

**NOVIDADES!**

Jogos Didáticos



## Do Pequeno Teorema de Fermat às Famílias Gerais de Congruências

CRISTINA SERPA

## Auxiliares de Cálculo no Ensino de Ontem e de Hoje

ANA ELIETE REIS

## Conversa com Jorge Buescu

ISABEL S. LABOURIAU



## POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: [gazeta@spm.pt](mailto:gazeta@spm.pt).

## ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2012

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para [imprensa@spm.pt](mailto:imprensa@spm.pt)

VISITE O SITE DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

[www.spm.pt](http://www.spm.pt)

E O DA GAZETA DE MATEMÁTICA

[www.gazeta.spm.pt](http://www.gazeta.spm.pt)

Novo site da  
Gazeta de Matemática.

[www.gazeta.spm.pt](http://www.gazeta.spm.pt)



**46** UM PROBLEMA DE LUGARES GEOMÉTRICOS



**36** O TEOREMA DE GAUSS-BONNET



**14** DO PEQUENO TEOREMA DE FERMAT ÀS FAMÍLIAS GERAIS DE CONGRUÊNCIAS

**30** AUXILIARES DE CÁLCULO NO ENSINO DE ONTEM E DE HOJE



**54** CONVERSA COM... **JORGE BUESCU**

- 02 EDITORIAL** | *Rogério Martins*
- 03 ATRACTOR**  
Recuperação matemática do património
- 08 RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*  
Puzzles algorítmicos
- 10 CANTO DÉLFICO** | *Alexander Kovačec*  
Comparar áreas sem cálculos: o Teorema de Bolyai-Gerwien
- 14 NA LINHA DE FRENTE** | *Fabio Chalub*  
Matemática à mesa do jantar  
*artigo de capa*
- 16 DO PEQUENO TEOREMA DE FERMAT ÀS FAMÍLIAS GERAIS DE CONGRUÊNCIAS**  
*Cristina Serpa*
- 24 APANHADOS NA REDE** | *António Machiavelo*  
Primos de outros mundos
- 26 AUXILIARES DE CÁLCULO NO ENSINO DE ONTEM E DE HOJE**  
*Ana Eliete Reis*
- 34 PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS SURPREENDENTES** | *Manuel Silva e Pedro J. Freitas*  
Um problema de matrizes com favos de mel
- 36 O TEOREMA DE GAUSS-BONNET**  
*José Natário*
- 42 NOVAS HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA ANTIGA** | *Bernardo Mota*  
Traduzir, entender, anotar, e amaldiçoar Diofanto
- 45 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 46 UM PROBLEMA DE LUGARES GEOMÉTRICOS**  
*David Mesquita*
- 54 CONVERSA COM ...** | *Isabel Labouriau*  
... Jorge Buescu
- 58 NOTÍCIAS**
- 64 CARTAS DA DIREÇÃO** | *Sílvia Anjos*  
SPM 2010/2012 e rumo ao futuro



ROGÉRIO MARTINS  
Universidade Nova  
de Lisboa  
roma@fct.unl.pt

## É URGENTE CRIAR UMA IMAGEM DAS PROFISSÕES LIGADAS À MATEMÁTICA

Será que devemos resignar-nos à ideia de que é normal os candidatos chegarem à justa para cobrir os *numerus clausus* dos cursos de matemática em Portugal, ou para o facto de, em geral, os cursos de matemática serem um dos cursos com média mais baixa de entrada em cada uma das universidades?

Porque é que não há mais candidatos aos cursos de matemática? Na verdade não é assim tão raro encontrar estudantes que assumem que gostam de matemática, com boas médias... E na hora da verdade, preferem medicina, engenharia, economia, etc. Não conheço nenhum estudo sério sobre o assunto, mas quando perguntamos a alguém que estuda ou estudou matemática qual a razão para ter escolhido matemática, algumas das respostas mais típicas são: “escolhi porque um professor do secundário me chamou à atenção para essa possibilidade”, “escolhi porque conhecia alguém, familiar ou amigo, que é matemático” ou “escolhi porque gostaria de ser professor de matemática”, e geralmente esta última razão tem implícita a existência de um professor que o inspirou. Creio que este estado de coisas se deve em grande parte à imagem (ou simplesmente à ausência dela) que a sociedade tem das carreiras ligadas à matemática. Deveria ser claro para a sociedade em geral que existe todo um mundo de carreiras que começam com uma licenciatura em matemática. O ideal seria que vissemos mais pais dizerem “o meu filho vai concorrer para matemática” com a mesma frequência e o mesmo orgulho que os vemos a dizer “o meu filho vai concorrer para medicina” ou “o meu filho vai concorrer para direito”. Não porque defenda a pressão dos pais sobre os filhos para realizarem um determinado curso superior, mas porque esta vontade é uma boa medida da imagem que uma dada carreira tem na sociedade em geral. Embora possa parecer uma ideia fria e calculista, a verdade é que seria excelente que o número de candidatos a licenciaturas em matemática excedesse largamente o número de vagas.

A verdade é que a profissão de matemático é uma das mais gratificantes a vários níveis, por exemplo, o já bem conhecido

Careercast (<http://www.careercast.com>) tem classificado muito bem as profissões relacionadas com a matemática. Por exemplo, no *ranking* de 2012 e entre 200 profissões, a profissão de atuário aparece num fantástico 2.º lugar, em 10.º lugar aparece matemático e em 18.º, estatístico. Por outro lado, é bem sabido que em geral não tem havido grandes problemas de empregabilidade dos recém-diplomados em matemática, seja porque o mercado absorve estes diplomados pelos seus conhecimentos específicos, seja porque embora não estejam na realidade a desempenhar tarefas diretamente relacionadas com a matemática, esta aparentemente forneceu-lhes uma maior capacidade de adaptação.

Seguramente que uma licenciatura em matemática não é fácil, mas há outros cursos que também têm fama de difíceis e não têm falta de candidatos, na verdade o que não falta é adolescentes que não se intimidam com a dificuldade de um curso superior. Tipicamente, a área de matemática não dá salários milionários, mas outras áreas também não e não têm falta de candidatos. O que é que falta, então, à matemática? Falta um conhecimento da sociedade em geral de que uma licenciatura em matemática pode levar a uma parafernália de outras atividades profissionais: professor, investigador em matemática e em outras ciências, finanças, atuariado, indústria, informática, estatística, etc. Na verdade, atualmente o caminho mais curto para muitas atividades não diretamente relacionadas com a matemática é mesmo uma licenciatura em matemática, por exemplo carreiras de investigação em outras áreas científicas, o problema é que pouca gente sabe disto.

Já agora, se conhece alguém que gosta de matemática e que vai concorrer ao ensino superior nos próximos tempos, não se esqueça de perguntar: E porque não matemática?

## RECUPERAÇÃO MATEMÁTICA DO PATRIMÓNIO

Há alguns anos foi tirada uma fotografia a um painel de azulejos existente na Igreja de S. Domingos, em Viana do Castelo, para ilustrar uma palestra sobre os grupos de simetria de padrões duplamente periódicos no plano. Qual não foi o espanto, quando, ao tentar classificar o que se julgava ser uma região representativa de um tal padrão, se verificou que não se encontrava a esperada regularidade na colocação dos azulejos.

Uma imagem dessa fotografia está na figura 1. Note-se que, logo no início da primeira linha, surgem as duas configurações indicadas na figura 2. Há no painel dois tipos de azulejos diferentes, *A* e *B*, representados na figura 3 e é essa diversidade que permite que haja uma grande variedade de configurações, que numa primeira análise podem não ser detetadas.

Suponhamos que temos dois eixos, um horizontal e outro

vertical, e queremos colocar quatro azulejos, um em cada quadrante, de forma a que cada um desses azulejos, de tipo *A* ou *B*, encoste à origem o seu vértice que, na figura 3, aparece à esquerda, em baixo. Por exemplo, começando no 1.º quadrante e correndo os restantes no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, as configurações mostradas na figura 2 correspondem às escolhas dos azulejos *BAAA* e *ABAB*, respetivamente.



Figura 1: Painel de Azulejos



Figura 2



Figura 3: A e B

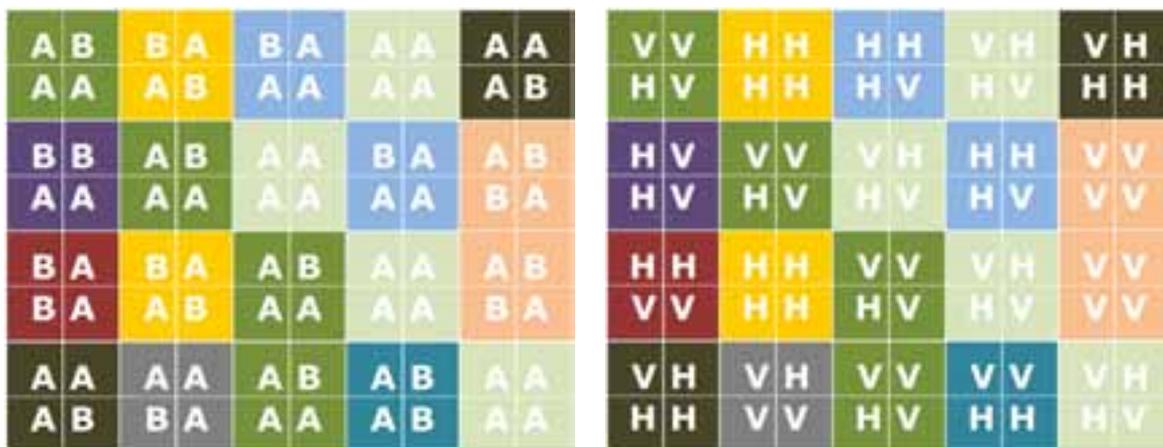


Figura 4



Figura 5 ▶

Figura 6 ▼  
Padrão usando só azulejo A:  
AAAA  
(442 ou p4)



As possibilidades são em número de 16 (palavras em  $A$  e  $B$  de quatro letras) e, destas, 10 estão representadas no painel (ver figura 4<sup>1</sup>), o que não abona muito a favor do modo como se procedeu à colocação dos azulejos!

Seria difícil proceder à retificação do verdadeiro painel da parede da igreja, mas o Atractor apresenta aqui um exercício, que consiste em mostrar como se poderia utilizar o seu programa GeCla [1] para proceder a um *restauro virtual* do painel. Esse exercício servirá de pretexto para destacar a relação entre sub-grupos do grupo de simetria e regiões fundamentais (motivos) que lhes estão associadas.

Comecemos por fixar, entre as dez configurações representadas no painel, uma que só utiliza um dos dois tipos de azulejos: AAAA (1.<sup>a</sup> linha, 4.<sup>a</sup> coluna). E imaginemos que o painel se obtém a partir da imagem quadrada (figura 5) assim criada com os quatro azulejos iguais, efetuando sucessivas translações horizontais e verticais do quadrado. Cada bordo é colado por uma pequena translação ao seu bordo paralelo. Ora, colando entre si bordos paralelos de um quadrado, obtém-se um toro e, usando esse toro como *carimbo*, o GeCla permite obter o padrão desejado. Esse padrão está representado na figura 6. Este seria porventura o melhor candidato a padrão para usar num restauro do painel da igreja, com aquele tipo de azulejos. Usando agora o mesmo procedimento, mas partindo da configuração inicial BAAA (1.<sup>a</sup> linha e 1.<sup>a</sup> coluna, ver 1.<sup>a</sup> imagem da figura 2), chegaríamos ao padrão representado na figura 7. Há uma diferença importante, do ponto de vista do tipo de simetria, entre os padrões representados nas figuras 6 e 7. As únicas simetrias do segundo são as translações. No primeiro caso há, além destas, simetrias de rotação de graus 2 e 4, com centros nos chamados



◀ Figura 7: BAAA (o ou p1)

▼ Figura 8: Centros de ordem 2 e 4



centros de rotação<sup>2</sup>, assinalados na figura 8 respectivamente com os símbolos  $\diamond$  e  $\square$ . De onde é que surgiram estas simetrias adicionais no primeiro caso, se só usámos translações em ambos os casos? Uma simples análise das figuras permite encontrar a resposta: o desenho no quadrado de quatro azulejos usado no primeiro padrão tinha, ele mesmo, uma simetria de rotação de grau 4 com centro no próprio centro do quadrado. Isso implicou que o padrão tivesse como simetrias, não só as rotações de grau 4 com centros em todos os trasladados, mas também outras rotações resultantes da existência daquelas e das translações (ver figura 8).

No segundo exemplo, o quadrado escolhido corresponde a uma região fundamental do seu grupo de simetria – que coincide neste exemplo com o das translações do padrão – e esse quadrado pode ser escolhido como motivo básico para o padrão correspondente. Mas no primeiro exemplo, o quadrado que usámos não é uma região fundamental para o grupo de simetria do padrão da figura 6, é-o apenas para o subgrupo (próprio) do grupo das translações do padrão. Portanto, não pode ser esco-

lhido como um motivo para o padrão, pois aquele quadrado *não* é uma região *minimal* tal que a partir dela se possa reconstruir todo o padrão usando apenas isometrias pertencentes ao grupo de simetria. (Na frase anterior, a seguir a “pois”, poder-se-ia tirar ambas as palavras em *itálico*, mas não só uma delas. Porquê?) Para encontrarmos um motivo, vamos procurar uma região mais pequena, uma vez que, além das translações, dispomos de outras simetrias. Não há unicidade na escolha: na figura 9 estão indicadas três escolhas, entre uma infinidade de formas possíveis. As cores nos bordos indicam quais os pontos que se correspondem por alguma das simetrias (a rotação referida, uma translação ou uma composta da rotação com translações). Procedendo às colagens dos bordos, pela forma sugerida por essas cores, obtemos nos três casos um duplo triângulo retângulo isósceles.

<sup>1</sup> Nessa figura, está, para cada conjunto de 4 azulejos, também a palavra em *H* e *V*, que descreve, para cada quadrante e junto à origem, se é a curva horizontal ou a vertical que está por cima. Configurações idênticas têm a mesma cor de fundo para mais fácil identificação e contagem.

<sup>2</sup> J. Conway usa esta terminologia para aludir a centros de rotação que não estão situados em eixos de simetria (de reflexão).



Figura 9: Regiões fundamentais de formas diferentes (442 ou p4)



Figura 10: Formação da almofada triangular (triângulo retângulo isósceles –  $p4$  ou 442)



Figura 11: ABAB e BABA



Figura 12: Padrão correspondente a BABA (\*2222 ou  $pmm$ )

Essa “almofada triangular” é característica desse tipo de simetria, designado por  $p4$  ou 442, conforme o sistema de notações, e pode ser utilizada como uma espécie de carimbo para obter todo o padrão (ver [1]). A figura 10 mostra diversas fases na formação do carimbo referido.

Os casos  $BAAA$  e  $AAAA$ , que acabámos de ver, aparecem quatro vezes cada no painel da igreja. Vejamos o que sucede com os outros 12 desenhos.  $ABAA$ ,  $AAAB$  (duas vezes cada), e  $AABA$  (uma vez) correspondem a três desenhos diferentes, todos sem simetria, que conduzem a padrões só com translações, tal como em  $BAAA$ . As configurações  $ABAB$  e  $BABA$  (duas vezes, cada) têm dois eixos de simetria em direções perpendiculares, um vertical e outro horizontal: regiões fundamentais são, aqui, de forma perfeitamente determinada. A figura 11 mostra o desenho dos quatro azulejos e o carimbo correspondente, formado por um azulejo com bordo espelhado. A figura 12 mostra o padrão correspondente a  $BABA$ . As configurações  $ABBA$  e  $BAAB$  (para  $BAAB$ , ver figuras 13 e 14) têm dois desenhos diferentes, mas com o mesmo tipo de simetria: um eixo vertical de simetria, que traz como consequência que os bordos do quadrado que lhe são paralelos também sejam eixos de simetria; uma região fundamental é um dos dois retângulos em que o eixo divide o quadrado. Nesse retângulo, os lados verticais são espelhados e os horizontais devem ser colados (por uma translação), dando origem a um carimbo, que é um cilindro com os bordos espelhados, que “carimbam” os eixos de simetria do padrão).

Quanto à configuração  $BBAA$ , tem também apenas um eixo de simetria, mas horizontal.

Em resumo: nos 20 quadrados de quatro azulejos (figuras 1 e 4), temos 10 palavras diferentes, mas estas 10 palavras só definem, aplicando o método indicado, padrões com quatro tipos diferentes de simetria. E as seis palavras que faltam na parede? São elas  $AABB$ ,  $ABBB$ ,  $BABB$ ,  $BBAB$ ,  $BBBA$ ,  $BBBB$ . Deixa-se ao leitor como exercício a verificação de que todas elas determinam, pelo processo indicado, padrões de três dos quatro tipos de simetria já encontrados.

O exercício de restauro poderia continuar, se variássemos as regras que impusemos no início...

## REFERÊNCIAS

[1] GeCla<sup>3</sup>, pode ser importado de <http://www.atractor.pt/mat/GeCla>

<sup>3</sup> O programa GeCla guarda, além do padrão gerado, a informação sobre as simetrias criadas pelo carimbo utilizado, e só essas! Por isso, o utilizador deve escolher, como motivos, imagens que não tenham simetria. Caso contrário, são ignoradas pelo programa as simetrias que resultem da imagem usada e não das propriedades do carimbo. Esta "exigência" do programa é perfeitamente natural e coerente com a matemática envolvida.



Figura 13: BAAB



Figura 14: BAAB (\*\* ou pm)



- ✓ ARTIGOS DE OPINIÃO
- ✓ ENTREVISTAS
- ✓ PROBLEMAS
- ✓ HISTÓRIAS
- ✓ PASSATEMPOS
- ✓ PRÉMIOS

TUDO ISTO E MUITO MAIS EM [WWW.CLUBE.SPM.PT](http://WWW.CLUBE.SPM.PT)

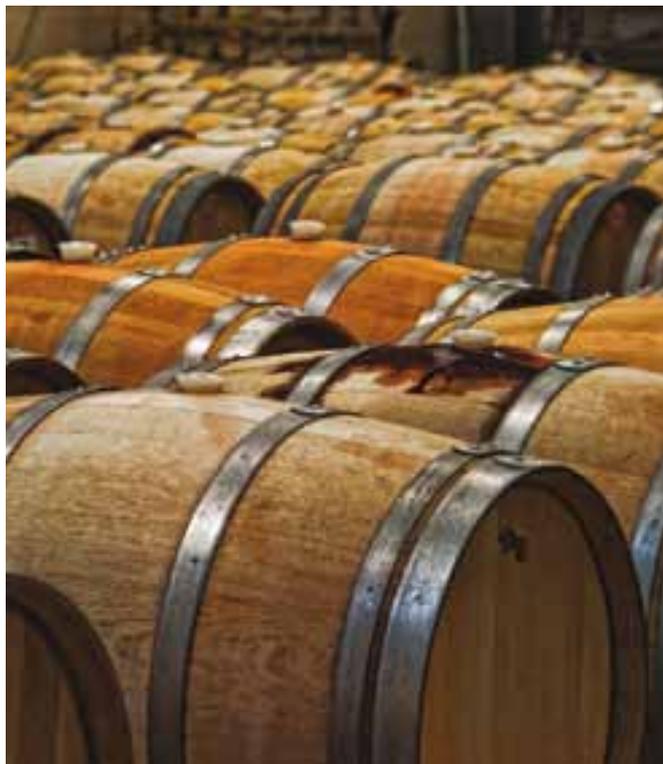




JORGE NUNO SILVA  
Universidade de Lisboa  
[jnsilva@cal.berkeley.edu](mailto:jnsilva@cal.berkeley.edu)

## PUZZLES ALGORÍTMICOS

A Oxford UP publicou em 2011 mais um livro de matemática recreativa, *Algorithmic Puzzles*. Desta vez os seus autores, Anany e Maria Levitin, apresentam uma coleção de quebra-cabeças, alguns clássicos, outros originais, enfatizando os respetivos métodos de abordagem. Desta obra seleccionámos alguns problemas que nos atraíram particularmente.



As questões propostas neste livro evidenciam a necessidade de elaborar, ainda que de forma implícita, procedimentos claros para a resolução de problemas. Aliás, um dos propósitos desta obra, na palavra dos seus autores, é promover o pensamento algorítmico, ainda que informalmente, longe da utilização das ferramentas de programação.

1. O rei de um país distante foi informado de que um dos seus 1000 barris de vinho contém veneno. O veneno é tão forte que mata sempre quem prova do respetivo barril em exatamente 30 dias. O rei está disposto a sacrificar 10 dos seus escravos para determinar qual dos barris está contaminado. Será que esta tarefa pode ser levada a cabo antes da festa planeada para de hoje a cinco semanas? Poderá o rei resolver o seu problema sacrificando somente oito escravos?

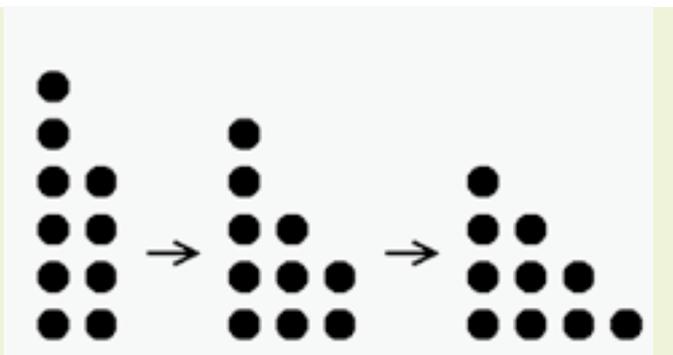
Entre mil barris de bom vinho, um contém veneno que mata em 30 dias.

2. Num jogo de computador há um espião que se move ao longo de uma reta. A sua posição inicial, no instante 0, é  $a$ . Em cada intervalo de tempo unitário o espião move-se  $b$  unidades para a direita se  $b$  é positivo (ou nulo) e  $|b|$  unidades para a esquerda se  $b < 0$ . Ambos  $a$  e  $b$  são inteiros fixos, mas desconhecidos. Começando no instante 0, a cada intervalo de tempo pode adiantar um palpite sobre a localização do espião, capturando-o em caso de o palpite ser certo. Será que o apanha em tempo finito?



Don Adams como Maxuell Smart, ► um grande espião da célebre série "Get Smart".

3. Comece com  $n$  moedas, onde  $n$  é um número triangular ( $n = 1 + \dots + k$ ). Divida-as por  $s$  colunas da maneira que entender. Agora aplique repetidamente a seguinte operação: retire uma moeda de cada coluna, formando uma nova coluna com as moedas retiradas. Prove que este processo estabiliza, após um número finito de iterações, numa configuração de  $k$  colunas contendo  $1, \dots, k$  moedas, respetivamente.



Exemplo a partir da distribuição 6-4 de dez pontos. Em cada passo ordenámos as colunas por cardinalidade decrescente. ▲

4. Considere uma cadeia de  $n$  clips. Qual é o menor número de clips individuais que deve retirar da cadeia para que seja possível criar, a partir dos segmentos obtidos, cadeias de qualquer comprimento (medido em número de clips) entre 1 e  $n$ ?

Ao retirar um dos clips centrais de uma cadeia de seis, obtemos cadeias de comprimentos 1, 2 e 3.





ALEXANDER KOVAČEC  
Universidade de  
Coimbra  
kovacec@mat.uc.pt

## COMPARAR ÁREAS SEM CÁLCULOS: O TEOREMA DE BOLYAI-GERWIEN

Em tempos antigos, muito antes de a escola nos ter metido nas cabeças métodos penosos de contagem "um, dois, três, ... mil trezentos e dezasseis, ...", etc., pastores que queriam saber se o número de carneiros que tinham era igual ao das ovelhas, "casaram" cada carneiro com uma ovelha. A resposta era sim, se e só se não sobrassem nem ovelhas nem carneiros. De forma algo semelhante, um carpinteiro, que não sabe usar fórmulas para calcular áreas, pode decidir se uma dada folha poligonal de ouro dá ou não para dourar a parede extravagante de um arquiteto do cubismo.

As primeiras páginas de um livro de história de matemática como [1] convencem-nos de que os conceitos de comprimento, área, volume, são dos mais intuitivos, mais antigos e mais básicos de toda a matemática: "os registos mostram que todos os povos antigos que consideramos sabiam como calcular as áreas de figuras simples e retilíneas". Poucas páginas depois, sabemos que os babilónios já conheciam o volume de uma pirâmide em termos de área de base e altura.

Na verdade, ao longo de toda a história da matemática o cálculo de áreas e volumes atraiu a atenção. Já os gregos, nomeadamente Arquimedes (287-212 a.C.) baseando-se em Eudoxo (408-355 a.C.), calcularam áreas de figuras limitadas por linhas curvas por um método a que chamaram "exaustão". Hoje em dia, tais áreas são calculadas por cálculo integral inventado por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716). Estes autores ainda não tinham uma boa teoria dos números reais. Os gregos, sempre zelando pelo rigor das suas afirmações, quando não foi possível doutra forma, deram estimativas (para  $\pi$ , por exemplo) ou evitaram o cálculo explícito

de limites usando raciocínio por absurdo: "se esta área fosse  $< 2/3$ , então ... contradição; se fosse  $> 2/3$ , então ... contradição ... logo a área é  $2/3$ ." Os inventores do cálculo tiveram grandes dificuldades em justificar os seus argumentos. Procuraram refúgio em "quantidades infinitamente pequenas", "fluxões" etc. Mesmo quando Riemann (1826-66) formula a sua definição de integral em 1853 ainda menciona tais quantidades. Para resumir uma história complexa: as últimas deficiências na fundamentação do cómodo cálculo integral acabam apenas depois da construção de uma teoria satisfatória dos números reais, e de definições de continuidade e limites de sucessões por Dedekind, Cantor, Weierstrass, Heine.

Devidamente interpretado todo este processo é exemplo de um *dictum* de Immanuel Kant: "Toda a cognição humana começa com a intuição, passa daqui para noções e termina com ideias." Se olharmos mais de perto para o desenvolvimento do conceito de área, vemos outro exemplo.

Temos uma intuição de área adquirida em criança, fazemos cálculos semi fundamentados com noções como "superfície" e

"áreas" enquanto alunos, e só o homem que faz da matemática a sua vida aprende que pensadores anteriores cristalizaram o conceito numa ideia abstrata axiomatizando a "área" como sendo uma aplicação  $\mu$  que associa a certos subconjuntos  $A$  do plano (a cada "figura") um real  $\mu(A)$  tal que são válidas as seguintes propriedades:

a) Toda a figura  $A$  tem uma área não negativa:  $\mu(A) \geq 0$ ;

b) Se  $A$  e  $B$  são duas figuras disjuntas, então

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B);$$

c) Se  $A'$  é uma figura obtida por um movimento euclidiano (i.e., translações e rotações) partindo da figura  $A$ , então  $\mu(A') = \mu(A)$ .

