

N. 0169

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXIV | Mar. 2013 | 4,20€

Observar Golfinhos... com Trigonometria

PEDRO DUARTE, TELMO PEIXE
E TERESA CAISSOTTI

Sobrevoando Cumes e Vales

PEDRO DUARTE E ALESSANDRO MARGHERI

Localização de Postos de Vigia de Fogos Florestais e Outras Coisas

JORGE ORESTES CERDEIRA

Imagens Digitais e Matrizes

DIRCE UESU PESCO E HUMBERTO JOSÉ BORTOLOSSI



2013
ESCOLA
DE VERÃO DE
MATEMÁTICA

Matemática do Planeta Terra

5 e 7 Setembro
MNHNC Lisboa
Museu Nacional de História
Alameda da Universidade



36 SOBREVOANDO
CUMES E VALES



03 ATRACTOR | JOGOS ISOMORFOS



44 IMAGENS DIGITAIS
E MATRIZES

28 LOCALIZAÇÃO
DE POSTOS DE
VIGIA DE FOGOS
FLORESTAIS E
OUTRAS COISAS



49 CONVERSA COM... GRACIANO OLIVEIRA

- 02 EDITORIAL** | *Rogério Martins*
- 03 ATRACTOR**
Jogos isomorfos
- 07 RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*
Viagens na nossa Terra
- 09 CANTO DÉLFICO** | *Alexander Kovačec*
Quando fará a SPM anos num domingo?
- 13 NA LINHA DE FRENTE** | *Fabio Chalub*
O logaritmo dos estímulos
artigo de capa
- 16 OBSERVAR GOLFINHOS...
COM TRIGONOMETRIA**
Pedro Duarte, Telmo Peixe e Teresa Caissotti
- 23 APANHADOS NA REDE** | *António Machiavelo*
O que é realmente $\sqrt{2}$?
- 25 PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS
SURPREENDENTES** | *Manuel Silva e Pedro J. Freitas*
O donut perfeito
- 28 LOCALIZAÇÃO DE POSTOS DE VIGIA
DE FOGOS FLORESTAIS E OUTRAS COISAS**
Jorge Orestes Cerdeira
- 35 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 36 SOBREVOANDO CUMES E VALES**
Pedro Duarte e Alessandro Margheri
- 42 NOVAS HISTÓRIAS
DA MATEMÁTICA ANTIGA** | *Bernardo Mota*
Um novo olhar sobre os espelhos de Euclides
- 44 IMAGENS DIGITAIS E MATRIZES**
Dirce Uesu Pesco e Humberto José Bortolossi
- 49 CONVERSA COM ...** | *Isabel Labouriau*
... Graciano Oliveira
- 56 NOTÍCIAS**
- 63 CARTAS DA DIREÇÃO** | *Rui Loja Fernandes*
A Portugalæ Mathematica e a partida prematura de Miguel Ramos



ROGÉRIO MARTINS
Universidade Nova
de Lisboa
roma@fct.unl.pt

A MATEMÁTICA PODE MUDAR O MUNDO

Este ano é dedicado à Matemática do Planeta Terra. A *Gazeta de Matemática* decidiu juntar-se a esta iniciativa: dedica este número ao planeta Terra e publica uma série de artigos sobre este tema. Mas, afinal, o que é que tem a matemática a dizer sobre o nosso planeta?

Quando tentamos responder a esta pergunta ficamos tão perplexos como quando nos perguntam: “Sempre ouvi dizer que a matemática está em todo o lado, afinal onde é que ela está concretamente?” A verdade é que a temática do planeta Terra é tão abrangente e a matemática, tão omnipresente, que a abundância de exemplos é de tal ordem que é difícil escolher por onde começar... De facto, não faltam exemplos de áreas nas quais a matemática tem um papel determinante e que estão diretamente ligadas ao planeta: meteorologia, ecologia, epidemiologia, alterações climáticas, energia, astronomia, geologia, sociologia... e assim por diante.

Por outro lado, quando afunilamos mais e tentamos ver que matemática há afinal em cada uma destas áreas, percebemos que a matemática tem um papel que acaba por ser discreto, embora determinante. As conquistas matemáticas são fenómenos raros mas com consequências tremendas, dada a forma como, quando úteis, se generaliza o seu uso por todo o mundo e permanecem atuais ao longo do tempo. Além disso, muitas destas ferramentas matemáticas acabam por ser usadas de forma não explícita, escondidas por detrás de muitos *softwares*, autênticas caixas negras, programadas por uma minoria e usadas por muita gente.

Pensemos num exemplo concreto: as Curvas de Bézier. Estas curvas foram criadas por Pierre Bézier, um matemático francês que trabalhava para a Renault. Neste momento milha-

res de pessoas usam estas curvas em *softwares* gráficos, embora a maior parte delas não conheça a matemática por detrás desta ferramenta. A descoberta foi um fenómeno seguramente discreto e bem localizado no tempo, 1962, por outro lado, a aplicação desta descoberta está amplamente generalizada em *softwares* gráficos e será usada provavelmente por muitos anos, talvez até para sempre! É incalculável a vantagem em termos práticos desta criação matemática. De certa forma, a dinâmica da matemática e suas aplicações é sensível às condições iniciais.

Claro que neste momento pode alguém estar a pensar: “Sim, é verdade, mas por cada Bézier há uma quantidade enorme de matemáticos que foram pagos pelo erário público e que não produziram nada marcante para o planeta Terra.” Bem... a resposta que temos para esse argumento é a de que não é claro até que ponto o trabalho de um matemático, mesmo não produzindo nada suficientemente relevante para que o seu nome lhe fique associado, não contribua com um pequeno ϵ para o conhecimento matemático. Por outro lado, mesmo que não acreditemos nesta teoria dos pequenos ϵ s, defender que só devemos financiar a primeira linha de matemáticos é uma ideia tão absurda como dizer que basta ensinar a jogar futebol a 4 em cada 100.000 pessoas (essencialmente o número de jogadores da primeira divisão) para termos a qualidade de futebol que temos.

JOGOS ISOMORFOS

Neste artigo, propomos ao leitor uma versão luminosa do jogo das torres de Hanói.

Imaginemos um jogo formado por uma fila de lâmpadas, em que cada lâmpada pode estar num de dois estados: acesa ou apagada.



Figura 1

Clicando numa delas, ou só essa muda de estado, ou ficam todas no estado em que estavam. Qual das duas ocorrências tem lugar, dependerá, segundo uma regra precisa, do estado das lâmpadas da fila. Aconselhamos o leitor a que tente descobrir essa regra por si mesmo, experimentando com um modelo virtual do jogo, disponível em [1]. Para usar esse modelo, o *browser* deverá ter o *plugin* Mathematica Player, que poderá ser importado de [2]. Se o leitor não desejar fazer esse exercício, deve ler agora, no final¹ do texto, o enunciado da regra. Conhecida essa regra, considere-se o seguinte problema²: para uma fila com n lâmpadas todas apagadas, será possível, utilizando cliques adequados, conseguir que apenas a última lâmpada fique acesa? Se for, qual o número mínimo de cliques a usar? E haverá apenas uma, ou mais do que uma, sucessão de cliques com o número mínimo, que cumpra esse objetivo? O leitor poderá utilizar o jogo virtual para vários valores de n , procurando gastar o número mínimo de cliques.

Decorre da regra geral que, se as primeiras $n-1$ lâmpadas estiverem apagadas, os mesmos cliques que acendem a lâmpada n (se estava apagada), também a apagam (se estava acesa).



Figura 2

Designe $F(n)$, para cada n , uma sucessão de cliques de comprimento mínimo que, aplicada a uma fila de n lâmpadas das quais as primeiras $n-1$ estão apagadas, só muda o estado da lâmpada n . E designe $f(n)$ o número de cliques de $F(n)$. Partindo de uma fila de n lâmpadas apagadas, só se conseguirá acender a lâmpada n quando, entre as anteriores, apenas esteja acesa a de ordem $n-1$; e consegue-se chegar a esse estado, usando precisamente os cliques de $F(n-1)$, em número de $f(n-1)$. Clicando depois na lâmpada n , ficarão apenas acesas as lâmpadas $n-1$ e n ; e com $F(n-1)$ apagar-se-á a lâmpada $n-1$. Portanto, $F(n) = F(n-1) \times (n) \times F(n-1)$ e $f(n) = 2f(n-1) + 1$.

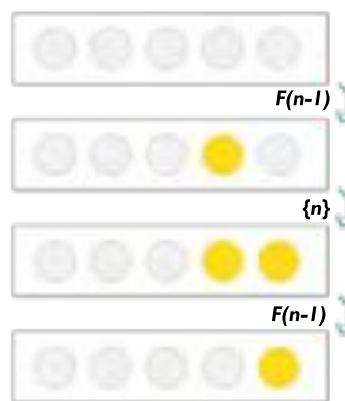


Figura 3

Notando que $F(1)=\{1\}$ (um clique na 1ª lâmpada acende-a) e $f(1)=1$, temos $F(n)$ e $f(n)$ definidos por recorrência, e a unicidade de F fica também estabelecida. E, como a função g definida por $g(n) = 2^n - 1$, satisfaz também a $g(1)=1$ e a $g(n)=2g(n-1)+1$, será $f=g$.

Ao jogar este jogo, ocorre imediatamente pensar num outro, cuja estrutura de resolução é muito semelhante – o popular jogo das Torres de Hanói. Lembremos rapidamente as regras: num tabuleiro com três hastes e discos de raios todos diferentes, pode-se, de cada vez, mudar o disco de cima de uma haste para outra haste, desde que nunca se coloque um disco qualquer sobre outro mais pequeno. Partindo de uma pilha de discos (de diâmetros decrescentes) numa das hastes e nenhum disco nas outras duas, quer-se transportar aquela pilha para outra haste previamente fixada. Como o fazer num número mínimo de jogadas? O jogo é trivial quando a pilha só tem um disco. E, se já o soubermos resolver para uma pilha de $n-1$ e tivermos uma de n , poderemos transferir os $n-1$ discos de cima para a haste diferente da inicial e da final, depois mudar o disco maior para a final e novamente transportar a pilha dos anteriores $n-1$ para cima do disco maior. De notar apenas que, como os $n-1$ discos são todos mais pequenos do que o maior de todos, os movimentos “permitidos” são os mesmos, quer uma haste esteja vazia, quer já lá tenha o maior (ver figura 4, em que $n = 4$, a coluna inicial é a de baixo e a final é a da direita). O processo e a conclusão são análogos aos do jogo anterior.

Constatada esta semelhança entre as resoluções dos dois problemas, é natural procurar levá-la um pouco mais longe. Será que podemos estabelecer uma correspondência natural entre os dois jogos e os respetivos passos de resolução? Isto é, quereríamos estabelecer uma correspondência biunívoca natural entre o conjunto das diferentes distribuições possíveis dos n discos das torres de Hanói pelas três hastes e as diversas distribuições de “acesas e apagadas” numa fila de n lâmpadas, de modo que:

1. Os discos estivessem todos na haste inicial se e só se as lâmpadas estivessem todas apagadas;
2. Os discos estivessem todos na haste final se e só se apenas a última lâmpada estivesse acesa;
3. A um movimento permitido de uma haste para outra correspondesse o mesmo efeito que teria um clique na fila de lâmpadas (que provocasse mudança de estado de uma lâmpada) e vice-versa.

Sob esta forma, é fácil concluir que o problema não tem solução: não existe uma tal correspondência biunívoca. Basta notar

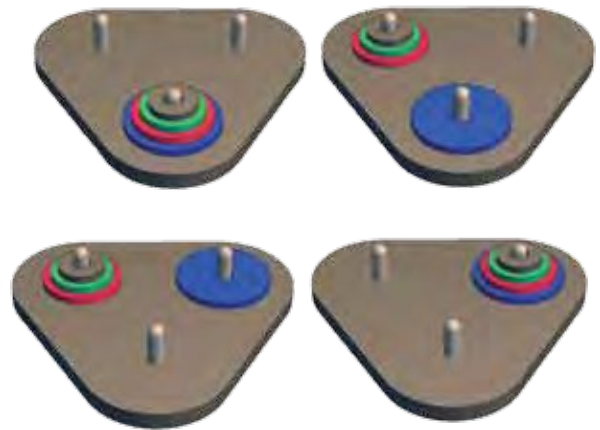


Figura 4

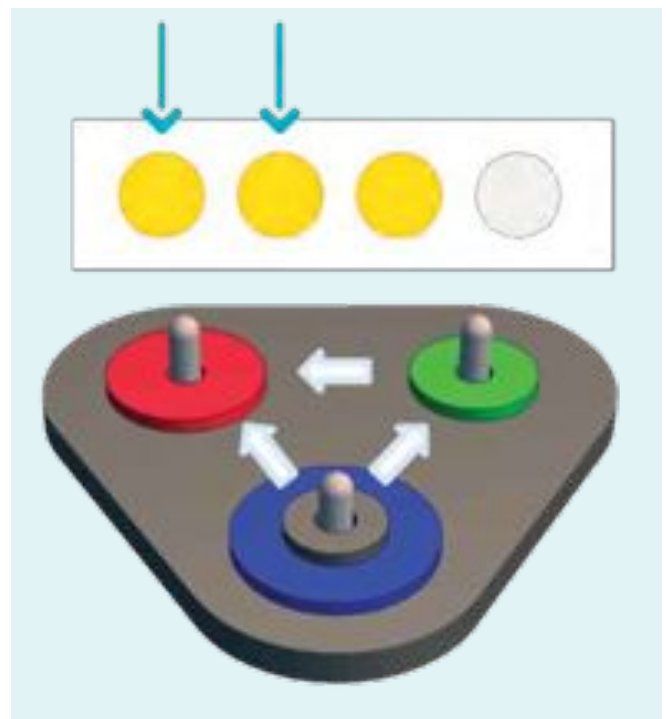


Figura 5

que, em cada jogada, o número de possibilidades de mudar de configuração não é o mesmo nos dois jogos. No caso das torres de Hanói, quando todos os discos estão numa mesma haste (três casos possíveis), há duas jogadas possíveis: o disco mais pequeno pode ir para qualquer das duas hastes vazias. E em todos os outros casos, além das duas jogadas com o disco

mais pequeno – que está sempre em cima numa haste – há outra, de outro disco: se houver uma haste vazia, é o movimento para ela do disco em cima da haste que não contém o disco mais pequeno; se não houver, é o movimento entre as hastes que não têm o disco mais pequeno, que envia o menor dos dois discos para cima do maior. No jogo das lâmpadas, há dois casos: se todas as lâmpadas estiverem apagadas ou apenas a última estiver acesa, só há um clique com efeito visível: na primeira lâmpada; em todos os outros casos, além do clique na primeira lâmpada, há o clique na lâmpada a seguir à primeira que estiver acesa (figura 5). Portanto, neste jogo duas jogadas são possíveis, excetuando duas situações em que há apenas uma; enquanto no outro jogo há três jogadas possíveis, excetuando três situações, em que há apenas duas. Relativamente ao jogo das lâmpadas, notemos que, no caso geral, dos dois cliques possíveis, um deles é o mesmo que o anterior e, portanto, repõe o estado anterior. Ora, numa procura de como resolver o jogo no menor número de cliques possível, a repetição do clique anterior nunca deve ser feita. Mas, excluindo essa repetição, os cliques ficam determinados de maneira única: isto é, a boa estratégia para resolver o jogo no menor número de cliques consiste apenas em escolher, desde o início, o único clique disponível, que, a partir da segunda jogada, não desfaza a jogada anterior.

Para exprimir de um modo simples uma estratégia com o mínimo número de movimentos no caso do jogo das torres de Hanói, é cómodo ter discos alternadamente de uma cor clara e outra escura. Deixa-se ao leitor a verificação de que a maneira mais rápida de concluir a transferência de uma haste para outra consiste em nunca pôr um disco diretamente sobre outro de tonalidade idêntica. Isto determina o movimento a fazer quando não há hastes vazias. Para incluir os casos de hastes vazias na regra indicada, bastará imaginar no tabuleiro-base três discos virtuais (figura 6), os das hastes de partida e de chegada com tonalidade diferente da do disco maior e o da haste restante com a mesma tonalidade do disco maior. Entre as posições indicadas na figura 7, foram omitidas, respetivamente 1, 1, 2, 3 e 3 posições intermédias, no total de dez, ou seja, estão mostradas seis das dezasseis.

Com estas convenções quanto às jogadas, é muito fácil encontrar a estratégia ótima: basta nunca desfazer a jogada ante-

rior! E isso equivale a que as jogadas sejam alternadamente do disco mais pequeno e de outro. Quer dizer: este jogo das torres de Hanói de regras mais exigentes acaba por ser mais fácil do que o de regras mais permissivas. O paradoxo é aparente: as novas regras impedem que o jogador se perca em caminhos mais longos... Estamos, pois, com esta versão, numa situação idêntica à do jogo das lâmpadas, o que nos deixa esperança de conseguirmos encontrar a equivalência entre esta versão do jogo das torres de Hanói e o das lâmpadas. Para definirmos a correspondência, comecemos por imaginar os n discos da pilha numerados por ordem crescente dos respetivos raios de 1 a n ; o círculo virtual na base da haste de partida com um raio um pouco maior do que o disco n , o maior da pilha, será visto como o disco $n+1$. Quanto aos outros dois discos virtuais do tabuleiro, serão ainda maiores, chamemos-lhes $n+2$ e $n+3$. Com esta convenção, poderíamos tentar definir a correspondência que procuramos, pela seguinte regra muito simples: *a lâmpada k está apagada se e só se o disco k estiver pousado diretamente sobre o disco $k+1$.*

Verifiquemos as três propriedades enunciadas acima. Comecemos pela primeira: os discos estão todos na haste inicial 1



Figura 6



Figura 7

se e só se cada disco, incluindo o n , estiver sobre o disco de número imediatamente seguinte, portanto se e só se as lâmpadas estiverem todas apagadas. Quanto à segunda: todos os discos estarem numa haste diferente da inicial equivale a só o disco n não estar sobre o seguinte maior, o que por sua vez equivale a só estar a lâmpada n acesa. Mas só há uma possibilidade de obter esta configuração: todos os discos estarem na haste final – aquela que tem um disco de tonalidade oposta à do maior e não é o de ordem $n+1$.

Observe-se ainda que ao longo do jogo se mantém a repartição inicial das cores dos discos de cima: a cor do disco mais pequeno e, em cada uma das outras duas hastes, um de cada cor. A razão é que um movimento permitido muda para a cor oposta à dele a cor do disco no topo da haste de onde saiu e muda para a cor dele a cor do disco no topo da haste para onde foi.

Vejamos agora a terceira condição. O único disco que pode eventualmente estar em cima do segundo é o mais pequeno, ou seja, o primeiro; e, se não estiver nenhum, o segundo será o único disco de cor diferente do primeiro que está no cimo de uma haste. Portanto, quando o disco mais pequeno se move, ou vai para cima do segundo ou sai de cima do segundo. No primeiro caso, a primeira lâmpada apaga-se, no segundo, acende-se. Isto é, qualquer movimento do disco 1 correspon-

de a clicar na lâmpada 1 (e vice-versa). Este tipo de raciocínio estende-se aos restantes discos. Suponhamos que não é o disco 1 que se move; será o disco j em cima das outras hastes que for mais pequeno (eles têm cores diferentes). Não haverá nessas duas hastes nenhum disco mais pequeno do que o disco j , portanto todos eles estarão na haste do primeiro disco, isto é, se $j > 2$ as lâmpadas de 1 a $j-2$ estarão todas apagadas; em qualquer caso, a lâmpada $j-1$ estará acesa. Quanto ao disco $j+1$, ou está (imediatamente) por baixo do disco j ou é o do topo da outra haste. No primeiro caso, ao mover o disco j , a lâmpada j passa de apagada a acesa; no segundo caso, passa de acesa a apagada. Em ambos os casos, essa ação corresponde a um clique na lâmpada j , estando $j-1$ acesa e todas as anteriores apagadas. Esta argumentação pode ser apresentada em sentido inverso para qualquer clique numa lâmpada, no caso de haver mudança de estado. Na figura 8, é $j=2$ e o último movimento foi do disco mais pequeno, correspondendo a um clique na primeira lâmpada, que a acendeu; portanto, o disco j vai para cima do disco $j+1$ e a lâmpada j apaga-se. Os outros casos de clique não mudam o estado das lâmpadas: correspondem ao disco $j+1$ ou a discos que não estão no topo das hastes e não podem, pois, ser movidos. Portanto, fica estabelecida a equivalência (o isomorfismo) entre os dois jogos: o das lâmpadas e o das torres de Hanói mais restritivo. Em [4] é possível jogar os dois jogos e observar o isomorfismo descrito.

REFERÊNCIAS

- [1] <http://www.atractor.pt/mat/JogosIsomorfos/regras.cdf>
- [2] <http://www.wolfram.com/cdf-player>
- [3] <http://www.spm.pt/olimpiadas>
- [4] <http://www.atractor.pt/mat/JogosIsomorfos>

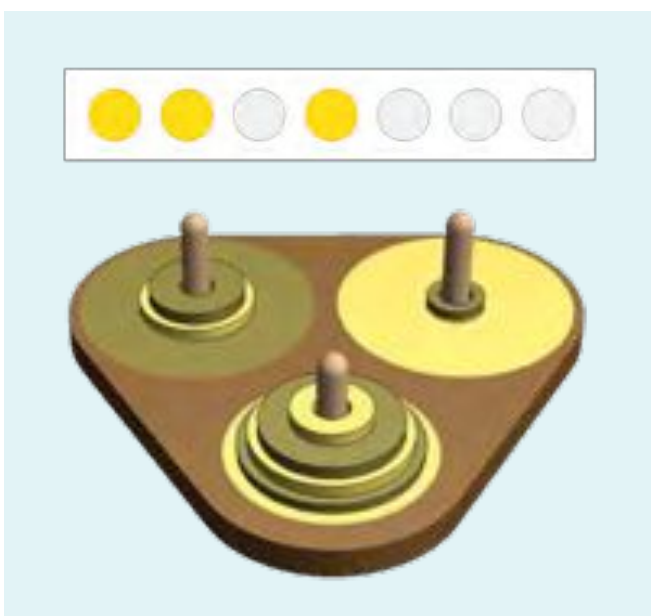


Figura 8

¹ Um clique numa lâmpada fá-la mudar de estado se e só se ela for a primeira da fila, ou então se a única lâmpada acesa à sua esquerda for a contígua. O estado das lâmpadas à direita da lâmpada clicada é, pois, irrelevante. Nas filas de ambas as figuras seguintes, a 4ª lâmpada muda o seu estado por um clique e qualquer das duas filas muda de uma das figuras indicadas para a outra:



² Este problema foi proposto na Final Nacional das XXIX Olimpíadas de Matemática de 2011 (categoria B – 2º dia). Ver [3].



JORGE NUNO SILVA
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

VIAGENS NA NOSSA TERRA

O tema das viagens serve de pano de fundo a muitos problemas interessantes. Hoje vamos propor três, em contextos geográfica e temporalmente distintos. O mais antigo chega-nos do século XIII, do grande Fibonacci, mais conhecido pelo seu problema dos coelhos. Fra Luca Pacioli propõe-nos uma deslocação entre Borgo e Perugia, com alguma fruta pelo meio. Finalmente, Lewis Carroll leva-nos a montes e vales nas cercanias de Oxford na era victoriana.

Leonardo Pisano (1170–1250), mais conhecido por Fibonacci, publicou em 1202 a sua célebre coleção de problemas *Liber Abaci*. Desta obra extraímos o problema seguinte: *Dois homens metem-se a caminho para um longo passeio. Em cada dia o primeiro percorre 20 milhas, o segundo 1 no primeiro, 2 no segundo, 3 no terceiro, etc. Quando é que o segundo apanha o primeiro?*



O grande corredor português Francis Obikwelu.

Luca Pacioli (1445–1517) escreveu, por volta de 1500, *De viribus quantitatis*, considerada a primeira obra de matemática recreativa. Entre muitas outras, encontramos esta questão: *Um homem é encarregado de transportar maçãs entre Borgo e Perugia, que distam 30 milhas entre si. Ele só consegue carregar 30 e come uma por cada milha percorrida. Como maximizar o número de maçãs que chegam a Perugia?*



Perugia, o destino das maçãs.



Um percurso acidentado.

Lewis Carroll, pseudónimo de Charles Dodgson (1832–1898), foi um matemático e escritor inglês, cuja fama se deve principalmente a *Alice no país das maravilhas*. Adaptámos um dos problemas que propõe em *A tangled tale: O Sr. Atikin vai de Labutes a Latrum e regressa a Labutes*. A sua velocidade é de 4 km/h em terreno plano, 3 km/h nas subidas e 6 km/h nas descidas. Partiu às 9:00 e regressou a casa às 13:00. Será que se pode deduzir a distância entre Latrum e Labutes?

Algumas notas sobre os problemas do último número.

2. *Uma professora tem a seu cargo uma turma. Ela quer escolher dois estudantes à sorte e reparou que a probabilidade de serem do*

mesmo sexo é 50%. Quantos estudantes tem a turma e quantos são de cada sexo?

O problema é indeterminado. 1-3, 3-6, 6-10 são algumas proporções dos dois sexos que respondem à questão. Na realidade, qualquer par de números triangulares consecutivos é solução.

2. *A cada um dos cinco vértices de um pentágono regular faz-se corresponder um número inteiro, de maneira a que a soma dos cinco números seja positiva.*

Se os números de três vértices consecutivos forem x , y e z em que $y < 0$, podemos substituí-los, respetivamente, pelos números $x+y$, $-y$ e $z+y$. Esta operação é repetida enquanto existir pelo menos um vértice com um número negativo. Será que este processo é sempre finito?

Sim. Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 os valores dos vértices do pentágono, listados consecutivamente. A função $f(x) = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2$ é estritamente decrescente em cada passo do nosso jogo e toma valores naturais, logo o nosso jogo é finito.

3. *Caça ao Cristão.* O Cristão sobrevive correndo ao longo de uma linha poligonal de comprimento infinito. . . (ver obra citada no número anterior).

Já é sócio da SPM?

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Conheça as vantagens e saiba como aderir em www.spm.pt ou através do número 217 939 785

QUANDO FARÁ A SPM ANOS NUM DOMINGO?



ALEXANDER KOVAČEC
Universidade de
Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

Se o leitor facilmente se irrita com indicações minimalistas de datas na forma $dd-mm-yy$ que, quase invariavelmente, nos obrigam a ir à procura do correspondente dia da semana, oferecemos hoje um remédio. Uma fórmula que permite o cálculo desse dia. A fórmula permite também responder facilmente a outras questões ligadas a datas como, por exemplo, a do título.

Os nossos calendários – existe pelo menos, uma dúzia nas várias culturas – tentam algo impossível: racionalizar o irracional, como observa Ian Stewart em [S]. O ano trópico médio tem a duração de 365.242199... dias, sendo um dia a duração entre duas passagens do Sol pelo zénite. Na sequência deste inconveniente, já em 46 A.C., Júlio César, aconselhado pelo astrónomo alexandrino Sosígenes, introduziu os anos bissextos para repor a sincronicidade do calendário com as estações do ano. A regra então introduzida não se mostrou suficientemente exata de modo que em 1582 o Papa Gregório XIII introduziu mais uma reforma que manda que "anos que são múltiplos de 4 são bissextos, exceto quando são divisíveis por 100; tais anos são bissextos só se forem divisíveis por 400." No calendário gregoriano um ano bissexto tem o dia adicional no dia 29 de fevereiro.

Como dito, o nosso propósito é o de fundamentar uma fórmula para calcular o dia da semana a partir duma indicação $dd-mm-yy$. Esta fórmula, no essencial deixada em [NZ] como problema ao leitor, é naturalmente um pouco complexa. A matemática é elementar, mas convém ter um mínimo de notação.

