página contém a descrição de um conjunto de números naturais. Será que este livro pode conter a descrição de todos os conjuntos de números naturais?

O Princípio de Indução é também invocado nas viagens de Abercrombie.

Numa ilha que visitou há pouco, ouviu de um nativo: "Não é a primeira vez que lhe digo isto." O que é que pode Abercrombie concluir sobre a natureza do seu novo amigo?

A prova de que todos os cavalos têm a mesma cor é feita por indução. Vejamos sucintamente a hereditariedade, visto o caso inicial ser trivial. Consideremos  $n + 1$  cavalos:  $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}$ . Por Hipótese de Indução, sabemos que qualquer conjunto de  $n$  cavalos é monocromático, o que se aplica a

$$\{C_1, \dots, C_n\} \quad \text{e} \quad \{C_2, \dots, C_{n+1}\}.$$

Tomando agora a união destes conjuntos, obtemos o resultado pretendido.

Essencialmente por este método, já Tom Apostol tinha demonstrado, no seu livro de cálculo, que todas as loiras têm olhos azuis!

Da contracapa traduzimos parte do texto de Martin Gardner, um dos seus últimos escritos: "Desde que Lewis Carroll escreveu sobre Lógica, nenhum outro especialista produziu um texto tão saturado com problemas deliciosos, paradoxos, piadas e implicações filosóficas para além do professor Raymond Smullyan no seu "Logical Labyrinths" [...] Trata-se de um volume que somente Ray poderia ter escrito e será certamente utilizado nas universidades por muitos anos."





# Cirurgia Plástica do Ponto de Vista Matemático

GUEORGUI SMIRNOV<sup>a</sup> E VERA SÁ<sup>b</sup>

[smirnov@math.uminho.pt](mailto:smirnov@math.uminho.pt), [verasaz@gmail.com](mailto:verasaz@gmail.com)

<sup>a</sup> UNIVERSIDADE DO MINHO, <sup>b</sup> UNIVERSIDADE DO PORTO

Este artigo contém uma apresentação elementar dos métodos matemáticos utilizados na modelação da cirurgia plástica e é destinado a um leitor não preparado. A exposição é feita com ênfase nos métodos numéricos e dá a possibilidade de conhecer um dos métodos principais da física matemática computacional, o método dos elementos finitos, algumas ideias da teoria de aproximação ligadas ao método, o conceito intuitivo de integral e os métodos directos do cálculo das variações.

## 1. INTRODUÇÃO

A cirurgia plástica é uma importante área da medicina que muitas vezes é erradamente identificada com a sua ínfima parte conhecida como cirurgia estética, porque esta é muito procurada pelas pessoas famosas para alterar o seu aspecto (enchimento dos lábios, implantes mamários, lipoaspiração, etc.). Na realidade, a maior parte das cirurgias plásticas, tais como cirurgia reconstrutiva, microcirurgia e tratamento de

queimaduras faz-se por indicação médica. Por exemplo, é absolutamente normal quando do bloco operatório sai uma equipa de oncólogos e entra de seguida uma equipa de cirurgiões plásticos. Outro exemplo é o caso da cirurgia de redução mamária, que é recomendada pelo médico a quem tem problemas de coluna derivados do peso excessivo da mama. Muitas destas operações implicam intervenções substanciais e requerem uma preparação e uma planificação cuidadosas. Simular computacionalmente uma cirurgia plástica, ou seja, desenvolver e usar modelos matemáticos para a planificação pré-operatória e para a avaliação pós-operatória é um problema certamente de extrema importância pelo impacto positivo que tem neste campo da medicina, para melhor adequação dos procedimentos cirúrgicos aos casos individuais intervencionados e, conseqüentemente, para o aumento da qualidade de vida dos pacientes.

Embora a modelação matemática da cirurgia plástica tenha despertado a atenção de um número considerável de investigadores do mundo inteiro, o Problema Geral da Cirurgia Plástica (PGCP) foi introduzido há relativamente pouco tempo pelos autores deste artigo. Trata-se de um problema de cálculo variacional (uma parte da matemática que estuda mínimos e máximos de funções definidas em espaços de dimensão infinita) com condições de contorno não-convencionais, conhecidas como condições de sutura. Estas condições, no caso do PGCP, modelam a sutura de tecidos e são fundamentais para as simulações em cirurgia.

O objectivo deste artigo é dar uma apresentação elementar do PGCP destinada a um leitor não preparado. No âmbito desta apresentação vamos abordar o método numérico conhecido como o Método dos Elementos Finitos (MEF), algumas ideias da teoria de aproximação, conceito intuitivo de integral e os métodos directos do cálculo das variações. Os autores estão convencidos de que é mais fácil explicar os conceitos matemáticos básicos expondo ideias dos métodos numéricos, isto é, explicando como se calcula uma coisa ou outra, do que apresentar uma teoria matemática formal. Por isso, no artigo a ênfase é dada aos métodos computacionais e, para acompanhar os nossos raciocínios, não é necessário um vasto conhecimento matemático.



## 2. PROBLEMA GERAL DA CIRURGIA PLÁSTICA

Para que a exposição fique completa, incluímos também a formulação rigorosa do PGCP. Passemos à sua descrição. Do ponto de vista matemático, a deformação dos tecidos é descrita através da função de deformação  $f$ , que faz corresponder a um ponto  $p$  do corpo não deformado  $\mathcal{B}$  o ponto  $f(p)$  do corpo deformado  $f(\mathcal{B})$ . Os tecidos moles podem ser modelados constitutivamente como um material hiperelástico, ou seja, um material que satisfaz o axioma da termodinâmica de trabalho não-negativo num processo fechado. Neste modelo, a deformação é um minimizador da funcional que representa a energia elástica armazenada durante a deformação e a energia potencial gravítica do corpo. Designemos por  $W$  a densidade de energia de deformação e por  $\Pi$  a energia potencial gravítica de um elemento do corpo. Então os corpos elásticos na sua posição de equilíbrio assumem a configuração  $f(\mathcal{B})$  que corresponde à energia total (de deformação e potencial),

$$\int_{\mathcal{B}} W(\nabla f(p)) dp + \int_{\mathcal{B}} \Pi(f(p)) dp, \quad (1)$$

mínima. Aqui  $\nabla f$  é a matriz de Jacobi da aplicação  $f$ , isto é, a matriz cujos elementos são as derivadas  $\partial f_i / \partial p_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . O corpo  $\mathcal{B}$ , depois dos cortes feitos pelo cirurgião tem as seguintes fronteiras (ver figura 1):

1.  $\Gamma_1$  é a parte em que o corpo está fixo;
2.  $\Gamma_2$  é a parte do corpo que está exposta ao ar e que não sofre intervenção durante a cirurgia;

3.  $\Gamma_3$  é constituída por duas partes da fronteira do corpo, resultantes do corte feito pelo cirurgião e que serão "costuradas", uma ( $\Gamma_+$ ) à outra ( $\Gamma_-$ ). Chamamos  $g$  à aplicação de identificação: um ponto  $p$  de  $\Gamma_+$  é unido ao ponto  $g(p)$  de  $\Gamma_-$ ;

4.  $\Gamma_4$  é uma parte da fronteira que será unida a uma superfície fixa, por exemplo, a um osso.

Assim, temos as condições de contorno:

$$f(p) = p, \quad p \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$f(g(p)) = f(p), \quad p \in \Gamma_+, \quad (3)$$

$$\varphi(f(p)) = 0, \quad p \in \Gamma_4, \quad (4)$$

e onde  $\Gamma_4 = \{x \mid \varphi(x) = 0\}$ .

Agora, conhecendo o PGCP na sua forma rigorosa, passemos a uma apresentação informal dos métodos que são utilizados para a sua resolução.

## 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é baseado na ideia de que um corpo elástico de geometria complexa pode ser representado (aproximadamente) como uma união de corpos pequenos de geometria simples (elementos). Por exemplo, em dimensão 1, um grande segmento pode ser visto como união de pequenos segmentos. Em dimensão 2, podemos considerar que uma figura plana é formada por triângulos. Em dimensão 3, que um corpo é formado por tetraedros. A função de deformação  $f$  considera-se como afim nestes elementos,

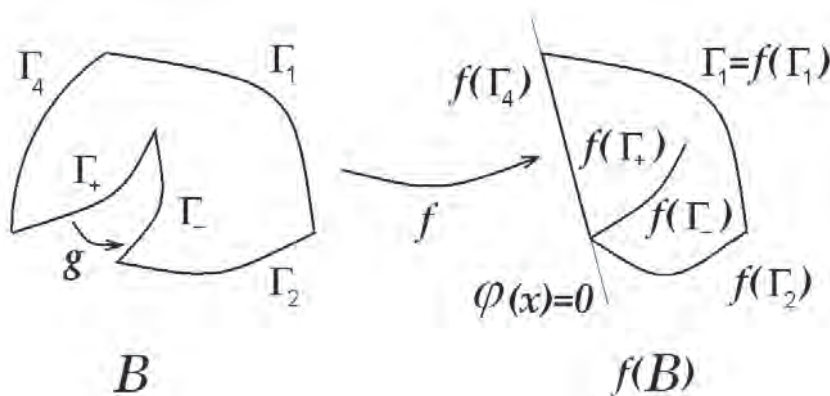


Figura 1: Esquema das fronteiras do corpo elástico antes e depois da sutura.

isto é, o seu gráfico é a translação de um pedaço de um subespaço. A construção desta função  $f$  baseia-se na ideia da assim dita partição da unidade, que é fundamental para a teoria de aproximação.

### 3.1. Partição da unidade

Explicamos este conceito no caso de um conjunto de dimensão 2. Consideremos uma representação do corpo,  $\mathcal{B}$ , na forma de união de triângulos:  $\mathcal{B} = \cup \tau_\alpha$ . Cada  $\tau_\alpha$  tem três vértices:  $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, v_{\alpha_3}$ . Seja  $v_\beta$  um vértice. Designemos por  $\Omega_\beta$  o conjunto dos triângulos  $\tau_\alpha$  que têm  $v_\beta$  como vértice (ver figura 2). Os conjuntos  $\Omega_\beta$  formam uma cobertura de  $\mathcal{B}$ . Consideremos a função  $\Psi_\beta$  definida assim:  $\Psi_\beta(v_\beta) = 1$ , é afim por partes em  $\Omega_\beta$ . Se  $p$  pertence à fronteira de  $\Omega_\beta$ , ou está fora de  $\Omega_\beta$ , então  $\Psi_\beta(p) = 0$ . Estas funções formam uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\{\Omega_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ , isto é

$$\Psi_\beta(p) \geq 0; \quad \Psi_\beta(p) = 0, \quad p \notin \Omega_\beta$$

e

$$\sum_{\beta} \Psi_\beta(p) = 1, \quad \forall p \in \mathcal{B}.$$

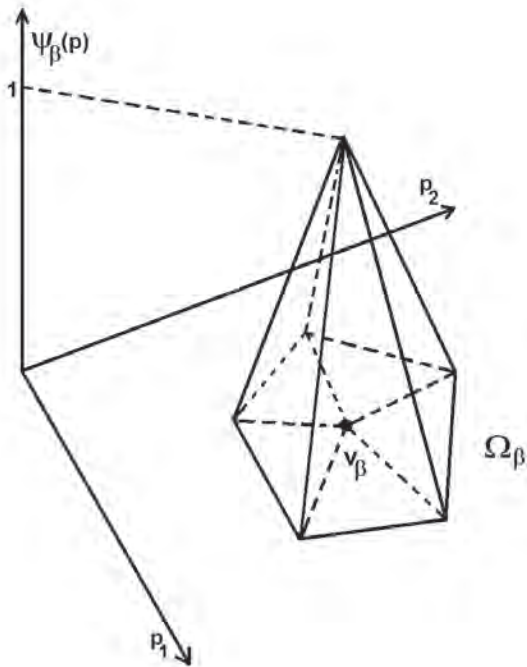


Figura 2: Função  $\Psi_\beta(p)$ .

A última igualdade é a consequência da observação de que a soma das funções  $\Psi_\beta$  é uma função afim que nos vértices dos triângulos toma valor 1.

### 3.2. Aproximação por funções afins por partes

Para explicar a ideia fundamental do MEF e da teoria de aproximação de funções, consideremos o problema de aproximação de uma função Lipschitziana  $\phi(p), p \in \mathcal{B}$  por funções contínuas afins por partes. Recordemos que uma função é Lipschitziana se o módulo da diferença entre os valores desta função é menor ou igual à distância entre os pontos multiplicada por uma constante, ( $|\phi(p_1) - \phi(p_2)| \leq L \text{dist}(p_1, p_2)$ ).

O diâmetro de  $\Omega_\beta$  designa-se por  $\text{diam}(\Omega_\beta)$  e é igual a  $\sup_{p_1, p_2 \in \Omega_\beta} \text{dist}(p_1, p_2)$ . Consideremos a aproximação:

$$\tilde{\phi}(p) = \sum_{\beta} \phi(p_\beta) \Psi_\beta(p),$$

onde  $p_\beta \in \Omega_\beta$ . (O gráfico desta função é uma superfície formada por pedaços planos.) Vamos ver qual é a diferença entre os valores de  $\phi$  e  $\tilde{\phi}$  num ponto. Utilizando as propriedades da partição da unidade, obtemos

$$\begin{aligned} |\phi(p) - \tilde{\phi}(p)| &= \left| \phi(p) - \sum_{\beta} \phi(p_\beta) \Psi_\beta(p) \right| \\ &= \left| \phi(p) \sum_{\beta} \Psi_\beta(p) - \sum_{\beta} \phi(p_\beta) \Psi_\beta(p) \right| \\ &= \left| \sum_{\beta} (\phi(p) - \phi(p_\beta)) \Psi_\beta(p) \right| \\ &\leq L \sum_{\beta} \text{dist}(p, p_\beta) \Psi_\beta(p) \leq L \sum_{\beta} \text{diam}(\Omega_\beta) \Psi_\beta(p) \\ &= L \max_{\beta} \text{diam}(\Omega_\beta) \sum_{\beta} \Psi_\beta(p) = L \max_{\beta} \text{diam}(\Omega_\beta). \end{aligned}$$

Seja  $\sigma = \max_{\beta} \text{diam}(\Omega_\beta)$ , então temos  $|\phi(p) - \tilde{\phi}(p)| \leq L\sigma$ . Daqui vemos que quando  $\sigma$ , o diâmetro máximo dos elementos da cobertura, tende para zero, a diferença entre a função e a sua aproximação  $\tilde{\phi}$  tende para zero. O raciocínio que acabamos de fazer é tão importante que está presente (talvez de uma forma um pouco diferente) em quase todos os teoremas da teoria da aproximação.

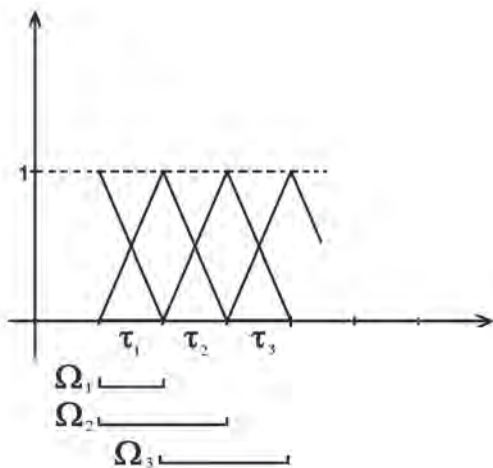


Figura 3: Cobertura de  $\mathcal{B}$  e partição da unidade no caso de dimensão 1.

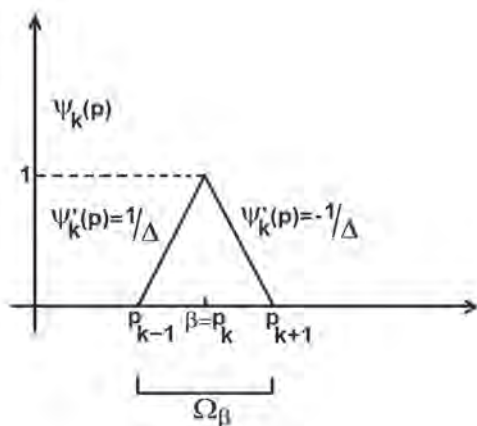


Figura 4: Função  $\Psi_k$ .

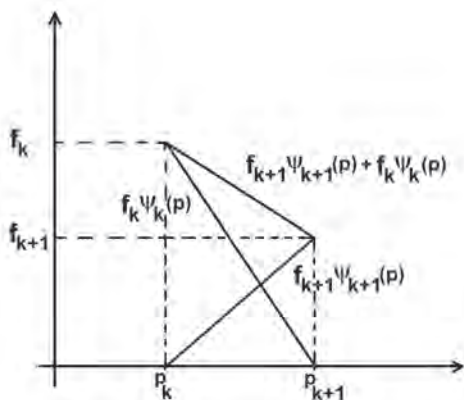


Figura 5: Como se constrói a aproximação de  $f$ .

### 3.3. MEF em dimensão 1

No caso de dimensão 1 os vértices  $v_\beta = p_k$  são pontos  $a = p_0, \dots, p_N = b$  da recta que verificam a condição  $p_{k+1} - p_k = \Delta$ . Os conjuntos  $\mathcal{B} = [a, b]$ ,  $\tau_\beta = [p_k, p_{k+1}]$  e  $\Omega_\beta = [p_{k-1}, p_{k+1}]$  são segmentos, e a correspondente partição da unidade está nas figuras 3 e 4.

Para aplicar o MEF em dimensão 1, é necessário representar a função  $f$  como combinação linear das funções  $\Psi_k$  com coeficientes desconhecidos  $f_k$ ,

$$f(p) = \sum f_k \Psi_k(p),$$

(ver figura 5). Como vimos anteriormente, uma classe bastante larga de funções pode ser aproximada por funções deste tipo. A classe será tanto mais larga quanto mais geral for o conceito da distância entre a função e a sua aproximação.

### 4. PGCP EM DIMENSÃO 1

Para perceber o essencial deste artigo não é necessário o conhecimento do conceito de integral que aparece na formulação rigorosa do PGCP. Basta ter uma ideia intuitiva do integral e saber como se calcula.

No caso de dimensão 1, a funcional (1) toma a forma

$$\int_a^b W(f'(p)) dp + \int_a^b \Pi(f(p)) dp \quad (5)$$

e o conjunto  $\mathcal{B}$  é um segmento  $[a, b]$ , isto é, estamos a falar da deformação de uma corda (por exemplo, de guitarra). O valor da funcional (5), isto é, o integral, é necessário interpretar como limite das somas

$$\sum_{k=0}^{N-1} W(f_k \Psi'_k(p) + f_{k+1} \Psi'_{k+1}(p)) \Delta + \sum_{k=0}^{N-1} \Pi(f_k \Psi_k(p) + f_{k+1} \Psi_{k+1}(p)) \Delta, \quad (6)$$

quando  $\Delta$  tende para zero e  $N\Delta = b - a$ . A função mais simples,  $W$ , que garante a existência de uma solução do PGCP é  $W(f') = \frac{1}{2}(f')^2$ . A função  $f(p)$  descreve o deslocamento de corda no ponto  $p \in [a, b]$ . Para simplificar, consideremos  $a = -1$ ,  $b = 1$ . Na posição não deformada, a corda é o segmento com extremos  $(-1, g/2)$  e  $(1, g/2)$  (linha horizontal na figura 6). Na posição deformada, e devido à acção da força da gravidade, a corda adopta



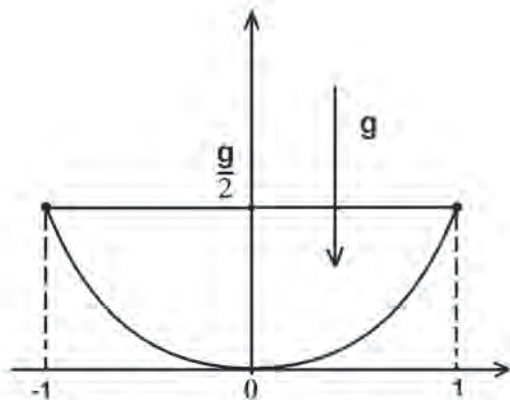


Figura 6: Deformação da corda.

a posição de menor energia, que é uma parábola (ver figura 6). Mostremos que a forma que a corda adota é de facto uma parábola. A funcional (5) toma a forma

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (f'(p))^2 dp + g \int_{-1}^1 f(p) dp, \quad (7)$$

onde  $g$  é a aceleração gravítica. Consideremos a condição de sutura (condição 3 do PGCP):  $f(-1) = f(1)$ . Esta condição não é suficiente para garantir a existência da função  $f$  que minimiza a funcional (o ínfimo da funcional é  $-\infty$ ). Adicionemos a condição de união à superfície fixa (condição 4 do PGCP):  $f(0) = 0$ . Então, pelo MEF e usando (6), a funcional (7) aproxima-se por

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-N}^{N-1} \left( \frac{f_{k+1} - f_k}{\Delta} \right)^2 \Delta + g \sum_{k=-N}^{N-1} f_k \Delta \quad (8)$$

com  $f_0 = 0$ ,  $f_{-N} = f_N$ . A condição de mínimo desta função em relação a  $f_k$  para  $k \neq 0; \pm N$  é obtida derivando (8) em ordem a  $f_k$ :

$$\frac{-f_{k+1} + 2f_k - f_{k-1}}{\Delta^2} + g = 0, \quad k \neq 0, \pm N. \quad (9)$$

Deste modo obtemos um sistema de equações para encontrar  $f_k$ ,  $k \neq 0, \pm N$ . É fácil ver que  $(k+1)^2 - 2k^2 + (k-1)^2 = 2$ , portanto,

$$f_k = f(k\Delta) = \frac{g(k\Delta)^2}{2}.$$

é a solução do sistema (9). Passando ao limite quando  $\Delta$  tende para zero e  $N\Delta = 1$ , obtemos a parábola

$$f(p) = \frac{gp^2}{2}.$$

## 5. A REDUÇÃO MAMÁRIA

Agora, quando já temos a ideia geral de como se modela uma cirurgia plástica, consideremos a intervenção cirúrgica conhecida como redução mamária, que é recomendada às mulheres que têm problemas de coluna derivados do peso excessivo da mama. Para a modelar aplicamos o MEF criando uma malha tridimensional que nos permite obter um modelo computacional realista da mama. A metodologia para modelar a redução mamária baseia-se em dois passos principais:

1. A reconstrução da mama no "estado neutro" e na determinação dos parâmetros elásticos do modelo.
2. A modelação da cirurgia e da subsequente recuperação.

Entenda-se por "estado neutro" o estado em que todas as forças (elásticas e de massa) são nulas. A existência deste estado é uma hipótese muito forte, e irrealista, contudo absolutamente necessária para a modelação. Os passos que seguimos para modelar a cirurgia de redução mamária são: a incisão dos tecidos a remover; a sutura dos tecidos; e a modelação da recuperação da mama. Este último passo consiste em anular as tensões que possam actuar no tecido e obter o estado neutro pós-cirúrgico. Todos os passos descritos são realizados no estado neutro. Portanto, para representar a previsão para a cirurgia em outros estados para além do estado neutro, por exemplo quando a paciente está de pé, temos de aplicar forças de massa ao estado neutro previamente obtido.

Uma das ideias-chave para este estudo é a determinação das propriedades elásticas baseando-nos na observação da deformação da mama como função da sua posição. Atendendo a que a geometria da mama se modifica de acordo com a posição adoptada pela paciente, foi desenvolvida a metodologia para determinar os parâmetros elásticos do modelo. Do ponto de vista matemático, a determinação dos parâmetros consiste na minimização da diferença entre o que é observado e o que é modelado. Por outras palavras, tomamos um número finito e características geométricas  $G(f(\cdot, y))$  que obte-

mos como resultado da deformação  $f(\cdot, y)$ , que depende de um vector de parâmetros  $y$  na função  $W = W(\nabla f, y)$ . O ponto na notação  $f(\cdot, y)$  significa que se trata da função  $p \rightarrow f(p, y)$ . Para além de  $G$ , tomamos o vector  $\hat{G}$  que é o resultado da

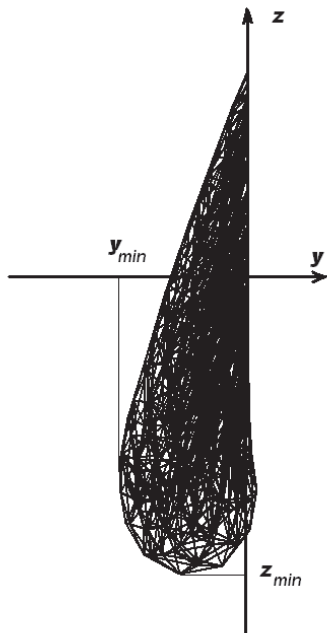


Figura 7: Modelação da mama original – posição vertical.

observação, por exemplo  $\hat{G} = (y_{min}, z_{min})$  (ver figura 7). Para reconstruir o vector de parâmetros correspondente,  $\hat{y}$ , temos de resolver o problema de minimização

$$\text{dist}(\hat{G}, G(f(\cdot, y))) \rightarrow \min. \quad (10)$$

Usando esta metodologia conseguimos obter o modelo pré-operativo (ver figura 8b).

Antes da cirurgia de redução mamária o cirurgião desenha com um marcador, na pele da paciente, as linhas de incisão. Com estas é assinalado o reposicionamento do mamilo, tal como mostra a figura 9a. Na figura 9b ilustra-se a partir das linhas de incisão quais serão as partes cisadas que serão unidas uma à outra. A figura 9c mostra que outra das superfícies resultantes da incisão é unida ao tronco. O resultado da cirurgia é a solução do PGCP, onde  $B$  é a mama incisada. A sua forma é determinada pelos parâmetros  $a$  e  $h$  (ângulo de incisão e distância do ponto D ao tronco, ver figuras 10 e 11). Baseando-nos nas linhas de incisão marcadas (ver figura 8a), consideramos que a mama tem um plano de simetria.

É aquele que passa perpendicularmente ao tronco atravessando o mamilo, dividindo a mama em duas partes iguais. Então, no estado neutro, imaginamos que a mama é uma porção de esfera com raio da base  $R$  e altura  $H$  (ver figura 10). Para a modelação da cirurgia de redução mamária realizamos apenas as experiências para metade da mama, devido à simetria (ver figura 8b). Além disso, não tomamos em consideração o pedículo do mamilo (ver figura 9a). Na figura 10, vemos o esquema de marcação da cirurgia de meia mama. Para estabelecer os planos de incisão ABD e BCD, estabelecem-se as posições dos pontos desde A a D, usando as medidas  $s$  (distância do ponto A ao centro da mama),  $d$  (distância do ponto C ao meio do plano horizontal da mama),  $a$  e  $h$ .