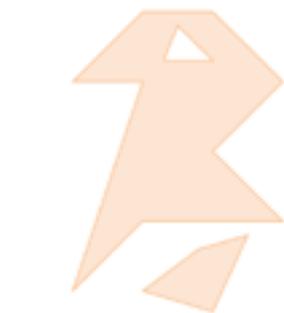
d) Se a figura  $Q$  é um quadrado de lado 1, então  $\mu(Q) = 1$ .

Quando examina minuciosamente as sutilezas das propriedades propostas, o *homo mathematicus* vê para seu espanto que não é possível atribuir uma área a todos os subconjuntos do plano; a proposta levaria literalmente a contradições do tipo  $1 = 0$ . Como vimos, para a indicação exata de áreas de regiões limitadas por arcos, são precisos tipicamente números e processos que transcendem métodos elementares.

Mas figuras retilíneas? Será possível decidir a igualdade da área de dois polígonos sem ter de aprender primeiro estas pesadas teorias de integrais, reais, limites?

Esta questão foi resolvida de forma afirmativa por Farkas Bolyai, amigo de Gauss e pai do posterior co-fundador da geometria não euclidiana Janos Bolyai (1832), e o oficial e matemático-amador Gerwien em 1833. É objeto do presente Canto Delfico.

Por um poliedro (plano) entendemos uma figura limitada e fechada do plano cuja fronteira é união de um conjunto finito de segmentos retilíneos. Pode ser uma figura desconexa e ter "buracos". Este tipo de poliedro é por vezes chamado polígono; mas frisamos que na abordagem presente é importante que o "interior" pertença à figura. Dois poliedros  $P, P'$  dizem-se *equidecomponíveis* se existir uma família finita de poliedros  $P_1, \dots, P_k$  que sujeitos a movimentos euclidianos  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  e  $\sigma'_1, \dots, \sigma'_k$  permitam tanto compor  $P$  como  $P'$  sem



que quaisquer dois dos  $P_i$  tenham pontos interiores em comum. Esta exigência é mais fraca do que uma união disjunta e em vez do símbolo  $\uplus$  utiliza-se o símbolo  $\Sigma$  para o efeito. Assim, temos  $P = \Sigma_{i=1}^k \sigma_i(P_i)$  (ou  $P = \sigma_1(P_1) + \dots + \sigma_k(P_k)$ ) e  $P' = \Sigma_{i=1}^k \sigma'_i(P_i)$ . Se  $P$  e  $P'$  são equidecomponíveis, então escreve-se  $P \sim P'$ .

Através de uma série de exercícios e alguns lemas vamos mostrar o seguinte teorema.

**Teorema (Bolyai-Gerwien).** *Dois poliedros são equidecomponíveis se e só se eles tiverem a mesma área.*

É claro que a equidecomponibilidade de dois poliedros implica que têm a mesma área: isto é consequência dos axiomas b) e c). O resto do ensaio é dedicado à demonstração de que dois poliedros da mesma área são equidecomponíveis.

**Exercício 1.** Um qualquer poliedro pode ser decomposto em triângulos.

Exercícios mesmo sem o habitual "mostre que ..." ou algo semelhante são convites ao leitor para que demonstre o enunciado; no caso atual sugere-se indução sobre o número de vértices.

**Lema 2.** *Equidecomponibilidade é uma relação de equivalência na família de poliedros. Isto é: Se  $P, P', P''$  são poliedros, então temos as seguintes propriedades i), ii), iii) ditas reflexividade, simetria, e transitividade, respetivamente.*

i)  $P \sim P$ ;

ii) Se  $P \sim P'$ , então  $P' \sim P$ ;

iii) Se  $P \sim P'$  e  $P' \sim P''$ , então  $P \sim P''$ .

*Prova.* As afirmações i), ii) podemos deixar como exercícios. A afirmação iii) também não é difícil: por hipótese existem decomposições de  $P'$  em poliedros  $P' = P_1 + \dots + P_k$  e  $P' = P'_1 + \dots + P'_l$  tal que certos movimentos de  $P_1, \dots, P_k$  dão  $P$ , e certos movimentos de  $P'_1, \dots, P'_l$  dão  $P''$ . Ora em  $P'$  podemos imaginar estas decomposições numa sobreposição que origina outra família de poliedros, a saber as interseções  $P_i \cap P'_j$ ,  $i = 1, \dots, k$ ;  $j = 1, \dots, l$ , (cuja união é  $P'$ ). Após um momento de reflexão, é claro que estas interseções podem por um lado ser movidas e recompostas de modo a obtermos  $P$ , e por outro lado tal que obtemos  $P''$ . Isto mostra  $P \sim P''$  como queríamos.

**Exercício 3.** Para todo o triângulo  $T$  existe um retângulo  $R$  que tem com  $T$  um lado comum e é equidecomponível com ele.

Pista: a decomposição mais natural dá a fórmula:

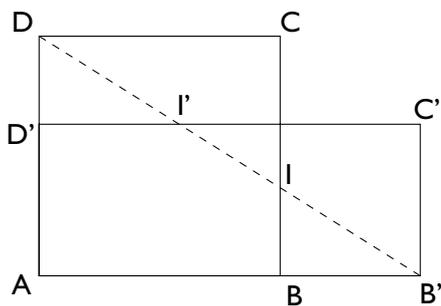
$$\text{"área de um triângulo} = (\text{base} \times \text{altura})/2."$$

**Lema 4.** Todo o retângulo é equidecomponível com um retângulo em que a fração lado comprido/lado curto é  $\leq 4$ .

*Prova.* Sejam  $a \geq b$  os lados do retângulo dado. Se  $a/b \leq 4$  não precisamos de fazer nada. Suponhamos agora  $a/b > 4$  e s.p.d.g.<sup>1</sup> que o lado comprido  $a$  é horizontal. Divida-se o retângulo em dois iguais através de um corte vertical que passa pelos pontos médios dos lados horizontais inferior e superior. Ponha-se um destes retângulos no topo do outro. Obtemos um retângulo de lados  $a' = a/2$  e  $b' = 2b$ . Diminuímos assim a razão entre os lados do retângulo por um fator 4:  $a'/b' = \frac{1}{4}(a/b)$ . Aplicando este processo repetidas vezes chegamos a um retângulo em que a mencionada razão está compreendida entre 1 e 4.

O seguinte lema é a parte central do argumento.

**Lema 5.** Um retângulo com lados  $a, b$  e tal que  $1 \leq a/b \leq 4$  é equidecomponível com um quadrado de lado  $\sqrt{ab}$ .



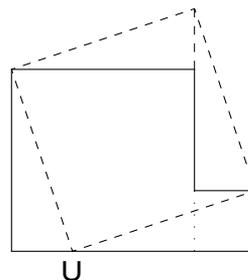
*Prova.* Na figura acima vemos um quadrado  $[ABCD]$  de lado que se supõe ser  $\sqrt{ab}$  em sobreposição com um retângulo  $[AB'C'D']$  de lados  $a = |AB'|$  e  $b = |B'C'|$ . Num sistema cartesiano com origem no vértice comum  $A$  das duas figuras, e eixo  $xx$  contendo o lado  $[AB']$  do retângulo, a equação da reta que passa por  $D$  e  $B'$  é  $y/\sqrt{ab} + x/a = 1$ . Em particular passa pelo ponto  $I = (\sqrt{ab}, \sqrt{ab} - b)$ . Como  $a \leq 4b$ , temos  $\sqrt{ab} - b \leq \sqrt{4b^2} - b = b$ . Isto significa que o ponto  $I$  está dentro do retângulo. Portanto, a diagonal está dentro da área coberta pelas figuras. A parte do quadrado que sobressai do retângulo forma, ela mesma, um retângulo de lados verticais  $\sqrt{ab} - b$ .

Disto obtemos a congruência dos triângulos  $[DD'I]$  e  $[IBB']$ . Logo, as hipotenusas destes triângulo são iguais, i.e.  $|DI'| = |IB'|$ . Logo  $|DI| = |DI'| + |I'I| = |I'I| + |IB'| = |I'B'|$ . Por isso podemos deslizar o triângulo  $[I'B'C]$  ao longo do segmento tracejado até que coincida com o triângulo  $[DIC]$ . De forma análoga, podemos mover o triângulo  $[IBB']$  até que coincida com  $[DD'I]$ . Desta forma criámos, partindo do retângulo  $[AB'C'D']$  um quadrado  $[ABCD]$ . A solução do exercício seguinte acaba a prova do lema.

**Exercício 5.** Demonstre detalhadamente as congruências usadas na prova e diga em que componentes devemos segundo o argumento anterior decompor o retângulo  $[AB'C'D']$  para obter o quadrado  $[ABCD]$ .

O seguinte exercício sugere uma prova do teorema de Pitágoras.

**Exercício 6.** Dois quadrados disjuntos são equidecomponíveis com um único quadrado.



Sugestão. Considerem o contorno a cheio da figura. Esse indica dois quadrados de lados  $a \geq b$ , digamos; um ao lado do outro. O ponto  $U$  é escolhido de modo a dividir o segmento horizontal inferior na razão  $b : a$ . Os dois segmentos tracejados que partem de  $U$  definem o paralelograma tracejado. Porque é que este paralelograma é na verdade um quadrado, e porque é que é equidecomponível com o poliedro original formado pelos dois quadrados juntos?

**Corolário 7.** Todo o poliedro é equidecomponível com um quadrado.

*Prova.* Seja  $P$  o poliedro dado. Pelo exercício 1 podemos decompô-lo numa família de triângulos. Pelo exercício 3, cada um dos triângulos é equidecomponível com um retângulo.

E pelo lema 4 cada um destes retângulos é equidecomponível com um retângulo em que os lados têm razão compreendida no intervalo  $[1/4, 4]$ . Pelo lema 5 estes retângulos são equidecomponíveis com quadrados. Aplicando o exercício 6 repetidas vezes, a família de quadrados obtida é equidecomponível com um único quadrado. Como, pelo lema 2, a equidecomponibilidade de figuras é uma relação de equivalência, logo transitiva, obtemos a afirmação do corolário 7.

Do corolário 7 obtemos a prova do teorema de Bolyai-Gerwien, pois se  $P, P'$  são dois polígonos com a mesma área  $A$ , então são ambos equidecomponíveis com um quadrado  $Q$  de lado  $\sqrt{A}$ . E assim  $P \sim Q \sim P'$  dá-nos  $P \sim P'$ , como queríamos mostrar.

Mencionemos ainda dois desenvolvimentos posteriores, intimamente ligados ao nosso tópico. Provavelmente, já sabendo do teorema de Bolyai, Gauss lamentou junto do seu discípulo Gerling que a prova do teorema de que pirâmides triangulares da mesma altura e da mesma base têm o mesmo volume depende do método da exaustão. Esta observação foi mencionada por Hilbert na sua famosa palestra "Problemas Matemáticos" que viria a influenciar decisivamente o desenvolvimento da matemática do século XX. No seu terceiro problema diz: "Parece-me que uma prova deste tipo [dado por Bolyai e Gerwien para poliedros planos] não é possível para [poliedros a três dimensões]". Este facto foi provado, já em 1901, por Max Dehn; o terceiro problema de Hilbert tornou-se assim o primeiro resolvido. Provas muito mais simples e transparentes do que a de Dehn foram desenvolvidas por Sydler, Kagan e Boltiansky. Uma exposição extraordinariamente legível é dada no livro [2].

Questões ligadas a volumes levaram também a famosos paradoxos. O paradoxo de Hausdorff-Banach-Tarski diz que quaisquer dois corpos tridimensionais de extensão finita e com interiores não-vazios são equidecomponíveis. Estas decomposições, ao contrário das mencionadas acima, não são, no entanto, construtivas; a mera existência destas é uma consequência do axioma da escolha, ver [3], [4].

Convidamos sobretudo professores e alunos de escolas secundárias a enviar soluções aos exercícios, observações e perguntas ao

### Projecto Delfos

Departamento de Matemática

Apartado 3008, E.C. Universidade

3001-454 Coimbra

Agradecimentos: À minha mulher Bernardete Ribeiro pela ajuda linguística e por me ter ensinado o Tikz (para fazer as figuras).

### REFERÊNCIAS

- [1] V. Katz, *A History of Mathematics*, Addison Wesley Longman, 1998
- [2] V.G. Boltianski, *Hilbert's Third Problem*, Winston & Wiley, 1978
- [3] A. Kovačec, "The Banach Tarski Paradox", (3págs.; acompanhantes de uma palestra, DMUC, Abril de 2002)
- [4] S. Wagon, *The Banach Tarski Paradox*, Cambridge 1985.

<sup>1</sup> Sem perda de generalidade



## Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas, bibliotecas ou instituições similares\*.

Mais informações em [www.spm.pt/exposicoes](http://www.spm.pt/exposicoes)

\*A requisição das exposições tem custos de manutenção.



FABIO CHALUB  
Universidade Nova  
de Lisboa  
chalub@fct.unl.pt

## MATEMÁTICA À MESA DO JANTAR

Falar de matemática durante o jantar pode não ser a forma mais fácil de garantir uma boa digestão. Mas e falar de jantar na aula de matemática? Novas técnicas de análise têm elucidado a lógica por detrás das receitas culinárias – não apenas *o que* comemos, mas *como* misturamos os vários ingredientes para produzir as mais deliciosas iguarias.

**N**ós somos o que comemos. Já ouviram falar disto? É uma frase tão repetida quanto misteriosa. Afinal eu não sou um prato de cereais, nem um copo de leite, apesar de os consumir todos os dias. No entanto, será que *coletivamente* é possível identificar um grupo ou uma cultura com a sua culinária? Por exemplo, quando comemos um prato com molho de soja, muito provavelmente estamos a degustar uma receita oriental, pois poucas iguarias fora da Ásia são temperadas desta forma.

Há várias razões pelas quais comemos o que comemos. A obtenção dos nutrientes adequados é provavelmente a mais importante de todas, mas isto depende de sua disponibilidade no meio em que vivemos. Também escolhemos alimentos e preparações que garantam que, ao nos alimentarmos, não estamos a engolir doenças em simultâneo. Questões éticas podem ser relevantes (pensem nos vegetarianos). No entanto, há uma característica cuja importância histórica frequentemente esquecemos: o sabor!

O sabor não deve ser confundido com o gosto (determinado pelas moléculas que conseguem ligar-se aos recetores da língua), pois esta é uma característica complexa, que depende dos odores, da textura, da consistência, da frescura e de muitas outras características do alimentos. No entanto, o mais importante dos constituintes do sabor é exatamente o gosto.

O facto de que o gosto pode ser compreendido quimicamente motivou os autores do estudo [1] a considerar a decomposição de cada um dos típicos ingredientes de uma receita culinária (cebola, leite, batatas, vinho branco etc) nas suas moléculas químicas conhecidas por ativar os recetores da nos-

sa língua. Assim, ao misturar um tomate no molho, devemos ter em conta que estamos a colocar o ácido metilpentanoico, também presente em qualquer receita que leve queijo parmesão ou mesmo cogumelos. Em média, cada ingrediente possui cerca de 50 gostos.

Como é claro para quem cozinha, os ingredientes não são tudo numa receita. Ovos, por exemplo, são frequentemente introduzidos na composição de bolos não pelo seu gosto mas pela sua capacidade de gerar consistência mecânica. Também nada se diz do *preparo*: bater forte, introduzir primeiro isto, depois aquilo, levar a lume brando por meia hora, etc. No entanto, deve começar-se por algum lugar.

Considerando os vários ingredientes usados na culinária mundial, Barabási (um dos mais renomados cientistas, especialista em teoria de grafos e que introduziu o conceito de *scale-free networks*, ou *redes livres de escalas*) e seus colegas montaram um grafo da seguinte forma: cada nodo é um ingrediente, e a ligação entre os vários nodos tem um peso proporcional ao número de gostos compartilhado entre estes ingredientes. Os vários ingredientes agrupam-se naturalmente nos grandes grupos alimentares conhecidos (laticíneos, carne, vegetais, etc); o importante aqui foi dar uma relação quantitativa entre estas ligações, intra e extra grupo, relativa exclusivamente aos gostos presentes (e não às suas características nutricionais, por exemplo). Veja a figura 1 para o grafo de todos os componentes e a figura 2 para a restrição a apenas duas receitas. (Para os fanáticos da culinária portuguesa – como eu! –, veja a frequência dos ingredientes nos pratos minhotos na figura 3.)





# Do Pequeno Teorema de Fermat às Famílias Gerais de Congruências

CRISTINA SERPA

UNIVERSIDADE DE LISBOA

mcserpa@gmail.com

**Neste artigo mostra-se como a congruência associada ao Pequeno Teorema de Fermat admite versões muito mais gerais, que se podem demonstrar por métodos de sistemas dinâmicos e de combinatória. Ilustram-se também as contribuições mais importantes para a obtenção destes resultados.**

Pierre de Fermat (1601-1665) deu um contributo valioso para o desenvolvimento da matemática. Não deu, no entanto, grande relevância à publicação do seu trabalho, pelo que a maior parte dos resultados a que chegou foram tornados públicos ou através de correspondência que mantinha com outros matemáticos ou pelas suas anotações, que vieram a ser reveladas postumamente. As demonstrações dos seus resultados e conjecturas foram matéria de muito estudo por parte de matemáticos mesmo até aos dias de hoje. De facto, só no final do século XX é que foi provado o seu último teorema, prova essa que envolve ferramentas matemáticas ainda não conhecidas à época de Fermat. Existe, pois, alguma especulação à volta da eventualidade de Fermat não ter conseguido provar os seus resultados ou de que as suas provas não fossem suficientemente rigorosas. O que é facto é que, de uma forma ou de outra, Fermat chegou a resultados surpreendentes e tinha um gosto por fazer conjecturas.

## 1. O PEQUENO TEOREMA DE FERMAT

De entre as áreas da matemática em que Fermat se empenhou, a teoria dos números terá sido a que mais o envolveu. Foi nesta área que ele descobriu um resultado que ficou conhecido como Pequeno Teorema de Fermat. Apesar de hoje serem conhecidas várias provas, foi necessário quase um século para que fosse conhecida uma prova (através de Euler, em 1736). Apesar disso, terá sido Leibniz a prová-lo em primeiro lugar, num trabalho que não publicou. Este teorema foi escrito numa carta de Fermat para um seu correspondente, Bernhard Frénicle de Bessy, em 1640, na qual referiu que não enviava a demonstração por reçar ser demasiado longa (ver [1], [2]).

**Teorema 1.1. (Pequeno Teorema de Fermat).** *Se  $p$  é um número primo e  $a$  é um inteiro arbitrário não divisível por  $p$ , então  $p$  divide  $a^{p-1} - 1$ .*

Este teorema pode ser demonstrado recorrendo a várias técnicas matemáticas e de várias áreas da matemática. Sendo um resultado de teoria de números, a prova mais natural é a que surge da manipulação da divisibilidade de números.

A primeira demonstração publicada é da autoria de Euler (ver [3]).

*Demonstração.* Do teorema binomial resulta

$$(a + 1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p}, \quad (1)$$

pois, de facto,

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}, \quad (2)$$

para  $0 < k < p$ . Subtraindo  $a + 1$  de ambos os membros da congruência (1),

$$(a + 1)^p - (a + 1) \equiv a^p - a \pmod{p}. \quad (3)$$

Por indução, verifica-se, em primeiro lugar, que  $1^p - 1$  é divisível por  $p$ .

Suponha-se que  $a^p - a$  é divisível por  $p$ . Logo por (3),  $(a + 1)^p - (a + 1)$  é divisível por  $p$ . Isto completa a prova por indução de

$$a^p \equiv a \pmod{p}. \quad (4)$$

Assim, multiplicando esta última congruência pelo inverso multiplicativo de  $a \pmod{p}$ , obtém-se o resultado na forma clássica

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad (5)$$

onde  $a$  e  $p$  são primos entre si.

*Observação 1.2.* Note-se que a formulação (4) é um pouco mais geral do que a original (5), pois neste caso não é necessário que  $a$  e  $p$  sejam primos entre si, isto é, pode considerar-se um  $a \in \mathbb{N}$  qualquer. No entanto, não deixam de ser duas formulações equivalentes, pelo que por vezes o Pequeno Teorema de Fermat é enunciado da forma (4).

Recentemente (2008) foi feita uma demonstração, da autoria de Bishop (ver [3]), que aplica técnicas já conhecidas à época de Fermat, mas que é original no sentido em que ainda não tinha sido dada esta abordagem.

*Demonstração.* Para a prova de (5) considera-se que  $p$  é primo e ímpar, pois para o único primo par a prova é trivial. Seja

$$f(x) = x^{p-1} - 1. \quad (6)$$

Fazendo o desenvolvimento em série de Taylor da função em torno de  $x = 1$ , obtém-se

$$f(x) = (p-1)(x-1) + \frac{1}{2!}(p-1)(p-2)(x-1)^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!}(p-1)!(x-1)^{p-1}. \quad (7)$$

Note-se que esta série pode ser obtida aplicando o teorema binomial à expressão

$$(1 + (x-1))^{p-1} - 1. \quad (8)$$

Considerem-se, agora, os valores de  $x$  divisíveis por  $p$ . Para estes valores de  $x$ ,  $f(x)$  é igual a um múltiplo de  $p$  menos 1, logo não é divisível por  $p$ .

Considere-se agora  $x = kp + c$ , com  $c \in \mathbb{Z}$  e  $0 < c < p$ . Então da equação(6) (mod  $p$ ), resulta

$$f(kp + c) \equiv f(c) \pmod{p}. \quad (9)$$

Logo, é apenas preciso considerar os valores de  $x$  tais que  $0 < x < p$ .

Agora utiliza-se a indução matemática para provar o teorema. O caso base é  $x = 1$ . Note-se que  $f(1) = 0$  e por isso é divisível por  $p$ . Suponha-se que  $f(n)$  é divisível por  $p$ , com  $0 < n < p-1$ , isto é,  $n^{p-1} - 1$  é divisível por  $p$ . Veja-se que  $f(n+1)$  é divisível por  $p$ .

Tem-se

$$f(n+1) = (p-1)n + \frac{1}{2!}(p-1)(p-2)n^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!}(p-1)!n^{p-1}. \quad (10)$$

Como

$$\binom{p-1}{k} = \frac{(p-1) \cdots (p-k)}{k!} \equiv (-1)^k \pmod{p}, \quad (11)$$

resulta que

$$f(n+1) \equiv -n + n^2 - n^3 + \dots + (-1)^k \pmod{p}. \quad (12)$$

Então,  $f(n+1)$  é congruente com a soma duma progressão geométrica de razão  $-n$ , o que, utilizando a respetiva fórmula da soma, vem

$$f(n+1) \equiv \frac{-n + n^p}{1+n} \pmod{p}. \quad (13)$$

Fatorizando esta última congruência, obtém-se

$$f(n+1) \equiv \frac{n(-1 + n^{p-1})}{1+n} \pmod{p}. \quad (14)$$

Como  $0 < n < p-1$ ,  $1+n$  não é divisível por  $p$ . Por hipótese,  $n^{p-1} - 1$  é divisível por  $p$ , o que prova o resultado por indução.

Não obstante estas demonstrações não oferecerem grande dificuldade, existe uma alternativa muito mais intuitiva

e acessível (mesmo a não matemáticos) que advém de contagem de objetos. De facto, foi em 1872 que Petersen (ver [4]) apresentou a demonstração que se transcreve.

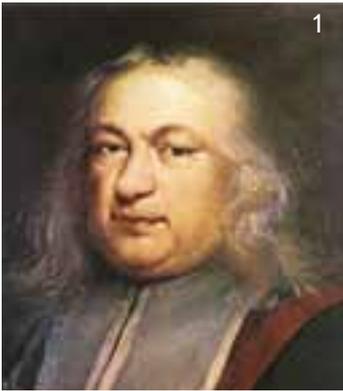


Figura 1: Ilustração da demonstração do Pequeno Teorema de Fermat por contagem de caixas.

Sejam  $p$  caixas, dispostas em círculo, para serem coloridas com  $a$  cores. Existem, ao todo,  $a^p$  formas de coloração possíveis, e  $a$  formas de coloração se todas as caixas ficarem da mesma cor. As restantes possibilidades de coloração  $a^p - a$  podem ser agrupadas em conjuntos de  $p$  elementos, uma vez que as  $p$  rotações possíveis destas colorações são todas distintas. Pelo que,  $p|a^p - a$ .

Esta demonstração recorre a conceitos que hoje em dia são estudados de forma mais sistemática, com terminologia já estabelecida. Assim, os conceitos envolvidos são colares e palavras formadas por letras de um alfabeto. Aqui os colares representam classes de equivalência (rotações), as palavras representam formas de coloração e as letras são as cores disponíveis na paleta (alfabeto). A noção precisa de colar apareceu explicitamente num artigo de MacMahon em 1892 (ver [5]). Estes objetos matemáticos surgem numa área da matemática relativamente recente, a combinatória de palavras. Uma contribuição decisiva nesta área veio dos volumes escritos sob o pseudónimo Lothaire, o primeiro dos quais [6] de 1983 e cujo terceiro volume [7] foi publicado em 2005. No entanto, como precursores desta temática estão os trabalhos de investigação de padrões de repetições em palavras feitos por Axel Thue (artigos [8] e [9] de 1906 e 1912). Para mais detalhes na história deste ramo da matemática ver [10].

Recentemente tem sido apresentada uma forma alternativa de demonstração recorrendo a sistemas dinâmicos (ver, por exemplo, [11], [12] e [13]). Em termos esquemáticos, a prova dinâmica é a seguinte.



1. Pierre de Fermat (1601-1665)
2. Leonhard Euler (1707-1783)
3. Julius Petersen (1839-1910)

*Demonstração.* Considere-se a aplicação  $T_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$\begin{cases} ax \pmod{1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases} \quad (15)$$

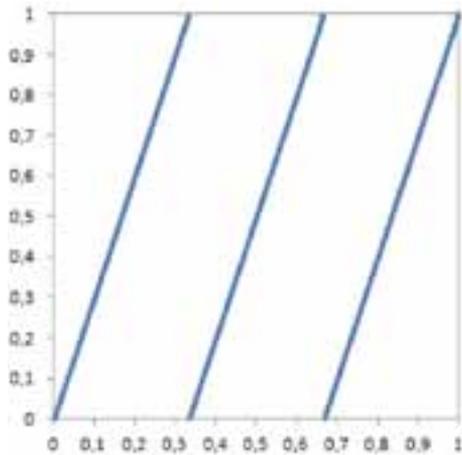


Figura 2: Gráfico da aplicação  $T_3$ .

É fácil verificar que sendo  $a$  um número inteiro positivo,  $T_a$  tem  $a$  pontos fixos, por exemplo, por observação do gráfico da aplicação (figura 2).

Também não é difícil mostrar que  $\forall a, b \in \mathbb{N}, T_a(T_b) = T_{ab}$  e em especial que  $\forall a, n \in \mathbb{N}, T_a^n = T_{a^n}$ .

Por outro lado, verifica-se que os pontos periódicos de período  $p$  são os pontos fixos de  $T_a^p = T_{a^p}$ . Daqui resulta que existem exatamente  $a^p - a$  pontos periódicos de  $T_a$  cujo período mínimo é  $p$ . E isto implica que  $p \mid (a^p - a)$  como pretendido.