Designamos por $\rho_7(x)$ ou $\rho(x)$ o resto de $x \in \mathbb{Z}$ na divisão por 7. Indicamos este resto naturalmente em $\{0, 1, \dots, 6\}$. Por exemplo, $\rho(-2) = \rho(12) = 5$, sendo isto o mesmo que escrever $-2 \equiv_7 12 \equiv_7 5$, que quer dizer 'reduzir -2 e 12 módulo 7'. Da teoria dos números recordamos que $\rho(x+y) =$

$\rho(x) + \rho(y)$, desde que se reduza o lado direito módulo 7. O 'sucessor módulo 7' de, por exemplo, 4 é 5, mas o de 6 é 0. A partir de agora escrevemos simplesmente ' \equiv ' em vez de ' \equiv_7 '.

Para um real r , por $[r]$ designa-se o maior inteiro $\leq r$, por $\lceil r \rceil$ o menor inteiro $\geq r$. Por exemplo, $\lceil 2.07 \rceil = 3 = -(-2) = -\lceil -2.07 \rceil$. Precisamos da permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

que indica $\sigma(2) = 12, \sigma(5) = 3$, etc. Finalmente definamos para $m = 1, 2, \dots, 12$, $E(m) = \lfloor 2.6\sigma(m) - 0.2 \rfloor$, e para uma propriedade P , $\chi(P) = 1$ se P for verdadeira, e 0 se for falsa. Por exemplo, $\chi(m \leq 2) = 1$ se $m=1,2$; mas se $m \geq 3$, então $\chi(m \leq 2) = 0$

RECEITA PARA CALCULAR O DIA DA SEMANA. Dada uma data na forma habitual $dd-mm-yy$ (que vamos abreviar por $d m y$), para calcular o dia da semana associado, ponha-se $s :=$ número de séculos que cabem no ano (por exemplo, 19 se falamos de 1974), $\delta = 1$ se o ano é bissexto, e $\delta = 0$ nos outros casos. Reduza-se o inteiro

$$N = 1 + d + E(m) + \lfloor \frac{5y}{4} \rfloor - \lceil \frac{7s}{4} \rceil - (1 + \delta)\chi(m \leq 2)$$

módulo 7: $d = \rho(N)$. Finalmente utilize-se a tabela

d:	0	1	2	3	4	5	6
dia:	Sab	Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex

para determinar o dia.



Papa Gregório XIII

Graças à forma simples como aqui designamos os dias, nem precisamos desta tabela. Nos cálculos práticos pode ser mais expedito usar acima o lado direito da identidade

$$\lfloor \frac{5y}{4} \rfloor - \lceil \frac{7s}{4} \rceil = y + \lfloor \frac{y}{4} \rfloor + \lfloor \frac{s}{4} \rfloor - 2s.$$

Provamos a validade da receita por indução. Para o início da indução podemos escolher o dia 1 de janeiro de 2013. Neste caso, $d = 1, m = 1, y = 13, s = 20$. O ano não é bissexto, por isso $\delta = 0$. Colocando estes dados na fórmula, vem

$$\begin{aligned} N &= N(1, 1, 13, 20, 0) = \\ &= 1 + 1 + \lfloor 2.6\sigma(1) - .2 \rfloor + 13 + \lfloor \frac{13}{4} \rfloor + \\ &\quad + \lfloor \frac{20}{4} \rfloor - 2 \cdot 20 - (1 + 0) \cdot 1 = \\ &= 2 + \lfloor 2.6 \cdot 11 - 0.2 \rfloor + 13 + 3 + 5 - 40 - 1 = \\ &= 2 + \lfloor 28.4 \rfloor - 20 = 30 - 20 = 10. \end{aligned}$$

Ora $\rho(10) = 3$, de modo que o dia 1 de janeiro de 2013 foi segundo a fórmula uma terça-feira, como de facto foi.

O passo de indução é laborioso porque as mudanças que regem o quintuplo (d, m, y, s, δ) que serve de entrada para a fórmula são um pouco complicadas, ainda que a mudança mais comum seja dada simplesmente por

$$(d, m, y, s, \delta) \rightarrow (d + 1, m, y, s, \delta).$$

Parece-nos que uma forma para facilitar a discussão é condensar as numerosas regras num pseudocódigo que exhibe de forma arrumada o que fazemos quando mudamos a data.

Algoritmo: 'Próxima Data'

Input: um quintuplo admissível (d, m, y, s, δ)

Output: o quintuplo associado ao dia seguinte.

```

if  $m \in \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$  then
  if  $d < 30$  then  $d = d + 1; \ominus$ ;
  if  $d = 31$  then  $d = 1; m = m + 1; \ominus$ ;
if  $m \in \{4, 6, 9, 11\}$  then
  if  $d < 29$  then  $d = d + 1; \ominus$ ;
  if  $d = 30$  then  $d = 1; m = m + 1; \ominus$ ;
if  $m = 2$  then
  if  $d < 28$  then  $d = d + 1; \ominus$ ;
  if  $d = 28 \& \delta = 0$  then  $d = 1; m = 3; \ominus$ ;
  if  $d = 28 \& \delta = 1$  then  $d = d + 1; \ominus$ ;
  if  $d = 29 \& \delta = 1$  then  $d = 1; m = 3; \ominus$ ;
if  $m = 12$  then
  if  $d < 31$  then  $d = d + 1; \ominus$ ;
  if  $d = 31$  then
     $d = 1; m = 1;$ 
    if  $y < 99$  then
       $y = y + 1;$ 
      if  $4|y$  then  $\delta = 1; \ominus$ ; else  $\delta = 0; \ominus$ ;
    if  $y = 99$  then
       $y = 0; s = s + 1;$ 
      if  $4|s$  then  $\delta = 1; \ominus$ ; else  $\delta = 0; \ominus$ ;

```

O algoritmo tem quatro linhas 'if $m \dots \dots$ '. Estas repartem os meses 1 a 12 em quatro partes disjuntas. Os \ominus que interpretamos como 'stop' garantem que no máximo uma linha de uma das partes vai ser executada. O 'if $m \in \{1, 3, \dots, 10\} \dots$ ' contempla os meses janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, que têm 31 dias. Nestes meses, se o dia é $d < 30$, o dia a seguir tem número $d + 1$, pertence ao mesmo mês, e evidentemente ano, século e δ também não mudam. Se o dia é 31, o próximo dia é o dia 1 do mês seguinte. Mais nada muda. O 'if $m \in \{4, 6, 9, 11\} \dots$ ' contempla de forma análoga os meses abril, junho, setembro, novembro que têm apenas 30 dias. O mês de fevereiro ($m = 2$) é mais complicado. Seja ou não o ano em consideração bissexto, se $d < 28$, d deve ser aumentado em uma unidade, o resto do quintuplo fica igual. Se $d = 28$ e o ano não é bissexto (i.e. se $\delta = 0$), então o dia seguinte é um dia 1 e o mês sucessor é março ($m = 3$). Se o ano é bissexto, então o dia seguinte é 29 ainda com $m = 2$, mas se $d = 29$, devemos mudar para $d = 1$ e $m = 3$, enquanto o resto fica igual.

Resta o mês de dezembro. Neste caso em todos os dias com $d < 31$ devemos só aumentar d em uma unidade, e não fazer mais nada. Mas se $d = 31$, então devemos mudar para o dia 1 de janeiro ($m = 1$), e também mudar o par (y, s) . Se $y < 99$, y deve ser aumentado em uma unidade. Se $y = 99$, o próximo y é 0, e o século aumenta 1.

O novo ano (obtido pela linha $y = y+1$) é por extenso igual a $100s + y$. Traduzindo as regras do Papa Gregório XIII, o ano é bissexto se for divisível por 4, a não ser que $y = 0$; neste caso é bissexto só quando $4 | s$. Em fórmulas lógicas podíamos mesmo definir $\delta = \chi((4|y \& \neg(y = 0)) \vee (y = 0 \& 4|s))$; mas o mais importante é que as últimas seis linhas do código traduzem as diretivas papais.

Obtida desta forma uma compreensão completa das leis que regem a mudança do trio $dd-mm-yy$, dedicamo-nos à verificação da fórmula. Seja (d, m, y, s, δ) um quintuplo para o qual a fórmula dá uma resposta correta. Se uma das linhas que apenas contêm o comando ' $d = d + 1$;' for executada, é evidente que o valor da fórmula aumenta exatamente em 1 e por isso, após aplicação de ρ , dá-nos o próximo dia da semana.

Para continuação é necessário que o leitor verifique primeiro a tabela seguinte

m :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\rho(E(m))$:	0	3	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
$\chi(m \leq 2)$:	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Por exemplo, para $m = 5$, $\sigma(5) = 3$, $E(5) = [2.6 \cdot 3 - 0.2] = 7$, $\rho(7) = 0$.

Note-se também a última linha da tabela. Um olhar para o 'Próximo Dia', dá que nos meses 1 e 3 até 11 apenas o valor da parte $d + E(m)$ da fórmula pode mudar. Examinemos para esses meses as mudanças de $\rho(d + E(m))$ para o mês sucessor. Temos $\rho(30) = 2$, $\rho(31) = 3$, $\rho(1) = 1$. Do mês de março para o de abril interessam os cálculos $\rho(31 + E(3)) = \rho(31) + \rho(E(3)) = 3 + 2 \equiv 5$, $\rho(1 + E(4)) = 1 + 5 \equiv 6$. Os valores para os restantes casos são calculados da mesma maneira e estão reunidos nas tabelas seguintes.

m :	1	3	5	7	8	10
$\rho(31 + E(m))$:	3	5	3	1	4	2
$\rho(1 + E(m + 1))$:	4	6	4	2	5	3
m :	4	6	9	11		
$\rho(30 + E(m))$:	0	5	6	4		
$\rho(1 + E(m + 1))$:	1	6	0	5		

É pertinente que $\rho(d + E(m))$ mude em todos estes casos para o sucessor dos restos módulo 7. Decorre que o mesmo acontecerá com a nossa fórmula, i.e. com $\rho(N)$.

Vejamos agora o mês de fevereiro, $m = 2$.

As mudanças do quintuplo ainda por examinar são a seguir acompanhadas pelas correspondentes reduções módulo 7 dos fragmentos relevantes (que não contêm y , nem s) da fórmula.

$(28, 2, y, s, 0) \rightarrow (1, 3, y, s, 0)$: Aqui observamos

$$1 + 28 + E(2) - 1 \equiv 1 + 0 + 3 - 1 \equiv 3, e$$

$$1 + 1 + E(3) - 1 \cdot 0 \equiv 1 + 1 + 2 \equiv 4.$$

$(28, 2, y, s, 1) \rightarrow (29, 2, y, s, 1)$: Neste caso apenas a variável d da fórmula aumenta em 1 e, portanto, o valor da fórmula muda para o seu sucessor módulo 7.

$(29, 2, y, s, 1) \rightarrow (1, 3, y, s, 1)$: Aqui observamos

$$1 + 29 + E(2) - 2 \equiv 1 + 1 + 3 - 2 \equiv 3, e$$

$$1 + 1 + E(3) - 2 \cdot 0 \equiv 1 + 1 + 2 \equiv 4.$$

Teremos então também em fevereiro sempre que $\rho(N)$ muda para o sucessor módulo 7.

Ficam por examinar as mudanças para o novo ano. As mudanças possíveis e os cálculos acompanhantes são os seguintes e os mais complicados de todo o calendário.

A parte $1 + d + E(m) - \chi(m \leq 2)$ da fórmula tem no último dia de um ano o valor $1 + 31 + E(12) - 0 \equiv 1 + 3 + 4 \equiv 1$ e no primeiro dia do ano novo o valor

$$1 + 1 + E(1) - 1 \equiv 2 + 0 - 1 \equiv 1.$$

Fica assim apenas por provar que as restantes partes da fórmula geram uma mudança para o sucessor módulo 7. Chame-mos y e \dot{y} aos anos cessante e novo e s , \dot{s} aos séculos em curso nestes dias, tipicamente os mesmos, claro.

As mencionadas restantes partes da fórmula são

$$*_1: y + \lfloor y/4 \rfloor + \lfloor s/4 \rfloor - 2s, \quad e$$

$$*_2: \dot{y} + \lfloor \dot{y}/4 \rfloor + \lfloor \dot{s}/4 \rfloor - 2\dot{s} - \delta.$$

Caso: $y < 99$. Neste caso $\dot{y} = y + 1$, $\dot{s} = s$.

Se o novo ano não for bissexto, $\delta = 0$, e $4 \nmid \dot{y}$ o que faz com que $\lfloor \dot{y}/4 \rfloor = \lfloor y/4 \rfloor$. Decorre que na passagem de $*_1$ para $*_2$ adicionamos exatamente 1 módulo 7, como queríamos.

Se o ano novo for bissexto, $\delta=1$, e com o $y \leq 98$, $4 \nmid \dot{y}$, e $\lfloor \dot{y}/4 \rfloor = \lfloor y/4 \rfloor + 1$. Assim na passagem de $*_1$ para $*_2$ adicionamos mais uma vez $1 = 1 + 1 - 1$ módulo 7.

Caso: $y = 99$. Neste caso $\dot{y} = 0$, $\dot{s} = s + 1$.

Se $\delta = 0$, $\lfloor s/4 \rfloor = \lfloor s/4 \rfloor$ e $*_1, *_2$ são $99 + 24 + \lfloor s/4 \rfloor - 2s \equiv 4 + \lfloor s/4 \rfloor - 2s$, e $0 + 0 + \lfloor s/4 \rfloor - 2(s+1) \equiv \lfloor s/4 \rfloor - 2s + 5$, assegurando assim para $*_2$ a propriedade de sucessor. Se, finalmente, $\delta = 1$, então $\lfloor s/4 \rfloor = 1 + \lfloor s/4 \rfloor$ e de $*_2$ 'sai' exatamente o mesmo valor que no caso anterior, pois o 1 adicional é equilibrado pelo valor $-\delta = -1$.

Logo, mais uma vez, temos em $*_2$ o sucessor módulo 7 de $*_1$.

Isto acaba a prova da fórmula. □

Quem quer mesmo calcular mentalmente os dias do ano corrente 2013, observe que muito do que é preciso para determinar o dia 1 de cada mês já sabemos: Como $\rho(E(1)) = 0$, e iniciámos a indução calculando que $\rho(N(1, 1, 13, 20, 0)) = 3$, obtemos pela fórmula, $\rho(N(1, m, 13, 20, 0)) = 3 + \rho(E(m)) + 1$, para $m \geq 3$, e $3 + \rho(E(2))$ para $m = 2$, com somas a reduzir módulo 7, claro. Ou seja, os dias 1 do ano 2013, levam segundo a tabela $\rho(E(m))$, os seguintes rótulos, na sua ordem por mês: 3, 6, 6, 2, 4, 0, 2, 5, 1, 3, 6, 1; ou seja, são: Ter, sex, sex, seg, qua, sab, seg, qui, dom, ter, sex, dom.

Quem fixa isto (por grupos de quatro parece mais fácil), quando quer impressionar o bisneto calculando o dia 13 de agosto de 2013, seu dia onomástico, calcula assim: Lembra-se que 1 de agosto é uma quinta, 13 de agosto são 12 dias depois de quinta, logo é o dia que corresponde a $\rho(5 + 12) = 3$, uma terça!

A questão do título tem origem no *e-mail* de um colega já aposentado e muito respeitado pelos docentes do meu departamento. Ficou muito incomodado por, excetuando ele, ninguém de Coimbra ter ido ao almoço do septuagésimo segundo aniversário da SPM, que se realizou no passado dia 12 de dezembro em Lisboa. Defendi que esse dia foi uma quarta-feira (pois 01-12-12 foi um sábado logo, dia 12 foi $0 + 11 \equiv 4!$). Sou bem pago, seria um mau *role model* se faltasse num dia útil ao trabalho, ainda por cima em tempos de crise. Mas se festas destas fossem feitas aos domingos participaria frequentemente. Supondo que a SPM continua a celebrar o seu aniversário no próprio dia, quando poderei então ir? De quarta até domingo são 4 dias. A função $y + \lfloor \frac{y}{4} \rfloor$, começando com 12, aumenta segundo os passos 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1. É só agora que a soma é congruente a 4 módulo 7. Daqui a 9 anos, e não antes, a SPM faz o seu octogésimo primeiro aniversário num domingo e nessa altura garanto, realize-se este onde se rea-

lizar, vou aparecer (a não ser que tenha um fim de semana Delfos nesse dia).

O nosso tópico podia ter sido abordado de forma genética – podíamos ter reunido aos poucos as ideias que permitem construir a fórmula. Tal abordagem encontra-se, por exemplo em [R], mas precisa um pouco mais da teoria dos números. Na definição de $E(m)$ é necessário 'experimentar e ter sorte' de qualquer forma. Assim preferimos o método rápido do ladrão: apropriámo-nos da fórmula como de uma joia cujo valor posteriormente verificámos.

Provas de empenho na leitura de Cantos Déléficos são certificados pelo

Projecto Delfos,

Dep. de Matemática da FCTUC, Apartado 3008,

EC Santa Cruz

3001-501 Coimbra,

e-mail: delfos@mat.uc.pt

Agradecimentos: A indicação do livro [R] deve-se a Wiland Schmale, Oldenburg, Alemanha; a eliminação de uma série de deselegâncias linguísticas à minha querida Bernadete. A equipa editorial incluiu a figura e emendou os restantes deslizes.

REFERÊNCIAS

- [NZ] I. Niven, H.S. Zuckerman, *An Introduction to the Theory of Numbers*, J. Wiley & Sons Inc. 1972.
- [R] K. Rosen, *Elementary Number Theory and its Applications*, Addison Wesley 1984.
- [S] Ian Stewart, "A Guide to Computer Dating", *Scientific American*, November 1996.



FABIO CHALUB
Universidade Nova
de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

O LOGARITMO DOS ESTÍMULOS

“A sensação é proporcional ao logaritmo dos estímulos.” Já ouviu isto antes? Se ouviu, então já conhece a lei de Weber-Fechner. Se nunca ouviu, mesmo assim não pode ter escapado às suas aplicações. Como, por exemplo, o facto de que é necessário elevar ao quadrado a intensidade sonora, para que a altura do som seja percebida como tendo dobrado. No entanto, porque é que é assim? Em princípio, há muitas outras possibilidades para relacionar sensação e estímulo. Uma recente investigação em matemática e psicologia mostra como a lei do logaritmo tem uma função central na sobrevivência dos nossos antepassados num mundo onde erros de percepção podem ser fatais.

No séc. XIX, o médico alemão Ernst Weber fez um interessante experimento. Deu dois pesos, de diferentes valores, a várias pessoas, e perguntou qual era o maior. Às vezes a resposta era óbvia, pois todos percebemos a diferença entre um e de dois quilogramas. Por vezes, a diferença era tão subtil, de uns poucos gramas por quilo, que ninguém via claramente qual era o de maior valor. De facto, o que Weber constatou era que a diferença que tornava a maioria das pessoas capaz de detetar corretamente o maior peso era proporcional às quantidades envolvidas. Assim, se é necessário uma diferença de 10 gramas para perceber as variações quando se trata de pesos de cerca de 100 gramas, então, quando estivermos a tratar de pesos de 1 kg, a diferença necessária será da ordem de 100 g.

Foi um seu compatriota, o psicólogo Gustav Fechner, que rephraseou as observações de Weber na forma como é atualmente conhecida: a sensação é proporcional ao logaritmo do estímulo. A ideia é relativamente simples: dado um estímulo (que no exemplo acima é o peso) E , seja S a sensação que este causa (ou seja, a percepção psicológica causada pelo estímulo). Desta forma $S = S(E)$, ou seja, a sensação é função do estímulo.

Agora considere uma pequena variação do estímulo dE . A observação de Weber é de que esta variação, quando dividida pelo próprio valor do estímulo, tem um efeito constante na variação da sensação dS , ou seja:

$$dS = k \frac{dE}{E},$$

onde k é uma constante experimental. A equação acima é um exemplo de equação diferencial, que ao ser resolvida implica em

$$S(E) = k \log E + C.$$

C é uma constante de integração. Fixando um valor mínimo para o estímulo capaz de causar alguma sensação, encontramos:

$$S(E) = k \log \frac{E}{E_0},$$

onde E_0 é o mínimo estímulo perceptível, ou seja, tal que $S(E_0) = 0$. A equação acima é conhecida como *Lei de Weber-Fechner*. Veja a figura 1 na página seguinte.

Apesar de a motivação ter sido o trabalho de Weber sobre a percepção da diferença de pesos, a lei acima é válida para uma enorme variedade de situações. Por exemplo, ao fazer o

Figura 1: O médico Ernst Weber (esquerda) e o psicólogo Gustave Fechner (direita), alemães, descobridores da relação entre estímulo e sensação que leva o nome de ambos. Fonte: Wikimedia Commons.

mapa do céu, os gregos antigos classificaram as estrelas pelo seu brilho, no que é conhecido como “magnitude estelar”. A magnitude de uma estrela é grosso modo proporcional ao logaritmo do seu brilho. Também o som é comumente medido em “decibéis”, que é o logaritmo da intensidade da onda sonora (de facto, o “decibel” é uma unidade genérica que se aplica a todos os casos estudados).

Mas porquê esta relação? Será possível que, de alguma forma, isto otimize alguma característica essencial na nossa relação com o mundo exterior?

Pense que um amigo chegou a sua casa e, fascinado com o seu novo televisor, perguntou-lhe o preço. Apesar de o valor exato ser 1495,50 euros, é natural que a resposta seja “cerca de 1500 euros”. Nós memorizamos (e, de facto, percebemos) os números numa escala muito mais grosseira do que a real, o que faz com que as sensações tenham sempre, de forma inerente, um erro. Evidentemente, o que nos interessa é o erro relativo, pois é muito mais grave para a nossa sobrevivência acharmos que estamos a ser perseguidos por 2, e não por 4, leões, do que errarmos de 98 para 100 predadores. Em ambos os casos o erro absoluto é o mesmo: dois.

Como discutido acima, apesar de os estímulos poderem ser contínuos, a sensação é medida em unidades discretas, onde a distância de um possível valor para o próximo é exatamente a menor diferença perceptível. A questão é: qual será o conjunto discreto de sensações perceptíveis que minimiza o erro das percepções?

A resposta há de depender, claramente, de como os estímulos são produzidos. Se estes forem produzidos maioritariamente num intervalo muito limitado, então o conjunto

acima deve ser muito fino nas sensações resultantes destes estímulos e esparsos fora deste. Então vamos supor que os estímulos são gerados com uma densidade de probabilidade $G(E)$, que a nossa percepção se dá num conjunto finito de valores $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots, \hat{S}_N$, definido dividindo em intervalos de igual tamanho o espaço das sensações admissíveis (aquelas que conseguimos perceber de forma razoavelmente fidedigna). Como a relação entre estímulo e sensação é um-para-um, então existe um conjunto discreto de estímulos $\hat{E}_1 = F^{-1}(\hat{S}_1), \dots, \hat{E}_N = F^{-1}(\hat{S}_N)$, onde a função F é a que relaciona o estímulo e a sensação (logaritmo, de acordo com a lei de Weber-Fechner). O erro médio na medição dos estímulos é medido somando, de forma ponderada por $G(E)$, o erro por supor que o valor da sensação é dado por um dos elementos do conjunto discreto \hat{E}_i :

$$\text{erro}(\hat{E}, G, r) = \mathbb{E} \left[\frac{|E - \hat{E}|^r}{E^r} \right],$$

onde \hat{E} é o valor discreto representativo do estímulo E e \mathbb{E} é o valor esperado do erro relativo.

Manipulando um pouco os conceitos, e na hipótese de que N é muito grande (ou seja, de que há muitos valores mensuráveis para as sensações), o artigo [1], provou que a relação entre E e S (dada por F) que minimiza o erro também satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dF}{dE} = kE^{-r/(r+1)}G(E)^{1/(r+1)}.$$

O problema agora é o de estimar a distribuição de estímulos. No entanto, para uma grande gama de distribuição de estatísticas (incluindo, por exemplo, a transmissão de informações através das linguagens naturais), os estímulos seguem a chamada *lei de Zipf*. Esta é uma lei empírica, válida em todas as linguagens conhecidas (mesmo em algumas linguagens artificiais) que diz que a frequência da i -ésima palavra mais frequente na língua é proporcional a $1/i$. Não existe propriamente uma explicação para a prevalência desta lei, mas há um consenso sobre a sua prevalência, mesmo em situações muito mais gerais que a transmissão de informações a partir da linguagem natural. Com esta hipótese, ou seja, com $G(E) = E^{-1}$, encontramos

$$\frac{dS}{dE} = \frac{dF}{dE} = kE^{-1},$$

que é a mesma equação diferencial encontrada anteriormente. Desta forma, mostramos a ligação entre a lei de Zipf e a lei de Weber-Fechner, algo que não se supunha até então.

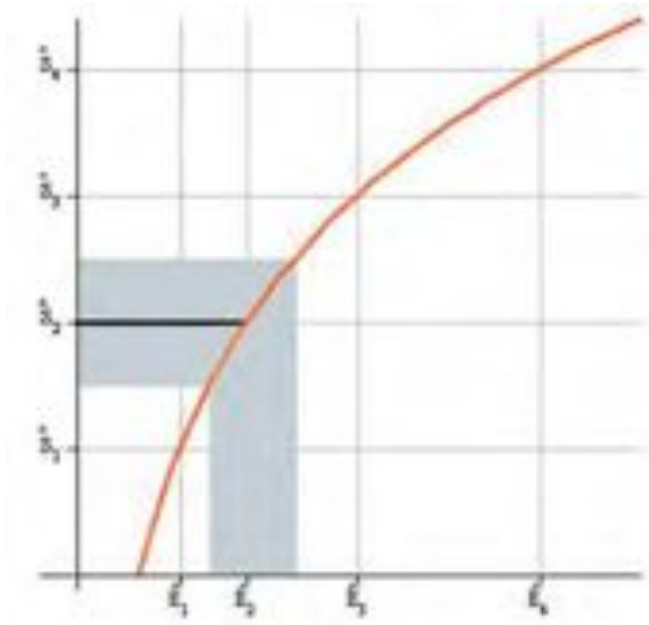


Figura 2: Relação logarítmica entre o estímulo (eixo x) e a sensação (eixo y). Note que as sensações são percebidas apenas num conjunto discreto $\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_N$, que corresponde a estímulos $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_N$. Todos os estímulos na região sombreada correspondem à mesma sensação \hat{S}_2 . O gráfico a vermelho indica a relação entre estímulo e sensação, que, pela lei de Weber-Fechner, é logarítmica. Nós medimos o valor no eixo x e invertendo a função deste gráfico, tentamos inferir o estímulo correspondente.

Para distribuições $G(S) = S^a$ (uma lei de potência, também muito comum em distribuições estatísticas reais), encontramos uma relação que generaliza a lei de Weber-Fechner das escalas logarítmicas para as escalas de potência. A sua expressão exata fica como exercício. É interessante notar que as leis de magnitude estelar modernas, que generalizam as medições dos brilhos das estrelas para valores inimagináveis pelos gregos antigos, também seguem leis de potência (limitando-se ao caso logaritmo para as estrelas visíveis a olho nu); a escala de Richter, que mede os terremotos, estabelece uma relação entre o logaritmo da energia libertada no sismo e os seus efeitos, grosseiramente proporcionais ao valor na escala. Já a escala de Beauford, que tem funções parecidas para os ventos, relaciona os efeitos com uma certa potência da velocidade do vento.

REFERÊNCIAS

[1] Sun, J. Z., et al. "A Framework for Bayesian Optimality of Psychophysical Laws". doi:10.1016/j.jmp.2012.08.002 *Journal of Mathematical Psychology* (2012).





Observar Golfinhos... com Trigonometria

PEDRO DUARTE,^(a) TELMO PEIXE^(b) E TERESA CAISSOTTI^(c)

^(a)FACULDADE DE CIÊNCIAS, UNIVERSIDADE DE LISBOA, ^(b)FACULDADE DE CIÊNCIAS, UNIVERSIDADE DE LISBOA, ^(c)ESCOLA SECUNDÁRIA LEAL DA CÂMARA
pduarte@ptmat.fc.ul.pt tjeixe@fc.ul.pt teresa.caissotti@eslc.pt

1. A QUESTÃO INICIAL

Este artigo surgiu de uma conversa com a bióloga Rute Portugal, membro de uma equipa de investigadores que faz observação de golfinhos no rio Sado à entrada da baía de Setúbal. A monitorização dos roazes é feita, usando instrumentos óticos apropriados, por dois observadores em simultâneo, um em cada uma das margens da embocadura do Sado. Devido a erros de medição, a posição do golfinho não pode ser determinada exatamente. Em vez disso a sua 'localização' é registada como a região de interseção dos 'ângulos de observação' dos dois observadores, conforme se ilustra na figura 1. A amplitude desses ângulos corresponde ao erro de precisão dos instrumentos óticos usados. O problema que nos foi colocado consiste na determinação da área dessa região onde o golfinho avistado se 'localiza'.