Aplicando diferentes tipos de incisões, alterando os parâmetros  $h$  e  $a$ , obtemos geometrias finais distintas (ver figura 12). Como é demonstrado na figura 13, resolvendo este problema podemos modelar com bastante precisão a forma da mama depois da cirurgia.

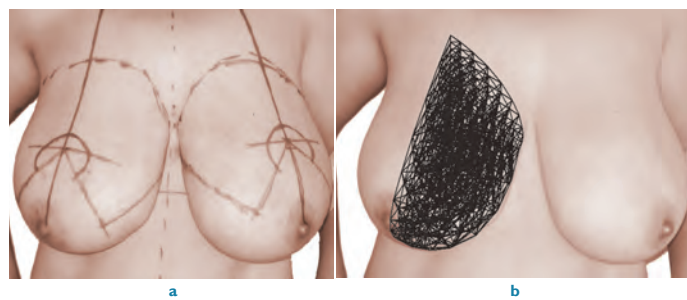


Figura 8: Marcas das linhas de incisão e modelo pré-operativo da mama.

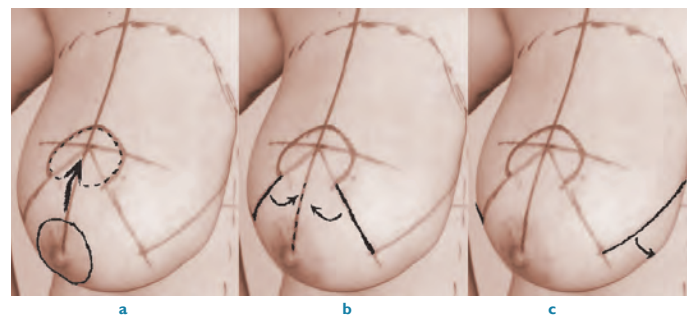


Figura 9: Esquema de incisão dos tecidos.

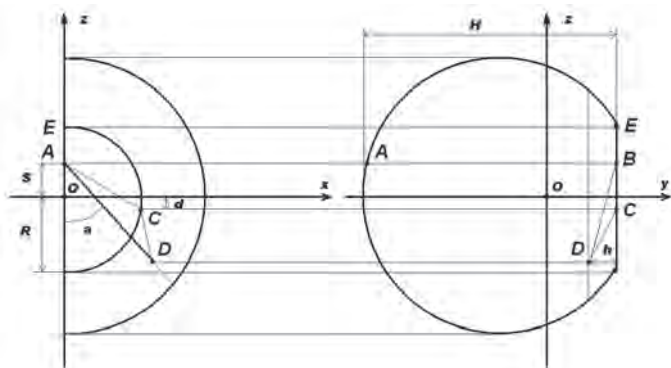


Figura 10: Esquema de incisão dos tecidos, dependendo dos parâmetros de incisão  $a$ ,  $h$  e  $d$ .

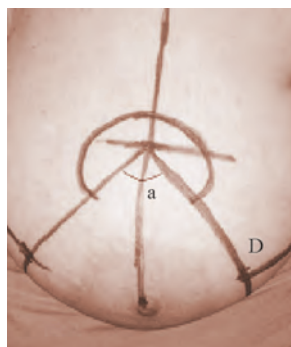


Figura 11: Ângulo  $a$  e ponto D.

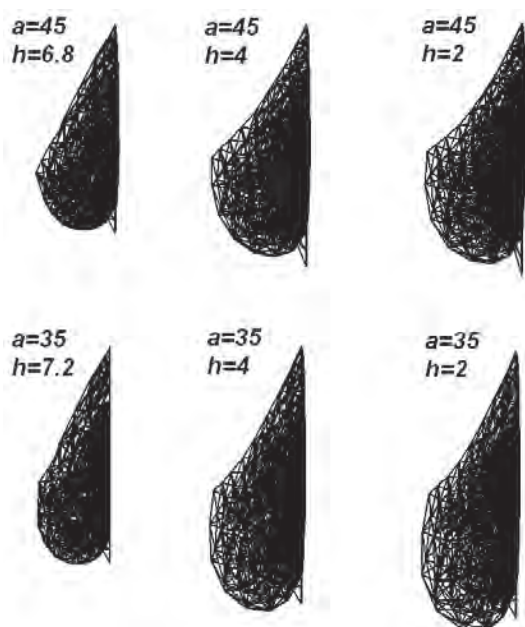


Figura 12: Resultados da cirurgia fazendo variar os parâmetros  $a$  e  $h$ .

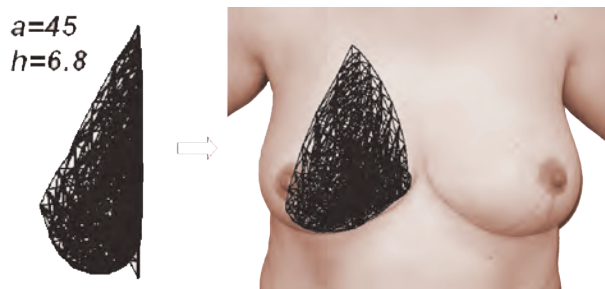


Figura 13: Modelo da mama obtido antes da cirurgia e comparação com a geometria final da mama depois da cirurgia.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo desenvolvido permite-nos simular diferentes resultados da redução mamária dependendo dos diferentes padrões de incisão. Mais especificamente, dependendo do valor do ângulo  $a$  e do valor da distância  $h$  aplicados na marcação pré-operativa, é possível prever a geometria final da mama, possibilitando-nos otimizar o resultado da cirurgia. No caso mostrado (figura 8), assumimos 6.8 para o parâmetro  $h$  e 45 graus para o parâmetro  $a$ , obtendo a forma da mama mostrada na figura 13. Essa figura dá a possibilidade de comparar o resultado da modelação com o caso clínico real.

A redução mamária é uma área cirúrgica complexa e os cirurgiões menos experientes podem enfrentar sérias dificuldades no processo de estimação e análise dos resultados da cirurgia. A aplicação de métodos computacionais possibilita a simulação da redução mamária com resultados plausíveis, e, além do planeamento pré-operatório, os simuladores deste tipo podem ser muito úteis para o treino dos jovens cirurgiões.

A história da cirurgia plástica pode ser conhecida através do livro [4]. O leitor interessado em conhecer a história do Cálculo da Variações (CV) e alguns métodos elementares de resolução do problema do CV baseados nas ideias físicas pode consultar o livro [6]. O leitor mais preparado pode ler o livro [5]. Como uma introdução aos métodos numéricos da física matemática podemos recomendar o livro [3].

Este artigo é uma apresentação mais acessível dos trabalhos [1, 7, 8, 2] que os autores desenvolveram em colaboração com os cirurgiões plásticos do Centro Hospitalar de Vila Nova de Gaia, Prof. Horácio Costa e Dra. Augusta Cardoso, e a quem mostram todo o seu apreço pela disponibilidade que lhes dedicaram. Um agradecimento a Alessandro Margheri, a Isabel Rodrigues e a Tatiana Tchemisova pelos comentários e sugestões.



## REFERÊNCIAS

[1] Cardoso A, Smirnov G, Costa H, Sá V (2009) “Métodos Variacionais de Engenharia Biomecânica em Cirurgia Plástica de Tecidos Moles”. In: 5ª Conferência de Engenharia, Engenharia’ 2009 - Inovação e Desenvolvimento, Covilhã, 25 a 27 de Novembro, Portugal.

[2] Cardoso A, Costa H, Sá V, Smirnov G (2010) “On the importance of Chassignac’s space in breast modelling”. In: IV European Conference on Computational Mechanics, Paris, May, 16-21, France.

[3] Fletcher C. (1984) “Computational Galerkin Methods”, Springer-Verlag.

[4] Santoni-Rugiu P, Sykes J (2007) “A History of Plastic Surgery”, Springer-Verlag.

[5] Smirnov G, Bushenkov V (2005) “Curso de Optimização: Programação Matemática, Cálculo da Variações, Controlo Óptimo”. Escolar Editora.

[6] Smirnov G, Rodrigues I (2006) “Matemática: Origens e Aplicações”. Escolar Editora.

[7] Smirnov G, Sá V (2007) “Simulação Numérica da Cirurgia Plástica da Mama”. In: CMNE/CILAMCE 2007, Porto.

[8] Smirnov G, Sá V (2009) “Métodos de determinação dos parâmetros que influenciam os resultados da cirurgia plástica de redução mamária”. In: Congresso de Métodos Numéricos en Ingeniería 2009, Barcelona.

### SOBRE OS AUTORES

**Gueorgui Smirnov** é licenciado em Matemática Aplicada pelo Instituto de Física e Tecnologia de Moscovo. Obteve o Doutoramento pela Universidade Estatal de Moscovo. Actualmente é professor na Escola de Ciências da Universidade do Minho e pertence ao Centro de Física da mesma Universidade.

**Vera Sá** é licenciada em Matemática Aplicada pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Actualmente é aluna de doutoramento da mesma Faculdade.



# 6º ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

28 a 31 de agosto de 2011  
São João del-Rei, MG, Brasil

Coordenadores científicos:  
Luis Saraiva (Universidade de Lisboa, Portugal)  
Sergio Nobre (UNESP/Rio Claro, Brasil)  
Coordenadora local:  
Romélia Mara Alves Souto (UF5J, Brasil)

informações  
[www.ufsj.edu.br/elbhm](http://www.ufsj.edu.br/elbhm)





AMÍLCAR BRANQUINHO  
Universidade de  
Coimbra  
[ajpb@mat.uc.pt](mailto:ajpb@mat.uc.pt)

## TOMOGRAFIA DE PAPEL

Caro Leitor,

Com este canto abrimos o tema da modelização de processos complexos a partir de exemplos simples, mas claros, do como funciona. Esperamos, desta forma, levar o leitor a interessar-se por Matemática mais evoluída e sofisticada.

Este canto começa no dia, em que depois de um bom jogo de futebol no Estádio Universitário de Coimbra, uma fractura nos levou ao Hospital Universitário. O médico ortopedista disse-nos que se tratava de uma fractura do rádio, e que se teria de efectuar um raio X para que a história clínica ficasse completa. Confessou-nos que tinha desenvolvido visão de raio X mas que era melhor guardarmos segredo. . .

Tentamos explicar-lhe que estes exames, e outros relacionados com os raios X, encerram conceitos matemáticos importantes e muito interessantes, mas que, provavelmente não contribuiria para a melhora da sua visão e até do seu desempenho. Este episódio levou-nos a tentar expor, de forma simplificada sem minimizar os conceitos de Matemática fundamental associados, alguns processos relacionados com os raios X. Ainda que não seja difícil reconhecer a importância prática de estudar Matemática, relativamente poucos aceitariam que a Matemática da vida quotidiana possa ser um tema atractivo para reflexão ociosa.

Desde os anos 70 se têm desenvolvido métodos para cortar as pessoas de forma virtual, ainda que os reais sejam mais efectivos e de longe mais antigos, que têm grande utilidade na prática médica. Aqui vamos dar uma pequena introdução à

reconstrução algébrica, próxima do método que actualmente é usado nas tomografias axiais computadorizadas. Neste tipo de *tomografias*, processo radiológico que permite obter uma imagem nítida de um só plano de corte de órgão, com apagamento dos outros planos, utiliza-se a diminuição da intensidade que sofrem os raios-X ao atravessar os tecidos.

### CONSIDERAÇÕES SOBRE O MODELO

É sabido que nem a pessoa mais robusta pode deter a passagem dos raios X, pode até tornar-se um super-herói ou um super-maléfico.

O que se sabe é que quando um tecido é atravessado por um fino feixe de raios X com intensidade  $I$ , a diminuição desta intensidade depende da densidade,  $\rho$ , do tecido e do seu diâmetro. Se dividirmos a zona atravessada pelos raios em pequenas regiões infinitesimais, onde a densidade pode ser considerada constante, será natural supor que a intensidade diminua directamente com estas duas quantidades, podemos até adimensionalizar o problema de forma a ter 1 como constante de proporcionalidade (cf. Figura 1). Tomando limite quando o diâmetro de cada região vai para 0, obtemos

$$-dI = \rho I dx \text{ e portanto } -(\ln I)' = \rho.$$

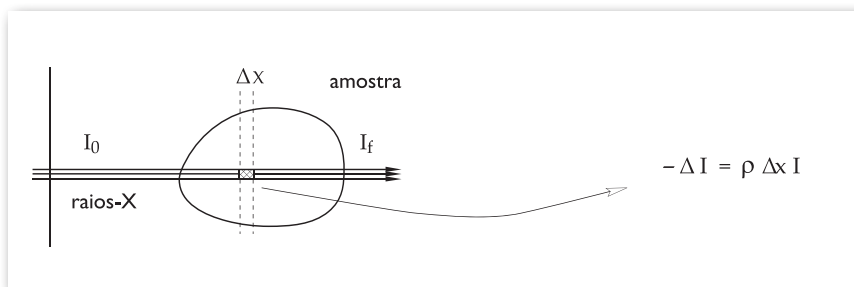


Figura 1

Assim, se denotarmos por  $I_0$  e  $I_f$  as intensidades dos raios-X inicial (ao entrar na amostra) e final (à saída), temos depois de integrar

$$\ln I_0 - \ln I_f = \int \rho.$$

Vemos assim, que conhecendo as intensidades, inicial e final dos raios-X, podemos calcular os integrais da densidade ao longo de linhas rectas,  $L$ , que os raios traçam.

Introduzimos uma malha quadrangular de  $M \times M$  quadrados sobre a região a analisar. Se a malha for suficientemente fina, a densidade,  $\rho_{i,j}$ , pode considerar-se constante em cada quadrado,  $c_{i,j}$ . Por outro lado, a diminuição da intensidade do feixe de raios-X ao longo da recta  $L$ , permite-nos conhecer  $\int_L \rho$  que se aproxima por uma soma de Riemann, tendo-se

$$\ln(I_0/I_f) = \int_L \rho = \sum \rho_{i,j} |c_{i,j} \cap L|.$$

Aparentemente o problema está resolvido, calculando o valor das densidades  $\rho_{i,j}$  com  $i, j = 1, \dots, M$  a partir do sistema de equações lineares anterior, que deriva do conhecimento de um número suficiente de feixes de raios-X.

No entanto, este modelo, apesar da sua simplicidade, não é satisfatório na prática devido à sua lentidão e imprecisão. Parte da imprecisão deriva de somente termos resultados aceitáveis quando o sistema linear associado tem dimensões gigantescas. Para evitar esta situação considera-se, no modelo anteriormente descrito, que  $\rho$  é uma função contínua. Aparecem-nos assim as designadas *transformadas de Radon*, que são integrais curvilíneas de funções escalares, para medir a sombra da amostra. Em 1917, J. Radon mostrou como recuperar a função densidade a partir do conhecimento da sombra da amostra.

Podíamos pensar, mais uma vez, que o problema acaba aqui, mas tal não é certo, pois há todo um trabalho de Cálculo Numérico, não desprezável, a desenvolver, mas este não vai ser objecto deste canto.

## MEDIR A INTENSIDADE DA LUZ.

Antes de avançar para a construção do nosso modelo, vamos ensinar a medir a intensidade de luz.

É sabido que uma vela colocada a uma distância dupla de uma outra dá uma luz menos intensa. Pode dizer-nos quantas vezes menos intensa? Duas vezes?

Não. De facto, mesmo que colocássemos duas velas não obteríamos a mesma intensidade de luz da colocada

à distância inicial. Para conseguir a mesma intensidade necessitaríamos de 4 velas. A uma distância tripla da inicial, por forma a obtermos a mesma intensidade de luz inicial, necessitaríamos de 9 velas. . .

Isto acontece porque a intensidade da luz é inversamente proporcional ao quadrado da distância a que se coloca o foco. Esta é a lei da diminuição da intensidade da luz com a distância.

Conhecida a lei, vamos aplicá-la para comparar a intensidade de duas lâmpadas, ou em geral de duas fontes de luz com intensidade distinta. Por exemplo como procederia para analisar quantas vezes brilha mais uma lâmpada que uma vela? Vejamos então quantas velas necessitamos para obter a intensidade da luz que a lâmpada nos dá.

Para tal coloque a vela e a lâmpada acesas num extremo de uma mesa, e o no outro uma folha de cartolina verticalmente relativamente ao tampo da mesa. Diante da folha coloque, também verticalmente, um lápis. Este lápis projectará sobre a cartolina duas sombras, uma que provém da luz emitida pela vela e outra pela luz emitida pela lâmpada. A densidade das sombras não é igual. Aproxime a vela do lápis até conseguir que as densidades sejam iguais. Nessa altura só terá que medir as distâncias e aplicar a fórmula indicada anteriormente.

## CONSTRUÇÃO DO MODELO

Vamos tentar explicar os rudimentos do processo indicado atrás, substituindo os tecidos por uns cubinhos translúcidos, por forma a ilustrar a reconstrução algébrica. O modelo que passamos a descrever foi idealizado pelo nosso amigo Fernando Chamizo nas suas lições de “Cálculo Diferencial e Integral”.

Vamos necessitar de cartolina, plástico semi-transparente e uma lanterna.

Com a cartolina fabricamos nove cubos, e nas suas faces laterais abrimos janelas para que possa passar a luz. Estas janelas vão ser cobertas em alguns destes cubos com o plástico



semi-transparente. Ao pôr três cubos seguidos e enfocados com a luz da lanterna, podemos detectar no monitor (uma folha de cartolina) quatro possíveis intensidades, dependendo de nenhum, um, dois ou os três cubos têm plástico nas suas janelas (cf. Figura 2). Convencionalmente designaremos estas intensidades por  $I = 1, 1/2, 1/3, 1/4$ , respectivamente. Será importante que se familiarize com elas por forma a poder distingui-las à vista desarmada. Caso não consiga distinguir as intensidades deve mudar de plástico.

Disponhamos os cubos formando quadrado (pode até solicitar a alguém que o faça por si e que tape o resultado com uma folha). Dirigiremos o foco da lanterna nas três direcções horizontais, nas três direcções verticais e nas três direcções oblíquas (correspondentes a três das quatro esquinas). Desta forma obteremos uma relação entre os números de cubos semi-transparentes nas secções consideradas e as intensidades registadas. Suponhamos que numeramos os cubos como na Figura 3, e atribuiremos o valor 0 ao  $i$ -ésimo cubo,  $C_i$ , se estiver oco, e o valor 1, se for semi-transparente. Temos assim as relações

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= I_1^{-1} - 1 \\ C_4 + C_5 + C_6 &= I_2^{-1} - 1 \\ C_7 + C_8 + C_9 &= I_3^{-1} - 1 \\ C_1 &= I_7^{-1} - 1, \quad C_7 = I_8^{-1} - 1 \\ C_1 + C_4 + C_7 &= I_4^{-1} - 1 \\ C_2 + C_5 + C_8 &= I_5^{-1} - 1 \\ C_3 + C_6 + C_9 &= I_6^{-1} - 1 \\ C_9 &= I_9^{-1} - 1 \end{aligned}$$

No caso da Figura 3 obteríamos o vector das intensidades

$$\begin{aligned} I &= (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9) \\ &= (1/3, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/3, 1/2, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Temos então que resolver um sistema de nove equações a nove incógnitas. Pode ver-se que este sistema é possível e indeterminado, mas como procuramos soluções  $C_i$  em  $\{0, 1\}$ , obtemos uma única solução. Acrescentando uma nova relação, i.e.  $I_{10} = 1/2$ , que passa pela esquina  $C_3$ , obtemos finalmente um sistema determinado

$$\begin{aligned} C &= (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9) \\ &= (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

O que acabámos de fazer foi obter a composição e a estrutura da matriz de cubos sem necessidade de a decompor,

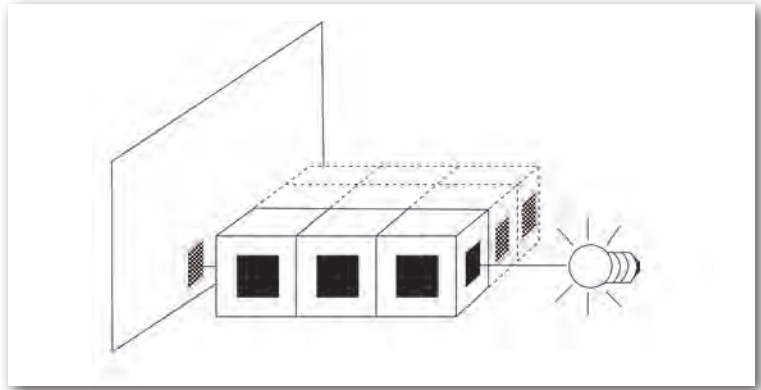


Figura 2

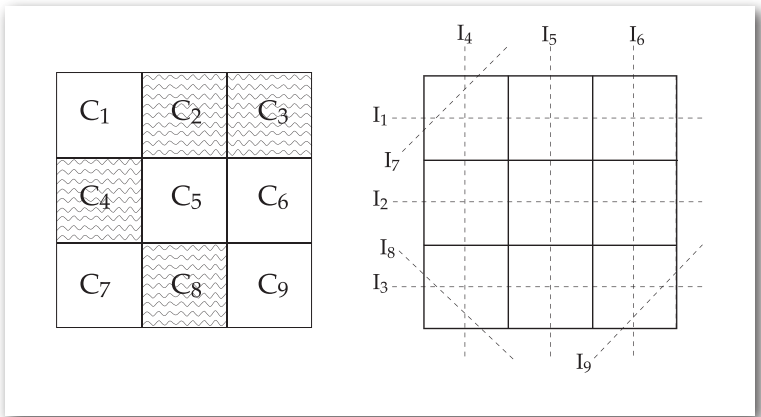


Figura 3

e usando simplesmente a informação obtida pelos raios de luz que a atravessam.

### DO LÚDICO AO PRÁTICO

A experiência que acabámos de descrever dá-nos a ideia de como se fazem as tomografias axiais computadorizada. Há, no entanto, um abismo de dificuldades para levar esta ideia à prática.

Suponhamos, por exemplo, que desejamos ter uma resolução comparável a de um monitor, e para tal imaginamos um reticulado de  $1000 \times 1000$  pixels que contém a secção do corpo humano que vamos examinar. Isto leva-nos a considerar  $10^6$  variáveis, que representam a densidade (opacidade aos raios X) em cada pixel. O sistema linear correspondente terá uma matriz de dimensão  $10^6 \times 10^6$ . As estimações gerais do número de operações para resolver um sistema linear, por eliminação de Gauss, é da ordem do cubo do número de variáveis, no nosso caso  $10^{18}$ . Mesmo com o auxílio dos computadores mais rápidos não poderia ser resolvido em tempo útil, o que não ajudaria a reduzir as listas de espera nos hospitais!



FABIO CHALUB  
Universidade Nova  
de Lisboa  
chalub@fct.unl.pt

## EM VENTOS TURBULENTOS

Quem já passou de avião pelo equador sabe que esta é uma região de turbulência. Fortes ventos ascendentes dificultam a navegação aérea naquilo que se chama “zona de convergência intertropical”. Agora um novo modelo para a circulação atmosférica na zona tropical da Terra vem explicar este e outros fenómenos, gerando luz sobre os possíveis efeitos do aquecimento global.

**A** Terra roda. Sabemos isto, pelo menos, desde Galileu; na verdade, sabemos isto há muito mais tempo. Mas foi Galileu, no seu livro “Diálogo sobre Duas Novas Ciências”, quem mostrou que a rotação da Terra não necessariamente gera ventos na direcção oposta ao movimento. Este foi um dos primeiros passos na criação de um conceito central da física, até então desconhecido: a inércia, a tendência dos corpos para manterem o seu estado de repouso ou movimento na ausência de forças externas. Assim, quando a Terra gira, a atmosfera que a circunda acompanha-a.

Newton conseguiu formular de forma precisa esta ideia alguns anos mais tarde, no que é hoje conhecido como a primeira lei da dinâmica. No entanto, ela não é válida para todos os referenciais, como sabe qualquer um que já fez uma curva a alta velocidade num carro. A força aparente (conhecida como centrífuga) que nos atira para fora não tem uma causa clara quando o problema é analisado no interior do veículo. É a nossa tendência inercial para ir em frente enquanto o carro vira para o lado que gera este efeito.

No caso do carro, tudo é transparente, seja a explicação ou os seus vidros. Vemos o que está do lado de fora e isto simplifica a análise. No entanto, existe um outro referencial que gira e neste é mais difícil perceber o que está a acontecer: a Terra. A rotação do nosso planeta não é facilmente sentida no dia-a-dia. De facto, mesmo o mais óbvio dos efeitos, a “força” centrífuga, que nos puxa para fora de um referencial em rotação, não é perceptível na superfície da Terra, porque ela se mistura com a gravidade. Ambas são proporcionais à massa e não dependem do movimento do corpo.

Existe um outro efeito, no entanto, em geral muito mais fraco, mas que dadas as enormes massas e as longas distâncias envolvidas nos fenómenos atmosféricos, acaba por se tornar proeminente: o efeito de Coriolis. Este nome deve-se ao físico francês Gaspard-Gustave Coriolis, apesar de o tratamento matemático dos referenciais em rotação (um caso particular dos referenciais não inerciais – aqueles onde não vale a lei da inércia de Newton) ter aparecido antes.

Poderíamos estudar a circulação dos ventos como vista do espaço, naquele que é por excelência o referencial preferido dos físicos, o das estrelas distantes. No entanto, é muito mais conveniente estudá-la na superfície da Terra. Para termos em conta os efeitos não inerciais da rotação da Terra, é necessário incluir então a força de Coriolis. Veja a figura 1.

Os raios de Sol atingem as latitudes elevadas de forma tangencial, enquanto no equador a insolação é directa. Isto faz com que a temperatura média nas várias latitudes seja distinta, e assim surge um mecanismo de transferência de calor de um lado para o outro. Os meteorologistas costumam dividir a atmosfera em três partes para o estudo da circulação global dos ventos: as células de Hadley, na região tropical, entre 30 graus de latitude sul e norte; a célula Polar, acima dos 60 graus em cada um dos hemisférios; e a célula de Ferrel, na região intermédia entre as outras duas. Cada uma possui o seu mecanismo próprio de circulação do vento. Veja a figura 2.