Outra demonstração possível vem da teoria de grupos em álgebra. Fundamentalmente, a ideia é análoga à demonstração acima, no sentido em que a ordem de um elemento de um grupo finito divide a ordem do grupo (ver, por exemplo, [14]).

Em síntese, estas três últimas demonstrações exploram uma forma de contagem de objetos matemáticos que podem ser agrupados em conjuntos de  $p$  elementos, onde  $p$  é um número primo. Destas três, a prova elaborada por Petersen é a mais trivial e intuitiva possível.

## 2. GENERALIZAÇÕES

Euler, autor da primeira demonstração do Pequeno Teorema de Fermat, também foi o autor da primeira e mais conhecida generalização, a qual é também usualmente referida como Teorema de Euler (ver, por exemplo, [1] e [15]). Nesse resultado é usada a função de Euler (apresentada por volta de 1760).

**Definição 2.1.** Chama-se *função de Euler* à função  $\phi(m)$  que conta o número de inteiros positivos  $\leq m$ , que são primos com  $m$ , isto é,  $\text{m.d.c.}(n, m) = 1$ .

**Teorema 2.2. (Teorema de Euler)** *Sejam  $a, n$  inteiros tais que  $\text{m.d.c.}(a, n) = 1$ , então*

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}. \quad (16)$$

Note-se que, no caso particular de  $n$  ser primo, (16) é o Pequeno Teorema de Fermat. No entanto, o Teorema de Euler é válido para qualquer inteiro positivo  $n$ .

*Demonstração* (conforme [1]). Primeiro supõe-se que  $n = p^k$ , com  $p$  primo,  $p \nmid a$  e  $k > 0$  e prova-se, por indução em  $k$ , que

$$a^{\phi(p^k)} \equiv 1 \pmod{p^k}. \quad (17)$$

Para  $k = 1$ , a expressão (17) reduz-se a  $a^{\phi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$ , que é o Pequeno Teorema de Fermat.

Suponha-se que (17) se verifica para certo  $k$ . Veja-se que também se verifica para  $k + 1$ .

Por uma propriedade da função de Euler

$$(\phi(p^{k+1}) = p\phi(p^k))$$

tem-se

$$\begin{aligned} a^{\phi(p^{k+1})} &= a^{p\phi(p^k)} \\ &= (a^{\phi(p^k)})^p. \end{aligned}$$

Por (17) sabe-se que existe um inteiro  $q$  tal que  $a^{\phi(p^k)} = 1 + qp^k$ . Usando o teorema binomial, obtém-se

$$\begin{aligned} a^{\phi(p^{k+1})} &= (a^{\phi(p^k)})^p \\ &= (1 + qp^k)^p \\ &= 1 + \binom{p}{1}qp^k + \binom{p}{2}(qp^k)^2 + \dots + \\ &\quad + \binom{p}{p-1}(qp^k)^{p-1} + (qp^k)^p \\ &\equiv 1 + \binom{p}{1}qp^k \pmod{p^{k+1}} \end{aligned}$$

Mas  $p \mid \binom{p}{1}$ , pelo que  $p^{k+1} \mid \binom{p}{1}qp^k$ . Aplicando este resultado à última congruência, tem-se

$$a^{\phi(p^{k+1})} \equiv 1 \pmod{p^{k+1}} \quad (18)$$

que conclui a prova por indução de (17).

Considere-se m.d.c.  $(a, n) = 1$  e a fatorização de  $n$  em números primos  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  aplique-se a congruência (17):

$$a^{\phi(p_i^{k_i})} \equiv 1 \pmod{p_i^{k_i}}. \quad (19)$$

Como  $\phi(n)$  é divisível por  $\phi(p_i^{k_i})$ , pode elevar-se cada membro destas congruências a  $\phi(n) / \phi(p_i^{k_i})$  e obter

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{p_i^{k_i}}. \quad (20)$$

Na medida em que os  $p_i^{k_i}$  são primos entre si, obtém-se

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}} \quad (21)$$

que é o mesmo que (16).

Um grande salto na generalização do Pequeno Teorema de Fermat foi dado por Gauss, que descobriu uma forma de construir congruências quaisquer que sejam os números inteiros positivos  $a$  e  $n$ . Agora já não é exigido que  $a$  e  $n$  sejam primos entre si. De acordo com Dickson [16] este resultado foi conhecido a partir de um artigo póstumo de Gauss publicado

em 1863 que afirmava que se  $N = p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s}$ , onde  $p_1, \dots, p_s$  são primos distintos, então

$$\begin{aligned} F(a, N) &= a^N - \sum_{i=1}^s a^{N/p_i} + \sum_{i<j} a^{N/p_i p_j} - \sum_{i<j<k} a^{N/p_i p_j p_k} \\ &\quad + \dots + (-1)^s a^{N/p_1 \dots p_s} \end{aligned}$$

é divisível por  $N$ , para o caso particular de  $a$  ser primo. Nos anos 1882 e 1883 foram dadas quatro demonstrações diretas deste resultado por Kantor, Weyr, Lucas e Pellet. Porém, esta forma de apresentação não é nem muito elegante nem muito prática.

Na sua obra magistral *Disquisitiones Arithmeticae*<sup>1</sup>, publicada em 1801 (ver [17] e [2]), Gauss é responsável pelo desenvolvimento da linguagem e de notações em teoria de números e, em especial, da álgebra de congruências. Esta obra começa com uma definição:

Se um número  $a$  divide a diferença entre dois números  $b$  e  $c$ , então diz-se que  $b$  e  $c$  são congruentes, caso contrário são incongruentes; e  $a$  é ele próprio chamado de módulo.

A notação usada por Gauss é a usada nos dias de hoje (neste exemplo,  $b \equiv c \pmod{a}$ ) e possibilitou a construção de uma álgebra com a relação  $\equiv$ . Nos primeiros capítulos, Gauss introduz uma nova forma de cálculo, a teoria das congruências, que rapidamente ganhou aceitação geral e a sua terminologia foi importante para a atual teoria dos números.

Um dos mais conhecidos alunos de Gauss foi Möbius (ver [18]). Foi seu estudante de astronomia teórica na Universidade de Göttingen. Apesar de os seus principais trabalhos terem sido nas áreas da geometria analítica e da topologia, Möbius deu uma contribuição importante para consolidar a generalização feita por Gauss do Pequeno Teorema de Fermat. De facto, conforme Dickson reporta em [16], foram dois os contributos relevantes (1832): a função de Möbius e a fórmula de inversão de Möbius. A primeira permite escrever o resultado com uma fórmula bastante mais compacta e a segunda foi importante no que se refere à construção de demonstrações que se baseiam na contagem de objetos.

**Definição 2.3.** Para  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , a função de Möbius  $\mu(n)$  é definida da seguinte forma:

$$i) \mu(1) = 1;$$

- ii)  $\mu(n) = 0$  se algum  $\alpha_j \geq 2$ ;
- iii)  $\mu(n) = (-1)^k$  se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1$ .

Observação 2.4. A notação original desta função era  $a_n$ .

**Teorema 2.5. (Fórmula de inversão de Möbius)** Sejam  $F$  e  $f$  duas funções aritméticas relacionadas pela fórmula

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad (22)$$

então,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d). \quad (23)$$

Com recurso à função de Möbius, o resultado de Gauss pode então ser expresso da forma seguinte (o resultado é válido mesmo que  $a$  não seja primo).

**Teorema 2.6.** Para quaisquer  $a, n$  inteiros positivos,

$$\sum_{d|n} \mu(d) a^{n/d} \equiv 0 \pmod{n}. \quad (24)$$

Curiosamente, esta formulação não foi realizada nem por Gauss nem por Möbius, mas sim pelo matemático austríaco Gegenbauer (1900).

A seguir apresenta-se uma demonstração (sugerida pelo Prof. Nuno da Costa Pereira).

*Demonstração.* Suponha-se, em primeiro lugar, que  $n$  é divisível por um único número primo  $p$ . Sendo  $n = p^\alpha$  temos

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) a^{n/d} &= a^{p^\alpha} - a^{p^{\alpha-1}} \\ &= a^{p^{\alpha-1}} (a^{p^\alpha - p^{\alpha-1}} - 1). \end{aligned}$$

Sabendo que  $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ , o número de inteiros em  $[1, p^\alpha]$  primos com  $p^\alpha$  é  $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ . Pode então escrever-se

$$a^{p^\alpha} - a^{p^{\alpha-1}} = a^{p^{\alpha-1}} (a^{\phi(p^\alpha)} - 1). \quad (25)$$

Se  $p \nmid a$ , pelo Teorema de Euler, tem-se  $a^{\phi(p^\alpha)} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ . Na hipótese de  $p$  ser divisor de  $a$  também  $p^{p^{\alpha-1}} | a^{p^{\alpha-1}}$  e como  $p^{\alpha-1} \geq 2^{\alpha-1} \geq \alpha$  segue-se que  $p^\alpha | a^{p^{\alpha-1}}$ . Assim, em ambos os casos se conclui que  $p^\alpha | a^{p^{\alpha-1}} (a^{\phi(p^\alpha)} - 1)$  e portanto

$$a^{p^\alpha} - a^{p^{\alpha-1}} \equiv 0 \pmod{p^\alpha}. \quad (26)$$

Passa-se agora ao caso geral em que  $n$  se decompõe num produto de fatores primos da forma  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ . Fixado  $k \in \{1, \dots, m\}$ , seja  $n_k = n/p_k^{\alpha_k}$ . Para cada divisor  $d$  de  $n_k$  designe-se  $b_d = a^{n_k/d}$ . Tem-se, então,

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) a^{n/d} &= \sum_{d|n_k} \mu(d) a^{n/d} + \sum_{d|n_k} \mu(dp_k) a^{n/dp_k} \\ &= \sum_{d|n_k} \mu(d) \left( b_d^{p_k^{\alpha_k}} - b_d^{p_k^{\alpha_k-1}} \right) \end{aligned}$$

e da parte do enunciado já estabelecida, resulta

$$b_d^{p_k^{\alpha_k}} - b_d^{p_k^{\alpha_k-1}} \equiv 0 \pmod{p_k^{\alpha_k}} \quad (27)$$

se  $d|n_k$ .

É pois

$$\sum_{d|n} \mu(d) a^{n/d} \equiv 0 \pmod{p_k^{\alpha_k}} \quad (28)$$

e, portanto, também

$$\sum_{d|n} \mu(d) a^{n/d} \equiv 0 \pmod{n} \quad (29)$$

pois os  $p_k^{\alpha_k}$  são primos entre si.



Johann Gauss  
(1777-1855)



August Möbius  
(1790-1868)



Leopold  
Gegenbauer  
(1849-1903)

<sup>1</sup> Foram feitas traduções em francês em 1807 (Paris) e em inglês em 1966 (Yale University Press)

Outras demonstrações conhecidas desta generalização do Pequeno Teorema de Fermat devida a Gauss-Gegenbauer envolvem a fórmula de inversão de Möbius. A ideia consiste em identificar relações entre funções de contagem de objetos com a propriedade (22). Daí, por (23), obtém-se a determinação explícita da fórmula de contagem da cardinalidade de um conjunto de objetos que, à partida, se sabe que é possível agregar em grupos (ou classes de equivalência) de  $n$  elementos. Assim resulta a congruência módulo  $n$ . Exemplos de demonstrações deste tipo são as que recorrem aos colares e as que resultam do sistema dinâmico (15).

Este resultado também pode ser apresentado sob uma forma combinatória. Para isso introduz-se a devida terminologia.

Conforme a notação de J. Matoušek e J. Nešetřil [19] e de acordo com o exposto em [20] tem-se o que se segue.

**Definição 2.7.** Denota-se por  $C_j^{\{1,2,\dots,k\}}$  o conjunto de todos os subconjuntos de  $\{1,2,\dots,k\}$  com  $j$  elementos.

Assim,  $\delta \in C_j^{\{1,2,\dots,k\}}$  é um conjunto de  $j$  elementos distintos de  $\{1,2,\dots,k\}$ . Sem perda de generalidade, escreve-se  $\delta \in C_j^{\{1,2,\dots,k\}}$  da forma  $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j\}$ , onde os  $\delta_i$ , com  $i = 1, \dots, j$ , são os elementos de  $\delta$ .

**Teorema 2.8.** *Sejam  $a$  e  $n$  inteiros positivos cuja fatorização em números primos de  $n$  é  $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k}$  e seja  $P = p_1 p_2 \dots p_k$ . Então,*

$$\sum_{j=0}^k \sum_{\delta \in C_j^{\{p_1, p_2, \dots, p_k\}}} (-1)^{k+j} a^{\frac{n}{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_j}} \equiv 0 \pmod{n} \quad (30)$$

*Demonstração.* O duplo somatório é simplesmente uma soma sobre todos os divisores de  $P$ . Notando ainda que  $(-1)^k = \mu(P)$  e que  $(-1)^j = \mu(\delta_1 \delta_2 \dots \delta_j)$ , este toma a forma de

$$\sum_{d|P} \mu(dP) a^{\frac{n}{d}} \quad (31)$$

Substituindo  $d$  por  $P/d$ , obtém-se o seguinte

$$\sum_{d|P} \mu(d) a^{\frac{n}{d}}. \quad (32)$$

No entanto, como  $\mu(d) = 0$  se  $d|n$  e  $d \nmid P$ , este somatório é igual a

$$\sum_{d|n} \mu(d) a^{\frac{n}{d}}. \quad (33)$$

Por (24) obtém-se o resultado pretendido.

**Exemplo 2.9.** Para  $n = 105$  tem-se a seguinte congruência, válida para todo o  $a \in \mathbb{N}$

$$a^{105} - a^{35} - a^{21} - a^{15} + a^7 + a^5 + a^3 - a \equiv 0 \pmod{105}. \quad (34)$$

A vantagem desta última formulação é a de fornecer um algoritmo para construção de congruências. Este consiste nos passos:

1. Todas as parcelas têm o fator  $a^{n/p}$ . Isto corresponde a diminuir em uma unidade o expoente de cada fator primo;
2. O expoente de cada parcela multiplica-se por um divisor de  $P$ . Existem tantas parcelas quantos os divisores de  $P$ ;
3. O sinal da parcela depende do número de fatores primos que foram multiplicados no passo 2. A parcela cujo divisor de  $P$  é o próprio  $P$  fica com sinal positivo. Com menos um fator primo troca-se o sinal. Por cada fator primo a menos, faz-se uma troca de sinal.

Como nota final é interessante salientar a diversidade de possíveis generalizações do Pequeno Teorema de Fermat. O livro de Dickson [16] sobre a história da teoria de números é bem ilustrativo. Assim, quando o resultado de Gauss-Gegenbauer parece encerrar a questão da generalização do resultado, surgem também generalizações desta última congruência.

Como exemplo de generalização do Teorema de Gauss-Gegenbauer existe um resultado de Axer, publicado em 1911, que inclui somas de polinômios em vez de somas de potências simples (ver [16]).

## AGRADECIMENTOS

A autora agradece a contribuição do Prof. Nuno da Costa Pereira, com sugestões de prova relativamente ao resultado de Gauss-Gegenbauer.

## REFERÊNCIAS

- [1] David M. Burton, *Elementary Number Theory*, sixth edition, McGraw-Hill, 2007.
- [2] Oystein Ore, *Number Theory and its History*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1948.
- [3] Robert E. Bishop, *On Fermat's Little Theorem*, julho 2008.
- [4] C. J. Smyth, "A Coloring Proof of a Generalisation of Fermat's Little Theorem", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 93, No. 6 (Jun.-Jul., 1986), pp. 469-471.

[5] Percy A. MacMahon, "Application of a Theory of Permutations in Circular Progression to the Theory of Numbers", *Proc. London Math. Soc.* 23, 305-313, 1982.

[6] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1977. Corrected reprint of the 1983 original.

[7] M. Lothaire, *Applied Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2005.

[8] Axel Thue, *Über unendliche Zeichenreihen*, Norske Vid. Selsk. Skr. I Math- Nat. Kl. Chris. 7, 1-22, 1906.

[9] Axel Thue, *Über die gegenseitige Loge gleicher Teile gewisser Zeichenreihen*, Norske Vid. Selsk. Skr. I Math-Nat. Kl. Chris.

[10] Jean Berstel e Dominique Perrin, "The origins of combinatorics on words", *European Journal of Combinatorics*, 28 (2007) 996-1022.

[11] M. Frame, B. Johnson e J. Sauerberg, "Fixed Points and Fermat: A Dynamical Systems Approach to Number Theory", *The Mathematical Association of America*, monthly 107, maio 2000, 422-428.

[12] K. Iga, "A Dynamical Systems Proof of Fermat's Little Theorem", *Mathematics Magazine*, Vol. 76, No. 1, february 2003, 48-51.

[13] L. Levine, *Fermat's Little Theorem: A Proof by Function Iteration*, *Mathematics Magazine*, Vol. 72, No. 4, october 1999, 308-309.

[14] Jenny Momkus, *Introductory Group Theory and Fermat's Little Theorem*, preprint, 2011.

[15] G. H. Hardy e E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, fifth edition, 1979.

[16] Leonard Eugene Dickson, *History of the Theory of Numbers, Vol. 1: Divisibility and primality*, Carnegie Institution of Washington, N.º 256, 1919.

[17] Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1968.

[18] "August Ferdinand Möbius." *Encyclopædia Britannica*. *Encyclopædia Britannica Online*, Encyclopædia Britannica Inc., 2012. Web. 21 Mar. 2012.

[19] J. Matoušek e J. Nešetřil, *Invitation to Discrete Mathematics*, second edition, Oxford University Press, 2009.

[20] Cristina Serpa, Jorge Buescu, "A Combinatorial formulation for a congruence of Gauss-Gegenbauer", artigo para publicação.

## BIBLIOGRAFIA

W. W. Rouse Ball, "A Short Account of the History of Mathematics", *The Project Gutenberg Ebook 2010*, 4.ªed., 1908.

### SOBRE A AUTORA

**Cristina Serpa** é monitora na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e colaboradora do CMAF – Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais. É bolsista de doutoramento financiada pela Fundação para a Ciência e Tecnologia.



**Centro de Formação**

**spm**

O Centro de Formação da Sociedade Portuguesa de Matemática continua a contribuir para um contínuo aprofundar de conhecimentos nas diversas áreas da Matemática.

Visite o nosso site em [www.formacao.spm.pt](http://www.formacao.spm.pt) e esteja atento às novidades que irão surgir para o próximo ano letivo.



ANTÓNIO MACHIAVELO  
Universidade do Porto  
ajmachia@fc.up.pt

## PRIMOS DE OUTROS MUNDOS

A noção de número primo, número natural maior do que um que não pode aparecer num produto sem estar presente nalgum dos respetivos fatores, pode ser estendida a outros universos numéricos. Encontram-se aí outros primos, ainda mais enigmáticos do que os usuais, constituindo toda uma fauna exótica habitando mundos recheados de aventuras empolgantes para os mais corajosos e destemidos.

Como muitas outras coisas subtis sobre números, tudo começou com Fermat e Euler. Num comentário<sup>1</sup> a um problema de Diofanto, escrito na sua cópia pessoal da edição da *Aritmética* publicada por Bachet de Méziriac, Fermat escreveu:

*Poderá haver, nos números inteiros, um outro quadrado, para além de 25, que aumentado de 2 faça um cubo? Isto certamente parece, à primeira vista, difícil de decidir; no entanto, eu posso mostrar, por uma demonstração rigorosa, que 25 é o único quadrado inteiro que é inferior a um cubo por duas unidades.*

Por outras palavras, o que Fermat aqui afirma é que a única solução em números naturais da equação  $y^3 = x^2 + 2$  é dada por  $x = 5$ , em cujo caso  $y = 3$ .

Na sua obra *Elementos de Álgebra*<sup>2</sup>, Euler dá conta de uma sua ideia para lidar com o problema descrito no comentário acima citado, cuja solução Fermat não deixou escrita. É uma ideia arrojada: usar números complexos para resolver um problema sobre os números naturais!

Os números complexos não são mais do que uma estrutura algébrica que pode ser sobreposta ao plano euclidiano, uma maneira de somar e multiplicar pontos de uma forma que captura alguns aspetos da geometria desse mesmo plano. Enquanto que a adição de complexos corresponde à soma de vetores, a multiplicação por um complexo corresponde a uma rotação composta com uma homotetia. Estas operações têm todas as propriedades da adição e produto usuais, sendo neste contexto o número correspondente

ao ponto  $(a, b)$  designado por  $a + bi$ , onde  $i$  representa pois o ponto  $(0, 1)$ . As operações são completamente determinadas pela preservação das propriedades da adição e multiplicação reais, e pela relação  $i^2 = -1$  (a multiplicação por  $i$  corresponde a uma rotação de  $90^\circ$  no sentido direto).

A ideia revolucionária de Euler aparece descrita no capítulo XII da parte II da sua *Álgebra*. Consiste em considerar o subconjunto  $\mathcal{A} = \{a + b\sqrt{2}i : a, b \in \mathbb{Z}\}$  dos números complexos, que é fechado para a adição e a multiplicação, ou seja, a soma e o produto de dois quaisquer elementos de  $\mathcal{A}$  é ainda um elemento deste conjunto.  $\mathcal{A}$  é um exemplo daquilo a que se chama um *anel* — um conjunto munido de duas operações com as propriedades usuais, com a possível exceção da existência de inversos multiplicativos. O anel dos inteiros,  $\mathbb{Z}$ , é o protótipo, o arquétipo, de um anel.

A relevância aqui do anel  $\mathcal{A}$  é que nele se tem

$$x^2 + 2 = (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i).$$

Euler raciocina então por analogia. Nos números inteiros, se dois números não tiverem fatores em comum, para além de 1, então só quando ambos são cubos é que o seu produto é um cubo. Isto é uma consequência da unicidade da fatorização em primos, que advém justamente do facto de os números primos não poderem surgir em produtos sem estarem presentes nos respetivos fatores. Assim, se em  $\mathcal{A}$  houver fatorização única em primos — que seriam elementos atômicos, no sentido de não se poderem escrever como produto de outros mais pequenos, ou seja, mais próximo da

origem — e se os números  $x + \sqrt{2}i$  e  $x - \sqrt{2}i$  não tiverem divisores primos comuns, então cada um teria de ser um cubo. Portanto,

$$(x + \sqrt{2}i) = (a + b\sqrt{2}i)^3,$$

para alguns  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Daqui resulta que

$$\begin{aligned} x &= a(a^2 - 6b^2) \\ 1 &= b(3a^2 - 2b^2), \end{aligned}$$

de onde se conclui, uma vez que 1 só pode ser escrito de duas maneiras como produto de dois inteiros, que  $x = \pm 5$ , o que mostra o resultado descoberto por Fermat.

Este argumento só mais tarde seria tornado rigoroso, como resultado de trabalhos de Gauss, Kummer, Kronecker e Dedekind, entre outros, trabalhos esses diretamente influenciados pelas ideias de Euler. Gauss, em particular, usou o anel  $\mathbb{Z}[i]$  para deduzir algumas propriedades bem subtis dos números inteiros (para quem sabe o que é: a lei de reciprocidade biquadrática), pelo que é hoje denominado *anel dos inteiros Gaussianos*.

O estudo destes anéis mais gerais, que contêm o anel dos inteiros, conduziu à descoberta da existência de três noções aritméticas distintas: 1) *unidade*: número que tem um inverso multiplicativo ou, equivalentemente, que divide todos os outros; 2) *irredutível*: número que, não sendo uma unidade, não se pode decompor como produto de dois números que não sejam unidades; 3) *primo*: número que não pode aparecer num produto sem que apareça num dos fatores. Por exemplo,  $i$  é uma unidade de  $\mathbb{Z}[i]$ , enquanto que se mostra que 2 é irredutível em  $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$  mas não é primo, pois divide  $(1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$ , sem dividir nenhum dos fatores.

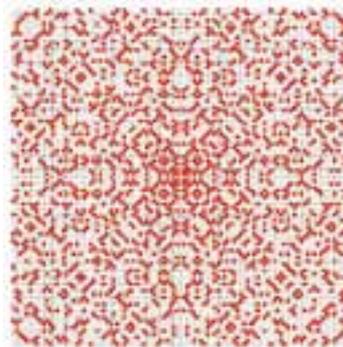
Há assim toda uma panóplia de anéis aritméticos, que colocam problemas interessantes, muitos dos quais por resolver, em particular o de saber quando é que os irredutíveis são primos. Uma outra questão, bem curiosa, é designada por “o problema do fosso Gaussiano”, e é a seguinte: na reta real, não se pode caminhar desde a origem até um primo arbitrariamente longe, colocando os pés apenas nos primos e dando passos de comprimento limitado. Isto porque, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , os números  $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + n, (n + 1)! + (n + 1)$  são  $n$  números compostos consecutivos. Será que no plano euclidiano é ou não possível caminhar desde a origem até um primo Gaussiano arbitrariamente longe, com passos de comprimento limitado e usando apenas os primos Gaussianos? Não se sabe! Para mais informações sobre este

intrigante problema, ver o artigo de Gethner, Wagon, and Wick, “A Stroll Through the Gaussian Primes”<sup>3</sup>, e pesquisar “Gaussian moat problem”.

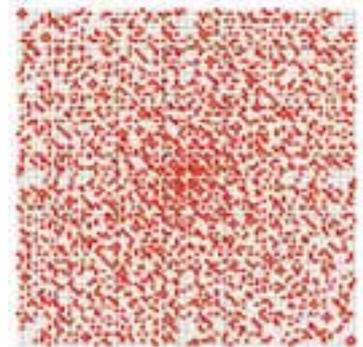
Para saber mais sobre estes anéis exóticos e a sua aritmética, aconselha-se um breve passeio pela página [http://www.cut-the-knot.org/arithmic/int\\_domain.shtml](http://www.cut-the-knot.org/arithmic/int_domain.shtml) e páginas subsequentes, seguido de um mergulho no excelente texto da autoria de Keith Conrad disponível em <http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/ugradnumthy/Zinotes.pdf>. Para relaxar um pouco, nada como brincar com uma calculadora que fatoriza um elemento de  $\mathbb{Z}[i]$  em primos Gaussianos: <http://www.had2know.com/academics/gaussian-integer-factorization.html>

Para os mais corajosos, que queiram penetrar mais fundo nas densas e deslumbrantes florestas tropicais de novos mundos numéricos, recomendamos o livro sobre Teoria Algébrica dos Números de Franz Lemmermeyer, inteiramente disponível em: <http://www.fen.bilkent.edu.tr/~franz/ant06/ant.pdf>

A terminar, deixamos aqui duas imagens de dois desses universos novos, prontinhos a explorar pelos leitores mais audazes. Boas aventuras!



Primos de  $\mathbb{Z}[i]$  com coordenadas em  $[-50, 50]$ .



Primos de  $\mathbb{Z}[\omega]$  com coordenadas em  $[-50, 50]$ , onde  $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ , uma raiz cúbica de 1.