A região de localização do roaz é tipicamente um quadrilátero convexo, mas pode degenerar num triângulo ou num quadrilátero aberto com área infinita. Por esta razão a sua



Figura 1: Representação da localização de dois observadores avistando um golfinho.

O erro na localização de um golfinho efetuada por dois observadores à entrada do estuário do Sado é expresso através duma área. Usando um pouco de Trigonometria e Geometria Euclideana obtemos fórmulas para esse erro e mostramos como a função erro depende da posição do golfinho.

área é dada por diferentes expressões analíticas, dependendo da posição do golfinho. Coloca-se então a questão de determinar as configurações possíveis e calcular as respetivas áreas desta região.

2. O PROBLEMA MATEMÁTICO

Dois observadores posicionados nos pontos A e B , a uma distância d um do outro, observam em simultâneo um roaz no ponto C . Os instrumentos óticos usados têm uma escala que indica o ângulo da direção em que a observação é efetuada. Sejam $\theta_1 = m(\angle ABC)$ e $\theta_2 = m(\angle BAC)$ os ângulos medidos pelos observadores A e B respetivamente, e seja θ a margem de erro na escala dos instrumentos óticos. Chamaremos 'ângulos de observação' dos observadores A e B aos ângulos de amplitude 2θ que têm como bissetrizes as semiretas AC e BC respetivamente. A interseção dos dois ângulos de observação é uma região convexa a que nos vamos referir como o 'polígono de localização' do golfinho.

O polígono de localização tanto pode ser um polígono fechado delimitando uma área finita, como uma região aberta e ilimitada com área infinita, a que, por abuso de linguagem, nos vamos referir como um 'polígono aberto'. Na figura 2 estão representadas quatro configurações possíveis do polígono de localização do golfinho, que no quarto exemplo fica aberto com área infinita.

A área deste polígono depende da dis-

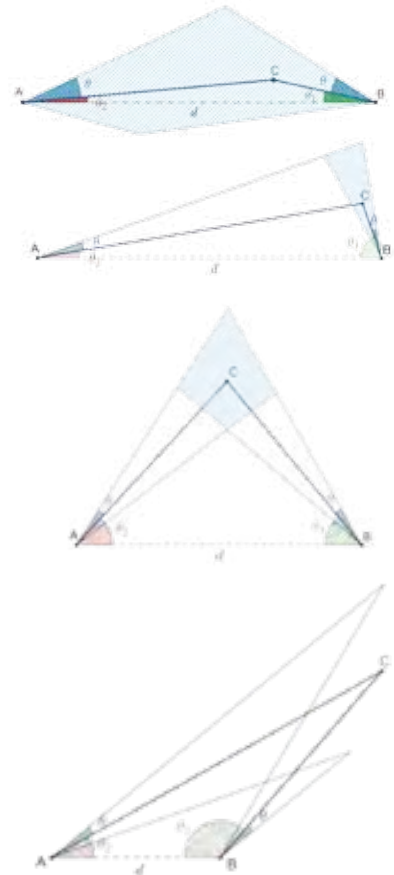


Figura 2: Representação geométrica dos observadores (pontos A e B) e de quatro possíveis localizações do golfinho (ponto C).

tância d entre os dois observadores, da margem de erro θ do instrumento ótico de observação e das medições θ_1 e θ_2 efetuadas pelos dois observadores. Vamos agora recorrer a alguns resultados bem conhecidos de geometria euclidiana (c.f. [1]) para obter a área do polígono de localização em cada uma das suas diferentes configurações.

3. ALGUNS RESULTADOS CLÁSSICOS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA

Consideremos um triângulo de vértices A , B e C cujas medidas dos lados opostos a cada vértice são a , b e c , respectivamente, e cujas medidas dos ângulos internos são α , β e γ , conforme representado na figura 3. Sabemos que são válidas as seguintes propriedades:

Área do triângulo: $A_{[ABC]} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$;

Lei dos Senos: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

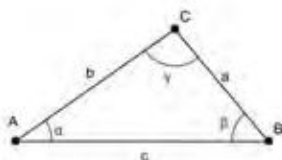


Figura 3: Representação do triângulo [ABC].

Teorema 1 (Arco Capaz). Consideremos uma circunferência com duas retas secantes à circunferência e concorrentes entre si num ponto Q .

(i) Se Q pertence à circunferência (figura 4 (1)), então a medida do ângulo $\angle TQR$ é dada por

$$m(\angle TQR) = \frac{m(\widehat{TR})}{2},$$

em que $m(\widehat{TR})$ é a medida do arco \widehat{TR} que não contém o ponto Q .

(ii) Se Q pertence ao exterior da circunferência (ver figura 4 (2)), então

$$m(\angle TQR) = \frac{m(\widehat{TR}) - m(\widehat{PS})}{2}.$$

(iii) Se Q pertence ao interior da circunferência (ver figura 4 (3)), então

$$m(\angle TQR) = \frac{m(\widehat{TR}) + m(\widehat{PS})}{2}.$$

Como consequência deste teorema temos a seguinte proposição:

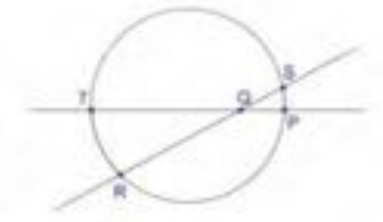
Proposição 2. Dados dois pontos A e B e um ângulo α com $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, o lugar geométrico dos pontos E tais que $\angle EAB + \angle EBA = \alpha$ é a união de dois arcos de circunferência com extremidades A e B .



(1) ponto Q sobre a circunferência



(2) ponto Q no exterior da circunferência



(3) ponto Q no interior da circunferência

Figura 4: Representação do ponto de interseção, Q , de duas retas secantes à circunferência.

4. GEOMETRIA DO PROBLEMA

As questões matemáticas motivadas por este problema vão além do cálculo da referida área propriamente dita. Por exemplo, considerando a figura 5, existe alguma relação entre os pontos A , B , C , D e F ? Como são as curvas, na carta geográfica, que separam as regiões correspondentes às diferentes configurações do polígono de localização? E como é a curva que delimita a região onde o polígono é fechado?

Considerando a figura 5 temos que

$$\begin{aligned} m(\angle ACB) &= m(\angle ADB) = m(\angle AFB) \\ &= 180^\circ - (\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \tag{1}$$

onde θ_1 e θ_2 representam os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BAC$ medidos pelos observadores A e B respectivamente.

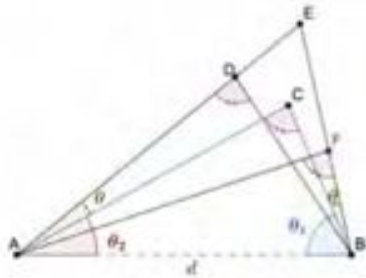


Figura 5: Representação geométrica dos observadores (pontos A e B), do golfinho (ponto C) e dos pontos D e F .

Recordando que três pontos não colineares determinam uma circunferência e supondo que o golfinho não se encontra em linha reta com os observadores, consideremos a circunferência que passa em A , B e C .

Proposição 3. *Os pontos D e F pertencem à circunferência determinada pelos pontos A , B e C .*

Suponhamos, com vista a um absurdo, que D está no exterior da circunferência e designemos por D_1 e D_2 os pontos de interseção dos segmento de reta \overline{DB} e \overline{DA} com a circunferência, respectivamente (figura 6).

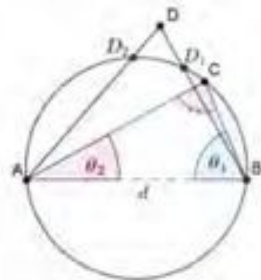


Figura 6: Supondo que o ponto D está no exterior da circunferência.

Usando (ii) do Teorema do Arco Capaz, temos que

$$m(\angle ADB) = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{D_1D_2})}{2}$$

e por (i)

$$m(\angle ACB) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

o que é absurdo por (01).

Suponhamos agora, também com vista a um absurdo, que D está no interior da circunferência e designemos também por D_1 e D_2 os pontos de interseção das retas DB e DA com a circunferência, respectivamente (figura 7).

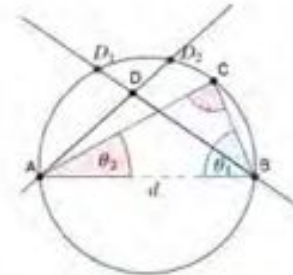


Figura 7: Supondo que o ponto D está no interior da circunferência.

Usando (iii) do Teorema do Arco Capaz, temos que

$$m(\angle ADB) = \frac{m(\widehat{D_1D_2}) + m(\widehat{AB})}{2}$$

e por (i)

$$m(\angle ACB) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

o que novamente é absurdo por (1).

Provamos assim que o ponto D pertence à circunferência determinada pelos pontos A, B e C . Analogamente se prova que o ponto F também pertence à mesma circunferência. Concluímos assim que os pontos A, B, D, C e F pertencem à mesma circunferência, conforme a figura 8.

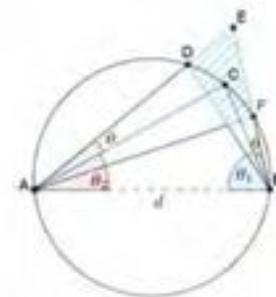
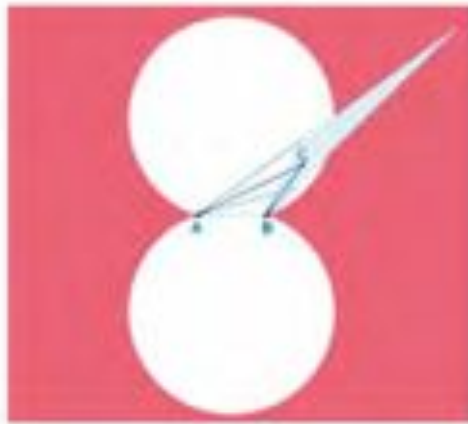


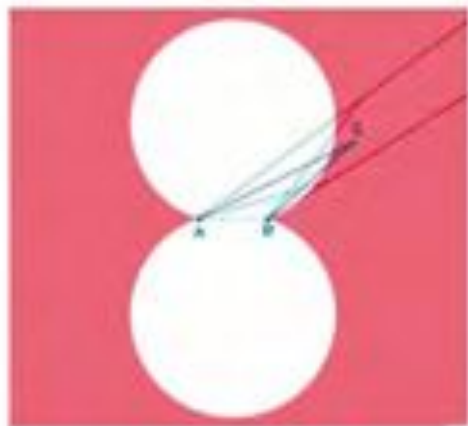
Figura 8: Representação da circunferência que passa pelos pontos A, B, C, D e F .

Sejam A, B os pontos que representam as posições dos observadores. Pela Proposição 2, o conjunto dos pontos C tais que $\theta_1 + \theta_2 < 180^\circ - 2\theta$, onde como anteriormente

$\theta_1 = m(\angle BAC)$ e $\theta_2 = m(\angle ABC)$, é a união de todos os arcos de circunferência com extremidades A e B correspondentes a ângulos $\alpha < 180^\circ - 2\theta$. Este conjunto está representado pela região a branco na figura 9.



(1) Polígono fechado



(2) Polígono aberto

Figura 9: Regiões onde o polígono é fechado (a branco) e aberto (a vermelho).

Recordando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , e considerando a figura 8, vemos que o polígono de localização, que é a interseção dos ângulos $\angle EAF$ e $\angle DBE$, ambos de amplitude 2θ , é fechado se $\theta_1 + \theta_2 < 180^\circ - 2\theta$, e é aberto quando $\theta_1 + \theta_2 \geq 180^\circ - 2\theta$.

Logo, remetendo novamente para a figura 9, podemos concluir que sempre que o golfinho é avistado na região a branco temos um polígono de localização fechado. Caso contrário, o polígono é aberto e a respectiva área infinita.

No caso em que o polígono de localização é fechado te-

mos três situações distintas, que correspondem aos três primeiros casos da figura 2:

1) $\theta_1 \leq \theta$, $\theta_2 \leq \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que na figura 10 corresponde à região R_1 ;

2. i) $\theta_1 \leq \theta$, $\theta_2 \geq \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que na figura 10 corresponde à região R_2 ;

ii) $\theta_1 \geq \theta$, $\theta_2 \leq \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que na figura 10 corresponde à região R_3 ;

3) $\theta_1 \geq \theta$, $\theta_2 \geq \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que na figura 10 corresponde à região R_4 .

Quando $2\theta + \theta_1 + \theta_2 \geq 180^\circ$ o polígono é aberto, e a sua área é infinita, o que na figura 10 corresponde à região R_5 .

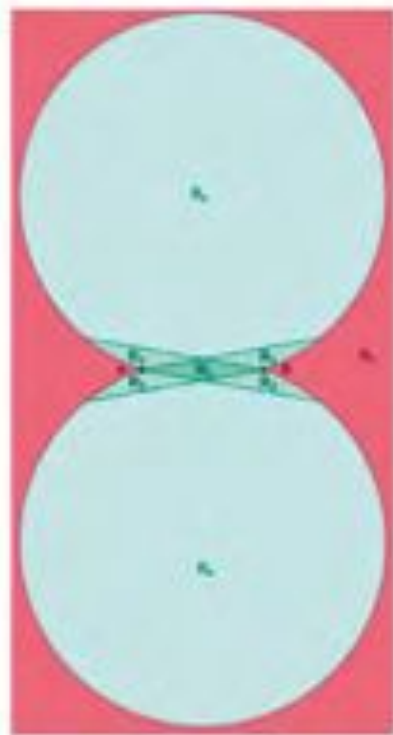


Figura 10: Representação das regiões onde o golfinho se pode localizar.

5. ÁREA DO POLÍGONO DE LOCALIZAÇÃO

Considerando a figura 10, temos que o polígono de localização do golfinho pode ter diferentes formas dependendo de ser avistado na região R_1 , R_2 , R_3 ou R_4 . Apresentamos em seguida a fórmula do cálculo da área do polígono em cada uma das regiões. No entanto, apenas mostramos como calcular a área no caso R_4 por ser o que envolve mais cálculos.

Nos outros casos os cálculos são análogos.

(R_1) Se o golfinho é avistado na região R_1 , temos que o polígono de localização tem a configuração ilustrada na figura 11.

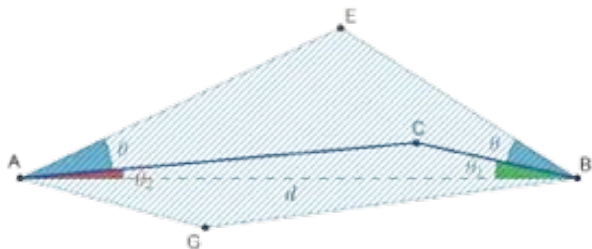


Figura 11: Representação do polígono de localização do golfinho na região R_1 .

A área do polígono $[AEBG]$ em função de d, θ, θ_1 e θ_2 é dada por

$$\frac{d}{2} (\overline{AE} \sin(\theta - \theta_2) + \overline{AG} \sin(\theta + \theta_2))$$

em que

$$\overline{AE} = \frac{d \sin(\theta - \theta_1)}{\sin(2\theta - \theta_1 - \theta_2)} \quad \text{e} \quad \overline{AG} = \frac{d \sin(\theta + \theta_1)}{\sin(2\theta + \theta_1 + \theta_2)}$$

(R_2) Se o golfinho é avistado na região R_2 , temos que o polígono de localização tem a configuração ilustrada na figura 12.

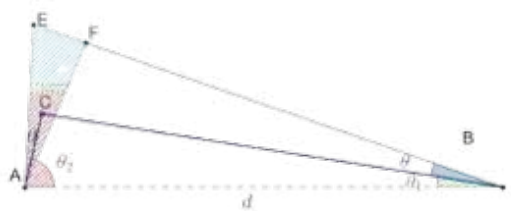


Figura 12: Representação do polígono de localização do golfinho na região R_2 .

A área do polígono $[AEF]$ em função de d, θ, θ_1 e θ_2 é dada por

$$\frac{1}{2} (\overline{AE} \overline{AF} \sin(2\theta))$$

em que

$$\overline{AE} = \frac{d \sin(\theta_1 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)} \quad \text{e} \quad \overline{AF} = \frac{d \sin(\theta_1 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

(R_3) Se o golfinho é avistado na região R_3 , temos que o polígono de localização tem a configuração ilustrada na figura 13.

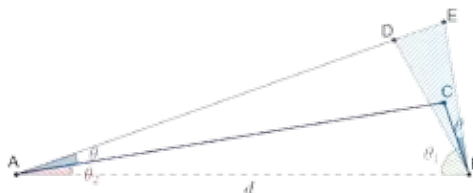


Figura 13: Representação do polígono de localização do golfinho na região R_3 .

A área do polígono $[BDE]$ em função de d, θ, θ_1 e θ_2 é dada por

$$\frac{1}{2} (\overline{BD} \overline{BE} \sin(2\theta))$$

em que

$$\overline{BD} = \frac{d \sin(\theta_2 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{e} \quad \overline{BE} = \frac{d \sin(\theta_2 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)}$$

(R_4) Finalmente, se o golfinho é avistado na região R_4 , temos que o polígono de localização tem a configuração ilustrada na figura 14.

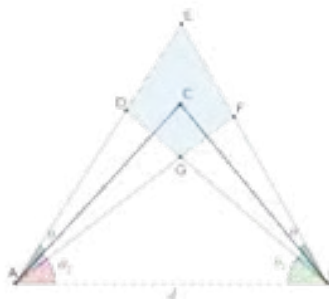


Figura 14: Representação do polígono de localização do golfinho na região R_4 .

A área do polígono $[DEFG]$ em função de d, θ, θ_1 e θ_2 é dada por

$$\frac{1}{2} (\overline{DE} \overline{EF} \sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta) + \overline{DG} \overline{FG} \sin(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta))$$

em que

$$\overline{DE} = \frac{d \sin(\theta_1 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)} - \frac{d \sin(\theta_1 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\overline{EF} = \frac{d \sin(\theta_2 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)} - \frac{d \sin(\theta_2 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\overline{DG} = \frac{d \sin(\theta_2 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} - \frac{d \sin(\theta_2 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta)}$$

e

$$\overline{FG} = \frac{d \sin(\theta_1 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} - \frac{d \sin(\theta_1 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta)}$$

Mostremos apenas como se obtém \overline{DE} pois os outros são análogos.

Considerando os triângulos $[ABE]$ e $[ABD]$ e aplicando a Lei do Senos, temos que

$$\frac{\overline{AE}}{\sin(\theta_1 + \theta)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)}$$

e

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\theta_1 - \theta)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

e como $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE}$, fazendo $\overline{AB} = d$, temos que

$$\overline{DE} = \frac{d \sin(\theta_1 + \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)} - \frac{d \sin(\theta_1 - \theta)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Assim, observando que a área do polígono $[DEFG]$ é a soma das áreas dos triângulos $[DEF]$ e $[DFG]$, aplicando a fórmula “Área do triângulo”, temos o resultado.

6. OBSERVAÇÕES SOBRE A VARIAÇÃO DA ÁREA DO POLÍGONO

Em cada uma das regiões onde o polígono é fechado, dependendo do local onde o golfinho é avistado, o cálculo da área do respetivo polígono deve ser efetuado usando a fórmula especificada na seção anterior.

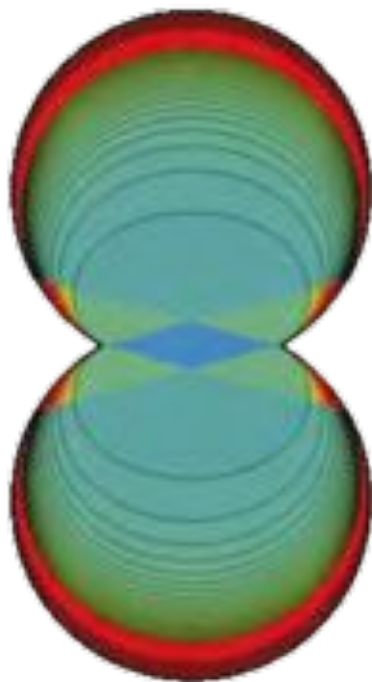


Figura 15: Representação de curvas de nível da área do polígono onde se localiza o golfinho.

Recorrendo ao programa *Mathematica* obtivemos uma representação das curvas de nível da função área do polígono de localização do golfinho. Na figura 15 podemos ver um *density plot* com a variação da área do polígono nas diferentes regiões.

Observemos, por exemplo, que na região atrás referida como R_4 , à medida que o golfinho se afasta dos observadores, a área do polígono aumenta até ao infinito, quando o golfinho alcança o arco limite que separa as regiões R_4 e R_5 a partir do qual o polígono deixa de ser fechado.

Agradecimentos

Agradecemos à Rute Portugal enquanto membro investigadora num projeto do Professor Francisco Andrade do IMAR - Instituto do Mar, por ter colocado a questão de como calcular a área do polígono onde se localiza o golfinho, o que motivou a elaboração deste texto.

Agradecemos ainda à Patrícia Mota, também do projeto IMAR, pelas fotos dos golfinhos que tirou a bordo da embarcação “Costa Azul”.

REFERÊNCIAS

- [1] Araújo, P. V., *Curso de Geometria*, Gradiva, 1998.

SOBRE OS AUTORES

Pedro M. Duarte licenciou-se em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em 1985, e obteve o seu doutoramento em 1993, na área dos Sistemas Dinâmicos, pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada no Rio de Janeiro. Atualmente é professor auxiliar no departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Telmo Peixe licenciou-se em matemática em 2008 na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa onde prosseguiu os estudos em Matemática, tendo concluído o mestrado dois anos depois. Actualmente está a fazer o doutoramento na mesma instituição sob a orientação do Professor Pedro Miguel Duarte, na área da Análise Matemática.

Teresa Caissotti, professora do quadro da Escola Secundária Leal da Câmara, é licenciada em Matemática Aplicada pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Nesta faculdade concluiu ainda os mestrados em Probabilidades e Estatística (1991) e em Matemática para Professores (2012). Criou, concebeu e foi responsável pelas oficinas de matemática no Museu de Ciência da Universidade de Lisboa (2002-2005).



ANTÓNIO MACHIAVELO
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

O QUE É REALMENTE $\sqrt{2}$?

Os números ditos “reais” estão impregnados de mistérios, entre os quais o de saber qual é exatamente a sua “realidade”, ou seja qual é o seu estatuto ontológico. A sua origem é geralmente mal contada, estando a verdade envolta em lendas e puro desconhecimento, por falta de documentos históricos que nos permitam reconstruir muitos dos detalhes do aparecimento e evolução da noção de “número real”, que é, sem qualquer dúvida, central em matemática.

Há muito, muito tempo atrás, os números eram apenas (agora ditos) *naturais*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... — abstrações magníficas dos diversos tipos de quantidades discretas —, assim como os (agora ditos) *racionais*, razões de números naturais, como por exemplo $\frac{7}{3}$, $\frac{5}{21}$, ou $\frac{107}{893}$, naturalmente moldados para representar múltiplos de partes de um todo, úteis portanto para lidar com problemas de repartição de fragmentos das mais diversas coisas. Nesse contexto é muito natural pensar que dois quaisquer segmentos são comensuráveis, ou seja, que existe um outro segmento que os mede exatamente, isto é, que ambos são múltiplos inteiros deste terceiro segmento. Dito de um outro modo, escolhendo uma unidade arbitrária, porque não hão-de ser os seus múltiplos, submúltiplos e os múltiplos dos submúltiplos, suficientes para medir todos os segmentos?

Foi presumivelmente algures no século VI A.E.C. e, também presumivelmente na Grécia Antiga, que alguém, ou um grupo de pessoas, descobriu algo de profundamente estranho: a existência de grandezas incomensuráveis. Não se sabe se primeiro se descobriu que a diagonal de um quadrado não é comensurável com o seu lado, ou se foi a descoberta de que a diagonal de um pentágono é incomensurável com o lado deste que deixou perplexos alguns dos nossos mais notáveis antepassados. As histórias que usualmente se contam e repetem até à exaustão não passam de lendas. Nenhum documento historicamente fiável chegou até nós que relate o que de facto aconteceu.

É importante realçar que a conclusão imediata retirada

de tal descoberta desconcertante não foi, nem poderia ter sido, a de que “existem outros números”, como demasiadas vezes se sugere ao contar (mal) a história dessa descoberta da existência de segmentos incomensuráveis, atribuída aos pitagóricos. Isto é um disparate histórico, assim como um absurdo epistemológico. Como se criam números a partir da constatação de que existem segmentos incomensuráveis? Como foram de facto criados (descobertos?) os números ditos irracionais? Para que o leitor perceba melhor as questões que aqui se colocam, considere a seguinte pergunta: o que é $\sqrt{2}$? É o número positivo que elevado ao quadrado dá 2? Mas será que existe? O problema é que ao dizer “é o número” já se está a supor que tal número existe! Compare o leitor com a seguinte frase “o Pai Natal é a pessoa que na véspera de Natal deixa presentes a todas as crianças que se portaram bem”. Só porque se diz “é a pessoa” não quer dizer que ela exista, pois não? Repito pois a questão: $\sqrt{2}$ existe? Então, dirá porventura o leitor, não é a medida do comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário? Mas o que é “a medida”? Seja lá o que for, é uma noção ligada à de número, depois de escolhida uma unidade... E voltamos ao início: mas tal número existe?

Não, a conclusão não poderia ser outra para além da óbvia, embora intrigante ilação: “os números não servem para medir todos os tipos de segmentos”! Mas então como comparar segmentos, ou outras grandezas, como superfícies ou sólidos, se não existem números suficientes para tal? Uma solução genial é atribuída a Eudoxo de Cnido, que terá

vivido no século IV A.E.C., talvez um dos mais notáveis matemáticos de todos os tempos. Apesar de nenhuma das suas obras ter sobrevivido, sabemos que Eudoxo é responsável pela denominada *teoria das proporções* exposta no livro V dos *Elementos* de Euclides. Aí define-se vagamente *razão*, na definição 3, como *uma espécie de relação no que diz respeito ao tamanho relativo entre duas grandezas do mesmo tipo* (duas grandezas do mesmo tipo são, por exemplo, dois segmentos, duas superfícies ou dois sólidos), para depois introduzir, na definição 5, uma relação de equivalência entre tais razões abstratas, do seguinte modo:

Grandezas dizem-se estar na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, tomando equimúltiplos arbitrários da primeira e da terceira, assim como equimúltiplos arbitrários da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos ou são ambos maiores, ou ambos iguais ou ambos menores que os segundos.

Se A, B, C, D , representarem quatro grandezas, sendo A do mesmo tipo que B , e C do mesmo tipo que D , então, denotando a razão abstrata entre duas grandezas X e Y por $X : Y$, a definição acima citada pode ser reescrita da maneira seguinte:

$$A : B = C : D,$$

se e só se, para todos os $m, n \in \mathbb{N}$,

$$(mA > nB \wedge mC > nD) \vee (mA = nB \wedge mC = nD) \vee (mA < nB \wedge mC < nD).$$

O leitor que queira perceber isto bem, não poderá fazer melhor do que consultar a excelente edição *online* da obra imortal de Euclides elaborada por D. E. Joyce, do Departamento de Matemática e Ciência de Computadores da Clark University, disponível em:

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/Euclid.html>, e, depois de ler um pouco do livro V, deve ler com cuidado a demonstração da proposição 1 do livro VI, assim como as demonstrações das proposições VI.33, XI.25 e XII.13.