O artigo [1], da autoria dos matemáticos Paul Milewski, que trabalha na Universidade de Wisconsin, e Esteban Tabak, do Instituto Courant, em Nova Iorque, aplica as equações da dinâmica dos fluidos para uma melhor compreensão da célula de Hadley.

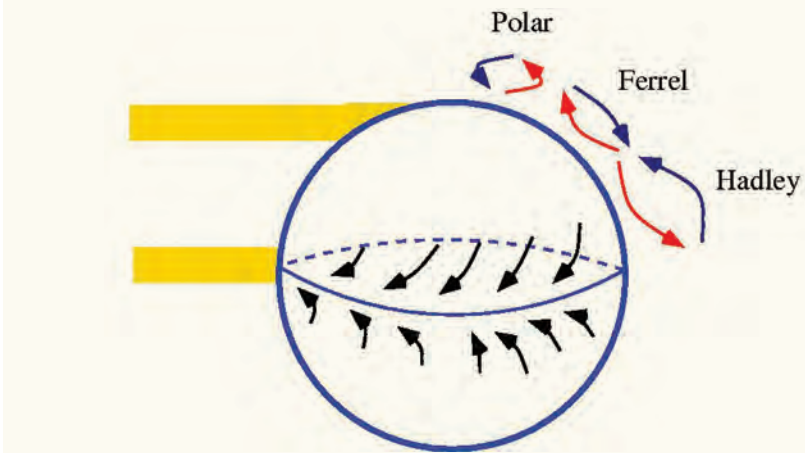


Figura 1: Cima: diagrama de como seria a circulação dos ventos se o único efeito a levar em consideração fosse o da força de Coriolis. Baixo: um ciclone no hemisfério norte. Veja que a direção de circulação dos ventos é contrária à que seria de esperar apenas pela rotação da Terra. Isto deve-se a mudanças locais nos sistemas de altas e baixas pressões.

Figura 2: Diagrama geral de circulação de ventos: as setas vermelhas indicam os ventos quentes nas células de Hadley, Ferrel e Polar, e as azuis, os ventos frios nas mesmas células. A preto estão marcados os ventos alísios. À esquerda, vemos os raios de sol. Duas seções idênticas iluminam porções diferentes da Terra. A seção que chega à região polar é responsável por aquecer uma região significativamente maior da Terra. (A figura acima representa um dia de equinócio.)

A equação básica da dinâmica dos fluidos é a chamada equação de Navier-Stokes, tão complicada que algumas das suas propriedades, ao serem demonstradas, valem um milhão de dólares (e um dos problemas do milênio). Os autores, ao considerá-la, fizeram uma simplificação típica nesta área: consideraram que os efeitos não-lineares (sempre os mais complicados) são pouco intensos e que os perfis que aparecem nas soluções são muito mais longos do que profundos. Esta última aproximação é natural, dado que a atmosfera é uma camada muito fina quando comparada com qualquer outra dimensão de interesse, como o raio da Terra.

Ao escrever as equações de movimento, os autores tiveram um cuidado inédito: o de considerar as flutuações diárias da temperatura, de dia mais quente, à noite mais frio. Isto dá origem a ciclos de 24 horas, consistentes com o que se encontra nos ventos tropicais e distintos do regime das regiões temperada e polar.

A atmosfera é transparente para os raios solares, fazendo com que o Sol não aqueça directamente o ar, mas sim o solo, que reemite a radiação. Durante o dia, quando o chão está mais quente do que o ar, são causadas correntes ascendentes; durante a noite, o efeito é suspenso, não invertido.

Escrevendo as equações em todos os detalhes e usando as aproximações que nos permitem tratá-las com cuidado sem perder a precisão, um termo sobressai: a diferença entre a velocidade angular da Terra ( $2\pi$  radianos por dia) e a força de Coriolis no local (duas vezes a velocidade angular multiplicada pelo seno da latitude). Quando este termo é positivo,

há oscilações; quando é negativo, há decaimento (dissipação), um fenómeno que não é estranho para quem já estudou o oscilador harmónico amortecido.

O ponto importante é que a alteração entre ser positivo e negativo ocorre quando o seno da latitude é igual a meio, ou seja, aos 30 graus, seja para sul ou para norte. Desta forma, os autores dão um embasamento matemático à percepção empírica de que a célula de Hadley está confinada a uma região específica. Na verdade, fazem muito mais do que isso, pois concluem que este confinamento se deve a um conjunto de primeiros princípios e não a fenómenos ambientais, atmosféricos ou geofísicos específicos. Negam, portanto, a expectativa comum sobre como se comportará a célula de Hadley com o progressivo aumento das temperaturas médias na Terra. Muitos investigadores acreditam que ela deve expandir-se, aumentando a região terrestre varrida pelos ventos alísios, uma característica da circulação atmosférica na região tropical. Com os presentes argumentos, a largura longitudinal da célula não deve crescer; o que o aquecimento global deve causar é uma maior altitude da célula de Hadley – apesar de isto não poder ser rigorosamente provado pelo modelo, dado que ele não vale para grandes altitudes.

Esperemos que o futuro não prove quem está correcto!

## REFERÊNCIAS

- [1] Paul Milewski and Esteban Tabak, "The Diurnal Cycle and the Meridional Extent of the Tropics", *Physica D* 240 (2011) 233-240





ANTÓNIO MACHIAVELO  
Universidade do Porto  
ajmachia@fc.up.pt

## NÚMEROS HIPERGIGANTESCOS

Suponha o leitor que entra num concurso em que ganha a pessoa que escrever, num minuto, o maior número natural numa página A5. Que número escreveria? Nesta pequena rubrica é descrita uma poderosa técnica para, usando muito pouca tinta, escrever números ultra-hipergigantescos. Poderá assim ganhar facilmente uma tal competição, sem dar sequer qualquer hipótese à grande maioria dos seus potenciais adversários.



Foto de Bobamy (domínio público)

Numa obra dirigida ao rei Gelão II de Siracusa, que ficou conhecida pelo nome de “O Contador de Areia”, Arquimedes (ca. 287-212 aEC) exhibe o poder de um sistema que desenvolveu para nomear números maiores do que aqueles que eram possíveis exprimir na nomenclatura então usada. Para melhor demonstrar as potencialidades do seu esquema, Arquimedes mostra que este permite exprimir o número de grãos de areia necessários para preencher todo o Universo, mesmo usando estimativas largas para o que as observações possíveis na altura permitiam inferir sobre as dimensões do Cosmos.

Para descrever o seu sistema, Arquimedes começa por observar que o último número a ter um nome próprio é a miríade, igual a 10.000. Por conseguinte, podiam expressar-se naturalmente todos os números até uma miríade de miríades, ou seja, dez mil miríades. Designa então estes de *números primeiros* e chama a dez mil miríades a unidade dos *números segundos*. Estes são os múltiplos desta unidade, até dez mil miríades dessa unidade, que é por sua vez a unidade dos *números terceiros*. Tudo isto pode então ser continuado até dez mil miríades da unidade dos números cuja ordem é precisamente dez mil miríades! Chega assim ao número que actualmente escreveríamos como  $(10^8)^{10^8}$  (é um bom exercício perceber que assim é!).

Mas Arquimedes não pára aqui! Chamando a todos os números assim nomeados *números do primeiro período*, nomeia o último destes como sendo a unidade do *segundo*

período, e usando toda a construção atrás descrita chega aos números do terceiro período. Prossegue até chegar aos números do período de ordem dez mil miríades, para nomear o último destes, que é dez mil miríades dos números de ordem dez mil miríades do período de ordem dez mil miríades! Deixamos ao leitor mais aventureiro o exercício de escrever este número na notação actual.

Uma tradução para inglês do texto de Arquimedes, com excelentes anotações, pode ser encontrada na página de Henry Mendell, em

<http://www.calstatela.edu/faculty/hmendell>,

num link intitulado “Vignettes of Ancient Mathematics”, que contém muitas outras traduções anotadas de textos de filosofia e de matemática grega.

Num artigo intitulado “Mathematics and Computer Science: Coping with Finiteness”, publicado na revista Science em 1976 (vol. 194, pp. 1235-1242), cujo texto está disponível em

<http://www.sciachitano.it/Spazio/Coping%20with%20Finiteness.pdf>,

Donald Knuth actualiza as contas de Arquimedes, introduzindo uma notação para descrever números verdadeiramente gigantescos, com os quais o mestre grego não poderia sequer sonhar. Começando com  $a \uparrow b = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_b$ , define  $a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow a \uparrow \dots \uparrow a}_b$  e, em geral,

$$a \uparrow\uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow a))}_{b \text{ cópias de } a}$$

Isto é um exemplo de uma definição *recursiva*, que consiste em descrever um conceito à custa de casos mais simples do mesmo, de modo a que tudo se reduza eventualmente, num número finito de passos, a um caso base, sendo este claramente especificado. Usando a abreviatura  $a \uparrow^n b$  para  $\underbrace{a \uparrow \dots \uparrow}_n b$ , sendo  $a, n \in \mathbb{N}$  e  $b \in \mathbb{N}_0$ , pode-se reescrever a definição dada de um modo um pouco mais conciso:

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} 1, & \text{se } b = 0; \\ a^b, & \text{se } n = 1; \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)), & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Exercício para os mais corajosos: “entender” a grandeza de  $3 \uparrow^4 3$ .

John H. Conway criou uma notação que permite exprimir facilmente números ainda maiores! Para tal introduziu aquilo a que agora se chama *cadeias de Conway*, objectos do tipo  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n$ , onde  $a_i \in \mathbb{N}$ . Estas representam números que são definidos recursivamente do seguinte modo, onde  $C$  representa uma cadeia arbitrária e  $a, b \in \mathbb{N}$ :

1. Uma cadeia sem setas,  $a$ , representa o próprio número  $a$ ;
2.  $a \rightarrow b$  significa  $a^b$ ;
3.  $C \rightarrow a \rightarrow 1$  é igual a  $C$ ;
4.  $C \rightarrow 1 \rightarrow (b+1)$  é igual a  $C$ ;
5.  $C \rightarrow (a+1) \rightarrow (b+1)$  é igual a  $C \rightarrow (C \rightarrow a \rightarrow (b+1)) \rightarrow b$

Há que ter algum cuidado na aplicação desta definição, pois uma cadeia é para ser vista como um todo, não havendo aqui nenhum tipo de associatividade. Por exemplo, o leitor pode verificar que os números  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ ,  $(2 \rightarrow 3) \rightarrow 2$  e  $2 \rightarrow (3 \rightarrow 2)$ , são todos diferentes. Para mais informações, ver

[http://en.wikipedia.org/wiki/Conway\\_chained\\_arrow\\_notation](http://en.wikipedia.org/wiki/Conway_chained_arrow_notation)

e também

[http://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Conway\\_chained\\_arrow\\_notation](http://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Conway_chained_arrow_notation)

É um excelente exercício mostrar que  $a \rightarrow b \rightarrow n$  é igual a  $a \uparrow^n b$ , assim como tentar compreender a dimensão de um número como  $5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ . E qual é maior, este último número ou  $4 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ ?

Que utilidade tem tudo isto? Há algumas modestas aplicações, aparecendo alguns destes números ultramonstruosos em certas considerações combinatórias. O exemplo mais famoso é o chamado *número de Graham*. Sobre este assunto, ver:


[http://en.wikipedia.org/wiki/Graham's\\_number](http://en.wikipedia.org/wiki/Graham's_number).

Por outro lado, estas construções ajudam a entender melhor o próprio conceito de recursividade, desempenhando um papel relevante em teoria da computação. Para mais detalhes, consultar:

[http://en.wikipedia.org/wiki/Ackermann\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Ackermann_function).

Mas, acima de tudo, estas “brincadeiras” de criação de nomenclatura numérica servem para exercitar um pouco a imaginação, o que é muito mais do que pode ser dito dos concursos com que vários canais de televisão bombardeiam os seus incautos telespectadores!



The image is a mosaic artwork. It features a large, central red triangle that is semi-transparent, revealing a grey mosaic of a donkey's head with long, curved horns. The background of the entire image is a mosaic of small, light-colored tiles, some of which are arranged in concentric circular patterns. The overall composition is a blend of geometric shapes and organic forms.

# O Asno, o Triângulo e uma Antiga Refutação do Postulado Quinto dos “Elementos”

BERNARDO MOTA

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE BERLIM E UNIVERSIDADE DE LISBOA  
bernardomota@campus.ul.pt



A história do asno e do triângulo conta-se em poucas palavras. Sabemos por Proclo, um comentador de Euclides, do século V, que os epicuristas gostavam de ridicularizar o teorema vigésimo do primeiro livro dos “Elementos” (dois lados de um triângulo tomados em conjunto de qualquer maneira são maiores do que o terceiro), por demonstrar um resultado óbvio até para um asno.<sup>1</sup> De acordo com Proclo, a nossa única fonte sobre este assunto, o argumento dos epicuristas procedia da seguinte maneira: imagine-se que num dos vértices de um triângulo está colocado um asno e que noutra vértice está colocado um cesto de ração. Quando o asno, esfomeado, pretende chegar à comida, percorre o lado que une o vértice onde se encontra àquele onde está a comida, em vez de percorrer os outros dois. O burro procederia desta forma porque reconheceria que um dos lados de um triângulo determina um caminho mais curto do que os dois restantes; ora, sendo este facto a tal ponto evidente que até um burro o compreende, a sua demonstração é, no mínimo, escusada.<sup>2</sup>

A história do burro e do teorema vigésimo dos “Elementos” tornou-se célebre e provocou inúmeras reacções ao longo dos séculos. Algumas foram encolerizadas e directas; Henry Savile não gostou e não teve papas na língua em afirmar que os autores deste extraordinário raciocínio eram dignos, eles próprios, de almoçarem a palha com o dito asno.<sup>3</sup> A reacção parece justa; afinal de contas, conhecer o facto não é o mesmo

que compreendê-lo por meio de uma explicação satisfatória e plausível. O próprio Proclo aproveita de imediato para esclarecer o erro dos epicuristas: que o resultado demonstrado seja manifesto para os sentidos não significa que seja manifesto para o pensamento científico; também é evidente para os sentidos que o fogo aquece, mas nem por isso deixamos de inquirir a razão por que aquece; ou ainda, é evidente para os sentidos que nos movemos, mas carece de explicação científica perceber exactamente como, ou seja, se o fazemos ao longo de um meio sem parte ou de intervalo para intervalo e, neste caso, como conseguimos atravessar um número infinito de intervalos.<sup>4</sup>

Sucedem que os epicuristas não eram seguramente ingénuos a ponto de levantar uma objecção infantil à geometria euclidiana. Para interpretarmos convenientemente a sua reserva e a forma de a expressar, temos de explicar brevemente a sua agenda, comparar a solução euclidiana com outras e entender os problemas matemáticos e filosóficos envolvidos. É este, por conseguinte, o plano do artigo.

Os epicuristas tornaram-se conhecidos pela sua hostilidade para com a geometria. O próprio Epicuro, fundador da escola e contemporâneo de Euclides (se aceitarmos a cronologia tradicional de ambos), era fervoroso adversário da matemática e promovia explicitamente, na sua acção educativa, o ataque à disciplina. Cícero (séc. I a.C.) informa-nos que Polieno, um importante epicurista de primeira geração,

Os epicuristas são hoje mais conhecidos pelas suas ideias no domínio da Ética. No entanto, procederam também a um exame crítico da geometria euclidiana, cuja importância na história da transmissão dos “Elementos” apenas recentemente começou a ser compreendida.

<sup>1</sup> O comentário de Proclo ao primeiro livro dos “Elementos” de Euclides está disponível em tradução inglesa: Glenn Morrow, “Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid’s Elements”. Princeton University Press, 1992; é a esta edição que me referirei ao longo do artigo. Refiro-me ao texto dos “Elementos” de Euclides a partir da edição de J.L. Heiberg; E.S. Stamatis, “Euclides I. Elementa I-IV”, Leipzig, Teubner, 1969. Também me referirei à clássica tradução inglesa de Thomas L. Heath (“The Thirteen Books of Euclid’s Elements”, 3 vols., New York, Dover, 1956; a 1.ª edição é da Cambridge University Press, 1908; a mesma editora publicou a 2.ª edição em 1925; a edição da Dover é a reimpressão da 2.ª edição).

<sup>2</sup> Uma história semelhante é contada por Sexto Empírico (século I), a propósito de Crisipo, o estóico (século III a.C.). Este filósofo afirmava que até um cão de caça compreende e aplica correctamente o *modus tollendo ponens* (ou A ou B; mas não A; logo, B); com efeito, se chega a uma encruzilhada enquanto persegue a sua presa e tem de escolher entre três caminhos, não sentindo o cheiro da sua vítima em dois deles, imediatamente escolhe o terceiro sem se preocupar com em verificar o cheiro novamente (Pir. 1.69).

<sup>3</sup> A afirmação encontra-se em “Praelectiones Tresdecim in Principium Elementorum Euclidis”, Oxford, 1621, p. 78.

<sup>4</sup> A contra-objecção de Proclo encontra-se em Morrow, 1992, p. 251.

começara por ser matemático, após o que passou a acreditar que a geometria era falsa, depois de aceitar os argumentos de Epicuro<sup>5</sup>. Polieno escreveu uma obra contra a geometria que mereceu uma resposta do tamanho de um livro por parte do mais famoso homem de ciência romano do século I a.C., Posidónio (que, aliás, parece ter andado por terras de Portugal e Espanha a estudar o fenómeno das marés). Um pouco mais tarde, outros epicuristas, como Demétrio de Lacónia e Zenão de Sídón (séc. II-I a.C.), escreveram monografias sobre geometria contendo inúmeras objecções a teoremas incluídos nos “Elementos”. Pelo menos mais outros dois membros da escola, Basílides e Filónides (séc. III-II a.C.), alcançaram reputação como géometras; o primeiro é mencionado na dedicatória de Hípsicles ao livro décimo quarto dos “Elementos”; o segundo, no início do segundo livro de “As Cónicas” de Apolónio.

A rejeição epicurista da matemática não era, portanto, ignorante. Pelo contrário, ela era levada a cabo por membros da escola com reputação e competência em matemática. O problema é que das obras destes autores restam apenas escassos fragmentos, o que torna muito difícil a tarefa de caracterizar em pormenor as objecções levantadas. Sabemos, no entanto, que a crítica epicurista era especialmente dirigida contra a geometria tal como exposta nos “Elementos”, e sabemos também a sua motivação genérica. É que a geometria euclidiana, seja por meio dos seus princípios, seja por meio das suas demonstrações, propõe conceitos como incomensurabilidade ou divisão *ad infinitum*, que os epicuristas entendiam que contrariavam a sua teoria das unidades mínimas da matéria<sup>6</sup>. Se a matéria é constituída por partículas mínimas indivisíveis, a geometria euclidiana é talvez interessante do ponto de vista conceptual, mas não é verdadeira, no sentido em que não exprime factos compatíveis com o mundo, mas antes conflituosos com a experiência (agora podemos compreender melhor a alusão feita por Proclo à forma como se processa o movimento, mais acima). Este é um ponto fundamental para compreender a história do burro contada anteriormente. Os epicuristas aceitam como verdadeiras algumas verdades matemáticas, mas não todas; apenas aquelas sobre as quais não restam dúvidas de que são compatíveis com a realidade física. O teste do burro é apenas uma maneira de salientar a veracidade de um facto matemático, resultante da sua adequação aos dados da experiência e da realidade.

Explicada a razão de ser da sua forma de expressão, vejamos agora o que os pode ter levado a realçar o carácter evidente do referido teorema.

A páginas tantas do seu comentário, Proclo apresenta um argumento que pretende refutar a tese de que duas rectas cortadas por uma terceira se intersectam quando os ângulos internos do mesmo lado da secante são menores do que dois ângulos rectos (o que equivale a contradizer o famoso postulado quinto dos “Elementos”). O argumento é o seguinte (ver fig. 1)<sup>7</sup>. Tracem-se duas semi-rectas  $AB$  e  $CD$  a partir dos extremos de um segmento de recta  $AC$  (e para o mesmo lado do segmento), de maneira a que os ângulos interiores que se formam sejam menores do que dois ângulos rectos. Bissecte-se  $AC$  em  $E$ ; tome-se em  $AB$  uma distância  $AF=AE$  e em  $CD$  uma distância  $CG=EC$ .

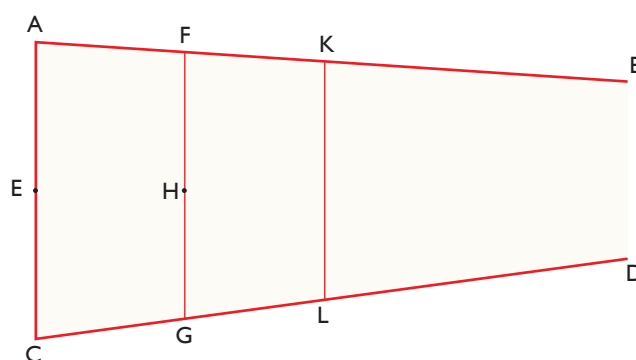


Figura 1: Uma refutação (epicurista?) do postulado quinto dos “Elementos”.

É claro que  $AF$  e  $CG$  não se encontram em qualquer ponto de  $FG$ , “porque se se encontrassem, dois lados de um triângulo tomados em conjunto seriam iguais ao terceiro”, o que é impossível. Novamente, trace-se a recta  $FG$ ; bissecte-se em  $H$  e tomem-se distâncias iguais em  $AB$  e  $CD$ , de tal forma que  $FH=FK$  e  $HG=GL$ . Chega-se à mesma conclusão; o argumento pretende que caso se prolongue o processo indefinidamente, fica provado que as rectas  $AB$  e  $CD$  não se intersectam, o que contradiz o postulado quinto.

Todos os ingredientes da visão antigométrica epicurista estão presentes. O raciocínio envolve paradoxos relacionados com o infinito que ecoam de alguma forma os famosos para-

doxos de Zenão (como o da lebre e da tartaruga, no caso de os ângulos internos do mesmo lado da secante serem iguais), mas está dirigido muito peculiarmente contra a geometria euclidiana, alicerçada como está no postulado quinto. Mas para este argumento (que utiliza a geometria contra ela própria) funcionar, precisa de admitir como verdade incontrovertida um facto matemático muito preciso: o de que quaisquer dois lados de um triângulo são maiores do que o terceiro. Os epicuristas precisam de justificar porque é que este teorema em particular é verdadeiro e para isso realçam a sua total evidência. Estamos em condições de expandir um pouco mais o raciocínio epicurista: a geometria euclidiana prova coisas desnecessárias de forma elaborada (Euclides demora vinte proposições a demonstrar que quaisquer dois lados de um triângulo são maiores do que o terceiro), ao passo que demonstra ou assume factos (durante muito tempo hesitou-se entre considerar o postulado quinto no número dos postulados ou no dos teoremas) que são falsos.

Hoje a falácia é evidente: o processo é, de facto, infinito, mas tal não impede as linhas de se encontrarem numa distância finita. Contudo, também sabemos hoje que, apesar de o argumento ser falacioso, há formas de geometria em que a conclusão a que chega está certa; ou seja, há formas de geometria em que o postulado quinto é, de facto, falso. Ou seja, o argumento, apesar de falacioso, é interessante e a conclusão a que pretende chegar verifica-se de facto, pelo menos em determinadas condições.

É claro que não precisamos de tanta sofisticação para conferirmos um significado não anedótico à crítica epicurista. Basta constatar que muitos manuais de geometria preferem um raciocínio mais simples para chegar ao teorema acerca dos lados de um triângulo, por motivos pedagógicos. Um exemplo está no velhinho e bem conhecido manual de António Nascimento Palma Fernandes<sup>8</sup>:

**Teorema:** Num triângulo, qualquer lado é menor do que a soma dos outros dois.

**Hipótese:** Dado o triângulo ABC.

**Tese:**  $AB < BC + AC$ ;  $AC < AB + BC$ ;  $BC < AB + AC$

**Demonstração:** Este teorema é consequência imediata do postulado “O segmento de recta é a linha mais curta que se pode traçar unindo dois pontos”.

O postulado que o excerto refere encontra-se explicado previamente na mesma obra (p. 19), aí sendo indicado como exemplo de axioma:

No estudo que vamos fazer aparecem certas proposições que se admitem sem justificação e que têm muita importância; tais proposições têm o nome de axiomas. Como exemplos de axiomas geométricos, temos:

a) O segmento de recta é a linha mais curta que se pode traçar unindo dois pontos.

A solução não é de todo disparatada. Ela não só é económica e clara, como se baseia num axioma de formulação quase idêntica a outro que o próprio Arquimedes incluía no número dos princípios (“a linha recta é a mais curta de todas as linhas que possuem as mesmas extremidades”, em “Sobre a Esfera e o Cilindro I”, no início). O próprio Proclo tenta assimilar a definição euclidiana de “linha recta” à de Arquimedes. “O intervalo”, diz ele, “entre dois pontos quaisquer é o comprimento da linha recta que estes pontos definem, e isto é que significa ‘[uma linha recta é uma linha que] está posta ao mesmo nível em relação a todos os pontos que estão nela’”. De seguida, conclui: “Portanto [a definição euclidiana] está de acordo com a noção comum de que aqueles que avançam em linha recta percorrem apenas a distância que precisam de percorrer, como se diz, enquanto aqueles que não avançam em linha recta andam mais do que é necessário”<sup>9</sup>. Nesta

<sup>5</sup> Epicuro morreu em 270 a.C. e Polieno, um pouco antes dele. As únicas informações a seu respeito encontram-se em Diógenes Laércio (“Vita Philosophorum” 10.25) e Cícero (“Académica” 2.106 e “De Finibus” 1.20).

<sup>6</sup> O conceito de incomensurabilidade aplica-se, por exemplo, à diagonal do quadrado; a demonstração deste facto recua ao tempo dos pitagóricos e encontra-se na proposição 117 do livro décimo dos “Elementos” (embora aí tenha sido provavelmente interpolada); o conceito de divisão *ad infinitum* surge, por exemplo, quando se aplica o postulado I, que assume a possibilidade de se traçar uma recta entre qualquer par de pontos, e a proposição que ensina a bissectar uma recta (“Elementos” 1.10). As unidades mínimas dos epicuristas não são os átomos, mas entidades submúltiplas dos átomos (estas sim, indivisíveis).