<sup>1</sup>Ver *Oeuvres de Fermat*, vol. 3, pp. 269. Disponível na biblioteca digital Gallica, em <http://gallica.bnf.fr> e no Internet Archive, em <http://archive.org>.

<sup>2</sup>Disponível em várias versões na Google Books, em <http://books.google.pt/>, assim como no Internet Archive, em <http://archive.org>.

<sup>3</sup>Publicado no *American Mathematical Monthly*, vol. 105 (1998), pp. 327–337, e disponível em: [http://mathdl.maa.org/images/upload\\_library/22/Chauvenet/GethnerWagonWick.pdf](http://mathdl.maa.org/images/upload_library/22/Chauvenet/GethnerWagonWick.pdf)



# Auxiliares de Cálculo no Ensino de Ontem e de Hoje

ANA ELIETE REIS

ESCOLA BÁSICA INTEGRADA DE APELAÇÃO  
anaeliete@gmail.com

Quem não se lembra de esconder as mãos por baixo da mesa para calcular uma tabuada mais difícil? Ou de fazer risquinhos para ajudar a contar alguma coisa? Quase todos nós trilhámos esse caminho – o de procurar meios para rapidamente calcular um resultado. Esses meios, essas ferramentas, vão evoluindo com o passar dos anos. No entanto, antigos ou recentes, todos eles têm um princípio básico em comum: agilizar processos de cálculo. Neste pequeno artigo, viajamos através do tempo. Lembramos o que antes se fazia e espreitamos o que por cá hoje se faz, enquanto tentamos perceber o que se espera do futuro.

Seguir a evolução dos instrumentos de cálculo é uma aventura apaixonante. O início desta história perde-se no tempo: as mais antigas “máquinas de calcular” podem ter até 30.000 anos de idade. São achados arqueológicos do Paleolítico Superior: ossos de animais com uma ou mais séries de entalhes, com o tipo de contagem mais rudimentar – a cada entalhe corresponde uma unidade [1]. Avançando mais um pouco, até à civilização romana, Horácio (65 a.C. – 8 a.C.), nas suas Sátiras [2], descreve

um estudante típico: “... a escola da vila, para a qual os rapazes, (...) costumavam ir com o saco dos livros e tábua de escrever dependurados nos seus braços esquerdos.” Esta tábua de escrever não era mais do que um ábaco de cera, uma pequena prancheta de osso ou madeira, untada com uma fina camada de cera negra em que se delimitavam colunas e algarismos com um estilete de ferro.

Transportando-nos para épocas mais atuais, a curiosidade leva-nos a procurar que materiais seriam usados nas nossas escolas, desde a implantação da República, em 1910. Assim, analisando diversos programas curriculares para a disciplina de Matemática, podemos constatar que em 1919 apenas se recomendava, no campo dos materiais manipuláveis, o uso de materiais para contagem tais como botões, pedrinhas ou feijões [3]. O objetivo era melhor concretizar aprendizagens. No entanto, estas recomendações eram seguidas num número reduzido de escolas, pois na altura praticava-se um ensino mecanicista baseado na memorização de conceitos, regras e procedimentos abstratos e, neste ponto, a matemática consistia quase exclusivamente na repetição exaustiva de exercícios-tipo. Apresentava-se aos alunos os conteúdos desta disciplina como um objeto acabado, a ser decorado, não estando sujeitos a dúvidas ou questões. Ao surgir a preocupação em adaptar os métodos de ensino aos estudantes, passou a valorizar-se mais a compreensão das matérias em vez da memorização por repetição. Claro que a implementação sólida destas ideias demorou o seu tempo e, durante os 40 anos seguintes, houve poucas ou nenhuma inovação em termos de materiais usados para auxiliar o cálculo (fig. 1) [4].



Figura 1: Livro da 1.ª Classe [5], tendo em atenção a nota de rodapé: “As tabuadas constroem-se à medida que forem necessárias para o desenvolvimento da multiplicação e divisão.”



Figura 2: Dons de Fröebel.

O alemão Friedrich Fröebel (1782 – 1852), criador dos jardins-de-infância, inventou um material educativo constituído por círculos, esferas, cubos e outros objetos macios e manipuláveis. Denominavam-se “dons” ou “presentes” e havia regras de utilização que precisavam de ser dominadas para garantir o aproveitamento pedagógico. Os materiais de jogo, “dons” e “jogos”, popularizaram-se em todo o mundo no século XIX.



Figura 3: Material Cuisenaire.

Este material foi criado por um professor do 1.º Ciclo, o belga Georges Cuisenaire, tendo sido divulgado em 1953 à escala mundial por Cuisenaire e Caleb Gattegno, professor universitário londrino considerado o mestre do material Cuisenaire. Baseia-se num sistema de relação entre cores e comprimentos, sendo composto por um conjunto de 241 barras de madeira coloridas, cujo comprimento varia de um a dez centímetros. A cada comprimento está associada uma cor e um valor. Por exemplo, existem 28 barras rosa de valor 4, 20 barras amarelas de valor 5, etc.



Figura 4: Cubos-Barras de Cor de Nabais.

Este material foi adaptado pelo padre Nabais, dando origem aos Cubos – Barras de Cor de Nabais. A primeira edição do material Cubos – Barras de Cor, pela Éduca Material Didáctico, ocorre em 1967. Este material consiste numa adaptação do material Cuisenaire à Matemática Moderna. Ainda se pode encontrar à venda.



Figura 5: Material Multibásico de Dienes.

É constituído por um conjunto de vários cubos, placas e barras de madeira e tem como objetivo auxiliar o cálculo nas bases 2, 3, 4, 5 e 10.

As mudanças palpáveis nos métodos e materiais utilizados deram-se com o aparecimento do Movimento da Matemática Moderna, nos anos 60, que colocava o aluno como centro do processo de ensino-aprendizagem. Ao dar-se prioridade ao ensino por descoberta [6], as escolas recorriam cada vez mais ao uso de materiais manipuláveis, tais como os Dons de Fröebel (fig. 2), o Material Cuisenaire (fig. 3), o Calculador Multibásico e os Cubos-Barras de Cor de Nabais (fig. 4), o Material Multibásico de Dienes (fig. 5) ou o Ábaco, como forma de auxiliar contagens e/ou para efetuar cálculos simples [7].

Recuando um pouco no tempo, e voltando a nossa atenção para o ensino da matemática em níveis mais avançados, deparamo-nos com cálculos complexos e demorados realizados com lápis, em papel, através de algoritmos.

Assim, uma inovação muito bem-vinda foi a régua de cálculo (fig. 6), que permitia efetuar cálculos com grande rapidez. Sem dúvida que os resultados obtidos através de algoritmos eram muito mais precisos, mas eram também muito mais demorados. Desta forma, sempre que não fosse necessário um grande grau de precisão, a régua de cálculo era a ferramenta a escolher, nomeadamente, nas engenharias. Existia em tamanho de bolso, para uso pessoal, e em tamanho alargado, para demonstração nas salas de aula. A primeira referência feita a este recurso, em programas curriculares, aparece em meados dos anos 50 [8].

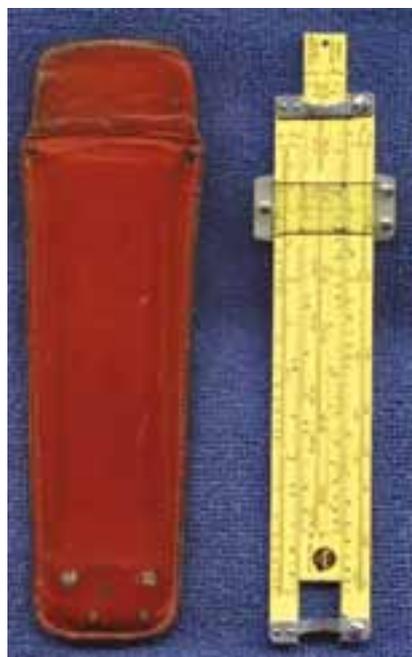


Figura 6: Régua de Cálculo. Existindo desde meados do séc. XIX, permanece em uso até cerca de 1975, altura em que foi substituída pelas calculadoras eletrónicas de bolso. Foram concebidas várias versões, com escalas adaptadas para engenheiros de todas as especialidades.

Figura 7: Hewlett-Packard: HP-35 (versão I).

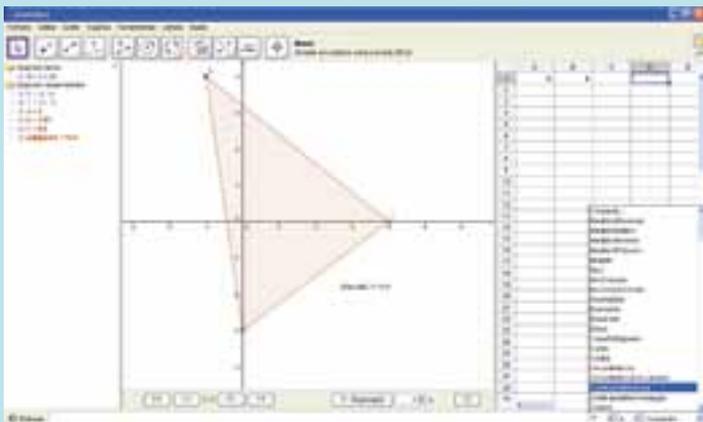


Figura 8: Construção no programa GeoGebra.

Este programa de uso livre que pode ser facilmente obtido por qualquer pessoa com acesso à Internet, e que incorpora, ele próprio, uma folha de cálculo.

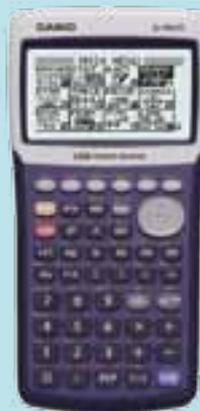


Figura 9: Calculadora gráfica.

É obrigatória atualmente no Ensino Secundário.

Outra ferramenta hoje essencial em qualquer escola é o computador. É mencionado nos programas curriculares pela primeira vez em 1990, no Programa do Ensino Básico do 1.º Ciclo [10], nomeadamente, a utilização da linguagem de programação LOGO. No entanto, as primeiras referências ao computador e à sua utilização em ambiente escolar (apesar de as escolas ainda não terem acesso aos mesmos) tinham já sido feitas em 1975, por José Sebastião e Silva: "... *chegando a ser necessário resolver sistemas com mais de 100 incógnitas, o que seria impossível num prazo razoável, antes da era dos computadores.*" [11]

Hoje em dia, o ensino da matemática já não dispensa o uso do computador. O estudo da estatística com recurso ao uso da folha de cálculo e o da geometria, com uso do GeoGebra (fig. 8), são opções tomadas em quase todas as escolas. A calculadora gráfica (fig. 9) é essencial para frequentar a disciplina de matemática no Ensino Secundário. Todas as máquinas fazem representação gráfica e estudo de funções, são programáveis e têm um modo estatístico. Atualmente já podemos encontrar modelos que contêm uma folha de cálculo e que permitem uma fácil ligação entre todas estas opções.

Hoje, as tecnologias são bastante exploradas na sala de aula e todas as escolas têm acesso à Internet, o que traz imensas vantagens a nível de ensino. Há uma vastidão de recursos disponíveis *online*, nomeadamente aplicações (*applets*) que nos permitem ir ao encontro das necessidades e expectativas dos alunos. O *e-mail* permite o envio e a receção de trabalhos, sugestões, comentários e a plataforma Moodle permite um ensino/uma

aprendizagem à distância, com disponibilização de materiais, submissão de trabalhos e esclarecimento de dúvidas. A Fundação Calouste Gulbenkian criou um portal para professores de ciência, denominado Casa das Ciências, como um meio de integrar a utilização das tecnologias da informação no processo de ensino/aprendizagem. Podemos encontrar aqui materiais de apoio, assim como uma página com *links*<sup>1</sup> para diversas *applets*. No domínio das *applets*, é importante referir a NLVM<sup>2</sup>, uma biblioteca *online* de materiais manipuláveis, na qual podemos trabalhar, por exemplo, com os Base Blocks (versão virtual do material multibásico de Dienes) ou encontrar uma demonstração geométrica de alguns algoritmos de multiplicação (fig. 10). Existem, ainda, programas (*online* ou não) que apresentam uma forma interativa de aprender matemática, dirigidos a estudantes de matemática, que podem ser utilizados por uma turma, por alunos individuais numa escola ou por estudantes em casa. Promovem uma aprendizagem individualizada, ao ritmo de cada aluno, em que é este a escolher quando e para onde avançar.

Relativamente a cálculos matemáticos mais avançados, o portal Wolfram|Alpha<sup>3</sup> é uma ferramenta muito utilizada, por exemplo, por estudantes, pois tem secções dedicadas a diversas áreas da matemática, permitindo fazer desde cálculos elementares até à resolução de integrais, equações diferenciais ordinárias, fatorização em números primos, análise estatística e gráficos em 3D (fig. 11), entre muitas outras aplicações. Com a evolução das tecnologias, com o



mental desenvolver o espírito crítico face aos resultados fornecidos pelas máquinas, pois um utilitário não deve comandar o caminho, mas sim melhorar as condições de trabalho.

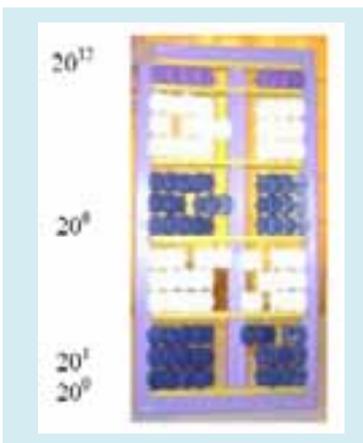
Apesar de todo este *boom* tecnológico, assiste-se a um fenómeno interessante. Os materiais mais clássicos, como o material multibásico, continuam a ser utilizados, evidenciando a sua importância nos processos de aprendizagem. Claro que as sugestões para a sua exploração têm um carácter mais moderno, conjugando as suas potencialidades com os métodos de cálculo atuais, mas a sua essência não se perdeu. Assistimos cada vez mais à procura de um equilíbrio entre o novo e o antigo, não só no nosso país, mas também à escala global. Por exemplo, na América do Sul, investe-se na recuperação de métodos de cálculo tradicionais como o Nepohualtzintzin, um modelo de ábaco de origem azteca [12]. Nas aulas das escolas estatais, as crianças estão a ser ensinadas a usar este instrumento, que permite trabalhar tanto num sistema de base 20 com 5 dígitos, como em base decimal. Para escolher a base, basta alternar entre a posição vertical e horizontal (figs. 12 e 13). Esta simbiose de métodos surpreende não tanto pela ideia em si, mas pela eficiência com que estes materiais são usados para estimular as capacidades do ser humano. Mais um passo para o equilíbrio foi dado no novo programa de Matemática do Ensino Básico, em vigor desde o ano letivo de 2010/2011 [13]. Ali reforça-se a prática do cálculo mental, cuja importância foi diminuída com o aparecimento da calculadora, assim como do treino de competências de cálculo. E o início desse treino faz-se, precisamente, com materiais manipuláveis. Para uma correta interiorização dos processos de cálculo é muito importante a criança, numa fase inicial,

poder manusear e sentir os números de uma forma concreta, e, neste momento, a nível de 1.º e 2.º ciclos, o uso da calculadora recomenda-se apenas em situações pontuais.

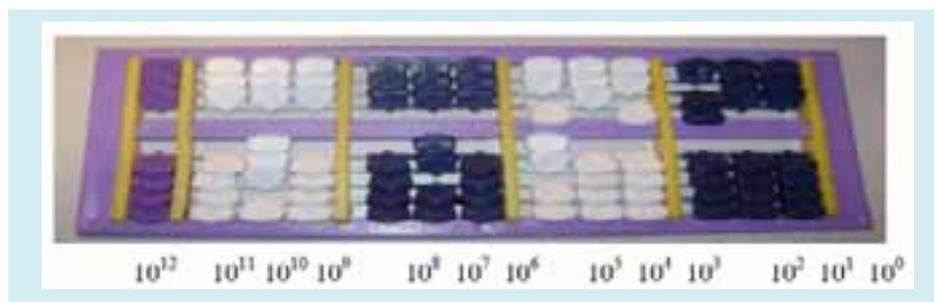
Ver cálculos mentais efetuados a uma velocidade estonteante, com a ajuda de um ábaco imaginário<sup>4</sup>, é algo bastante motivador, assim como observar crianças a calcular somas em diversas bases sem a menor dificuldade, através do treino com material multibásico. Da mesma forma que é fascinante a rapidez e a eficiência com que se pode efetuar um estudo, e inferir conclusões, acerca de uma amostra estatística recorrendo a um programa adequado. Ao reforçar as bases, procurar um equilíbrio e aprender a tirar o melhor partido de todas as tecnologias que temos disponíveis, podemos escolher o melhor recurso a utilizar em cada situação, construindo um caminho que contemple as partes benéficas e evite as que, comprovadamente, não obtêm os melhores resultados.

## REFERÊNCIAS

- [1] Williams, Michael R. (1997). *A History of Computing Technology* (2ª ed.). Los Alamitos, Califórnia IEEE Computer Society Press.
- [2] Milington, R.M. (1869). *A Rhythmical Translation of the First Book of the SATIRES of HORACE*. Livro I, 6, 46. London Longmans, Green, Reader, and Dyer.
- [3] Ministério da Educação Nacional (1919, 7 de Novembro). "Linhas orientadoras para o ensino". *Diário do Governo*, 1.ª Série, n.º 227, pp. 2236-2374. Lisboa Imprensa Nacional Lisboa.



◀ Figura 12: Nepohualtzintzin atual, base 20. As fichas do lado esquerdo valem uma unidade e as do lado direito valem 5 unidades.



▲ Figura 13: Nepohualtzintzin atual, adaptado à base decimal, representado o número 30.020.706.000. As fichas de baixo valem uma unidade e as de cima valem 5 unidades.

[4] Ministério da Educação Nacional (1926). “Programas do ensino secundário”. *Diário do Governo*, 1.ª Série, n.º 243. Lisboa Imprensa Nacional Lisboa.

Ministério da Educação Nacional (1937). “Linhas Orientadoras para o Ensino”. *Diário do Governo*, 1.ª Série. Lisboa Imprensa Nacional Lisboa.

[5] Ministério da Educação Nacional (1958). *O Livro da Primeira Classe* (8.ª ed.). Lisboa: Livraria Sá da Costa. (Obra original publicada em 1942).

[6] Borges, R. A. S. (2008) “A Revista Escola Portuguesa na Década de 1960 e a Disseminação da Matemática Moderna no Ensino Primário”. Consultado em [www.smmmfloripa.ufsc.br/Borges\\_art.pdf](http://www.smmmfloripa.ufsc.br/Borges_art.pdf).

[7] Candeias, R. P. C. B. B. (2007) “Contributo para a História das Inovações no Ensino da Matemática no Primário: João António Nabais e o Ensino da Matemática no Colégio Vasco da Gama”.

[8] Ministério da Educação Nacional (1954, 7 de setembro). “Programas do Ensino Liceal”. (ed. 1966), *Diário do Governo*, 1.ª Série, DL n.º 39807, n.º 198. Lisboa Imprensa Nacional Lisboa.

[9] Ministério da Educação (1991). “Programa de Matemática. Plano de Organização do Ensino-aprendizagem”, volume II, Ensino Básico, 2.º ciclo, julho 1991. Lisboa Imprensa Nacional. – Casa da Moeda E.P.

[10] Ministério da Educação (1990). “Programa do Ensino Básico, 1.º ciclo”. Despacho n.º 139/ME/90.

[11] Silva, J.S. (1975). “Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática”. Vol. 1, Curso Complementar do Ensino Secundário. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do M.E.

[12] Lara, G. & Sgreccia, N. (2010). “Nepohualtzitzin: un modelo matemático de cualidad”. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 3(2), pp. 24-54.

[13] Ministério da Educação – D.G.I.D.C. (2007). “Programa de Matemática do Ensino Básico – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular/Ministério da Educação – Lisboa: Ministério da Educação”.

#### SOBRE A AUTORA

**Ana Eliete Reis** é mestre em Matemática para Professores pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Este artigo é parte da sua dissertação de mestrado “Auxiliares de Cálculo no Ensino da Matemática”, sob a orientação da Professora Doutora Suzana Metello de Nápoles. Neste momento, Ana Eliete Reis leciona na Escola Básica Integrada da Apelação.

<sup>4</sup> Um entre vários exemplos pode ser visto em <http://www.youtube.com/watch?v=MKVHe0uhoIU>

Já é sócio da SPM?

Conheça as vantagens e saiba como aderir em [www.spm.pt](http://www.spm.pt) ou através do número 217 939 785





MANUEL SILVA  
Universidade Nova  
de Lisboa  
mnas@fct.unl.pt



PEDRO J. FREITAS  
Universidade  
de Lisboa  
pedro@ptmat.fc.ul.pt

## UM PROBLEMA DE MATRIZES COM FAVOS DE MEL

Aquilo que parecia ser um pequeno problema de matrizes veio a revelar-se uma fonte de inesperadas e profundas ligações entre diversas áreas da matemática.

Ao contrário dos textos anteriores desta coluna, este terá necessidade de um conceito que em geral apenas se aprende no primeiro ano de um curso universitário: o conceito de valor próprio de uma matriz quadrada. Relembrando então, se  $A$  for uma matriz real ou complexa, com  $n$  linhas e  $n$  colunas,  $x$  for uma matriz coluna, não nula, com  $n$  entradas, e  $\lambda$  um número complexo ou real, então  $\lambda$  diz-se um valor próprio de  $A$  com vetor próprio  $x$  se  $Ax = \lambda x$ . De um ponto de vista geométrico, se considerarmos as matrizes coluna como vetores complexos, então  $A$  induz uma transformação de  $\mathbb{C}^n$  em  $\mathbb{C}^n$  através da fórmula  $x \mapsto Ax$ , chamada uma transformação linear. Deste ponto de vista, um vetor próprio é apenas um vetor que está numa *direção invariante* para esta transformação, é um vetor sobre o qual a ação de  $A$  é a de uma homotetia de razão  $\lambda$ .

Há várias transformações do plano e do espaço que estão associadas a matrizes, tais como rotações em torno da origem, homotetias com centro na origem ou projeções sobre retas ou planos. Neste artigo vamos examinar um tipo de matrizes, interessantes quer para físicos quer para matemáticos, chamadas *matrizes hermíticas*, que são matrizes quadradas complexas que satisfazem  $A = \overline{A^T}$ . Estas matrizes têm uma propriedade crucial: *todos os seus valores próprios são reais*, o que permite, por exemplo, ordená-los.

Um problema famoso, e natural, acerca de matrizes her-

míticas, colocado por H. Weyl em 1912, é o de saber quais são os valores próprios da soma de duas matrizes hermíticas, sabendo os valores próprios das parcelas. Mais exatamente, se nos forem dadas três listas de números reais  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$ ;  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ ,  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$  e  $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_n$ , que condições devem estas listas satisfazer para que existam matrizes hermíticas  $A$  e  $B$  de modo a que  $\lambda$  sejam os valores próprios de  $A$ ,  $\mu$  os de  $B$  e  $\nu$  os de  $A + B$ .

Uma condição simples obtém-se calculando o traço de ambas as matrizes e sabendo que esse traço é a soma dos valores próprios:

$$\sum_{i=1}^n \nu_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i).$$

Além desta relação imediata, são conhecidas relações clássicas, devidas a Weyl (1912), que exigem que  $\nu_{i+j-1} \leq \lambda_i + \mu_j$  para  $i + j - 1 \leq n$ . No caso de matrizes  $2 \times 2$ , estas desigualdades resolvem o problema, mas em geral não são suficientes. Algumas décadas mais tarde, foram descobertas as seguintes desigualdades, devidas respetivamente a Ky Fan (1949) e V. B. Liskii (1950): para  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\sum_{i=1}^k \nu_i \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{i=1}^k \mu_i$$

e, generalizando as anteriores, para todo o  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,  $|I| = k$ ,

$$\sum_{i \in I} \nu_i \leq \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{i \in I} \mu_i.$$

Várias outras desigualdades foram depois descobertas, todas elas com o seguinte aspeto:

$$\sum_{i \in K} v_i \leq \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{i \in J} \mu_i,$$

para conjuntos  $I, J, K \subseteq \{1, \dots, n\}$  com a mesma cardinalidade. Então, em 1962, Alfred Horn apresentou em [1], uma conjectura que descrevia completamente os conjuntos  $I, J, K$  que dariam desigualdades suficientes para resolver o problema. A construção é feita por indução na cardinalidade e é bastante intrincada.

Até este ponto, algumas das demonstrações das fórmulas já tinham usado matemática exterior à teoria de matrizes – por exemplo, a demonstração original das desigualdades de Liskii foi feita dentro da teoria de grupos de Lie. O resto da história deste problema viria a confirmar esta tendência. A própria caracterização de Horn torna-se mais simples quando se usam conceitos profundos de geometria algébrica, do chamado cálculo de Schubert. A demonstração final da conjectura de Horn foi feita usando esta teoria, por Klyachko, [2] e Knutson e Tao [3].

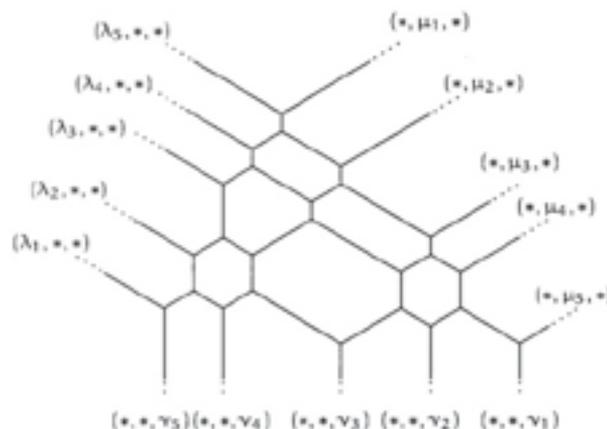
Neste último artigo de Knutson e Tao, é apresentada a noção de *honeycomb*, uma estrutura no plano, que faz uma descrição combinatória do problema à custa de linhas que produzem figuras semelhantes às paredes de um cortiço (ver, por exemplo, [4]). Os valores próprios são codificados pelas coordenadas das linhas que se prolongam no fim do padrão, nos sentidos sul, nordeste e noroeste. O padrão é obtido à custa de uma condição de equilíbrio nos pontos de intersecção (na imagem,  $v_1, \dots, v_5$  são os valores próprios de  $-(A + B)$ ).