Matemáticos árabes dos séculos X a XIII, tais como al-Karajī, Omar Khayyām e Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī irão criticar o facto de Euclides não definir precisamente o que é a razão entre duas grandezas de um mesmo tipo e, nesse período, essas entidades abstratas irão sofrer uma transfiguração que as transformará em outras entidades abstratas a que hoje chamamos *números reais*¹. Desde a constatação de que não era possível medir todos os segmentos usando números (rationais) até à construção de novos números, ditos *irracionais*, houve por conseguinte, e como é natural, um longo período de lenta metamorfose que conduzirá uma ideia abstrata de razão a um conceito que hoje achamos concreto, mas que não é menos abstrato, de número, tendo

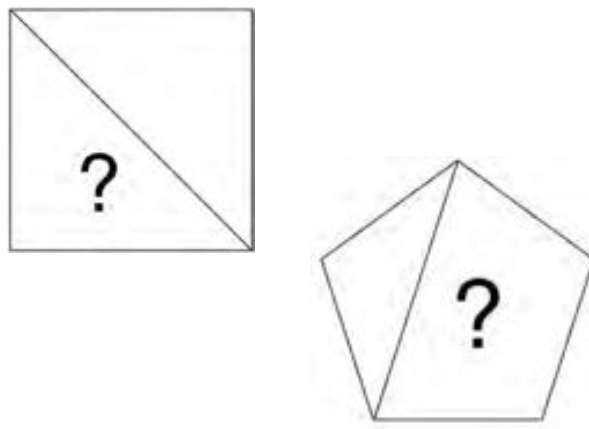
sido o seu estatuto ontológico satisfatoriamente esclarecido (pelo menos do ponto de vista interno da matemática) apenas no século XIX por, entre outros, Cantor e Dedekind, sendo que este último se inspirou, justamente, na construção de Eudoxo!

Não deixa de ser curioso que esses números chamados *irracionais* formem, juntamente com os racionais e via a Análise dita Infinitesimal, a base de teorias físicas que descrevem fenómenos reais com uma aproximação extraordinária, isto apesar de essas mesmas teorias nos descreverem um universo que parece ser discreto, desde a energia ao espaço e talvez mesmo ao tempo: ver http://en.wikipedia.org/wiki/Planck_time e <http://en.wikipedia.org/wiki/Chronon>. Temos aqui um intrigante enigma filosófico sobre o qual apenas é certa a nossa ignorância.

Mas regressemos à questão colocada no título: o que é mesmo $\sqrt{2}$? Não conheço melhor resposta que a dada por Newton, na sua *Arithmetica Universalis*², de 1707, incluída na definição que este dá de número:

Por Número entendemos não tanto uma Multitude de Unidades, como a Razão abstraída de qualquer Quantidade em relação a uma outra Quantidade da mesma Espécie, que tomamos como Unidade.

Assim, $\sqrt{2}$ não será mais do que a relação que existe, por exemplo, entre a diagonal e o lado de um quadrado! E o sucesso da matemática talvez se explique por tornar, para nós seres humanos, essas relações, de algum modo, concretas.



¹ Ver p. 554 de Victor Katz (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam*, Princeton University Press 2007, e p. 15 de J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer 1986.

² Disponível em <http://archive.org/details/universalarithm00hallgoog>.



MANUEL SILVA
Universidade Nova
de Lisboa
mnas@fct.unl.pt



PEDRO J. FREITAS
Universidade
de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

○ DONUT PERFEITO

Ao contrário do que possa parecer, este texto não é sobre gastronomia. A perfeição que aparece mencionada no título tem mais a ver com matemática do que com paladar, e mesmo o *donut* de que se fala tem muito poucas calorias.

Começemos então por falar da perfeição. Se perguntássemos a várias pessoas qual o número mais perfeito, ou o polígono mais perfeito, provavelmente obteríamos várias respostas distintas, e provavelmente todas bem fundamentadas. Seria possível achar que o triângulo era o polígono mais perfeito, por ser o que tem menos lados, ou por ficar completamente definido sabendo os comprimentos dos lados; seria também possível defender, como no livro *Flatland*, que quanto mais lados um polígono tem, mais nobre (e perfeito) ele é, por se aproximar da circunferência.

Seria também possível dizer que era o pentágono regular o polígono mais perfeito, dadas as proximidades com o número de ouro, que é por sua vez um candidato a ser o número mais perfeito. No entanto, outros candidatos haveria, como por exemplo o π ou o e , por serem números transcendentos que desempenham papéis inesperadamente centrais em toda a matemática — o número de ouro tem uma participação muito mais modesta, e chegaria, quando muito, em terceiro lugar nesta corrida de irracionais.

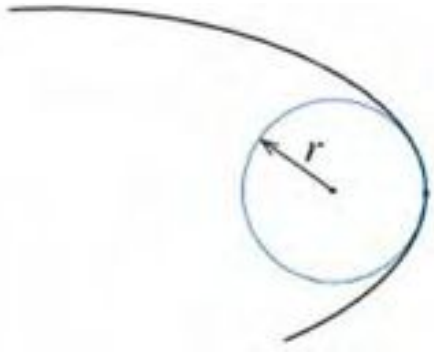
Para fixar ideias, neste texto estamos interessados em figuras geométricas no plano e no espaço, e aqui, a “perfeição” vai ter uma definição precisa. Se procurarmos, por exemplo, a curva plana fechada, de comprimento fixo, que limita a maior área possível, a resposta vai ser, como possivelmente se espera, a circunferência. Esta é uma consequência simples da desigualdade isoperimétrica: para uma curva fechada com comprimento L , que limite uma área A , temos

$$4\pi A \leq L^2,$$

com igualdade apenas se a curva for uma circunferência. É imediato ver que, no caso da circunferência, se substituirmos $A = \pi r^2$ e $L = 2\pi r$, obtemos a igualdade.

Outra forma um pouco mais sofisticada de definir a “perfeição” de uma curva fechada é definir, de alguma forma, a energia dessa curva, e procurar a curva que tem menor energia. Esta minimização de energia é uma maneira natural de olhar para a perfeição, pois há vários problemas de física que se resolvem encontrando a curva que minimiza alguma grandeza, dentro de uma certa classe de curvas.

Definimos a energia de uma curva γ num ponto como a curvatura da circunferência osculante à curva nesse ponto, que, informalmente, significa que é a circunferência que melhor aproxima a curva próximo do ponto. Se a circunferência osculante tiver raio r , essa curvatura κ será dada por $1/r$.



Circunferência osculante

Podemos definir energia de uma curva como

$$L(\gamma) \int_{\gamma} \kappa^2 ds,$$

em que $L(\gamma) = \int_{\gamma} 1 ds$ é o comprimento da curva γ . Esta definição garante que a energia é uma grandeza adimensional, e, portanto, invariante por mudança de escala, e que será tanto maior quanto maior for a curvatura de γ (para o mesmo comprimento). Werner Fenchel provou em 1929 que $\int_{\gamma} |\kappa| ds \geq 2\pi$, com γ igualdade se e só se $\kappa \geq 0$, isto é, se a curva for convexa. Ora, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, é simples verificar que a energia de qualquer curva é maior ou igual a $4\pi^2$:

$$4\pi^2 \leq \left(\int_{\gamma} |\kappa| ds \right)^2 \leq \int_{\gamma} 1 ds \int_{\gamma} \kappa^2 ds = L(\gamma) \int_{\gamma} \kappa^2 ds.$$

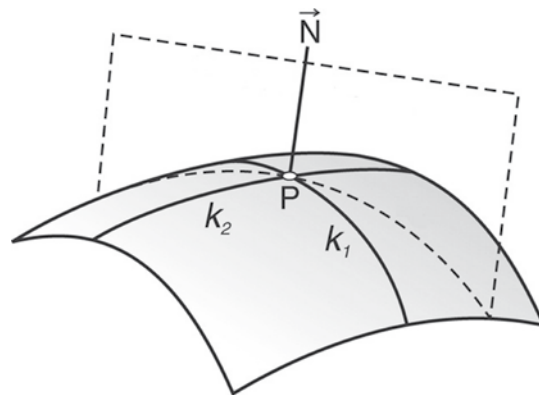
Se a energia for igual a $4\pi^2$, temos também igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz, o que implica que as funções κ^2 e 1 são múltiplas uma da outra, isto é, κ é constante e a curva é uma circunferência — que é então a curva de menor energia.

Passando agora para o espaço tridimensional, podemos fazer uma pergunta similar: consideremos todas as superfícies difeomorfas à superfície de uma esfera, isto é, que se podem deformar numa superfície esférica, sem criar nem eliminar vincos. De todas estas, qual será a que minimiza um integral

de energia do mesmo tipo? A energia aqui será a denominada *energia elástica*, dada por

$$\int_{\Sigma} H^2 dA,$$

em que a função H é a *curvatura média* da superfície Σ em cada ponto. Esta é dada pela média aritmética das duas curvaturas principais (na figura, k_1 e k_2), que são os valores máximo e mínimo das curvaturas de curvas obtidas por interseção da superfície Σ com planos contendo o vetor \vec{N} normal à superfície.



Estas duas curvaturas são sempre obtidas por planos perpendiculares um ao outro.

Em 1965, Thomas Willmore demonstrou que todas as superfícies compactas difeomorfas à superfície esférica têm energia elástica maior ou igual a 4π , sendo este valor atingido apenas na superfície da esfera. Assim, é esta a superfície de menor energia.

E o que se passaria com outras superfícies? As que se seguem naturalmente, em termos de complexidade, são as difeomorfas a um toro — dentre essas, qual será a que tem energia elástica mínima? Willmore conjecturou que este valor seria $2\pi^2$, e que este seria atingido no toro de Clifford, que representamos na figura, ou em qualquer sua deformação conforme.

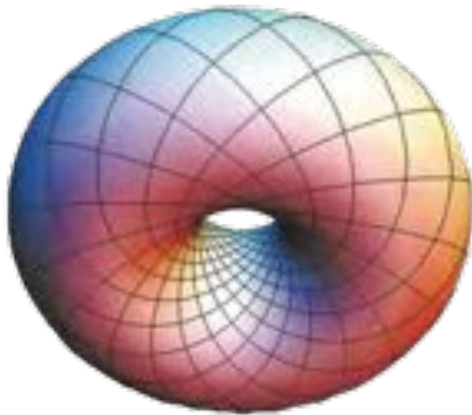
O toro de Clifford pode ser obtido rodando a circunferência contida no plano yOz , de raio 1 e centro no ponto $(0, \sqrt{2}, 0)$ à volta do eixo dos zz . A sua equação paramétrica, tal como descrita em [FM], é

$$(u, v) \mapsto ((\sqrt{2} + \cos u) \cos v, (\sqrt{2} + \cos u) \sin v, \sin u) \in \mathbb{R}^3.$$

A própria natureza parecia estar de acordo com esta conjectura. Verificou-se, nos anos 90, que certas células, quando

formam membranas com forma de toro, assumem naturalmente a forma do toro de Clifford, ou uma das referidas deformações.

A questão foi resolvida em 2012 por Fernando C. Marques, do IMPA, e André Neves, do Imperial College, que apresentou recentemente uma palestra sobre o assunto, [1], na qual, aliás, este texto é largamente baseado. O resultado que demonstraram prova a conjectura de Willmore, 47 anos depois de esta ter sido enunciada: a energia mínima destas superfícies é de facto $2\pi^2$, e é atingida no toro de Clifford, bem como nas superfícies obtidas desta por deformações conformes.



Toro de Clifford

REFERÊNCIAS

[1] Palestra de André Neves, disponível em <http://www.livestream.com/fcglive/video?clipId=pla94fd459f-6a70-4ced-9428-6e8d5ab9b161> (endereço visitado a 10/01/2013).

[F] E. Abbott, *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, 1884.

[FM] Fernando C. Marques, André Neves, “Min-Max Theory and the Willmore Conjecture”, aceite para publicação no *Annals of Mathematics*.

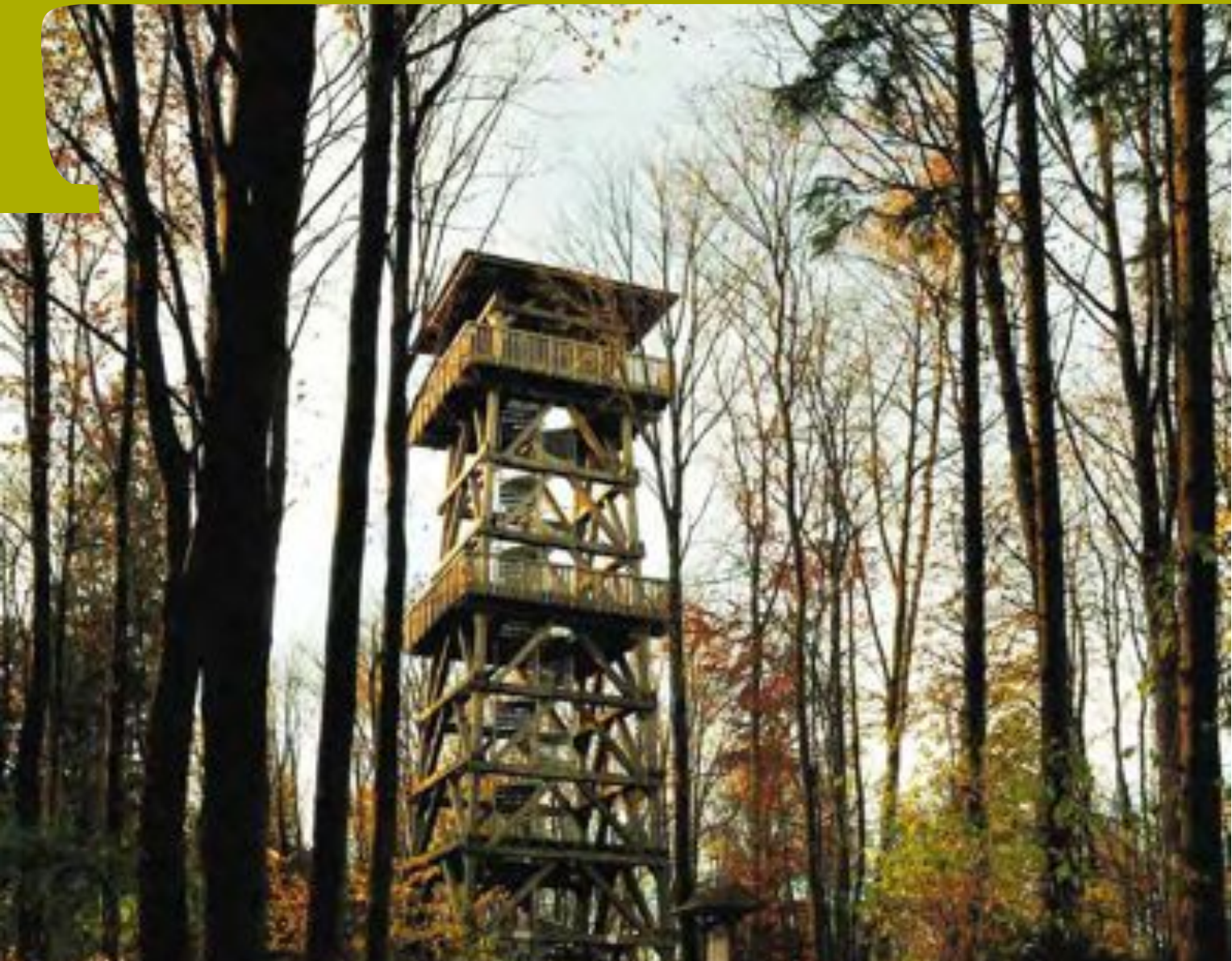
[R] A. Ros, “The Isoperimetric and Willmore Problems”, *Contemporary Mathematics*, Volume 288, 2001.



Visite o site da
Gazeta de Matemática.

www.spm.gazeta.pt

Para aceder à área reservada a assinantes,
solicite o seu código de subscrição através
do e-mail gazeta@spm.pt



Localização de Postos de Vigia de Fogos Florestais e Outras Coisas

JORGE ORESTES CERDEIRA

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

jo.cerdeira@fct.unl.pt

Onde instalar postos para vigia de fogos florestais? Como desenhar uma rede de áreas para proteção da biodiversidade? Como selecionar candidatos a guias, em idiomas diferentes, para um museu? Vamos ver que estas questões não são mais do que diferentes contextualizações do mesmo problema e que poderá não ser exequível encontrar as soluções mais eficientes.

No caso da instalação de postos de vigia, são dados o conjunto das parcelas florestais que se pretende monitorizar relativamente à ocorrência de fogos, os locais onde é possível a instalação de postos de vigia e a indicação, para cada um desses locais, das parcelas que ficam sob vigilância caso seja instalado um posto nesse local. Quer-se decidir onde instalar postos de forma a monitorizar todas as parcelas florestais e, como há custos decorrentes da construção e da utilização de cada posto de vigilância, pretende-se que o número de postos a instalar seja mínimo.

Para o traçado de redes de áreas prioritárias para a conservação, são conhecidos o conjunto de parcelas em que se divide a área de estudo, as espécies dessa região com interesse para a conservação e as espécies representadas em cada uma das parcelas. O problema básico na identificação de áreas prioritárias para a conservação consiste em descobrir um conjunto de parcelas, em número mínimo, em que estejam representadas todas as espécies.

Finalmente, para selecionar candidatos a guias, em idiomas diferentes, para um museu, após estabelecidos os idiomas desejados e conhecidos os idiomas que cada candidato domina, procede-se à escolha de um conjunto de candidatos que, com o menor número possível, assegurem visitas guiadas em todos os idiomas.

Os problemas anteriores podem ser descritos usando diagramas como o da figura 1, em que estão represen-

tados pontos agrupados em dois conjuntos (não vazios) $E = \{1, 2, \dots, 7\}$ e $D = \{8, 9, \dots, 16\}$, e algumas ligações entre pares de pontos em que um dos pontos está em E e o outro em D . O objeto assim representado chama-se *grafo bipartido* e E, D são as classes de bipartição.

Os pontos de E representam (i) os locais onde poderão ser instalados postos de vigia de fogos, (ii) as parcelas da área de estudo, ou (iii) os candidatos a guias. Os pontos de D representam (i') as parcelas florestais a monitorizar, (ii') as espécies a proteger, ou (iii') os idiomas que se pretende usar nas visitas guiadas. A existência da ligação $[u, v]$, com $u \in E$ e $v \in D$, indica que (i'') a instalação de um posto no local u permite vigiar a ocorrência de fogos na parcela florestal v , (ii'') a espécie v está representada na parcela u , ou (iii'') o candidato u fala o idioma v .

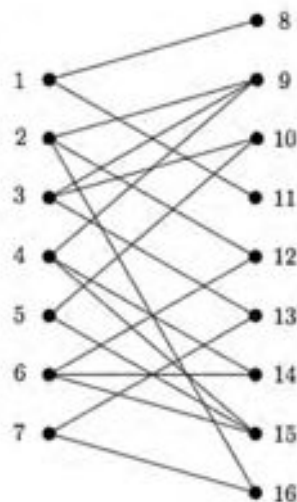


Figura 1: Grafo bipartido com classes de bipartição $E = \{1, 2, \dots, 7\}$ e $D = \{8, 9, \dots, 16\}$

Um grafo bipartido pode ser adequadamente codificado para ser introduzido num computador como uma matriz de 0's e 1's, do tipo $|E| \times |D|$, em que o elemento (u, v) da matriz é 1 (0) se (não) existe ligação entre $u \in E$ e $v \in D$.

Uma *solução admissível* para cada um dos problemas anteriores é um conjunto C de pontos de E tal que todo o ponto de D esteja ligado a pelo menos um ponto em C . Diz-se que C é uma *cobertura* (de D). Os conjuntos $\{1, 4, 5, 6, 7\}$ e $\{1, 2, 3, 6\}$ são coberturas (dos pontos do lado direito) do grafo da figura 1, com cardinalidades 5 e 4, respetivamente. Os problemas da

instalação de postos de vigia contra fogos florestais, da identificação de áreas prioritárias para a conservação e da seleção de candidatos para guias em idiomas diferentes num museu procuram *coberturas mínimas*, i.e., de menor cardinalidade. O leitor não terá dificuldade em verificar que o conjunto $\{1, 2, 3, 6\}$ é uma cobertura mínima (dos pontos do lado direito) do grafo da figura 1.

Coloca-se pois, a questão de determinar coberturas mínimas.

Poderíamos pensar procurar coberturas mínimas por enumeração. Por exemplo, começando com um inteiro arbitrário k ($1 \leq k \leq |E|$), repetidamente enumerando os subconjuntos de E com cardinalidade k , e atualizando o valor de k , diminuindo-o ou aumentando-o caso um dos subconjuntos seja ou não cobertura. O procedimento termina quando for encontrada uma cobertura C e nenhum subconjunto de cardinalidade $|C|-1$ for cobertura. Mas será que este procedimento é exequível? Suponhamos que é possível decidir se um subconjunto arbitrário de E é cobertura num nanosegundo (10^{-9} segundos), que é o valor aproximado do tempo de execução de uma *operação elementar* (uma comparação, uma atribuição de valor, uma adição, ...) num computador atual. Para $|E| = 10$ e $k = 3$, testar se cada um dos 120 subconjuntos de cardinalidade 3 de E é cobertura demoraria cerca de 0.00000012 segundos. Mas 17 séculos seriam insuficientes se $|E| = 70$ e $k = 30$. Tendo em conta que os problemas de determinação de coberturas mínimas que se colocam em situações reais incidem, normalmente, sobre dados de grandes dimensões (digamos, $|E|$ e $|D|$ nas ordens das várias centenas e vários milhares, respetivamente), métodos de enumeração como o anterior são completamente impraticáveis.

Há pois que considerar estratégias mais eficientes. Uma possibilidade, aparentemente razoável, seria, em cada iteração, adicionar a um subconjunto $C \subset E$ um elemento u de $E \setminus C$ com o maior número de vizinhos ainda não cobertos por C . Esta estratégia, que em cada momento opta por um agente que garante o maior retorno imediato, chama-se *gulosa*. Vejamos como opera o algoritmo guloso com o grafo bipartido da figura 2, em que $E = \{a, b, c, d, e\}$ e $D = \{f, g, h, i, j, k\}$.

O primeiro ponto a ser incluído em C é o ponto a , uma vez que tem o maior número de vizinhos (4). Ficam por cobrir j e k . Cada ponto de $E \setminus \{a\}$ cobre exatamente um desses dois pontos. Assim, C é ampliado com um qualquer ponto dife-

rente de a . Vamos supor que é escolhido d , restando ainda por cobrir o ponto k . Os candidatos a inclusão em C são c e e , e uma vez incluído um qualquer desses pontos, o algoritmo termina com a obtenção de uma cobertura de cardinalidade 3. No entanto a cobertura obtida não é mínima, uma vez que $\{b, c\}$ é também cobertura.

Desta vez o algoritmo guloso falhou na determinação da solução ótima. Será sempre assim? Será que não há garantia da otimalidade das soluções gulosas dos problemas de otimização combinatória? Para responder a esta questão comecemos por definir problema de otimização combinatória.

Seja A um conjunto finito e $c_e \geq 0$ um *custo* associado a todo o elemento e de A . Se X é um subconjunto de A , dizemos que o custo de X é a soma dos custos dos elementos em X , que denotamos por $c(X)$. Consideremos um conjunto S de subconjuntos de A . Aos elementos de S chamamos *soluções admissíveis*. O *problema de otimização combinatória* (POC) associado ao terno (A, c, S) consiste na determinação de uma solução admissível de custo máximo ou mínimo.

No problema da cobertura mínima, A é o conjunto dos pontos de uma das classes de bipartição do grafo, $c_e = 1$, qualquer que seja o ponto e de A e o conjunto das soluções admissíveis S é o conjunto das coberturas.

Em muitos POC o conjunto S é fechado para a inclusão, i.e., ao eliminar elementos arbitrários de uma qualquer solução admissível obtém-se uma solução admissível. Curiosamente, é precisamente o oposto do que acontece com o problema da cobertura. Obtém-se uma cobertura ao incluir um qualquer ponto numa cobertura. No entanto, podemos facilmente transformar o problema da cobertura num POC equivalente cujo conjunto de soluções admissíveis é fechado

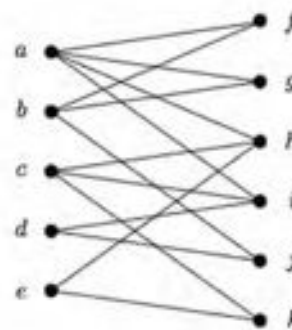


Figura 2: Grafo bipartido.

para a inclusão. Basta considerar que as soluções admissíveis são os complementares das coberturas, i.e., $X \subset A$ é admissível sse $A \setminus X$ é cobertura. Uma solução admissível de custo máximo X^* deste problema identifica uma cobertura $A \setminus X^*$ de custo mínimo.

Quando S é fechado para a inclusão diz-se que o par (A, S) é um *sistema de independência* e os conjuntos de S (de $2^A \setminus S$) chamam-se *independentes* (*dependentes*).

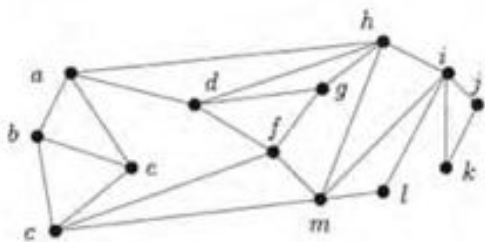
Para obter uma solução admissível de custo máximo do POC associado a um sistema de independência (A, S) , com custos não negativos definidos sobre os elementos de A , o algoritmo guloso, em cada iteração, insere em X , que inicialmente é o conjunto vazio, um elemento de maior custo $e \in A \setminus X$, tal que $X \cup \{e\} \in S$. Se não existe $e \in A \setminus X$ com $X \cup \{e\} \in S$, o algoritmo para e devolve o independente *maximal* X .

Q 1. Em que condições o algoritmo guloso resolve corretamente o POC associado a um sistema de independência (A, S) , i.e., determina um independente de custo máximo, quaisquer que sejam os custos não negativos atribuídos aos elementos do conjunto A ?

A resposta a esta questão é dada pelo resultado seguinte:

R 1. O algoritmo guloso resolve corretamente o POC associado ao sistema de independência $M = (A, S)$ se e só se M é um *matróide*.

Um sistema de independência $M = (A, S)$ é um *matróide* se $X, Y \in S$, com $|Y| > |X|$, então $X \cup \{y\} \in S$, para algum $y \in Y \setminus X$. Por outras palavras, dados dois independentes com cardinalidades diferentes, é possível ampliar o de menor cardinalidade com algum elemento do de maior cardinalidade, mantendo independência.



Vejamos exemplos de sistemas de independência que são, e que não são, matróides.

Consideremos de novo um grafo bipartido. Um subconjunto X de ligações é um *emparelhamento* se não há duas ligações em X a incidir no mesmo ponto. O conjunto das ligações $\{[a, f], [b, j], [d, i]\}$ do grafo da figura 2 é um emparelhamento. O conjunto $\{[a, f], [b, j], [d, j]\}$ não é emparelhamento. É óbvio que o conjunto dos emparelhamentos forma um sistema de independência (sobre o conjunto das ligações do grafo), mas não é matróide. De facto, não se obtém um emparelhamento se incluirmos no emparelhamento $\{[a, g]\}$ uma das duas ligações do emparelhamento $\{[a, f], [b, g]\}$.

Um conjunto de ligações de um grafo (não necessariamente bipartido) chama-se *floresta* se não inclui *ciclos*.

O conjunto $F = \{[a, d], [c, e], [c, f], [g, h], [h, i], [i, j], [i, m]\}$ é uma floresta do grafo representado no lado esquerdo da figura 3. O conjunto $F \cup \{[h, m]\}$ não é floresta pois inclui o ciclo $\{[h, i], [i, m], [h, m]\}$.

É claro que quando se eliminam ligações numa floresta ainda se obtém uma floresta e, portanto, que o conjunto das florestas é um sistema de independência definido sobre o conjunto das ligações do grafo. Para ver que este sistema de independência é um matróide, considere a floresta F que está representada no lado direito da figura 3, e seja F' uma floresta arbitrária com mais ligações do que F . Como numa floresta não pode haver mais do que $k - 1$ ligações entre pares de k pontos, F' não pode incluir mais do que

- ▶ 1 ligação entre pares de pontos do conjunto $C_1 = \{a, d\}$,
- ▶ 2 ligações entre pares de pontos do conjunto $C_2 = \{c, e, f\}$, e
- ▶ 4 ligações entre pares de pontos do conjunto $C_3 = \{g, h, i, j, m\}$.