<sup>7</sup> Veja-se Morrow, 1992, pp. 289 e ss. Proclo não indica o(s) autor(es) do argumento, mas, seja pelo contexto em que é referido, seja pelo seu conteúdo, parece, sem dúvida, de origem epicurista, como foi sugerido por Michael White (“What to Say to a Geometer”, *Greek, Roman and Byzantine Studies* 30.2, 1989, pp. 297-311).

<sup>8</sup> Cito a partir de: “Elementos de Geometria”, Lisboa, 1962, p. 61.

<sup>9</sup> Veja-se Morrow, 1992, pp. 88-89. A definição de linha recta atribuída a Euclides corresponde a “Elementos I”. def. 4.



proposta, o teorema surge como um princípio ou, no mínimo, como uma “consequência imediata” de um princípio (Proclo chega a aludir ao resultado por meio da expressão “noção comum”). Ora, aquilo que se toma como princípio não constitui matéria de demonstração, o que pode ser utilizado contra os “Elementos”. Esta acaba por ser uma segunda implicação da crítica epicurista, estivessem os membros da escola conscientes dela ou não. Robert Simson compreendeu-o muito bem e procurou eliminar a dificuldade, defendendo que o número de axiomas não deve ser alargado sem necessidade <sup>10</sup>. O argumento epicurista assim expandido acaba por chamar a atenção para as aporias envolvidas na determinação do que deve ser considerado (ou não) matéria de demonstração em geometria.

O que nos leva a concluir com uma terceira nota curiosa a propósito do teorema (sempre levando em conta a objecção epicurista), relacionada com o seu papel nos “Elementos”. Euclides ensina a construir um triângulo a partir de três linhas rectas iguais a outras três linhas rectas dadas em “Elementos” I.22. Sucede que a construção só é possível se se atender àquela importante restrição: é necessário que quaisquer duas das rectas dadas, consideradas em conjunto, sejam maiores do que a terceira. Por esta razão, a restrição não só é introduzida no enunciado do problema, sob a forma de um *diorismos* (ou seja, de uma indicação explícita sobre as condições de possibilidade), mas também é demonstrada anteriormente, na proposição vigésima do mesmo livro.

No entanto, foi muitas vezes atribuído ao teorema acerca dos lados do triângulo um outro papel, muito mais subtil, na proposição I.22. Para o compreender, temos de apresentar resumidamente esta proposição (ver fig. 2). Na semi-recta  $DE$  sejam postos consecutivamente os segmentos de recta  $DF$ ,  $FG$  e  $GH$  iguais a três segmentos de recta dados  $A$ ,  $B$  e  $C$ , com que se quer construir um triângulo. Trace-se o círculo  $DKL$ , com centro em  $F$  e raio  $FD$ ; de novo, trace-se o círculo  $KLH$ , com centro em  $G$  e raio  $GH$ . Ora, no triângulo construído  $FGK$ , o lado  $FK$  é igual a  $FD$  (raios do mesmo círculo), que por sua vez é igual ao segmento de recta  $A$ ; o lado  $GK$  é igual a  $GH$  (raios do mesmo círculo), que por sua vez é igual ao segmento de recta  $C$ ; o segmento restante  $FG$  foi desde início traçado igual ao segmento  $B$ . Construiu-se, pois, um triângulo a partir de três segmentos de recta iguais a outros três segmentos de recta dados.

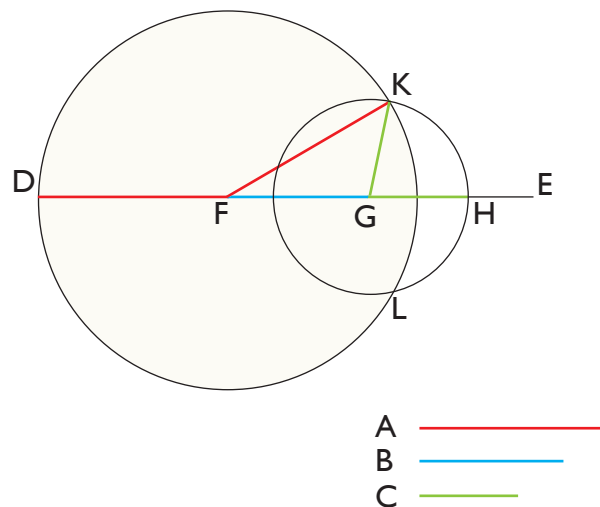


Figura 2: “Elementos” I.22.

O problema é que não há proposição ou axioma nos “Elementos” que justifique a intersecção dos círculos no ponto  $K$ . A falha foi reconhecida já na Antiguidade, pois Proclo fala dela como uma das objecções normalmente lançadas contra a proposta euclidiana. Muitos comentadores, no entanto, aceitaram como explicação satisfatória precisamente o nosso teorema I.20 <sup>11</sup>. Como diz Robert Simson:

Quem é tão obtuso, apesar de estar apenas a iniciar o estudo dos “Elementos”, a ponto de não perceber que o círculo descrito com centro em  $F$  e raio  $FD$  tem de intersectar  $FH$  entre  $F$  e  $H$ , porque  $FD$  é menor do que  $FH$ ; e que, pela mesma razão, o círculo descrito com centro  $G$  e raio  $GH$  tem de intersectar  $DG$  entre  $D$  e  $G$ ; e que estes círculos têm de se intersectar um ao outro, porque  $FD$  e  $GH$  em conjunto são maiores do que  $FG$ ? <sup>12</sup>

Esta é, portanto, para muitos, a segunda função do teorema I.20: assegurar a explicação para o facto de que os círculos construídos em I.22 se intersectam.

O que nenhum dos comentadores refere, ocupados que estão em atacar os caluniadores de Euclides, é que a primeiríssima proposição do primeiro livro dos “Elementos” ensina a construir um triângulo equilátero e não é senão um caso particular de I.22. Eis como procede (fig. 3). Na recta  $AB$ , com centro em  $A$  e raio  $AB$ , descreve-se o círculo  $BCD$ ; com centro em  $B$  e raio  $BA$ , descreve-se o círculo  $ACE$ ; e do ponto  $C$ , “no qual os círculos se cortam um ao outro”, até aos pontos  $A$  e  $B$ , traçam-se as rectas  $CA$  e  $CB$ . Ora,  $AC=AB$  (raios do

mesmo círculo);  $BC$  é igual a  $BA$  (raios do mesmo círculo) e  $CA=CB$  (coisas iguais a uma terceira coisa são iguais entre si); portanto, o triângulo  $ABC$  é equilátero.

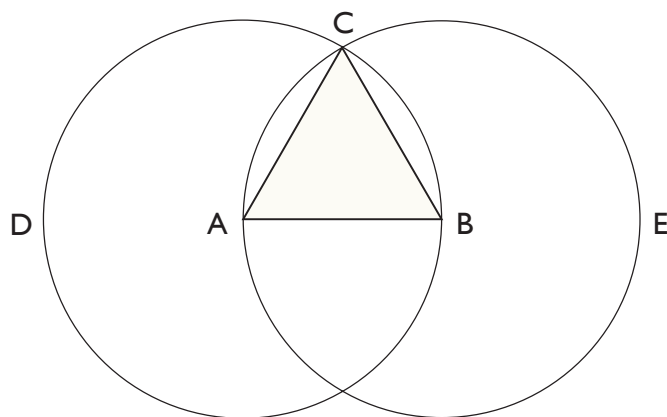


Figura 3: “Elementos” I.1.

Em ambas as proposições (I.1 e I.22) são desenhados círculos cuja intersecção se admite sem justificação. Ora, o teorema vigésimo precede o vigésimo segundo e talvez ainda possa ser invocado como justificação para o facto de que os círculos se intersectam *nesse* teorema. Mas não se pode aplicar a mesma explicação ao caso semelhante que ocorre na primeira proposição, caso contrário cairíamos num discurso circular e tautológico (a não ser que a admitíssemos como axioma, o que vem redundar em dar razão aos epicuristas). Por outro lado, se admitimos que ela não convence como justificação de que os círculos se intersectam em “Elementos” I.1, então é quase absurdo invocar a sua suposta evidência para justificar a mesma intersecção em “Elementos” I.22<sup>13</sup>.

Estabelecer uma ordem de prioridade nas proposições e definir claramente o que é matéria de demonstração (ou não) são tarefas essenciais no âmbito da construção de um sistema axiomático. Neste sentido, ao realçar o carácter axiomático de “Elementos” I.20, a crítica epicurista acaba por produzir polémica sobre: a) a ordenação das proposições patente nos “Elementos”; b) a razão de ser de alguns dos seus princípios fundamentais, como o postulado quinto; c) a necessidade de algumas demonstrações incluídas nos “Elementos”; d) o conceito de “evidência” em matemática. A objecção não é, pois, assim tão disparatada, apesar de formulada numa linguagem pouco científica.

No meio desta embrulhada, eu não impediria os epicuristas de almoçarem com o burro; afinal de contas, eles gostavam de aproveitar a vida. No entanto, talvez tivesse algum interesse em saber sobre o que conversariam durante a refeição.

#### AGRADECIMENTOS

Gostaria de aqui expressar o meu agradecimento a Henrique Leitão, pela leitura que fez do artigo, e o meu reconhecimento à Fundação Alexander von Humboldt (Alemanha), pelo seu apoio ao meu projecto de investigação actual.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Heath, Thomas L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols., New York, Dover (1ª edição é da Cambridge University Press, 1908; a mesma editora publicou a 2ª edição em 1925; a edição da Dover é a reimpressão desta 2ª edição).
- [2] Heiberg, J.L.; Stamatis, E.S. (1969). *Euclides I. Elementa I-IV*, Leipzig, Teubner.
- [3] Morrow, Glenn (1992). “Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements”. Princeton University Press.
- [4] White, Michael (1989). “What to Say to a Geometer”, *Greek, Roman and Byzantine Studies* 30.2, pp. 297-311.

<sup>10</sup> Robert Simson, “The Elements of Euclid...”, Philadelphia, Desilver, Thomas & CO., 1838, p. 240: “[...] the right answer to this objection against this and the 21st and some other plain propositions, is that the number of axioms ought not to be increased without necessity, as it must be if these propositions be not demonstrated.”.

<sup>11</sup> Assim entendem Proclo, Johann Wilhelm Von Camerer ou Isaac Todhunter, entre outros (para um resumo, veja-se Heath, 1956, vol. I, p. 293).

<sup>12</sup> Simson 1838, p. 241 (o trecho está também citado em Heath, 1956, vol. I, p. 293). É irresistível fazer notar que Simson realça a evidência do teorema I.20 à maneira epicurista.

<sup>13</sup> Não deixa de ser engraçado verificar que as propostas modernas para resolver o problema da intersecção dos círculos acabam por acrescentar novos postulados e teoremas aos oferecidos por Euclides; para um resumo, veja-se Heath, 1956, vol. I, pp. 234-240.

#### SOBRE OS AUTORES

**Bernardo Mota** é docente da Faculdade de Letras da Universidade de Lisboa. Faz investigação no Centro de Estudos Clássicos da mesma faculdade e no Centro Interuniversitário de História das Ciências e Tecnologia (FCUL/FCT-UNL). Actualmente está também ligado à Universidade Técnica de Berlim, onde é bolseiro de pós-doutoramento da Fundação Alexander von Humboldt.



# Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações\*

CHRISTIANE ROUSSEAU  
Université de Montréal

\*Traduzido do artigo "Banach Fixed Point Theorem and Applications", de acesso livre e originalmente publicado em <http://www.kleinproject.org/> como uma *Klein vignette*, a tradução foi gentilmente autorizada pela autora e pelo ICMI. Tradução de Rogério Martins



Nesta *Klein vignette*, mostramos como a partir de um pequeno jogo podemos descobrir um dos teoremas mais poderosos da matemática, o teorema de ponto fixo de Banach. Este teorema tem aplicações fantásticas dentro e fora da matemática. No ponto 4, falamos sobre uma aplicação fascinante na compressão da imagem.

## 1. INTRODUÇÃO

Vamos começar com o nosso jogo e olhar para a tampa da famosa caixa de A Vaca que Ri (Figura 1). O brinco da direita da vaca é, mais uma vez, uma vaca que ri. A cada ponto da tampa, associamos o ponto correspondente no brinco da direita. Esta é, claramente, uma função da tampa para si própria, a que chamaremos  $F$ . Por exemplo, à ponta do queijo da vaca associamos a ponta do queijo da pequena vaca no brinco da direita. Ao centro do olho direito da vaca associamos o centro do olho direito da pequena vaca no brinco da direita, etc. Aqui está o desafio: **há algum ponto que seja enviado para si próprio por este processo?** Um tal ponto, se existir, será chamado *ponto fixo*. Se existe um ponto fixo, então não é nenhum dos pontos que enumerámos acima. Além disso, se existe um ponto fixo, então ele deve estar no brinco da direita. Mas o brinco da direita é enviado para o brinco da direita da vaca pequena, etc. Visualmente, vemos que estes brincos da direita encaixados parecem convergir para um ponto, a que chamamos  $A$ , e  $A$  é um candidato para a nossa solução.

Começemos com um ponto qualquer, por exemplo a ponta do queijo, ao qual vamos chamar  $P_0$ . Assim,  $P_0$  é enviado para



Figura 1: A famosa embalagem da Vaca que Ri.

$P_1 = F(P_0)$ , que é a ponta do queixo da pequena vaca no brinco da direita. Analogamente,  $P_1$  é enviado para  $P_2 = F(P_1)$ , que é a ponta do queixo da vaca que aparece no brinco da direita da pequena vaca, etc. Observamos três coisas:

- (i) Poderíamos continuar o processo um número infinito de vezes e gerar uma sucessão  $\{P_n\}$ , onde  $P_{n+1} = F(P_n)$ .
- (ii) Visualmente, só um número finito de pontos desta sucessão parecem distintos, todos os outros não se distinguem. Claro que poderíamos ampliar a imagem e ver mais pontos. Contudo, independentemente da ampliação que escolhermos, continuamos a distinguir só um número finito de pontos e os restantes não se distinguem.
- (iii) Esta sucessão parece convergir para o mesmo ponto  $A$  como antes.

Se tivéssemos considerado um outro ponto  $Q_0$  e construíssemos a sucessão  $\{Q_n\}$ , onde  $Q_{n+1} = F(Q_n)$ , veríamos que a sucessão  $\{Q_n\}$  aparentemente convergiria para o mesmo ponto  $A$ . De facto, podemos observar que isto é consequência do facto de o ponto  $\{A\}$  ser a intersecção dos brincos da direita encaixados, cujos diâmetros tendem para 0.

O que é que o teorema do ponto fixo de Banach nos diz? Diz-nos que, de facto, a função  $F$  tem um único ponto fixo, i.e., existe um único ponto  $A$  do plano tal que  $F(A) = A$ . Além disso, também afirma que se tomarmos um ponto qualquer  $P_0$  e construirmos a sucessão  $\{P_n\}$ , onde  $P_{n+1} = F(P_n)$ , então a sucessão  $\{P_n\}$  converge para  $A$ .

Mas porquê? Será que o mesmo ocorreria para qualquer função  $F$ ? Claro que não. Por exemplo, uma translação no plano não tem um ponto fixo. Por outro lado, a aplicação  $G(x, y) = (x + (x^2 - 1)' - y)$  tem dois pontos fixos  $(\pm 1, 0)$ . A aplicação  $F$  do nosso jogo tem uma propriedade especial. É uma *contração*. De facto, o seu contradomínio é muito mais pequeno do que o domínio. Se dois pontos  $P$  e  $Q$  estão a uma certa distância, então as suas imagens  $F(P)$  e  $F(Q)$  estão mais perto uma da outra do que  $P$  e  $Q$  estavam. Esta afirmação faz sentido porque em  $\mathbb{R}^2$  podemos medir a *distância* entre dois pontos. Isto porque  $\mathbb{R}^2$  é um *espaço métrico*. É o facto de  $F$  ser uma contração que garante que quando construimos uma sucessão  $\{P_n\}$ , independentemente da precisão que conside-

remos (olhemos a sucessão de longe, de perto, com um microscópio, ou através de um microscópio electrónico), depois de um  $N$  que depende da nossa precisão, todos os elementos da sucessão  $P_n, n > N$  se tornam indistinguíveis. Dois elementos são distinguíveis se a distância entre eles está acima de um certo valor. Na próxima secção vamos recordar que a uma sucessão que tenha esta propriedade se chama uma *sucessão de Cauchy*. Em  $\mathbb{R}^2$ , qualquer sucessão de Cauchy é convergente. Dizemos que  $\mathbb{R}^2$  é um *espaço métrico completo*.

## 2. O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Agora que temos todos os ingredientes para o caso geral, podemos formular o teorema.

**Teorema 2.1** (Teorema do ponto fixo de Banach) *Seja  $\mathcal{K}$  um espaço métrico completo onde a distância entre dois pontos  $P$  e  $Q$  é representada por  $d(P, Q)$ . Consideremos  $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  uma contração, i.e., existe  $c \in (0, 1)$  tal que se  $P, Q \in \mathcal{K}$ , então*

$$d(F(P), F(Q)) \leq c d(P, Q).$$

*Então  $F$  tem um único ponto fixo, i.e., existe um único ponto  $A \in \mathcal{K}$  tal que  $F(A) = A$ .*

Vamos de seguida definir todos os termos que constam nesta formulação. Esta parte é mais formal e pode ser saltada se preferir concentrar-se nas aplicações.

Sabemos o que é a distância entre dois pontos  $P$  e  $Q$  em  $\mathbb{R}^2$ . Como é que podemos generalizar esta ideia num conjunto  $\mathcal{K}$ ?

### Definição 2.2

*A distância num conjunto  $\mathcal{K}$  é uma função  $d : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica:*

1. Para cada  $P, Q \in \mathcal{K}$ ,  $d(P, Q) \geq 0$ ;
2.  $d(P, Q) = 0$  se e só se  $P = Q$ ;
3. Para cada  $P, Q, R \in \mathcal{K}$ ,  $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$  (desigualdade triangular).

Como sabemos, estas propriedades são verificadas para a distância euclidiana usual em  $\mathbb{R}^2$ .

Recordamos agora a definição de sucessão de Cauchy, que é a formalização da ideia de uma sucessão para a qual, independentemente do limite de precisão que tomarmos, depois de um número finito de elementos, todos os outros se tornam

indistinguíveis. Vamos ainda recordar a definição de sucessão convergente.

### Definição 2.3

1. Uma sucessão  $\{P_n\}$  de elementos num espaço métrico  $\mathcal{K}$  é uma *sucessão de Cauchy* se para todo o  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n, m > N$ , temos

$$d(P_n, P_m) < \epsilon.$$

2. Uma sucessão  $\{P_n\}$  de elementos de um espaço métrico  $\mathcal{K}$  converge para o limite  $A \in \mathcal{K}$  se para todo o  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo o  $n > N$ , temos

$$d(P_n, A) < \epsilon.$$

### Definição 2.4

Um espaço métrico  $\mathcal{K}$  é um *espaço métrico completo* se qualquer sucessão de Cauchy  $\{P_n\}$  de elementos de  $\mathcal{K}$  converge para um elemento  $A$  de  $\mathcal{K}$ .

Como é que provamos o teorema do ponto fixo de Banach? A unicidade do ponto fixo é fácil. De facto, suponhamos que  $A$  e  $B$  são dois pontos fixos. Então,  $F(A) = A$  e  $F(B) = B$ . Além disso, como  $F$  é uma contração, temos

$$d(F(A), F(B)) \leq c d(A, B),$$

logo,  $d(A, B) \leq c d(A, B)$ .

A única solução é  $d(A, B) = 0$ , o que nos leva a concluir que  $A = B$ .

Tal como para a unicidade, a ideia da demonstração da existência também é simples: já a vimos no nosso jogo da Vaca que Ri! Consideramos um ponto qualquer  $P_0 \in \mathcal{K}$  e construímos (como antes) a sucessão  $\{P_n\}$ , onde  $P_{n+1} = F(P_n)$ . Então, esta sucessão é uma sucessão de Cauchy e o seu limite é um ponto fixo. Claro que mostrar estas duas afirmações requer algum trabalho, mas vamos saltar os detalhes técnicos. O que é importante é que a demonstração é a mesma, no caso geral de um espaço métrico completo complicado ou num simples tal como  $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ .

A ideia da demonstração é não só simples e intuitiva, mas também bastante poderosa. Ela providencia-nos uma forma de construir numericamente o ponto fixo  $A$ . Isto explica por-

que é que podemos encontrar inúmeras aplicações deste teorema, tanto na vertente teórica como na vertente prática.

## 3. APLICAÇÕES EM ANÁLISE

Uma das aplicações mais importantes do teorema do ponto fixo de Banach é a demonstração da existência e da unicidade de solução para uma equação diferencial suficientemente regular. Nesta aplicação o espaço métrico completo  $\mathcal{K}$  é um conjunto de funções e a aplicação  $F$  transforma uma função numa outra função (por vezes, dizemos que  $F$  é um *operador*). O truque está em mostrar que uma solução da equação diferencial, se existir, é um ponto fixo do operador  $F$ .

Provavelmente, já estudou equações diferenciais simples e aprendeu truques para encontrar fórmulas para as soluções. Na verdade, estas equações diferenciais são a excepção. Para a maioria das equações diferenciais não existe uma fórmula para as soluções. Daí a importância de um teorema que assegure a existência de solução. Não deveria ficar surpreendido por não existir uma fórmula para as soluções da maioria das equações diferenciais. De facto, considere uma das equações diferenciais mais simples

$$y' = e^{-x^2}.$$

A sua solução é dada por

$$y = \int e^{-x^2} dx.$$

Deve lembrar-se de lhe terem dito no seu curso de probabilidades ou estatística que não existe uma fórmula para a primitiva da função  $e^{-x^2}$ , explicando assim porque é que temos de trabalhar com tabelas quando estudamos a distribuição normal.

## 4. APLICAÇÕES À COMPRESSÃO DE IMAGEM

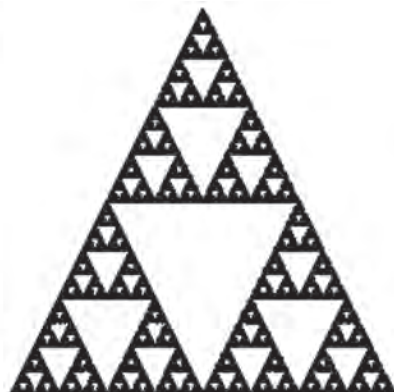
A melhor forma de guardar uma imagem em memória é guardar a cor de cada píxel. Há dois problemas neste método:

- Requer uma enorme quantidade de memória.
- Se tentarmos ampliar a imagem, por exemplo, para a usar num grande póster, os píxeis tornam-se quadrados maiores e vai faltar-nos informação sobre como preencher os detalhes nestes quadrados.

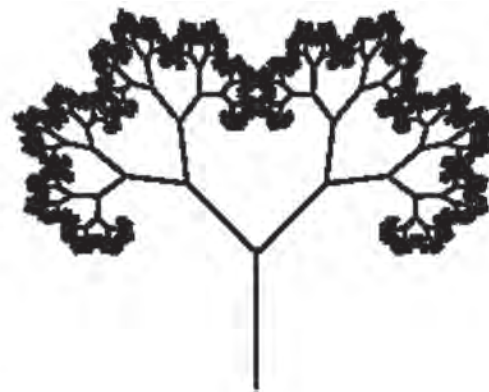




(a) Feto



(b) Triângulo de Sierpiński



(c) Árvore

Figura 2: Três Fractais

Qual é o princípio da compressão de imagem? É o de codificar menos informação do que há na imagem original, mas fazendo-o de uma forma inteligente, para que a olho não consigamos ver que a imagem que observamos foi deteriorada. A Internet aumentou a necessidade de uma boa compressão de imagem. De facto, as imagens tornam significativamente mais lenta a navegação na rede. Assim, para a navegação na Internet é bom ter imagens codificadas em ficheiros o mais pequenos possível. Quando olha para a imagem no ecrã do seu computador não consegue ver que foi deteriorada. Contudo, se tentar ampliá-la ou usá-la num póster, vai ver imediatamente que tem pouca qualidade.

Há vários princípios de compressão de imagem, um dos mais familiares é o formato JPEG, que se tornou *standard* para fotos digitais. A codificação de uma imagem no formato JPEG é também um algoritmo matemático.

Nesta *Klein Vignette*, vamos concentrar-nos noutra método que se manteve mais experimental. A este método, introduzido por Barnsley, tem-se chamado *sistemas de funções iteradas*. A ideia por detrás do método é aproximar uma imagem por objectos geométricos. Para ter uma quantidade suficiente de objectos disponíveis, não vamos limitar-nos às figuras geométricas usuais, que são as linhas e curvas suaves, mas

vamos permitir objectos fractais complicados, como o feto e o triângulo de Sierpiński (ver figura 2).

Vamos explicar a ideia do processo de compressão no triângulo de Sierpiński da figura 2(b). Parece *a priori* um objecto complicado. Como guardá-lo na memória de um computador, de uma forma económica? O melhor é guardar um programa que o reconstrua quando for necessário. Para construir este programa, precisamos de entender o que caracteriza este objecto geométrico. Vamos observar o triângulo de Sierpiński: ele é a união de três triângulos de Sierpiński (i.e., três cópias dele próprio), que têm metade do seu tamanho (em largura e altura). De facto, partindo do triângulo de Sierpiński, podemos construir um segundo usando o seguinte procedimento:

- Encolhemos o triângulo de Sierpiński para metade do seu tamanho a partir do seu vértice inferior esquerdo.
- Construimos uma segunda cópia deste meio triângulo de Sierpiński e colamo-la à direita.
- Construimos uma terceira cópia deste meio triângulo de Sierpiński e colamo-la no topo.

A segunda figura que construimos é igual ao nosso triângulo de Sierpiński original. Assim, o triângulo de Sierpiński é o ponto fixo do processo.