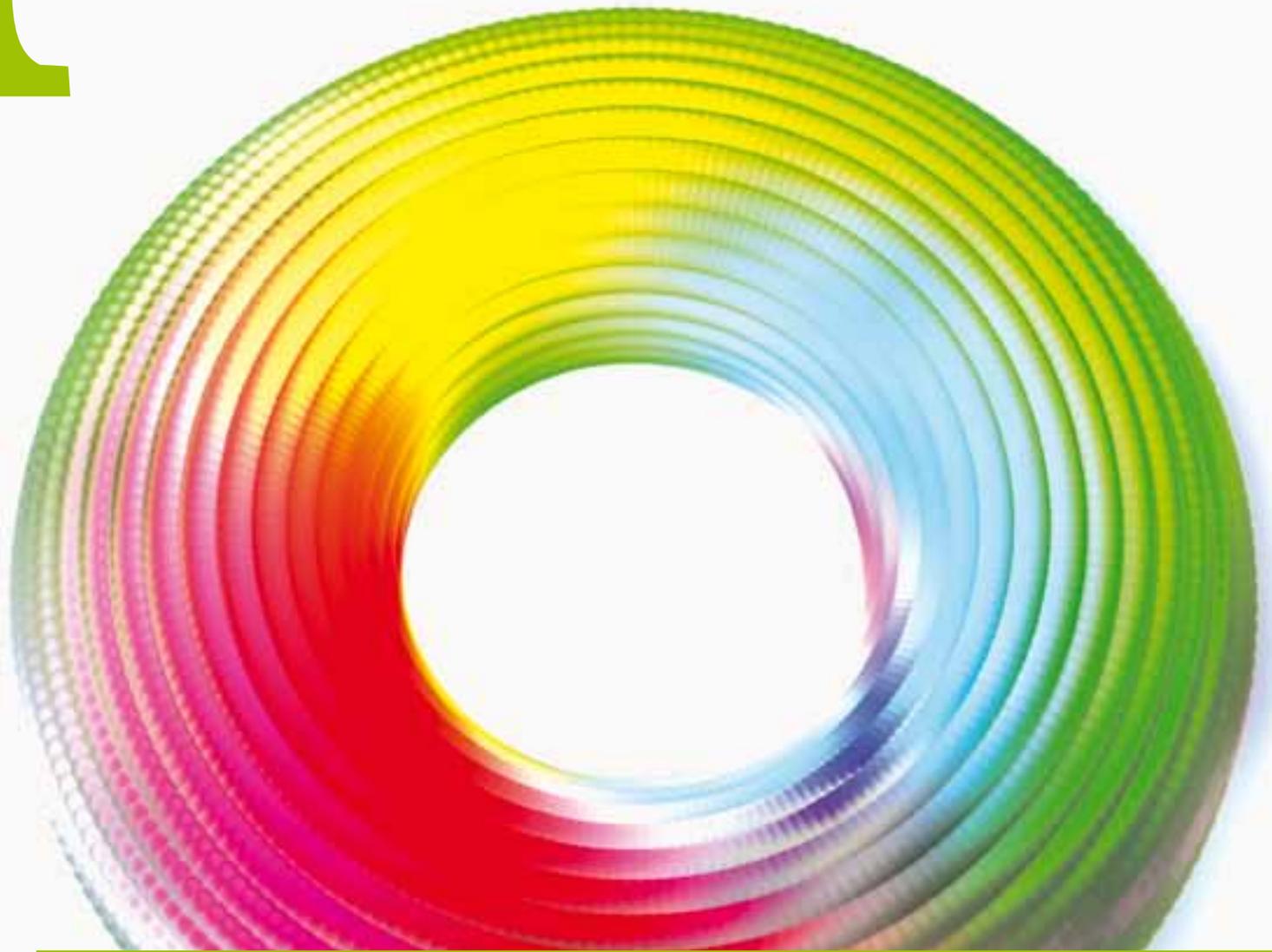
Foram igualmente descobertas por Klyachko, Knutson e Tao relações destas desigualdades com a teoria da representação – mais especificamente na descrição da decomposição de produtos tensoriais de representações irreduzíveis de  $GL_n(V)$ .

Assim, aquilo que parecia ser um pequeno problema de matrizes veio a revelar-se uma fonte de inesperadas e profundas ligações entre diversas áreas da matemática. Para mais informação, recomendamos a leitura dos excelentes artigos [5], [6] e [4].

## REFERÊNCIAS

- [1] A. Horn, “Eigenvalues of Sums of Hermitian Matrices”, *Pacific J. Math.* vol. 12 (1962), no. 1, 225–241.
- [2] A. A. Klyachko, “Stable Bundles, Representation Theory and Hermitian Operators”, *Selecta Mathematica, New Series*, vol. 4 (1998), no. 3, 419–445.
- [3] A. Knutson, T. Tao, “The Honeycomb Model of  $GL_n(\mathbb{C})$  Tensor Products I: Proof of the Saturation Conjecture”, *J. Amer. Math. Soc.* 12 (1999), 1055–1090.
- [4] A. Knutson, T. Tao, “Honeycombs and Sums of Hermitian Matrices”, *Notices Amer. Math. Soc.* 48 (2001), no. 2, 175–186.
- [5] W. Fulton, Eigenvalues, “Invariant Factors, Highest Weights, and Schubert Calculus”, *Bulletin of the AMS* vol. 37 (2000), no. 3, 209–249.
- [6] R. Bhatia, “Linear Algebra to Quantum Cohomology: the Story of Alfred Horn’s Inequalities”, *Amer. Math. Monthly*, 108 (2001), no. 4, 289–318.





# O Teorema de Gauss-Bonnet

JOSÉ NATÁRIO  
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
jnatar@math.ist.utl.pt

## 1. INTRODUÇÃO

Não distinguimos superfícies que têm a mesma forma, ou **geometria**. Assim, uma superfície esférica numa dada posição do espaço é identificada com outra superfície esférica do mesmo raio noutra posição qualquer do espaço, mas não com a superfície de um elipsóide. Para estudar a geometria de uma superfície usam-se conceitos como comprimentos, ângulos, geodésicas (curvas de comprimento mínimo) e polígonos geodésicos (polígonos cujos lados são arcos de geodésicas).

Como passo inicial para descrever as superfícies classificamo-las de acordo com uma semelhança mais grosseira, em que certos aspetos da sua geometria, como comprimentos e ângulos, são ignorados. Mais precisamente, dizemos que duas superfícies têm a mesma **topologia** se é possível deformar uma na outra continuamente (isto é, sem rasgar nem colar). Por exemplo, a superfície de uma esfera tem a mesma topologia que a superfície de um elipsóide. No estudo da topologia de uma superfície usam-se certas quantidades, como, por exemplo, a característica de Euler, que são invariantes por deformações contínuas.

Neste artigo descrevemos de forma elementar o teorema de Gauss-Bonnet, que relaciona a geometria de uma superfície fechada com a sua topologia. Na secção 2 recordamos a fórmula de Euler para poliedros convexos, e definimos a característica de Euler de uma superfície fechada qualquer. Na secção 3 estudamos a geometria das superfícies dos poliedros: definimos o excesso angular de um polígono geodésico,

Qual a relação entre a geometria de uma superfície fechada e a sua topologia? Neste artigo descreveremos o Teorema de Gauss-Bonnet, que pode ser visto como o precursor dos grandes teoremas da geometria do século XX.

o defeito angular de um vértice, e provamos um teorema de Descartes que relaciona a soma dos defeitos angulares com a característica de Euler. Este teorema é usado na secção 4 para intuir o teorema de Gauss-Bonnet: a soma dos excessos angulares de qualquer decomposição de uma superfície fechada em polígonos geodésicos depende apenas da sua característica de Euler.

## 2. A FÓRMULA DE EULER

A fórmula de Euler para poliedros convexos [1] é bem conhecida:

$$V - A + F = 2,$$

onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces.

**Exercício 2.1.** *Verifique esta fórmula para os seguintes poliedros convexos:*

- 1) *Uma pirâmide cuja base é um polígono com  $n$  lados (inclui o tetraedro);*
- 2) *Um prisma cuja base é um polígono com  $n$  lados (inclui o cubo);*
- 3) *O sólido obtido colando duas pirâmides em 1) pela base (inclui o octaedro).*

Existem muitas demonstrações da fórmula de Euler [2]. Um primeiro passo é reduzir o problema ao caso em que todas as faces são triângulos. De facto, se uma dada face é um polígono com  $n$  lados podemos sempre decompô-la em  $n$  triângulos acrescentando um vértice no seu interior. Desta forma aumentámos  $V$  em uma unidade (porque acrescentámos um vértice), aumentámos  $A$  em  $n$  unidades (porque acrescentámos uma aresta por cada um dos  $n$  vértices do polígono) e aumentámos  $F$  em  $n - 1$  unidades (de uma face fizemos  $n$  faces). A variação de  $V - A + F$  foi então de

$$1 - n + (n - 1) = 0,$$

e, portanto,  $V - A + F$  tem o mesmo valor para o novo poliedro.

Assumindo então que todas as faces são triângulos, imaginemos que vamos retirando as faces uma a uma. Quando retiramos a primeira face reduzimos  $F$  em uma unidade mantendo  $V$  e  $A$  inalterados. Portanto,  $V - A + F$  reduz-se em uma unidade. A partir deste momento existem faces com arestas “livres” (ou seja, que não são arestas de outras faces).

É intuitivamente claro, e pode provar-se rigorosamente<sup>1</sup>, que é possível ir retirando faces com arestas livres de forma a que em cada passo as arestas livres formem uma linha fechada simples (sem auto-interseções). Se retirarmos uma face com uma aresta livre, diminuimos  $F$  em uma unidade e  $A$  em uma unidade, mantendo  $V$  constante. Logo,  $V - A + F$  mantém-se constante. Se retirarmos uma face com duas arestas livres diminuimos  $F$  em uma unidade,  $A$  em duas unidades e  $V$  em uma unidade. Portanto, também neste caso  $V - A + F$  se mantém constante. Quando retiramos todas as faces até só restar um triângulo, temos  $V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1$ . Logo,  $V - A + F = 1 + 1 = 2$  para o poliedro inicial.

A superfície de qualquer poliedro convexo tem a mesma topologia que a superfície da esfera. Um poliedro com faces triangulares induz então uma **triangulação** da superfície da esfera, isto é, uma divisão da superfície da esfera em regiões com a topologia de triângulos, que se interseam ao longo de arestas comuns. A demonstração acima pode ser facilmente adaptada para mostrar que qualquer triangulação da superfície da esfera com  $F$  triângulos,  $A$  arestas e  $V$  vértices satisfaz  $V - A + F = 2$ . Note-se que isto não tem de ser (e não é!) verdade para superfícies com outras topologias, como, por exemplo, a superfície de um *donut* (*toro*). Continua no entanto a ser verdade que para qualquer superfície fechada  $S$  o número inteiro

$$\chi(S) = V - A + F$$

não depende da triangulação usada para o calcular, e é o mesmo para todas as superfícies com essa topologia. Este número chama-se a **característica de Euler** da superfície.

**Exercício 2.2.** Verifique que a característica de Euler do toro é zero.

**Exercício 2.3.** Onde é que a demonstração acima de que a característica de Euler da esfera é 2 falha no caso do toro?

### 3. UM TEOREMA DE DESCARTES

Para a fórmula de Euler, a geometria exata da superfície do poliedro é irrelevante. Por exemplo, qualquer pirâmide triangular corresponde essencialmente à mesma triangulação da superfície da esfera, independentemente de as suas faces serem triângulos equiláteros, retângulos ou de outro tipo qualquer. No que se segue, iremos olhar cuidadosamente para a geometria da superfície do nosso poliedro [3].

Na geometria habitual do plano, temos o conceito fundamental de segmento de reta. Um segmento de reta tem a propriedade de ser a linha de comprimento mínimo que une os seus dois extremos. Para a superfície de um poliedro qualquer (não necessariamente convexo) podemos definir um conceito análogo, a que chamaremos **arco minimizante**. O arco minimizante entre dois pontos é a linha desenhada sobre a superfície do poliedro que une os dois pontos e tem comprimento mínimo (pode existir mais do que um arco minimizante unindo dois pontos, mas ele é único se os pontos estiverem suficientemente próximos). Mais geralmente, chamaremos arco de geodésica a qualquer linha que coincida com o arco minimizante entre quaisquer dois dos seus pontos, desde que suficientemente próximos. É evidente que a intersecção de um arco de geodésica com cada face do poliedro é um segmento de reta (porque senão seria possível diminuir o seu comprimento), e que se o arco de geodésica cruza uma aresta então os ângulos opostos entre o arco e a aresta devem ser iguais (basta “desdobrar” a aresta, como se mostra na figura 1). Consideraremos apenas arcos de geodésica que não contêm vértices do poliedro.

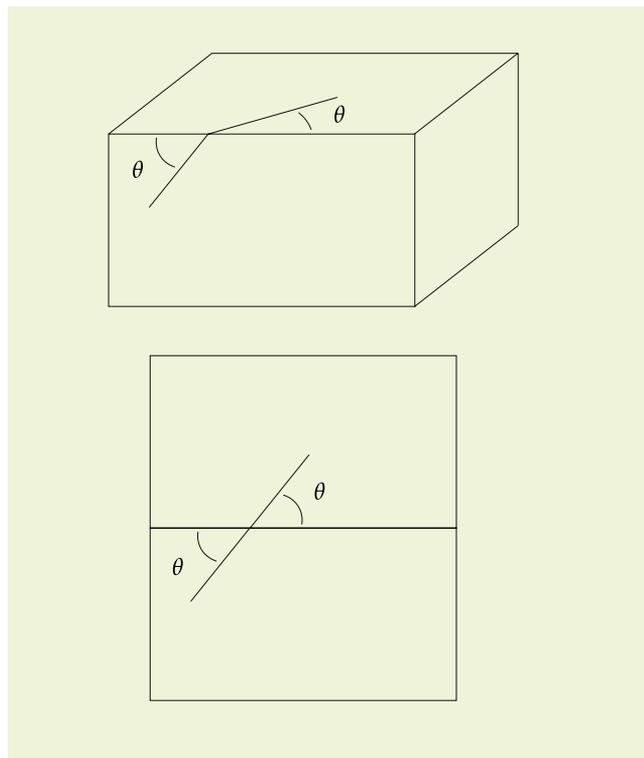


Figura 1: Arco de geodésica num poliedro.

O facto de as arestas poderem “desdobrar-se” mostra que estas, por si só, não introduzem qualquer diferença em relação à geometria do plano. Por exemplo, os ângulos internos de um **triângulo geodésico** (isto é, uma região do poliedro com a topologia de um triângulo cujas arestas são arcos de geodésica) que não contenha nenhum vértice do poliedro no seu interior somam sempre  $\pi$ , mesmo que o triângulo intersekte arestas. As diferenças entre a geometria da superfície de um poliedro e a geometria do plano estão concentradas nos vértices: em geral, os ângulos internos de um triângulo geodésico que contenha um vértice no seu interior não somam  $\pi$ . Por exemplo, na figura 2 podemos ver um triângulo geodésico cujos ângulos internos somam  $\frac{3\pi}{2}$ .

Chamaremos **excesso angular** de um triângulo geodésico à diferença entre a soma dos seus ângulos internos e  $\pi$ . Por exemplo, o excesso angular do triângulo geodésico representado na figura 2 é de  $\frac{\pi}{2}$ . Chamaremos ainda **defeito angular** de um vértice do poliedro à diferença entre  $2\pi$  e a soma dos ângulos do poliedro no vértice em questão. Por exemplo, o defeito angular do vértice contido no interior do triângulo geodésico da figura 2 é também de  $\frac{\pi}{2}$ . Este facto não é uma

coincidência: o excesso angular de qualquer triângulo geodésico contendo um único vértice no seu interior é sempre igual ao defeito angular desse vértice. De facto, unindo o vértice do poliedro aos vértices do triângulo geodésico, como se mostra na figura 2, decomparamos o triângulo geodésico em três triângulos euclidianos (basta “desdobrar” as arestas apropriadas). Os ângulos internos destes três triângulos euclidianos somam um total de  $3\pi$ , que tem de ser igual à soma dos ângulos internos do triângulo geodésico mais a soma dos ângulos do poliedro no vértice. Por outras palavras, se  $\varepsilon$  é o excesso angular e  $\sigma$  é a soma dos ângulos do poliedro no vértice, temos

$$3\pi = (\pi + \varepsilon) + \sigma \Leftrightarrow \varepsilon = 2\pi - \sigma.$$

**Exercício 3.1.** *Dê um exemplo de um poliedro contendo um vértice cujo defeito angular seja negativo. Será que este poliedro pode ser convexo?*

Descartes [4] provou o seguinte teorema:

**Teorema 3.2. (Descartes)** *Para qualquer poliedro com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces, a soma dos defeitos angulares de todos os vértices é igual a  $2\pi(V - A + F)$ .*

*Demonstração.* Por um lado, a soma dos defeitos angulares é igual a  $2\pi V$  menos a soma de todos os ângulos do poliedro. Por outro lado, a soma de todos os ângulos do poliedro é igual à soma dos ângulos de todas as suas faces. A soma dos ângulos de uma só face é igual a  $\pi$  vezes o número de arestas dessa face menos  $2\pi$  (ver exercício 3.3). Notando que cada aresta pertence a duas faces distintas, temos então que a soma de todos os ângulos do poliedro é também igual a  $\pi(2A) - 2\pi F$ . Portanto, a soma dos defeitos angulares é

$$2\pi V - (\pi(2A) - 2\pi F) = 2\pi(V - A + F).$$

**Exercício 3.3.** *Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com  $n$  lados é igual a  $(n - 2)\pi$ . (Sugestão: decomponha o polígono em triângulos).*

Alternativamente, o teorema de Descartes pode ser formulado em termos da soma dos excessos angulares de uma decomposição do poliedro em triângulos geodésicos contendo

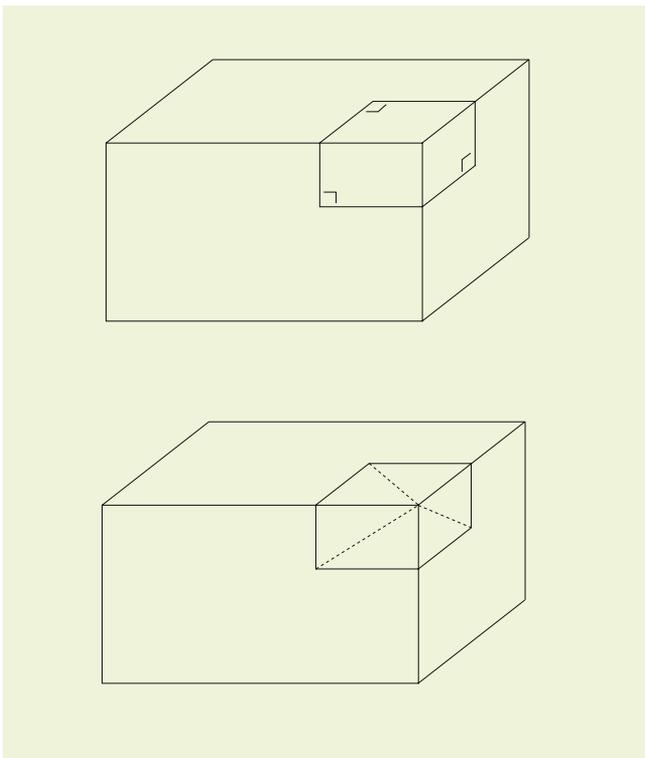


Figura 2: Triângulo geodésico contendo um vértice de um poliedro.

<sup>1</sup> Ver por exemplo a Prova 13 em [2].

no máximo um vértice no seu interior. Esta versão pode ser generalizada para decomposições do poliedro em polígonos geodésicos quaisquer contendo um número arbitrário de vértices no seu interior, onde definimos o excesso angular de um polígono geodésico com  $n$  lados como a diferença entre a soma dos seus ângulos internos  $(n - 2)\pi$ .

**Teorema 3.4. (Descartes)** *A soma dos excessos angulares de uma decomposição qualquer de um poliedro com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces em polígonos geodésicos é igual a  $2\pi(V - A + F)$ .*

*Demonstração.* Ver exercícios 3.5 e 3.6

**Exercício 3.5.** *Mostre que o defeito angular do vértice de um poliedro é igual ao excesso angular de um polígono geodésico com  $n$  lados que contenha apenas esse vértice no seu interior.*

**Exercício 3.6.** *Mostre que o excesso angular de um polígono geodésico contendo vários vértices no seu interior é igual à soma dos defeitos angulares dos vértices.*

#### 4. O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Para superfícies curvas gerais é ainda possível definir arcos de geodésica. O teorema de Descartes pode então ser generalizado para estas superfícies, aproximando-as por superfícies de poliedros<sup>2</sup> [6, 7].

**Teorema 4.1. (Gauss-Bonnet)** *A soma dos excessos angulares de uma decomposição qualquer de uma superfície fechada  $S$  em polígonos geodésicos é igual a  $2\pi\chi(S)$ .*

Recorde que um **círculo máximo** na superfície da esfera é a interseção desta com um plano que passa pelo centro da esfera, como, por exemplo, o equador ou um meridiano. Os arcos de geodésica da superfície da esfera são precisamente os arcos de círculo máximo (exercício 4.2). É possível dividir a esfera em 8 triângulos geodésicos como o que se mostra na figura 3, cada um dos quais possui um excesso angular de  $\frac{\pi}{2}$ . O excesso angular total é portanto  $8 \times \frac{\pi}{2} = 4\pi$ , em conformidade com o teorema de Gauss-Bonnet.

**Exercício 4.2.** *Mostre que os arcos de círculo máximo são arcos de geodésica da superfície da esfera. (Sugestão: note que a esfera é invariante por reflexões em relação ao plano que contém o círculo máximo, e use o facto de que o arco minimizante entre dois pontos suficientemente próximos é único).*

**Exercício 4.3.** *Mostre que os “meridianos” e o “equador” do toro (figura 3) são formados por arcos de geodésica, e verifique a validade do teorema de Gauss-Bonnet para esta superfície.*

No limite em que os polígonos ficam muito pequenos, a soma dos excessos angulares reduz-se ao integral de superfície

$$\iint_S K,$$

onde  $K$  é o excesso angular por unidade de área, dito a **curvatura** da superfície. O teorema de Gauss-Bonnet escreve-se então [8]

$$\iint_S K = 2\pi\chi(S).$$

**Exercício 4.4.** *Calcule a curvatura da superfície de uma esfera de raio  $R$ . (Sugestão: note que a esfera é invariante por rotações).*

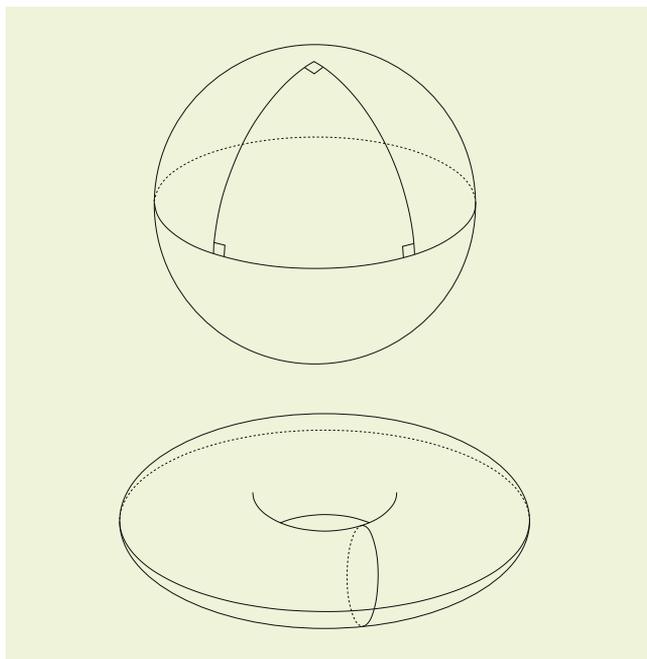


Figura 3: Triângulo geodésico na superfície da esfera e geodésicas do toro.

**Exercício 4.5.** Mostre que em qualquer superfície com a topologia da esfera existem pontos onde a curvatura é positiva.

**Exercício 4.6.** Mostre que a curvatura de uma superfície com a topologia do toro não pode ser positiva em todos os pontos.

O teorema de Gauss-Bonnet relaciona uma propriedade geométrica local (curvatura) com uma propriedade topológica global (característica de Euler). Ideias deste género revelaram-se extraordinariamente férteis, tendo inspirado não só as muitas generalizações do teorema de Gauss-Bonnet, que vão da teoria das classes características ao teorema do índice de Atiyah-Singer, mas, indiretamente, muita da geometria do século XX.

## REFERÊNCIAS

[1] Richeson, *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press (2008)

[2] Eppstein, "Nineteen Proofs of Euler's Formula", <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>

[3] Viana, "Viagens pelos Mundos Planos", <http://w3.impa.br/~viana/out/plano.pdf>

[4] [http://en.wikipedia.org/wiki/Defect-\(geometry\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Defect-(geometry))

[5] Zames, "Surface Area and the Cylinder Paradox", *Two-Year College Math. J.* **8** (1977) 207-211

[6] Givental, "Geometry of Surfaces and the Gauss-Bonnet Theorem", <http://math.berkeley.edu/~giventh/difgem.pdf>

[7] Polya, "An Elementary Analogue to the Gauss-Bonnet Theorem", *Am. Math. Month.* **61** (1954) 601-603

[8] <http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss-Bonnet-theorem>

## SOBRE O AUTOR

**José Natário** doutorou-se em Matemática na Universidade de Oxford em 2000. É atualmente professor associado no Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico, onde desenvolve investigação nas áreas de geometria e física matemática. É autor de dezenas de artigos científicos e de um livro, *General Relativity Without Calculus* (Springer, 2011), no qual tenta explicar as ideias principais da relatividade geral usando apenas matemática elementar.

---

<sup>2</sup> Este tipo de limite é delicado – veja-se por exemplo [5].



LOJA  
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em [www.spm.pt](http://www.spm.pt)



BERNARDO MOTA  
Universidade de Lisboa  
bernardomota@campus.ul.pt

## TRADUZIR, ENTENDER, ANOTAR, E AMALDIÇOAR DIOFANTO

A *Aritmética* de Diofanto continua, direta ou indiretamente, a promover investigação original por parte de matemáticos modernos. Basta lembrar que a famosa conjectura enunciada por Fermat à margem de uma edição de Diofanto apenas foi demonstrada em 1994. Estamos em boa altura para mostrar as dificuldades envolvidas na tradução para português do texto original.

Apresento em baixo duas traduções possíveis da proposição 8 do livro 2 da *Aritmética* de Diofanto que fiz a partir da edição do texto grego de Paul Tannery. Acrescentei a ambas, com numerais árabes, os passos do algoritmo proposto pelo matemático grego; o texto original (imagem na página seguinte) apresenta o texto corrido sem distinguir as diferentes etapas do argumento.

Algumas expressões visam produzir em português um efeito semelhante ao do grego dos manuscritos, e precisam de ser descodificadas. Eis a Pedra de Roseta:

1) ABREVIATURAS. “Q” = “quadrado” (nos manuscritos, a palavra surge muitas vezes abreviada); “U” = “unidades”, (o termo *monades* aparece normalmente abreviada para “M” com um pequeno círculo sobreposto); “N” = “número” (vis-

1. Decompor um quadrado proposto em dois quadrados
2. Proponha-se, pois, decompor o 16 em dois quadrados.
3. E ponha-se o primeiro  $N^2$ .
4. Então, o outro será  $U16 - N^2$ .
5. Então, restará que  $U16 - N^2$  são iguais a um Q.
6. Formo o Q a partir de N (quantos-quisermos) – U (tantas-quantas-é-o-lado-das-U16).  
Seja  $N^2 - U4$ .
7. Então, o próprio quadrado será  $N^2 U16 - N16$ .
8. Estes [são] iguais a  $U16 - N^2$ .
9. Acrescente-se em comum o que está em falta e de iguais, iguais.  
Então,  $N^2 5$  [são] iguais a  $N16$ . E o N fica 16 quintos.
10. Um será  $256/25$ ; o outro  $144/25$ .
11. E os dois juntos fazem  $400/25$ , ou seja,  $U16$ . E cada um é um quadrado.

1. [enunciação]  $Q_1 + Q_2 = Q_3$
2. [dados]  $Q_1 3 = 16; Q_1 + Q_2 = 16$
3. [posição 1, 2]  $Q_1 = 1N^2; Q_1 + Q_2 = Q_3 \iff 1N^2 + Q_2 = 16$
4. [3]  $1N^2 + Q_2 = 16 \iff Q_2 = 16 - 1N^2$
5.  $16 - 1N^2 = Q$
6. [5, posição]  $Q = (2N - 4)^2$
7. [6]  $Q = (2N - 4)^2 \iff Q = 4N^2 + 16 - 16N$
8. [5,7]  $4N^2 + 16 - 16N = 16 - 1N^2$
9. [8]  $4N^2 + 16 - 16N = 16 - 1N^2 \iff 5N^2 = 16N \iff 5N = 16 \iff N = \frac{16}{5}$
10. [3, 4, 9]  $Q_1 = 1N^2 \iff Q_1 = \frac{256}{25}; Q_2 = 16 - 1N^2 \iff Q_2 = \frac{400}{25} - \frac{256}{25} \iff Q_2 = \frac{144}{25}$
11.  $Q_1 + Q_2 = \frac{256}{25} + \frac{144}{25} \iff Q_1 + Q_2 = \frac{400}{25} \iff Q_1 + Q_2 = 16; \sqrt{\frac{256}{25}} = \frac{16}{5}; \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$

to que *arithmos* surge abreviado na maior parte das vezes); “N<sup>2</sup>1” = “1 potência”, o texto grego apresenta a expressão “D<sup>y</sup>1”, que significa “1 *dynamis*” e é apenas utilizado para expressar o quadrado da incógnita. As abreviaturas dos manuscritos correspondem, portanto, à parte literal dos nossos monómios e o numeral (que em grego é representado por uma ou várias letras), ao nosso coeficiente. Eis como a filologia ajuda a explicar um pouco de história dos símbolos matemáticos. No entanto, é preciso notar: o manuscrito mais antigo de Diofanto é do século XIII e não podemos confirmar se o próprio Diofanto escrevia desta maneira.

2) OPERAÇÕES. O símbolo que representa a subtração é, ao que parece (nem tudo o que diz respeito à cultura antiga é certo), uma abreviatura da palavra “falta/redução” (em grego: *leipsis*). “Quatro menos dois” será, em grego, algo como “quatro com falta/redução de dois”. A soma não tem símbolo, os elementos a adicionar são justapostos: a expressão “N4 U2” significa “4x + 2”, ou “quatro números e duas unidades”. As frações estão escritas como nós as escrevemos, mas com o denominador em cima e o numerador em baixo. A igualdade não tem símbolo; a expressão “é igual a” (*isos estin*, quando o sujeito é *arithmos*), quando abreviada, limita-se a perder a forma verbal “é” (há expressões alternativas para indicar resultados: “a soma é...”, “o número fica...”).

3) APLICAÇÃO DE LEIS ALGÉBRICAS. “Acrescente-se em comum o que está em falta e de iguais, [tire-se] iguais” = “Some-se a ambos os membros os termos negativos e reduza-se os termos semelhantes”. Por vezes, Diofanto não as explicita.

4) OUTROS ASPETOS LINGUÍSTICOS. A linguagem é, por vezes, geométrica, daí a utilização de termos como “lado”, para “raiz”. Mantive artigos, onde o português os não usa: “decompore o [número] 16”.

Façamos uma experiência de leitura (passo 6): “Formo o quadrado a partir de tantos números quantos quisermos menos tantas unidades quantas é o lado das 16 unidades. Seja dois números menos quatro unidades”.

η.

Τὸν ἑπιτεθέντα τετραγώνου διαλεῖν εἰς δύο τε-  
 10 τράγωνους.  
 Ἐπιτεθέντω δὴ τὸν  $\overline{\alpha\beta}$  διαλεῖν εἰς δύο τετραγώνους.  
 Καὶ τετέχθω ὁ  $\alpha^2$   $\Delta^{\alpha}$   $\alpha$ , ὁ ἕρα ἕταρος ἴσται  
 $\overline{M\overline{\alpha\beta}}$   $\Delta^{\alpha}$   $\alpha$ . διέσει ἕρα  $\overline{M\overline{\alpha\beta}}$   $\Delta^{\alpha}$   $\alpha$  ἴσται  $\square^{\alpha}$ .  
 κλάσσει τὸν  $\square^{\alpha}$  ἀπὸ  $5^{\alpha}$  ὄσων ἄρα  $\Delta$  τοσοῦ-  
 15 τῶν  $M$  ὄσων ἴσται ἢ τῶν  $\overline{\alpha\beta}$  κλειυρά· ἴσται  $5\overline{\beta}$   $\Delta$   $\overline{M\overline{\alpha\beta}}$ .  
 πύτος ἕρα ὁ  $\square^{\alpha}$  ἴσται  $\Delta^{\alpha}$   $\delta$   $\overline{M\overline{\alpha\beta}}$   $\Delta$   $5\overline{\alpha\beta}$ . ταῦτα ἴσται  
 $\overline{M\overline{\alpha\beta}}$   $\Delta^{\alpha}$   $\alpha$ . κοινὴ προσκίσειθω ἢ λείψις καὶ ἀπὸ  
 ὁμοίων ὅμοια.  
 $\Delta^{\alpha}$  ἕρα  $\overline{\alpha\beta}$  ἴσται  $5\overline{\alpha\beta}$ , καὶ γίνεται ὁ  $5\overline{\alpha\beta}$  πέμπτων.  
 20 ἴσται ὁ μὲν  $\frac{\alpha\alpha}{5\overline{\alpha\beta}}$ , ὁ δὲ  $\frac{\alpha\alpha}{\overline{\alpha\beta}}$ , καὶ οἱ δύο συντεθέντες  
 ποιούσι  $\frac{\alpha\alpha}{5}$ . ἔτσι  $\overline{M\overline{\alpha\beta}}$ . καὶ ἴσται ἑκάτερος τετραγώνου.

Traduzir, já está. Entender a solução não parece complicado: o passo fundamental é o sexto, no qual Diofanto forma um quadrado a partir da expressão  $mN - \sqrt{Q_3}$ ; a partir daqui, é fácil.

O problema é que Diofanto não apresenta justificação para este passo, por mais evidente ou trivial que possa parecer. Não conhecemos o seu método de descoberta; não conseguimos reconstruir as etapas do desenvolvimento histórico desta solução particular, não temos a certeza de ter percebido bem a razão por que a solução funciona sempre. Geometricamente, o problema reduz-se a transformar um gnómon num quadrado, o que se pode fazer (e demonstrar) facilmente recorrendo a *Elementos* 2.14 (quadratura de um paralelogramo), depois de se ter transformado o gnómon num retângulo (por meio de construções elementares do livro primeiro dos *Elementos* e do teorema quinto do livro segundo). Diofanto, no entanto, não faz geometria e, no seu argumento, limita-se a criar uma *posição* (o que isto significa para ele é discutível; outro tipo de *posição* corresponde ao passo 3). A sensação para quem lê é mais ou menos a mesma que ler um problema dos *Elementos* que só apresenta a parte da construção e não a da demonstração. O assunto não é menor. Provavelmente

depois de ter perdido muitas horas a tentar entender ou explicar o passo, um comentador do século XIII não aguentou mais e desabafou noutra nota famosa que permanece à margem do manuscrito de Madrid da *Aritmética* (Codex Matritensis 48): “A tua alma esteja com Satanás, Diofanto, por causa da dificuldade dos outros teoremas e, principalmente, deste teorema aqui.” Não sei se Fermat tinha a solução para a sua conjectura. O que sei é que há os que tentam e desesperam e há os que tentam e estabelecem uma agenda. E também fica claro que a magia da matemática antiga não está, às vezes, nos resultados que deixa bem estabelecidos, mas nos que deixa em aberto.

Já agora, aqui fica a nota de Fermat, como consta na página 61 da edição da *Aritmética* de Diofanto de 1670), com cada expressão traduzida para português, para cumprir o título deste pequeno artigo de forma mais completa:

*Cubum* (um cubo) *autem* (por outro lado) *in duos cubos* (em dois cubos), *aut* (ou) *quadratoquadratum* (um quadradoquadrado) *in duos quadratoquadratos* (em dois quadradoquadrados) *et* (e) *generaliter* (em geral) *nullam* (nenhuma) *in infinitum* (até ao infinito) *ultra quadratum* (maior que o quadrado) *potestatem* (potência) *in duos* (em dois) *eiusdem* (do mesmo) *nominis* (nome) *fas est* (é possível) *diuidere* (dividir) *cuius* (deste) *rei* (facto) *demonstrationem* (uma demonstração) *mirabilem* (extraordinária) *sane* (verdadeiramente) *detexti* (descobri). *Hanc* (esta) *marginis* (da margem) *exiguitas* (a estreiteza) *non* (não) *caperet* (poderia conter).

Tradução corrida: “Por outro lado, não é possível dividir um cubo em dois cubos, ou um biquadrado em dois biquadrados, nem, em geral, uma potência maior do que o quadrado, até ao infinito, em duas do mesmo nome [= em duas potências com o mesmo expoente]. Descobri uma demonstração verdadeiramente admirável deste facto, mas a estreiteza desta margem não a poderia conter.”

É ou não verdade que o latim confere a tudo um toque mais clássico?

## REFERÊNCIAS

Para o texto grego de Diofanto, a edição de referência continua a ser a de Paul Tannery (*Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum Graecis Commentariis*, Stuttgart, Teubner, 1893, 2 vols). Thomas L. Heath fez uma paráfrase, mais do que uma tradução, desta edição para inglês (*Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra*, Cambridge University Press, 1910, 2a ed.); Paul Ver Eecke traduziu-a para francês (*Diophante d’Alexandrie. Les Six Livres Arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones*, Paris, Albert Blanchard, 1959). A tradição árabe, cuja relação com a grega é assunto de difícil solução, foi traduzida para francês por Roshdi Rashed (*Les arithmétiques. Tome III: Livre IV; Tome IV: Livres V-VI-VII*, Paris, Les Belles Lettres, 1984) e para inglês por J. Sesiano (*Books IV to VII of Diophantus’ Arithmetica: In the Arabic Translation Attributed to Qustā ibn Lūqā*, New York, Springer-Verlag, 1982). Se quiser inteirar-se dos problemas em torno da obra de Diofanto, proponho que comece por aqui: Fabio Acerbi, *The Meaning of Plasmatikon in Diophantus’ Arithmetica*, *Archive for History of Exact Sciences* 63 (2009), 5-31; Alain Bernard · Jean Christianidis, *A New Analytical Framework for the Understanding of Diophantus’s Arithmetica I-III*, *Archive for History of Exact Sciences* 66 (2012), 1-69.

# TABELA DE PUBLICIDADE 2012

## CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1900

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

## CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

## CONTACTOS

Ana Rita Ferrer

Tel.: 21 793 97 85 Tlm.: 96 184 89 66

rita.ferrer@spm.pt

## ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

## LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

	 PÁGINA INTEIRA	 1/2 PÁGINA	 1/4 PÁGINA	 1/8 PÁGINA	 RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.



Publicado originalmente no jornal Público, em 14/05/2012. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

## FICHA TÉCNICA

### DIRETOR:

Rogério Martins Universidade Nova de Lisboa

### VICE-DIRETOR:

Alessandro Margheri Universidade de Lisboa

### CONSELHO EDITORIAL:

Afonso Pedrosa Pinto E. S./3 S. Pedro Vila Real • António Rosa E. S. M<sup>a</sup> Amália Vaz de Carvalho • Elisabete Rodrigues E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • Graciano de Oliveira Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • Henrique Leitão Universidade de Lisboa • João Filipe Queiró Universidade de Coimbra • José Francisco Rodrigues Universidade de Lisboa • José Miguel Rodrigues de Sousa E. S. Felismina Alcântara • Lina Fonseca Escola Superior de Educação de Viana do Castelo • Maria do Céu Pinto Universidade de Coimbra • Manuel Domingos Oliveira Cadete Universidade Agostinho Neto • Paulus Gerdes Universidade Eduardo Mondlane, Moçambique • Raquel Escórcio antiga professora na E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • Teresa Almada Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • Juan-Miguel Gracia Universidad del País Vasco, Espanha

### ASSISTENTES EDITORIAIS:

Ana Margarida Pereira SPM • Sílvia Dias SPM

### REVISÃO:

Margarida Robalo

### DESIGN:

Ana Pedro

### CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

### MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Ana Margarida Pereira SPM • Sílvia Dias SPM

### IMPRESSÃO:

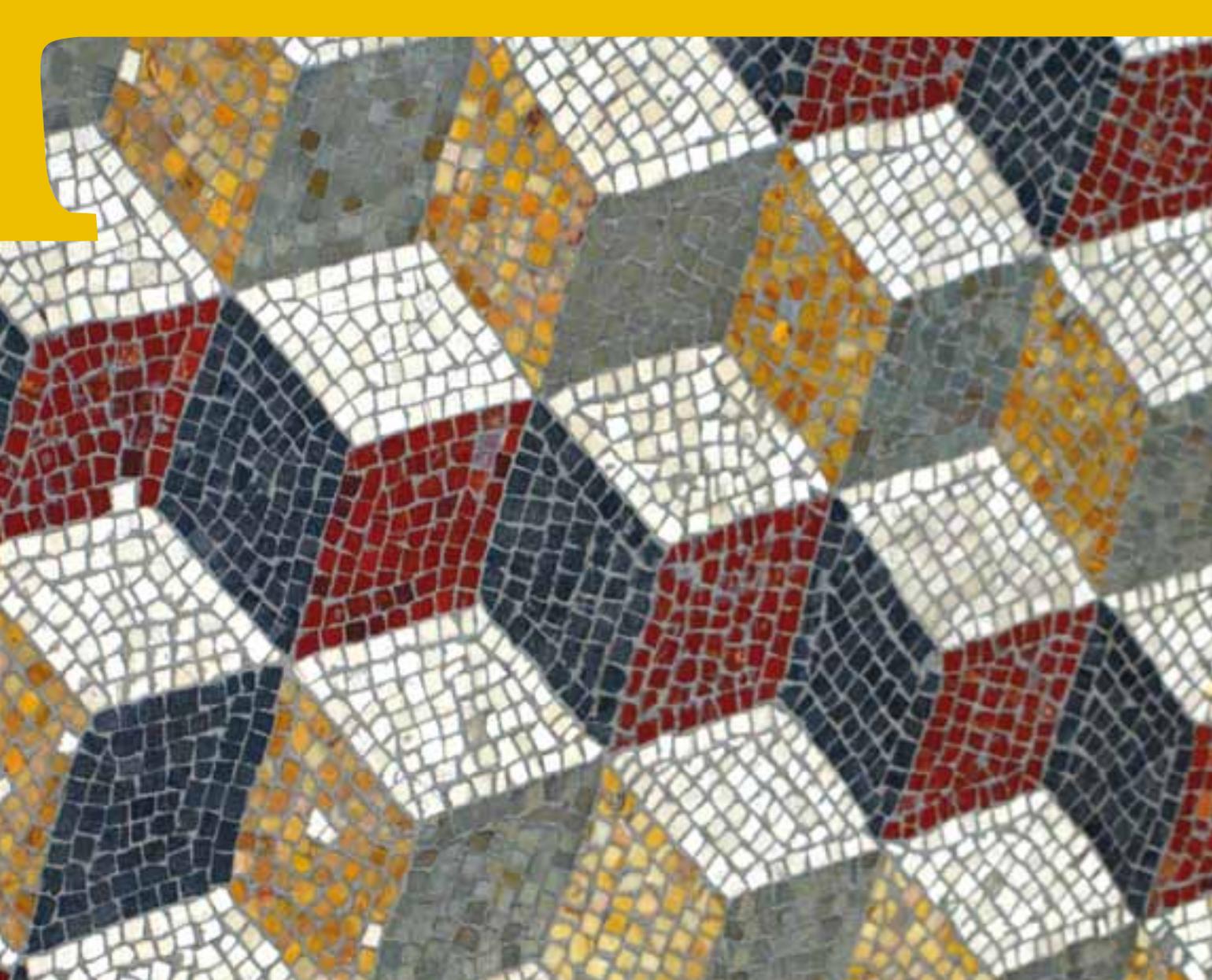
Dossier – Comunicação e imagem

### PROPRIEDADE:

Sociedade Portuguesa de Matemática  
Av. República 45, 3<sup>o</sup> Esq. 1050-187 Lisboa  
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

### TIRAGEM 1900 Exemplares

ISSN 0373-2681 • ICS 123299 • DEPÓSITO LEGAL: 159725/00



# Um Problema de Lugares Geométricos

DAVID MESQUITA

UNIVERSIDADE DO PORTO

dbmesquita@gmail.com

Onde se deve colocar o leitor para que um amigo seu o veja de uma determinada maneira? A geometria oferece muitos exemplos concretos deste tipo de questão, bastante antiga, mas sempre atual.

## 1. INTRODUÇÃO

Durante o meu trabalho como bolseiro do programa Novos Talentos em Matemática, corria o ano de 2009/2010, foi-me proposto o seguinte problema de geometria euclideana elementar:

**Problema 1.1** Dados um ponto  $P$  e uma rotação  $\theta$  de centro  $O \neq P$ , determinar o lugar geométrico dos pontos  $X$  tais que  $X, P$  e  $\theta(X)$  são colineares.

Uma vez resolvido, o trabalho seguiu no sentido de arranjar generalizações que o enquadrassem, e assim nasceu este artigo. Aqui, propomo-nos estudar a seguinte variante, que, numa formulação geral, pode ser enunciada como se segue:

**Problema 1.2** Dados no plano euclidiano,  $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^2$ , um ponto  $P$ , uma transformação geométrica  $f$  e uma amplitude  $\alpha \in [0, 2\pi[$ , determinar  $\mathcal{L}_\alpha$ , o lugar geométrico dos pontos  $X$  do plano tais que  $\angle XPf(X) = \alpha$ .

Assumimos que todos os ângulos são orientados no sentido dos ponteiros do relógio, como usual. Restringiremos o nosso estudo ao caso em que  $f$  é uma isometria do plano: uma transformação geométrica tal que para todos os pontos  $P, Q \in \mathcal{E}$  se tem  $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$ .

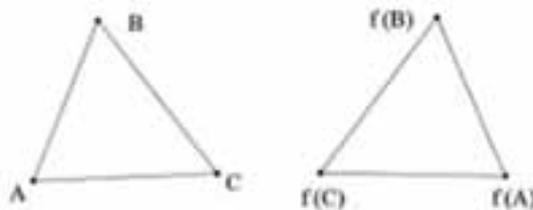


Figura 1: A imagem de um triângulo é congruente com o mesmo (LLL).

Na fonte bibliográfica, o leitor poderá confirmar que as isometrias do plano estão totalmente classificadas, dividindo-se nos seguintes quatro tipos: *translações*, *rotações*, *reflexões* e *reflexões deslizantes*, cuja descrição veremos resumidamente no decorrer deste artigo. Usualmente, costuma chamar-se às primeiras duas, as isometrias *positivas*, e às duas últimas, as *negativas*. Esta nomenclatura lembra justamente uma analogia com a operação de multiplicação de números positivos e negativos: se compusermos (*multiplicarmos*) duas isometrias com o mesmo  *sinal*, obtemos uma isometria positiva, caso contrário, uma negativa. As primeiras preservam os ângulos e a sua orientação, ao contrário das segundas, que a revertem. Em particular, dados três pontos no plano,  $A, B$  e  $C$ , temos  $\angle ABC = \angle f(A)f(B)f(C)$ , se  $f$  for uma isometria positiva, e  $\angle ABC = -\angle f(A)f(B)f(C)$  se for negativa, como se mostra na figura 2, abaixo.

Veremos que os lugares geométricos  $\mathcal{L}_\alpha$  associados aos elementos das isometrias positivas é o mesmo: *arcos de circunferência*, em geral, determinados pela isometria dada. No caso das isometrias negativas, os lugares geométricos estarão contidos em *hipérbolas equiláteras*: aquelas cujas assíntotas são perpendiculares. Em qualquer das situações, eventualmente, estes lugares poderão compreender retas ou seus subconjuntos: segmentos, semirretas, uniões destes, etc. Vamos usar duas abordagens diferentes: na primeira parte, no caso das

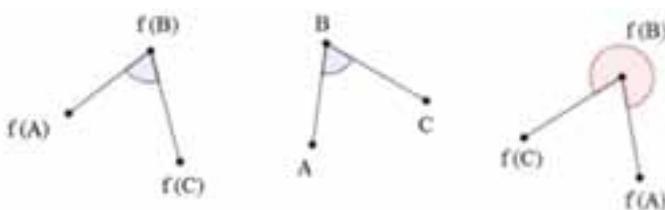


Figura 2: Preservação e reversão da orientação de ângulos.

isometrias positivas, recorreremos às ferramentas da geometria sintética, fazendo uso sistemático do Teorema do Arco Capaz e explorando as propriedades das transformações em causa. Na segunda, entrando no mundo das cónicas, optaremos pelas técnicas da geometria analítica para a determinação e a classificação dos lugares  $\mathcal{L}_\alpha$ . Para que este artigo não fique muito extenso, deixaremos, em certos casos, ao cuidado do leitor, a determinação do lugar  $\mathcal{L}_\alpha$  (o primeiro dos quais é aquele em que  $f = \text{identidade}$ ), bem como a verificação cuidadosa de algumas afirmações. Para finalizar esta introdução, advertimos que os ângulos  $\alpha + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  devem ser considerados como definindo um só ângulo, que identificamos pelo representante pertencente ao intervalo  $[0, 2\pi[$ .

## 2. O TEOREMA DO ARCO CAPAZ

Começamos o nosso estudo, recordando um dos primeiros resultados da geometria euclídeana, o Teorema do Arco Capaz:

**Teorema 2.1** *A amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é igual a metade do arco por ele subentendido.*

A figura 3 sugere uma linha de demonstração que o leitor poderá ter interesse em seguir, mas não vamos aqui adiantar-nos mais relativamente a este teorema. Um tratamento detalhado pode ser encontrado na fonte bibliográfica. Muito importante para este artigo é a seguinte consequência, que em si é já um problema de lugares geométricos, e que lhe vem frequentemente associada.

**Corolário 2.2** *Dados dois pontos distintos  $P, Q \in \mathcal{E}$  e  $\alpha \in [0, 2\pi[$ , o lugar geométrico dos pontos  $X$  tais que*

$$\angle PXQ = \alpha$$

*é um arco de circunferência de extremidades  $P$  e  $Q$ , dito o arco capaz de ângulo  $\alpha$  relativamente a  $P$  e  $Q$ .*

Note-se que, estando a trabalhar com ângulos orientados, isto define um e apenas um arco de circunferência, e não dois, como seria o caso se medíssemos o ângulo de outra maneira. Na fonte bibliográfica, esta é a situação considerada, e também aí o leitor pode encontrar a demonstração cuidada do corolário respetivo, o que aqui não faremos. A representação gráfica destes arcos, para diversos valores de  $\alpha$ , pode ver-se na figura 4.

Como se pode visualizar, cada ponto do plano pertence a um e a um só arco capaz. Por simplicidade de notação, denotaremos por  $C_\alpha$  o arco capaz de ângulo  $\alpha$  relativamente aos pontos  $P$  e  $Q$  subentendidos. Observe-se que aqui importa a ordem em que os enunciamos: dizer "... relativamente a  $P$  e  $Q$ " não é o mesmo que dizer "...relativamente a  $Q$  e  $P$ ", mas ao longo deste texto usaremos sempre a primeira formulação. Em geral, dada a isometria  $f$  e o ponto  $P$ , tomaremos  $Q = f^{-1}(P)$ . Sem considerar complicações circunstanciais que possam existir, o resultado acima diz-nos onde se deve colocar um observador no plano para ver um determinado segmento sobre um certo ângulo, uma situação do quotidiano onde pode advir este tipo de questões. Vamos então ver como a partir deste primeiro problema de lugares geométri-

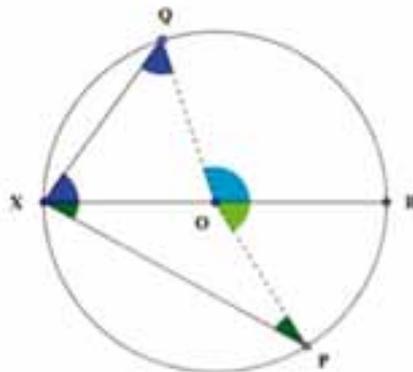


Figura 3: Teorema do Arco Capaz.

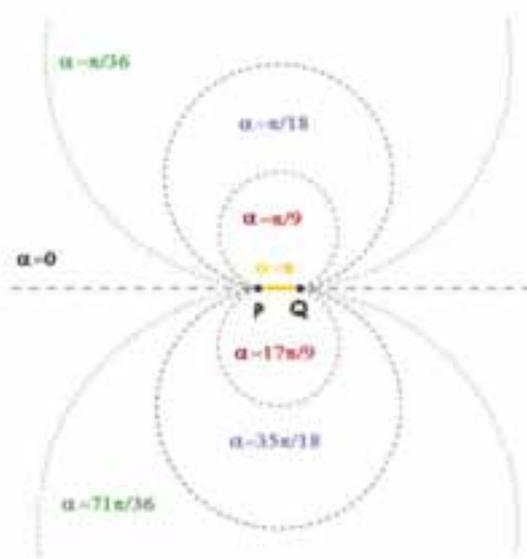


Figura 4: Arcos Capazes.

cos, se podem obter outras variações que lhe estão ligadas. No texto seguinte, quando nos referirmos ao Teorema do Arco Capaz, estamos a focar especialmente este seu corolário.

### 3. TRANSLAÇÕES

Nesta secção, vamos estudar a resolução do problema no caso mais simples das isometrias positivas depois da identidade: aquele em que  $f$  é uma translação dada por um vetor  $\vec{v}$ , não nulo, ou seja,  $f(X) = X + \vec{v}$ . Sem mais demoras, vejamos a resposta.

**Teorema 3.1** *Nas condições do problema 1.2, se  $f$  for uma translação definida como acima, então o lugar geométrico  $\mathcal{L}_\alpha$  é o arco capaz  $C_\alpha$ .*

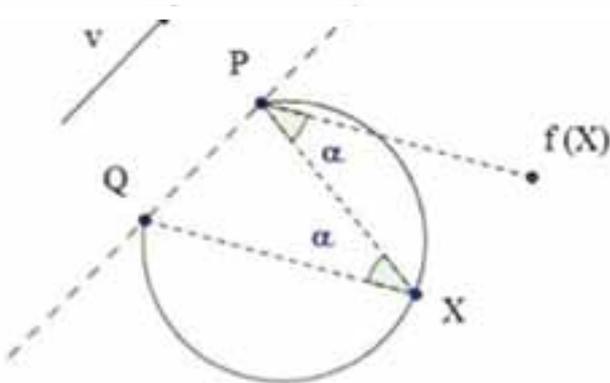


Figura 5: Arco Capaz associado a  $\vec{v}$  e  $\alpha$ .

Como o leitor pode adivinhar, pretendemos reduzir o nosso problema em qualquer uma das isometrias positivas ao Teorema do Arco Capaz. Para isso, quer num caso, quer noutro, penso que é natural assegurarmo-nos de que alguma quantidade angular, a determinar, permaneça constante, independentemente do ponto do lugar geométrico  $\mathcal{L}_\alpha$  que consideremos. Pois bem, ela existe, e pode até ser obtida da mesma maneira, quer  $f$  seja uma translação ou uma rotação: fixada a isometria  $f$  consideramos a seguinte função:

$$\mathcal{F}(A, B) = \angle Af(B)f(A) - \angle f(B)AB.$$

Creio que a introdução desta função traz algumas vantagens estéticas a uma abordagem caso a caso e, sobretudo, permitirá estabelecer um paralelo interessante entre os dois tipos de isometria, como o leitor poderá constatar. O seguinte resultado, sugerido pela figura 5, contém a informação prin-

cipal para a resolução deste problema, pois diz-nos exatamente como  $\mathcal{F}$  se comporta para as translações.

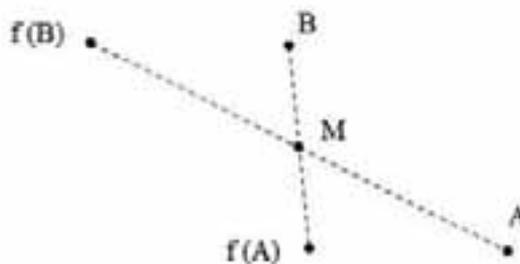


Figura 6: Simetria Central de centro  $M$ .

**Lema 3.2** *Sejam  $f$  uma translação diferente da identidade e  $A, B \in \mathcal{E}$  dois pontos quaisquer. Então,  $\mathcal{F}(A, B) = 0$ .*

*Prova:* Seja  $M$  o ponto médio do segmento  $[A, f(B)]$ , que também é ponto médio do segmento  $[f(A), B]$ . Considere-se ainda  $\theta$ , a rotação de centro  $M$  e amplitude  $\pi$ . Sendo uma isometria positiva,  $\theta$  preserva os ângulos e a sua orientação, donde  $\angle Af(B)f(A) = \angle \theta(A)\theta(f(B))\theta(f(A)) = \angle f(B)AB$  e portanto concluímos que  $\mathcal{F}(A, B) = 0$ .

Diz-nos este lema que, independentemente da translação tomada e dos pontos escolhidos,  $\mathcal{F}$  toma sempre o mesmo valor. É um resultado forte, pois só pedíamos que  $\mathcal{F}$  fosse constante para cada translação, mas obtivemos mais: é constante igual a 0 para todas! Arranjamos assim a tal quantidade angular invariante, ficando só a faltar a sua relação final com o problema. Não falta muito. De facto,  $\mathcal{F}$  é a ponte para a margem do Teorema do Arco Capaz, o que permite demonstrar o teorema 3.1 assim:

*Prova:* Usando o lema anterior, para um ponto genérico do plano,  $X$ , temos que

$$\mathcal{F}(X, Q) = 0 \Leftrightarrow \angle XPf(X) = \angle PXQ.$$

Pelo Teorema do Arco Capaz, concluímos então que  $\mathcal{L}_\alpha = C_\alpha$ .

A função  $\mathcal{F}$  resolve o nosso problema no caso das isometrias positivas, pois, como veremos, sobre certas condições, é também constante quando  $f$  é uma rotação.

#### 4. ROTAÇÕES

Nesta secção, veremos o caso em que  $f$  é uma rotação de ângulo  $\theta$  (no intervalo  $]0, 2\pi[$ ) em torno de um centro  $O$ . Deixamos ao cuidado do leitor a análise dos lugares  $\mathcal{L}_\alpha$  quando o centro da rotação é o próprio ponto  $P$ . Assumimos então, de agora em diante, que é diferente, e uma vez que  $d(O, P) = d(O, Q)$  tem-se também  $O \neq Q$ . Relembro o leitor que  $Q = f^{-1}(P)$ .

**Teorema 4.1** *Nas condições do problema 1.2, se  $f$  for uma rotação definida como acima, o lugar geométrico  $\mathcal{L}_\alpha$  é o arco capaz  $C_{\alpha-\theta}$ .*

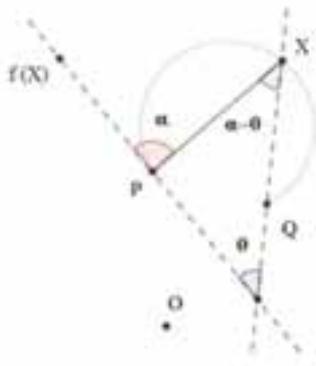


Figura 7: Arco Capaz  $C_{\alpha-\theta}$ .

A figura acima sugere uma situação possível e também uma possível linha de prova: é verdade que a imagem de uma reta por uma rotação é outra vez uma reta, e ainda que o ângulo entre estas está bem relacionado com o ângulo de rotação. Por exemplo, na figura é exatamente igual ao ângulo de rotação, pois tomamos uma rotação de ângulo inferior a  $\frac{\pi}{2}$ . Haveria contudo certos cuidados a tomar no caso geral, e dispenso-me de os tomar aqui, pois seguiremos por outra via. Pretendemos, à semelhança da secção anterior, avaliar a função  $\mathcal{F}$ . Eis a resposta:

**Lema 4.2** *Sejam  $f$  uma rotação de ângulo  $\theta$  em torno de  $O$ , e  $A, B \in \mathcal{E}$  dois pontos tais que  $A \notin \{B, f(B)\}$ . Então  $\mathcal{F}(A, B) = \theta$ .*

Tal como atrás, a função  $\mathcal{F}$  é também constante se fixarmos a rotação e considerarmos que  $A \notin \{B, f(B)\}$ , pois de outro modo seria  $\mathcal{F} = 0$ . Contudo, aqui a constante depende da rotação, e transparentemente! Antes de seguirmos para

a demonstração deste lema, deve o leitor recordar-se das seguintes duas identidades: dados quatro pontos distintos dois a dois  $A, B, C, D$ , no plano, valem

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 0 \quad (1)$$

$$\angle ADB + \angle BDC + \angle CDA = 0. \quad (2)$$

Talvez possa ser útil pegar num papel e desenhar os pontos, por exemplo um quadrilátero direitinho  $ABCD$  e uma disposição  $A'B'C'D'$  tal como abaixo.

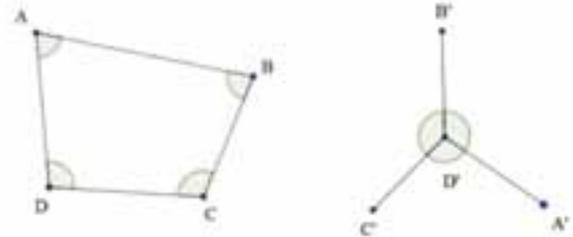


Figura 8: Identidades

Por exemplo, no caso da segunda identidade, podemos imaginar um observador em  $D'$  a olhar para  $A'$ . Seguidamente, roda sobre si próprio de modo a olhar para  $B'$ : rodou  $\angle A'D'B'$ . Repetíamos o argumento mais duas vezes, de acordo com a identidade, e no final o observador ficava a olhar para  $A'$  outra vez. No total, é como se não tivesse rodado, ou rodado 0 radianos. Passamos então à demonstração do lema.

*Prova:* Considerando, na primeira identidade, os pontos  $O, B, A, f(B)$ , e na segunda, os pontos  $O, A, f(A), f(B)$ , temos, respetivamente,

$$\angle OBA + \angle B A f(B) + \angle A f(B) O + \angle f(B) O B = 0$$

$$\angle O f(B) A + \angle A f(B) f(A) + \angle f(A) f(B) O = 0.$$

Somando as duas equações, e fazendo algumas observações convenientes, tais como

$$\angle f(A) f(B) O = -\angle O f(B) f(A) = -\angle OBA$$

donde procede o cancelamento de alguns termos, ou  $\angle f(B) O B = -\theta$ , concluímos, como queríamos, que  $\mathcal{F}(A, B) = \theta \dots$  exceto se tivermos verificado que os pontos são distintos 2 a 2! De facto, não têm de ser, mas a hipótese exigida no lema de que  $A \notin \{B, f(B)\}$  deixa apenas como trabalho extra, a verificação quando  $A = O$  ou  $B = O$ , o que não deve constituir dificuldade alguma para o leitor.

Concluímos a prova do teorema 4.1 analogamente ao caso das translações,

*Prova:* Na notação do lema anterior, para cada ponto  $X \notin \{Q, P\}$  do plano, temos  $\mathcal{F}(X, Q) = \theta$ , ou seja,

$$\angle XPf(X) - \theta = \angle PXQ$$

Portanto, pelo Teorema do Arco Capaz,  $\mathcal{L}_\alpha = C_{\alpha-\theta}$ .

A título de curiosidade, deixo como corolário o caso particular que motivou todo o artigo, precisamente aquele em que consideramos  $\alpha \in \{0, \pi\}$  conjuntamente, pois isto traduz a colinearidade em causa.

**Corolário 4.3** *Dados 2 pontos distintos  $O, P$  e uma rotação  $f$  de ângulo  $\theta$  e centro  $O$ , o lugar geométrico dos pontos  $X$  tais que  $X, P$  e  $f(X)$  são colineares é:*

- a reta  $PQ$ , se  $\theta = \pi$ ;
- a circunferência que passa por  $P, O$  e  $Q$ , caso contrário;

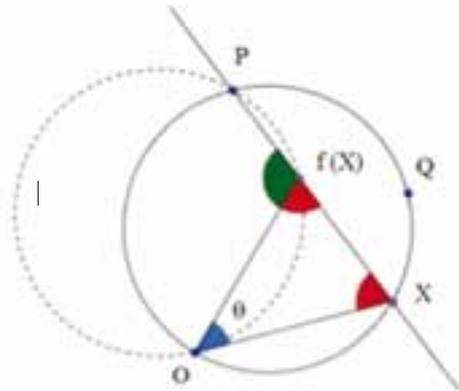


Figura 9: Ilustração do corolário para  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Observe-se que o nosso lugar procurado é, em virtude do teorema 4.1, justamente  $C_{-\theta} \cup C_{\pi-\theta}$ . A razão pela qual estas duas curvas formam ou uma circunferência ou a reta  $PQ$  é precisamente porque  $(\pi - \theta) - (-\theta) = \pi$  condição necessária e suficiente para o propósito:  $C_\alpha$  e  $C_\beta$  formam ou uma circunferência ou a reta  $PQ$  se e somente se  $\alpha - \beta = \pi$ .

## 5. REFLEXÕES

No caso das reflexões simples, agora no mundo das isometrias negativas, vamos obter lugares geométricos de um tipo diferente: porções de ramos de hipérbolas equiláteras. Para o determinarmos, vamos usar as técnicas da geometria analítica. No referencial cartesiano  $xOy$ , supomos que  $f$  é a reflexão sobre a reta  $r$  que, sem perda de generalidade, su-

mos ser o eixo dos  $xx'$ s, e que o ponto  $P$  é o ponto de coordenadas  $(0, 1)$ . Com esta notação, a reflexão em  $r$  é a aplicação  $f(x, y) = (x, -y)$ .

**Teorema 5.1** *Nas condições do problema 1.2, se  $f$  for uma reflexão simples definida como acima, o lugar geométrico  $\mathcal{L}_\alpha$  está contido numa hipérbole equilátera que passa por  $P$  e  $Q$ .*

Uma descrição mais precisa de  $\mathcal{L}_\alpha$  vai ser dada mais adiante em termos analíticos. Para relacionar algebricamente o ângulo  $\alpha$  com a posição dos pontos de  $\mathcal{L}_\alpha$ , optaremos pela fórmula do produto escalar:

$$\langle \vec{PX}, Pf(\vec{X}) \rangle = |\vec{PX}| \cdot |Pf(\vec{X})| \cdot \cos(\alpha). \quad (3)$$

Fixado  $\alpha$  e o ponto  $P$ ,  $\mathcal{L}_\alpha$  estará contido no conjunto dos pontos que satisfazem a equação 3. Devido ao facto de a função cosseno ser par, a equação 3 contém não só  $\mathcal{L}_\alpha$  como também  $\mathcal{L}_{2\pi-\alpha}$ . Por conveniência computacional, trabalharemos antes com o quadrado desta equação que incluirá também  $\mathcal{L}_{\pi-\alpha}$  e  $\mathcal{L}_{\pi+\alpha}$ . Com isto em mente, passamos à demonstração do teorema acima.

*Prova:* Seja  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  um ponto genérico de  $\mathcal{L}_\alpha$ . Definindo  $k = \cos(\alpha)$ , o quadrado de (3) traduz-se em (verificar!)

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 = k^2(x^2 + (y - 1)^2)(x^2 + (y + 1)^2). \quad (4)$$

Podemos simplificar a equação acima relembrando a **identidade de Lagrange**, da Teoria dos Números:  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ , para  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Assim, a equação (4) traduz-se em

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 = k^2[(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2]. \quad (5)$$

Há um caso na equação (5) que merece uma menção especial. Se  $k^2 = 1$ , ou seja, se  $\alpha \in \{0, \pi\}$ , esta reescreve-se como  $4x^2y^2 = 0$ . Portanto, aqui o conjunto solução é constituído pelos eixos coordenados dos  $xx'$ s e dos  $yy'$ s:  $\mathcal{L}_0$  consiste no eixo dos  $xx'$ s e no segmento  $[PQ]$  e  $\mathcal{L}_\pi$  no eixo dos  $yy'$ s, excluindo este último segmento. Nos restantes casos, (5) admite uma forma equivalente mais conveniente,

$$(x^2 - 2 \cot(\alpha)xy - y^2 + 1)(x^2 + 2 \cot(\alpha)xy - y^2 + 1) = 0.$$

Pela lei do anulamento do produto, resta-nos verificar quando os fatores se anulam. Sem nos determos mais nos cálculos subsequentes, informamos apenas que as equações resultantes conduzem efetivamente a hipérbolas equiláteras. Pode verificar-se que elas são simétricas relativamente ao eixo dos  $xx'$ s, ambas contendo os pontos  $P$  e  $Q$ , como a

figura 10 ilustra. Podemos investigar ainda em qual das hipérbolas o nosso lugar  $\mathcal{L}_\alpha$  assenta. É deixado ao cuidado do leitor verificar que se trata da hipérbole  $\mathcal{H}_\alpha$  de equação  $x^2 + 2 \cot(\alpha) - y^2 + 1 = 0$ , sendo que:

- se  $\alpha \in ]0, \pi[$ ,  $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{H}_\alpha \cap (Q_2 \cup Q_4)$ ;
- se  $\alpha \in ]\pi, 2\pi[$ ,  $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{H}_\alpha \cap (Q_1 \cup Q_3)$ , onde  $Q_i$  designa o  $i$ -ésimo quadrante.

Com isto, quase concluímos o nosso estudo do problema 1.2 para o caso das reflexões. Faltaria ver a situação na qual o ponto  $P$  pertence à reta  $r$ , caso que deixamos como exercício verificar que o lugar procurado é em geral retilíneo (qual?...).

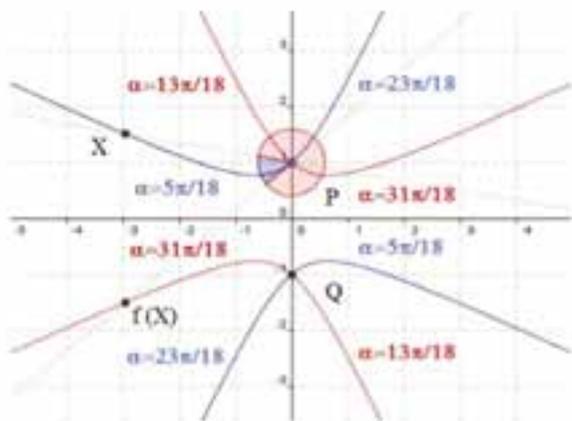


Figura 10: Os 4 lugares  $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{\pi-\alpha}, \mathcal{L}_{\pi+\alpha}, \mathcal{L}_{2\pi-\alpha}$

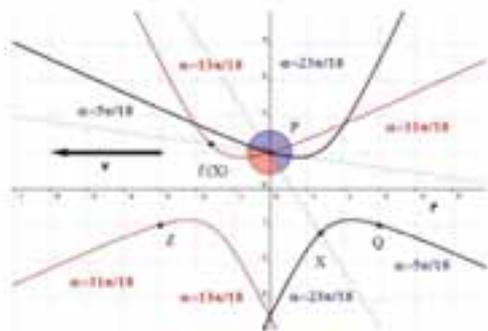


Figura 11: Os 4 lugares  $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{\pi-\alpha}, \mathcal{L}_{\pi+\alpha}, \mathcal{L}_{2\pi-\alpha}$

## 6. REFLEXÕES DESLIZANTES

Este caso é muito semelhante ao anterior, pelo que o apresentaremos resumidamente. Uma reflexão deslizante  $R_d$  sobre uma reta  $r$  é a composta  $T \circ R$  de uma reflexão (simples)  $R$ , sobre  $r$ , seguida de uma translação  $T$  de vetor  $\vec{v} = (a, b)$ , não nulo, segundo a direção de  $r$ . Mais uma vez, se supusermos, sem perda de generalidade, que  $r$  é o eixo dos  $xx'$ , e portanto,  $\vec{v} = (s, 0)$ ,  $s \neq 0$ , podemos descrever a reflexão deslizante como a aplicação  $f(x, y) = (x + s, -y)$ .

**Teorema 6.1** Nas condições do problema 1.2, se  $f$  for uma reflexão deslizante definida como acima, o lugar geométrico  $\mathcal{L}_\alpha$  está contido numa hipérbole equilátera que passa por  $P$  e  $Q$ .

Usando uma mudança de coordenadas apropriada do nosso referencial, dada por  $x' = x + \frac{s}{2}$  e  $y' = y$ , poderíamos proceder literalmente como na secção anterior e obter o mesmo tipo de conclusões. Assim, apresento aqui apenas uma figura ilustrativa do resultado final (figura 11).

O lugar  $\mathcal{L}_\alpha$  está contido numa porção de hipérbole, desta vez transladada da posição canónica que, de resto, tem uma descrição semelhante às hipérbolas do caso anterior.

## 7. BIBLIOGRAFIA

Na fonte abaixo mencionada, o leitor pode encontrar com mais detalhe alguns dos resultados deste artigo, em particular, o Teorema do Arco Capaz e a classificação das isometrias do plano. É um livro igualmente recomendável para muitos outros temas interessantes sobre geometria elementar, apresentado num estilo pedagógico.

[1] Araújo, P. V.: *Curso de Geometria*, Gradiva Publicações, 1998.

## 8. AGRADECIMENTOS

Como referi no início deste texto, este trabalho foi realizado durante a licenciatura em Matemática, no âmbito de uma bolsa da Fundação Calouste Gulbenkian, sob a orientação do Professor António Guedes de Oliveira, que me propôs o corolário 4.3 e me sugeriu que o generalizasse, encorajando-me a escrever este artigo. Queria agradecer também à Professora Helena Mena Matos pelo tempo de que dispôs para efetuar uma revisão do artigo, com sugestões que ajudaram a torná-lo mais apresentável. Finalmente, queria agradecer à Comissão Editorial da *Gazeta de Matemática* pelas sugestões que levaram o artigo à sua forma final. Por tudo, o meu obrigado.

### SOBRE O AUTOR

**David Mesquita** é mestrando em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, onde concluiu também a licenciatura. Foi bolseiro do programa Novos Talentos em Matemática, da Fundação Calouste Gulbenkian, em 2009/2012.

# TI-*n*spire™ CX

Matemática e Ciências agora a

# CORES!

Visualize conceitos matemáticos interactivamente e a cores com as novas unidades portáteis TI-*n*spire CX. Estabeleça ligações com o mundo real utilizando as suas próprias imagens.

Com **todas as funcionalidades da tecnologia TI-Nspire** e ainda:

- **Ecrã retro-iluminado e a CORES**
- **Bateria recarregável incluída**
- **115 MB de memória total**
- **Software de computador incluído para Professores e Alunos.**

Mais informações em

**[education.ti.com/portugal](http://education.ti.com/portugal)**



**TI-Nspire CX autorizado  
nos Exames Nacionais do  
Ensino Secundário**

 **TEXAS  
INSTRUMENTS**

A Sua Experiência. A Nossa Tecnologia. O Sucesso Dos Seus Estudantes.



ISABEL S. LABOURIAU  
Universidade do Porto  
[islabour@fc.up.pt](mailto:islabour@fc.up.pt)

ISABEL LABOURIAU CONVERSA COM

## JORGE BUESCU

Jorge Buescu não precisa ser apresentado aos leitores da *Gazeta de Matemática*. Esta conversa sobre as suas preocupações com a matemática em Portugal serve como aperitivo para o seu mais recente livro.

### APRESENTAÇÃO

JORGE BUESCU é meu “irmão matemático” – tivemos o mesmo orientador no doutoramento – mas Jorge saiu mais ao “pai” e, além de investigação, faz divulgação da matemática que os leitores da *Gazeta* conhecem bem. Conversar com ele é um prazer. Divagamos sobre vários temas e os assuntos parecem nunca terminar. Concordamos sobre muitas coisas, mas não sobre a quantidade adequada de gerúndios, nem sobre ortografia. Nesta conversa, cada um de nós usa aquela em que se sente mais confortável, o que é uma boa maneira de representar um sotaque lisboeta em conversa com um sotaque carioca.

### CONVERSA

ISABEL Uma vez F. Hirzebruch (que infelizmente morreu em junho deste ano) me perguntou quem eram os grandes nomes da matemática em Portugal. Eu respondi “Pedro Nunes” e expliquei quem era. Do século XX dei mais uns exemplos. Ele então perguntou o que tinha acontecido nos intervalos, por que eram tão poucos? E eu fiquei baralhada para responder. Acho que você sabe alguma coisa sobre esses intervalos.

JORGE Pedro Nunes foi um grande matemático, o maior da Península Ibérica no século XVI, mas foi uma singularidade. Não foi produto de uma plêiade de matemáticos, nem dei-

xou escola. Depois dele, a Universidade esteve 30 anos sem cátedra de Matemática. De resto, a relação dele com os Descobrimientos tem sido, por ingenuidade ou por ideologia, muito mal interpretada: ele foi um cientista puro, e as suas maiores descobertas matemáticas (os crepúsculos, a descrição da curva loxodrómica, o nócio) são completamente irrelevantes para a navegação. Muito provavelmente, Nunes nunca pôs o pé num navio. O que ele fez foi matemática pura, tal como nós fazemos. Se souberes que um teorema teu tem uma aplicação prática na indústria ou na produção, ficarás satisfeita, claro. Mas a tua motivação era intelectual, era quebrar aquela noz matemática, dar resposta à questão matemática. O teu interesse intelectual provavelmente terminou quando acabaste a demonstração, escreveste QED e mandaste o artigo para publicação. É hoje claro que Pedro Nunes funcionava assim – como um matemático.

ISABEL Um amigo dos meus pais estudava um inseto que transmite uma doença tropical e dizia “Eu faço investigação pura em um animal aplicado”. Acho que é isso que você quer descrever.

Sobre o Pedro Nunes – tanto quanto sei, ele foi mesmo uma singularidade, como matemático, mas não foi uma singularidade cultural: ele viveu em um período de florescimento cul-

tural, em que além de descobrimentos acontecia muita coisa. Minha ignorância ainda dá para dar como exemplo a botânica (Garcia da Orta) e a literatura. Em épocas assim, quem tem potencial para fazer bem alguma coisa, tem uma chance alta de ter sucesso.

**JORGE** Sim, embora a matemática tenha uma característica altamente diferenciadora: o seu carácter cumulativo. É possível ser poeta sem ter lido os clássicos, é possível estudar escrupulosamente a História do século XIX tendo apenas uma vaga ideia sobre as invasões bárbaras, é possível ser um bom músico desconhecendo Bach (aliás, J. S. Bach foi virtualmente esquecido após a sua morte, tendo sido redescoberto por Mendelssohn no século XIX, mas não deixaram de surgir génios como Mozart ou Beethoven!).

**ISABEL** Acho que essa história do esquecimento de Bach é um mito urbano. Li que ele continuou a ser conhecido. Todos estudavam Bach como exercício de execução e de contraponto, mas não o tocavam em público. Como agora nos conservatórios estuda-se Czerny – e às vezes o velho João Sebastião recebe o mesmo tratamento. A “redescoberta” de Mendelssohn foi mostrar que a música de Bach continuava a ser um grande espetáculo. Mas isso não invalida o seu argumento.

**JORGE** No entanto, não é possível integrar fracções racionais sem saber dividir polinómios, nem fazê-lo sem saber a regra de Ruffini, e por aí abaixo até ao algoritmo da divisão (inteira!). É tão errado, a tantos níveis, dizer-se que os meninos [do 1.º ciclo] já não precisam de aprender a dividir porque agora há calculadoras!

**ISABEL** E podem até não aprender a dividir (eu não concordo, mas, enfim, suponhamos que possam), mas não podem deixar de aprender a pensar e a lidar com a abstracção. Os meninos precisam disso como formação do cidadão, e todos precisamos que isso aconteça para termos a possibilidade de ter cientistas, em particular para criar o ambiente que facilita ter bons matemáticos.

**JORGE** A inexistência de matemática de altíssimo nível em Portugal até ao século XX (com duas excepções, Anastácio da Cunha e Gomes Teixeira, que são apenas mais duas estrelas

cadentes que aterraram aqui) é reflexo, por um lado, da mediocridade histórica do sistema educativo e, por outro do facto de essa mediocridade ser em matemática implacavelmente cumulativa e indisfarçável. É esta a tese essencial do meu ensaio “Matemática em Portugal: uma questão de Educação”. Mas o atraso é histórico e impregna todo o sistema de ensino. Em Portugal, em 1881, a taxa de



Jorge Buescu

de analfabetismo era 80%; na Alemanha, Inglaterra, Noruega e Dinamarca, variava entre 0% e 1%. A 4.ª classe só se tornou universalmente obrigatória há meio século!