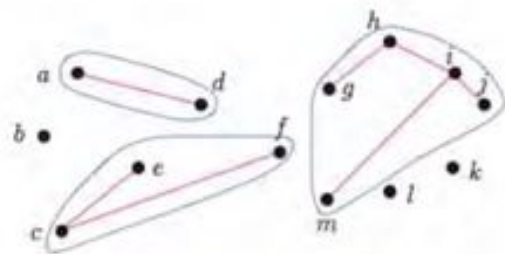


Figura 3: Grafo com 13 pontos (à esquerda) e uma floresta desse grafo com 7 ligações (à direita).

Como $|F'| > |F|$, vai existir em F' alguma ligação $e = [u, v]$, em que u e v não pertencem simultaneamente a C_1 , nem a C_2 , nem a C_3 . Se juntarmos a F a ligação e , não vamos obter ciclos, i.e., $F \cup \{e\}$ é uma floresta. Espero que o exemplo seja suficientemente ilustrativo para convencer o leitor que o sistema de independência associado às florestas de um grafo é um matróide.

Vamos agora demonstrar o resultado R1. Para demonstrar a implicação \Leftarrow vamos supor que a solução gulosa G não é de custo máximo. Suponhamos então que $G = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, com $c_{e_1} \geq c_{e_2} \geq \dots \geq c_{e_n}$ e que existe um independente (maximal) $O = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, em que $c_{e'_1} \geq c_{e'_2} \geq \dots \geq c_{e'_n}$ com custo $c(O) > c(G)$. Como $c(O) > c(G)$, para algum $1 \leq k \leq n$, tem-se $c_{e'_k} > c_{e_k}$. Seja k o primeiro inteiro em que se verifica a desigualdade anterior. Note que $X = \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$ ($X = \emptyset$, se $k = 1$) e $Y = \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k\}$ são independentes, com $|X| < |Y|$. Logo, algum elemento de Y pode ser inserido em X mantendo a independência. Como todo o elemento de Y tem custo maior do que o custo de e_k na iteração k , o algoritmo guloso funcionou incorretamente, escolhendo erradamente o elemento e_k ! Isto mostra que o algoritmo guloso resolve corretamente o POC associado a um matróide.

Para provar a implicação \Rightarrow vamos supor que o sistema de independência não é um matróide. Sejam então X e Y independentes com $|X| = k < |Y|$, e vamos supor que $X \cup \{y\}$ é dependente, qualquer que seja $y \in Y \setminus X$. Definimos custos

$$c_e = \begin{cases} k+2 & \text{se } e \in X \\ k+1 & \text{se } e \in Y \setminus X \\ 0 & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$$

e vamos deixar o algoritmo guloso operar. A solução gulosa G contém X e não inclui elementos de Y . Assim, $c(G) = k(k+2) = k^2 + 2k$. Mas

$$c(Y) \geq (k+1)(k+1) = k^2 + 2k + 1,$$

o que mostra que se o algoritmo guloso encontrar uma solução ótima do POC associado a um sistema de independência $M = (A, S)$, qualquer que sejam os custos atribuídos aos elementos de A , então M é matróide.

Pode concluir-se do resultado R1 que a estratégia gulosa permite, por exemplo, desenhar uma rede viária de menor custo a ligar várias localidades. Basta definir um grafo (*com-*

pleto) cujos pontos representam as localidades e associar à ligação entre cada par de pontos u, v o "custo" $c_{[u,v]} = W - w_{[u,v]}$, em que $w_{[u,v]}$ é o custo da construção do troço que liga as localidades u e v , e W um número suficientemente grande para garantir que os custos c sejam positivos. Uma vez que redes com ciclos não podem ter custo mínimo, as redes viárias que interessa considerar são os independentes maximais do matróide das florestas deste grafo. O resultado 1 assegura que o algoritmo guloso determina uma floresta maximal de custo máximo relativamente aos "custos" c . Obviamente, as ligações desta floresta constituem uma rede de menor custo, relativamente aos custos de construção w , a ligar as várias localidades.

Pode também concluir-se do resultado 1 que, provavelmente, não se atinge a maior produtividade possível utilizando a estratégia gulosa para atribuir n tarefas a n operadores. Mais precisamente, suponhamos que se conhecem valores que quantificam os desempenhos dos operadores na execução de cada uma de n tarefas, e que se pretende atribuir a cada operador uma tarefa de forma a maximizar a soma dos valores dos desempenhos. As soluções admissíveis deste POC são os emparelhamentos com n ligações do grafo bipartido completo, em que as classes de bipartição são os conjuntos dos pontos O e T que representam os operadores e as tarefas, respetivamente. Se para todo o par de pontos $u \in O$ e $v \in T$, associarmos o valor do desempenho do operador representado por u na execução da tarefa representada por v , o problema consiste em determinar um emparelhamento, com n ligações, cuja soma dos desempenhos é máximo. Uma vez que o grafo é completo, a solução gulosa é um emparelhamento com n ligações e é portanto admissível. Mas o conjunto dos emparelhamentos do grafo não define um matróide e assim, muito provavelmente, existem soluções mais eficientes do que a solução gulosa para atribuir n tarefas a n operadores.

Ainda no que respeita a emparelhamentos é pertinente observar o seguinte. Um emparelhamento de um grafo bipartido, com classes de bipartição E e D , é um conjunto de ligações que não inclui mais do que uma ligação incidente em cada ponto de E e em cada ponto de D . Facilmente se pode verificar que os conjuntos de ligações, em que não mais do que uma ligação é incidente em cada ponto da mesma classe de bipartição, formam um matróide (sobre o conjunto das ligações do grafo). Assim, os emparelhamentos são os independentes comuns a dois matróides ((i) não mais do que uma ligação

incidente em cada ponto de E e (ii) não mais do que uma ligação incidente em cada ponto de D). Para além do algoritmo guloso que é um método *eficiente* para o POC associado a um matróide, existem também algoritmos *eficientes* para o POC associado à intersecção de dois matróides. É portanto possível identificar, em tempos razoáveis de computação, emparelhamentos de custo máximo e, em particular, distribuir n tarefas a n operadores assegurando a maior produtividade.

Voltemos ao problema da cobertura mínima que, como vimos, não é convenientemente solucionado pela estratégia gulosa. Também não são os algoritmos para o POC na intersecção de dois matróides que vão permitir resolver *eficientemente* o problema, uma vez que não é possível estabelecer para a cobertura mínima uma formulação de POC associado à intersecção de dois matróides. A possibilidade de serem concebidos algoritmos *eficientes* é muito limitada, pois pode provar-se que determinar coberturas mínimas é um *problema difícil*. Um problema é *difícil* se é pelo menos tão difícil quanto um *problema difícil*. Claro que esta definição não teria grande interesse se não existissem problemas comprovadamente *difíceis*. Porém, atualmente é sabido que muitos problemas das mais variadas áreas (lógica, álgebra, grafos, teoria dos números,...) são *problemas difíceis*. Um deles é o *problema da realização*¹ (PR) de expressões booleanas (na forma conjuntiva normal). As ocorrências do PR são coleções de grupos de *literais* associados a variáveis booleanas. Os literais associados a uma variável booleana u são u e \bar{u} . Se a variável u toma o valor verdade (falso), os literais u e \bar{u} tomam os valores verdade e falso (falso e verdade), respetivamente.

Por exemplo, a expressão

$$L = \{(x, \bar{y}, z), (x, y, \bar{z}), (\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, z)\}$$

envolve os pares de *literais* x, \bar{x} ; y, \bar{y} e z, \bar{z} , associados às variáveis booleanas x, y e z , respetivamente. Os grupos de literais $c_1 = (x, \bar{y}, z)$, $c_2 = (x, y, \bar{z})$, $c_3 = (\bar{x}, \bar{y})$ e $c_4 = (\bar{x}, z)$ chamam-se *cláusulas*. Uma afetação de valores verdade-falso sobre as variáveis realiza uma cláusula se, para essa afetação, algum dos literais da cláusula toma o valor verdade. Uma afetação de valores verdade-falso sobre as variáveis realiza a expressão se realiza todas as cláusulas simultaneamente. A afetação $(x \leftarrow V, y \leftarrow F, z \leftarrow F)$, em que V significa verdade e F falso, sobre as variáveis x, y, z , não realiza a expressão L , uma vez que não realiza a cláusula c_4 . A afetação $(x \leftarrow V, y \leftarrow F, z \leftarrow V)$ realiza a expressão L .

O PR consiste em decidir, dada uma expressão booleana, se existe uma afetação de valores sobre as variáveis que a realize. Se existir, a expressão diz-se *realizável*.

Vamos converter o PR no problema de encontrar coberturas mínimas. Por outras palavras, para cada expressão booleana (na forma conjuntiva normal), vamos construir um grafo bipartido e mostrar que a expressão é realizável se e só se a cardinalidade das coberturas mínimas do grafo igualar um determinado valor.

Cada variável booleana u vai originar dois pontos no grafo, associados aos literais u e \bar{u} . O conjunto dos pontos assim obtidos forma a classe de bipartição E do grafo. Cada cláusula c_i dá origem a um ponto de D , a outra classe de bipartição. Ligamos cada ponto p de E a cada um dos pontos em D que representam as cláusulas que incluem o literal que p representa. Assim, qualquer subconjunto S de pontos E cobre os pontos de D que representam as cláusulas em que figuram os literais representadas pelos pontos de S . Por fim, ampliamos D com um conjunto de pontos A , com número de pontos igual ao número de variáveis e liga-se cada ponto de A com exatamente dois pontos de E , que representam os dois literais associados à mesma variável. Na figura 4 é apresentado o grafo que se obtém com a expressão L , em que os pontos azuis representam os pontos de A .

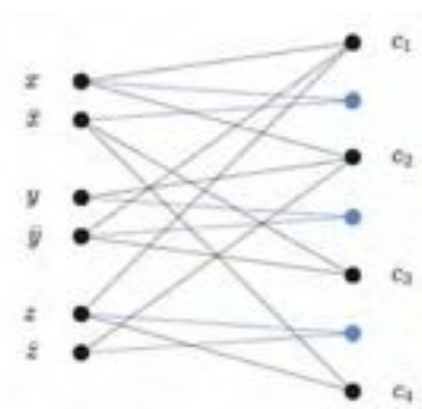


Figura 4: Grafo bipartido correspondente à expressão $L = (c_1, c_2, c_3, c_4)$, com $c_1 = (x, \bar{y}, z)$, $c_2 = (x, y, \bar{z})$, $c_3 = (\bar{x}, \bar{y})$, $c_4 = (\bar{x}, z)$.

¹ Satisfiability problem

Podemos identificar as afetações de valores verdade-falso sobre as variáveis, com os subconjuntos de E que incluem exatamente um dos dois pontos que representam os literais associados à mesma variável. A afetação $(x \leftarrow V, y \leftarrow F, z \leftarrow F)$ sobre as variáveis de L corresponde ao conjunto $\{x, \bar{y}, \bar{z}\}$ dos pontos de E do grafo da figura 4. A afetação $(x \leftarrow V, y \leftarrow F, z \leftarrow V)$ corresponde ao conjunto $\{x, \bar{y}, z\}$.

Uma afetação de valores verdade-falso realiza a expressão se e só se o correspondente conjunto de pontos de E é cobertura. A afetação $(x \leftarrow V, y \leftarrow F, z \leftarrow F)$ não realiza a expressão L , uma vez que a cláusula c_4 não inclui um dos literais x , \bar{y} ou \bar{z} . Equivalentemente, no grafo da figura 4, o conjunto $\{x, \bar{y}, \bar{z}\}$ não é cobertura (dos pontos de D), pois o ponto que representa a cláusula c_4 não está ligado a qualquer dos pontos desse conjunto. O conjunto de pontos $\{x, \bar{y}, z\}$ do grafo é a cobertura que corresponde à afetação $(x \leftarrow V, y \leftarrow F, z \leftarrow V)$, que realiza L .

Temos pois definida uma correspondência biunívoca entre afetações de valores lógicos sobre as variáveis e subconjuntos de pontos de E , com exatamente um dos dois pontos que representam os literais associados à mesma variável. Uma afetação realiza a expressão se e só se o correspondente conjunto de pontos é cobertura.

Qualquer cobertura (de D) tem de incluir um dos dois pontos que representam os literais associados à mesma variável. Caso contrário, o ponto de A adjacente a esses dois pontos ficaria por cobrir. Assim, por um lado, não há coberturas com cardinalidade menor do que o número de variáveis. Por outro lado, uma cobertura com cardinalidade igual ao número de variáveis, se existir, inclui exatamente um dos dois literais associados a cada variável, e portanto corresponde a uma afetação de valores lógicos que realiza a expressão.

Pode assim concluir-se que a expressão dada é realizável se e só se a cardinalidade de uma cobertura mínima do grafo obtido pelo processo descrito atrás é igual ao número de variáveis booleanas.

Portanto, qualquer algoritmo para o problema da cobertura mínima pode ser utilizado para decidir se uma expressão booleana é realizável. Apenas há que, previamente, executar os procedimentos que definem o grafo associado à expressão dada. Como PR é um *problema difícil*, determinar coberturas mínimas é também um *problema difícil*, o que é interpretado

pela maioria dos especialistas da área da complexidade computacional como uma evidência da não existência de algoritmos *eficientes*.

Dado este resultado negativo, onde é que vamos instalar os postos para vigia de fogos florestais? Quais as áreas a selecionar para uma rede de áreas para proteção da biodiversidade? Como escolher os candidatos a guias, em idiomas diferentes, para um museu? A otimização combinatória e, em particular, a teoria dos poliedros combinatórios, são as áreas da matemática nas quais se desenvolvem os fundamentos para responder convenientemente a estas questões². Muitos resultados moderam o pessimismo decorrente da constatação da dificuldade de resolução dos problemas e proporcionam uma narrativa bem mais otimista da localização de postos de vigia de fogos florestais e outras coisas, que se reserva para uma eventual ocasião futura.

SOBRE O AUTOR

Jorge Orestes Cerdeira tem doutoramento em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e agregação pelo Instituto Superior de Agronomia da Universidade Técnica de Lisboa, tendo lecionado nesta última instituição até recentemente. Atualmente é professor do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Os seus interesses científicos incluem otimização combinatória, grafos, macroecologia e biologia da conservação.

² Sobre métodos e algoritmos em otimização combinatória o livro de Alexandre Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*, Springer, 2003, é uma obra absolutamente notável e, seguramente, a mais completa sobre o assunto.

É LANÇADO HOJE O ANO INTERNACIONAL
DA MATEMÁTICA NO PLANETA TERRA.



PRETENDE-SE SENSIBILIZAR PARA
O FACTO DE O FUTURO DO PLANETA
PASSAR PELA MATEMÁTICA.



BEM, NÓS AQUI EM PORTUGAL
TEMOS ALGUMA DIFICULDADE
EM PERCEBER ISSO.



COM O GOVERNO A ENGANAR-SE
SEMPRE NAS CONTAS...



Publicado originalmente no jornal Público, em 05/03/2012. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR:

Rogério Martins Universidade Nova de Lisboa

VICE-DIRETOR:

Alessandro Margheri Universidade de Lisboa

CONSELHO EDITORIAL:

Afonso Pedrosa Pinto E. S./3 S. Pedro Vila Real • **António Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho • **Elisabete Rodrigues** E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** E. S. Felismina Alcântara • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação de Viana do Castelo • **Maria do Céu Pinto** Universidade de Coimbra • **Manuel Domingos Oliveira Cadete** Universidade Agostinho Neto • **Paulus Gerdes** Universidade Eduardo Mondlane, Moçambique • **Raquel Escórcio** antiga professora na E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho • **Teresa Almada** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia • **Juan-Miguel Gracia** Universidad del País Vasco, Espanha

ASSISTENTE EDITORIAL:

Sílvia Dias SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

Dossier – Comunicação e imagem

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:

Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa
Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

TIRAGEM 1500 Exemplares

ISSN 0373-2681 • ICS 123299 • DEPÓSITO LEGAL: 159725/00



Sobrevoando Cumes e Vales

PEDRO DUARTE E ALESSANDRO MARGHERI

UNIVERSIDADE DE LISBOA

pedromiguel.duarte@gmail.com, margheri@ptmat.fc.ul.pt

Recorrendo a analogias geográficas e à imagem dum planeta imaginário, procuramos explicar o conteúdo da Teoria de Morse, uma atraente teoria matemática do século XX que relaciona os pontos críticos duma função suave com a topologia do seu domínio.

Imagine a superfície acidentada dum planeta fictício, completamente submersa num oceano pacífico. Um dia, o nível da água do mar começa a descer, fazendo aparecer as primeiras ilhas. À medida que a terra se eleva acima do mar, são formadas baías, que depois viram lagos. Surgem istmos ligando terras próximas, penínsulas e continentes vão sendo descobertos pelas águas. A descida das águas faz com que lagos sequem, descobrindo vales profundos. Neste mundo todas as águas estão niveladas porque a terra é formada de matéria porosa. Entendendo “geografia”, em sentido restrito, como a simples contagem do número de ilhas ou continentes, por um lado, e do número de mares ou lagos, por outro, será possível compreender as mudanças que ocorrem na “geografia” do planeta em função da descida do mar? Uma teoria desenvolvida pelo matemático americano Marston Morse nos anos 30 do século XX responde a esta questão. A Teoria de Morse relaciona mudanças “geográficas” globais com certos pontos especiais, ditos *pontos críticos*, em torno dos quais ocorrem transformações qualitativas na “geografia”. Existem essencialmente três tipos de metamorfose causadas pelo abaixamento do nível das águas, que são: (1) *o nascimento dum ilha*, (2) *a emergência dum istmo*, ligando duas porções de terra e (3) *o desaparecimento dum lago*, porque o fundo dum vale ficou acima do nível do mar.

O objetivo principal deste artigo é o de mostrar algumas relações quantitativas entre o número de pontos críticos associados a estas metamorfoses (chamados, respetivamente, cumes, selas e poços) e o número de ilhas e de lagos do planeta. Provaremos estas relações considerando uma região suficientemente pequena do planeta fictício, de forma a po-

dermos considerar aceitável a sua aproximação com a superfície de um plano. Para nos convenceremos da correção desta aproximação local, é suficiente lembrar que, no caso da Terra, as civilizações mais antigas achavam que o nosso planeta, na realidade aproximadamente esférico, fosse mesmo plano (e não só as mais antigas, em meados do século XX, foi fundada uma sociedade, The Flat Earth Society, que defende que a Terra é plana!). Na parte final do trabalho, um pouco mais técnica, iremos explicar brevemente como uma das relações referidas acima se estende a contextos mais gerais. Em particular, consideraremos uma generalização que envolve a geografia de todo o planeta, esférico ou de outro tipo. De facto, o tipo de relação que se obtém neste contexto global depende da forma (tecnicamente, da topologia) do nosso planeta fictício, que poderá ser uma esfera, um *donut* (tecnicamente, um toro), ou ter outras formas ainda mais complicadas, como a de um oito “insuflado” (tecnicamente, um bitoro).

Começamos então por introduzir as notações e os conceitos que vão levar-nos ao nosso resultado principal.

Se quisermos descrever a geografia de uma pequena região do planeta, será suficiente considerar a função $f(x,y)$, definida no plano cartesiano \mathbb{R}^2 que mede a cota do lugar em função das suas coordenadas geográficas x e y . O gráfico da função $f(x,y)$ reproduz localmente a orografia do planeta. Seja $c \in \mathbb{R}$ um número real. O conjunto $N_c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c \}$ representa a *curva de nível orográfica*, formada pelos pontos de cota c . Se c medir o nível do mar, N_c representa a linha de água, enquanto $M_c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq c \}$ representa a “terra” descoberta pelo oceano. É claro que o conjunto de nível N_c é o bordo da região M_c . Vamos agora enunciar as hipóteses sobre f .

(I) *Assumimos que a função $f(x,y)$ seja suave, isto é, que admita derivadas parciais de todas as ordens.* Do ponto de vista geométrico, isto implica, em particular, que existe um plano tangente ao gráfico de f por cada um dos seus pontos e que, ao variar do ponto sobre o gráfico, o correspondente plano tangente varia de uma forma contínua.

(II) *Assumimos que o conjunto $M_c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq c \}$ seja limitado para todo o $c \in [c_0, +\infty[$, ou seja, que a “geografia” é limitada para estes níveis do mar.*

(III) *Assumimos que f tem apenas um número finito de pontos críticos.* Chama-se *ponto crítico* de f a qualquer ponto em que o plano tangente ao gráfico de f seja horizontal. Os máximos

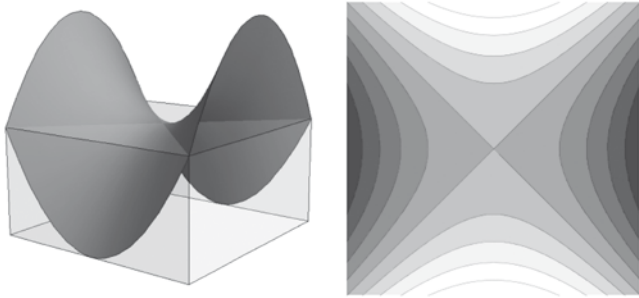


Figura 1: Um ponto de sela.

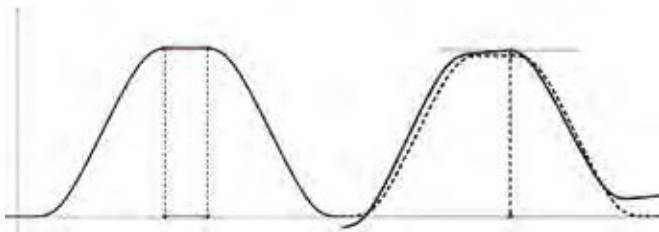


Figura 2: À esquerda, uma função com infinitos pontos críticos. À direita, uma sua pequena perturbação com um único ponto crítico.

e mínimos locais são os exemplos mais óbvios de pontos críticos de f , que correspondem aos cumes de montanhas e aos fundos de vales. Nasce uma nova ilha em torno do ponto p (metamorfose 1) quando o nível das águas desce abaixo do valor $f(p)$ dum máximo local p . Analogamente, um lago desaparece num ponto q (metamorfose 3) sempre que o nível do mar desce abaixo do valor $f(q)$ dum mínimo local q . Chama-se *sela* a qualquer ponto crítico que não seja um máximo nem um mínimo local. Uma função cujo gráfico tenha a forma duma *sela de cavalo* tem um ponto crítico no centro da sela, que não é um máximo nem um mínimo local. Quando o nível do mar desce abaixo do nível crítico, forma-se um *istmo* (metamorfose 2). Veja a figura 1.

Uma função pode ter infinitos pontos críticos. Por exemplo, um *planalto* cujo topo seja perfeitamente horizontal corresponde a uma coleção infinita de pontos críticos. Esta situação é atípica. Qualquer perturbação, causada por um pequeno abalo sísmico, fará com que o planalto se incline muito ligeiramente e a função f passe a ter um único máximo local onde antes existia o planalto. Veja a figura 2.

(IV) *Assumimos que todos os pontos críticos de f são não degenerados.* Chama-se *sela degenerada* a uma sela onde três ou mais regiões se conectam num istmo múltiplo, logo que o mar desce abaixo do nível crítico. Veja dois exemplos na figura 3. Ao perturbar estas selas, pense num abalo sísmico provocando uma pequena perturbação aleatória no gráfico de f , duas ou mais selas (não degeneradas) aparecem no lugar da sela degenerada original. Veja na figura 4 exemplos de perturbações das selas da figura 3.

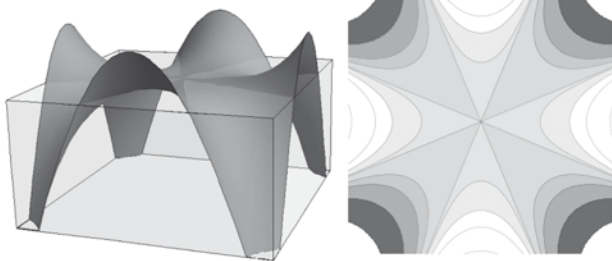


Figura 3: Duas selas degeneradas.

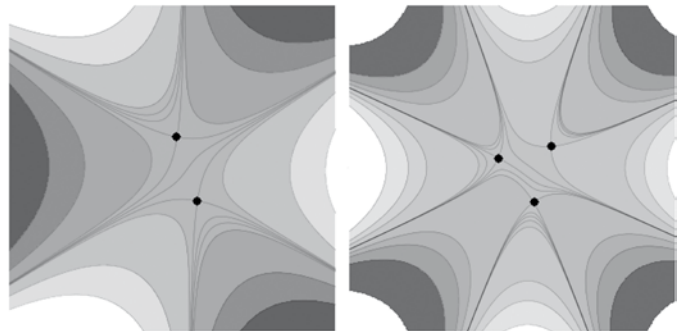


Figura 4: Perturbações de selas degeneradas.

Quanto aos máximos e mínimos não degenerados, sem entrar em pormenores demasiado técnicos, podemos dizer que são pontos críticos tais que, em torno deles, o gráfico de f tem a forma de uma superfície esférica em torno, respetivamente, do seu ponto com cota maior (polo norte) ou do seu ponto com cota menor (polo sul). Estes pontos são “robustos” no sentido que persistem para toda a pequena perturbação do gráfico de f .

As hipóteses (III) e (IV) são *genéricas*.

Uma propriedade genérica é uma propriedade que é partilhada por “quase todas as funções”. Intuitivamente, isto significa que se tivermos um saco que contém todas as possíveis funções suaves e extrairmos aleatoriamente uma função do saco, ela satisfará as hipóteses (III) e (IV).

Vamos chamar *cume* a um máximo local, *poço* a um mínimo local, e *sela* a um ponto crítico de tipo sela. Um nível $c \in \mathbb{R}$ diz-se *regular* se o conjunto de nível N_c não tiver pontos críticos. Imagine c como o nível do mar. Quando c é um nível regular, designamos por $\mu_0(M_c)$, resp. $\mu_1(M_c)$ e $\mu_2(M_c)$, o número de cumes, resp. selas e poços, em M_c . As *componentes conexas* de M_c são as regiões, as ilhas, em que M_c se decompõem. Analogamente, as componentes conexas de N_c são as “curvas” do conjunto de nível N_c . A figura 5 ilustra estes conceitos. Sejam agora

$$\beta_0(M_c) = \#(\text{componentes conexas de } M_c) = \# \text{ ilhas,}$$

$$\beta_1(M_c) = \#(\text{componentes conexas de } N_c) - 1 = \# \text{ lagos.}$$

Estamos agora prontos para enunciar e provar o resultado principal deste artigo.

Teorema *Seja $f(x,y)$ uma função em \mathbb{R}^2 satisfazendo as hipóteses (I),(II),(III) e (IV). Então, para todo o nível regular $c \geq c_0$,*

$$\begin{aligned} \beta_0(M_c) - \beta_1(M_c) &= \mu_0(M_c) - \mu_1(M_c) + \mu_2(M_c), \\ \mu_0(M_c) &\geq \beta_0(M_c), \\ \mu_1(M_c) &\geq \beta_1(M_c). \end{aligned} \quad (1)$$

A figura 6 e a tabela seguinte ilustram este resultado na emersão duma ilha com um cume, uma sela e um poço, desenvolvida em três etapas: A, B e C.