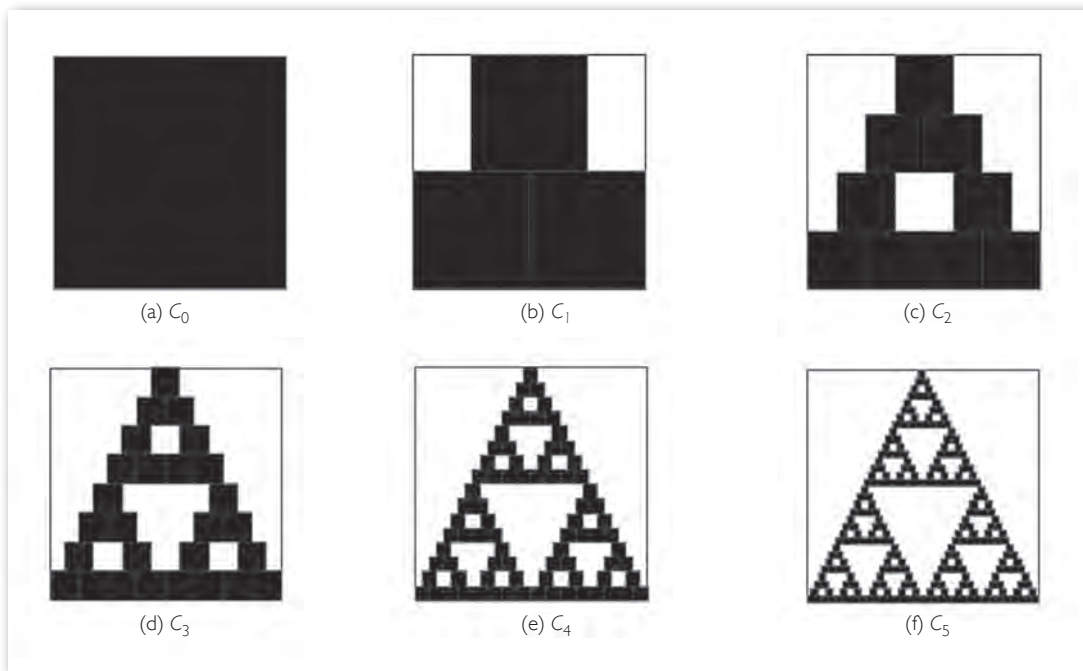


Figura 3:  $C_0$  e as cinco primeiras iteradas  $C_1 - C_5$ .

Vamos agora colocar isto em termos matemáticos. Observe que o comprimento da base do triângulo de Sierpiński na figura 2(b) é igual à sua altura. Assim, podemos considerar eixos com a origem no canto inferior esquerdo do triângulo de Sierpiński e unidades de forma a que a base e a altura tenham ambas comprimento unitário. Consideramos também as seguintes transformações afim definidas em  $\mathbb{R}^2$ :

$$T_1(x, y) = \left( \frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right),$$

$$T_2(x, y) = \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} \right),$$

$$T_3(x, y) = \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \right).$$

Se  $S$  é o triângulo de Sierpiński, então temos

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S). \quad (1)$$

Existem outros subconjuntos  $B$  do plano que tenham a mesma propriedade, i.e., tal que

$$B = T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B) \quad (2)$$

Vamos ver que não há nenhum! Assim, caracterizámos o nosso triângulo de Sierpiński como o único subconjunto  $B$  tal que (1) é verificada. O que é que fizemos? Construámos uma função que a um subconjunto  $B$  do plano associa o sub-

conjunto  $T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B)$ . Chamemos a esta função  $W$ . Está definida por

$$B \mapsto W(B) = T_1(B) \cup T_2(B) \cup T_3(B),$$

e vimos que  $S = W(S)$ , i.e.,  $S$  é um ponto fixo desta função.

Anunciámos que íamos mostrar que o triângulo de Sierpiński é o único ponto fixo desta função. Vamos tentar com um quadrado  $C_0$ , como na figura 3(a). A sua imagem é  $C_1$  na figura 3(b). Aplicamos o mesmo processo a  $C_1$  e obtemos  $C_2, C_3 - C_5$  (figura 3(c)-(f)). Observamos três coisas:

(i) Nenhum dos conjuntos  $C_0, \dots, C_5$  é um ponto fixo de  $W$ .

(ii) Poderíamos ter continuado este processo indefinidamente, produzindo assim uma sucessão infinita de conjuntos  $\{C_n\}$ , onde  $C_{n+1} = W(C_n)$ .

(iii) A sucessão  $\{C_n\}$  parece convergir rapidamente para o triângulo de Sierpiński. Assim a olho nu, não conseguimos distinguir  $C_{10}$  de  $S$ . Logo, no lugar de  $S$  na nossa imagem, o programa que reconstrói a nossa imagem pode só produzir  $C_{10}$ . Além disso, se necessitarmos de uma melhor resolução, então podemos usar o mesmo programa e pedir-lhe para parar em  $C_{20}$  ou  $C_{30}$ . Assim, o mesmo pequeno programa pode reconstruir  $S$  com qualquer precisão!

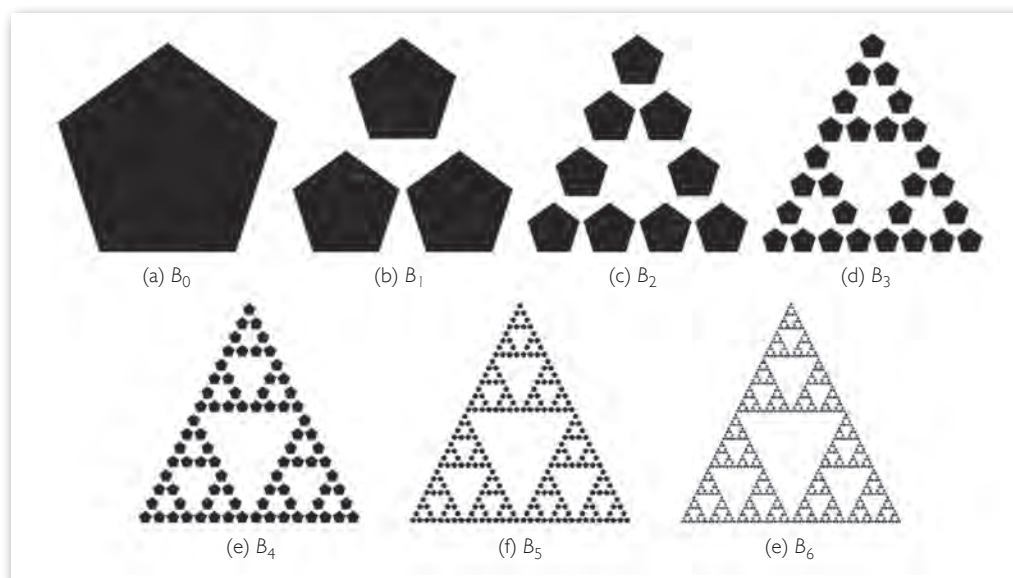


Figura 4: Um pentágono  $B_0$  e as suas seis primeiras iteradas  $B_1$ – $B_6$ .

Mais ainda, podemos verificar que funciona com qualquer conjunto inicial! Um segundo exemplo, iterando um pentágono, é mostrado na figura 4. As mesmas observações (i), (ii) e (iii) acima aplicam-se a este exemplo.

Vimos que o teorema do ponto fixo de Banach se aplica a contracções em espaços métricos completos. Definimos a função  $W$  em (2) nos subconjuntos do plano. Para espaço métrico, vamos tomar  $\mathcal{K}$  como o conjunto de subconjuntos limitados (fechados) do plano. Introduzimos uma distância em  $\mathcal{K}$  chamada distância de Hausdorff. A definição de distância de Hausdorff  $d_H(B_1, B_2)$ , entre dois conjuntos  $B_1$  e  $B_2$  é dada por uma fórmula obscura e complicada, por isso vamos explicar este conceito de outra forma. Vamos começar por ver que significado queremos atribuir à fórmula

$$d_H(B_1, B_2) \leq \epsilon$$

(mesmo sem ter definido o que é  $d_H(B_1, B_2)$ !). Simplesmente significa que se o nosso olho tem uma precisão de  $\epsilon$ , então ele não consegue distinguir  $B_1$  de  $B_2$ . Em termos matemáticos,  $d_H(B_1, B_2) \leq \epsilon$  significa que

$$\forall P \in B_1 \exists Q \in B_2 d(P, Q) \leq \epsilon \text{ e } \forall P' \in B_2 \exists Q' \in B_1 d(P', Q') \leq \epsilon. \quad (3)$$

(Onde  $d$  é a distância euclideana usual em  $\mathbb{R}^2$ .) Isto permite dar a definição indirecta.

#### Definição 4.1

A distância de Hausdorff entre dois conjuntos fechados e limitados  $B_1$  e  $B_2$  é o mínimo de todos os  $\epsilon \geq 0$  tal que (3) é verificada.

Podemos agora convencer-nos de que a função  $W$  é uma contracção. De facto, vamos supor que  $d_H(B_1, B_2) \leq \epsilon$ . Então podemos mostrar que

$$d_H(W(B_1), W(B_2)) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja  $P \in W(B_1)$ . Então, existe  $i \in \{1, 2, 3\}$  e  $P_1 \in B_1$  tal que  $P = T_i(P_1)$ . Como  $d_H(B_1, B_2) \leq \epsilon$ , existe  $Q_1 \in B_2$  tal que  $d(P_1, Q_1) < \epsilon$ . Seja  $Q = T_i(Q_1)$ . Então

$$d(P, Q) = d(T_i(P_1), T_i(Q_1)) = \frac{1}{2}d(P_1, Q_1) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, se começarmos com  $P' \in W(B_2)$ , então existe  $Q' \in W(B_1)$  tal que  $d(P', Q') \leq \frac{\epsilon}{2}$ .

Este processo foi adaptado a compressão de imagens reais (ver [2] ou [5]). O método produz imagens de alta qualidade quando a imagem tem algum carácter fractal. Contudo, o coeficiente de compressão não é tão bom nem tão flexível como o formato JPEG. Além disso, o processo de codificação (transformando a imagem num programa para a reconstruir) é ainda assim demasiado fastidioso para ter interesse prático. Contudo, a simplicidade da ideia juntamente com o seu potencial de aplicação é bastante animadora.

## 5. UMA APLICAÇÃO SURPREENDENTE: O ALGORITMO DE CLASSIFICAÇÃO DE PÁGINAS PAGERANK

O sucesso do Google enquanto motor de busca tem origem no seu algoritmo: o algoritmo PageRank. Neste algoritmo é calculado um ponto fixo de um operador linear em  $\mathbb{R}^n$ , este



ponto fixo (que é um vector) fornece a ordem das páginas. Na prática, o ponto fixo (que é um vector próprio do valor próprio 1) é calculado aproximadamente como  $P_n$  para  $n$  suficientemente grande. Convidamos o leitor interessado a ver os detalhes na *Klein vignette* “Google and the PageRank algorithm” em <http://wikis.zum.de/dmuw/index.php/KleinVignettes>

## 6. CONCLUSÃO

O que vimos nesta *Klein vignette* foi como, começando de um simples jogo podemos descobrir ideias muito poderosas que podem levar a avanços matemáticos e tecnológicos. Quando procuramos uma solução única para um problema, tem-se tornado um método, em muitos domínios da matemática, tentar ver se a solução do problema pode ser caracterizada como o único ponto fixo de um operador especialmente construído para este fim.

Vimos que a vantagem desta abordagem é que o teorema fornece um processo eficiente e prático de construir o objecto solução como o limite de uma sucessão dado que a convergência é rápida.

A análise é o estudo das funções. As funções são geralmente definidas em números. No cálculo em várias variáveis, generalizamos a noção de função a vectores que são elementos de  $\mathbb{R}^n$ . Mas porquê parar nos elementos de  $\mathbb{R}^n$ ? Todos já percebemos que os matemáticos gostam de generalizar a noção de função e permitem que ela seja definida, por exemplo, em conjuntos de conjuntos e em conjuntos de funções, etc. Fazer análise em conjuntos de funções tornou-se um importante capítulo da análise moderna, chamada *análise funcional*, que é *standard* no ensino superior.

O leitor está convidado a fazer a ligação a alguns dos processos iterativos que já encontrou. Por exemplo, o processo iterativo em dimensão um associado à sucessão de Héron para obter raízes quadradas. A rápida convergência geométrica também pode ser entendida a partir do ponto de vista apresentado aqui.

## REFERÊNCIAS

[1] M. F. Barnsley, “Fractals Everywhere”, San Diego, Academic Press, 1988.

[2] J. Kominek, “Advances in Fractal Compression for Multimedia Applications”, *Multimedia Systems Journal*, vol. 5, nº 4, 1997, 255–270.

[3] C. Rousseau, “Point Fixe de Banach” (em francês), *Accromath 5*, hiver-printemps 2010 ([www.accromath.ca](http://www.accromath.ca)).

[4] C. Rousseau, “How Google Works?” *Klein vignette* ([www.kleinproject.org](http://www.kleinproject.org)).

[5] C. Rousseau and Y. Saint-Aubin, “Mathematics and Technology”, SUMAT Series, Springer-Verlag, 2008 (Existe uma versão em Francês do mesmo livro, publicada na mesma série.)

### SOBRE A AUTORA

**Christiane Rousseau** obteve um doutoramento pela Université de Montréal em 1977. Dedicou-se à investigação em equações diferenciais, área em que tem dezenas de artigos publicados. Recebeu vários prémios ao longo da sua carreira, entre eles o prémio Abel-Gauthier 1999 da Association Mathématique du Québec, para a personalidade do ano. Para além do seu trabalho de investigação, tem desenvolvido inúmeras actividades de divulgação da Matemática. Neste momento é professora catedrática na Université de Montréal.



Na edição 163 da **Gazeta de Matemática** foram publicadas algumas imagens nos artigos sobre Aureliano de Mira Fernandes e José Ribeiro de Albuquerque, sem que fosse mencionado a sua origem, os blogues <http://ruyluisgomes.blogspot.com/> e <http://polyedros.blogspot.com/>, mantidos por Jorge Rezende. Pedimos, por isso, as nossas desculpas.



# Palavras em Círculo

DIOGO PERNES DA CUNHA

Universidade do Porto

[diogo.pernes@fe.up.pt](mailto:diogo.pernes@fe.up.pt)

Este artigo foi escrito no âmbito do Programa Novos Talentos em Matemática, da Fundação Calouste Gulbenkian



**Dêem uma  
companhia  
ao solitário  
e ele falará mais  
do que qualquer  
pessoa.**

Cesare Pavese

O **solitário búlgaro** é um jogo que se inicia com  $S$  objectos iguais distribuídos por  $n$  montes. Em cada jogada, de cada um destes montes é retirado um elemento, formando-se uma nova pilha com os objectos seleccionados. O objectivo do jogo é chegar, no menor número possível de jogadas, a uma posição em que há  $k$  montes de  $1, 2, 3, \dots, k-1, k$  objectos, respectivamente, para algum natural  $k$ , considerada vencedora porque se repete nas jogadas seguintes. Naturalmente, isso só é possível se  $S$  for um número triangular. Contudo, para todo o natural  $S$ , cada jogada é uma forma de obter uma partição de  $S$  (isto é, um modo de escrever  $S$  como soma de  $n$  naturais) a partir de outra. É da dinâmica desta aplicação entre partições que nos ocuparemos neste texto.

Dada uma partição  $\lambda$  de  $S$  como soma de  $n$  naturais ( $n$  diz-se o *tamanho da partição*), se denotarmos por  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , as partes de  $\lambda$  (ou seja, os tamanhos dos montes) ordenadas por ordem crescente, e se  $T$  é a transformação que descreve a jogada a partir de  $\lambda$ , teremos, excluindo os zeros que possam surgir, uma nova partição de  $S$

$$T(\lambda) = \lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_n - 1, n.$$

Por exemplo, se  $S = 15$  e  $\lambda$  é a partição  $1,2,3,4,5$ , então  $T(\lambda) = 1,2,3,4,5$  ( $\lambda$  é um ponto fixo da aplicação  $T$ ). Diremos que uma partição  $\lambda$  pertence a um ciclo de  $T$  se existir um natural  $k$  tal que  $T^k(\lambda) = \lambda$ , em que  $T^k$  designa a composição

de  $T$  consigo mesma  $k$  vezes. Nesse caso, designaremos por *período de  $\lambda$* , ou do ciclo, o menor natural  $k$  que satisfaz esta igualdade.

Vejamos alguns exemplos, com valores de  $S$  baixos, uma vez que o número de partições possíveis aumenta depressa com o valor de  $S$ . Se  $S=3$ , há exactamente três partições de  $S$ , nomeadamente  $3, 1+2, 1+1+1$ ; e, a partir destas posições iniciais, o jogo evolui como no esquema  $1,1,1 \rightarrow 3 \rightarrow 1,2 \rightarrow 1,2$ , sendo  $1,2$  um ciclo de período 1. Se  $S=4$ , o diagrama é  $1,1,1,1 \rightarrow 4 \rightarrow 1,3 \rightarrow 2,2 \rightarrow 1,1,2 \rightarrow 1,3$ , havendo um único ciclo, de período 3. Para  $S=5$ , temos 7 partições e  $T$  actua como no esquema seguinte

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & \rightarrow & 1,4 & \rightarrow & 2,3 & \rightarrow & 1,2,2 & \rightarrow & 1,1,3 & \rightarrow & 2,3 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & & & \\ & & 1,1,1,1 & & 1,1,1,2, & & & & & & \end{array}$$

terminando todas as jogadas num ciclo (único) de período 3. Se  $S=6$ , há 11 partições iniciais possíveis, um só ciclo de período 1 e o jogo é como se indica a seguir:

$$\begin{array}{ccccccccc} 6 & \rightarrow & 1,5 & \rightarrow & 2,4 & \rightarrow & 1,2,3 & \rightarrow & 1,2,3 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 1,1,1,1,1,1 & & 1,1,1,1,2 & & 1,1,1,3 & \leftarrow & 2,2,2 & \leftarrow & 3,3 & \leftarrow & 1,1,4 & \leftarrow & 1,1,2,2. \end{array}$$

De modo análogo, é fácil completar a lista de jogadas possíveis para  $S=7$  e  $S=8$ . No primeiro caso, há um único ciclo de período 4 ( $1,2,4 \rightarrow 1,3,3 \rightarrow 2,2,3 \rightarrow 1,1,2,3$ ); no segundo, há dois ciclos, um de período 2 ( $2,2,4 \rightarrow 1,1,3,3$ ) e outro de período 4 ( $1,3,4 \rightarrow 2,3,3 \rightarrow 1,2,2,3 \rightarrow 1,1,2,4$ ).

Notamos em todos estes exemplos que o jogo termina sempre num ciclo. E esta é, de facto, uma propriedade geral: uma vez que o número de partições de um natural qualquer  $S$  é finito, as jogadas conduzem necessariamente a uma repetição, e aí inicia-se o ciclo. O número de ciclos para cada valor de  $S$  varia bastante, mas é conhecida uma fórmula geral para esse número. Analisaremos aqui os períodos desses ciclos.

A tabela seguinte indica o número de ciclos e correspondentes períodos para cada  $S$  entre 1 e 20. Nela, e no que se segue, designaremos por  $\{\Delta_n\}$  a sucessão dos números triangulares, de termo geral  $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ , em que  $n$  é um número natural.



S	Número de Ciclos e Períodos
$\Delta_1 = 1$	Um ciclo de período 1
2	Um ciclo de período 2
$\Delta_2 = 3$	Um ciclo de período 1
4	Um ciclo de período 3
5	Um ciclo de período 3
$\Delta_3 = 6$	Um ciclo de período 1
7	Um ciclo de período 4
8	Um ciclo de período 2
9	Um ciclo de período 4
$\Delta_4 = 10$	Um ciclo de período 1
11	Um ciclo de período 5
12	Dois ciclos de período 5
13	Dois ciclos de período 5
14	Um ciclo de período 5
$\Delta_5 = 15$	Um ciclo de período 1
16	Um ciclo de período 6
17	Um ciclo de período 3
18	Um ciclo de período 2
19	Um ciclo de período 3
20	Um ciclo de período 6

O que é que conjecturamos a partir desta curta lista? Que há regularidade no número e nos períodos dos ciclos, a qual parece ser determinada pelos números triangulares sucessivos que delimitam a posição de  $S$ . Repare o leitor que, na tabela,

(a) se  $S = \Delta_n$  para algum natural  $n$ , há apenas um ciclo de período 1;

(b) só para os números triangulares existe ciclo de período 1;

(c) para todo o  $S$  estritamente entre dois números triangulares consecutivos, digamos  $\Delta_{n-1} < S < \Delta_n$ , a aplicação  $T$  tem ciclo de período  $n$ ;

(d) se  $S$  está imediatamente a seguir a  $\Delta_{n-1}$  ou imediatamente antes de  $\Delta_n$ , então a aplicação  $T$  tem um e um só ciclo, e ele é de período  $n$ .

As propriedades a) – d) acima são parte do guião que provaremos de seguida.

### PRELIMINARES

Para todo o natural  $S$ , existem inteiros  $n > 1$  e  $0 \leq a \leq n - 1$ , únicos, tais que  $\Delta_{n-1} \leq S < \Delta_n$  e  $S = \Delta_n - a$ . Dado  $S$ , consideremos  $n$  e  $a$  como anteriormente e fixemos um ciclo de período  $p$ . A sequência  $\sigma = (\sigma_i)$  dos tamanhos das partições nesse ciclo também é um ciclo de período que divide  $p$ . As propriedades seguintes constam da referência [1] que, contudo, não dispensa a leitura de [2].

**TEOREMA 1:** *Sejam  $S$ ,  $n$  e  $a$  como acima. Fixemos um ciclo de período  $p$  e a sequência  $\sigma$  dos tamanhos das partições nesse ciclo. Então:*

- a) *determina o ciclo e tem também período  $p$ .*
- b) *para todo o  $i$ ,  $\sigma_i \in \{n - 1, n\}$ .*
- c)  *$p$  divide  $n$ .*
- d)  *$\lambda \in \text{ciclo} \leftrightarrow \lambda : \delta_0, 1 + \delta_1, \dots, n - 1 + \delta_{n-1}$ , sendo  $a$  valores dos  $\delta_i$ 's iguais a 0 e os restantes  $n - a$  iguais a 1.*
- e) *o número de ciclos associados a  $S$  é dado por*

$$C_a(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|(n,a)} \varphi(d) \binom{n/d}{a/d},$$

em que  $\varphi$  representa a função de Euler e  $(n,a)$  designa o máximo divisor comum de  $n$  e  $a$ .

Vejam os dois exemplos. Se  $\sigma = \dots 434343\dots$ , então  $n=4$  e  $p=2$ . Desta informação deduzimos que a partição inicial do ciclo é, digamos,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  (escrita por ordem crescente) e que, na primeira iteração do jogo, ela deverá reduzir-se a  $b_1, b_2, b_3$ . Logo,  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 1$ . Assim, de  $1, 1, a_3, a_4$  passamos

a  $a_3 - 1, a_4 - 1, 4$ , que tem tamanho 3 desde que  $a_3 \geq 2$ . Desta partição, iterando de novo, obtemos  $a_3 - 2, a_4 - 2, -, 3$ , que, por ser  $p=2$ , tem de ser a partição inicial de tamanho 4. Logo,  $a_3 = 3, a_4 = 3$  e  $S=8$ .

Consideremos agora  $S=12$ . Então,  $n=5, \Delta_n = 15, a = 3$ . A partição  $\lambda : 1, 2, 2, 3, 4$  corresponde, na notação da alínea d) do Teorema 1, a  $\delta_0 = 1, \delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$  e  $\delta_4 = 0$ , sendo, como enunciado, três deles zero e dois iguais a um. E o mesmo se aplica às sucessivas imagens de  $\lambda$  por  $T$ , que listamos de seguida:

Órbita de $\lambda$	$\delta$	$\sigma$
$\lambda : 1, 2, 2, 3, 4$	1,1,0,0,0	5
$T(\lambda) : 1, 1, 2, 3, 5$	1,0,0,0,1	5
$T^2(\lambda) : 1, 2, 4, 5$	0,0,0,1,1	4
$T^3(\lambda) : 1, 3, 4, 4$	0,0,1,1,0	4
$T^4(\lambda) : 2, 3, 3, 4$	0,1,1,0,0	4
...	...	...

Note-se que, escrito o ciclo deste modo, é fácil resumir a acção de  $T$ : por cada iteração de  $T$ ,  $\delta_0$  avança para a posição mais à direita e os restantes  $\delta_i$ 's são deslocados uma posição para a esquerda, como se rodassem numa circunferência. Ao fim de cinco iterados de  $T$ ,  $\delta_0$  e os restantes  $\delta_i$ 's retornam à posição inicial, terminando o ciclo, que pode, por isso, ser visto como uma palavra circular formada por três 0s e dois 1s (que é  $\sigma$  se, em vez de 0s e 1s, usamos 4s e 5s). Assim, o número de ciclos associados a  $S=12$  corresponde ao número de palavras circulares distintas que é possível construir com três 0s e dois 1s. Ora, para além de 1,1,0,0, temos apenas mais uma possibilidade, (1,0,1,0,0), uma vez que, sendo circulares, por exemplo 1,0,0,0,1 ou 1,0,0,1,0 não constituem ciclos novos. Pelo que, para  $S=12$ , temos exactamente 2 ciclos, e são de período 5. Convida-se o leitor a verificar que

$$\frac{1}{n} \sum_{d|(n,a)} \varphi(d) \binom{n/d}{a/d} = 2.$$

Detectamos na tabela anterior vários valores de  $S$  para os

quais a dinâmica correspondente só tem um ciclo. Por exemplo, quando  $a=1$  ou  $a = n - 1$ , e sempre que  $S$  é triangular. De facto:

**COROLÁRIO 1:** Dado um natural  $S$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $S$  é um número triangular.
- (ii) Existe um (único) ciclo de período 1.

**DEMONSTRAÇÃO:** Suponhamos que  $S$  é um número triangular. Da fórmula da alínea e) do Teorema 1, concluímos que, sendo  $a=0$ , então

$$C_0(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) = 1$$

uma vez que

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

(veja-se [3], Teorema 63); isto é, só há um ciclo. Além disso, pela alínea d), qualquer partição  $\lambda$  desse ciclo único é da forma  $1, 1 + 1, 2 + 1, \dots, n - 1 + 1$ , ou seja,  $1, 2, \dots, n$ , de onde deduzimos que o período desse ciclo é 1.