Muitas vezes me dizem que Portugal tem um problema com a matemática. Eu acho que a matemática só é um problema para todos porque é a ponta mais visível do icebergue. Todos os alunos têm Matemática até ao 9.º ano, e todos, excepto os de Humanidades, até ao 12.º ano. O verdadeiro drama não está na Matemática- disciplina, mas na Educação.

**ISABEL** “Ter Matemática” não é o mesmo que “aprender matemática”, mas pelo menos é a possibilidade de aprender.

**JORGE** É verdade. Todos devem aprender matemática! Mas não podemos ceder à tentação do facilitismo se queremos atingir a excelência. O talento matemático é algo que vai para além da mera aprendizagem. Por um lado, está distribuído de forma igualitária do ponto de vista geográfico. Não é, à partida por se ser filho de um pastor ou ter nascido nos antípodas que se é mais ou menos dotado *a priori*. Mas atingir a excelência matemática exige cumulativamente várias condições: um ensino não-superior exigente para todos, acoplado a um sistema de detecção e selecção precoce dos verdadeiros talentos, a quem será dada uma preparação específica para nutrir adequadamente o talento.

ISABEL A matemática nisso tem uma vantagem: é mais independente do contexto cultural. Música ou literatura, por exemplo, são mais dependentes de contexto.

JORGE Dou no meu ensaio o exemplo das Medalhas Fields de 2010. Em 2010 os distinguidos foram o francês Cédric Villani, o vietnamita de escola francesa Ngô Báu Châu, o russo Stanislav Smirnov e o israelita Elon Lindentrauss. A sua origem revela bem que o talento matemático não é genético, parecendo, pelo contrário, uniformemente distribuído do ponto de vista geográfico (Vietname, Rússia, França, Israel).

ISABEL Bem, o seu exemplo não é tão uniforme, são todos do Hemisfério Norte, mas claro que estão muito espalhados pelo planeta.

JORGE O verdadeiro talento matemático tem de ser detectado muito cedo e treinado de forma muito específica com métodos de *élite* para se conseguir resultados muito excepcionais. Isso aconteceu com todos os medalhados de 2010. Em França, onde estudaram Villani e Châu, os alunos especialmente talentosos são recrutados muito cedo pelas chamadas *classes préparatoires*, programas de *élite* para jovens dotados. Diz Villani: “Há um ‘antes’ e um ‘depois’ das classes preparatórias. Aprende-se muitíssimo, de forma extremamente intensa. Guardo uma recordação fantástica dos preparatórios; o que se trabalhava! Era muito motivador.” Lindentrauss é um graduado do Talbiot, um programa de *élite* da Defesa Israelita para jovens, que selecciona 50 cadetes entre mais de 10.000 candidatos que tenham demonstrado talento excepcional em ciências e matemática. E Smirnov é um produto da escola russa, que desde os tempos da URSS sempre esteve na vanguarda da detecção e do desenvolvimento precoce do talento matemático, por exemplo, com os clubes matemáticos especiais para jovens criados por Andrei Kolmogorov e Dmitri Egorov no início do século XX.

ISABEL Havia a escola secundária criada por Kolmogorov, que acho que ainda existe. E o Vietname teve por muito tempo uma escola especial para estudantes que gostavam de matemática. Olhando para os resultados, acho que ainda deve ter.

Voltando à História, não sei o que se passou com Anastácio da Cunha, mas Gomes Teixeira também não deixou escola, que eu saiba. Logo a seguir, começou alguma efervescência matemática na primeira metade do século XX, que foi interrompida de repente. Novo crescimento a partir dos anos 70...

JORGE Anastácio da Cunha teve um percurso pessoal muito complexo, morrendo aos 39 anos. Foi afastado da universidade e a sua obra, em que antecipava Lagrange e Cauchy, foi escrita em português, desconhecida da Europa culta e apenas traduzida e publicada em Paris em 1811, pelo que ele foi infelizmente quase desconhecido pela comunidade científica. Gomes Teixeira, entre os séculos XIX e XX, não deixou escola directa, mas deixou sementes, nomeadamente mostrando com o exemplo a importância da internacionalização para a profissão (mais de 100 publicações internacionais!) e fundando o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, a primeira publicação científica portuguesa. E num certo sentido foi o precursor da simultaneamente brilhante e dramática Geração de 40, a que dedico todo um capítulo do ensaio.

ISABEL Ele era tão internacional que o seu “*Traité des Courbes Spéciales Remarquables*”, de 1908, foi reeditado em 1971 pela Chelsea e em 1995 pela Jacques Gabay.

De modo que, mesmo com tantas interrupções, agora temos matemáticos. Quantos matemáticos ativos há hoje em Portugal? No meio dos anos 80, eu tinha uma estimativa otimista de 100 matemáticos, agora há departamentos inteiros desse tamanho, com a maioria ativa em investigação. Faz-se matemática de primeira, e até exportamos matemáticos, mas muitas outras coisas não mudaram.

JORGE É muito difícil fazer uma estimativa! Recordo-me de que no final dos anos 90 a EMS<sup>1</sup> (que faz agora 20 anos) tentou estimar o número de matemáticos activos na Europa dando uma definição de matemático activo no ano  $n$  uma pessoa que nos cinco anos precedentes tivesse publicado pelo menos três artigos revistos nos *Mathematical Reviews* ou *Zentralblatt für Mathematik* (ou ambos, evidentemente). Essa definição seria implementada pelas sociedades científicas de cada país e a contabilização feita pela EMS. Tanto quanto sei, no entanto, esse projecto nunca chegou a ser concretizado, o que dificulta estas estimativas.

ISABEL A IMU (International Mathematical Union) publicava periodicamente um “World Directory of Mathematicians”, feito consultando academias de ciências de vários países e usando uma definição como essa, que foi variando com o tempo, e que permitia uma pequena percentagem de exceções. Lembro que eu tentei entrar para a lista quando era muito principiante e os artigos estavam aceites, mas não publicados. Ainda tenho a carta em que me recusaram a entrada [risadas]. Depois de 2002 a IMU desistiu disso, porque a lista estava ficando enorme e não valia a pena. Substituiu a lista por uma recomendação de que todo matemático tenha uma página *web*<sup>2</sup>. Eles têm também uma lista de endereços de páginas *web* de matemáticos<sup>3</sup>. Só que a lista é de entrada voluntária, de modo que é muito pequena: 2017 pessoas, 27 de Portugal. Eu estou, você não está! A verdade é que essas listas ficaram menos importantes, porque é mais fácil *googlar* o colega para encontrar a página.

JORGE Que vergonha! Eu estava no World Directory of Mathematicians, e agora não estou nessa! Tenho de corrigir isso depois da publicação desta entrevista! Nestas condições, uma estimativa só pode ser uma *educated guess*. No entanto, há uma verdade incontornável: nas duas últimas décadas foram realizados progressos extraordinários no ensino e na prática da ciência em Portugal. Houve em particular um grande investimento na profissionalização e na internacionalização da ciência. Consultando as Mathematical Reviews, as páginas de muitos dos nossos departamentos de matemática, e tendo em conta a fracção de matemáticos portugueses que, por várias razões, optam por não regressar (dois dos mais bem-sucedidos, a Ana Rita Pires, que está em Cornell, e o André Neves, que está no Imperial College, são oradores convidados do ciclo “Matemática, a Ciência da Natureza” a decorrer na Fundação Gulbenkian até dezembro), a minha estimativa actual seria 300. Como no filme baseado no *comic* do Frank Miller!

No entanto, temos de ser prudentes. Tudo isto é muito recente e frágil. E de facto estamos ainda longe de um patamar superior de qualidade e visibilidade para a comunidade matemática portuguesa: vencer grandes prémios internacionais, vê-la sistematicamente representada nos corpos editoriais das melhores publicações e júris... Esse é um salto qualitativo que, se seguirmos as melhores práticas de ensino e investi-

gação, talvez possa ser dado pela próxima geração. Talvez se na altura ainda houver reformas, possamos assistir a isso tomando uma cerveja, Isabel?

ISABEL Acho que já escapamos do *karma* dos 300 espartanos. Meu chute é à roda dos 500 para residentes em Portugal. Mas claro que não espero que o número quintuple ou mesmo triplique nos próximos 30 anos. Acho que não vou estar em condições de tomar cerveja nessa altura, é melhor irmos tomando as cervejas sem esperar tanto. Esse crescimento não foi só em Portugal, como se vê pela desistência da IMU, mas acho que aqui foi especialmente grande.

JORGE Sem dúvida, e essa é uma falácia que muitas vezes se ignora ao apresentar estatísticas oficiais de crescimento em bruto. Registrar a evolução em Portugal ignorando que o mundo exterior também cresceu é um erro básico. Numa estimativa rápida, verifiquei que entre 1990 e 2010 o número de publicações matemáticas com autores portugueses cresceu por um factor de 5. Mas nesse período o número de publicações matemáticas a nível mundial cresceu por cerca de um factor de 2 (fonte: Maths Reviews). Portanto o crescimento relativo foi apenas de um factor de 2,5. Acredito que números correspondentes utilizando outros indicadores sejam semelhantes. Um crescimento real, mas bastante longe da euforia anunciada oficialmente.

ISABEL O tal salto qualitativo precisa ter base estatística para acontecer, e agora começamos a ter. O perigo são as interrupções.

JORGE Sim, continuamos com fragilidades estruturais pre-ocupantes, uma das quais é a dependência quase total da actividade de investigação matemática do mundo académico, e portanto de vontades políticas e económicas, e outra, a virtual inexistência de matemática aplicada e/ou industrial. Uma interrupção por falta de vontade política pode ter efeitos dramáticos.

<sup>1</sup> European Mathematical Society

<sup>2</sup> <http://www.mathunion.org/MPH-EWDM/>

<sup>3</sup> <http://www.mathunion.org/ewdm/memberlist.php>



## EXPOSIÇÃO ITINERANTE CELEBRA 30 ANOS DE OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

A exposição “Olimpíadas Portuguesas de Matemática - 30 anos”, inaugurada na final nacional das 30.<sup>as</sup> OPM no passado mês de março, está agora disponível para requisição de escolas, bibliotecas ou outras entidades que promovam a divulgação científica e que pretendam dinamizar atividades para incentivar o ensino e a aprendizagem da matemática. Esta exibição faz uma retrospectiva dos 30 anos de existência das OPM, que envolvem cerca de 55 mil participantes todos os anos, assinalando os momentos mais marcantes da sua história e os pontos altos atingidos pelos olímpicos portugueses aquém e além fronteiras. A exposição apresenta também uma componente mais prática, com um conjunto de problemas matemáticos com diferentes graus de dificuldade usados em várias edições das OPM e das diversas competições internacionais (Olimpíadas Internacionais, Ibero-Americanas e CPLP). As resoluções dos problemas podem ser consultadas nos sites da SPM e das OPM. Além da exposição dedicada às OPM, a SPM disponibiliza mais duas exposições itinerantes: “A Matemática de Escher” e “Medir o Tempo, Medir o Mundo, Medir o Mar”. Mais informações sobre as exposições da SPM em [www.spm.pt](http://www.spm.pt).

## GAZETA DE MATEMÁTICA TEM NOVO SITE

A *Gazeta de Matemática* tem um novo site. Com um grafismo renovado e um arquivo mais atualizado, o site [www.gazeta.spm.pt](http://www.gazeta.spm.pt) permite realizar pesquisas de uma forma simples e eficaz por artigo, autor ou secção. Os conteúdos disponibilizados no novo portal poderão ser consultados por todos os utilizadores, com exceção das edições mais recentes cujo acesso é reservado aos assinantes da revista impressa. O objetivo central do site é disponibilizar, no futuro, todos os números da *Gazeta de Matemática*, desde a sua primeira edição.



## **EQUIPA PORTUGUESA NA ARGENTINA PARA PARTICIPAR NAS OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS**

Francisco Andrade, João Lourenço, Luís Duarte, Miguel Moreira, Miguel Santos e Nuno Arala Santos são os seis olímpicos que representam Portugal nas Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO), que este ano se realizam em Mar del Plata, na Argentina, entre 8 e 15 de julho. A equipa é a mais jovem de sempre, com dois alunos do 9.º ano, um do 10.º, dois do 11.º e um do 12.º ano. Os participantes foram selecionados a partir de um grupo de 24 medalhados das categorias A (8.º e 9.º anos) e B (do 10.º ao 12.º ano) das 30.ªs e das 29.ªs Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM). As expectativas para a prestação da equipa são elevadas depois de Portugal ter conquistado a sua primeira medalha nas IMO no ano passado. A participação portuguesa nesta competição é organizada pela SPM, e a seleção e a preparação dos alunos está a cargo do Projecto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Em setembro, outra grande competição internacional contará com a presença de uma equipa de olímpicos portugueses: as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, que têm como país anfitrião a Bolívia.



### **BRASIL RECEBE EM JULHO A SEGUNDA EDIÇÃO DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DA CPLP**

Entre os dias 20 e 28 de julho, a cidade de Salvador, na Bahia, Brasil, recebe a segunda edição das Olimpíadas de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (CPLP). David Tavares Martins, Diana Macedo, João Rocha e Miguel Torres são os participantes que compõem a equipa portuguesa. As Olimpíadas da CPLP envolvem jovens da comunidade dos países que partilham a língua portuguesa: Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau, Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe e Timor-Leste. Esta competição dá continuidade às Olimpíadas da Lusofonia, realizadas pela primeira vez em Coimbra, em 2011, e organizadas em conjunto pela SPM e pelo Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.





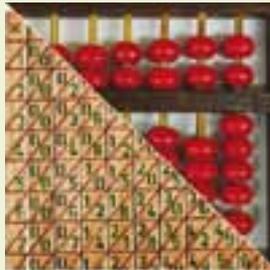
## JORGE BUESCU LANÇA MATEMÁTICA EM PORTUGAL — UMA QUESTÃO DE EDUCAÇÃO

*Matemática em Portugal - Uma Questão de Educação*, da autoria de Jorge Buescu, é o mais recente título da coleção de ensaios da Fundação Francisco Manuel dos Santos. Neste livro, Jorge Buescu parte de uma análise de alguns momentos históricos particularmente relevantes para a matemática em Portugal para demonstrar que a debilidade do ensino das ciências no nosso país tem sido o principal entrave ao sucesso luso no panorama matemático e científico. O livro está já disponível na Loja SPM. Jorge Buescu é autor de vários livros, entre os quais *Casamento e Outros Desencontros* (2011), *O Mistério do Bilhete de Identidade e Outras Histórias* (2001), *Da Falsificação de Euros aos Pequenos Mundos* (2003) e *O Fim do Mundo Está Próximo?* (2007). Para além destas obras (duas delas publicadas internacionalmente), o antigo diretor da *Gazeta de Matemática* é autor de mais de uma centena de artigos dedicados à divulgação da matemática.

### EXPOSIÇÃO “FORMAS E FÓRMULAS”: QUANDO A GEOMETRIA E A ÁLGEBRA SE UNEM

O Museu Nacional de História Natural e da Ciência da Universidade de Lisboa (MNHN-CUL) acolherá até ao dia 28 de abril de 2013 a exposição “Formas e Fórmulas”. Esta exibição mostra como imagens e conceitos da geometria e da álgebra interagem, relacionando fórmulas matemáticas com modelos geométricos, objetos de uso comum e formas de arquitetura. A instalação “Formas e Fórmulas” integra também um módulo da exposição “Imaginary”, conhecida pela sua componente lúdica e interativa.





## CICLO DE CONFERÊNCIAS “A RAIZ DO CÁLCULO”, NO MNHNCUL ATÉ DEZEMBRO

O Museu Nacional de História Natural e da Ciência da Universidade de Lisboa (MNHNCUL) tem a decorrer um ciclo de conferências de divulgação científica intitulado “A Raiz do Cálculo”. As conversas surgem a partir dos objetos históricos integrados na exposição “O Cálculo de Ontem e de Hoje” e decorrerão até ao dia 13 de dezembro. A próxima sessão decorrerá no dia 27 de setembro com o tema “Planímetros” e será apresentada por Carlos Sarrico, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL). Segue-se o tema “Calculadoras mecânicas” no dia 18 de outubro, com apresentação de Jaime Carvalho e Silva, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. Dia 15 de novembro será a vez de Carlos Albuquerque da FCUL falar sobre “O Aritmómetro” e, por último, Paulo Almeida, do Instituto Superior Técnico apresentará “Uma Folha de Papel” no dia 13 de dezembro.

## INSCRIÇÕES ABERTAS PARA O IV ENCONTRO IBÉRICO DE MATEMÁTICA

O IV Encontro Ibérico de Matemática decorrerá entre 5 e 7 de outubro na Universidade de Valladolid, Espanha. As inscrições podem ser feitas no site oficial em [www.imm4.uva.es](http://www.imm4.uva.es). Estruturado em torno de três áreas científicas: Matemática das Ciências da Vida, Álgebra Computacional e Probabilidades e Processos Estocásticos, o Encontro Ibérico é um evento conjunto da Sociedade Portuguesa de Matemática e da Real Sociedad Matemática Española. O evento configura-se assim como uma oportunidade excepcional para matemáticos portugueses e espanhóis partilharem ideias e conhecimento. As anteriores edições deste evento decorreram nas cidades de Lisboa (2007), Badajoz (2008) e em Braga (2011).

## ESCOLAS DE VERÃO NA FCT-UNL E NA FCUP PARA ALUNOS DO ENSINO SECUNDÁRIO

Os alunos que frequentem o ensino secundário e que tenham interesse pela matemática têm à sua disposição duas escolas de verão onde podem pôr à prova os seus conhecimentos sobre esta disciplina: a MatNova, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCT-UNL) e a EVMAT 2012, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Com o tema “Uma celebração da Matemática”, a Escola de Verão da FCUP decorrerá de 2 a 7 de setembro e tem inscrições abertas até dia 20 de julho. O EVMAT irá conciliar um programa científico com cursos, palestras e trabalhos de grupo que serão complementados com atividades de lazer no final de cada dia. Para se inscrever consulte o site <http://cmup.fc.up.pt/cmup/evmat/2012/>. A Escola de Verão da FCT-UNL decorrerá de 4 a 8 de Setembro. A MatNova tem como objetivo introduzir novas áreas do conhecimento matemático aos participantes, aprofundar o nível de conhecimentos de matemática adquiridos no ensino secundário e trabalhar alguns tópicos avançados. Mais informações em <http://eventos.fct.unl/matnova2012>.

## UNIVERSIDADE DO MINHO: WORKSHOP DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA E AS SUAS APLICAÇÕES

Terá lugar na Universidade do Minho, no dia 12 de setembro, uma nova edição do “*Workshop* MMNSEA 2012 – Mathematical Modelling and Numerical Simulation for Engineering Applications”. O encontro visa a apresentação e partilha de investigação nas áreas de matemática aplicada e aplicações na engenharia. Além de sessões plenárias com reconhecidos investigadores nacionais e internacionais, o *workshop* terá ainda a apresentação de *posters* que foram aceites por um comité científico internacional. A entrada é gratuita mas é necessário efetuar a inscrição no site do MMNSEA 2012 ([w3.math.uminho.pt/mmnsea2012](http://w3.math.uminho.pt/mmnsea2012)), onde está disponível informação adicional sobre este encontro.



## MATEMÁTICA SARA SANTOS DISTINGUIDA COM O PROJETO “MATHS BUSKING”

O projeto “Maths Busking”, liderado pela matemática portuguesa Sara Santos no Reino Unido, foi distinguido com uma “menção de distinção” atribuída pelo EngageU Awards, organizado pelo Oxford Internet Institute da Universidade de Oxford. Sara Santos é licenciada em Matemática pela Universidade do Porto, doutorada pela Universidade de Manchester e trabalha atualmente para a Royal Institution of Great Britain. Em declarações à agência Lusa, Sara Santos disse que “foi uma honra” receber esta distinção a par com outros dois projetos que mereceram esta menção. O Maths Busking consiste num espetáculo de animação de rua, com recurso a músicos ou artistas, que apresentam ao público, de forma divertida, o lado mais surpreendente e fascinante da matemática. Em entrevista à *Gazeta de Matemática* (n.º 165), Sara Santos falou sobre o início do “Maths Busking” e o impacto deste projeto na comunidade em que está inserida.

## FRIEDRICH HIRZEBRUCH: 1927-2012

O primeiro presidente da European Mathematical Society (EMS), Friedrich Hirzebruch, morreu aos 85 anos, segundo informa comunicado oficial da EMS. Fritz Hizebruch estudou matemática em Münster, na Alemanha e em 1956 tornou-se professor em Bonn, onde permaneceu até se reformar. Em 1980 fundou o Max-Planck-Institut für Mathematik do qual foi diretor até 1995. A sua contribuição para a matemática em geral e no seu país natal foi reconhecida com vários prémios, entre eles o da Wolf Foundation, em 1988, e a medalha de Georg Cantor da Deutsche Mathematiker-Vereinigung (Sociedade Alemã de Matemática) em 2004. A EMS considera que se perdeu um grande académico e um dos principais arquitetos da instituição, criada em 1990.



## FERNANDO CODÁ MARQUES DISTINGUIDO COM O PRÉMIO RAMANUJAN 2012

Já é conhecido o vencedor do Prémio Ramanujan 2012 para Jovens Matemáticos de Países em Desenvolvimento. Fernando Codá Marques, 32 anos, natural do Brasil, foi distinguido com o galardão pelas suas contribuições para a geometria diferencial e pela resolução de inúmeros problemas nos quais alguns matemáticos trabalham há décadas. O último e mais proeminente trabalho de Fernando Codá Marques, do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada do Rio de Janeiro, foi realizado em parceria com o matemático português André Neves, do Imperial College de Londres. Trabalharam na prova completa da Conjetura de Willmore, pré-publicada em fevereiro deste ano. De acordo com o comunicado oficial da Academia Norueguesa das Ciências e das Letras, Fernando Coda Marques irá receber o Prémio numa cerimónia a realizar em Trieste, na Itália, ainda este ano. O Prémio Ramanujan é atribuído em parceria pela International Mathematical Union, o Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics e o Niels Hendril Abel Memorial Fund.



Fotografia: Roberto Barnaba, ICTP Photo Archives

## HEIDELBERG LAUREATE FORUM PROMOVE ENCONTRO ENTRE PREMIADOS ABEL, FIELDS E TURING E JOVENS CIENTISTAS



Reunir os vencedores dos mais prestigiados prémios científicos em matemática com jovens cientistas com um percurso promissor é o objetivo do Heidelberg Laureate Forum, uma criação da Klaus Tschira Stiftung (KTS), fundação alemã para a investigação. Neste encontro anual pretende-se que os laureados com o Prémio Abel, a Medalha Fields (matemática) e o Prémio Turing (computação científica) se reúnam com a próxima geração de investigadores. “Encontrarem-se com os líderes científicos da matemática e da computação científica será extremamente inspirador e encorajante para os jovens cientistas”, afirmou, citado em comunicado oficial, Klaus Tschira, fundador da KTS, que, em parceria com o Heidelberg Institute for Theoretical Studies, promove este fórum. Esta reunião anual segue o modelo da Reunião Anual de Lindau para laureados com o Prémio Nobel, criada há 60 anos para impulsionar a geração de novas ideias. A primeira edição do Heidelberg Laureate Fórum terá lugar em setembro de 2013 na cidade de Heidelberg, na Alemanha.

SILVIA ANJOS  
Tesoureira da SPM  
[sanjos@math.ist.utl.pt](mailto:sanjos@math.ist.utl.pt)

## SPM 2010/2012 E RUMO AO FUTURO

Durante o biénio 2010/2012 a atual Direção da SPM procurou promover atividades que consolidam os três pilares de ação a que a Sociedade se propõe: Ensino, Investigação e Divulgação da Matemática.

Neste final de mandato da atual direção da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) é pertinente fazer-se um balanço da ação desenvolvida ao longo deste biénio, das dificuldades que encontrámos e dos resultados que modestamente alcançámos. Das diversas iniciativas promovidas pela SPM destacamos o Encontro Nacional da SPM em 2010, a Escola de Verão da SPM em 2011, as Tardes de Matemática, que levaram numerosas ações de divulgação a um público espalhado um pouco por todo o País, as Olimpíadas de Matemática, que celebram este ano 30 anos de existência e que superaram todas as expectativas e todos os objetivos fixados para 2011, as exposições e as publicações periódicas. Todas estas atividades vieram dar continuidade aos três pilares de ação a que a Sociedade se propõe – ensino, investigação e divulgação da matemática – consolidando-os.

Neste contexto, consideramos oportuno fazer referência à situação financeira confortável encontrada por esta direção, herdada das direções anteriores, que tentámos com sucesso preservar. Este resultado foi alcançado graças a diversos contributos, nomeadamente o pagamento atempado das quotas por parte dos sócios, os diversos apoios e subsídios recebidos de instituições públicas e privadas e a intensa ação desenvolvida pelo Centro de Formação da SPM. Este centro é atualmente o maior do País na nossa área, tendo dinamizado no ano passado cerca de 58 ações de formação acreditadas, que contaram com a participação de 1050 professores.

Os diversos aspetos positivos acima mencionados não podem, contudo, fazer-nos esquecer as dificuldades crescentes que se têm vindo a sentir, no contexto de crise económica e financeira em que vivemos atualmente, e que se traduzem no decréscimo de rendimentos da SPM, nomeadamente numa maior dificuldade em

captar subsídios. As dificuldades têm no entanto constituído um fator adicional de motivação para a procura de soluções criativas, que têm permitido manter até agora as atividades regulares da SPM e projetar as bases dessas mesmas atividades para o futuro.

Uma das situações com que, por vezes, nos temos confrontado é a necessidade de organizar e levar a cabo algumas iniciativas sem que se conheça antecipadamente todos os apoios necessários para fazer face aos custos que delas decorrem. Daí a importância cada vez maior do papel contributivo dos sócios e do esforço de todos com vista à angariação de novos sócios entre colegas, familiares e amigos.

Uma das atividades que consideramos muito relevantes no âmbito da ação da SPM é a das publicações periódicas, por constituírem um veículo importante de comunicação entre a comunidade matemática e o público em geral. Nesse sentido, não nos poupámos a esforços para garantir a sua manutenção. Salientamos que, de entre as publicações regulares da SPM (*Gazeta de Matemática*, *Boletim da SPM*, *Jornal de Mathematica Elementar* e *Portugaliae Mathematica*), as duas primeiras são distribuídas gratuitamente a todos os sócios. Para obviar estes custos, uma vez que é difícil encontrar apoios que ajudem a financiá-las, temos procurado obter publicidade paga nas referidas revistas e angariar novos assinantes, um esforço no qual contamos com a ajuda de todos os sócios e colaboradores da SPM.

Da experiência vivida ao longo deste biénio e do conhecimento das perspectivas do futuro próximo, estamos conscientes das dificuldades que certamente a Sociedade irá encontrar, mas estamos também convictos de que a motivação e a generosidade de toda a comunidade matemática para com a SPM ajudarão a nossa Sociedade a ultrapassar da melhor forma os novos desafios.