	β_0	β_1	μ_0	μ_1	μ_2	$\beta_0 - \beta_1$	$\mu_0 - \mu_1 + \mu_2$
Etapa A	1	0	1	0	0	1	1
Etapa B	1	1	1	1	0	0	0
Etapa C	1	0	1	1	1	1	1

Vamos supor, para simplificar, que cada nível crítico de f tem um único ponto crítico. Esta é uma hipótese fácil de con-

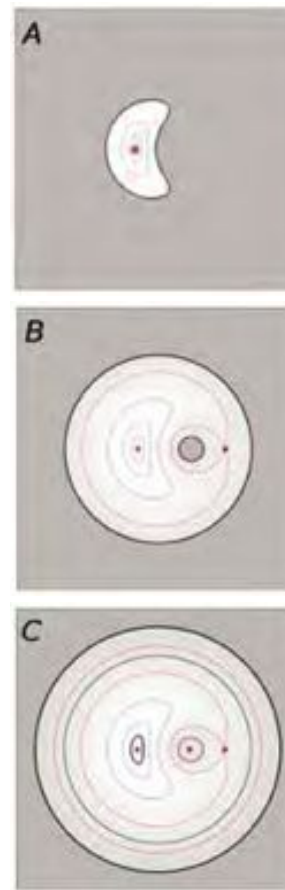


Figura 6: Emersão duma ilha.

tornar, pelo que não é necessário assumi-la no enunciado do teorema. Quando c decresce, as mudanças “geográficas” qualitativas correspondem a mudanças na “topologia” dos conjuntos M_c , que são detetadas por variações dos números $\beta_0(M_c)$ e $\beta_1(M_c)$. Estas mudanças ocorrem de cada vez que o nível do mar c desce abaixo dum nível crítico. Temos assim o “nascimento duma ilha” quando c passa pelo nível dum cume, temos a “emergência dum istmo” quando c cruza o nível duma sela, e o “desaparecimento dum lago” quando c desce abaixo do nível dum poço. Se agora virmos que em cada um destes três casos as relações (1) são preservadas, por um argumento indutivo elas terão de permanecer sempre válidas.

Figura 5: Ilhas e lagos.

Nostrês casos que vamos analisar, c_0 designará um nível crítico, c e c' serão dois níveis regulares tais que $c > c_* > c'$, sendo c_* o único nível crítico entre c e c' . Os números $\beta_0, \beta_1, \mu_0, \mu_1$ e μ_2 reportam-se ao conjunto M_c , i.e., $\beta_0 = \beta_0(M_c)$, etc., enquanto os números $\beta'_0, \beta'_1, \mu'_0, \mu'_1$ e μ'_2 se referem ao conjunto $M_{c'}$, i.e., $\beta'_0 = \beta_0(M_{c'})$, etc. Vamos descrever os vários casos possíveis, deixando ao leitor a verificação em cada caso de que se $\beta_0, \beta_1, \mu_0, \mu_1, \mu_2$ satisfazem (1), então também $\beta'_0, \beta'_1, \mu'_0, \mu'_1, \mu'_2$ satisfazem (1).

No “nascimento duma ilha” aparece uma nova ilha mas nenhum lago novo, pelo que $(\beta'_0, \beta'_1) = (\beta_0, \beta_1) + (1, 0)$. Por outro lado, $M_{c'}$ contem apenas mais um cume do que M_c , pelo que $(\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2) = (\mu_0, \mu_1, \mu_2) + (1, 0, 0)$.

No “desaparecimento dum lago”, o número de ilhas mantém-se, havendo apenas menos um lago, pelo que $(\beta'_0, \beta'_1) = (\beta_0, \beta_1) + (0, -1)$. Por outro lado, $M_{c'}$ contém apenas mais um poço do que M_c , pelo que

$$(\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2) = (\mu_0, \mu_1, \mu_2) + (0, 0, 1).$$

Na “emergência dum istmo”, temos dois casos a considerar. Se o istmo liga duas ilhas distintas, temos $(\beta'_0, \beta'_1) = (\beta_0, \beta_1) + (-1, 0)$. Como $M_{c'}$ contém apenas mais uma sela do que M_c , segue que $(\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2) = (\mu_0, \mu_1, \mu_2) + (0, 1, 0)$. Se o istmo liga dois cabos da mesma ilha, temos a formação dum lago, mantendo-se inalterado o número de ilhas. Pode também acontecer que o istmo ligue dois cabos dum lago ou mar interior, que assim se divide ao meio. Em qualquer caso, o número de ilhas mantém-se e o número de lagos vem acrescido duma unidade, pelo que $(\beta'_0, \beta'_1) = (\beta_0, \beta_1) + (0, 1)$. Como $M_{c'}$ contém apenas mais uma sela do que M_c , segue que $(\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2) = (\mu_0, \mu_1, \mu_2) + (0, 1, 0)$.

□

O resultado anterior lembra a conhecida *fórmula de Euler* para poliedros convexos, ($F - A + V = 2$, onde $F = \#$ faces, $V = \#$ arestas, $V = \#$ vértices do poliedro), o que não é por mera coincidência. Ambas as fórmulas descrevem a “topologia” dum certo objeto: dos poliedros no caso da fórmula de Euler, e da região emersa M_c no caso da fórmula de Morse. O número 2 é o valor da *característica de Euler* de todos os poliedros convexos, um importante invariante topológico que reflete o facto de estes objetos, se os imaginarmos de borracha, poderem ser todos deformados de forma contínua numa esfera. Os números $\beta_0(M_c)$ e $\beta_1(M_c)$ são também invariantes topológicos de M_c , conhecidos como os *números de Betti* de M_c .

O teorema enunciado pode ser generalizado a contextos mais gerais. Em particular, podemos substituir o plano \mathbb{R}^2 por uma superfície compacta, o que nos permite passar de um resultado essencialmente local a um que tem em conta a topologia da totalidade da superfície. O adjetivo “compacta” refere-se ao facto de a superfície ser limitada e de conter todos os seus pontos de fronteira (isto é, os pontos que podem ser aproximados tanto quanto se queira por pontos da superfície). Pense-se, por exemplo, na superfície de uma esfera, ou na superfície de um *donut*, ou na de um oito “insuflado”, ou, ainda, num disco com a circunferência do bordo incluída. Analogamente ao feito acima quando descrevemos a orografia local do planeta através de uma função definida num plano, podemos descrever a sua orografia global utilizando uma função que mede a cota dos seus pontos relativamente à superfície que aproxima a forma média do astro (no caso da Terra, esta superfície será uma esfera cujo raio é o raio médio do nosso planeta).

A primeira relação do teorema enunciado permanece válida para funções definidas em superfícies compactas se na fórmula usarmos $\beta_0 - \beta_1 + \beta_2$ em vez de $\beta_0 - \beta_1$. No caso em que a superfície M é compacta e orientável¹, os números de Betti para uma podem ser caracterizados do modo seguinte: $\beta_0(M)$ é o número de componentes conexas de M . $\beta_1(M)$ é o maior número de “cortes” que podemos fazer sem dividir M em duas componentes separadas. Cada “corte” deve ser efetuado ao longo duma curva simples (isto é, sem autointersecções) fechada, ou duma curva simples aberta entre dois pontos do bordo de M . Finalmente, $\beta_2(M) = 1$ se M não tiver bordo, e $\beta_2(M) = 0$ no caso contrário. Se M for um disco ou um retângulo, então $\beta_1(M) = 0$, porque todo o corte divide M em duas partes. Se M for o toro, então $\beta_1(M) = 2$ porque cortando M ao longo dos dois círculos ortogonais indicados na figura 7 obtemos um “retângulo”, que não pode mais ser cortado sem ser separado. Imagine agora um planeta fictício na forma dum toro, com uma orografia à sua escolha, e procure verificar a validade do teorema.

O teorema é ainda válido em superfícies de dimensão finita arbitrária, e mesmo de dimensão infinita, sob hipóteses adequadas. Na sua essência, a Teoria de Morse mostra-nos como a topologia duma superfície condiciona, e é ao mesmo tempo condicionada, pelo número e o tipo de pontos críticos duma função suave sobre ela definida. A Teoria de Morse, e

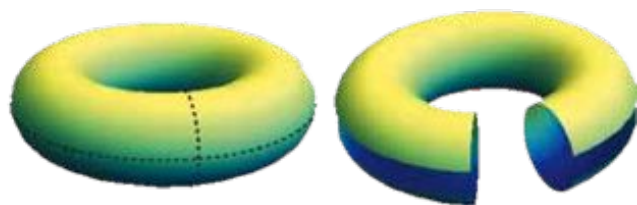


Figura 7: Dissecando um toro.

as suas múltiplas generalizações enquadram-se e expandem o chamado *Cálculo das Variações* com um arsenal de novas técnicas. No seu trabalho [1], além de estabelecer as bases desta teoria, M. Morse faz uma bela aplicação à resolução dum problema da Geometria Riemanniana. Os trabalhos de M. Morse tiveram um impacto profundo numa boa parte da matemática do século XX, em áreas como a Topologia, a Geometria, as Equações Diferenciais e os Sistemas Dinâmicos. A Teoria de Morse influenciou de forma decisiva o trabalho de Stephen Smale, nomeadamente em Sistemas Dinâmicos, como a Teoria dos Sistemas Morse-Smale, e a Teoria Hiperbólica, e na sua demonstração da Conjectura de Poincaré Generalizada para dimensão ≥ 5 , publicada em 1960, e que até então se acreditava ser falsa em dimensões superiores. Como curiosidade, referimos que, segundo o próprio Smale, uma parte desta conjectura foi demonstrada na praia de Copacabana, no Rio de Janeiro. Pode ler mais sobre a vida e o trabalho de Smale, e as suas ligações à escola brasileira de Sistemas Dinâmicos, em [2]. A versão final da Conjectura de Poincaré foi finalmente demonstrada em 2002 por Grigori Perelman para a dimensão 3. O livro [3] de John Milnor contém uma excelente exposição do trabalho de M. Morse. No artigo de *survey* [4], R. Bott, que fez importantes generalizações da Teoria de Morse, faz uma bela síntese desta teoria. O nível das duas referências anteriores deve ser considerado avançado. Recomendamos o vídeo [5] editado pela MAA, com duas lições do próprio Morse sobre a sua teoria, a primeira das quais a um nível bastante elementar.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Morse, *The Foundations of a Theory of the Calculus of Variations in the Large*, Trans. Am. Math. Soc., (1929)
- [2] G. Szpiro, *A Conjectura de Poincaré, cem anos para resolver um dos maiores problemas da matemática*, Gradiva (2007).

[3] J. Milnor, “Morse Theory”, *Annals of Mathematic Studies* AM-51, (1963), Princeton University Press.

[4] R. Bott, “Lectures on Morse Theory, Old and New”, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) Volume 7, Number 2 (1982), 331-358.

[5] M. Morse, *Pits, Peaks and Passes*, Mathematical Association of America, vídeo (1967).

[6] S. Smale, “Differentiable Dynamical System”, *Bull. Am. Math. Soc.* 73 (1967), 747- 817.

¹ Este último termo significa que um caminheiro que percorra qualquer rota que inicie e acabe no mesmo ponto da superfície, não volta ao ponto de partida de cabeça para baixo. Exemplos de superfícies não orientáveis são a fita de Möbius e a garrafa de Klein.

SOBRE OS AUTORES

Pedro M. Duarte licenciou-se em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em 1985, e obteve o seu doutoramento em 1993, na área dos Sistemas Dinâmicos, pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada no Rio de Janeiro. Atualmente é professor auxiliar no DM da FCUL.

Alessandro Margheri licenciou-se em Matemática pela Facoltà di Scienze dell'Università degli Studi di Firenze (Itália) em 1988. Desde o ano 2000 é professor auxiliar do DM da FCUL. A sua área de especialização é a de Equações Diferenciais Ordinárias.



BERNARDO MOTA
Universidade de Lisboa
bernardomota@campus.ul.pt

UM NOVO OLHAR SOBRE OS ESPELHOS DE EUCLIDES

A tradição atribui a Euclides um pequeno tratado sobre reflexão de raios em espelhos; contudo, a incoerência que caracteriza o tratado afasta-o da perfeição lógica dos *Elementos*. Como entender esta discrepância?

O estudo da catóptrica antiga (reflexão de raios visuais e solares em espelhos planos, convexos e côncavos) está repleto de dificuldades. As fontes que chegaram até nós são em número reduzido, sofreram inúmeras alterações ao longo dos séculos e apresentam sinais de contaminação mútua. Entre os textos sobreviventes, conta-se uma miscelânea de proposições atribuídas a Diocles, um excerto intitulado *Liber De Speculis* (*Livro sobre os Espelhos*), que se considera uma tradução de um original de Herão, os livros 3 e 4 da *Óptica* de Ptolemeu e um fragmento pertencente a Antémio de Trales, autor do séc. VI d.C.

A estes deve acrescentar-se a *Catóptrica* atribuída a Euclides, o único tratado aparentemente completo transmitido em grego, mas cujas especificidades representam um quebra-cabeças para o leitor. Tanto a coerência interna como a correção dos resultados, como ainda a qualidade dos argumentos, estão muito aquém do que encontramos nos *Elementos*, o que obscurece a interpretação da obra. As dificuldades começam logo com os postulados e definições, traduzidos em baixo:

- [1] Um raio visual é uma linha reta, cujas partes intermédias cobrem as extremidades.
- [2] Os objetos que se veem, veem-se em linha reta.
- [3] Colocado um espelho num plano e avistada uma altura perpendicular ao plano, ficam em proporção: como a reta entre o espelho e o observador para a que está entre o espelho e a altura perpendicular, assim a linha reta da altura do observador para a altura levantada perpendicularmente ao plano.

[4] Em espelhos planos, tomado o lugar onde cai o cateto [=a perpendicular] do objeto avistado, o objeto avistado deixa de se ver.

[5] Em espelhos convexos, tomado o lugar por onde passa a linha reta que vai do objeto avistado ao centro da esfera, o objeto avistado deixa de se ver. O mesmo acontece em espelhos côncavos.

[6] Se se lançar algo para um recipiente e se se tomar uma distância tal, que deixa de se ver; se se vaziar a água mantendo-se a distância, o objeto lançado ver-se-á novamente.

Como se pode ver, o primeiro é um princípio de visão direta e não reflexa. O segundo parece redundante, à primeira vista. O terceiro dificilmente pode ser considerado um princípio; trata-se de um complicado expediente para permitir concluir, na primeira proposição, a igualdade dos ângulos de incidência e de reflexão (ver fig. 1). O último é sobre refração (e não reflexão) e nem sequer é utilizado no tratado.

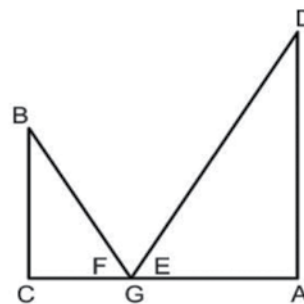


Figura 1: *Catóptrica*, post. 3: $GC:GA=BC:DA$ (B =observador; D =objeto; BG =raio direto; GD =raio refletido; G =ponto de reflexão, BC/DA =perpendiculares ao plano do espelho). Em *Catóptrica*, prop. 1, tira-se a igualdade dos ângulos F e E por *Elementos* 6.6.

O quarto (tal como o quinto) simplesmente não faz qualquer sentido, só sendo válido no caso específico de o observador se encontrar na perpendicular traçada do objeto para o espelho, como quando alguém observa a sua própria imagem num espelho colocado perpendicularmente à sua frente (na fig. 1, *A* só deixa de ser visível quando se coloca *B* entre *D* e *A*, ou atrás de *D*). Já na Antiguidade o princípio causava surpresa. Herão, por exemplo, corrigiu este disparate, substituindo a expressão “lugar onde cai o cateto” pela expressão “ponto de reflexão” (cf. fig. 1: a imagem deixa de ser visível, tapando-se, por exemplo, com cera, o ponto *G*, e não o ponto *A*). É difícil perceber o que o autor do texto da *Catóptrica* tem em mente.

No entanto, aquilo que para nós parece absurdo, não deve tê-lo sido para os autores antigos, cujos textos apresentam formulações equivalentes utilizadas no estudo de fenómenos astronómicos, como, por exemplo, dos eclipses. O eclipse do sol era muitas vezes definido como obstrução do nosso raio visual pela lua; o eclipse da lua, como a interseção, pela terra, da reta que vai do centro do sol ao centro da lua quando os três se encontram alinhados. Eis, a título de exemplo, um interessante passo de Gémino (séc. I d.C.), que aplica a linguagem dos postulados num contexto de visão direta:

...os eclipses não são iguais para todos os observadores, antes havendo grandes variações na grandeza dos eclipses, de acordo com as diferenças dos climas. Ao mesmo tempo, o sol está completamente eclipsado para alguns, meio-eclipsado para outros, menos de meio para outros; para outros ainda, nenhuma parte do sol se vê eclipsada. Para os que se encontram no cateto debaixo da obstrução, o sol está completamente invisível, para os que se encon-

tram parcialmente fora da obstrução, uma parte do sol fica eclipsada, para os que estão fora da obstrução, nenhuma parte do sol se vê eclipsada (*Introdução aos Fenómenos*, c. 10).

As fontes antigas sugerem que os matemáticos antigos (como Aristarco, segundo afirmação de Vitruvius) consideravam a lua como um espelho. Nada mais natural, portanto, do que tentar ler no pequeno tratado de Euclides (seja nos princípios, seja nas proposições) argumentos elaborados para servirem também no domínio da astronomia. E isto faz parte da investigação em história da matemática antiga: alargar o contexto para lá dos textos estritamente matemáticos, porque os menos técnicos podem, por vezes, ser surpreendentemente informativos.

REFERÊNCIAS:

O texto grego de referência da *Catóptrica* de Euclides continua a ser o de J.L. Heiberg e Heinrich Menge (*Euclidis Opera Omnia*. Vol. 7. *Optica, Opticorum Recensio Theonis, Catoptrica cum scholiis antiquis*, Leipzig, Teubner, 1895). Sobre a catóptrica antiga, dois dos títulos fundamentais (com bibliografia completa sobre o tema) são os de A. Mark Smith (*Ptolemy's Theory of Visual Perception*, Philadelphia, American Philosophical Society, 1996) e Ken'ichi Takahashi (*The Medieval Latin Traditions of Euclid's Catoptrica*, Kyushu University Press, 1992). Gémino mereceu atenção recentemente, tendo sido traduzido para inglês (Evans, James; Berggren, J. Lennart, *Geminus's Introduction to the Phenomena*, Princeton University Press, 2006) e francês (Aujac, Germaine, *Geminus. Introduction aux Phénomènes*, Paris, Les Belles Lettres, 2002).



Novo Volume
**Matemática
Elementar de um
Ponto de Vista
Superior**
Felix Klein
Geometria

Adquira toda a coleção
a um preço especial
Loja SPM



*O desconto será aplicado após a autorização.



Imagens digitais e matrizes¹

DIRCE UESU PESCO E HUMBERTO JOSÉ BORTOLOSSI

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

dirceuesu@gmail.com, hjbortol@vm.uff.br

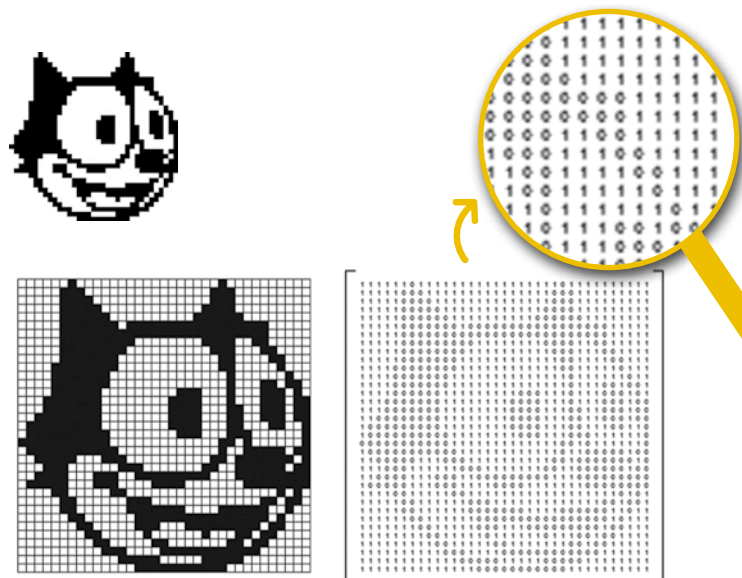
¹ Traduzido do original publicado em acesso livre em <http://blog.kleinproject.org> como uma *Klein vignette*. Tradução de Teresa Caissotti.

1. IMAGENS BINÁRIAS EM ESCALAS DE CINZENTO E DE CORES

As imagens que vê nas páginas da Internet ou as fotografias que tira com o telemóvel são exemplos de imagens digitais. É possível representar este tipo de imagens por matrizes. Por exemplo, a imagem do Gato Félix, pode ser representada por uma matriz 35×35 onde os elementos são os números 0 e 1. Estes números especificam a cor de cada píxel (píxel é o menor elemento gráfico de uma imagem matricial, o qual pode tomar apenas uma cor de cada vez): o número 0 indica cor preta e o número 1, cor branca. As imagens digitais que usam apenas duas cores são chamadas *imagens binárias* ou *imagens booleanas*.

As imagens em escalas de cinzento também podem ser representadas por matrizes. Cada elemento da matriz determina a intensidade do píxel correspondente. Por conveniência, a maioria dos ficheiros digitais usa números inteiros entre 0 (que indica a cor com menor intensidade, o preto) e 255 (que indica a cor com maior intensidade, o branco), o que dá um total de $256 = 2^8$ escalas diferentes de cinzento².

Imagens coloridas, podem ser representadas por três matrizes. Cada matriz especifica a quantidade de vermelho, verde e azul que compõe a imagem. Este sistema de cor é conhecido como **R**(ed) **G**(reen) **B**(lue)³. Os elementos destas matrizes são números inteiros entre 0 e 255, e determinam a intensidade do píxel com respeito à cor da matriz. Assim, no sistema RGB é possível representar $256^3 = 2^{24} = 16777216$ cores diferentes.



Aprenda nesta *Klein vignette* o que têm comum, além do nome, a estrela de cinema de animação dos anos 20 Gato Félix e o célebre matemático do século XX Felix Klein. Fique também a saber como transformar o retrato da Mona Lisa na sua versão em Lego.

² Este número de escalas de cinzento é suficiente para trabalhar, por exemplo, com imagens nas páginas da WEB. No entanto, existem certas aplicações específicas que necessitam de um maior número de escalas de cinzento de modo a poderem reproduzir imagens com maior detalhe e evitar erros de arredondamento em cálculos numéricos, como por exemplo é o caso de imagens médicas.

³ Existem muitos outros sistemas de cor que são usados conforme a aplicação: CMYK (para imprimir), Y'IQ (para as transmissões de TV analógica em NTSC, etc.)

2. PROCESSAMENTO DIGITAL DA IMAGEM E OPERAÇÕES COM MATRIZES

Uma vez que uma imagem digital pode ser representada por matrizes, podemos perguntar de que maneira as operações realizadas nas matrizes poderão afetar a imagem. Por exemplo, na figura 1, se considerarmos a imagem binária A representada pela matriz $A = (a_{i,j})$, então a imagem B correspondente à matriz transposta de A é $B = (b_{i,j}) = (a_{j,i}) = A^T$. A imagem H , por sua vez, corresponde à matriz $(a_{j,35-i+1})$. Tente descobrir a relação matricial entre a imagem A e as outras imagens!

Outro exemplo (figura 2): se determinarmos a média aritmética das matrizes componentes R , G e B de uma imagem a cores de A , obteremos uma versão da imagem em escalas de cinzento (os valores não inteiros são arredondados para o inteiro mais próximo).

Mais um exemplo: usando a multiplicação por um escalar e a soma de matrizes, é possível criar uma imagem com efeitos de transição. Este tipo de imagens é geralmente usado nas apresentações em PowerPoint. Mais precisamente, considerando duas imagens em escalas de cinzento com o mesmo tamanho, representadas por duas matrizes A e Z . Para cada escalar (número real) t no intervalo $[0, 1]$ definimos a seguinte matriz

$$M(t) = (1 - t)A + tZ \quad (1)$$

Repare-se que $M(0) = A$ e $M(1) = Z$ e, para cada t entre 0 e 1, os elementos da matriz $M(t)$ estão entre os elementos das matrizes A e Z . Portanto, quando t varia de 0 a 1, a matriz $M(t)$ varia de A a Z . No caso de imagens coloridas, a transformação apresentada em (1) deve ser aplicada às matrizes R , G , B que compõem cada imagem (ver figura 3).

A multiplicação de matrizes tem também aplicação no processamento de imagens digitais. Apesar de o próximo exemplo ser mais elaborado (utiliza conhecimentos de Álgebra Linear estudados no ensino superior), acreditamos, que mesmo assim será do interesse do leitor, já que esta aplicação deriva da habilidade de decompor a matriz como um produto de matrizes com uma estrutura especial. Os detalhes omitidos poderão ser encontrados nas referências [Lay, 2011] e [Poole, 2005]. Consideremos uma decomposição em valores singulares (DVS), que consiste em escrever a matriz $A_{m \times n}$ como produto de três matrizes

$$A_{m \times n} = U_{m \times m} S_{m \times n} V_{n \times n}^T$$

onde U e V são ortogonais (isto é, $U^T U = I$ e $V^T V = I$) são as matrizes

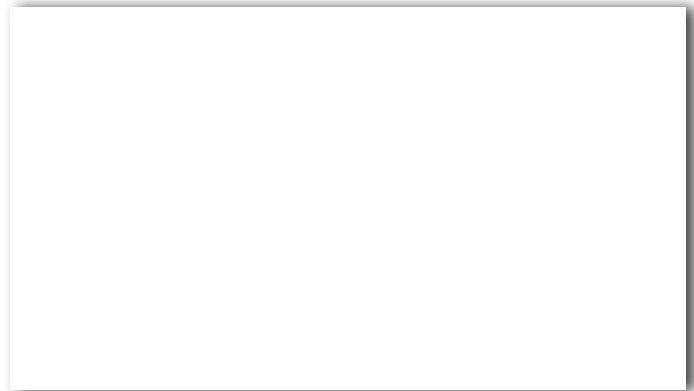


Figura 1

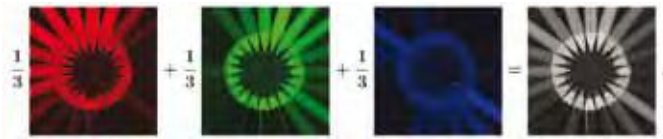


Figura 2



Figura 3

identidade de dimensão $m \times m$ e $n \times n$, respetivamente) e S é uma matriz cujos elementos $s_{i,j}$ são iguais a zero para $i \neq j$ e $s_{1,1} \geq s_{2,2} \geq \dots \geq s_{k,k} \geq 0$, com $k = \min\{m, n\}$. Segue-se um exemplo de uma decomposição DVS

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = USV^T$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^T$$

Mostra-se que qualquer matriz admite uma composição DVS [Lay, 2011] e [Poole, 2005]. Além disso, existem algoritmos que nos permitem calcular essa decomposição utilizando meios computacionais. A chave do nosso exemplo é observar que se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ são as colunas da matriz U e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ as colunas da matriz V , então

$$A = USV^T = s_{1,1}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + s_{2,2}\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \dots + s_{k,k}\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^T$$

Qual a utilidade desta fórmula no processamento digital de imagens? Suponhamos que A é uma imagem em escalas de cinzento de tamanho 1000×1000 transmitida a partir de um satélite para um laboratório na Terra. Em princípio o satélite terá de enviar 1 milhão de números (um por cada píxel). Apenas os primeiros elementos $s_{i,i}$ da matriz S da decomposição DVS de A são significativos (os outros são “desprezáveis”), é então suficiente que o satélite envie, por exemplo, apenas as 20 primeiras colunas de U e V , e os 20 primeiros números $s_{i,i}$ (num total de apenas $20 \cdot 1000 + 20 \cdot 1000 + 20$

= 40020 números que têm de ser enviados). Depois de receber estes dados no laboratório da Terra, é calculada a matriz $s_{1,1}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + s_{2,2}\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \dots + s_{20,20}\mathbf{u}_{20}\mathbf{v}_{20}^T$, o que nos dá aproximadamente a imagem original.

Vejamus um exemplo: a fotografia, na figura 4A em baixo, do matemático Christian Felix Klein (1849-1925) tem $720 \times 524 = 377289$ píxels.

Para a decomposição DVS da correspondente matriz desta imagem, podemos calcular as matrizes

$$s_{1,1}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + s_{2,2}\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \dots + s_{r,r}\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^T$$

para $r = 1, 5, 10, 20$. Estas matrizes geram aproximadamente a imagem original, ilustrada na figura 4B em baixo.