Suponhamos agora que  $S$  tem partição  $\lambda : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  que é ponto fixo de  $T$ . Podemos ordenar os elementos da partição por ordem crescente, digamos  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Então:

- (i) Para que o tamanho da partição se mantenha por iteração de  $T$ , devemos ter  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 \geq 2$ .
- (ii) Para se obter  $\lambda_1 = 1$  após a primeira jogada, tem de ser  $\lambda_2 = 2$ .
- (iii) Analogamente,  $\lambda_3 = 3$  para se obter  $\lambda_2 = 2$ .
- (iv) Em geral,  $\lambda_n = n$  para se que valha a igualdade  $\lambda_{n-1} = n - 1$ .

Logo

$$S = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

é triangular.

**COROLÁRIO 2:** Dado um natural  $S$  e correspondentes  $a$  e  $n$ , a dinâmica associada tem um único ciclo se e só se  $a \in \{0, 1, n-1\}$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** O caso  $a=0$  foi tratado no corolário anterior. Se  $a=1$  ou  $a = n-1$ , então o máximo divisor comum entre  $n$  e  $a$  é 1, e

$$C_1(n) = C_{n-1}(n) = \frac{1}{n} \binom{n}{n-1} = 1.$$

Reciprocamente, suponhamos que  $a \in \{0, 1, n-1\}$ . Então, uma vez que  $0 \geq a \geq n-1$ , devemos ter  $n \geq 4$  e  $a \geq 2$ . Ora, pela alínea d) do Teorema 1, os ciclos possíveis correspondem a palavras com  $n$  dígitos do alfabeto  $\{0,1\}$  formadas com  $a$  letras iguais a 0 e as restantes  $n-1$  iguais a 1. Como  $a < n-1$ , temos  $n-a \geq 2$ ; e, portanto, podemos construir pelo menos duas palavras circulares distintas: uma com os  $a \geq 2$  zeros consecutivos seguidos dos  $n-a \geq 2$  uns; e outra em que há um 1 entre dois dos zeros.

Pretendemos agora obter informação sobre os períodos dos ciclos que o Teorema 1 conta. A tabela do início deste texto indicia que eles se relacionam com os valores de  $n$  e  $a$ . De que modo?

**TEOREMA 2:** Consideremos um natural  $n$ , um inteiro  $0 \leq a \leq n-1$  e  $S = \Delta_n - a$ .

- a) Se  $n$  é primo e  $S$  não é triangular, a aplicação  $T$ , ao actuar nas partições de  $S$  tem exactamente  $\frac{1}{n} \binom{n}{a}$  ciclos e são todos de período  $n$ .
- b) Para todo o  $a \neq 0$ , a aplicação  $T$  tem um ciclo de período  $n$ .
- c) Se  $n > 2$  é par, e  $a = 2$  ou  $a = n-2$ , então  $T$  tem um ciclo de período  $\frac{n}{2}$  e  $\frac{n}{2} - 1$  ciclos de período  $n$ , e só estes.
- d) Se  $n > 1$  é ímpar e  $a = 2$  ou  $a = n-2$ , então  $T$  tem exactamente  $\frac{n-1}{2}$  ciclos de período  $n$ .

**DEMONSTRAÇÃO:**

a)

Se  $S$  não é triangular, então, como vimos, nenhum ciclo pode ter período 1. Sendo  $n$  primo, uma vez que o período divide  $n$ , conclui-se que ele tem de ser igual a  $n$ . Além disso, como  $1 \leq a \leq n-1$ , o máximo divisor comum de  $n$  e  $a$  é 1, e portanto

$$C_a(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|(n,a)} \varphi(d) \binom{\frac{n}{d}}{\frac{a}{d}} = \frac{1}{n} \varphi(1) \binom{n/1}{a/1} = \frac{1}{n} \binom{n}{a}$$

(o que permite também concluir que se  $n$  é primo, então  $n$  divide todas as entradas interiores da  $n$ -ésima linha do triângulo de Pascal).

b)

Para  $n = 1$ , não há valores admissíveis de  $a$  verificando as duas desigualdades  $0 < a \leq n-1$ . Quando  $n = 2$ , devemos ter  $0 < a \leq 1$ , logo  $a = 1$  e  $S = \Delta_2 - a = 3 - 1 = 2$ ; neste caso, só há duas partições de  $S$ , nomeadamente 2 e 1 + 1, que formam ciclo de período 2. Consideremos agora  $n > 2$  e, para  $S = \Delta_n - a$  e  $0 < a \leq n-1$ , fixemos a partição definida por  $B := \delta_0, 1 + \delta_1, \dots, n-1 + \delta_{n-1}$ , em que para  $0 \leq i \leq n-1$ ,

$$\delta_i \begin{cases} 1 & i \leq n-a-1 \\ 0 & n-a \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

contabilizando-se, em  $B$ ,  $a$  valores de  $\delta_i$  iguais a zero (a partir do índice  $n-a$ ) e  $n-a$  iguais a 1 (os primeiros, até ao de índice  $n-a-1$ ). Note-se que, como  $a \leq n-1$ , temos  $n-a-1 \geq 0$ , e, portanto, o primeiro valor de  $B$ , isto é,  $\delta_0$ , é sempre 1. Por exemplo,

- para  $a = 1$  temos  $B := 1, 2, 3, \dots, n-1, n-1$ ;
- se  $a = n-1$  então  $B := 1, 1, 2, 3, \dots, n-1$ ;
- se  $1 < a < n-1$  o valor (único) que se repete duas vezes seguidas é  $n-1$ , que é maior ou igual a 2, sendo  $B := 1, \dots, n-a, n-a, n-a+1, \dots, n-1$ .

Como

$$\sum_{i=1}^n B_i = (1+2+\dots+n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i = \frac{n(n-1)}{2} + [n-a] \cdot 1 = \Delta_n - a = S,$$

confirmamos que  $B$  representa uma partição de  $S$ . Além disso, a alínea d) do Teorema 1 garante que  $B$  pertence a um ciclo. Resta-nos determinar o seu período.

Se o comprimento de todas as partições do ciclo a que  $B$  pertence fosse igual a  $n$ , pela alínea a) do Teorema 1,  $B$  teria de ser um ponto fixo de  $T$ , o que sabemos ser falso, uma vez que  $S$  não é triangular. Então, como, pela alínea b) do Teorema 1, se tem  $\sigma_i \in \{n-1, n\}$ , para todo o  $i$ , deduzimos que existe  $j$  tal que  $\sigma_j = n-1$  (Note-se que  $B$  não é a partição correspondente a este tamanho, pois tem comprimento  $n$ .)



Aplicando  $T$  à partição  $B$ , os dois elementos que se repetem (mencionados acima) são subtraídos de uma unidade e deslocados uma posição para a esquerda (mantendo-se, por convenção, a ordem crescente na escrita da partição). Consequentemente, a partição  $T^{n-a-1}(B)$  tem o número 1 nas duas primeiras posições, e portanto  $T^{n-a}(B)$  tem comprimento  $n-1$ . Além disso, visto que todos os elementos do conjunto  $\beta = \{n-a+1, n-a+2, \dots, n-1\}$  pertencem a  $B$ , deduzimos que, pelo modo como  $T$  actua, todos os elementos de  $\beta^* = \{n-a+1-(n-a), n-a+2-(n-a), \dots, n-1-(n-a)\}$ , ou seja, do conjunto  $\{1, 2, \dots, a-1\}$  pertencem a  $T^{n-a}(B)$ .

Note-se que este conjunto é não vazio se e só se  $1 < a$ . Contudo, quando  $a=1$  é fácil verificar que a partição  $B := 1, 2, 3, \dots, n-1, n-1$  tem período  $n$ , uma vez que

$$T(B) = 1, 2, 3, \dots, n-2, n-2, n;$$

$$T^2(B) = 1, 2, 3, \dots, n-3, n-3, n-1, n;$$

$$T^3(B) = 1, 2, 3, \dots, n-4, n-4, n-2, n-1, n;$$

$$T^{n-2}(B) = 1, 1, 3, \dots, n-2, n-1, n;$$

$$T^{n-1}(B) = 2, 3, \dots, n-2, n-1, n;$$

$$T^n(B) = 1, 2, 3, \dots, n-3, n-2, n-1, n-1 = B$$

e só neste  $n$ -ésimo iterado repetimos  $B$ .

Prossigamos agora com o argumento para os casos em que  $1 < a$ . Uma vez que  $B$  pertence a um ciclo de partições, é necessário que, iterando  $T$ , a partir de  $T^{n-a}(B)$ , se obtenha de novo  $B$ ; e isso só pode acontecer quando estiverem completadas  $p$  iterações, sendo  $p$  o período do ciclo (cujo valor, recorde-se, procuramos). Ora, para se gerar uma partição de comprimento  $n$  a partir de uma outra de tamanho  $n-1$ , o número 1 não pode pertencer a esta partição – caso contrário, o monte com um só elemento desaparece, pelo que o tamanho se mantém. Mas, pelo que atrás se afirmou sobre  $\beta^*$ , é garantido que 1 consta de  $T^{n-a+j}(B)$  para todo o  $j$  tal que  $0 \leq j \leq a-2$ . O que significa que  $T^k(B) \neq B$  para todo o  $1 \leq k \leq n-2$ . Logo  $p \geq n-1$  e, portanto, restam-nos dois valores possíveis para  $p$ : ou  $p = n-1$  ou  $p = n$ . Contudo,  $n-1$  é primo com  $n$  e, como  $n \geq 3$ , o natural  $n-1$  não é 1; logo,  $n-1$  não divide  $n$ . Como, pela alínea c) do Teorema 1,  $p$  divide  $n$ , concluímos que  $p = n$ .

**Observação:** A partição  $B$  corresponde a uma palavra em círculo com  $n-a$  dígitos iguais a 1 seguidos de  $n-a$  iguais a

zero. Como vimos, a acção de  $T$  pode ser lida como uma rotação dessa palavra numa circunferência até retornarmos à posição inicial. Nesta notação, é talvez mais fácil perceber que o período de  $B$  é  $n$ , isto é, que só ao fim de  $n$  deslocamentos para a esquerda é que os 1s iniciais voltam à posição em que estão perfilados juntos. Mas o argumento anterior elucida outros aspectos da dinâmica de  $T$ , e por isso o incluímos.

c) Consideremos  $n$  par, maior ou igual a 4, e  $S = \Delta_n - 2$ . (A análise para  $S = \Delta_n - [n-2]$  é dual da que iremos apresentar, bastando trocar no argumento que se segue 0s por 1s.) Começemos por observar que, como  $n \geq 4$ , se pode ter  $a = 2$  (ou  $a = n-2$ ) sem que  $S$  seja triangular (ou seja, sem que  $n-2 = 0$ ). Pela alínea d) do Teorema 1, os ciclos possíveis podem escrever-se como palavras circulares com  $n$  dígitos de  $\{0,1\}$ , sendo  $a$  letras iguais a 0 e as restantes  $n-a$  iguais a 1, que podemos etiquetar pelo número de 1s entre os dois 0s. É o que se indica na tabela seguinte:

Palavra circular	Número de 1s entre os dois 0s
0, 0, 1, ..., 1	0
0, 1, 0, 1, ..., 1	1
0, 1, 1, 0, 1, ..., 1	2
0, 1, 1, 1, 0, 1, ..., 1	3
	...
0, 1, ..., 1, 0, 1, ..., 1	$\frac{n-2}{2}$

Por serem palavras circulares, a contagem termina quando se tem  $\frac{n-2}{2}$  1s entre os 0s. Na coluna da direita, contabilizamos precisamente  $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$  ciclos. Observe-se que as primeiras  $\frac{n}{2} - 1$  partições indicadas na coluna da esquerda apresentam um número de 1s à esquerda do segundo 0 diferente do número de 1s à direita deste. Como tal, são necessários  $n$  deslocamentos para completar um ciclo, ou seja, o período é  $n$ . Contudo, para a última palavra,  $0, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1$ , temos  $\frac{n-2}{2}$  1s à esquerda e igual número de 1s à direita do segundo 0, pelo que a sequência  $0, 1, \dots, 1$  surge repetida, e o período desta palavra é  $\frac{n}{2}$ .

d) Analisemos agora o caso em que  $n$  é ímpar e  $a=2$  (ou  $a = n-2$ ), por argumento semelhante ao da alínea anterior.

Consideremos uma partição que pertença a um ciclo, digamos uma palavra com  $n$  dígitos do alfabeto  $\{0,1\}$  com  $a$  0s e  $n - a$  1s. No caso particular de  $n=3$ , há só uma palavra disponível com estas características, nomeadamente 0,0,1, e ela representa o único (veja-se o caso  $a = n - 1$  do corolário 2) ciclo da transformação  $T$  quando  $S = \Delta_3 - 2 = 4$ , e que já sabemos que tem período 3. Em geral, há mais palavras possíveis, as que listamos na tabela seguinte – que, por serem palavras circulares, está completa – onde destacámos o número de 1s entre os dois 0s:

Palavra	Número de 1s entre os 0s
0, 0, 1, ..., 1	0
0, 1, 0, 1, ..., 1	1
0, 1, 1, 0, 1, ..., 1	2
...	
0, 1, ..., 1, 0, 1, ..., 1	$\frac{n-3}{2}$

Ora, como  $n$  é ímpar, a última palavra da tabela tem  $\frac{n-3}{2}$  dígitos iguais a 1 a seguir ao primeiro 0 e  $\frac{n-1}{2}$  dígitos iguais a 1 depois do segundo 0. Neste contexto, já não surgem palavras com igual quantidade de 1s antes e depois dos 0s. Assim, concluímos que existem  $\frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$  ciclos, todos de período  $n$ .

Estamos em condições de aumentar a tabela inicial sobre ciclos e períodos. Para  $S=21$  e  $S=28$ , por serem triangulares ( $\Delta_6$  e  $\Delta_7$ , respectivamente), temos, para cada um deles, um e só um ciclo de período 1. O próximo grupo de valores de  $S$ , entre 21 e 28, corresponde a um natural  $n$  primo, 7, e portanto só surgirão ciclos de período 1 ou 7. Se  $S = 22 = \Delta_7 - (7 - 1)$ , ou o dual  $S = 27 = \Delta_7 - 1$ , que não são triangulares, temos um só ciclo de período 7. Quando  $S = 23 = \Delta_7 - (7 - 2)$ , ou  $S = 27 = \Delta_7 - 2$ , há  $\frac{7-1}{2} = 3$  ciclos de período 7. Sobre  $S = 24 = \Delta_7 - (7 - 3)$  ou  $S = 25 = \Delta_7 - 3$ , os resultados anteriores são omissos. Contudo, como são números não triangulares e 7 é primo, só podem ter ciclos de período 7. Quantos? Basta utilizar a fórmula dada pelo Teorema 1 para o saber:

$$C_4(7) = \frac{1}{7} \sum_{d|(7,4)} \varphi(d) \binom{7/d}{4/d} = \frac{1}{7} \cdot 1 \cdot \binom{7}{4} = 5 = \frac{1}{7} \cdot 1 \cdot \binom{7}{3} = C_3(7).$$

Como vimos, nem todas as partições pertencem a ciclos. Tanto quanto sabemos, é ainda uma questão em aberto o número máximo de jogadas para que uma partição chegue a um ciclo; no caso de  $S$  ser triangular, digamos  $\frac{k(k+1)}{2}$ , esse máximo é  $k(k-1)$  (detalhes em [4]).

## REFERÊNCIAS

- [1] J. Brandt, "Cycles of Partitions", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol.-85, 483-486 (1982)
- [2] E. Akin, M. Davis, "Bulgarian Solitaire", *American Mathematical Monthly* 92 (1985) 237-50
- [3] G. Hardy, E. Wright, "An Introduction to the theory of Numbers", Oxford University Press (1979)
- [4] K. Igusa, "Solution of the Bulgarian Solitaire Conjecture", *Mathematics Magazine*, vol. 58, nº5, 259-271 (1985)

## SOBRE O AUTOR

**Diogo Pernes Cunha** é estudante do ramo de Telecomunicações do Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Foi bolseiro do Programa Novos Talentos em Matemática da Fundação Calouste Gulbenkian em 2009/10 e 2010/11.

## A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA LEVADA A SÉRIO

A *História da Matemática* de Victor J. Katz é a melhor introdução, num só volume, ao estudo sério do desenvolvimento histórico da matemática. “Introdução” pode parecer um exagero ou até uma piada quando se está a falar de uma obra enorme, com mais de 1100 páginas, que impressiona só pela largura da lombada. Mas é mesmo só de uma introdução que se trata e se há uma crítica a fazer aos responsáveis pela versão portuguesa é a de que foi pena que essa clarificação, que faz parte do título original – *A History of Mathematics. An Introduction* – não tivesse sido mantida no título português.

Uma introdução, portanto, mas que introdução! Numa prosa clara e agradável, Victor Katz analisa e explica com todo o rigor conceitos, ideias e técnicas matemáticas desde a Antiguidade mais remota até quase aos dias de hoje. São raríssimos os historiadores capazes de tratar com saber e equilíbrio períodos que se estendem por alguns séculos, um feito que Katz consegue com uma facilidade surpreendente. O autor mostra não apenas uma enorme erudição, mas sobretudo um bom senso e um sentido de proporção a toda a prova.

O leitor que se acometa à tarefa de ler este livro do princípio ao fim ficará com um conhecimento invejável da história da matemática, o que lhe permitirá dar o passo para investigações mais detalhadas, seguindo porventura as sugestões que o próprio Victor Katz oferece. A esmagadora maioria dos leitores, contudo, não usará o livro desta forma, preferindo consultá-lo pontualmente, para conhecimento de algum período, algum matemático ou algum assunto, mas mesmo assim terá nesta *História da Matemática* uma das mais seguras e completas obras de referência sobre o tema.

O livro está dividido em quatro partes que se desenrolam em sequência cronológica, começando na Antiguidade e chegando até o século XX: 1. A matemática antes do



Victor J. Katz, “História da Matemática” (Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010), 1117 pp.

século VI; 2. A matemática medieval, 500-1400; 3. Os primórdios da matemática moderna, 1400-1700; 4. Matemática moderna, 1700-2000. O tratamento é, portanto, cronológico, mas dentro de cada período temporal há uma tentativa de arrumação temática (geometria, álgebra, análise combinatória, etc.), o que permite em certa medida uma leitura temática do livro.

Escrito no espírito de um livro de texto, esta *História da Matemática* tem como leitores ideais “alunos do ensino superior que tencionem vir a ensinar em escolas secundárias ou universidade” (p. xiii), mas naturalmente este conceito deve



ser entendido de maneira muito lata; isto é, o leitor deve ter conhecimentos matemáticos correspondentes ao final do ensino secundário ou aos primeiros anos do ensino superior. Possui também em grau elevado todas as virtudes dos melhores exemplos do *textbook* na tradição pedagógica americana: grande clareza e simplicidade na escrita, rigor escrupuloso nos argumentos e demonstrações, escolha criteriosa das matérias a apresentar, diagramas e outros materiais de apoio preparados com imenso cuidado, exercícios e perguntas para discussão no final de cada capítulo, e referências e notas com abundantes indicações bibliográficas para leituras posteriores.

A abordagem concentra-se exclusivamente nos aspectos internalistas da história da matemática. De fora ficaram os aspectos institucionais, culturais, biográficos, de cultura material, etc., que hoje os historiadores de ciência tratam também como indispensáveis em qualquer estudo. Mas esta escolha é pacífica, pois é consensual que um conhecimento interno da matemática é condição indispensável e prévia mesmo para os estudos externalistas. A tradução foi feita a partir da segunda edição do livro, que data de 1998 (existe já uma edição posterior, de 2008), e a sua actualidade deve ser julgada tendo em conta esse facto. É verdade que desde 1998 até hoje surgiram alguns trabalhos que já se tornaram imprescindíveis para a compreensão de certos temas ou períodos e que, obviamente, não se encontram aqui referidos (por exemplo, e só para a matemática antiga, seria preciso levar em linha de conta os estudos recentes de Netz, Jones, Cuomo, Robson, Klopfer, Chemla, etc., nenhum dos quais é mencionado nesta edição). Mas para a data em que foi preparado, o livro está actualizado. A única deficiência que talvez se possa apontar a este respeito é o facto de haver um recurso quase exclusivo à

literatura anglo-saxónica, o que para alguns temas é manifestamente insuficiente. Para dar apenas um exemplo, o capítulo 7, sobre “A matemática do Islão”, não mencionando quase nenhuns trabalhos do mundo francófono, apresenta uma bibliografia algo deficiente.

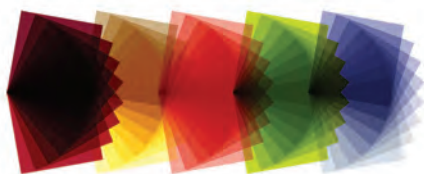
O livro de Katz é muitíssimo bem-vindo ao mercado nacional, por muitas razões. Mesmo entre os que sabem que não há uma via régia para o estudo da matemática, persiste muitas vezes a ideia de que há uma maneira breve, fácil, ligeira e sem esforço de aprender história da matemática. Não há. Por isso, antes mesmo do seu conteúdo magnífico, o que esta obra transmite pela sua dimensão é uma sensação de riqueza e de seriedade. Os muitos anos que o autor despendeu na sua escrita e as muitas horas que tradutores e revisor gastaram na cuidadosa preparação da versão portuguesa são reflexo e demonstração do interesse do assunto.

O aparecimento da *História da Matemática* de Victor J. Katz no mercado português, nesta cuidada edição da Fundação Calouste Gulbenkian, resolve para os próximos anos o problema, que até aqui se sentia, de não existir na nossa língua um livro de texto rigoroso e actualizado sobre o assunto que se pudesse recomendar aos alunos e a outros interessados. Para mais, a tradução é de grande qualidade, mantendo a fluência e o rigor do original, ao que não terá sido alheio o trabalho do revisor, um matemático conhecedor da história da matemática, que terá ajudado a ultrapassar as muitas armadilhas que aparecem no caminho de quem se abalança a traduzir um texto como este.

Henrique Leitão  
CIUHCT, Faculdade de Ciências

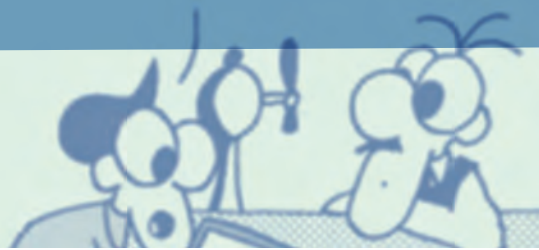
# 1<sup>as</sup> OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA DA LUSOFONIA

COIMBRA 2011



20 a 31 de Julho  
COIMBRA

Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau,  
Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe,  
e Timor Leste



Publicado originalmente no jornal Público, em 20/06/2011. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

#### FICHA TÉCNICA

##### DIRECTOR:

Rogério Martins Universidade Nova de Lisboa

##### VICE-DIRECTORES:

Alessandro Margheri Universidade de Lisboa • Daniel Pinto Universidade de Coimbra

##### CONSELHO EDITORIAL:

Afonso Pedrosa Pinto E. S./3 S. Pedro Vila Real • António Rosa E. S. M<sup>a</sup> Amália Vaz de Carvalho • Carlota Simões Universidade de Coimbra • Elisabete Rodrigues E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • Graciano de Oliveira Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • Henrique Leitão Universidade de Lisboa • João Filipe Queiró Universidade de Coimbra • José Francisco Rodrigues Universidade de Lisboa • José Miguel Rodrigues de Sousa E. S. Felismina Alcântara • Lina Fonseca Escola Superior de Educação de Viana do Castelo • Maria do Céu Pinto Universidade de Coimbra • Manuel Domingos Oliveira Cadete Universidade Agostinho Neto • Paulus Gerdes Universidade Eduardo Mondlane, Moçambique • Raquel Escórcio antiga professora na E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • Roberto Ramalho Universidade de Pernambuco, Brasil • Teresa Almada Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • Juan-Miguel Gracia Universidad del País Vasco, Espanha

##### ASSISTENTES EDITORIAIS:

Ana Figueiredo SPM • Sílvia Dias SPM

##### REVISÃO:

Margarida Robalo

##### DESIGN:

Ana Pedro

##### CONCEPÇÃO E MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB:

Pedro Quaresma Universidade de Coimbra

##### IMPRESSÃO:

Dossier – Comunicação e imagem

##### PROPRIEDADE:

Sociedade Portuguesa de Matemática

Av. República 45, 3<sup>o</sup> Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

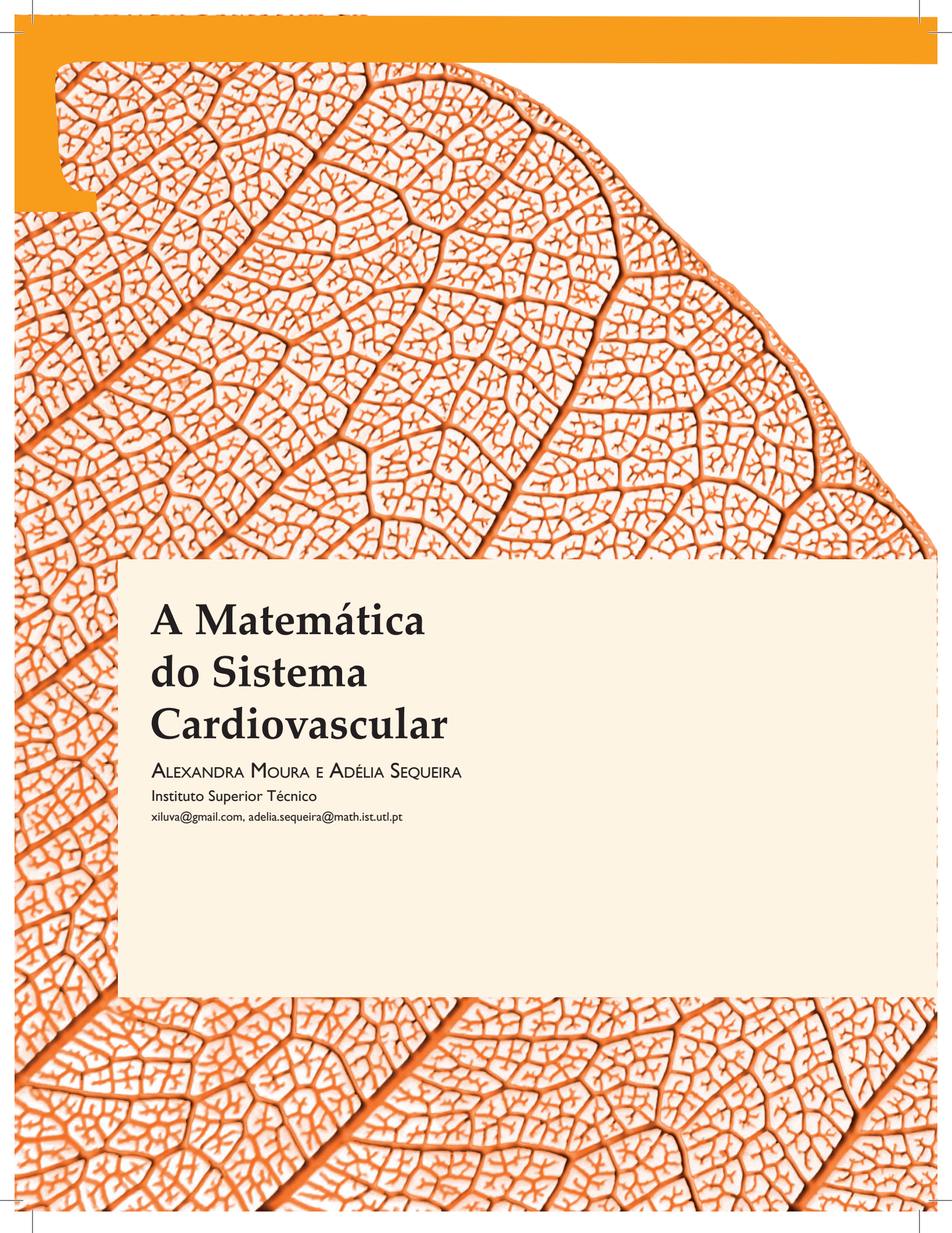
##### TIRAGEM 1900 Exemplares

ISSN 0373-2681

ICS 123299

DEPÓSITO LEGAL: 159725/00





# A Matemática do Sistema Cardiovascular

ALEXANDRA MOURA E ADÉLIA SEQUEIRA

Instituto Superior Técnico

[xiluva@gmail.com](mailto:xiluva@gmail.com), [adelia.sequeira@math.ist.utl.pt](mailto:adelia.sequeira@math.ist.utl.pt)



A estrutura geométrica da rede vascular e a composição heterogénea do sangue, assim como as interacções mecânicas e bioquímicas com as paredes dos vasos e o movimento pulsátil do fluxo sanguíneo, são fenómenos fisiológicos extremamente complexos. Torna-se, por isso, impossível a construção de um modelo matemático tridimensional de todo o sistema circulatório que permita a simulação destas características e a sua aplicação ao estudo dos efeitos hemodinâmicos e hemorreológicos nos diversos tipos de doenças cardiovasculares, tais como a aterosclerose ou os aneurismas.

Um dos desafios da investigação nesta área consiste no desenvolvimento de modelos matemáticos que, tendo em conta os recursos computacionais disponíveis, incluam as complexidades mais relevantes da circulação sanguínea. Apesar dos enormes avanços já alcançados pela comunidade científica, a simulação do sistema cardiovascular continua a ser uma tarefa extremamente difícil e complexa, constituindo

actualmente uma área de investigação muito activa. No que se segue iremos descrever de forma muito geral e sucinta alguns dos aspectos fundamentais de modelação matemática e simulação computacional do fluxo sanguíneo no sistema circulatório, destacando em especial o caso patológico dos aneurismas cerebrais.

## MODELOS MATEMÁTICOS E SIMULAÇÕES

A modelação matemática tem como objectivo a descrição de fenómenos físicos reflectindo diversos aspectos do mundo real. Os modelos matemáticos são constituídos por equações algébricas ou por equações diferenciais que envolvem derivadas de funções em espaço e em tempo. No âmbito da medicina, a modelação matemática e a simulação numérica constituem meios não invasivos de diagnóstico e tratamento de casos patológicos, com um impacto que se tem acentuado de forma assinalável na última década [1, 2, 3]. Trata-se de uma área de investigação multidisciplinar que envolve uma estreita colaboração entre matemáticos, biólogos e médicos e que apresenta grandes dificuldades. Apesar dos enormes avanços na modelação matemática, nos métodos numéricos, na capacidade dos computadores modernos e nas técnicas de imagiologia médica, a simulação do fluxo sanguíneo constitui ainda um grande desafio. As dificuldades na modelação devem-se sobretudo à complexidade fisiológica do corpo humano, e em particular à complexidade geométrica e funcional do sistema cardiovascular.

Para as simulações computacionais do fluxo sanguíneo no sistema vascular, utilizam-se em geral modelos matemáticos (equações diferenciais) de diferentes escalas geométricas, que incluem modelos tridimensionais (3D) mais detalhados, modelos simplificados unidimensionais (1D) ou mesmo zero-dimensionais (0D) [4,5]. Os modelos 3D fornecem informação detalhada sobre o campo de velocidades e a pressão do sangue no vaso sanguíneo. Estas duas grandezas, velocidade e pressão, permitem conhecer completamente a hemodinâmica i.e., a dinâmica do sangue, que é extremamente dependente da geometria das artérias ou veias [6] e está intimamente relacionada com o paciente em causa. Cada pessoa tem uma geometria vascular própria, pelo que o comportamento hemodinâmico é diferente em cada caso. Por essa razão é essencial usar geometrias reais, provenientes de imagens médicas

O estudo de modelos matemáticos e numéricos da circulação sanguínea é um assunto de investigação interdisciplinar de grande actualidade e impacto socio-económico ligado sobretudo ao facto de que as doenças cardiovasculares representam uma das principais causas de mortalidade nos países desenvolvidos.

de pacientes específicos, a fim de obter simulações numéricas fiáveis e com significado clínico. Podem obter-se imagens médicas de vasos sanguíneos por ressonância magnética, ou tomografia computadorizada, entre outros, que são transformadas através de técnicas matemáticas de imagiologia [6], dando origem a domínios computacionais adequados à realização de simulações numéricas.

Apesar de fornecerem informação muito pormenorizada sobre a hemodinâmica, os modelos 3D apresentam um custo computacional muito elevado. Por essa razão só podem ser utilizados em pequenas regiões do sistema cardiovascular, com interesse específico, como por exemplo numa artéria com estenose, ou seja, com uma obstrução devido à presença de placas de aterosclerose, ou numa artéria com um aneurisma. Ao limitar o domínio computacional à região de interesse, criam-se as chamadas fronteiras artificiais (fig. 1), nas quais é necessário ter em consideração a parte restante do sistema cardiovascular [5]. O sistema cardiovascular é fechado, pelo que a circulação local numa região específica influencia e é influenciada pela circulação global ou sistémica. Assim, a simulação numérica só tem significado se essa relação for incluída no próprio modelo. Isto pode ser feito através dos modelos matemáticos simplificados, 1D e 0D [5,7]. Embora não sejam tão detalhados como os modelos 3D, estes modelos reduzidos dão informação extremamente relevante, como o fluxo médio ou a pressão média. Os modelos 1D descrevem com grande precisão a propagação do pulso de pressão nas artérias, e os modelos 0D descrevem variações do fluxo e da pressão sanguíneos em grandes compartimentos do sistema cardiovascular, como o coração ou a circulação pulmonar. Por outro lado, estes modelos são muito pouco dispendiosos do ponto de vista computacional e podem ser usados para representar grandes partes do sistema circulatório, como por exemplo as 55 principais artérias do corpo humano [8]. A técnica que se usa para simular em

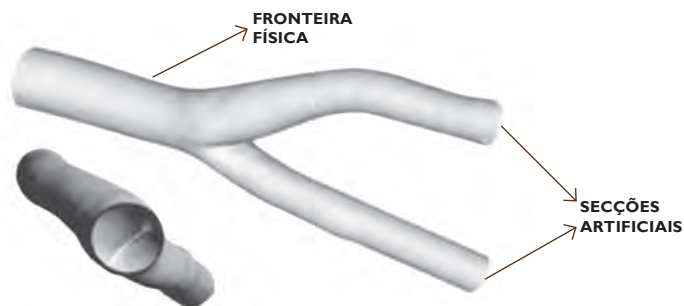


Figura 1: Domínio computacional 3D: secções artificiais e fronteira física

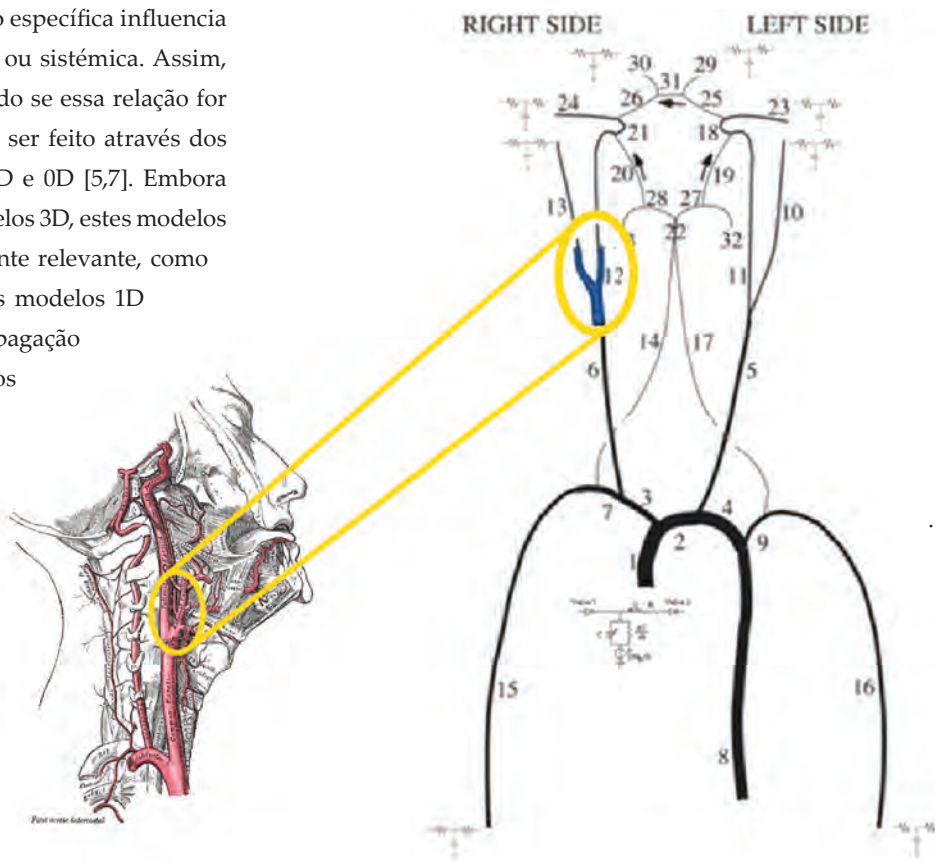


Figura 2: Esquema do acoplamento de um modelo 3D da bifurcação da carótida, com modelos 1D e 0D.

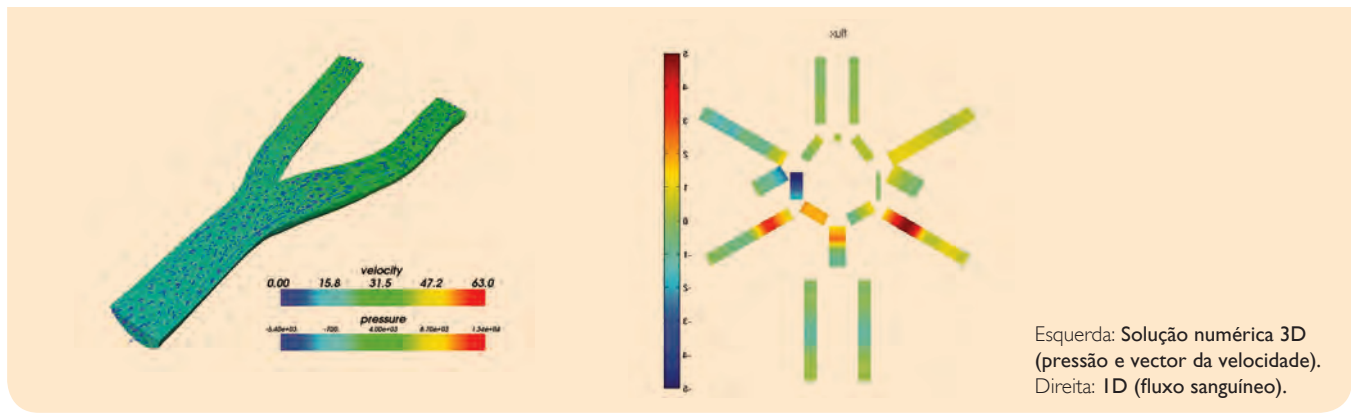
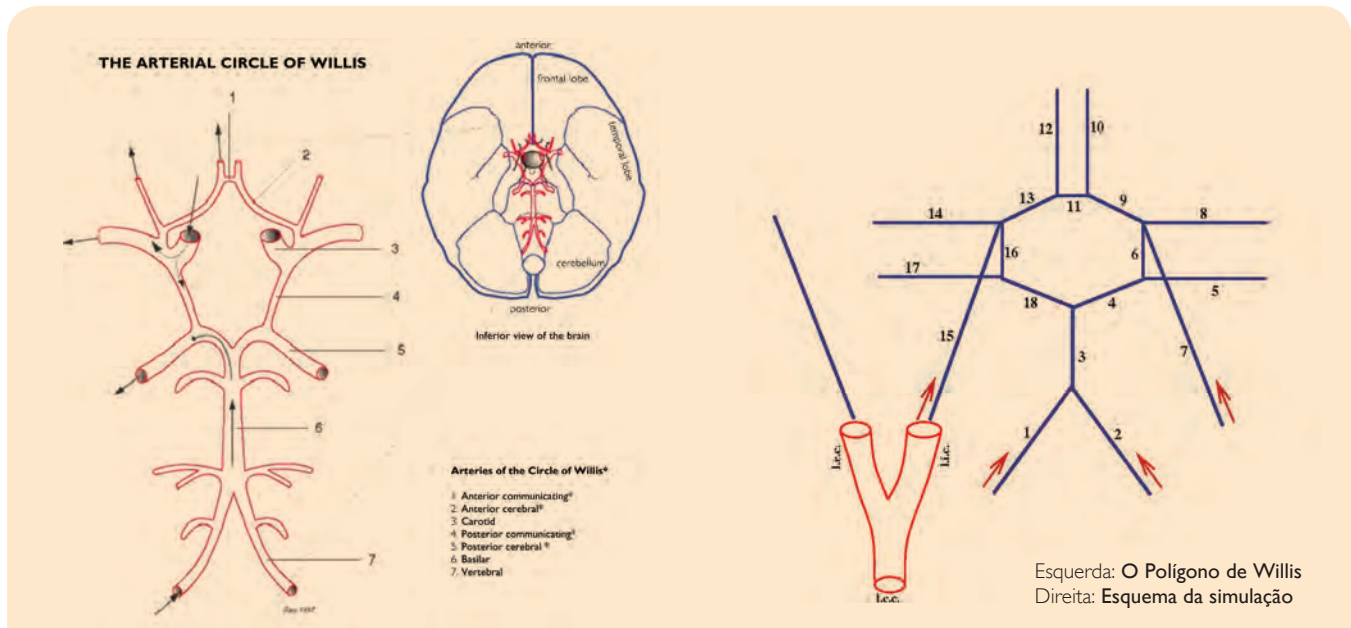


Figura 3

3D o comportamento do sangue na circulação sistémica consiste em acoplar nas secções artificiais modelos reduzidos 1D ou 0D, como se representa na figura 2, em que um modelo 3D da bifurcação da carótida é acoplado a um modelo 1D das artérias desde o coração até ao cérebro, incluindo o Polígono de Willis. Por sua vez o modelo 1D da rede arterial pode ser acoplado com modelos 0D para ter em conta, por exemplo, a resistência causada pela rede dos vasos capilares (fig. 2) [5]. A metodologia de multiescala geométrica consiste precisamente em acoplar diferentes modelos para a simulação do sistema cardiovascular, de diferentes escalas, precisão e custos computacionais [1,5]. Quanto à fronteira física do problema 3D, as paredes das artérias são muitas vezes consideradas rígidas. Contudo, na realidade, a parede arterial

move-se com a pressão exercida pelo fluxo sanguíneo, sendo precisamente esse fenómeno que dá origem à propagação do pulso arterial. O modelo matemático 3D para a simulação do comportamento mecânico do sangue deverá assim ser acoplado com outro modelo 3D que descreve os deslocamentos da parede arterial, dando origem a um novo modelo de maior complexidade, que se designa por modelo de interacção fluido-estrutura [1,5]. Na figura 3 estão representados os resultados numéricos da velocidade e da pressão do fluxo sanguíneo na bifurcação da carótida para um modelo 3D de interacção fluido-estrutura, em que o ramo correspondente à carótida interna, que vai para o cérebro, é acoplado com um modelo 1D do Polígono de Willis, cuja solução também está representada na mesma figura [5,9].



## ANEURISMAS CEREBRAIS: UM DESAFIO PARA OS MATEMÁTICOS

Os aneurismas cerebrais são dilatações patológicas da parede vascular cerebral, cujas propriedades mecânicas se alteraram devido a vários factores, podendo vir a sofrer uma ruptura que causa a morte súbita em 50% dos pacientes, e provoca deficiências permanentes em grande parte dos restantes casos. Trata-se, portanto, de uma doença devastadora que afecta cerca de 5% da população e que geralmente não se manifesta a não ser na fase de ruptura. As causas da génese e do desenvolvimento desta patologia são ainda desconhecidas, embora se aceite que exista uma correlação entre a progressão de aneurismas e factores congénitos e hemodinâmicos [1,3]. No que se refere aos factores hemodinâmicos, a simulação numérica desempenha um papel essencial e único para a compreensão do desenvolvimento dos aneurismas, permitindo em particular obter resultados e visualizá-los de forma fiável e não invasiva [3,6]. Através da simulação numérica é também possível calcular facilmente valores da tensão exercida pelo sangue nas paredes dos vasos (*wall shear stress* – WSS), que se sabe terem uma influência determinante no desenvolvimento e na ruptura de aneurismas, e que não se podem obter no laboratório através de experiências *in vivo* ou *in vitro*.

Pelo que foi dito, as simulações computacionais têm hoje em dia um impacto cada vez mais relevante na prática clínica de doentes com aneurismas cerebrais, levando a uma melhor compreensão da patologia e à tentativa de prevenção do seu desenvolvimento natural, nomeadamente da ruptura e do conseqüente risco hemorrágico, contribuindo ainda para o seu tratamento. Por outro lado, constitui também um instrumento de apoio na análise dos resultados anatómicos e fisiológicos, bem como nas complicações pós-terapêuticas resultantes da embolização do aneurisma cerebral. Os resultados obtidos poderão posteriormente contribuir para o aperfeiçoamento e para o desenvolvimento de novas técnicas de tratamento, como, por exemplo, em cirurgia endovascular.

Como já foi acima mencionado, a hemodinâmica depende essencialmente da morfologia dos vasos sanguíneos, estando por isso intimamente ligada à especificidade de cada indivíduo. No caso particular dos aneurismas cerebrais, a obtenção de simulações computacionais fiáveis depende não só da existência de modelos matemáticos adequados e de mé-

todos numéricos eficientes, mas também da sua aplicação em geometrias computacionais reais obtidas a partir de imagens médicas, resultantes, por exemplo, de tomografia computacional (fig. 4). Para isso torna-se necessário fazer o seu processamento, que consiste essencialmente em três passos [9]:

1. Segmentação: identificação da região pretendida, ou seja, do lúmen e da parede arterial;
2. Definição matemática da superfície tridimensional;
3. Suavização dessa superfície que, depois da sua definição matemática, apresenta muitas irregularidades ligadas à qualidade da imagem adquirida, e que não são fisiológicas.

Uma vez executado o processamento da imagem médica, selecciona-se a região de interesse onde se irá fazer a simulação numérica (fig. 4) [3,6], transformando-a numa malha computacional obtida por uma decomposição em figuras geométricas mais simples, como, por exemplo, tetraedros. É nessa malha computacional que se resolve numericamente o modelo matemático, através da simulação computacional. A partir da solução numérica do campo de velocidades, calculam-se os indicadores hemodinâmicos que maior influência têm na génese e no desenvolvimento de aneurismas. Na fig. 5 estão representados os resultados numéricos da simulação realizada na geometria computacional da fig. 4 [6]. Nessa figura pode ver-se que as zonas de maior tensão nas paredes do aneurisma (WSS) se encontram na sua base (à esquerda), enquanto as de menor tensão se encontram no interior. Quanto às variações espaciais do WSS (WSSG), vê-se que também ocorrem na base do aneurisma, precisamente na zona de impacto do fluxo sanguíneo (que na imagem circula da direita para a esquerda).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] L. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani, Eds. “Cardiovascular Mathematics: Modeling and Simulation of the Circulatory System”. Springer-Verlag, Itália. Milano, 2009.
- [2] G.P. Galdi, R. Rannacher, A.M. Roberston, S. Turek, Eds. “Hemodynamical Flows: Modeling, Analysis and Simulation”, Birkhäuser, 2008.
- [3] D.M. Sforza, C.M. Putman, J.R. Cebral. “Hemodynamics of Cerebral Aneurysms. Annual Review on Fluid Mechanics”, 41:91-107, 2009.

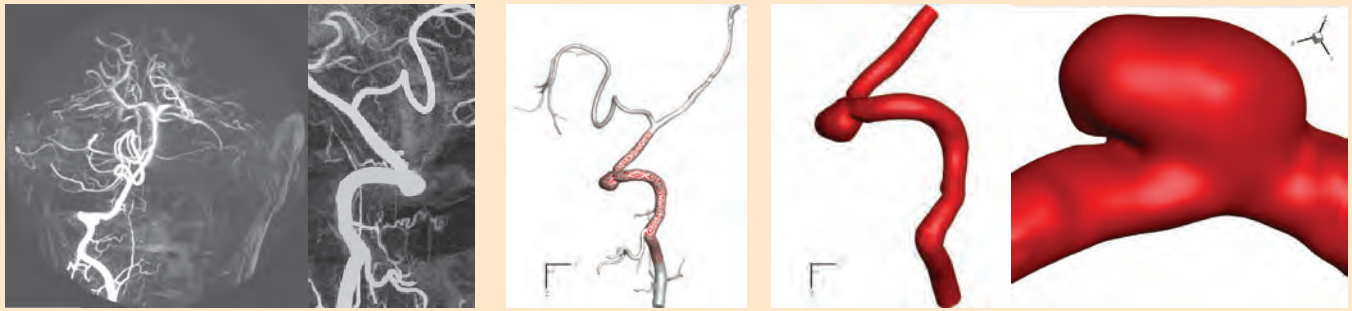


Figura 4: Imagem médica por tomografia computadorizada (esquerda), definição da região de interesse (centro) e domínio computacional global e em detalhe (direita).

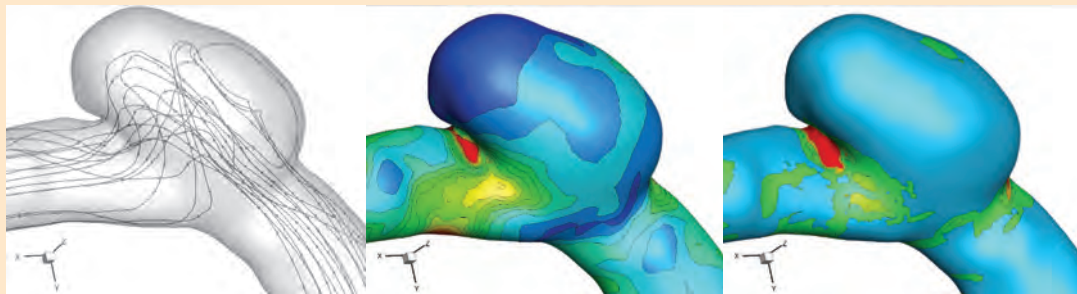


Figura 5: Resultados numéricos do fluxo sanguíneo num aneurisma de um paciente específico. Traçado de partículas (esquerda), WSS (centro) e WSSG (direita).

[4] L. Formaggia, A. Veneziani. "Reduced and Multiscale Models for the Human Cardiovascular System". Lecture Notes VKI Lecture Series, 7, 2003.

[5] A. Moura. "The Geometrical Multiscale Modeling of the Cardiovascular System: Coupling 3D and 1D fluid-structure interaction models". PhD Thesis. Politécnico di Milano, 2007.

[6] A. Gambaruto, J. Janela, A. Moura, A. Sequeira. "Sensitivity of Hemodynamics in Patient-specific Cerebral Aneurysms to Vascular Geometry and Blood Rheology". *Mathematical Biosciences and Engineering*, 8 (2), 411-425, 2011.

[7] J. Alastruey, K.H. Parker, J. Peiró, S.M. Burd, S.J. Sherwin. "Modelling the Circle of Willis to Assess the Effects of Anatomical Variations and Occlusions on Cerebral Flows". *Journal of Biomechanics*, 40(8):1794-1805, 2007.

[8] L. Formaggia, D. Lamponi, M. Tuveri, and A. Veneziani. "Numerical Modeling of 1D Arterial Networks Coupled with a Lumped Parameters Description of the Heart". *Computer Methods in Biomechanics & Biomedical Engineering*, 9(5):273-288, 2006.

[9] A. Moura. "Coupling Multiscale Fluid-structure Interaction Models for Blood Flow Simulations" in "Vascular Wall and Endothelium", Lisboa, 2007, *Actas de Bioquímica 9* (eds. J. Martins e Silva e Carlota Saldanha), 137-141, 2008.

#### SOBRE OS AUTORES

**Adélia Sequeira** obteve em 1981 o grau de Docteur de 3ème Cycle em Matemática Aplicada pela Université de Paris VI (França) e em 1985 obteve o grau de Doutor em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Actualmente é Professora no Departamento de Matemática do IST/UTL e é membro do CEMAT – Centro de Matemática e Aplicações do IST, desde a sua fundação.

**Alexandra Moura** licenciou-se em Matemática Aplicada e Computação, pelo IST, em 2001, e obteve o grau de Doutor em Engenharia Matemática, pelo Politecnico di Milano em 2007. Foi investigadora de Pós-Doutoramento no MOX – Modeling and Scientific Computing, Politecnico di Milano, em 2007. É actualmente investigadora de Pós-Doutoramento no Departamento de Matemática do IST/UTL, e membro do CEMAT – Centro de Matemática e Aplicações, desde 2007.