A imagem original corresponde ao caso $r = 524$. Impressionante!

3. OUTRAS APLICAÇÕES

O processamento digital de imagens tem variadíssimas aplicações, como, por exemplo, na deteção remota de imagens, na transmissão de dados, em medicina, em robótica, na visão computacional, na indústria cinematográfica, etc. Em particular na deteção remota, as imagens adquiridas pelos satélites são úteis para monitorizar recursos naturais, para fins cartográficos e de análise do crescimento urbano, e em muitas outras aplicações ambientais. Na transmissão de imagens, temos comunicações por via fax, redes, Internet e circuito fechado de TV para segurança. Em aplicações médicas, temos processamento de imagem de raios-X, as imagens de projeção da tomografia axial, radiologia, ressonância magnética nuclear (RMN) e ultrassom de digitalização.

Certos métodos de aquisição e transmissão podem gerar algum “ruído” na imagem. O filtro de mediana é uma técnica de processamento da imagem usado para remover ou para

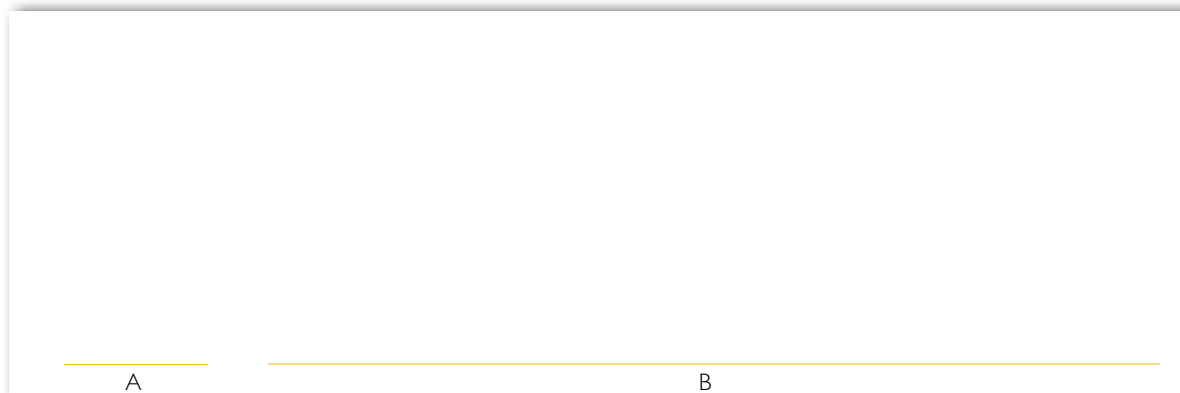


Figura 4

reduzir os seus efeitos: para cada elemento da matriz que representa a imagem, observamos os seus elementos vizinhos e, em seguida, colocamo-los numa lista ordenada. O filtro de mediana (figura 5) consiste em escolher o elemento central desta lista e substituir o elemento em causa por este.

Existem muitas outras técnicas de processamento de imagem com objetivos diferentes. A figura 6 ilustra exemplos de ajuste de contraste, deteção da borda e limiar.

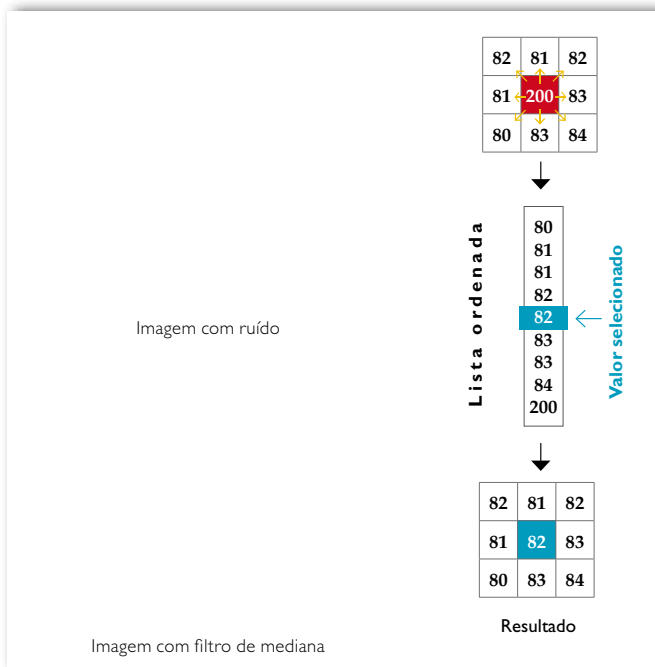


Figura 5

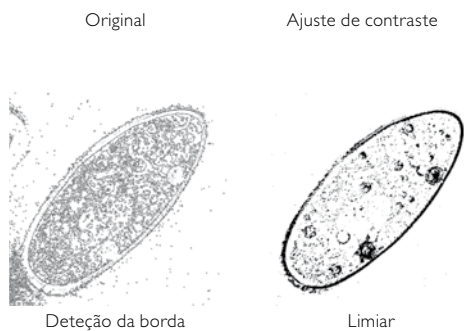


Figura 6

4. COMENTÁRIO FINAL

O objetivo deste texto é o de apresentar uma aplicação pouco conhecida de matrizes para professores e alunos do ensino secundário: o processamento de imagens digitais. É importante notar que as ferramentas matemáticas relacionadas com este tema vão muito para além das matrizes. O assunto é vasto, rico e moderno. Infelizmente, o limite de poucas páginas recomendadas para este artigo não nos permite dar mais detalhes. Como ponto de partida para o leitor motivado saber mais, recomendamos os livros [Gonzalez e Woods, 2007] e [Gomes e Velho, 2008].

5. REFERÊNCIAS

No site <http://www.ufr.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix-enhtml>, existe uma série de aplicações interativas que permitem explorar as relações entre matrizes e imagens digitais apresentadas neste texto. Encontra-se também um arquivo DOC com sugestões de exercícios a serem trabalhados em sala de aula.

Estas são as referências citadas no texto:

Gomes, J.; Velho, L. *Image Processing for Computer Graphics and Vision*. Springer-Verlag, 2008.

Gonzalez, R. C.; Woods, R. E. *Digital Image Processing*. Third Edition. Prentice Hall, 2007.

Lay, D. *Linear Algebra and Its Applications*. Forth Edition. Addison Wesley, 2011.

Poole, D. *Linear Algebra: A Modern Introduction*. Second Edition. Brooks Cole, 2005.

A fotografia da Mona Lisa em LEGO é propriedade de Marco Pece Udronotto, que gentilmente concedeu a permissão para ser usada neste trabalho.

SOBRE OS AUTORES

Dirce Uesu Pesco, doutorada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2000), é investigadora em Computação Gráfica Aplicada, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, em Niterói, Brasil.

Humberto José Bortolossi é doutorado em Matemática, pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (1999). Desenvolve investigação em Otimização e Informática no Ensino da Matemática Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense.



ISABEL S. LABOURIAU
Universidade do Porto
islabour@fc.up.pt

ISABEL LABOURIAU CONVERSA COM

GRACIANO DE OLIVEIRA

Graciano de Oliveira não precisa de ser apresentado aos leitores da *Gazeta de Matemática*, já que foi recentemente editor da *Gazeta* e três vezes presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática. O que talvez alguns leitores não saibam é que ele é autor de 49 artigos de investigação (segundo o *Mathematical Reviews*), sozinho ou em colaboração, e que orientou 11 estudantes de doutoramento, tendo pelo menos 51 descendentes matemáticos contando netos, bisnetos e uma trineta. Vai aqui meia conversa, depois o meu mote e uma linda glosa.

Tudo começou com uma troca de *e-mails* para tentar combinar uma conversa por telefone que seria transcrita para a *Gazeta*. Graciano respondeu que preferia fazê-lo por escrito, para poder pensar e rever com calma o que iria dizer. Mandeí uma lista de temas e provocações. Veio a resposta, que não tive coragem de estragar introduzindo perguntas. Enquanto a resposta não vinha, conversávamos por *e-mail*.

E-MAILS

GRACIANO Já comeci a escrever para a entrevista, mas eu sou um bocado lento a escrever. Sempre fui, acho que não tenho jeito para escrever. De facto, não tenho veia de escritor, mas acabará por sair. Que lhe parece? Devido à minha lentidão, não sei quando estará pronta.

ISABEL A minha ideia de telefonar era que você é bom conversador, eu sei, o falado sai mais fácil do que o escrito. Entendo bem, porque eu também sou assim... em matemática, dou um seminário muito facilmente, mas levo séculos para escrever um artigo. Você também é assim em matemática?

GRACIANO Sim, sim, sempre me pareceu que falar é mais fácil que escrever, acho que sou um bocado exibicionista e acho que gosto de ter espectadores por perto!!

ISABEL Acho que “exibicionista” é um pouco injusto. Um dos problemas de redigir é não ter um interlocutor ou imaginar um que seja muito crítico. Falando, a gente sabe a quem está se dirigindo. E o falado vibra no ar e logo desaparece, enquanto o escrito fica. Mas é ilusão: sempre que eu digo alguma coisa errada em uma aula, o danado do erro aparece de volta nos exames.

GRACIANO Logo que possível, eu envio-lhe os textos e até sugestões de perguntas. Acha que posso propor ou sugerir perguntas? É que não me faz certas perguntas porque não conhece (penso eu) alguns acontecimentos da minha vida. Por exemplo, poderia pôr-se uma pergunta a respeito de incursões políticas da minha parte? Que lhe parece? Depois pode selecionar o que achar melhor e juntar ou suprimir perguntas. Claro, podemos também acertar verbalmente.

ISABEL Sugira todas as perguntas ou assuntos que quiser. A ideia é ser mais uma conversa do que uma entrevista. Eu sei que redigir essas coisas é bastante difícil.

GRACIANO É mesmo.

ISABEL Pode ficar mais fácil se for mais interativo: por exemplo, o que você iria pôr sobre incursões políticas?

GRACIANO Bem, a ideia é não ser demasiado monótono falando estritamente só de matemática. Que acha?

ISABEL Acho ótimo, afinal os matemáticos são pessoas, fazem outras coisas também. Fiquei curiosa!

MOTE

Eu queria conversar sobre as mudanças que aconteceram entre os matemáticos em Portugal. Eu estou aqui desde 1983 e noto uma enorme diferença. Algumas coisas estão melhores, outras piores e outras simplesmente diferentes. Tenho a minha lista, mas queria ver a sua antes. Além do mais, eu só tenho informação indireta sobre como era antes disso.

Em Portugal há um grupo enorme que faz investigação em Álgebra Linear, você é um deles, gostaria de comentar?

Em outros países, os matemáticos vão às reuniões das sociedades de matemática deles. Estou pensando nas reuniões da AMS, no British Mathematical Colloquium ou no Colóquio Brasileiro de Matemática. Aqui vão muito pouco, quase só quando são conferencistas convidados. Isto quer dizer que aqui não há um lugar onde os matemáticos se encontrem. Alguma ideia de porque é assim e de como isto poderia mudar?

Sobre o ensino de matemática nas escolas: os programas são muito menores do que eram antes, ou são diferentes?

Como é a vida de um matemático depois de aposentado? Sabática permanente?

Como foram as suas temporadas no Brasil e em Macau?

Acho que isso já dá um bom começo de conversa, mas se tiver temas e provocações no sentido inverso, mande!

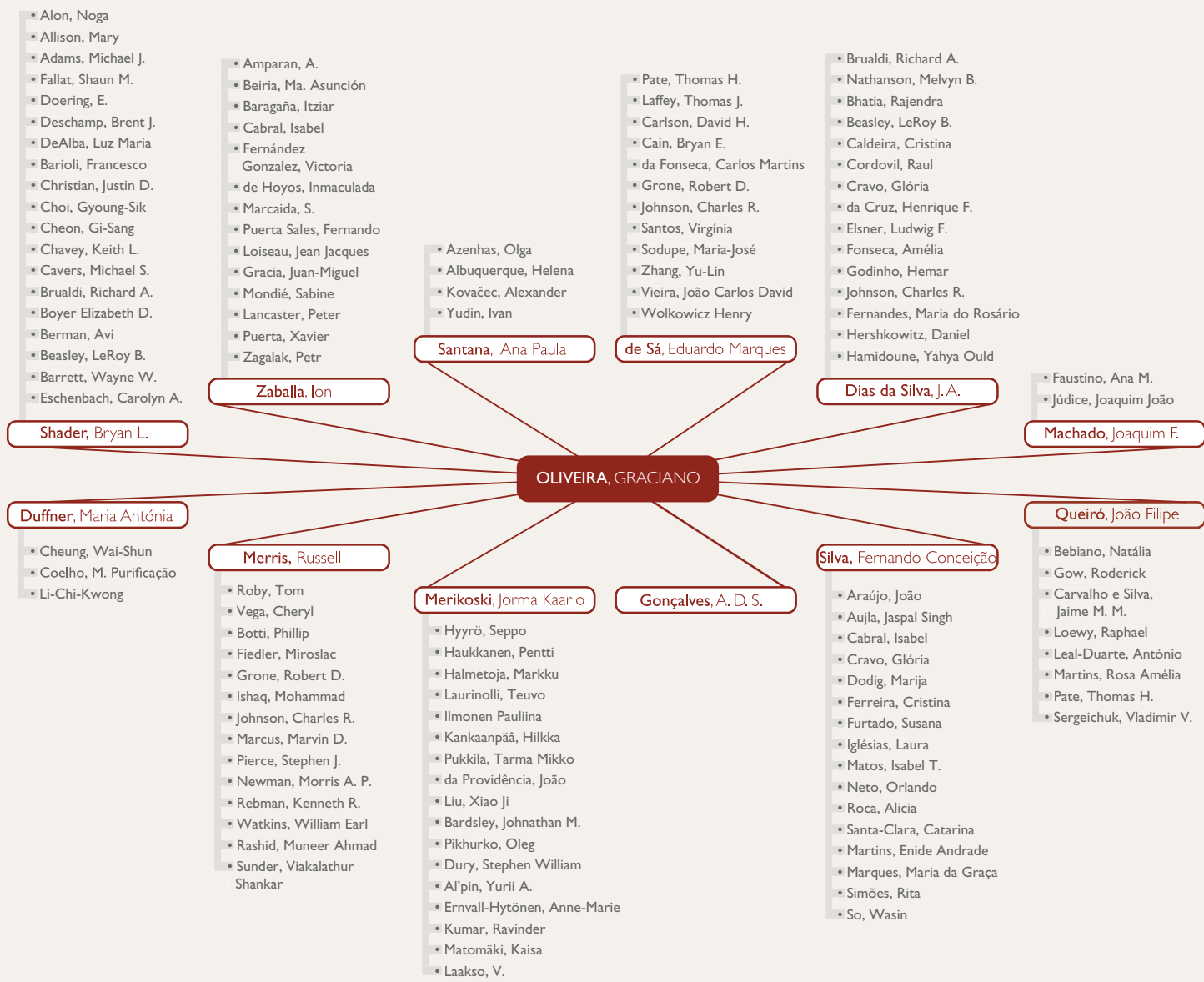
GLOSA

APOSENTAÇÃO Nunca ambicionei aposentar-me. Mantenho-me ativo, embora não tenha a capacidade de outrora. Os indícios de senilidade avançam com rapidez. Mas ainda dou aulas, coisa de que gosto, e leio. Depois de aposentado ainda fui, por exemplo, diretor da *Gazeta de Matemática* por uns anos. Agora estudo matemática despreocupadamente e motivado essencialmente pelo gosto. Agora resido em Lisboa e quero continuar a dar aulas.

O QUE LÊ? Tenho lido, lido não é o termo, tenho de dizer estudado, coisas interessantes no âmbito de Teoria dos Anéis, Corpo dos p-ádicos, Lógica, etc. Fora da matemática, as minhas leituras recentes foram livros de Philip Roth, Paul Auster, Naguib Mahfouz, Cesário Verde, Máximo Gorki e o que me apetece. Só por gosto, não tenho em vista aplicações. Se estivesse no ativo não poderia fazer isto, suponho. Teria de produzir não sei quantos artigos por ano, independentemente da qualidade. À medida que os anos passam leio menos matemática e muito mais literatura. Freqüento os blogues, sobretudo os de carácter político.



Graciano de Oliveira aos 40 anos



Rede de colaboradores de Graciano de Oliveira - coautores de seus artigos e coautores de seus coautores, segundo o Mathematical Reviews em Outubro de 2012.

PLANOS PARA O FUTURO Para o futuro? Talvez ultrapassar (em idade) a professora Pilar Ribeiro ou até passar a perna a Manoel de Oliveira. Depois se verá... Talvez concorra a uma bolsa (se ainda houver) para ir não sei para onde, se calhar fazer tijolo ou qualquer coisa igualmente divertida.

ÁLGEBRA LINEAR Tem-se publicado muita coisa. Refiro-me ao grupo português. Entre o que se publicou encontram-se resultados notabilíssimos. Emprego o superlativo propositalmente, porque são acima da média. Mas não quero citar nenhum aqui porque, para falar verdade, não conheço tudo. Acompanhei até certo ponto, depois já não consegui. Estou a

referir-me a trabalhos de meus ex-orientandos e de orientandos de orientandos, não sei até que geração. Não sei quantos descendentes matemáticos tenho, embora saiba que já tenho bisnetos crescidos. Grande parte deles ultrapassou-me largamente, não só em quantidade (que é o que hoje em dia conta) como em qualidade (que é ao que eu dou importância). Se calhar, exagero, pode pensar-se que ao elogiar os feitos dos mais novos estou a elogiar-me a mim próprio. Se calhar, é verdade. Confesso que não me sinto em boa posição para avaliar, outros que o façam com mais distanciamento.

O grupo de Álgebra Linear cresceu enormemente, é certo. Uma razão de peso era ser possível encontrar cá orientador

para efeitos de doutoramento. Havia quem tivesse dificuldade em se deslocar para fora do país e, noutros ramos, era difícil ou impossível encontrar orientador.

A certa altura, eu próprio pus travões ao crescimento da Álgebra Linear em Portugal.

INCURSÃO PELA POLÍTICA Sim, interesse-me bastante pela política apesar de não ter apetência por cargos políticos, nem sequer dentro da universidade. Para isso é preciso habilidade. Como me interessa o nosso destino, interesse-me pela política já desde antes do 25 de Abril. Eu achava a ditadura insuportável e o atraso de Portugal intolerável. Detestava o país do respeitinho e do “sabe com quem está a falar?”. Em criança não vivi num ambiente que me despertasse para a política. Quando acabei a escola primária, estava convencido do que me tinham metido na cabeça sobre o império colonial português, que era a terceira potência colonial, etc., etc. Mas aos 12 anos os meus pais emigraram para Angola e eu fui com eles. O que vi destruiu de imediato as ideias da escola primária e, sem que ninguém me explicasse, achei que aquilo não podia ser. Ficou para sempre na minha retina o que vi no dia em que o barco onde viajava atracou em Luanda. Foi muito cedo, ao amanhecer... Subi ao convés e olhei para o cais. A fotografia ficou-me na retina (não tinha máquina fotográfica) até hoje. Vi uma mole imensa de pretos (nunca tinha visto tantos juntos) descalços e esfarrapados. Eram os estivadores à espera de começarem a descarregar o barco. Fiquei estarecido com a miséria que aparentavam apesar de, nesse tempo, nas aldeias portuguesas também haver muita. Achei esquisito e bailaram-me (e ficaram definitivamente abalados) na cabeça os conceitos da escola: império, missão civilizadora, etc. Só tinha 12 anos mas pensei que não podia ser e o que presenciei mais tarde, em três anos de Angola, confirmou a primeira impressão.

Pouco antes do 25 de abril tomei contacto com o marxismo-leninismo, que me seduziu e encantou. Passei uns três ou quatro anos em que praticamente só lia sobre marxismo. O materialismo histórico fascinou-me e até me parecia que, para um matemático, era uma doutrina irresistível.

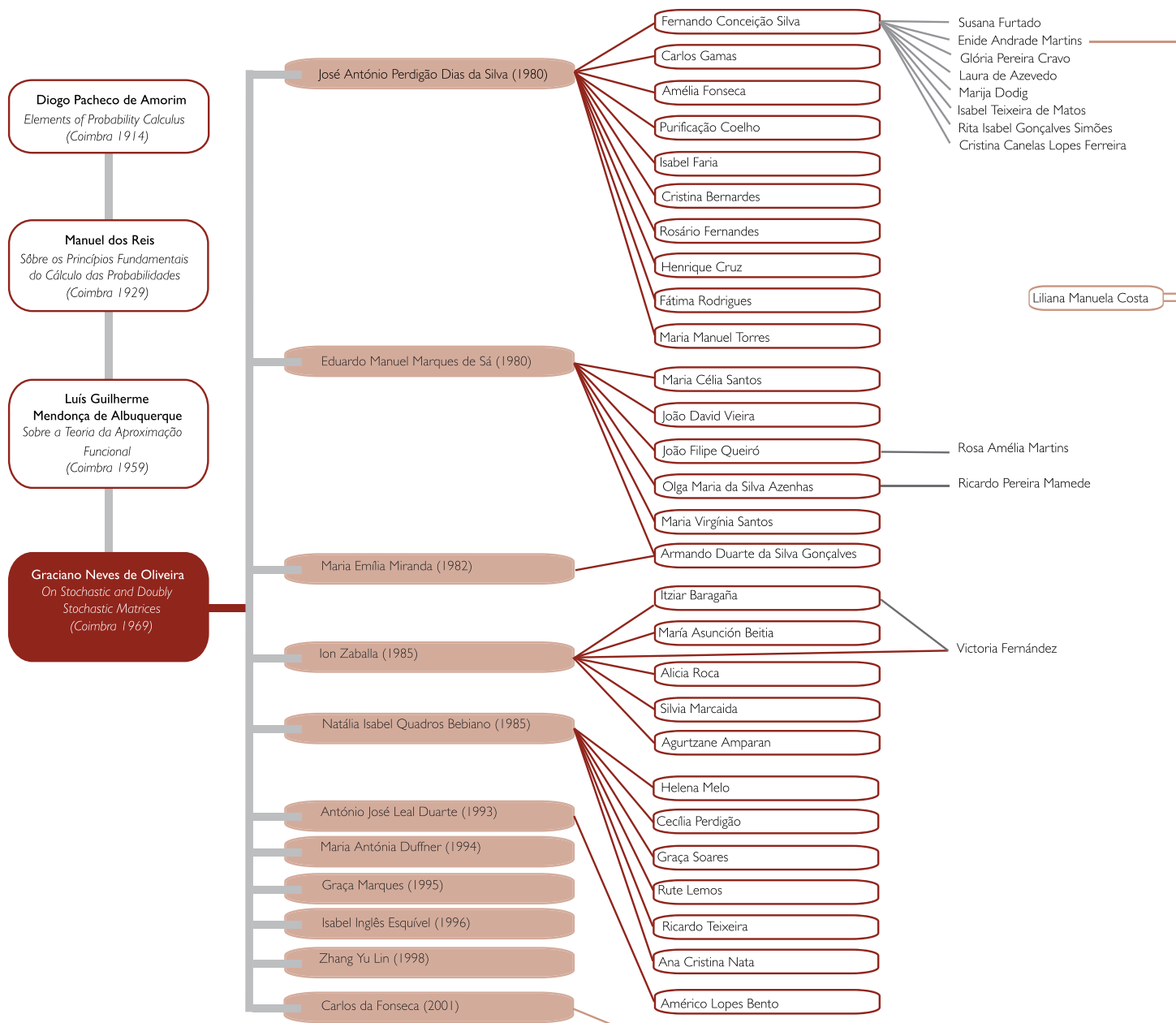
Quanto à matemática, a paixão nasceu em criança. No liceu já sentia uma grande atração mas não sei porquê.

DEMISSÃO Em março de 1969, doutorei-me em Coimbra e tornei-me 1.º assistente (hoje diz-se professor auxiliar). Foi o ano

da crise académica. Tornei-me *persona non grata* e o Conselho da Faculdade decidiu, por unanimidade, demitir-me, apesar da extrema falta de doutorados na época. Fiquei sem emprego. Houve uma tentativa do professor Sebastião e Silva para me fazer contratar pela Universidade de Lisboa, mas falhou. Mais tarde, repetir-se-ia uma cena semelhante com a Universidade do Porto com intervenção do professor Arala Chaves e do professor Coimbra. Senti que a minha carreira académica estava terminada em Portugal: nenhuma universidade portuguesa me queria porque achavam que isso seria uma desfeita para quem me demitira por razões não académicas. Fiquei desempregado e estive com uma bolsa no Centro de Cálculo da Fundação Gulbenkian. Aí congeminei a versão final do meu mais importante artigo (ou *paper* se preferir). Acabei numa universidade brasileira no Recife, Pernambuco, graças à intervenção do professor Ruy Luís Gomes que também lá estava. Mais tarde regressei e entrei na Universidade de Lisboa. Foi o professor Almeida Costa quem dinamizou essa entrada.

MINISTRO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA Não me identifico com os valores da direita. Nem com as ideias neoliberais, privatizações, etc. Nem com a sobrevalorização da competitividade em relação à solidariedade. A submissão da política ao mercado e à finança não me agrada. A desvalorização da ideologia horroriza-me. Detesto o Governo que elegemos (eu não contribuí). Isso não significa que do atual ministro, que conheço há alguns anos, não possam sair coisas positivas. Por exemplo, na questão do eduquês. Conhecem-se as opiniões de Nuno Crato. Não sei se terá poder para levar por diante as transformações que preconiza. Talvez consiga, e isso pode ser muito positivo e dar-lhe lugar na história como o ministro que acabou com esta brincadeira. Por outro lado, espero que não prejudique gravemente a escola pública nem ajude a aumentar o desemprego dos professores. Não aprovo a dicotomia prematura entre carreira académica e profissionalizante. Espero que não destrua a investigação, que chegou a um nível muito difícil de conquistar, por causa de um orçamento que causa calafrios. Há demasiados cientistas a abandonarem o País.

AVALIAÇÃO Nunca simpatizei com o processo de avaliação. Pareceu-me sempre um processo demasiado burocrático e eu nunca gostei de relatórios nem de preencher impressos e questionários que se destinam mais a enfeitar estantes do que



Genealogia matemática de Graciano de Oliveira: orientandos a laranja, e descendentes, incluindo uma trineta. Começamos com dados do *Mathematics Genealogy Project* e fomos completando a informação. Com certeza faltam muitos netos e bisnetos. A primeira bisneta, Susana Furtado, doutorou-se em 2000. A primeira trineta, Liliانا Manuela Costa, que também é neta, doutorou-se em 2012. Quem tiver mais informação pode enviá-la para completarmos o quadro, ou, melhor ainda, pode incluí-la no *Mathematics Genealogy Project*.

a serem lidos (felizmente). Recordo-me sempre de incidentes da minha infância (que me traumatizaram para toda a vida, como hoje se diz) em que tinha de preencher impressos e, no fim, havia sempre algo que não estava bem, faltava um carimbo ou selo branco e uma assinatura tinha de ser reconhecida. Eu tenho a mania do estudo e disponibilizar-me para ser avaliado parecia-me uma enorme perda de tempo. Só obrigado. Já fazer trabalho de *referee* ou de *reviewer* para

a *Mathematical Reviews* ou *Zentralblatt* agradava-me. Preferia até participar em júris de doutoramento ou de concursos. Tinha de estudar e era o que eu já fazia por dever da profissão que escolhi. A avaliação implica uma grande perda de tempo, inclusivamente para os avaliadores. Quando começamos a avaliar pelo número de artigos (que passaram a ser chamados *papers*) desanimei definitivamente e nunca mais pude ouvir falar de tal coisa, fiquei com um traumatismo vitalício.

Custa-me a crer que pessoas inteligentes acreditem nos índices que por aí abundam. Alguns são uma brincadeira.

FUNÇÕES Nunca senti muita inclinação para o desempenho de funções políticas ou administrativas na universidade. Até tinha uma certa aversão, hoje acho que exagerada, por certos cargos que me pareciam necessitar da leitura de dossiers sem graça. Nem teria habilidade para desempenhar cargos políticos, penso. Só senti vontade de ser Presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, o que consegui por três vezes, em 1986-88 depois em 1996-98, e finalmente de 1998 ao ano 2000, Ano Mundial da Matemática. O biênio de 1996-98 foi precedido de umas eleições animadíssimas e disputadíssimas. Cheguei a haver uma Assembleia Geral (normalmente os participantes não chegavam à dúzia) em que o salão era pequeno para conter todos. Confesso que nunca entendi o fenómeno mas alimentou o meu ego. Fora essas, as eleições costumam ser uma sensaboria.

DO QUE GOSTEI MAIS Provavelmente, de ter sido presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática. E de ter sido *dean* da Faculty of Science and Technology da Universidade de Macau e de aí ter contribuído para o início da participação de Macau nas Olimpíadas Internacionais de Matemática. Ainda hoje torço pela equipa de Macau. Para presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática senti apetência, para *dean* em Macau não. Desempenhei o cargo por mero acaso. Mas gostei imenso.

Outras coisas de que gostei: (i) do 25 de abril e do período que se lhe seguiu; (ii) no âmbito profissional, deixe-me pensar. Fiquei feliz quando consegui a primeira aceitação de um artigo, quando pela primeira vez fui convidado para *main speaker* numa conferência internacional, quando fui convidado para o *editorial board* da Linear Algebra and its Applications. Também achei graça quando fui eleito (não esperava ganhar) vice-presidente da International Linear Algebra Society. Por acaso, eu ando quase sempre feliz mesmo quando as coisas correm mal, como, por exemplo, quando em 1969 fui despedido pela Universidade de Coimbra. Aí senti-me um herói.

E já agora, do que não gostei? Não me lembro bem. Senti uma espécie de desfalecimento quando fui provido definitivamente e quando requeri a aposentação.

MELHORES E PIORES No nosso país, as coisas estão melhores em muitos aspetos. Quando eu era jovem, muitas crianças não iam à escola ou iam só por três ou quatro anos. Muitas andavam descalças, sujas e esfomeadas. Muitas casas, sobretudo nas aldeias, não tinham água nem eletricidade e chuveiro, com ou sem água quente, não se sabia o que era. Muito poucos, pouquíssimos, entravam na universidade.

Na escola e na universidade muito mudou. Quando eu fui aluno da universidade e assistente, não se sabia praticamente o que era isso de investigação. A Universidade de Coimbra tinha e tem uma ótima biblioteca, mas as revistas permaneciam serenas e intocáveis nas estantes. Doutoramentos só, ou quase só, no estrangeiro com uma bolsa. A maior parte dos professores confessava-se incapaz de orientar para um doutoramento, e com razão. As licenciaturas tinham estrutura idêntica em todas as universidades. E universidades, só em Lisboa, Porto e Coimbra. Salvo raras exceções os programas eram antiquadíssimos. Podia chegar-se ao fim da licenciatura sem nunca ter ouvido palavras como isomorfismo, bijeção, topologia, espaço vetorial, grupo, anel, relação de equivalência, etc. Eu dizia que a licenciatura era à base de calcular derivadas e primitivas e o famoso integral do osso.

Recentemente algumas coisas pioraram, ou melhor, eu não gosto delas. As atividades de pós-graduação burocratizaram-se, os professores tendem a perder autonomia. Eu fiz coisas que hoje só são possíveis com montes de impressos, pagamento de propinas e relatórios. A mania da pedagogia irrita-me. Às vezes, certos professores parecem-me masoquistas com o que defendem e apoiam.

Bem, globalmente, no que respeita ao ensino superior e investigação, o progresso foi, apesar de tudo, de tal ordem que nem vale a pena comparar com os aspetos negativos. Hoje o que se ensina na licenciatura é idêntico ao que se ensina em qualquer outro país. E a pós-graduação, a investigação, etc., não nos envergonha, suponho eu, atraindo até estudantes estrangeiros, o que dantes era inimaginável.

ENSINO DA MATEMÁTICA NO SECUNDÁRIO Não me considero muito bem preparado para responder... não tenho experiência de ensino de adolescentes. Mas tenho a ideia de que a exigência decresceu consideravelmente. Não tenho a menor simpatia por aquilo que Marçal Grilo chamou eduquês. Parece-me que não se incute nos jovens a ideia de que só com



trabalho árduo se aprende. E que a memória é importantíssima. E que em matemática é impossível progredir sem dominar bem o que está para trás. Generalizou-se a ideia de que as crianças e os adolescentes são uma espécie de deuses a quem todos devemos respeito. E que eles pouco respeito devem aos professores. Se se contrariam...traumatizam-se para toda a vida. Dá vontade de rir. E parece que se pressupõe que não têm maturidade para terem noção de ética ou de dever. Deveres, só os professores têm, a começar pelo de motivar os alunos e o de prestar contas aos paizinhos. Apesar de tudo e comparando com o meu tempo, acho que se deu um grande salto em frente. Nos últimos 30 anos Portugal fez o que outros fizeram em 60.

ESTADA EM MACAU Adorei. Por várias razões, incluindo a gastronómica. Pelo contacto próximo com gentes das mais variadas origens. Também viajei muito pelo Extremo Oriente e passei a ter uma visão do mundo muito menos eurocêntrica. À China fui tantas vezes que perdi a conta. A primeira vez fui a pé. Cheguei às Portas do Cerco e, zás, atravessei a fronteira e vi-me em Gongbei, na mítica República Popular da China. Visitei Cantão, Pequim, Xian, Xangai, Kunming, Hangzhou, etc. A maior parte das vezes fui como matemático fazer seminários em universidades. E visitei muitos outros países, do Vietname ao Nepal, da Índia à Malásia, na qualidade de turista.

CHINA Fiz muitos esforços e procedi a inúmeras diligências para fomentar as relações científicas entre Portugal e a China. Os chineses mostraram-se muito recetivos. Sempre que visitava uma universidade, rodeavam-me muitos estudantes pós-graduados. Mostravam grande anseio por virem fazer uma pós-graduação fora da China. Não resultou apesar disso. Mas registo como resultado positivo a vinda para Portugal de uma minha orientanda chinesa, professora Zhang Yulin, hoje professora auxiliar da Universidade do Minho.

ESPÍRITO ASSOCIATIVO Entre nós o espírito associativo não me parece muito forte. Portugal tem enfermado de um razoável atraso científico, por isso muita gente achava que coisas de nível elevado, só no estrangeiro. Portanto, não valeria a pena perder tempo em atividades portuguesas ou mesmo de colaboração com espanhóis. Além disso, no tempo da ditadura toda a associação era mal vista, melhor, perseguida. A Sociedade Portuguesa de Matemática foi fundada em 1940, mas só conseguiu legalizar-se em 1977. E acho que entre nós há a ideia de que o que dá prestígio são os cargos que emanam do Estado. A Sociedade Portuguesa de Matemática não emana do Estado... ser reitor ou simplesmente presidente de um departamento parece ser mais apetecível, suponho eu.

Eu sempre pensei que além das relações com outros países, a atividade interna deveria ser promovida. Por isso fui Presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática por três vezes (no primeiro mandato, os estatutos chamavam-me secretário-geral). Foi dos cargos que mais gostei de desempenhar. A começar pela minha eleição em 1996, que foi agitadaíssima e me deu muito gosto. O caso terminou em tribunal e até hoje não percebi a razão da agitação, o que só prova a minha falta de inteligência para estas coisas. Tanto mais que quem se me opunha eram pessoas de elevadíssima craveira intelectual (com uma única exceção). Cedo reconheci a minha falta de inteligência política e por isso não me candidatei a outros cargos. Deu luta e, na altura, eu era suficientemente jovem para gostar. À distância, acho que foi positivo. Por um lado, chamou a atenção para a existência da Sociedade Portuguesa de Matemática, por outro, ajudou a incutir a ideia de que a Sociedade Portuguesa de Matemática não era um grupo de amigos que faziam o que lhes apetecia, espírito a que sempre me opus. Havia que cumprir a lei.



LANÇAMENTO OFICIAL DA MPT2013

O dia 5 de março ficou marcado pelo lançamento oficial, a nível europeu, da iniciativa Matemática do Planeta Terra 2013 (MPT2013), um projeto à escala global com o alto patrocínio da UNESCO, que pretende envolver matemáticos, investigadores, professores, alunos e o público em geral. Em Portugal, a cerimónia oficial decorreu na mesma data no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa. Durante o ano de 2013, centenas de instituições científicas de todo o mundo realizarão conferências, *workshops* e outras atividades no âmbito do MPT2013, em que o foco principal será a investigação. Paralelamente, serão dinamizadas ações para o público em geral, focadas na divulgação do papel da matemática no estudo do nosso planeta. Também a SPM se encontra associada a esta iniciativa, nomeadamente através da promoção de conferências em parceria com o Centro Internacional de Matemática, do apoio à edição de um livro de divulgação deste tema pela IST Press, e da realização da sua Escola de Verão de Matemática sob a perspetiva do MPT2013. Além da SPM, em Portugal, são parceiros internacionais do MPT2013 as seguintes entidades: Associação de Professores de Matemática, Associação Ludus, Centro Internacional de Matemática, Museu da Ciência da Universidade de Coimbra e Museu Nacional de História Natural e da Ciência.

LIVRO IST PRESS EXPLORA TEMAS DA MPT

Um livro de divulgação sobre a Matemática do Planeta Terra será publicado no decorrer do verão com o apoio de diversas entidades, nomeadamente da SPM. Os 16 capítulos que o compõem foram especificamente redigidos para esta obra por matemáticos e cientistas portugueses, ou que trabalham em Portugal, e refletem as várias facetas da Matemática da Terra, como planeta físico, vivo e humano.

ESCOLA DE VERÃO DA SPM REALIZA-SE EM SETEMBRO

A Escola de Verão da Sociedade Portuguesa de Matemática 2013 (EVSPM) realizar-se-á entre os dias 5 e 7 de setembro, no Museu Nacional de História Natural e da Ciência, em Lisboa, e terá como tema a MPT2013. Durante três dias, a comunidade científica e escolar terá a oportunidade de explorar e discutir importantes aspetos da matemática, sob a perspetiva da Matemática do Planeta Terra, em diversas atividades, tais como sessões plenárias e temáticas, mini-cursos e exposições. A EVSPM destina-se essencialmente a professores de Matemática dos ensinos básico e secundário, investigadores, estudantes, bem como a todos aqueles que se interessam pela matemática e pelas suas aplicações. As inscrições para a EVSPM serão abertas em breve.



CONFERÊNCIAS DO CENTRO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Duas conferências internacionais e duas escolas avançadas dedicadas à MPT2013 serão organizadas pelo Centro Internacional de Matemática (CIM) e apoiados pela SPM, pela Sociedade Portuguesa de Estatística e pela Associação Portuguesa de Investigação Operacional. Entre 25 e 27 de março realiza-se a conferência “Energy and Climate Change”, na Fundação Calouste Gulbenkian (FCG). Nos dias 20 a 23 de março e 27 a 28 de março decorrerá, na Faculdade de Ciência da Universidade de Lisboa, a escola avançada “Mathematics of Energy and Climate Change”. Em setembro, entre os dias 2 e 4, a FCG apresenta a conferência “Dynamics, Games and Science” e nos dias 26 a 31 de agosto e 5 a 7 de setembro decorrerá no Instituto Superior de Economia e Gestão, da Universidade Técnica de Lisboa, uma escola avançada subordinada ao mesmo tema.



CAMPEONATO NACIONAL DE JOGOS MATEMÁTICOS ANIMOU ÉVORA NO DIA 1 DE MARÇO

Cerca de 1700 alunos de mais de 350 escolas de todo o País encheram, no dia 1 de março, a Arena d'Évora para participarem em mais uma final do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM). Centenas de alunos dos três ciclos dos ensinos básico e secundário disputaram, em 12 torneios simultâneos, os jogos "Semáforo", "Cães e Gatos", "Rastros", "Hex", "Avanço" e "Produto", jogos de tabuleiro para dois jogadores. Os participantes apurados para a final do CNJM, agora na sua nona edição, foram selecionados em torneios locais, realizados nas escolas, que envolveram dezenas de milhares de alunos a nível nacional. Entre os participantes encontravam-se alunos com baixa visão e cegueira, que tiveram acesso a material lúdico adaptado às suas necessidades e a acompanhamento personalizado. O CNJM é uma iniciativa da Associação Ludus, da Associação de Professores de Matemática, da SPM e da Ciência Viva. Évora recebeu, pela segunda vez, a final deste campeonato, organizada localmente pela Universidade de Évora, pela Câmara Municipal de Évora e pela Delegação Regional do Sul e Ilhas da SPM, com o apoio da Escola Profissional da Região Alentejo – EPRAL, Fundação Luís de Molina, BES, Luduscience, Tantrix Portugal.



PUBLICADO MAIS UM TÍTULO DE FELIX KLEIN

Já foi editado mais um volume da coleção Leituras em Matemática - *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior - Geometria*, de Felix Klein, um dos mais notáveis matemáticos alemães de fins do séc. XIX. Neste volume, Klein apresenta uma visão geral da geometria, proporcionando aos leitores a organização dos conhecimentos adquiridos ao longo dos seus estudos. Este título encontra-se disponível na Loja SPM, que lançou recentemente uma campanha promocional: a aquisição da coleção completa de *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior* beneficiará de um desconto de 10%.



ALBUFEIRA RECEBEU FINAL NACIONAL DAS OLIMPIADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

De 14 a 17 de março, 90 alunos, entre os 10 e os 18 anos, participaram na final nacional das Olimpíadas Portuguesas de Matemática. A Escola Básica e Secundária de Albufeira foi a escola anfitriã desta fase da competição, em que os finalistas realizaram as provas que ditaram os vencedores das medalhas de ouro, prata e bronze. Os nomes dos alunos medalhados podem ser consultados no *site* oficial das OPM, em <http://www.spm.pt/olimpiadas/>. Para encerrar a 31ª edição das OPM, realizam-se ainda no mês de maio as Mini-Olimpíadas, dirigidas aos alunos dos 3º e 4º anos. As inscrições terminam no dia 30 de abril. As OPM são organizadas pela SPM em parceria com o Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, e contam com o apoio do Ministério da Educação e Ciência, do Ciência Viva, da Fundação Calouste Gulbenkian, do Banco Espírito Santo, da Pathena e do jornal Público.



LIVROS SPM DISPONÍVEIS NA FNAC

A coleção Leituras em Matemática, editada pela SPM, está novamente disponível nas livrarias Fnac. *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*, de Felix Klein, *4000 Anos de Geometria*, de Robin Wilson, *Matemática & Comboios*, de Hélder Pinto, *A Magia das Sucessões*, de Joaquim Eurico Nogueira, ou *Logaritmos*, de Elon Lages Lima, são alguns dos títulos que podem ser agora encontrados na Fnac.

MIGUEL DE PAULA NOGUEIRA RAMOS (1963-2013)

Faleceu no passado dia 3 de janeiro Miguel Ramos, professor catedrático no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (DMFCUL). Miguel Ramos desenvolvia a sua atividade de investigação nas áreas de Equações Diferenciais Parciais, Análise Funcional e Cálculo de Variações. Foi autor de dois livros,

Teoremas de Enlace na Teoria de Pontos Críticos e Curso Elementar de Equações Diferenciais Ordinárias (DMFCUL), e ainda editor da *Portugaliae Mathematica*. Miguel Ramos é considerado pela comunidade matemática portuguesa um matemático notável e um professor extraordinário, dotado de enormes generosidade e disponibilidade.



“ISTO É MATEMÁTICA” NOMEADO PARA PRÉMIO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE AUTORES

O “Isto é Matemática” foi nomeado pela Sociedade Portuguesa de Autores (SPA) para os Prémios Autores 2013, na categoria de Melhor Programa de Entretenimento. O programa, promovido pela SPM e conduzido por Rogério Martins, começou por ser transmitido na SIC Notícias, mas o interesse que suscitou fez com que a sua difusão tivesse sido alargada aos canais SIC Kids e SIC Internacional. Produzido pela Sigma 3, com o apoio do Ciência Viva e do COMPETE, o “Isto é Matemática” conta já com duas temporadas e milhares de seguidores no Facebook. Na gala de entrega de prémios da SPA/RTP, realizada no passado dia 25 de fevereiro, o prémio de Melhor Programa de Entretenimento acabou por ser atribuído ao programa “Super Diva - Ópera para Todos”, da RTP2.

HENRIQUE LEITÃO DISTINGUIDO PELA ACADEMIA INTERNACIONAL DE HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

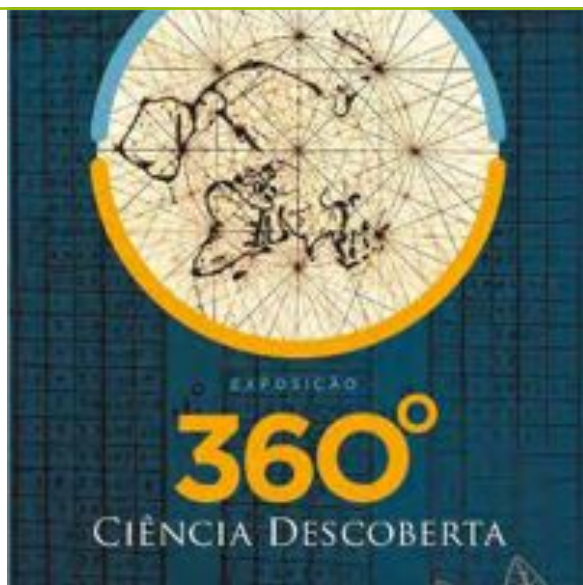
Membro correspondente da Academia Internacional de História das Ciências desde 2007, Henrique Leitão foi, no final do ano passado, eleito membro efetivo desta prestigiada associação de historiadores de ciências, com sede em Paris. Autor de vários livros, Henrique Leitão, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL), dedicou-se nos últimos anos à coordenação científica da publicação das Obras de Pedro Nunes, com a chancela da Fundação Calouste Gulbenkian e da Academia das Ciências de Lisboa. Henrique Leitão doutorou-se em Física, em 1998, na FCUL, mas o interesse crescente pela história das ciências acabou por

o tornar num “historiador de ciência a tempo inteiro”. Entre os seus principais interesses está a história das ciências exatas nos séculos XV a XVII. Membro de várias sociedades científicas, nacionais e estrangeiras, Henrique Leitão tem colaborado pontualmente com a SPM em algumas das suas atividades. Desenvolve investigação no Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia e leciona na Secção Autónoma de História e Filosofia das Ciências, na Universidade de Lisboa. É ainda comissário da exposição 360° - Ciência Descoberta, sobre a ciência ibérica na época dos descobrimentos, patente na Fundação Calouste Gulbenkian (ver caixa).



EXPOSIÇÃO 360° CIÊNCIA DESCOBERTA NA FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Até ao dia 2 de junho a Fundação Calouste Gulbenkian acolherá a exposição 360° - Ciência Descoberta. Inaugurada no início do mês de março, esta exposição apresenta os desenvolvimentos científicos e técnicos que resultaram das viagens de portugueses e espanhóis na época dos descobrimentos, revelando o impacto que estes tiveram no surgimento da ciência europeia moderna.





ÉVORA RECEBE LOGIC COLLOQUIUM EM JULHO

O Logic Colloquium 2013 (ASL European Summer Meeting) terá lugar, pela primeira vez, em Portugal, e Évora será a cidade anfitriã do evento, entre 22 e 27 de julho. Este encontro, que decorrerá na Universidade de Évora, promoverá a discussão dos mais recentes desenvolvimentos na área científica da Lógica, incluindo a Lógica Matemática, as Ciências da Computação e a Lógica Filosófica. As inscrições para o Logic Colloquium 2013 estão abertas até 31 de maio, em <http://ptmat.fc.ul.pt/LC2013/>.

EMS ACEITA PROPOSTAS PARA ATIVIDADES EM 2014

A European Mathematical Society aceita propostas para as suas atividades e distinções em 2014. As propostas podem ser apresentadas para as seguintes categorias: EMS Lecturer, EMS Distinguished Speaker, EMS Joint Mathematical Weekend, Special Activities e Activities sponsored by the EMS. Mais informações sobre a submissão de propostas podem ser encontradas no site oficial da EMS, <http://www.euro-math-soc.eu/>.

I.º EUROPEAN-NORDIC CONGRESS OF MATHEMATICIANS ENTRE 10 E 13 DE JUNHO

Organizado pela primeira vez pela European Mathematical Society, o Nordic Congress of Mathematicians, agora na sua 26ª edição, decorrerá entre 10 e 13 de junho, na Lund University, em Lund, na Suécia. Neste 1.º European-Nordic Congress of Mathematicians, Tamar Ziegler, Lecturer EMS 2013, apresentará três conferências sobre Dinâmica e Teoria dos Números. As inscrições podem ser efetuadas na página oficial do congresso, em <http://www.maths.lth.se/nordic26/>.



A PORTUGALIÆ MATHEMATICA E A PARTIDA PREMATURA DE MIGUEL RAMOS

Comecemos por uma pergunta de trivial: *O que é que têm em comum matemáticos como M. Fréchet, J. von Neumann, R. Caccioppoli, G. Ascoli, H. Höpf, W. Sierpinsky, L. Nachbin, L. de Broglie, P. Erdős, I. Kaplansky, M. Peixoto, J. Dieudonné, G. Köthe, C. Foias e J.-L. Lions?* A resposta é que todos eles publicaram artigos na *Portugaliæ Mathematica*.

A lista de matemáticos ilustres que publicaram na *Portugaliæ Mathematica* sofre uma pausa em meados da década de 60 do século passado, com o desaparecimento de Manuel Zaluar Nunes, um dos fundadores da revista, que assegurou a direção da revista durante o seu período áureo.

Recordemos que a *Portugaliæ Mathematica* tinha sido fundada em 1937 por António Aniceto Monteiro, (que fundou igualmente, dois anos mais tarde, esta *Gazeta de Matemática*). A sua primeira comissão editorial contava ainda com um grupo de jovens matemáticos portugueses: José da Silva Paulo, Hugo Ribeiro e Manuel Zaluar Nunes. Em 1945, Aniceto Monteiro partiu para o Brasil, por razões políticas e económicas, deixando a direção da revista a Zaluar Nunes. A partir desse ano, a revista deixa também de contar com qualquer apoio financeiro do Estado português (uma situação que, curiosamente, volta agora a registar-se). Com a morte de Zaluar Nunes, a revista entrou num período obscuro da sua história, em que são aceites, sem arbitragem, artigos (pseudo) científicos, período este que só termina em finais da década de 70, com o fim do Estado Novo e o regresso (breve, pois viria a falecer pouco tempo depois) de Aniceto Monteiro a Portugal¹, altura em que a revista passa a ser propriedade da SPM.

O restabelecimento da *Portugaliæ Mathematica* como uma revista científica de qualidade é uma tarefa a que se têm dedicado desde então as sucessivas comissões editoriais, primeiro sob a direção de Alfredo Pereira Gomes e depois sob a direção de João Paulo de Carvalho Dias. Foi dele que recebemos uma revista já em plena recuperação da sua reputação. De facto, em 2007, quando passamos a tomar conta da revista, esta tem já um corpo de editores associados de grande prestígio e publica regularmente artigos de matemáticos de renome. Além disso, a revista estava prestes a iniciar uma nova etapa de vida com o início da sua publicação pela European Mathematical Society Publishing House. A adesão da revista à EMS-PH deu-se graças aos esforços conjuntos da comissão editorial da revista da altura e da direção da SPM, então presidida por Nuno Crato, e contou ainda com a ajuda de outros matemáticos portugueses, entre os quais devemos destacar José Francisco Rodrigues.

Em 2007, entrou em funções uma nova comissão editorial dirigida por mim, que integrava ainda Luís Nunes Vicente,

¹ Para uma breve história dos primeiros anos da *Portugaliæ Mathematica*, e o contexto em que surgiu, ver o artigo de J. F. Rodrigues, "Revistas de Matemática Portuguesas", *Boletim da SPM* 50 (2004), 19-36.

José Ferreira Alves e Miguel Ramos. O Miguel Ramos e eu transitámos da comissão editorial anterior e assegurámos a necessária continuidade. Embora eu tenha assumido formalmente a direção da revista, a verdade é que o empenho do Miguel foi de tal ordem que se tratou de uma direção quase bicéfala. Sempre esteve nos nossos planos que o Miguel Ramos assumiria a direção da revista quatro anos mais tarde, e que eu deixaria a comissão editorial, possibilitando a entrada de novo(s) elemento(s), de forma a assegurar o desejável contínuo rejuvenescimento da comissão editorial. A doença grave do Miguel atrasou este plano mas, apesar disso, ele assegurou corajosamente a direção da revista no início de janeiro de 2012. A sua partida prematura no dia 3 de janeiro de 2013 representa uma perda significativa para a matemática portuguesa e para a *Portugaliae Mathematica*. Este não é o local adequado para um obituário², mas queremos destacar aqui o trabalho notável do Miguel Ramos neste período que agora termina.

Neste momento de transição, em jeito de prestação de contas, gostaríamos de enumerar os principais objetivos alcançados pela *Portugaliae Mathematica* no período 2007-12, e para os quais a ação do Miguel Ramos foi determinante:

- ▶ A publicação da revista pela EMS-PH, que permitiu um grande salto de qualidade, quer na sua edição em papel, quer na sua edição eletrónica, quer na sua página web, assegurando uma maior visibilidade da revista perante a comunidade matemática mundial.

- ▶ A disponibilização de acesso eletrónico livre a todos os números da revista, desde o número 1, com uma *moving wall* de quatro anos.

- ▶ A criação de um sistema de submissão eletrónica e de gestão dos artigos submetidos, permitindo uma melhor gestão e um melhor arquivamento da informação relativa às submissões e à sua avaliação científica.

- ▶ A passagem de um sistema de arbitragem de, pelo menos, um *referee*, para, pelo menos, dois *referees*, o que aumentou a taxa de rejeição de artigos, mas melhorou a qualidade dos artigos aceites.

- ▶ A entrada da revista para a base de dados ISI-Web of Knowledge, da Thomson Reuters.

Em relação aos dois últimos pontos, vale a pena referir que em 2007 foram submetidos à *Portugaliae Mathematica*

cerca de 65 artigos e foram publicados 23; em 2012 foram submetidos cerca de 120 artigos e foram publicados 21.

A partir de 1 de janeiro de 2013, a *Portugaliae Mathematica* conta com um novo editor-chefe, Luís Nunes Vicente, e uma comissão editorial com um elemento adicional, de forma a gerir o maior número de submissões: José Ferreira Alves, Fernando Ferreira, Pedro Freitas e Diogo Gomes. Com eles a revista tem condições para atingir patamares de qualidade ainda mais elevados. Para que isso aconteça, é necessário que a comunidade matemática portuguesa também colabore através da submissão de artigos de qualidade.

PORTUGALIAE MATHEMATICA: UM AGRADECIMENTO, UM TRIBUTO

Como descreve Rui Loja Fernandes no artigo anterior, a *Portugaliae Mathematica* é tão importante para a comunidade matemática portuguesa que a sua fundação é anterior à da SPM, e a sua publicação teve durante muito tempo de ser independente desta. Com o normalizar da situação política e científica, foi com naturalidade que a *Portugaliae Mathematica* passou a ser uma publicação da SPM, da qual esta muito justamente se orgulha: é uma das mais importantes presenças de Portugal no mapa da matemática mundial.

Nesta hora de despedida do antigo corpo editorial e de entrada em funções do novo corpo editorial, não quer deixar a SPM de agradecer a extraordinária colaboração dos editores cessantes, que conseguiram as realizações acima descritas, e de endereçar os maiores votos de sucesso para os editores que agora iniciam o seu trabalho.

Este agradecimento ao passado e estes votos de sucesso para o futuro são também um tributo ao Miguel Ramos. Poucas semanas antes de nos deixar, ainda ele pedia, “com urgência”, o *refereeing* de artigos para a PM. É também em sua memória que devemos dar, como ele sempre deu, o nosso melhor.

A Direção da SPM

² Para uma breve nota biográfica de Miguel Ramos, da autoria de Luís Sanchez, ver: <http://fc.ul.pt/noticia/04-01-2013/miguel-ramos-1963-2013>

M Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: *gazeta@spm.pt*.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2013

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

NOVIDADES!

Livros Instituto
Superior Técnico