---

# A MATE MÁTICA de M.C. ESCHER

---

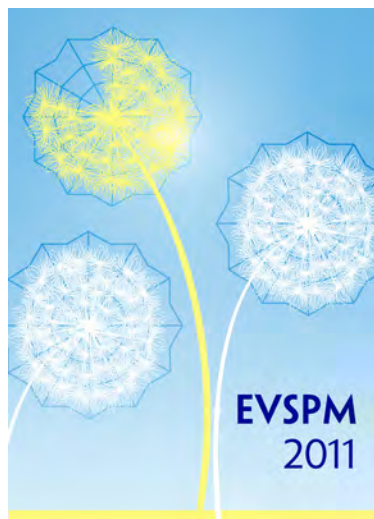
**A SPM disponibiliza esta exposição a escolas ou outras entidades que promovam a divulgação científica.\***

Mais informações em <http://www.spm.pt/escher>

\*A requisição da exposição tem custos de manutenção.

**spm**  
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA





## ESCOLA DE VERÃO DA SPM EM SETEMBRO

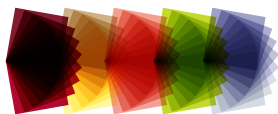
A Escola de Verão da Sociedade Portuguesa de Matemática 2011 (EVSPM2011) realiza-se entre os dias 5 e 9 de Setembro na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD). O programa da EVSPM2011 contempla conferências, minicursos e oficinas, e ainda um Curso de Formação de Professores, que dá direito à atribuição de 1 crédito. O prazo das inscrições para a EVSPM2011 termina no dia 31 de Julho. Poderão ainda ser efectuadas inscrições até 28 de Agosto, com um acréscimo no valor do registo. A Escola de Verão da SPM realiza-se de dois em dois anos e é um evento de grande importância na promoção e na divulgação da matemática junto da comunidade académica, contribuindo para a formação científica e pedagógica dos professores e estudantes dos vários níveis de ensino. Para mais informações, consulte o site do encontro em <http://evspm2011.utad.pt/>.

## NUNO CRATO, ANTIGO PRESIDENTE DA SPM, É O NOVO MINISTRO DA EDUCAÇÃO

Nuno Crato foi nomeado recentemente ministro da Educação, Ensino Superior e Ciência. Professor Catedrático de Matemática e Estatística no Instituto Superior de Economia e Gestão, em Lisboa, foi presidente da SPM entre 2004 e 2010, mantendo-se ligado à Sociedade como presidente da Assembleia Geral. Foi, até ao momento, pró-reitor para a Cultura Científica da Universidade Técnica de Lisboa e CEO do Taguspark, o maior parque de Ciência e Tecnologia do País. Em paralelo com o seu trabalho académico, tem-se empenhado na divulgação científica, sendo que o seu trabalho de popularização da matemática tem sido traduzido e publicado em diversas línguas. Na equipa de Nuno Crato está também João Filipe Rodrigues Queiró como Secretário de Estado do Ensino Superior. Professor Catedrático no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, João Queiró é membro da mesa da Assembleia Geral da SPM e do Conselho Geral do Seminário Nacional de História da Matemática.



## COIMBRA RECEBE PRIMEIRAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA DA LUSOFONIA ENTRE 20 E 31 DE JULHO



Coimbra acolherá as primeiras Olimpíadas de Matemática da Lusofonia (OML) entre 20 e 31 de Julho. A par da competição realizar-se-á a Semana Olímpica da Lusofonia, com cursos e conferências. O evento pretende unir estudantes dos países lusófonos através da matemática, incentivar o desenvolvimento da disciplina nestes países, aprofundar a sua cooperação nesta área e apoiar a criação de sociedades científicas. Esta competição internacional envolve jovens dos oito países de expressão portuguesa: Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau, Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe e Timor-Leste. As OML são uma organização conjunta da SPM e do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

## EQUIPA PORTUGUESA PARTE PARA AMESTERDÃO PARA OLIMPIADAS INTERNACIONAIS

São seis os olímpicos que representarão Portugal nas Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO), que este ano se realizam em Amesterdão, na Holanda, entre 16 e 24 de Julho. Os participantes foram seleccionados a partir de um grupo de 24 medalhados das categorias A (8º e 9º anos) e B (do 10º ao 12º ano) das 29ªs Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), e de medalhados nas mesmas categorias participantes na edição anterior das OPM. A participação nas IMO é organizada pela SPM, e a selecção e a preparação dos alunos ficam a cargo do projecto Delfos, da Universidade de Coimbra. Em Setembro, realizam-se as Olimpíadas Ibero-Americanas, na Costa Rica.



### ADEUS A PILAR RIBEIRO

O dia 28 de Março de 2011 ficou marcado pelo desaparecimento de Maria Pilar Ribeiro, uma das fundadoras da SPM e da *Gazeta de Matemática*. Pilar Ribeiro foi primeiro-secretário da primeira direcção da SPM, de 1940 a 1942, e tornou-se sócia honorária da Sociedade, em 2006. Nasceu em Lisboa, a 5 de Outubro de 1911, e licenciou-se em Matemática pela Faculdade de Ciências de Lisboa, no ano de 1933, numa época em que não era vulgar as mulheres tirarem um curso. Leccionou a disciplina de Matemática no Liceu Camões, ao mesmo tempo que frequentava o Seminário de Análise Geral, organizado por António Aniceto Monteiro. Foi, em conjunto com José da Silva Paulo, responsável pela tradução para português do livro de Hilbert “Fundamentos da Geometria”, publicado em 1951 e republicado em 2003. Depois de uma passagem pela Suíça, entre 1942 e 1946, em que acompanhou o marido, o matemático Hugo Ribeiro, secretário-geral da SPM, partiu para os Estados Unidos da América, em 1947, na sequência das purgas dos matemáticos em Portugal. Aí foi instrutora de Matemática na Pennsylvania State University. Depois do 25 de Abril, regressou a Portugal e, entre 1976 e 1980, foi professora na Universidade do Porto e na Escola Biomédica Abel Salazar. Pilar Ribeiro, uma das últimas sobreviventes da geração matemática que fez história nas décadas de 1930 e 1940, completaria 100 anos no próximo mês de Outubro.

## 6.º ENCONTRO LUSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

No final do mês de Agosto, a cidade de São João del-Rei, em Minas Gerais, no Brasil, receberá o 6º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática. Entre os dias 28 e 30 de Agosto, a Universidade Federal de São João del-Rei será palco do evento, que decorre alternadamente em Portugal e no Brasil, com o objectivo de incentivar o intercâmbio de investigadores dos dois países que trabalham na área da História da Matemática. Mais informações em [http://www.spm.pt/luso\\_brasileiros\\_encontros](http://www.spm.pt/luso_brasileiros_encontros).



### BRIDGES: A COMUNHÃO ENTRE A ARTE E A MATEMÁTICA

Matemáticos, músicos, escritores, escultores, engenheiros e tantos outros estudiosos partilharão conhecimentos e experiências na conferência BRIDGES 2011, que este ano se realiza em Coimbra. A universidade mais antiga do País acolherá, entre 27 e 31 de Julho, o evento, que promove a reflexão sobre a relação entre a matemática e a arte. Durante cinco dias, será possível frequentar *workshops*, assistir a palestras e participar noutras actividades. A conferência é organizada com o apoio da SPM.



### PORTAL EUROPEU DE MATEMÁTICA SOLICITA CONTRIBUIÇÕES PORTUGUESAS

O portal [www.mathematics-in-europe.eu](http://www.mathematics-in-europe.eu) foi lançado no final do ano passado durante o *workshop* internacional “Raising Public Awareness of Mathematics”, em Óbidos, sob a alçada da European Mathematical Society (EMS). Para dar continuidade ao projecto e aumentar a quantidade de conteúdos em língua portuguesa, a EMS solicita a colaboração dos matemáticos portugueses que, em articulação com a SPM, tenham interesse em contribuir para a divulgação da matemática através deste suporte. Desde a sua criação, o site tem disponibilizado textos científicos, informações sobre investigação,

história da matemática e material que os professores podem usar na sala de aula. O “Mathematics-in-Europe” apresenta ainda um dicionário matemático com mais de 600 entradas, já traduzido em 16 línguas, e pretende lançar no futuro uma base de dados para professores e reunir informação dedicada às crianças em idade escolar. O “Mathematics-in-Europe” pretende promover a imagem da matemática e disponibiliza informações variadas dirigidas a diferentes tipos de públicos: de jornalistas a professores, de estudantes do secundário a matemáticos profissionais.



## “MATEMÁTICA EM SETEMBRO” NA FCUL E “ESCOLA DE VERÃO” DA FCUP PARA ALUNOS DO SECUNDÁRIO

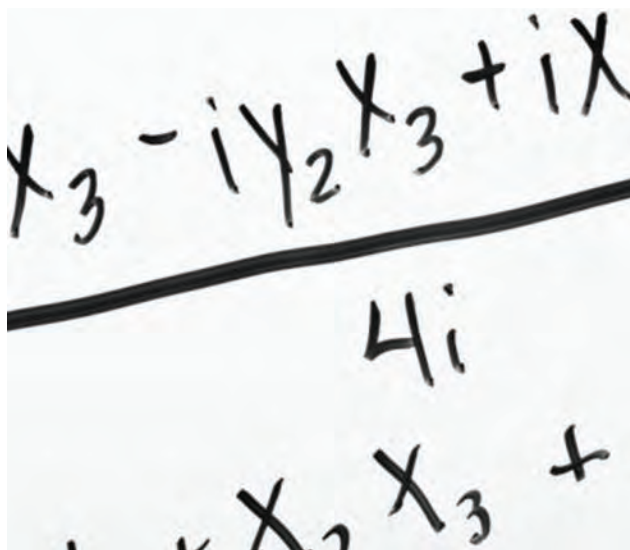


A escola de matemática pré-universitária da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL) estará aberta entre 1 e 9 de Setembro de 2011 aos alunos que tenham finalizado o 11º ano ou o 12º ano com Matemática A. “Matemática em Setembro” oferece cursos que permitem rever e consolidar os conteúdos matemáticos necessários à frequência de qualquer disciplina de Matemática do ensino superior. Os estudantes terão à disposição módulos temáticos, dedicados a equações, funções ou trigonometria, entre outros, e módulos lúdicos, com jogos, magia, etc. O dia 3 será dedicado a actividades culturais no Museu da Ciência da Universidade de Lisboa. As inscrições podem ser efectuadas através do site da “Matemática em Setembro”, em <http://matset.fc.ul.pt/>, directamente na tesouraria da faculdade ou por correio. No norte do país, a Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP) também disponibiliza uma “Escola de Verão” para alunos dos 10º ao 12º anos, entre 5 e 10 de Setembro. Os participantes terão à sua disposição cursos, palestras e a oportunidade de desenvolver projectos de grupo sobre temas relacionado com a matemática e suas aplicações, nomeadamente na área da geometria, das aplicações à Criptografia ou à pesquisa de inteligência extraterrestre, da construção de sólidos com Origami, dos jogos de acção e de estratégia, entre muitos outros. A candidatura deve ser efectuada até ao dia 20 de Julho. Mais informações em [http://cmup.fc.up.pt/cmup/evmat/2011/escVerao\\_home.html](http://cmup.fc.up.pt/cmup/evmat/2011/escVerao_home.html).

## WORKSHOP DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS APLICAÇÕES NA UNIVERSIDADE DO MINHO

No dia 7 de Setembro, realizar-se-á na Universidade do Minho o *workshop* Mathematical Modelling and Numerical Simulation for Engineering Applications (MMNSEA’11). O encontro tem como objectivo dar a conhecer, valorizar e promover a utilização de métodos numéricos em diferentes áreas científicas, fomentando a troca de experiências no âmbito da simulação numérica. O MMNSEA’11 procurará também lançar novas parcerias e futuras pontes entre a matemática aplicada e outras áreas científicas. Mais informações em <http://sites.google.com/site/mathengapply/home>.





## NOVOS TALENTOS EM MATEMÁTICA GULBENKIAN 2011

As candidaturas para o programa que distingue o trabalho de estudantes universitários estão abertas até ao dia 7 de Outubro. A Fundação Calouste Gulbenkian instituiu o programa "Novos Talentos em Matemática" para premiar os estudantes universitários que evidenciem um elevado mérito académico, através da realização de estudos aprofundados e/ou da participação activa num programa de seminários e/ou da investigação em matemática. Os participantes desenvolverão os seus trabalhos em conjunto com especialistas, que exercerão o papel de tutores.

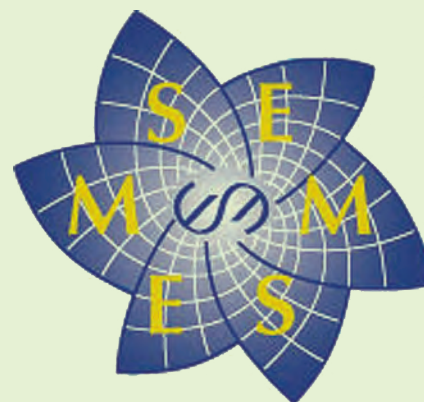


## PORTO RECEBE ENCONTRO INTERNACIONAL CONJUNTO DA AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY E DA SPM EM 2015

Dentro de quatro anos, a cidade do Porto receberá o encontro internacional que a American Mathematical Society (AMS) organiza anualmente com as suas congéneres de outros países, e que em 2015 terá a colaboração da SPM. Do programa deste evento, que se realizará de 11 a 14 de Junho, fazem parte palestras, sessões especiais sobre áreas de investigação específicas e outras actividades que permitem a troca de contactos entre os investigadores. O encontro fará parte das comemorações dos 75 anos da SPM.

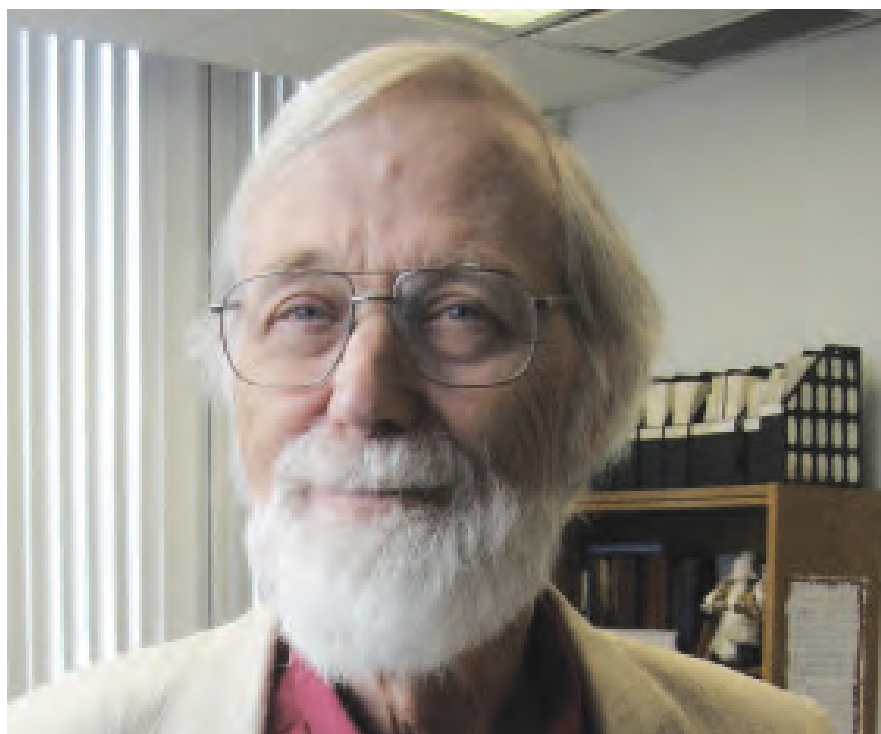
## UM ANO DE QUOTAS GRÁTIS DA EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY PARA ESTUDANTES DE DOUTORAMENTO

A European Mathematical Society (EMS) está a oferecer o primeiro ano de quotas aos estudantes de doutoramento que queiram tornar-se sócios desta instituição científica. Os sócios da EMS beneficiam de preços reduzidos em congressos europeus e em encontros apoiados pela sociedade, descontos em publicações EMS, acesso à versão *online* da revista *EMS Newsletter*, etc. Mais informações em: <http://www.euro-math-soc.eu/membership.html>.



## JÁ NASCEU A “WIKICIÊNCIAS”

A primeira enciclopédia científica online de base colaborativa em língua portuguesa já está disponível em <http://wikiciencias.casadasciencias.org>. A “WikiCiências”, alojada no portal Casa das Ciências da Fundação Calouste Gulbenkian, disponibiliza cerca de 650 entradas elaboradas até agora por professores e alunos das faculdades de ciências das universidades do Porto (UP), Lisboa, Coimbra e Minho. Espera-se que, até ao fim do ano, estejam disponíveis cerca de 1000 entradas. José Ferreira Gomes, professor da faculdade de ciências da universidade do Porto, é o editor-chefe da “WikiCiências”, a qual pretende chegar a professores e alunos do ensino básico ao ensino superior e ao público em geral.



## PRÉMIO ABEL 2011 ATRIBUÍDO A JOHN MILNOR

John Milnor foi o vencedor do Prémio Abel 2011 pelas suas descobertas nas áreas da topologia, da geometria e da álgebra. O investigador norte-americano era já detentor da Medalha Fields (1962), reunindo agora as duas distinções mais importantes da matemática. O trabalho de John Milnor, no Institute for Mathematical Sciences da Stony Brook University (Nova Iorque), influenciou profundamente o campo da matemática na segunda metade do século XX. Retratado como um “expositor excepcionalmente talentoso” pela Academia Norueguesa de Ciências e Letras, Milnor é considerado um cientista imaginativo e capaz de fazer descobertas surpreendentes. O investigador possui um vasto leque de obras publicadas, consideradas modelos da escrita matemática. No âmbito da investigação científica que desenvolveu ao longo de mais de três décadas, recebeu inúmeras distinções, nomeadamente o Prémio Wolf (1989), atribuído a cientistas e artistas, e três Prémios Steele (1982, 2004 e 2011), da American Mathematical Society. O Prémio Abel, atribuído pela primeira vez em 2003 para distinguir trabalhos científicos de relevo no campo da matemática, consagra assim em 2011 o percurso de John Milnor como investigador e expositor. Além do reconhecimento da comunidade científica, o matemático recebeu também um montante de cerca de 750 mil euros.



## EM PROL DA QUALIDADE DO ENSINO

O desenvolvimento da matemática em Portugal tem como premissa incontornável a qualidade dos ensinos básico e secundário. É nestes ciclos de ensino que se constrói o pensamento matemático e se consolidam os conhecimentos base. É também nestes ciclos de ensino que se descobrem e definem vocações. Conseguir ensinar e promover a matemática junto dos jovens é um enorme desafio com que se confrontam diariamente milhares de professores que, de norte a sul do País, dão o seu importante contributo para o desenvolvimento da nossa disciplina. A Sociedade Portuguesa de Matemática tem vindo a associar-se a este enorme esforço, trabalhando afincadamente na defesa de um ensino sério e rigoroso.

Nos últimos anos, a Sociedade Portuguesa de Matemática tem dedicado um olhar atento ao ensino da matemática pré-universitária. A criação do Gabinete para o Ensino Básico e Secundário (GEBS) constituiu um passo decisivo na instauração de um modelo de acção que pensamos ser o correcto. É pela estreita colaboração entre professores do ensino básico, do ensino secundário e do ensino superior – assessorados, quando necessário por especialistas em didáctica e docimologia – que se conseguem identificar adequadamente os pontos fortes e fracos de programas, currículos e instrumentos de aprendizagem e avaliação. Podem então surgir propostas credíveis que visam oferecer aos jovens portugueses um ensino responsável e de qualidade. Por outro lado, a nossa sociedade é uma entidade independente que apenas responde perante os seus associados. Essa independência é a marca de uma instituição isenta, cujas declarações e posições têm por único objectivo a defesa do ensino da matemática.

Por vezes, as posições do GEBS chegam mesmo a gerar verdadeiros debates nacionais. Foi o que aconteceu, por exemplo, em torno do problema da pouca exigência que tem caracterizado os exames nacionais e as provas de aferição nos últimos anos. A falta de exigência colide frontalmente com aquilo que sabemos serem os desafios que aguardam o País e os portugueses durante

a próxima década, num quadro, nacional e internacional, cada vez mais exigente e competitivo. Apesar do longo caminho que ainda há a percorrer, estamos em crer – após alguma polémica inicial – que a pertinência das nossas críticas é hoje amplamente reconhecida e que começam lentamente a desenhar-se medidas que visam a correcção desta situação. Mas a SPM não se fica por posições críticas e propostas que podem auxiliar a corrigir erros e a melhorar o ensino. Desenvolve também, e sobretudo, uma intensa actividade de contribuição positiva para a formação de professores, a melhoria dos materiais de ensino e a divulgação da matemática entre os jovens e o público em geral. Destaquemos, em primeiro lugar, a formação contínua dos professores. O Centro de Formação da Sociedade Portuguesa de Matemática – coordenado pela professora Isabel Hormigo – é actualmente o maior do País nesta área, tendo oferecido em 2010 acções de formação acreditadas a cerca de 1500 professores. Trata-se de uma actividade fundamental, cuja relevância irá certamente crescer nos próximos anos. Por um lado, após a reforma de Bolonha, a Matemática desapareceu praticamente dos mestrados em Ensino de Matemática (2º ciclo), dando essencialmente lugar a disciplinas de índole pedagógica, sociológica e administrativa. Destaquemos, em primeiro lugar, a formação contínua dos professores. O Centro de Formação da Sociedade Portuguesa de

Matemática – coordenado pela professora Isabel Hormigo – é actualmente o maior do País nesta área, tendo oferecido em 2010 acções de formação acreditadas a cerca de 1500 professores. Trata-se de uma actividade fundamental, cuja relevância irá certamente crescer nos próximos anos. Por um lado, após a reforma de Bolonha, a Matemática desapareceu praticamente dos mestrados em Ensino de Matemática (2º ciclo), dando essencialmente lugar a disciplinas de índole pedagógica, sociológica e administrativa. Esta formulação colocará infelizmente no mercado de trabalho professores que há muito têm um contacto insuficiente com a disciplina de Matemática, contacto esse, como é evidente, absolutamente determinante para o seu bom desempenho enquanto docentes. Também, as reestruturações um pouco selvagens de que são por vezes alvo os programas de ensino vêm introduzir temáticas que requerem da parte dos professores (que as queiram tratar com seriedade) um importante investimento na sua formação. Um caso paradigmático desta situação é a introdução recente no programa de geometria do ensino básico do estudo das isometrias do plano e dos grupos de rosáceas, frisos e padrões. Trata-se de um assunto de razoável complexidade que exige do professor conhecimentos que não terá adquirido na totalidade aquando da sua formação inicial. A fim de suprir esta necessidade, o Centro de Formação da SPM está actualmente a preparar, em colaboração com a associação Atractor, uma acção de formação sobre este tema.

Finalmente, a SPM conta ainda com um Centro de Avaliação de Manuais Escolares (CAME), coordenado desde a sua criação em 2009 pelo professor Carlos Grosso. Trata-se do único centro nacional habilitado a certificar manuais escolares de todas as disciplinas de matemática e de todos os anos de escolaridade,

do 1º ao 12º. Um pouco à imagem do que se passa no Gabinete para o Ensino Básico e Secundário, a filosofia que preside aos trabalhos do CAME repousa na interacção de professores de todos os níveis de ensino, conjugando-se assim valências distintas que vêm enriquecer a qualidade do resultado final. O CAME conta actualmente com uma equipa de cerca de 30 avaliadores com perfis extremamente diversificados, desde matemáticos profissionais a professores do 1º ciclo do ensino básico. Por se tratar de um documento de referência para professores e alunos, o manual escolar assume um papel central no bom desempenho do nosso sistema de ensino. A SPM considera fundamental que os manuais estejam bem organizados, não apresentem erros científicos e proponham exercícios e actividades que promovam uma aprendizagem adequada dos conceitos e das técnicas fundamentais de cada unidade programática. Para cada manual que nos é confiado, as equipas do CAME elaboram de forma dedicada um relatório pormenorizado, que, entre correcções, clarificações e recomendações, procura auxiliar os autores a maximizar a qualidade da sua obra. Muito nos orgulha o facto de merecermos a confiança das principais editoras nacionais, como a Areal Editores, as Edições Gailivro, a Texto Editores e a Porto Editora.

Mas orgulha-nos ainda mais o papel activo e desinteressado protagonizado pelos sócios e colaboradores da SPM na dinamização e na operacionalização de todos estes órgãos. Sem este empenho colectivo, aliás muito característico da nossa sociedade, nenhum destes projectos seria exequível. A presente direcção continuará a trabalhar na esperança de poder merecer a confiança de todos os nossos associados.

## CURSOS

Aplicações do Cabri3D  
Aplicações do Geogebra  
Aplicações do Geometer's SketchPad  
Aplicações Informáticas em Probabilidades e Estatística  
Aplicações e Modelação Matemática com Geogebra  
Cinderella  
Correlação e Regressão em MACS  
Elementos de Euclides  
Ensinar Matemática em Quadros Interactivos  
Ensinar Matemática em Quadros Interactivos – Aplicações  
Ensinar Matemática em Quadros Interactivos – Complementos  
Estatística no Excel  
Geometer's SketchPad e Excel na Modelação Matemática  
Jogos Matemáticos  
LaTeX  
MACS  
Matemática Elementar  
Matemática Elementar: Aritmética e Geometria  
Matemática no Excel  
Mathematica  
Novos Programas: Materiais Didácticos  
Novos Programas: Questões de Matemática Elementar  
Probabilidades e Estatística  
Treinador Olímpico

**CENTRO DE FORMAÇÃO**  
**SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

CCPFG/ENT-AP-0266/08

# ACÇÕES DE FORMAÇÃO DE MATEMÁTICA

## INFORMAÇÕES

Centro de Formação SPM  
Av. da República, 45-3.º Esq.  
1050-187 Lisboa  
Tel.: 217986354  
Tlm.: 96 000 90 45  
E-mail: formacao@spm.pt

**spm**  
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA