GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO IV **N.º 17** NOVEMBRO-1943

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 6$50

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

FUNDADA POR

B. CARAÇA, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

Correspondência para: *M. Zaluar*, Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa

Composição e Impressão: *Soc. Ind. de Tipografia*, Rua Almirante Pessanha, 5 — Lisboa

ANO IV - N.º 17 GAZETA DE MATEMÁTICA NOVEMBRO-1943

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Um Jornal Português Esquecido

por ***António Monteiro***

O aparecimento, nos princípios do século XIX, dos primeiros periódicos científicos dedicados especialmente à investigação matemática coïncide com o início duma nova época no desenvolvimento da cultura matemática.

O mais antigo de todos os jornais dedicados principalmente ou inteiramente à cultura matemática é o *Journal de l'École Polytechnique* que iniciou a sua publicação em 1794. Existiam ou tinham existido anteriormente a 1794 outros jornais em que se publicavam artigos de matemática. Segundo Felix Müller [1] existiam 17 periódicos nestas condições anteriormente a 1700, tendo o primeiro sido publicado em 1665. Durante o século XVIII apareceram 210 novos periódicos e no século XIX 950, incluindo os que continuaram a sua publicação com novos títulos [2], mas muitos dêstes jornais publicavam poucos artigos de matemáticas puras.

No domínio das matemáticas elementares tinham mesmo existido no século XVIII alguns jornais de caracter nitidamente matemático, entre êles podemos citar o *Lady's Diary* (1704-1840), [3] o *Gentleman's Diary or the Mathematical Repository* (1741-1840) que desempenharam em Inglaterra um papel importante no desenvolvimento do gôsto pelo estudo das Ciências Matemáticas. Mas esta circunstância não invalida de maneira nenhuma a afirmação anteriormente feita de que foi nos fins do século XVIII que nasceu o primeiro periódico científico dedicado principalmente ao progresso das Ciências Matemáticas.

Os primeiros *grandes jornais* dedicados exclusivamente à matemática aparecem na primeira metade do século XIX e entre êles podemos citar os seguintes:

1.º) *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Journal de Crelle) que se começou a publicar na Alemanha em 1826 sob a direcção de A. Crelle.

2.º) *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (Journal de Liouville) que se começou a publicar em França em 1836 sob a direcção de J. Liouville.

3.º) *Cambridge Mathematical Journal* que se começou a publicar em Inglaterra em 1839.

Êstes jornais desempenharam desde a sua fundação um grande papel no desenvolvimento da cultura matemática.

Como se sabe a ciência teve um grande desenvolvimento a partir dos fins do século XVIII. Foi nessa época que apareceram pela primeira vez (em França) os três gráus de ensino: o primário, o secundário e o superior. Existiam Universidades em

---

(1) Estas informações e outras que indicaremos foram colhidas no livro de *G. A. Miller. Historical Introduction to Mathematical Literature*, New York, 1916.

(2) *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereiningung*, vol. 12, 1903, pág. 439.

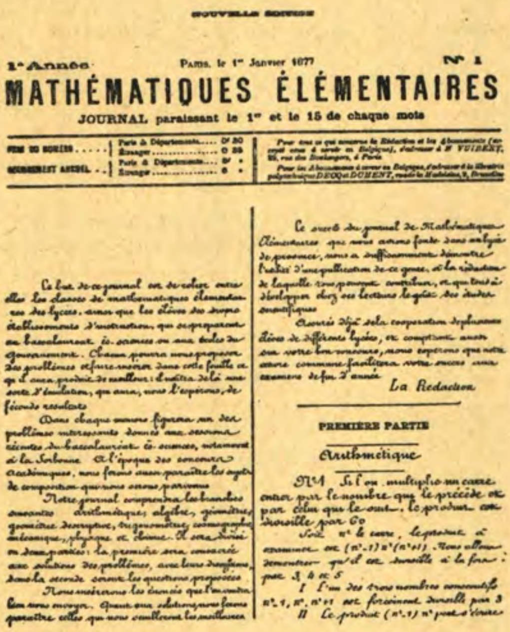
(3) T. P. Kirkman (cujo nome ficou ligado ao célebre problema das quinze raparigas da escola) escreveu o seguinte em 1849 a propósito dêste jornal:

«I confess it do be my belief, from a limited observation of graduate and non-graduates, that when the difference between prizes awarded by the authorities on lither side is considered, an incomparably greater share of the glory of kindling and cherishing a pure and lasting love of mathematical science in *men* as well as *boys*, must be attribued to the immortal Lady Dia, than to all the universities and colleges of these kingdoms put together, to all our Lyceums, Athenœums, and Philosophical Societies, and to all our Imperial Boards of peace and war». Veja: *Raymand Clare Archibald*, Notes on Some Minor English Mathematical Serials, Mathematical Gazette, April 1929, p. 379-400.

muitos países do mundo anteriormente ao século XIX, mas o ensino das matemáticas ou não existia ou tinha um carácter elementar nessas Universidades. Na Alemanha, por exemplo, o ensino das matemáticas elementares só passa das Universidades para os Ginásios (Liceus) entre 1810 e 1830.

Em 1802 exigia-se para a entrada na Universidade de Harvard (América) conhecimentos de Aritmética que não iam além da regra de três simples.

O princípio do século XIX marca o início duma era de progresso científico exigido e condicionado


1re Année Paris, le 1er Janvier 1877 No 1

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

JOURNAL paraissant le 1er et le 15 de chaque mois

La Rédaction

PREMIÈRE PARTIE

Arithmétique

nos diversos países pelo desenvolvimento e transformação da Técnica, da Indústria e do Comércio.

Daí resultou a transformação das Universidades e o aparecimento de uma nova organização do ensino que permitiria formar os técnicos necessários à indústria, ao comércio, ao exército e marinha. É nêste sentido que o século XIX foi o *século das luzes e do progresso.*

Estas circunstâncias deviam ter naturalmente o seu reflexo na organização dos periódicos científicos.

É também nos princípios do século XIX que apareceram os primeiros periódicos dedicados especialmente ao ensino das matemáticas.

Nos Estados Unidos publicou-se o primeiro jornal de matemática em 1804: «The Mathematical Correspondent; containing new elucidations, discoveries and improvements in various branches of mathematics» mas saíram apenas nove números; o jornal acabou por falta de compradores [4].

Em França J. Gergonne começou em 1810 a publicação dos *Annales de Mathématiques pures et appliquées* que foi interrompida em 1831. Dez anos depois, em 1841, fundou-se na Alemanha o *Archiv der Mathematik und Physik* e em 1842 em França os *Nouvelles Annales de Mathématiques* ambos com orientação análoga aos Anais de Gergonne.

Êstes jornais desempenharam um grande papel na formação dos professores de matemática dos respectivos países.

*

A história do jornalismo matemático português está ainda por fazer. A existência dos periódicos de matemática mais importantes tem sido, é certo, assinalada nos estudos que se têm feito sôbre a história das matemáticas em Portugal; mas ainda não se fêz um estudo de conjunto sôbre a vida dos jornais científicos que interessam às ciências matemáticas. Era necessário fazer um inventário dêsses jornais, historiar a sua vida, estudar os artigos que nêles se publicaram e avaliar o papel que desempenhavam nas épocas em que existiram.

O estado da cultura científica portuguesa reflecte-se necessàriamente na vida dos jornais científicos da época.

A dolorosa e educativa experiência que temos vivido com a publicação de dois jornais de matemática levam-nos mesmo a pensar que o estudo da vida administrativa, directiva e diplomática dos jornais científicos é susceptível de iluminar com novas côres o ambiente científico das épocas em que se publicaram.

A indiferença e o derrotismo na hora em que nascem os jornais. O silêncio e a expectativa perante aquêles que não morrem à nascença. O ataque e a intriga quando o jornal firma a sua posição.

Quantos jornais científicos não desapareceram como resultado da maldade ou da indiferença dos homens? Quantos sacrifícios, quantas horas de trabalho e canseiras inutilizadas pela incompreensão do meio? Mas também que alegria e contentamento não provoca o esfôrço dispendido numa tarefa que *transcende o interêsse imediato de cada um?*

---

[4] **O Dr. José da Silva Paulo publicará em breve, na «Gazeta de Matemática», um artigo sôbre o jornalismo matemático americano.**

Por detrás da serenidade das comunicações científicas encontra-se uma vida real feita de lutas e paixões à imagem e semelhança dos homens.

*

Vêm estas considerações a propósito do *Jornal de Mathematica Elementar* que parece ter caído completamente no esquecimento. Trata-se provàvelmente do primeiro jornal português de matemática elementar.

Fomos encontrá-lo à venda num alfarrabista há cêrca de três meses.

A sua existência não é referida em nenhum dos trabalhos que consultámos sôbre a história das matemáticas em Portugal.

Encontrámos, porém, referências à existência dêste jornal nas seguintes obras:

1.º — A. X. da SILVA PEREIRA. — *O JORNALISMO PORTUGUÊS. (Resenha Chronologica de todos os periodicos portuguezes impressos e publicados no reino e no estrangeiro, desde o meiado do século* XVII *até à morte de D. Luiz I, bem como dos jornais em lingua extrangeira publicados em Portugal durante o mesmo tempo).* Lisboa, 1895. Citado na página 176.

2.º — A. X. da SILVA PEREIRA. — *OS JORNAIS PORTUGUESES SUA FILIAÇÃO E METAMORPHOSES. (Notícia supplementar alphabetica de todos os periodicos mencionados na Resenha Chronologica do Jornalismo Português, etc).* Lisboa, 1897. Citado na pág. 87.

3.º — A. X. da SILVA PEREIRA. — *DICIONARIO JORNALISTICO PORTUGUEZ.* ([5]). Obra manuscrita existente na Biblioteca da Academia das Ciências de Lisboa. Num volume relativo à 7.ª época (1861-1889) encontra-se na Fôlha n.º 4390 a seguinte notícia.

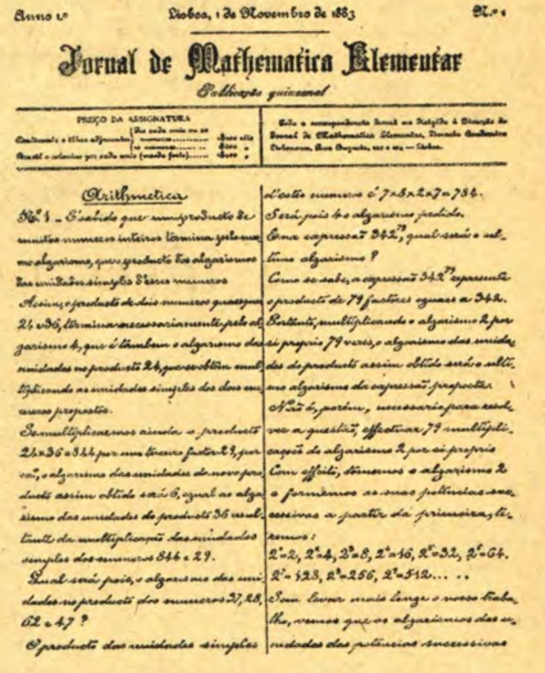
> *Jornal de Mathematica Elementar*
> *Lisboa, 1883-1884*
> *in 4.º, 8 páginas lithographadas.*

Publicação quinzenal, no seu genero o unico que se tem publicado na Capital. Era lithographado. Cada numero devia conter — segundo o programa — alguns theoremas de arithmetica, geometria e algebra, assim como varios problemas propostos ao leitor sobre estes tres importantes ramos da vasta sciencia das mathematicas. As demonstrações seriam dadas com a maior clareza, de modo tal que o espirito de um simples estudante do primeiro anno dos lyceus as abraçasse sem difficuldade nem relutancia.

O Numero Programa sahiu em 15 de Outubro de 1883.

O 1.º N.º publicou-se em 1 de Novembro seguinte. O ultimo — N.º 9 em 1 de Março de 1884.

Este jornal contem alguns desenhos e figuras geo-



Anno 1.º Lisboa, 1 de Novembro de 1883 N.º 1

Jornal de Mathematica Elementar

Publicação quinzenal

PREÇO DA ASSIGNATURA

Arithmetica

N.º 1 — É sabido que um producto de muitos numeros inteiros termina pelo mesmo algarismo, que o producto dos algarismos das unidades simples d'esses numeros.

Assim, o producto de dois numeros quaesquer 24 e 36, termina necessariamente pelo algarismo 4, que é tambem o algarismo das unidades no producto 24, que se obtem multiplicando as unidades simples dos dois numeros propostos.

Se multiplicarmos ainda o producto 24×36=844 por um terceiro factor 29, por vão, o algarismo das unidades do novo producto assim obtido será 6, igual ao algarismo das unidades do producto 36 resultante da multiplicação das unidades simples dos numeros 844 e 29.

Qual será pois, o algarismo das unidades no producto dos numeros 27, 28, 62 e 47?

O producto das unidades simples d'estes numeros é 7×8×2×7=784.

Será pois 4 o algarismo pedido.

Na expressão 342^{79}, qual será o ultimo algarismo?

Como se sabe, a expressão 342^{79} representa o producto de 79 factores eguaes a 342.

Portanto, multiplicando o algarismo 2 por si proprio 79 vezes, o algarismo das unidades do producto assim obtido será o ultimo algarismo da expressão proposta.

Não é, porém, necessario para resolver a questão, effectuar 79 multiplicações do algarismo 2 por si proprio.

Com effeito, tomemos o algarismo 2 e formemos as suas potencias successivas a partir da primeira, teremos:

$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$.
$2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$... ..

Sem levar mais longe o nosso trabalho, vemos que os algarismos das unidades das potencias successivas

métricas para melhor comprehensão do texto. Foi editado pelos Srs. Cruz & C.ª, proprietarios da Livraria Academica, rua Augusta 102-104, e redigido por dois officiais de artilharia cujos nomes ignoro.

Não se encontra nenhum dos 9 números, que se publicaram, nas Bibliotecas da Faculdade de Ciências de Lisboa, da Faculdade de Ciências do Pôrto e da Academia das Ciências de Lisboa. Na Biblioteca Nacional existe o n.º 5.

A colecção que encontrámos é formada pelos seguintes números:

N.º programa. Publicado em 15 de Outubro de 1883. Duas páginas em que estão resolvidos 4 problemas, um de Aritmética, outro de Algebra, outro de Geometria e outro de Trigonometria.

[5] **Esta obra cujo manuscrito foi enviado à Academia das Ciências de Lisboa em 1892 nunca chegou a ser impressa. Contém numerosas indicações sôbre a vida dos jornais portugueses.**

Números 1 a 9. Cada número tem 8 páginas. As páginas são numeradas de 1 a 72. Os números foram publicados nas datas seguintes:

N.º 1, 1 de Novembro 1883; n.º 2, 15 de Novembro 1883; n.º 3, 1 de Dezembro 1883; n.º 4, 15 de Dezembro 1883; N.º 5, 1 de Janeiro 1884; n.º 6, 15 de Janeiro 1884; n.º 7, 1 de Fevereiro 1884; n.º 8, 15 de Fevereiro 1884; n.º 9, 1 de Março 1884.

Cada número tem duas partes: Em primeiro lugar são apresentados os problemas resolvidos, pela seguinte ordem: Aritmética, Álgebra e Geometria; depois vêem as *Questões a Resolver* pela mesma ordem.

A apresentação gráfica é nìtidamente inspirada (como mostra a figura junta) no jornal *Mathematiques Élémentaires* que se começou a publicar em França em 1877 [6].

Depois desta tentativa para lançar um jornal português de matemática elementar só temos conhecimento da existência do *Tira-Teimas* [7], que apareceu há poucos anos e que interrompeu também a sua publicação, (com o n.º 9 se não estamos em êrro).

Porque terão falhado estas tentativas? Não terá o nosso país necessidade dum jornal de matemática elementar? Não existirá um grupo de professores do ensino secundário, capaz de realizar uma missão desta natureza? Não haverá nenhum editor capaz de o publicar? Não serão os estudantes do ensino secundário capazes de apoiar uma tal iniciativa?

Mas então porque não tem hoje um continuador o *Jornal de Mathematica Elementar* fundado há 60 anos, em 1 de Novembro de 1883?

[6] Foi neste mesmo ano que Gomes Teixeira começou a publicar o seu Jornal de Ciências Matemáticas e Astronómicas. Não encontrámos no Jornal de Gomes Teixeira nenhuma referência à existência do Jornal de Matemáticas Elementares.

[7] Jornal dactilografado e litografado.

A IDÉIA DE DIMENSÃO

por **Beno Ekmann**

(Encarregado de curso na Faculdade de Ciências e na Escola de Engenharia da Universidade de Lausanne e *privat dozent* na Escola Politécnica Federal de Zürich)

Lição inaugural proferida em 1943, Fevereiro, 5 e publicada na *Revue de Théologie et de Philosophie*, n.º 127, Abril-Junho de 1943

1. A idéia de dimensão, embora uma das mais intuitivas e antigas da Geometria, não foi objecto duma teoria exacta e satisfatória senão desde há vinte ou trinta anos e só nêstes últimos tempos atingiu uma certa perfeição. O problema, abordado já nos *Elementos de Euclides*, foi retomado à volta de 1900 sob um novo aspecto, entre outros, pelo célebre matemático *Henri Poincaré*, cujas idéias estão na base das investigações ulteriores que originaram uma das mais belas teorias geométricas.

Se vou tentar apresentar-vos alguns resultados e idéias simples sôbre o assunto — sob a forma mais ou menos incompleta que o quadro desta lição me impõe e que espero seja desculpada pelos meus colegas matemáticos — é porque creio que se trata duma coisa de que se fala muito freqüentemente, ao dizer que o espaço tem três dimensões, que uma superfície tem duas, que o tempo tem uma dimensão, ao fazer alusão, com um subentendido misterioso, à quarta dimensão — sem bem entender o que se compreende por isso e sem saber que se trata de um problema de importância fundamental para a Geometria e para tôdas as ciências.

Todavia, considero tudo isto apenas como um exemplo, e o objectivo da minha exposição será atingido se conseguir dar-vos uma idéia das relações bastante delicadas que existem entre a intuição, a experiência e a abstracção e que são características da maneira de pensar e de trabalhar na Geometria moderna.

2. Encaremos o nosso problema: o nosso espaço é a três dimensões, uma curva é a uma dimensão, etc., ¿ Que significa isto? Quais são as razões e as conseqüências dêste facto?

Antes de tudo: ¿Que é o espaço? Precisamos de distinguir duas coisas: o espaço da nossa intuição e experiência, onde nós vivemos chamá-lo-ei no que se segue *espaço real* (sòmente como abreviatura, pois há diferentes espécies ou gradações de realidade) — e *espaço geométrico* que é uma criação abstracta do espírito.

O *espaço real* não quero tentar dar dêle uma definição fechada; as suas propriedades são mais ou menos imprecisas; pois os objectos considerados não são pontos, rectas, etc., mas arestas de um corpo, raios luminosos, retículos, planos mais ou menos rugosos, figuras desenhadas duma maneira pouco exacta; e, se se tentasse tornar mais exactas as propriedades dêstes objectos por aproximações sucessivas, nada se conseguiria, mesmo teòricamente; ¿ como obter, por exemplo, uma recta precisa, sendo a matéria composta de átomos ou moléculas em movimento térmico? E, um raio luminoso, desde que se tente torná-lo suficientemente fino, começa a dispersar-se! Pode mesmo afirmar-se que as propriedades de todos os objectos se modificam no tempo — segundo os nossos meios e possibilidades experimentais. Sem maior discussão, pretendemos admitir que tudo o que se diz do espaço real é verdadeiro num sentido ingénuo e não inteiramente definitivo.

No *espaço geométrico*, as coisas são muito diferentes. Os seus objectos têm propriedades inteiramente exactas: elas são ou axiomas que se não demonstram, ou teoremas que se demonstram com o auxílio dos axiomas e da dedução lógica. Mas, ¿que são êstes objectos? Nada dêles se diz; não são, em todo o caso, os objectos inexactos do espaço real, mas seres abstractos que possuem apenas as propriedades que lhes foram atribuídas sob a forma de axiomas. Estes axiomas não são, portanto, seguramente, nem verdadeiros, nem falsos, nem evidentes, mas, simplesmente, postulados, convenções que se impõem a seres abstractos chamados pontos, rectas, etc. Estas convenções são, naturalmente, inspiradas pelo real; elas idealizam as coisas que se constataram no real de um modo bastante grosseiro. Mas elas ultrapassam tudo o que o real pode dar-nos: se se diz, por exemplo, que duas rectas se intersectam num ponto, ou se se fala do comportamento no infinito, sôbre isso o espaço real não nos dá nunca informações precisas e directas. Há, portanto, uma grande parte de arbitrário nos axiomas; assim, ¿o espaço geométrico será uma construção puramente lógica que se baseia sôbre convenções arbitrárias? Felizmente êle é mais do que isso, mais do que um simples jôgo lógico: êle é uma imagem esquemática do espaço real, extrêmamente útil de resto; dêle nos servimos a todo o momento na nossa vida, na técnica, nas ciências.

Concluindo: o espaço geométrico é uma construção lógica cuja base é constituída pelos axiomas, isto é, convenções arbitrárias do ponto de vista lógico, mas inspiradas pelo real e, consequentemente justificadas. O espaço geométrico não é idêntico ao espaço real, mas é — para usar uma expressão devida a *Gonseth* — um esquema simples e eficaz.

Naturalmente, é possível criar outras geometrias, escolhendo para base da construção lógica axiomas um pouco diferentes e tal se tem feito. É então a experiência que nos leva a preferir, como esquema do espaço real, uma dessas geometrias às outras. A geometria ordinária ou euclideana é considerada como a mais simples e a mais eficaz para as necessidades ordinárias; mas, é possível que, em casos extraordinários, em Astronomia ou em Atomística, por exemplo, sejamos forçados a preferir um outro esquema.

3. Agora, que destinguimos bem duas coisas, espaço real, de um lado, e espaço geométrico, do outro, podemos precisar a nossa pregunta:

¿A que propriedades do espaço geométrico abstracto nos referimos ao dizer que o espaço real é a três dimensões?

Para responder, é muito simples o método seguinte: Todo o ponto do espaço geométrico pode ser caracterizado por três números reais, denominados coordenadas; observemos que, de uma maneira análoga, se fixa um ponto de uma recta por um número (isso se faz nas réguas) e um ponto do plano por dois números (tal se faz sôbre qualquer carta topográfica). As três coordenadas de um ponto P do espaço são, por exemplo, as três distâncias de P a três planos perpendiculares dois a dois, ou as duas coordenadas da projecção de P no plano horizontal e a altura acima dêsse plano.

Se se fazem variar êstes três números, independentemente uns dos outros, obtêm-se todos os pontos do espaço. Conhecendo as coordenadas de dois pontos do espaço pode calcular-se a sua distância por uma fórmula simples; por intermédio das coordenadas podem calcular-se ângulos, deduzir propriedades geométricas com simples cálculos, etc. — é o método bem conhecido sob o nome de *geometria analítica*. Nesta geometria, um ponto é *três números*, e o espaço é o conjunto que se obtém quando se fazem variar, independentemente, êsses três números. Por isto se diz que o espaço geométrico tem três dimensões, entendendo por número de dimensões o número de coordenadas que variam independentemente.

4. Esqueçamos agora, por um momento, a significação exterior do espaço geométrico, esqueçamos que êle é o esquema do espaço real. Então, não se compreende o papel extraordinário do número três nesta construção, visto ser evidente que a mesma construção lógica pode fazer-se com quatro, cinco ou um número qualquer n de coordenadas; obtém-se então o espaço a n coordenadas ou a n dimensões.

Um ponto dêste *espaço a* n *dimensões* é n *números reais*, e obtém-se todo o espaco, se se fazem variar independentemente êstes n números. Nêle pode fazer-se a *geometria analítica*: a distância de dois pontos calcula-se, a partir das coordenadas, com o auxílio de uma fórmula análoga à do caso de três dimensões, etc.

É inútil preguntar se êste espaço a quatro, cinco, ou n dimensões existe ou não — êle é, simplesmente, uma construção lógica que não pretende dar informações sôbre qualquer coisa de real — o espaço a três dimensões não as dá também; pode servir como esquema do espaço real, eis o seu papel particular! (De resto, o espaço a duas dimensões é, duma maneira análoga, o esquema do plano, e o de uma dimensão o da recta).

Preguntar-se-à: ¿Não poderia tomar-se, para o esquema do espaço real o espaço a quatro, cinco ou a outro número de dimensões, tal como o espaço a três dimensões? Obter-se-ia assim uma geometria muito diferente da nossa!

Mas, entre tôdas estas possibilidades, a experiência fêz-nos escolher uma: três dimensões são, como sempre se verificou, exactamente o que é preciso para descrever (de uma maneira esquemática, mas eficaz) os pontos do nosso espaço real. E, mesmo, se se tentou, como já foi dito, modificar um pouco a nossa geometria (por exemplo, considerando uma outra fórmula para a distância), nunca se foi levado a modificar o número três das dimensões, das coordenadas que variam independentemente.

Há outra possibilidade que se mantém mais ou menos em aberto: Poderia acontecer que o nosso espaço real fizesse parte de um espaço real a quatro dimensões (isto é, qualquer coisa cujo esquema deveria ser o espaço abstracto a quatro dimensões), como um plano que faz parte do espaço ordinário, que está *imerso* neste espaço. Certas propriedades geométricas diferem essencialmente, segundo se ficar no espaço, ou dêle se saia no espaço a quatro dimensões.

Para melhor compreensão, examinemos a situação no caso do plano. Comparemos a geometria no plano segundo se fica no plano, fazendo abstracção do espaço que o rodeia, ou nêle se não permanece.

Consideremos um rectângulo e um ponto interior; no plano, é impossível fazer sair o ponto do interior do rectângulo sem atravessar um dos lados; portanto, se lhe é proíbido atravessá-los, se êle está *encerrado*, não pode sair sem que se lhe *abra uma porta!* Ora, através do espaço é isso possível: eleva-se o ponto na direcção de um terceiro eixo, perpendicular ao plano, desloca-se paralelamente ao plano, deixa-se recair no plano.

Consideremos a situação análoga no espaço: se um objecto está encerrado num armário (num cubo), é impossível fazê-lo sair sem *abrir a porta,* sem atravessar as faces, sem nelas abrir um orifício. Ora, se o nosso espaço está imerso num espaço a quatro dimensões ou mais, tal é bem possível. Pode verificar-se isso, fácil e rigorosamente, na geometria analítica do espaço a quatro dimensões, realizando, por fórmulas, o movimento necessário: desloca-se o ponto na direcção de um quarto eixo, transporta-se paralelamente ao espaço e faz-se recair no espaço, no nosso mundo.

É possível indicar outros fenómenos dêste género que poderiam produzir-se, se o nosso espaço estivesse imerso num espaço a quatro dimensões: Poderia transformar-se com um simples movimento uma luva direita numa luva esquerda, poderia resolver-se um nó fechado sem cortar o cordel, poderiam separar-se dois anéis enlaçados sem os abrir, e assim por diante.

Se tais fenómenos se produzissem regularmente e se êles fôssem confirmados por experiências físicas, o meio mais simples e claro para os reconhecer e para os formular e explicar seria o esquema de um espaço a quatro dimensões no qual se encontraria o nosso espaço. Mas, exceptuados alguns truques de prestidigitação, êstes fenómenos designados como sôbrenaturais, não foram nunca observados. É um resultado empírico (como, por exemplo, a não-existência do movimento perpétuo de primeira ou segunda espécie). Para a descrição do nosso espaço e dos seus fenómenos a hipótese duma quarta dimensão é supérflua.

Tradução de A. SÁ DA COSTA
(bolseiro do I. A. C. em Zürich)

(Continua no próximo número)

PEDAGOGIA

ALGUMAS REFLEXÕES SÔBRE OS EXAMES DE APTIDÃO

por **Bento de Jesus Caraça**

1. Os resultados dos exames de aptidão às Universidades podem fornecer elementos de interêsse sôbre êste problema que não sei se foi já estudado convenientemente — o da coordenação entre o ensino secundário e o superior.

Seria bom que tôdas as Escolas dissessem o que sôbre o assunto a sua experiência lhes indica. Vamos dar aqui hoje alguns resultados dessa experiência na Escola onde sou professor — o Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — relativos ao ano corrente e à disciplina de *Matemática.*

Propositadamente limito a minha observação a 1943 para procurar eliminar, tanto quanto possível, as oscilações, naturais num primeiro período de adaptação. Agora, com alguns anos de vigência dêste regimen, com muitos pontos publicados e acompanhados das respectivas resoluções, o elemento surpreza ou desconhecimento de orientação não deve jogar já, e a situação deve por conseqüência oferecer garantias de estabilidade que permita certa segurança de apreciações.

2. Começo por considerações de carácter estatístico. Os candidatos ao exame de aptidão ao I. S. C. E. F. são de duas origens — Liceu e Ensino Técnico médio (Institutos Comerciais de Lisboa e Pôrto).

Os números de aprovações e reprovações nas duas épocas de Julho e Outubro, constam do seguinte quadro:

	JULHO		OUTUBRO		JUL. e OUT.	
	Apr.	Rep.	Apr.	Rep.	Apr.	Rep.
Liceus..	74 66%	38 34%	18 58%	13 42%	92 64%	51 36%
Ens. Téc.	18 51%	17 49%	10 59%	7 41%	28 54%	24 46%

Dêste quadro tira-se imediatamente uma conclusão perturbante — é que, salvo na época de Outubro e por uma muito escassa diferença, as percentagens de reprovações são superiores nos candidatos vindos do ensino técnico do que naqueles que vêm do Liceu. Isto é exactamente o contrário do que seria de esperar. *Há aqui qualquer coisa que não está certa* e que seria bom debater com uma certa amplitude. Professores das escolas interessadas e candidatos, todos têm, certamente, alguma coisa a dizer a êste respeito. A «Gazeta» abre as suas colunas para essa discussão.

Tem também um grande interêsse a classificação de cada uma das escolas secundárias conforme os resultados obtidos pelos seus candidatos. Abstenho-me de o fazer por agora devido a ser ainda escasso o material.

Como casos dignos de nota, encontramos o Liceu de Sá da Bandeira, com *cinco* aprovações e *uma* só reprovação (em Julho), e o de João de Deus com *cinco* aprovações e *nenhuma* reprovação contando-se ainda, entre os seus candidatos, o que obteve classificação mais elevada em 1943. Como no decorrer dêste artigo terei de dizer algumas coisas duras, apraz-me citar os resultados do bom trabalho de duas escolas.

3. Encaremos agora a questão mais importante — ¿ permitem os resultados dos exames de aptidão dizer-nos alguma coisa sôbre o nível do ensino médio e a forma como êle é feito?

A êste respeito, as conclusões que podem tirar-se são um tanto desoladoras. Se se pensar que se trata de pessoas, à volta dos 18 anos, cujo trabalho foi acompanhado por professores durante anos e que se sujeitaram depois, com êxito, a provas finais de saída, se se pensar nisso e depois se lerem definições como esta: «o m. m. c. de dois números é o máximo divisor comum e não comum que é divisível pelos os outros dois» (ens. téc.) ou como esta: «Polígonos são figuras planas dum número ilimitado de lados» (Liceu), ou como esta: «o logar geométrico dos lados dum ângulo é a bissectriz» (Liceu), ou ainda como esta: «são chamadas superfícies de revolução às figuras do espaço que são geradas por sólidos» (Liceu), o menos que se pode pensar é que *há qualquer coisa de muito errado no fundo e que não pode continuar a deixar-se como está, sob pena de nos convertermos todos em cúmplices dum crime.*

Com tais erros de base, não se pode fazer nada de geito e não é de-certo no ensino superior que êles podem ser emendados.

Mas não é apenas isto o que se passa. Há mais e talvez pior. Vêem-se nas provas de muitos candidatos que, no entanto, mostram não ser totalmente desprovidos de aptidões, certos hábitos e vícios de raciocínio e de comportamento em face dos resultados do seu trabalho, que são altamente perniciosos.

Julgo não se tratar de casos pessoais, dada a freqùência e persistência com que se apresentam. Creio antes tratar-se de certa atitude negativa que subreptìciamente se vai introduzindo no ensino da Matemática e que o ameaça duma subversão total.

O caso é suficientemente sério para merecer a atenção não só das entidades oficialmente responsáveis pela orientação da nossa pedagogia, como de todos os trabalhadores do ensino.

Aqui vão alguns factos salientes.

4. É frequentíssimo encontrar entre os candidatos um desprezo total pelos resultados e seu possível enquadramento dentro do problema a que dizem respeito. É hoje limitadíssimo o número de candidatos que faz uma idéia clara do que seja a discussão dos resultados dum problema. Mas a coisa vai ainda mais longe e verifica-se em muitos casos uma completa indiferença, até, pela verosimilhança dos resultados.

Dos muitos exemplos que poderia apresentar, citarei os seguintes:

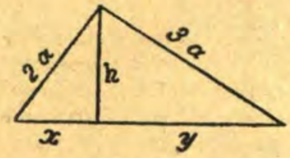
I. Na época de Julho, num ponto de cálculo numérico, pedia-se o cálculo da área dum triângulo equilátero de 273,47 metros de lado. Um candidato (Liceu) dá 13 metros quadrados; outro (Liceu) dá 273,468 (não diz o quê); outro (Liceu) dá 0,6871 metros quadrados! e isto como resultado dum cálculo que termina pela «igualdade» $\frac{273,47\times 2}{8}=0,6871$; outro ainda (Liceu) dá, para altura do mesmo triângulo, 24,12 metros.

II. Na época de Outubro, num ponto de cálculo numérico, pedia-se o cálculo do volume da esfera circunscrita ao cubo cuja aresta mede 22,01 metros. Um candidato (Liceu) dá 15 metros cúbicos; outro (Liceu) 6 metros cúbicos.

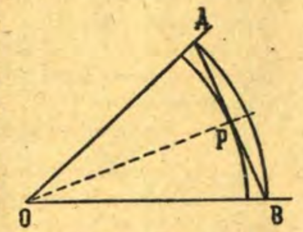
III. Um candidato (Liceu) encontra para a altura dum cone 7,2 metros e para geratriz do mesmo cone 3 metros e continua imperturbàvelmente o cálculo do volume do cone. Outro (ens. tec.) encontra para altura do mesmo cone o número $h=6-3\pi$! e continua imperturbàvelmente!

IV. Um candidato, raciocinando sôbre uma figura como a junta, encontra $y=\frac{a}{\sqrt{13}}$, $x=\frac{12a}{\sqrt{13}}$ e não nota que o resultado é absurdo!

¿Que concluir dêstes e outros casos? Que a única coisa que interessa na resolução dum problema é fazer determinadas operações em obediência a certas receitas Que o resultado dê ou não dê coisa aceitável, não interessa — foi... um engano de contas e nós, como somos pessoas superiormente inteligentes, não ligamos a essas ninharias!



5. Outro facto saliente é a tendência a usar das *receitas*, mesmo quando elas dão muitíssimo mais trabalho do que pensar um pouco, ainda que seja muito pouco, sôbre uma figura. Na época de Julho, num ponto de cálculo numérico pedia-se a área da corôa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um octógono regular de lado 18,31 metros.



Houve um número muito limitado de candidatos que observaram na figura que a área é $\pi(R^2-r^2)=\pi\frac{l^2}{4}$.

A grande maioria seguiu um raciocínio que tem a sua expressão típica no seguinte, que reproduzo textualmente (Liceu):

Sejam:

R o raio da circunferência circunscria
r o raio da circunferência inscrita
l o lado do octógono.

Tem-se

$$R=\frac{1}{2}l\sqrt{4+2\sqrt{2}} \quad \text{donde} \quad R^2=\frac{1}{4}l^2(4+2\sqrt{2})$$

$$r=\frac{1}{2}l(1+\sqrt{2}) \quad \text{donde} \quad r^2=\frac{1}{4}l^2(1+2+2\sqrt{2})$$

logo

$$\pi R^2-\pi r^2=\pi\frac{l^2}{4}(4+2\sqrt{2})-\pi\frac{l^2}{4}(3+2\sqrt{2})=$$
$$=\pi\frac{l^2}{4}[(4+2\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})]=\pi\frac{l^2}{4}.$$

6. Muitos candidatos não distinguem com clareza, de entre várias proposições apresentadas, as que êles próprios tomam como *definições* e como *propriedades*.

Um exemplo típico: Um candidato dá a seguinte definição de triângulos semelhantes — «dois triângulos dizem-se semelhantes quando têm os ângulos iguais e os lados homólogos proporcionais». E logo a seguir: Propriedades: 1.ª — «dois triângulos dizem-se semelhantes quando têm os três ângulos iguais».

7. Tôdas estas insuficiências, se reduzem, creio eu, fundamentalmente a duas falta de espírito crítico e automatismo. Diante do problema, a primeira reacção do candidato é procurar a *fórmula que se aplica* (chegam a encontrar-se expressões como esta — «aplicando o Pitágoras» — e recordo um caso ainda mais expressivo — «agora aplico pitágoras» — com p minúsculo!) e atirar-nos com o resultado, não do problema, mas da aplicação da fórmula.

¿Quais as razões dêste estado de coisas? Tenho a êsse respeito a minha opinião, mas seria bom que mais professores dessem a sua e. antes de mais, que se esclarecesse bem se tenho ou não razão, isto é, se é ou não verdade que o nosso ensino secundário desenvolve a falta de espírito critico e o automatismo.

Façamos um longo debate sôbre êste problema que envolve, muito profundamente, uma grave questão de interêsse nacional.

ASTRONOMIA

SÔBRE O MOVIMENTO DOS POLOS À SUPERFÍCIE DA TERRA
VARIAÇÃO DAS LATITUDES

por **A. Baptista dos Santos**

É já vastíssima a bibliografia relativa a êste problema de Astronomia que há cem anos preocupa os cientistas do Mundo inteiro sem que, até hoje, se tenha conseguido resolvê-lo completamente; e tarefa difícil é a daquele que queira expô-lo nos apertados limites de um artigo da «Gazeta», sem deixar de referir as suas fases mais importantes, de modo a dar aos que o não conheçam uma idéia geral da sua evolução até aos nossos dias. Vamos tentar fazê-lo sem esperança de sucesso brilhante.

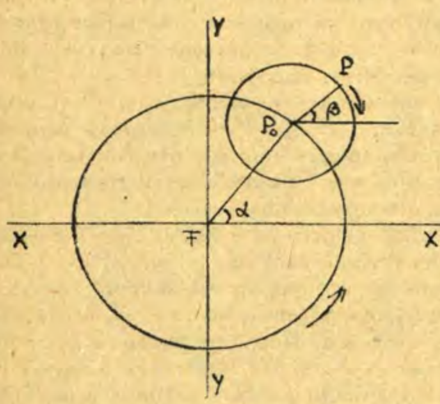
*

A possibilidade do deslocamento dos polos à superfície da Terra era já do conhecimento da

Mecânica depois que Euler aperfeiçoou e completou a teoria do movimento de rotação de um corpo sólido, rígido, em tôrno de um ponto fixo (1765).

Euler demonstrou que o movimento de rotação de um sólido homogénio, rígido, admitindo um eixo de simetria e subtraído à acção de fôrças exteriores, persistiria indefinidamente com velocidade uniforme, se a rotação se tivesse iniciado em tôrno dêsse eixo de simetria; mas que, em igualdade de tôdas as outras condições, se inicialmente o eixo de rotação não coincidisse com o de simetria, êle manteria ainda uma direcção fixa no espaço mas deveria girar em tôrno do segundo, descrevendo um cone no interior do sólido.

A aplicação da análise de Euler ao Globo Terrestre suposto perfeitamente rígido, permite re-



conhecer, na hipótese da rotação se ter iniciado em tôrno de um eixo não coincidente com o de figura — eixo menor do elipsoide de revolução a que a Terra se assemelha — e abstraindo ainda das accões do Sol, da Lua e dos outros planetas, que o eixo de rotação conserva no espaço, relativamente às estrêlas, uma direcção fixa, mas gira, de ocidente para oriente, em tôrno do eixo de figura, completando o seu movimento num período de 305 dias siderais que é uso designar pelo nome de ciclo de Euler. Em relação às estrêlas, é então o eixo de figura que gira em tôrno do eixo de rotação, descrevendo uma superfície cónica cujo ângulo de abertura, que é uma função das constantes arbitrárias introduzidas pela integração das equações de Euler, só pode ser determinado pela observação. Nas hipóteses estabelecidas, o polo de rotação descreve, assim, à superfície da Terra, uma circunferência cujo centro existe no eixo da figura; e sendo a latitude de um lugar a altura do polo de rotação acima do horizonte é óbvio que as latitudes astronómicas se não conservam constantes.

O movimento do eixo de rotação em tôrno do de figura não é, porém, tão simples como o considerou Euler. Tisserand estuda mais pormenorizadamente êste movimento e mostra, supondo ainda nulas as fôrças exteriores, que êle tem duas componentes: uma, a principal, é o movimento considerado por Euler, de período igual a 305 dias; a outra, de importância secundária, é um movimento do eixo instantâneo de rotação em tôrno da sua posição média, de período diário e de sentido contrário ao do primeiro. Qualquer dêstes movimentos se anula no caso da coincidência inicial dos eixos [1].

A projecção do movimento do polo de rotação no plano tangente ao elipsoide, cujo ponto de contacto é o polo de simetria, é, assim, um movimento epicicloidal como se reconhece pela figura. Designando por x e y as coordenadas do polo P em relação a um sistema de eixos coordenados rectangulares com origem no polo F, as equações do movimento composto serão:

$$x = r_1 \cos\alpha + r_2 \cos\beta$$
$$y = r_1 \operatorname{sen}\alpha + r_2 \operatorname{sen}\beta$$

onde r_1 e r_2 são os raios dos círculos e α e β são funções do tempo.

A Teoria mostra ainda que o raio r_2 é variável desde 0 ao valor máximo de 60 centímetros. Como se vê, bem insignificante é, de facto, a segunda componente do movimento.

Oppolzer, no seu tratado da Determinação das Órbitas, estuda ainda a influência das acções do Sol e da Lua no deslocamento do eixo de rotação em relação à Terra, e chega à expressão seguinte da variação das latitudes resultante:

$$\Delta\varphi = 0''.009 \operatorname{sen}\theta - 0''.006 \operatorname{sen}(\theta - 2☾) - \\ - 0''.003 \operatorname{sen}(\theta - 2\odot) + \cdots$$

onde θ é a hora sideral local e $\odot$ e ☾ são as longitudes do Sol e da Lua.

A análise desta expressão, de que escrevemos apenas os têrmos principais, mostra que as acções

[1] Aos menos familiarizados com êste assunto recordamos que os movimentos considerados são perfeitamente distintos dos de precessão e nutação do eixo terrestre; estes são movimentos de conjunto de tôda a Terra em tôrno de um eixo perpendicular ao plano da eclíptica fixa e resultam da acção do Sol, da Lua e dos planetas sôbre o anel equatorial do elipsoide terrestre. Se fôssem nulas as acções exteriores, êles anular-se-iam, persistindo, no entanto, os primeiros movimentos.

do Sol e da Lua originam variações de período diário; θ varia, com efeito, de 0° a 360° no intervalo de um dia sideral.

Considerando, porém, os valores que tomam aquêles têrmos à mesma hora civil de cada dia, reconhece-se que o primeiro e o terceiro apresentam um período anual mostrando o segundo um período semi-mensal, visto que θ e $\odot$ variam de cêrca de 1° por dia e ☾ varia de 0° a 360° num mês lunar.

A possibilidade da variação periódica das latitudes astronómicas apareceu, como se vê, teòricamente, como conseqüência imediata dum provável deslocamento dos polos à superfície da Terra; mas a Teoria não pode afirmar ou negar a existência real dêsse deslocamento porque nada pode saber das condições em que se iniciou o movimento de rotação da Terra. A verificação experimental impunha-se, portanto, à consideração dos astrónomos.

Foi o ilustre Bessel um dos primeiros a tentar essa verificação por observações da Polar em combinação com as leituras de uma mira colocada no meridiano, mas sem resultado positivo.

As primeiras observações que confirmaram a existência real da variabilidade das latitudes foram feitas por Peters em 1842 e 43, no círculo vertical do Observatório de Poulkovo; êste célebre astrónomo constatou variações de 0''.08 de amplitude, cujo período se adaptava bem ao ciclo de Euler, mas êle próprio não confiou muito nas indicações dos seus resultados porque os não podia considerar expurgados de influências relacionadas com as diferentes caracteristicas das estações do ano — a da temperatura, principalmente.

Outros astrónomos se lhes seguiram neste empreendimento [2]: Magnus Nyren, que discutiu as observações de Struve no primeiro vertical de Poulkovo, o conjunto de tôdas as observações de Peters, as de Gylden (1863-70) e as suas próprias (1871-73), determinando pelas observações de Gylden uma amplitude máxima de 0''.12 com um êrro provável de 0''.02; Clerk Maxwel, que discutiu observações efectuadas em Greenwich (1851-54); Downing, que examinou observações também de Greenwich (1868-77), chegando a resultados que se aproximavam muito dos de Peters; A. Nobile, que além das suas próprias observações efectuadas no Observatório de Capodimonte [3], Nápoles, discutiu longas séries de observações de diferentes observatórios, Oxford, Washington, Milão, e, em particular, uma série de 20 anos de observações de Greenwich (1862-82), cuja análise pôs em evidência um valor mínimo da latitude de Greenwich entre Dezembro e Janeiro, e um máximo correspondente aos meses de verão, o que revelou um ciclo anual, apròximadamente.

Em 1883, no Congresso de Geodesia realizado em Roma, Fergola tinha chamado a atenção dos astrónomos para a necessidade de se fazerem observações sistemáticas de latitude, com o fim de se descobrirem as suas variações periódicas e seculares, mas essa necessidade só foi geralmente reconhecida em 1888, depois da publicação duma memória de Küstner, do Observatório de Berlim, sôbre a determinação da constante de aberração. Küstner tinha-se proposto determinar uma correcção ao valor deduzido por Struve e, contra a sua espectativa, encontrou o valor $-0''.132$ que estava em completo desacôrdo com o determinado por Nyren, $+0''.05$. Procurando as causas do desacôrdo, apenas uma lhe pareceu inelidível, a variação da sua latitude, claramente manifestada nos resultados das observações.

Só então principiou a desfazer-se a descrença geral na variabilidade das latitudes, que a Teoria de modo algum tinha apontado como verdade indiscutível. As observações antigas, a não ser as de Peters e as de Downing, pouco se harmonizavam com as deduções teóricas, e Küstner mostrou-se inclinado ainda a atribuir a variação a causas de origem meteorológica ou de natureza subterrânea. Mas de tal modo a sua memória prendeu a atenção dos astrónomos, que diversos Observatórios — Berlim, Potsdam, Praga, Strasbourg, Poulkovo, Copenhague, Upsala e Lund — se propuseram estudar em comum as variações da latitude tendo os primeiros quatro escolhido para êsse fim o método de Horrebow-Talcott [4] que tinha sido usado por Küstner na dedução da constante de aberração.

É nesta fase que a intervenção de Chandler vem encontrar o problema. Alguns o têm apresentado como o descobridor do movimento do polo, «o primeiro, talvez, a suspeitá-lo» [5]. Ora, o mérito de Chandler, que foi muito grande não só nesta como em outras questões de Astronomia, não necessita da prioridade na descoberta do movimento. Chan-

[2] M. F. Tisserand — «Bulletin Astronomique», Vol. 5, 1888; Tisserand — «Traité de Mécanique Celeste», Vol. 2.

[3] Onde está hoje instalado o Ofício Central do Serviço Internacional das Latitudes, sob a Direcção do Prof. Carnera.

[4] É êste o método usado ainda hoje pelas estações do Serviço Internacional das Latitudes.

[5] H. H. Turner — «Astronomical Discovery». London, 1904.

dler não descobriu o movimento do polo e, sobretudo, não foi êle o primeiro a suspeitá-lo. Tudo quanto atraz ficou dito estava feito quando, em Novembro de 1891, Chandler escreveu no N.º 248 do «Astronomical Journal» o seu primeiro artigo em que fala abertamente de variação das latitudes. O que Chandler descobriu, pela análise das suas observações com o Almucântara do Observatório do Harvard Colege (Cambridge, Massachussets) e de dezenas de milhar de outras, foi a lei do movimento — o valor real do período e a forma complexa da trajectória do polo — mercê de criteriosa interpretação das observações e de decidido alheamento de tôdas as considerações de ordem teórica. Os que o antecederam, ou por que usaram métodos defeituosos no tratamento das observações ou por não terem conseguido libertar-se dos conceitos teóricos estabelecidos, ou nada puderam concluir ou se aproximaram apenas dos resultados previstos pela Teoria. E foi ainda a Teoria que, em mãos de tão notável autoridade como Newcomb, veio em auxílio de Chandler para que no meio científico lhe dessem crédito – na curiosa expressão de Turner, *Newcomb ensinou-nos como engulir a pílula.*

O Dr. Seth Chandler não era astrónomo de profissão. O seu gôsto pela Astronomia manifestou-se logo no último ano do curso e, concluído êste, Chandler iniciou a vida prática como assistente particular do Dr. Gould no U. S. Geodetic Survey, em Boston, mas em breve abandonou a carreira astronómica para se dedicar à indústria de Seguros onde foi um técnico distintíssimo. Retomou mais tarde os trabalhos astronómicos no Observatório do Harvard Colege onde trabalhou ainda durante alguns anos e, desde então até à sua morte, nunca mais deixou de se interessar profundamente, como amador, pelas questões de Astronomia. A descoberta das leis do movimento do polo valeu-lhe a concessão da Medalha de Ouro da Royal Astronomical Society de que era associado. Um dos seus primeiros triunfos foi a invenção do Almucântara, instrumento cujas observações o conduziram à investigação dessas leis.

Chandler tinha notado que os resíduos destas suas observações não gosavam de carácter acidental, o mesmo sucedendo aos das observações do Dr. Küstner e às de Berlim, Potsdam, Praga e Poulkovo a que atraz se fêz referência; e, servindo-se em particular das observações de Poulkovo e Washington, realizadas conjuntamente durante um período relativamente mais longo (1863 a 67), calcula pela fórmula:

$$\Delta\varphi = -r\cos[\lambda + (t - T)\theta]$$

os valores de r e θ [6], verifica que estes valores satisfazem também às equações estabelecidas pelas observações de Melbourne e Leyden e afirma ousadamente que o polo norte da Terra gira, de Oeste para Leste, em tôrno de uma posição média, num período de 427 dias – 14 meses, — descrevendo uma curva de raio igual a 30 pés — cêrca de 9 metros.

Mal pode fazer-se idéia, diz Turner, da onda de incredulidade que suscitaram as conclusões de Chandler. O conceito geral sôbre o movimento do polo era tacitamente êste: ou é imóvel à superfície da Terra ou, não o sendo, completa o seu movimento num período de 305 dias de acôrdo com a Teoria. A pressuposição gratuita de uma Terra absolutamente rígida, sôbre que assentava tôda a Teoria, tinha sido esquecida e para que fôssem aceites as conclusões de Chandler foi necessário que Newcomb chamasse a atenção para essa infundada hipótese e demonstrasse [7] que se a Terra fôsse considerada elástica e lhe fôsse atribuída uma rigidez ligeiramente superior à do aço, o período teórico do movimento do polo igualaria o deduzido pelas observações.

Chandler poderia ter ficado por aqui: a Teoria e a Prática estavam já reconciliadas e a missão de ulteriores investigações pertencia agora à Associação Geodésica Internacional que, para êsse fim, acabava de criar o Serviço Internacional das Latitudes com programa e métodos próprios. Mas a fé de Chandler nas suas conclusões era grande de mais para que se resignasse a não ver confirmada por maior número de observações a lei do movimento deduzida e, assim, êle passa a analizar as observações de Bradley [8] e por elas deduz um período anual para o movimento do polo. O manifesto desacôrdo entre estas e as primeiras conclusões levam-no à suspeita da variabilidade do período e, com o fim de a verificar, êle aplica a sua análise a cêrca de três dezenas de milhar de observações, feitas, entre os anos de 1837 e

---

[6] Por r e θ designava Chandler o raio da curva descrita e o movimento angular diário; $\Delta\varphi$ era a variação da latitude, T a data em que o polo móvel existia no plano do meridiano de Greenwich e λ a longitude da estação referida a Greenwich.

[7] Newcomb — On the Dynamics of the Earth's Rotation with respect to the Periodic Variations of Latitude — Monthly Notices, Vol. III, Março de 1892.

[8] É curioso notar que foram estas observações que levaram Bradley à descoberta da Aberração da Luz e da Nutação do eixo terrestre. Como vai ver-se são elas que vão ainda conduzir Chandler à descoberta da verdadeira lei do movimento do polo. É mais um atributo de preciosidade que a Astronomia lhes não pode negar.

1891, em diversos observatórios e por métodos diferentes. Ao princípio ainda se pronunciou por um período variável mas, ante a crítica severa de Newcomb a esta conclusão, Chandler é compelido a rever o seu trabalho e conclui então: o movimento do polo é a resultante da combinação de dois movimentos distintos, tendo o primeiro um período de 428.6 dias e uma semi-amplitude de 0''.12, e o segundo um período anual com a semi-amplitude variável entre 0''.04 e 0''.20. O período do movimento resultante era, pois, de 7 anos, ou sejam 84 meses (m. m. c. 14,12). Em todo o caso, as observações mostravam que os períodos e as amplitudes dêstes movimentos estavam ainda sujeitos a uma oscilação de longo período compreendido entre 60 e 70 anos.

Chandler procura em seguida determinar a natureza das trajectórias [9]. Traçando por pontos a do movimento resultante, obteve uma linha quási fechada que se aproximava muito de uma elipse de eixos iguais a 0''.55 e 0''.30. Estudando depois, em separada, as trajectórias dos dois movimentos componentes, Chandler determinou para o movimento de 14 meses uma curva tão pouco diferente da circunferência que os dados da observação eram igualmente bem representados por uma ou por outra; para o movimento de período anual, obteve uma elipse muito alongada de eixos iguais a 0''.32 e 0''.10.

Estavam descobertas as leis do movimento do polo.

As investigações posteriores do Serviço Internacional das Latitudes confirmaram, com efeito, estes resultados de Chandler, mas não se suponha que se encontrou sempre, rigorosamente, o número 428.6 para a grandeza do período do movimento principal, ou que os valores das amplitudes igualaram sempre os deduzidos por Chandler, ou, finalmente, que as trajectórias obtidas por essas investigações se adaptaram sempre, com inteiro rigor, à circunferência e à elipse, de raio e eixos constantes, que Chandler determinou. Estas grandezas estão sujeitas a variações mais ou menos regulares. A trajectória do polo apresenta, por vezes, formas bastante caprichosas e pelo que diz respeito, em particular, ao período do movimento principal, tem-se reconhecido a sua variabilidade dentro de alguns dias. Enquanto Chandler determinou primeiro, para seu valor, 427 dias e mais tarde 428.6, Frank Dyson achou, pelas observações de Greenwich, 432 dias, e mais modernamente, para só citar estes, Markowitz, do Observatório de Washington, encontrou o valor médio de 422 dias pela análise das observações de 24 anos (1916-40). A efeméride das latitudes que Chandler chegou a imaginar e mesmo a construir, isto é, uma tabela que nos desse, para qualquer data, a latitude de um lugar de longitude λ, é impraticável a não ser que nos contentemos com um grosseiro valor aproximado. Êle o reconheceu quando, depois da análise que ainda fêz das primeiras observações do Serviço Internacional apresentadas por Albrecht, enunciou os seus resultados do modo seguinte: o movimento do polo é a resultante de dois movimentos simples, um de trajectória aproximadamente circular e de velocidade angular variável, realizando-se num período de 14 meses, e um outro de trajectória aproximadamente elíptica e de período anual. E assim se deve dizer: 14 meses — como quem diz, mais dias menos dias — e não 428 ou 432 dias, e sobretudo, 428.6. Há, na realidade, várias causas que perturbam a perfeita regularidade do movimento do polo, designadamente, tôdas as de origem meteorológica e geológica que modificam, sem regularidade periódica, a distribuição de massas à superfície e no interior do Globo.

É geralmente aceite a seguinte interpretação física dos movimentos do polo deduzidos da observação. O movimento principal, de período igual a 14 meses, é o movimento previsto por Euler. Êle resulta, como se viu, de não serem coincidentes os eixos de rotação e de figura da Terra e já foi explicado como o período previsto pela Teoria se poderia ajustar ao deduzido experimentalmente. Quanto ao segundo movimento, de período anual, ocorre naturalmente identificá-lo com o deduzido teòricamente por Oppolzer como resultado das acções do Sol e da Lua, mas reconhece-se que êste, por si só, apenas pode explicar uma pequena parte daquele têrmo anual. A maior parte resulta, principalmente, do fenómeno meteorológico do deslocamento de grandes massas de ar à superfície da Terra. Sabe-se, com efeito, que o máximo de pressão atmosférica se verifica nos continentes durantes os meses frios, registando-se nêles o mínimo de pressão nos meses quentes. Nos mares dá-se o contrário. Ora, dada a enorme extensão do hemisfério norte ocupada pelos continentes, muito superior à superfície dêste hemisfério ocupada pelos mares, reconhece-se que

[9] Não cabe aqui, evidentemente, a exposição pormenorizada dos métodos usados por Chandler nesta exaustiva investigação que lhe levou o melhor de 6 anos. O leitor mais interessado encontrará essa exposição em artigo do próprio Chandler, no n.º 406 do «Astronomical Journal», de 18 de Junho de 1897, sob o título: Synthetical statement of the Theory of the polar motion.

apenas uma pequena parte do excesso de ar que no inverno cobre aquêles continentes é gasta em produzir o excesso de pressão verificada durante o verão sôbre os mares do mesmo hemisfério. A massa excedente, que Spitaler [(10)] calculou ser superior a uma dezena de biliões de toneladas, desloca-se pois de Norte para Sul na passagem do inverno para o verão (hemisfério norte), ficando sujeita a um movimento de sentido contrário na passagem do verão para o inverno.

Êste movimento de período anual de uma tão grande massa de ar tem como conseqüência um doslocamento, igualmente de período anual, do polo de figura da Terra, que foi estudado por Spitaler e de que resulta, segundo os trabalhos de Radau, um deslocamento triplo para o polo de rotação. É de esperar, por outro lado, que êle dê origem a uma vibração do centro de gravidade [(11)] da Terra para um e outro lado da sua posição média, resultando dessa vibração variações na inclinação, em relação ao equador, da vertical de qualquer lugar à superfície da Terra e, portanto, variações de período anual nas latitudes. Sendo assim, é de reconhecer que uma parte do têrmo anual não é pròpriamente devida a um deslocamento do polo à superfície da Terra mas sim a um desvio da vertical. Voltaremos a êste assunto quando tratarmos do têrmo de Kimura.

Termina aqui a idade antiga — deixai-me chamar-lhe assim — da variação das latitudes. A sua idade moderna principia com a descoberta do têrmo de Kimura que terá de ser objecto de futuro artigo porque êste já vai longo e a secção de Astronomia não foi criada para aborrecer os leitores da «Gazeta de Matemática».

(10) Spitaler, Die Ursache der Breitenschwankungen, Wien 1897.

(11) Escrevemos contrafeitos «centro de gravidade da Terra». Só o desejo de não fugir à regra geral nos levou a isso porque entendemos que esta designação se deveria exclusivamente aplicar no caso de corpos sujeitos à acção da gravidade. Para a Terra ou qualquer outro planeta preferíamos empregar a designação de «centro de atracção».

BIBLIOGRAFIA

Além dos livros e artigos já citados, mais os dois seguintes trabalhos portugueses:

Variações de latitude, pelo Prof. J. Custódio de Morais, Coimbra, 1914. (Dissertação de Doutoramento em Matemática).

O deslocamento dos polos à superfície da Terra, pelo Prof. L. Cabral de Morais, Lisboa, 1903. (Dissertação de concurso para Professor de Matemática da Escola Politécnica).

TEMAS DE ESTUDO

A NOÇÃO DE GRUPO TOPOLÓGICO [1)]

por ***Hugo Ribeiro***

(Bolseiro do Instituto para a Alta Cultura)

«The concept of a continuous, or what is the same thing, topological group, arose in mathematics from the study of groups of continuous transformations. A group of continuous transformations, e. g. geometric transformations, constitutes in a natural way a topological manifold. It appeared later that for the treatment of the greater part of the problems arising in this connection it is not necessary to consider a group as a group of transformations, but merely to study the group intrinsically, remembering however that there is defined in it an operation of passage to a limit. Thus arose a new mathematical concept — topological group.

.. One of the concrete concepts of the theory of topological groups is the concept of Lie group. In fact the theory of topological groups first arose in the theory of Lie groups. As is usual in relatively older theories the theory of Lie groups left unsolved some of its fundamental problems. We devote the sixth chapter of this look to the solution of these problems» ..

O que precede é parte do prefácio de Pontrjagin ao seu livro [2)], livro que, cremos, constitui a expo-

1) Colaborando na presente secção da «Gazeta de Matemática» o objectivo do autor é ùnicamente indicar noções e resultados, provàvelmente ainda não familiares à maior parte dos leitores dêste jornal, e sugerir problemas com os quais alguma vez tomou conhecimento numa medida que lhe permite (a seu juízo!) uma exposição precisa (para que a leitura não apresente obstáculos escusados) mas breve (exigindo um esfôrço salutar do estudioso e excluindo os leitores contemplativos) e contendo indicações bibliográficas para o desenvolvimento do texto e o prosseguimento do estudo.

2) *Topological Groups*, Traduzido do russo por Emma Lehmer. Princeton Mathematical Series, 1939.

sição de conjunto mais detalhada e mais recente sôbre êste assunto. Esta obra contém dois capítulos introdutórios nos quais se desenvolvem respectivamente os conceitos de grupo e espaço topológico.

Um grupo topológico é um grupo com uma estrutura topológica de certo tipo, relativamente à qual as operações do grupo são funções contínuas. Mais precisamente: Seja G um grupo (abstracto) com a operação de multiplicação $\cdot$ e de elementos $x\,,y\,,\cdots$ cujos inversos se representarão respectivamente por $x^{-1}y^{-1}\,,\cdots$; seja em G definida uma estrutura topológica, isto é, seja dado um processo de ter, com cada conjunto de elementos de G, o sub-conjunto de G dos seus elementos («pontos») de acumulação (conjunto derivado) ou, o que é equivalente, o seu fecho (reünião do conjunto em questão e do derivado), e especialmente seja esta estrutura topológica a dum espaço T_1; seja ainda para cada elemento y de G, $x\cdot y$ (isto representa então uma correspondência unívoca, $x\to x\cdot y$, do conjunto G no conjunto G!) uma função contínua de x (relativamente ao espaço anterior!) e, para cada elemento x (é agora uma correspondência $y\to x\cdot y$) uma função contínua de y; seja, finalmente, também x^{-1} uma função contínua de x. O grupo G é então um grupo topológico (relativamente àquela estrutura topológica).

Recordemos o significado de cada um dos conceitos anteriores (grupo, espaço T_1, função contínua) para que fique aqui inteiramente entendida a definição anterior e porque isso nos vai ser útil no que segue:

Um conjunto não vazio, G, é um grupo relativamente a uma operação $\cdot$ (a multiplicação do grupo), que faz corresponder unìvocamente a cada par (ordenado!) $<x\,,y>$ (pode ser $x=y$!) de elementos x e y de G um elemento $z=x\cdot y$ de G, se, e só se, esta operação é associativa e tal que há em G elementos z e u para os quais $z\cdot x=y$ e $x\cdot u=y$ [3]. (Prova-se então que G contém um elemento único (a unidade do grupo), e, tal que $x\cdot e=e\cdot x=x$ qualquer que seja o elemento x de G e também, que, para cada elemento x de G há um elemento único (o inverso de x) x^{-1} para o qual $x^{-1}\cdot x=x\cdot x^{-1}=e$. Um conjunto G é um espaço T_1, relativamente a uma operação $\overline{}$ (o fecho do espaço) que faz corresponder unìvocamente a cada sub-conjunto X de G um sub-conjunto $\overline{X}$ de G, se, e só se, esta operação verifica as condições $\overline{X\cup Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}$ ($\cup$ representa a operação de reünião de conjuntos), $\overline{\overline{X}}=\overline{X}$ e $\overline{X}=X$ se X é constituído por um «ponto» único [2,4]. (Prova-se então que é, para cada conjunto X não vazio, $X\subset\overline{X}$ — isto é: cada elemento de X é um elemento de $\overline{X}$ — e, se supozermos, como sempre faremos, que G tem mais do que um elemento, asseguramo-nos de que se tem para o conjunto vazio, $O\,,\overline{O}=O$). A operação $\overline{}$ foi aqui suposta dada directamente. Ela pode porém obter-se ligando a cada elemento x de G uma família de sub-conjuntos de G (as vizinhanças de x) verificando, esta correspondência, certas condições [2,4]. Então, um elemento x de G pertencerá ao fecho $\overline{X}$ dum sub-conjunto X se, e só se, tôdas as vizinhanças de x contêm elementos de X. (Êste procedimento tem grande importância, especialmente no desenvolvimento da teoria dos grupos topológicos que parece ter sido sempre sistemàticamente prosseguida dêste modo [2]). Uma correspondência unívoca f (função dum espaço T_1, G, em si mesmo é contínua em todo o espaço se $f(\overline{X})\subset\overline{f(X)}$ qualquer que seja o sub-conjunto X de G [2]. f é contínua em todo o espaço se, e só se, é contínua em cada ponto x do espaço, isto é, (Cauchy) se, e só se, para cada x e cada vizinhança de $f(x)$ há uma vizinhança de x tal que para todos os seus pontos, y, $f(y)$ pertence àquela vizinhança de $f(x)$.

Podemos agora dizer brevemente: G é um grupo topológico relativamente às operações $.$ e $\overline{}$ se, e só se, estas verificam (além das condições impostas simplesmente à operação do grupo) as seguintes condições: $\overline{X\cup Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}$, $\overline{\overline{X}}=\overline{X}$,

---

[3] Para o estudo da noção de grupo, teoria e aplicações consulte-se qualquer dos seguintes livros: Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, erster Band, Hamburger Mathematische Einzelschriften, 1937, Teubner, Berlin; Almeida Costa, *Elementos da Teoria dos grupos*, Centro de Estudos de Matemática, 1942, Pôrto; Speiser, *Die theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 3. Auflage, 1937, Springer, Berlin; B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* I, 3. Auflage, 1937, Berlin. Sublinhamos aqui, sòmente, o seguinte importante teorema (Cayley): *Qualquer grupo pode sempre considerar-se como um grupo de permutações.*

[4] Para o estudo dos espaços T_1 vejam-se: Kuratowski, *Topologie I*, 1933, Varsovie; Alexandroff und Hopf, *Topologie I*. Band, 1935, Springer, Berlin, p. 58. Para um estudo sistemático das relações entre as noções de fecho e de visinhança em diversos espaços abstractos veja-se *Trabalhos do Seminário de Análise Geral*, 1941, Lisboa, ou *Portugaliae Mathematica*, vol. 1, 2, 3, Lisboa.

$\overline{X}^{-1} \subset \overline{X^{-1}}$ quaisquer que sejam os sub-conjuntos X e Y de G e $\overline{(x)}=(x)$, $\overline{Y}\cdot x \subset \overline{Y\cdot x}$, $x\cdot\overline{Y} \subset \overline{x . Y}$ quaisquer que sejam o sub-conjunto Y e o elemento x.

A estrutura topológica dum grupo topológico é sempre *homogénea:* dados dois elementos quaisquer x e y há sempre uma permutação do espaço em si mesmo (por exemplo, a multiplicação à direita por $x^{-1}\cdot y$) que transforma x em y, e esta transformação é contínua e tem uma inversa (a multiplicação à direita por $y^{-1}\cdot x$) que é também contínua — há uma homeomorfia que faz corresponder y a x. Isto indica que as propriedades *topológicas* locais (relativas às vizinhanças) são as mesmas em todos os pontos, e bastará portanto estabelece-las num ponto único, qualquer, que pode ser, por exemplo, a unidade do grupo. Esta observação é própria do procedimento usual, acima apontado, no desenvolvimento da teoria dos grupos topológicos [2].

É tempo de indicar alguns exemplos importantes de grupos topológicos: 1.º) O grupo aditivo G dos números reais e, nêle, a estrutura topológica habitual. 2.º) O grupo aditivo G dos vectores (translacções) dum espaço euclideano, R^n, a n dimensões; êste exemplo generaliza imediatamente o anterior e, se $n=2$, é fundamentalmente o grupo aditivo dos números complexos. 3.º) O grupo G das rotações, do espaço ordinário, em tôrno dum ponto O. Obtém-se em G um espaço distanciado (e portanto um espaço T_1) se a cada rotação de amplitude φ, com $0\leq\varphi\leq\pi$, se faz corresponder sôbre o eixo respectivo, e no sentido para o qual é directo o sentido do movimento, o ponto cuja distância a O é $\operatorname{tg}\varphi/2$, tomando então para distância de duas rotações a dos pontos correspondentes. O espaço projectivo a 3 dimensões, representa aqui, o espaço das rotações em tôrno de O. Êste grupo, que não é, ao contrário dos anteriores, abeliano, pode ainda considerar-se como um grupo de matrizes ortogonais. 4.º) O grupo multiplicativo dos números complexos e^{ix} (de módulo 1), com a estrutura topológica ordinária da circunferência. É, fundamentalmente, o grupo aditivo dos números reais quando se consideram iguais dois números que diferem dum inteiro. 5.º) O caso trivial dos grupos topológicos discretos [2], para os quais o fecho de cada sub-conjunto é êste mesmo sub-conjunto. A sua teoria é a teoria, puramente algébrica, dos grupos.

Um método usual de obter novos grupos topológicos a partir de grupos topológicos dados é o da operação que fornece o «produto directo» [2] [3] de dois ou mais (mesmo infinitos numeráveis) grupos topológicos dados. Assim, o grupo topológico do 2.º exemplo é o produto directo de n grupos todos iguais ao do 1.º exemplo; o «toro» é o produto directo de dois grupos topológicos iguais aos do 4.º exemplo, etc.

Na teoria dos grupos topológicos estão estabelecidas muitas proposições que eram já bem conhecidas nos exemplos anteriores. Relacionam-se freqüentemente, naquela teoria, os conceitos seguintes da Teoria dos Grupos e da Topologia, entre os quais há uma correspondência natural: sub-grupo e sub-espaço, homomorfismo e continuïdade, isomorfismo e homeomorfismo, grupo factor e espaço cociente, etc. Certos grupos topológicos, cuja estrutura topológica tem propriedades particulares, podem estudar-se como grupos topológicos de matrizes [2]. Investigações sôbre esta possibilidade têm sido sistemàticamente prosseguidas, e assim se desenvolvem, por exemplo, os estudos da integração em grupos topológicos [5].

Voltemos à definição de grupo topológico: A operação de multiplicação em G induz naturalmente uma operação de multiplicação entre os sub-conjuntos $X, Y\cdots$ de G; e esta, com as operações de reünião $\cup$ e de intersecção $\cap$ de classes dá logar a um conhecido cálculo de «complexos» dum grupo: Com efeito, se se fixa que $X\cdot Y$ é o sub-conjunto constituido pelos elementos de G que são iguais ao produto (segundo a multiplicação do grupo) de um elemento de X por um elemento de Y, e ainda que X^{-1} é o sub-conjunto constituído pelos inversos dos elementos de X, poderão fàcilmente estabelecer-se várias leis dêste cálculo (a distributividade de $\cdot$ relativamente a $\cup$, por exemplo) importantes na teoria dos grupos. Verifica-se fàcilmente que o complexo $X\neq 0$ é um grupo se, e só se, $X\cdot X^{-1}\subset X$ (ou, o que é o mesmo, $X\cdot X^{-1}\cup X=X$) [3]. Do ponto de vista dêste cálculo de complexos dum grupo qualquer (não se supõe ainda que seja topológico) os complexos constituem uma álgebra de Boole completa atómica (espaço algébrico cujos elementos se combinam com as operações $\cup$ e $\cap$ como os sub-conjuntos de um conjunto) onde duas outras operações (a de multiplicação, e a de tomar o inverso) verificam certas condições. A operação $\overline{}$ será uma nova operação (uma correspondência) para

[5] André Weil, *L'intégration das les groupes topologiques*, Publications de l'Institut Mathématique de Clermont Ferrand, Act. Sc. e Ind. n.º 869, 1940, Hermann, Paris.

os elementos desta álgebra de Boole, e verifica-se fàcilmente (a partir das condições acima e das definições já dadas) que aquêle cálculo de complexos é o de um grupo topológico relativamente a êste fecho se, e só se, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, $\overline{X} \cdot \overline{Y}^{-1} \subset \overline{X \cdot Y^{-1}}$ quaisquer que sejam X e Y e $\overline{X} = X$ quando X é um átomo (complexo de um único elemento de G)[6]. (Demonstra-se agora, imediatamente, por exemplo, que se X é um sub-grupo $\overline{X}$ também é um sub-grupo: De facto, se $X \neq 0$ é $\overline{X} \neq 0$ e se $X \cdot X^{-1} \subset X$ é $\overline{X} \cdot \overline{X}^{-1} \subset \subset \overline{X \cdot X^{-}} \subset \overline{X}$).

Esta formulação, que se nos afigura simples, significa de certo modo, uma algebrização da noção do grupo topológico, e tem, porventura, interesse no estabelecimento de alguns resultados da sua teoria geral. Sabe-se por exemplo, que a estrutura topológica dum grupo topológico é sempre a dum espaço regular[2) 4)]. E êste resultado deve poder obter-se fàcilmente se se recorre à caracterização que António Monteiro deu dos espaços regulares[7)]. Afigura-se-nos ainda que, com leves modificações, as três primeiras condições apontadas para o cálculo dos complexos dum grupo topológico, se verificam ainda noutros cálculos muito distintos (é que elas são especialmente interessantes no cálculo das relações binárias). Procuraremos detalhar esta observação num novo artigo.

1943, Setembro, Zürich

---

[6] António Monteiro, et Hugo Ribeiro, *Les fonctions continues et les espaces partiellement ordonnés*, Portugaliae Mathematica, vol. 4, 1945, Lisboa.

[7] António Monteiro, *La notion de fermeture et les axiomes de séparation*, Portugaliae Mathematica, vol. 2, 1941, Lisboa, p. 290 ou Anais da Fac. Ciências do Pôrto, tomo 26, 1941, Pôrto, p. 193.

ÁLGEBRA MODERNA

por **A. Almeida Costa**

Em seguimento da exposição feita nos cursos do *Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto* sôbre *Grupos* e *Anéis*, seria útil, nos têrmos da memória fundamental de *E. Steinitz* (Algebraische Theorie der Körper, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 137, págs. 167 a 308, 1910), continuar o tratamento das ampliações algébricas dos corpos comutativos, expôr o teorema fundamental relativo à existência dum tipo de equivalência de corpo algèbricamente fechado, ampliação dum corpo dado, e dar os teoremas relativos às ampliações transcendentes (Os cursos referidos inserem todo o conteúdo da memória citada, até págs. 249).

FÍSICA TEÓRICA

por **A. Almeida Costa**

Tem interêsse justificar os raciocínios que vão seguir-se, utilizando simultâneamente dados experimentais e métodos da Análise Matemática.

Consideremos um átomo composto de um núcleo e de $f+1$ electrões. Na ausência de campo exterior, a função de fôrça é

$$U = \sum_{\lambda=1}^{f+1} \frac{Ze^2}{r_{0\lambda}} - \sum_{\substack{i<k \\ i \neq 0}}^{f+1} \frac{e^2}{r_{ik}},$$

onde Ze representa a carga do núcleo, r_{lm} a distância entre as partículas de índices l e m, e onde o índice zero se refere ao núcleo. A equação de *Schrödinger* correspondente é

$$\left(-\sum_{0}^{f+1} \frac{h^2}{2\mu_\lambda} \Delta_\lambda - \sum_{1}^{f+1} \frac{Ze^2}{r_{0\lambda}} + \sum_{\substack{i<k \\ i \neq 0}}^{f+1} \frac{e^2}{r_{ik}}\right) \psi = E\psi.$$

Introduzindo as coordenadas $x_s, \cdots$ do centro de gravidade e as coordenadas relativas $x_\lambda - x_s = x'_\lambda, \cdots$, têm lugar as igualdades

$$x_\lambda = x_s + x'_\lambda, \cdots, \quad x_0 = x_s - \frac{\mu_1 x'_1 + \cdots}{\mu_0}, \cdots.$$

Por elas se verifica que U depende ùnicamente das coordenadas relativas. Nas novas coordenadas, a equação de *Schrödinger* escreve-se

$$\left\{-\frac{h^2}{2M}\Delta_s - \sum_{1}^{f+1} \frac{h^2}{2\mu_\lambda}\Delta'_\lambda + \frac{h^2}{2M}\left(\sum_{1}^{f+1} \frac{\partial}{\partial x'_\lambda}\right)^2 + \cdots - U\right\}\psi = E\psi,$$

$$(M = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{f+1}).$$

Esta equação parte-se nas duas seguintes (onde se suprimem as linhas):

$$-\frac{h^2}{2M}\Delta_s \psi_s = E_s \psi_s,$$

$$\left\{-\sum_1^{f+1}\frac{h^2}{2\mu_\lambda}\Delta_\lambda+\frac{h^2}{2M}\left(\sum_1^{f+1}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\right)^2+\cdots-U\right\}\psi=E\psi.$$

Nesta última, vamos desprezar a quantidade $\frac{1}{\mu_0}$ em face de $\frac{1}{\mu_\lambda}$ $\left(\text{ou } \frac{\mu}{\mu_0} \text{ em face da unidade}\right)$. Sendo

$$(\mu_0+\mu_1+\cdots)\,x_s=\mu_0\,x_0+\mu_1\,x_1+\cdots,\cdots,$$

obtém-se, na mesma ordem de aproximação,

$$x_s=x_0,\cdots,\quad r_{0\lambda}=\sqrt{x_\lambda'^2+\cdots}=\sqrt{x_\lambda^2+\cdots}=r_\lambda.$$

A equação em causa torna-se na seguinte:

$$(1)\qquad \left(-\sum_1^f\frac{h^2}{2\mu_\lambda}\Delta_\lambda-\sum_1^f\frac{Ze^2}{r_\lambda}+\sum_{\substack{i<k\\ i\neq 0}}^f\frac{e^2}{r_{ik}}\right)\psi+$$
$$+\left(-\frac{h^2}{2\mu_{f+1}}\Delta_{f+1}-\frac{Ze^2}{r_{f+1}}+\sum_{i=1}^{f+1}\frac{e^2}{r_{i,f+1}}\right)\psi=E\psi.$$

Pondo de parte as variações de E_s e ψ_s, o nosso problema é um problema de núcleo fixo e de electrões móveis em tôrno dêsse núcleo, que pode supor-se na origem das coordenadas.

Vamos escrever (1) sob a forma

$$(2)\qquad (A+B)\,\psi+(A'+B')\,\psi=E\psi,$$

com

$$A=-\sum_1^f\frac{h^2}{2\mu_\lambda}\Delta_\lambda-\sum_1^f\left(\frac{Ze^2}{r_\lambda}-\Phi_\lambda\right)=$$
$$=-\sum_1^f\frac{h^2}{2\mu_\lambda}\Delta_\lambda-\sum_1^f V_\lambda\left(\frac{1}{r_\lambda}\right),$$

$$B=\sum_{\substack{i<1\\ i\neq k}}^f\frac{e^2}{r_{ik}}-\sum_1^f\Phi_\lambda=-\sum_1^f\frac{Ze^2}{r_\lambda}+$$
$$+\sum_{\substack{i<k\\ i\neq 0}}^f\frac{e^2}{r_{ik}}+\sum_1^f V_\lambda\left(\frac{1}{r_\lambda}\right),$$

$$A'=-\frac{h^2}{2\mu_{f+1}}\Delta_{f+1}-\left(\frac{Ze^2}{r_{f+1}}-\Phi_{f+1}\right)=$$
$$=-\frac{h^2}{2\mu_{f+1}}\Delta_{f+1}-V_{f+1}\left(\frac{1}{r_{f+1}}\right),$$

$$B'=\sum_{i=1}^{f+1}\frac{e^2}{r_{i,f+1}}-\Phi_{f+1}=-\frac{Ze^2}{r_{f+1}}+$$
$$+\sum_{i=1}^{f+1}\frac{e^2}{r_{i,f+1}}+V_{f+1}\left(\frac{1}{r_{f+1}}\right).$$

A equação (2) parte-se agora em

$$(3)\qquad (A+B)\,\psi_1=E_1\,\psi_1,$$

$$(4)\qquad (A'+B')\,\psi_2=E_2\,\psi_2.$$

A equação (3) respeita aos f primeiros electrões. O seu tratamento supõe-se ter sido feito do modo seguinte: estudou-se $A\psi=E\psi$, que respeita ao sistema dos referidos f electrões postos em frente do núcleo com «protecção» (Abschirmung); em seguida, sob a forma de «perturbação», introduziu-se B=acção mútua — protecção.

Admitindo que os espectros aos quais se supõe aplicável a doutrina em desenvolvimento (espectros hidrogenoides dos alcalinos) se explicam supondo fixos E_1 e ψ_1 (estado fundamental), somos levados à equação (4). Podemos dizer, em primeiro lugar, que ao sistema, de estado determinado, constituido pelos f primeiros electrões, se juntou o electrão de ordem $f+1$, sob o qual actua um campo central com «protecção», tudo regulado pela equação

$$(A+B)\,\psi+A'\,\psi=E\psi;$$

e, em segundo lugar, que o resto da acção mútua, entre o electrão de ordem $f+1$ e a «carcassa» do núcleo e dos f primeiros electrões, é introduzida pelo operador B'.

A equação $A'\psi_2'=E_2'\psi_2'$ corresponde ao problema usual dum electrão em frente dum núcleo, sob a acção duma fôrça do tipo $\varphi(r)$, que não é uma fôrça de *Coulomb*. Se não existisse a «protecção» Φ_{f+1}, os valores próprios constituiriam um sistema discreto:

$$E_{2,1}';\ E_{2,2}'=E_{2,3}'=E_{2,4}'=E_{2,5}';\ E_{2,6}'=\cdots=E_{2,14}';\ \cdots.$$

Por simplicidade, escreveremos $N=1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+1$ e poremos

$$E_{2,N}'=E_{2,N+1}'=\cdots=E_{2,N+n^2-1}'=E_N.$$

O valor próprio E_N tem uma degenerescência de grau n^2. A intervenção de Φ_{f+1} diminue essa degenerescência, pois E_N desdobra-se nos valores próprios

$$(5)\qquad E(n,0),\,E(n,1),\cdots,E(n,l),\cdots,E(n,n-1),$$

onde a $E(n,l)$ corresponde um degenerescência de grau $2l+1$. O cálculo dos valores (5) faz-se determinando as raízes ζ duma equação da forma

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\zeta & \cdots & b_{1,n^2} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ b_{n^2,1} & \cdots & b_{n^2,n^2}-\zeta \end{vmatrix}=0,$$

que quási se reduz à forma

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\zeta & b_{12} & \cdots & b_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22}-\zeta & \cdots & b_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ii}-\zeta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0-\zeta & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0-\zeta \end{vmatrix} = 0,$$

onde $i=l(l-1)+1$, e l se supõe grande. Os b_{ik} correspondentes a valores grandes de l seriam, pois, nulos, facto que justificaria a tendência do espectro dos hidrogenoides para o espectro do hidrogénio, quando l aumenta.

A intervenção de B' alteraria os níveis da energia mas não a degenerescência.

Finalmente, «responsabilizando» o electrão de valência pelo fenómeno de *Zeeman* proveniente da intervenção dum campo magnético uniforme (não muito intenso), o efeito correspondente poderia então tratar-se como se houvesse um único electrão num campo central, mesmo para o cálculo das intensidades luminosas (probabilidades de transição em que intervém o número quântico magnético m).

MOVIMENTO MATEMÁTICO

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

A «Gazeta de Matemática» tem o prazer de comunicar aos seus leitores a criação da ***Junta de Investigação Matemática,*** acontecimento da maior importância para o desenvolvimento e orientação do movimento matemático português contemporâneo.

Publicamos a seguir a acta da fundação da Junta que teve lugar no dia 4 de Outubro de 1943; nela se apresentam os objectivos a alcançar dispensando qualquer outro comentário.

Atendendo à necessidade de:

1.º — Promover o desenvolvimento da investigação matemática;

2.º — Realizar trabalhos de investigação necessários à economia da nação e ao desenvolvimento das outras ciências;

3.º — Sistematizar e coordenar a inquirição científica dos matemáticos portugueses;

4.º — Vincular o movimento matemático português com o dos outros países e em especial com o dos países íbero-americanos;

5.º — Despertar na juventude estudiosa portuguesa o entusiasmo pela investigação matemática e a fé na sua capacidade criadora;

resolvem os signatários promover a criação duma Junta de Investigação Matemática convidando a ingressar nela todos aquêles a quem o empreendimento interesse.

A. de Mira Fernandes
António A. Monteiro
Ruy Luís Gomes

A «Gazeta de Matemática» aprovando, evidentemente, esta iniciativa põe as suas páginas ao serviço da Junta e pede a todos os que por ela se interessam para comunicarem a sua adesão à «Junta de Investigação Matemática». — Redacção da «Gazeta de Matemática» — Lisboa.

¿O QUE É A «PORTUGALIAE MATHEMATICA»?

por ***Hugo Ribeiro***

(bolseiro do I. A. C. em Zürich)

A «Portugaliae Mathematica» tem sido repetidamente anunciada na nossa «Gazeta». Os nossos leitores sabem já que se trata de uma revista de colaboração internacional editada por António Monteiro, a única revista portuguesa que publica, exclusivamente, trabalhos originais de Matemática. Mas é tempo de dar a seu respeito algumas informações mais e, em especial, de procurar explicar ao público largo e interessado, que é já o dos leitores da «Gazeta», como serve ela o desenvolvimento dos estudos matemáticos e a importância que a sua publicação tem para os estudiosos portugueses do presente e do futuro. É o que, ràpidamente, procuro fazer nas linhas que seguem as quais, em parte, desenvolvem o prefácio de António Monteiro no primeiro volume da revista.

A «Portugaliae Mathematica» publicou o seu 1.º fascículo em 1937, mas só em 1940 foi possível encerrar, com cêrca de 500 páginas, o primeiro volume. Desde então passaram a publicar-se regularmente os volumes anuais de aproximàdamente 300 páginas. No final do ano corrente sairá pois o volume 4.º e, assim, terá publicado perto de 1500 páginas de trabalhos de Matemática que, na sua maioria, são portugueses. A revista quere reflectir com justesa o desenvolvimento dos estudos matemáticos em Portugal; com êste fim, reeditou já os trabalhos que o professor Mira Fernandes publicara em revistas estrangeiras. Quere também servir o desenvolvimento da colaboração internacional: e, neste sentido, no interêsse evidente dos estudiosos portugueses, tem publicado (com uma freqüência cada vez maior em cada novo volume) memórias vindas de diversos centros estrangeiros: de Cluj, na Romània; de Roma; de Madrid; de Paris; de Princeton; de Rosário, na Argentina; de Salamanca; de Zürich, etc. Entre os seus colaboradores permanentes figuram já matemáticos aos quais a Ciência deve contribuições das mais importantes: o francês Maurice Fréchet, o americano John von Neumann, etc. É, decerto, escusado sublinhar a utilidade desta cooperação, sobretudo para o desenvolvimento dos estudos matemáticos em Portugal. O professor Heinz Hopf, da Escola Politécnica Federal de Zürich, colaborador de muitas das mais importantes revistas de Matemática, e que é agora também colaborador permanente da «Portugaliae Mathematica», e desinteressado e activo cooperador da sua expansão, considera-a uma publicação hoje excepcional, pela sua regularidade e pela diversidade de origem dos seus colaboradores e variedade do seu conteúdo.

Sem a revista de António Monteiro seria muito difícil que os matemáticos portugueses tornassem ràpidamente conhecidos os resultados que vão obtendo nos seus estudos. Ela publica-se normalmente em fascículos trimestrais que são enviados a algumas dezenas de colaboradores, a cêrca de uma centena de bibliotecas (universitárias na sua maioria), das revistas com que troca, e a aproximàdamente 50 assinantes (há já um número razoável de assinantes estrangeiros). Também é enviada regularmente às revistas que publicam análises dos trabalhos de Matemática editados em todo o mundo, e, assim, os seus artigos se tornam conhecidos; pois tais revistas, como a «Zentralblatt für Mathematik» e a «Mathematical Reviews» são sistemàticamente folheadas pelos estudiosos e por êles lidas atentamente nas secções das suas especialidades. (Estas análises têm sido feitas mesmo quando os artigos respectivos foram redigidos em língua portuguesa).

Por outro lado, a «Portugaliae Mathematica» convida as Universidades, as Academias e as sociedades científicas a permutarem os seus volumes com as publicações respectivas, e recebe, por seu turno, convites idênticos. Estas permutas, a pouco e pouco estabelecidas, com algumas das melhores revistas científicas dos mais diversos centros constituem um dos aspectos mais importantes da difusão da «Portugaliae Mathematica» e enriquecem ininterruptamente a sua biblioteca. Até dum ponto de vista de estreito utilitarismo, já estas aquisições justificariam, só por si, a publicação da nossa revista, pois trata-se, já, de centenas de volumes, cada um dos quais é (mesmo comercialmente!) muito valioso. Mas sucede que tais revistas são, quási tôdas, simplesmente indispensáveis aos que estudam, e muitas delas preciosas no nosso país, onde as bibliotecas científicas, se as não ignoram completamente, ou não avaliam o seu interêsse ou (êste «ou» não é o excluidor!) são desprovidas de dotações que permitam adquiri-las. E os estudiosos portugueses podem, finalmente, utilizar essas revistas e utilizam-nas, na realidade, muito freqüentemente.

Para fazer vingar a expansão de uma revista de Matemática ao lado das já consagradas há muitas dezenas de anos é preciso que o seu conteúdo interesse verdadeiramente ao público matemático e, em especial, que acompanhe o desenvolvimento dos problemas contemporâneos. Com mais forte razão é isto preciso se se quere conseguir realizar aquela cooperação internacional de que os estudos matemáticos do nosso país tanto necessitam. A «Portugaliae Mathematica» conseguiu ràpidamente (e sem ter prosseguido uma difusão normal que êstes anos de guerra têm impedido) interessar efectivamente o público matemático. Isto não se conseguiu sem esfôrço para manter a regularidade da impressão e da expedição dos fascículos, das provas tipográficas e das separatas aos autores, etc., etc. Imaginar-se-ão os pormenores destas tarefas (e tantas pequenas outras!) em que se queimam energias e a que se dedicam muitas horas de trabalho. A situação actual da «Portugaliae Mathematica» deve-a ela (e portanto todos os portugueses) a António Monteiro, que não só com uma visão justa (que a exper ência já julgou) mas tambem com uma persistência incansável fundou a revista enfrentando os obstáculos mais diversos, e manteve a sua publicação organizando minuciosamente e realizando efectivamente até aquelas mais pequenas tarefas indispensáveis. A revista é subsidiada pelo «Instituto para a Alta Cultura», que tem compreendido o alcance dos seus objectivos e que pôde ver ao cabo de pouco tempo os seus frutos. Êste subsídio permite fazer face às despezas do papel, de impressão e de expedição. Ela parece dever constituir um modêlo para outras publicações doutros capítulos da Ciência que queiram prosseguir idênticos fins. A «Portugaliae Matematica» tem já uma irmã mais nova, a «Portugaliae Physica» que começou êste ano a sua publicação.

Zürich, 15 de Setembro de 1943.

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Faz parte do programa de trabalhos do *Seminário de Física Teórica* no presente ano lectivo um conjunto de sessões dedicadas ao *Estudo teórico geral das partículas elementares.* A primeira teve logar no dia 29 de Outubro e o Professor Dr. Proca tratou de *Les particules élémentaires* (Position du problème. Méthodes d'attaque. Principes fondamentaux des mécaniques nouvelles); a 2.ª sessão realizou-se no dia 5 de Novembro e o mesmo professor versou o tema *Rappel de quelques notions fondamentales de Mécanique Ondulatoire.* O Seminário funcionará às sextas feiras sendo, em breve, afixado um programa detalhado das sessões a efectuar.

A PARTIDA DO DOUTOR ANTÓNIO MONTEIRO

Os diários portugueses noticiaram já o convite feito pela Faculdade Nacional de Filosofia do Rio de Janeiro ao Doutor António Monteiro e a sua proxima partida. Os nossos leitores sabem também que o Prof. A. Monteiro vai reger a cadeira de Análise Superior, até aqui a cargo do Prof. G. Mammana, e dirigir um seminário de estudos matemáticos cujas pesquisas orientará, prosseguindo na tarefa iniciada pelos ilustres professores de matemática italianos que o precederam. Felicitamos vivamente a Faculdade Nacional de Filosofia pela inteligente escôlha feita, aconselhada também pelos grandes cientistas americanos A. Einstein e John von Neumann.

Sentimos bastante, como amigos, na Redacção da «Gazeta de Matemática», o seu afastamento temporário de Portugal; a revista, no entanto, é compensada pelo elo que estabelecerá o Prof. Monteiro com o meio matemático brasileiro de cujo movimento nos informará. É, porém, o meio matemático português, não desenvolvido ainda, como conviria, que mais perde com a sua ausência. Não queremos, com efeito, neste momento, deixar de recordar o animador incansável de quási tôdas as iniciativas de trabalho no campo matemático, algumas das quais foi o único a concebê-las. O nosso colaborador e amigo Hugo Ribeiro esclarece neste número da «Gazeta» o leitor do que é a «Portugaliae Mathematica» e o que esta lhe deve. É também ao seu entusiasmo e persistência que se deve em grande parte a criação da Sociedade Portuguesa de Matemática, a publicação da nossa revista e tantos outros empreendimentos, o mais recente dos quais e de grande importância é, sem dúvida, o ser um dos fundadores da Junta de Investigação Matemática. Os bolseiros do Instituto para a Alta Cultura que actualmente na Itália e na Suiça se aperfeiçoam no campo da investigação matemática, e que constituem a melhor propaganda portuguesa cultural no estrangeiro, permitem-nos afirmar — sabemo-lo de certeza, sem consultas — que muito devem a António Monteiro na orientação dos seus trabalhos de investigação e no entusiasmo sempre comunicado, impedindo desânimos e eliminando hesitações.

Em nome da «Gazeta de Matemática», desejamos-lhe encontre no Brasil a possibilidade, tão merecida, de realizar sem preocupações continuadas, o trabalho de investigação e orientação e consiga alcançar os objectivos que procura realizar.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1943)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 1

1511 — Dê a forma de um polinómio ordenado, de coeficientes inteiros, igualado a 0, à equação $\left(\frac{x}{2}-1\right)^3-\frac{1}{6}(x^2+2)^2=7-\frac{x+1}{2}$ R: *Desenvolvendo, desembaraçando de denominadores e ordenando, tem-se, sucessivamente:*

$$\frac{x^3}{8}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}-1-\frac{x^4}{6}-\frac{4x^2}{6}-\frac{4}{6}-7+\frac{x+1}{2}=0$$

$$-4x^4+3x^3-34x^2+48x-176=0$$

$$4x^4-3x^3+34x^2-48x+176=0$$

1512 — Resolva a inequação $\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}<0$. R: *A fracção é negativa para os valores de* x *que tornem de sinais contrários os seus dois termos, isto é:*

$$\begin{cases} x^2+2x-1<0 \\ x+1 \quad >0 \end{cases} \quad \textit{ou} \quad \begin{cases} x^2+2x-1>0 \\ x+1 \quad <0 \end{cases}$$

donde: $\qquad\qquad$ *donde:*

$$\begin{cases} -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2} \\ x>-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>1+\sqrt{2} \ \textit{e}\ x<-1-\sqrt{2} \\ x<-1 \end{cases}$$

e portanto: $\qquad\qquad$ *e portanto:*

$$+1<x<-1+\sqrt{2} \qquad x<-1-\sqrt{2}$$

A desigualdade é portanto satisfeita para:

$$-1<x<-1+\sqrt{2} \ \textit{e}\ x<-1-\sqrt{2}$$

1513 — Defina triedro. Enuncie as relações que conhece entre os seus elementos.

1514 — ¿Que unidades angulares conhece? Defina-as.

1515 — Determine por logaritmos com 5 algarismos decimais, e com a aproximação que êstes permitirem, o valor ou valores de

$$\operatorname{arc\,cotg} \sqrt{0{,}34275 \times \cos^2 123^\circ\, 12'\, 10''}\,.$$

R: *Se designarmos por* α *o arco do 1.º quadrante a que se refere o problema e se notarmos que*

$$\cos^2 123^\circ\, 12'\, 10'' = \cos^2 56^\circ\, 47'\, 50''$$

tem-se:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \sqrt{0{,}34275 \times \cos^2 56^\circ\, 47'\, 50''}$$

e portanto:

$$\log \operatorname{cotg} \alpha = 1/2 \log 0{,}34275 + \log \cos 56^\circ\, 47'\, 50''$$

$$= \bar{1},76649 + \bar{1},73846 = \bar{1},50595$$

donde $\qquad \alpha = 72^\circ\, 13'\, 28'',7$.

Os arcos que satisfazem ao problema proposto são, pois, $x = k \cdot 180^\circ + 72^\circ\, 13'\, 28'',7$.

1516 — Verifique se o número 631 é primo. Justifique a resposta. R: *Para verificar se um dado número* N *é, ou não, primo, basta verificar se êle é, ou não, divisível por algum dos números primos* $p<\sqrt{N}$. *No caso presente bastará verificar se* 631 *é divisível por algum dos números primos menores do que* 29. *Como tal facto não se verifica, conclui-se que o número* 631 *é primo.*

1517 — Determine todos os divisores comuns de 1188 e 990. R: *Como se sabe, os divisores comuns de vários números são os divisores do seu* M. D. C. *O algoritmo de Euclides permite-nos determinar o* M. D. C. (1188; 990) = 198. *Como* 198 = $= 2 \times 3^2 \times 11$, *teremos o seguinte esquema para o cálculo de todos os divisores de* 198 *incluindo o próprio número e a unidade:*

$$\begin{array}{l} 1 \quad 2 \\ 1 \quad 3 \quad 3^2 \\ \hline 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18 \\ 1,\ 11 \end{array}$$

1, 2, 3, 6, 9, 18, 18, 11, 22, 33, 66, 99, 198

Tais são os divisores comuns de 1188 *e* 990.

1518 — Em que consiste o método de resolução dos problemas pelos lugares geométricos? Aplique-o ao seguinte problema: Sendo dados sôbre o plano uma circunferência e um ponto A não situado sôbre ela, traçar uma secante que passe por A e que corte a circunferência em dois pontos B e C, tais que a razão das distâncias AB e AC seja igual a 2. (Lembra-se que a figura homotética de uma circunferência é outra circunferência). R: *A resolução de um problema de construção pelo método dos lugares geométricos consiste, geralmente, em tornar o problema indeterminado abstraindo de uma das condições que lhe são impostas. A solução do referido problema indeterminado é constituida pelos pontos de um lugar geométrico que satisfazem às restantes condições do problema proposto. Construido êsse lugar geométrico, retoma-se o problema proposto e abstrai-se de uma outra das condições que lhe são impostas, o que dá origem a outro lugar geométrico. A intersepção dêstes dois lugares geométricos constitui a solução do problema proposto. A natureza do problema a resolver indicará quais as condições que deveremos sucessivamente omitir para que os lugares geométricos obtidos sejam os mais convenientes para a resolução do problema proposto. Suponhamos o problema resolvido e seja* $\overline{AB}$ *a secante tal que* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 2$. *Nestas condições, se tomarmos por centro de homotetia o ponto* A *e para razão de homotetia o número* $+2$, *o ponto* B *será homotético de* C *relativamente a* A. *Por outro lado, como o ponto* C *pertence à circunferência dada, o seu homotético existirá sôbre a circunferência homotética da circunferência dada. Desta análise resulta o método para determinar o ponto* B *que, com o ponto* A, *definem a secante pedida. Basta, com efeito, construir a circunferência homotética da circunferência dada tomando para centro de homotetia o ponto* A *e para razão de homotetia o número* $+2$. *A intersecção das duas circunferências determinará os pontos* B *que satisfazem ao problema.*

Soluções dos n.os 1511 a 1518 de J. G. Calado.

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

onto n.º 1

I

1519 — Determine o valor de m nas equações: $x^2-5x+m=0$, $x^2+7x+2m=0$ de modo que uma das raizes da segunda equação seja o dôbro de uma das raizes da primeira. R: *Se forem* x_1 *e* x_2 *as raizes da primeira equação e* x'_1 $2x_2$ *as raizes da segunda, ter-se-à* $x_1+x_2=5$; $x_1 x_2=m$; $x'_1+2x_2=7$ *e* $2x_1 x_2=2m$. *Resolvendo o sistema formado por estas equações obtêm-se os valores* $m=6$, $x_1=3$, $x_2=2$ *e* $x'_1=3$. *A outra raiz da segunda equação é* 4.

1520 — Enuncie os teoremas que servem para determinar o sinal que toma o trinómio ax^2+bx+c quando se atribuem diferentes valores a x.

1521 — Determine uma fracção cujo valor não se altere quando se juntam 15 unidades ao numerador e 18 ao denominador e que se torne três vezes maior quando se juntam 55 unidades ao numerador e 6 ao denominador. R: *Seja* a/b *a fracção pedida, será* $\frac{a}{b}=\frac{a+15}{b+18}$ *e como os números que podemos juntar ao numerador e denominador duma fracção sem lhe alterar o valor são equimúltiplos dos termos da fracção equivalente à fracção dada e de têrmos primos entre si, terá que ser* $a=p\cdot 5$ *e* $b=p\cdot 6$. *Por outro lado* $3\cdot\frac{a}{b}=\frac{p\cdot 5+55}{p\cdot 6+6}$ *donde se tira, atendendo aos valores de* a *e* b, $2p+22=6p+6$ *ou* $p=4$ *e por conseguinte* $a=20$ $b=24$.

II

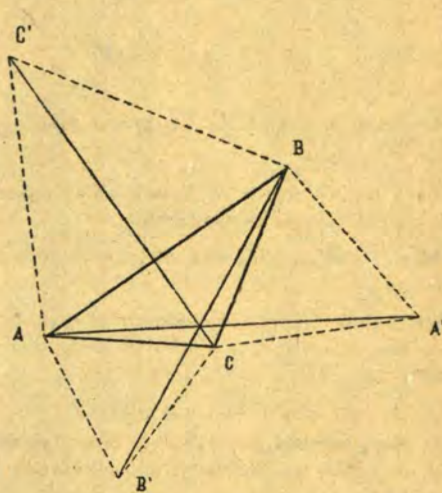
1522 — Verifique a identidade $\operatorname{tg}(45^\circ-a/2)=\frac{\cos a}{1+\operatorname{sen} a}$. R: $\operatorname{tg}(45^\circ-a/2)=(1-\operatorname{tg} a/2):(1+\operatorname{tg} a/2)=(\cos a/2-\operatorname{sen} a/2):(\cos a/2+\operatorname{sen} a/2)=(\cos^2 a/2-\operatorname{sen}^2 a/2):(\cos a/2+\operatorname{sen} a/2)^2=\cos a:(1+\operatorname{sen} a)$.

1523 — Calcule $\operatorname{sen} 3a$ em função de $\operatorname{sen} a$. R: $\operatorname{sen}(a+2a)=\operatorname{sen} a\cos 2a+\cos a\operatorname{sen} 2a=\operatorname{sen} a(1-2\operatorname{sen}^2 a)+\cos a(2\operatorname{sen} a\cos a)=\operatorname{sen} a-2\operatorname{sen}^3 a+2\operatorname{sen} a(1-\operatorname{sen}^2 a)=3\operatorname{sen} a-4\operatorname{sen}^3 a$.

1524 — Usando o cálculo logarítmico, calcule o comprimento do lado do heptágono inscrito numa circunferência de 13,17 metros de diâmetro. R: $l_7=2\times 13{,}17\operatorname{sen} 25^\circ 42' 51''$ *donde* $\log l_7=\log 2+\log 13{,}17+\log\operatorname{sen} 25^\circ 42' 51''=0{,}30103+1{,}11959+\bar{1}{,}63737=1{,}05799$ *e* $l_7=11{,}43$ *metros.*

III

1525 — Sôbre os lados de um triângulo qualquer ABC constroem-se para o exterior 3 triângulos equiláteros ABC', ACB', BCA'. Demonstre que os segmentos de recta AA', BB' e CC' têm comprimentos iguais. R: *Demonstremos por exemplo que* $\overline{AA'}=\overline{BB'}$. *A igualdade* $\overline{AA'}=\overline{CC'}$ *demonstra-se por processo análogo. Consideremos*



os triângulos $[BB'C]$ *e* $[AA'C]$, *que são iguais porque* $\overline{B'C}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=\overline{CA'}$ *e* $B'\hat{C}B=A\hat{C}A'$ *pois* $B'\hat{C}B=B\hat{C}A+A\hat{C}B=B\hat{C}A+60^\circ$ *e* $A\hat{C}A'=B\hat{C}A+B\hat{C}A'=B\hat{C}A+60^\circ$, *logo* $\overline{BB'}=\overline{AA'}$.

1526 — Figure duas rectas concorrentes r e s e um ponto P de r. Deduza e justifique a construção a usar para determinar o centro de uma circunferência tangente às duas rectas, sendo P o seu ponto de contacto com r. R: *Tiremos por* P *uma perpendicular,* p, *a* r; *é sôbre esta recta que deve existir o centro da circunferência pedida. Se as rectas* r *e* s *se encontram no ponto* I *nos limites do desenho, e se fôr* Q *o ponto de contacto da circunferência com* s, *a igualdade* $\overline{IP}=\overline{IQ}$, *que se deve verificar* (*potência do ponto* I *em relação à circunferência*), *permite determinar* Q *que pode ocupar duas posições* Q_1 *e* Q_2 *simétricas em relação a* I *sôbre* s. *As perpendiculares em* Q_1 *ou* Q_2 *a* s *encontrarão* p *nos pontos* O_1 *e* O_2, *centros das circunferências que satisfazem às condições estabelecidas. Se* r *e* s *não se encontram nos limites do desenho, podemos ainda determinar as bissectrizes dos ângulos que formam* r *e* s, *bissectrizes* b_1 *e* b_2

que encontrarão p *em* O_1 *e* Q_2. *Para determinar as bissectrizes traçam-se duas perpendiculares* p_1 *a* r *e* q_1 *a* s *em pontos arbitrários* P_2—r *e* O_2 e s *e sôbre elas e a partir de* P_1 *e* Q_1 *marcam-se distâncias arbitrárias mas iguais, determinando os pontos* P_2 *e* Q_2 *interiores no ângulo de* r *com* s; *tiram-se por êsses pontos rectas* r_1 *e* s_1 *paralelas a* r *e* s. *As distâncias* $\overline{P_1P_2}=\overline{Q_1Q_2}$ *devem satisfazer à única condição de* r_1 *e* s_1 *se encontrarem nos limites do desenho. As bissectrizes* b_1 *e* b_2 *dos ângulos* r_1 *com* s_1 *são as bissectrizes de* r *com* s. *A igualdade dos triângulos* $[IPO_1]$ *e* $[IQO_1]$ *justifica qualquer das construções. O problema não terá solução se* P *coïncidir com* I.

Soluções dos n.os 1519 a 1526 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia — 29 de Julho de 1943.

Ponto n.º 1

I

1527 — Determine o parâmetro m de modo que a equação $(m-1)x^2-2mx+m+1=0$ admita uma raiz superior e outra inferior a 2. R: *Do enunciado deduz-se que a equação dada tem raizes reais e diferentes; o trinómio* f(x), *primeiro membro da equação, tomará pois, para* $x=2$, *um valor* f(2) *de sinal contrário ao do coeficiente de* x^2, *isto é,*

$(m-1)f(2)<0$ *ou* $(m-1)[4(m-1)-4m+m+1]=$ $=(m-1)(m-3)<0$ *donde* $1<m<3$.

1528 — ¿Quantos números *impares* compreendidos entre 2000 e 7000 se podem constituir com os algarismos 2, 3, 4, 6, 8 e 9, de modo que em cada número não figurem algarismos repetidos? R: *Pretende saber-se o número total de números com* 4 *dos* 6 *algarismos dados, começando por* 2, 3, 4 *ou* 6 *e terminando por* 3 *ou* 9. *O n.º de números de* 4 *algarismos começando por* 2 *é* $A_{5,3}$, *e* 2/5 *dêstes são impares; o n.º de números de* 4 *algarismos começando por* 3 *é* $A_{5,3}$, *e* 1/5 *dêstes são impares; o n.º de números de* 4 *algarismos começando por* 4 *é* $A_{5,3}$, *e* 2/5 *dêstes são impares; o n.º de números de* 4 *algarismos começando por* 6 *é* $A_{5,3}$, *e* 2/5 *dêstes são impares. O número procurado é pois* $7/5\cdot A_{5,3}=7/5\cdot 5\cdot 4\cdot 3=84$.

1529 — Defina progressão aritmética e calcule n de modo que $2n+1$; $2n^2+5$; $10n$ estejam em progressão aritmética. R: *Tem-se* $2n^2+5-(2n+1)=$ $=10n-(2n^2+5)$, $4n^2-12n+9=0$, $(2n+3)^2=0$ $n=3/2$.

II

1530 — Da extremidade A de um diâmetro $\overline{AB}$ de uma circunferência de raio igual a $335^m,27$ traçou-se uma corda $\overline{AC}$ de comprimento igual a $600^m,25$. Calcule o ângulo α que a corda $\overline{AC}$ forma com o diâmetro $\overline{AB}$. (Utilize logaritmos). R: *O triângulo* [ABC] *é evidentemente recto* ($\hat{C}=90^o$). *Tem-se pois* $\overline{AC}=\overline{AB}\cos\alpha=2R\cos\alpha$

donde $\cos\alpha=\dfrac{\overline{AC}}{2R}=\dfrac{600{,}25}{2\times 335{,}27}\log\cos\alpha=\log 600{,}25+$ $+\text{colog}\,2+\text{colog}\,335{,}27=2{,}77834+\bar{1},69897+\bar{3},47461=$ $=\bar{1},95192$ *donde* $\alpha=26^o\,28'$.

1531 — Sendo α um ângulo do 1.º quadrante que satisfaz à relação $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}/2$, calcule $\cos(5\pi/2+\alpha)$. R: $\cos(5\pi/2+\alpha)=\cos(\pi/2+\alpha)=$

$$=-\operatorname{sen}\alpha=-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=-\sqrt{3}/3.$$

1532 — Calcule os valores de x compreendidos entre 0 e $\pi/2$ radianos que satisfazem à desigualdade $4\operatorname{sen}^2 x-2(1+\sqrt{2})\operatorname{sen}x+\sqrt{2}<0$. R: *Determinemos as raizes do trinómio do 1.º membro:* $4\operatorname{sen}^2 x-2(1+\sqrt{2})\operatorname{sen}x+\sqrt{2}=0$, $\operatorname{sen}x=$

$$=\frac{1+\sqrt{2}\pm\sqrt{(1+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}}}{4}=\frac{1+\sqrt{2}\pm(1-\sqrt{2})}{4}$$

ou $\operatorname{sen}x_1=\sqrt{2}/2$ *e* $\operatorname{sen}x_2=1/2$. *A desigualdade é, portanto, satisfeita para* $1/2<\operatorname{sen}x<\sqrt{2}/2$ *ou, limitando-nos aos valores de* x *entre* 0 *e* $\pi/2$, $\pi/6<x<\pi/4$.

III

1533 — Os catetos de um triângulo rectângulo medem respectivamente 3 centímetros e 4 centímetros. Calcule o volume do sólido obtido por uma rotação completa do triângulo em tôrno da hipotenusa. R: *O sólido obtido é formado por dois cones de revolução com a mesma base, cujo raio* R *é a altura relativa à hipotenusa, e cujas alturas* h_1 *e* h_2 *são os segmentos que a altura determina sôbre a hipotenusa. Tem-se* $V=1/3\cdot\pi R^2 h_1+1/3\cdot\pi R^2 h_2=$ $=1/3\cdot\pi R^2(h_1+h_2)$. *Mas* $h_1+h_2=\sqrt{3^2+4^2}=5$ *e* R *determina-se fàcilmente atendendo a que* $5R=3\times 4$,

ou $R=12/5$. *Vem finalmente* $V=\dfrac{144\pi}{15}\,\text{cm}^3$.

1534 — Demonstre que a soma dos segmentos de recta que unem os vértices do triângulo $[ABC]$ com o ponto M, *qualquer*, do interior do triângulo, é menor que o perímetro e maior que o semi-perímetro do referido triângulo. R: *Designemos por* a, b, *e* c *as medidas dos lados opostos a* A, B *e* C, *e façamos* $\overline{AM}=x$, $\overline{BM}=y$ *e* $\overline{CM}=z$. *De propriedades conhecidas deduz-se:* $a<z+y$, $b<x+z$, $c<y+x$ *donde* $a+b+c=2p<2(x+y+z)$ *ou* $p<x+y+z$ *e ainda* $a+b>x+y$, $b+c>y+z$, $c+a>z+x$ *donde* $4p>2(x+y+z)$ *ou* $2p>x+y+z$, c. q. d.

Nota — Em cada um dos grupos I e II são de resposta obrigatória o 1.º problema e uma das duas questões seguintes. É também de resposta obrigatória uma das questões do grupo III.

Soluções dos n.os 1527 a 1554 de Manuel Zaluar.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência e finais

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — Um ponto do exame final de 1941-42.

1535 — Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo

$$3xy^2-l\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{\mathrm{sen}\,xy}}{\mathrm{arc\,sec}\,x^x}=0.$$

1536 — Dada a circunferência de equação $x^2+y^2=10$, determine uma tangente tal que a área do triângulo formado pela tangente e a parte positiva dos eixos seja igual a 32.

1537 — Dada a fórmula $\cos B=-\cos A\cdot\cos C+\mathrm{sen}\,A\cdot\mathrm{sen}\,C\cdot\cos b$ deduza dela por meio das relações entre os elementos dum triângulo e do seu polar, uma fórmula relacionando 3 lados e um ângulo e torne logarítmica a expressão obtida para o cálculo do elemento a.

1538 — Reduza aos seus eixos e classifique a quádrica $z^2-2y^2-4xy+8x+12y-16=0$.

I. S. C. E. F. — Exame final — 15 de Julho de 1942.

1539 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=e^{\mathrm{tg}\,x}$. Utilizar-se-á o desenvolvimento em série da função exponencial para o cálculo das ordenadas dos pontos de inflexão com um êrro inferior a 10^{-3}.

1540 — Dada a variável complexa $z=x+iy$ determinar o lugar dos pontos (x, y) do plano para os quais é $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$.

1541 — Dada a função assim definida

$$\begin{cases} y(x)=\dfrac{x-a}{1+e^{(x-a)^{-2}}} & \text{para } x\neq a \\ y(a)=0 \end{cases}$$

estudar a existência da sua derivada no ponto a.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Exame final, 10 de Outubro de 1942.

1542 — Dada a equação $x^5-2ax^4+(a^2+b^2)x^3+0+5x^2-10ax+5(a^2+b^2)=$ determinar a e b de modo que ela tenha as raizes $+i$ e $-i$. Nessa hipótese resolvê-la. R: *Substituindo* x *na equação dada por* $+i$ *e* $-i$ *vem*

$$\begin{cases} 5(a^2+b^2)-2a-5+i[\;\;1-10a-(a^2+b^2)]=0 \\ 5(a^2+b^2)-2a-5+i[-1+10a+(a^2+b^2)]=0 \end{cases} \textit{donde}$$

$$\begin{cases} 5(a^2+b^2)-2a-5=0 \\ (a^2+b^2)+10a-1=0 \end{cases},\quad \begin{cases} a=0 \\ (a^2+b^2)+10a-1=0 \end{cases} \textit{e}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b^2=1 \end{cases}.$$ *Finalmente, tem-se* $x^5+x^3+5x^2+5=0$, $(x^2+1)(x^3+5)=0$ *e* $(x^2+1)(x+\sqrt[3]{5})[(x-\sqrt[3]{5}/2)^2+3\sqrt[3]{25}/4]=0$.

1543 — Dados os três planos $\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ x-y+z+1=0 \\ x+3y-3z=0 \end{cases}$ verificar que formam uma superfície prismática, determinar a direcção das arestas e a área da secção nela determinada por um plano perpendicular às arestas. R: *O sistema constituido pelas três equações é incompatível, visto que a característica da matriz dos coeficientes das incógnitas é* 2 *e a da matriz dos coeficientes e dos termos conhecidos é* 3. *Qualquer dos sistemas formado por duas ou três equações dadas é compatível e indeterminado de grau* 1. *Logo os três planos intersectam-se dois a dois, mas não os três, e formam uma superfície prismática. A direcção das arestas é a do vector* $(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\wedge(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=-2(\mathbf{j}+\mathbf{k})$. *Um plano perpendicular às arestas é, por exemplo, o plano de equação* $y+z=0$. *Os pontos de encontro dêste plano com as três arestas são*

$A(-2, -1/2, 1/2)$, $B(-9/2, 3/4, -3/4)$, $C(-3/4, 1/8, -1/8)$.

A área do triângulo [ABC] *é*

$$S=1/2 \bmod [(B-A)\wedge(C-A)]=25/16\,.$$

1544 — É dada a equação

$$y(x)=\frac{2^x}{x^{10^3}} \qquad (0<x<\infty)\,.$$

Diga se, para valores muito grandes de x, o valor numérico de $y(x)$ é grande ou pequeno. Porquê?

R: *Procuremos* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^{10^3}}=\frac{(\log 2)^{10^3}}{(10^3)!}\lim\limits_{x\to\infty}2^x=\infty$ *depois de* 10^3 *aplicações da regra de l'Hopital. Logo* $y(x)$ *é muito grande para valores muito grandes de* x.

Soluções dos n.^os 1542 a 1544 de A. Sá da Costa

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — exame final — 20 de Outubro de 1942.

1545 — Calcular o valor de

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

R: *Trata-se dum determinante de ordem* $n+1$. *Multipliquemos a 1.ª coluna por* x^n, *a 2.ª coluna por* x^{n-1}, $\cdots$ *a coluna de ordem* n *por* x *e somemos ordenadamente todos êstes produtos à coluna de ordem* $n+1$. *Desenvolvendo o determinante obtido segundo os elementos da sua última coluna, virá:* $\Delta=(-1)^n\cdot(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\times$

$$\times\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

Como fàcilmente se reconhece, êste determinante é $(-1)^n$, *e portanto* $\Delta=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

1546 — Estudar e representar gràficamente a função $y=\frac{x}{(x-1)^2}\cdot$ Determinar, em particular, as tangentes no ponto de abscissa 3 e num ponto de inflexão. R: *A função dada é contínua nos intervalos abertos* $(-\infty,+1)$ *e* $(+1,+\infty)$. *O ponto* $x=1$ *é um ponto de descontinuidade infinita de 1.ª espécie porque* $\lim\limits_{x\to 1-0} y=+\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to 1+0} y=+\infty$. *As assíntotas à curva são, como fàcilmente se vê,* $x=1$ *e* $y=0$. *A origem é um ponto da curva. Por ser:* $y'=-(1+x)/(x-1)^3$, $y''=2(x+2)/(x-1)^4$ *e* $y'''=-6(x+3)/(x-1)^5$ *conclui-se, fàcilmente, que a função é crescente no intervalo aberto* $(-1,+1)$ *e decrescente nos intervalos abertos* $(-\infty,-1)$ *e* $(+1,+\infty)$; *o ponto* $(-1,-1/4)$ *é de mínimo. O ponto* $(-2,-2/9)$ *é de inflexão e a concavidade da curva está voltada no sentido das ordenadas negativas no intervalo aberto* $(-\infty,-2)$ *e no sentido das ordenadas positivas no intervalo aberto* $(-2,+\infty)$. *A equação da tangente à curva:*

a) - *no ponto* $(3,3/4)$ *é* $y-3/4=-1/2\cdot(x-3)$.

b) — *e no ponto de inflexão* $(-2,-2/9)$ *é* $y+2/9=-1/27\cdot(x+2)$ *por ser respectivamente* $y'(3)=-1/2$ *e* $y'(-2)=-1/27$. *A imagem geométrica de* y *seria agora de construção imediata.*

1547 — Estudar a cónica

$4xy-3y^2+4x-14y-7=0$ (eixos rectangulares)

Determinar, em especial, a sua equação referida aos eixos de simetria. R: *Trata-se duma cónica género hipérbole, não degenerescente porque se tem* $B^2-AC=4>0$ *e* $I_3=12\neq 0$ (I_3 *invariante cúbico*). *O seu centro é o ponto* $(2,-1)$ *e as direcções assintóticas são* $m=0$ *e* $m=4/3$; *portanto, as suas assíntotas são as rectas de equações:* $y=-1$ *e* $y+1=4/3\ x-2)$. *É fácil ver que a cónica dada tem por direcções principais* 2 *e* -2 *e que os seus eixos têm, pois, por equações:* $y+1=2(x-2)$ *e* $y+1=-2(x-2)$. *Os seus vértices são os pontos de coordenadas* $(0,-7+\sqrt{42})$, $(0,-7-\sqrt{42})$ *e* $(7/4,0)$ *A sua equação, referida aos eixos de simetria, que é da forma* $\alpha x^2-\beta y^2+\gamma=0$, *obtêm-se, fàcilmente, pois terá que ser:* $\left\{\begin{array}{l} I_1=-\ 3=\alpha+\beta \\ I_2=-\ 4=\alpha\beta \\ I_3=\ 12=\alpha\beta\gamma \end{array}\right.$, *donde,*

$\left\{\begin{array}{l}\alpha=\ 1\\ \beta=-4\\ \gamma=-3\end{array}\right.$ *ou* $\left\{\begin{array}{l}\alpha=-4\\ \beta=\ 1\\ \gamma=-3\end{array}\right.$ *(o que equivale a trocar os eixos entre si) e portanto:* $x^2-4y^2-3=0$ *ou* $4x^2-y^2+3=0$.

Soluções dos n. 1545 a 1547 de O. Morbey Rodrigues.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — CÁLCULO INFINITESIMAL — Exame Final, Junho de 1943.

1548 — Sendo $2xy^2=2x^2+y^2$ a equação de uma linha plana, determinar a abscissa dum ponto A de ordenada mínima, e a abscissa dum ponto B de inflexão. Calcular a área limitada pela curva, o eixo dos xx e as paralelas ao eixo dos yy tiradas pelos pontos A e B. R: *Resolvendo em ordem a* y, *vem* $y=\pm\sqrt{\frac{2x^2}{2x-1}}\cdot$ *A condição* $y'=0$ *dá-nos* $x=1$, *que será a abscissa da ponto* A *(pertencente* *ao ramo positivo) de ordenada mínima* $(y_1''>0)$. *A condição* $y''=0$ *dá-nos* $x=2$, *que será a abscissa dum ponto* B *de inflexão* $(y_2'''\neq 0)$. *Tem-se, então,*

$$S=\int_1^2 \sqrt{\frac{2x^2}{2x-1}}\,dx=\sqrt{2}\int_1^2 x\,(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx;$$ *ou, pondo*

$$2x-1=t^2,\ S=\sqrt{2}/2\cdot\int_1^{\sqrt{3}}(t^2+1)\,dt=\sqrt{6}-2\sqrt{2}/3,$$

que é a área pedida.

1549 — Integrar a equação $y''+y=2\sec^3 x$, determinar a linha integral que passa pelo ponto $(0,1)$ onde $y'=0$, e calcular o raio de curvatura nêsse ponto. R: *Trata-se de uma equação linear de 2.ª ordem, de coeficientes constantes. Usando o símbolo* D, *a equação sem 2.º membro escreve-se:* $(D^2+1)y=0$, *e o seu integral geral será* $y=A\cos x+B\,\text{sen}\,x$; *o método da variação das constantes dá-nos* $A=-\sec^2 x+C_1$, $B=2\,\text{tg}\,x+C_2$; *o integral geral da equação dada é, pois,* $y=(C_1-2)\cos x+C_2\,\text{sen}\,x+\sec x$. *As condições iniciais dão-nos* $C_1=2$, $C_2=0$; *a equação da linha integral pedida é, então,* $y=\sec x$, *e tem-se* $R_{(0,1)}=1$.

1550 — Mostrar que a superfície $3z=3xy+2(x^2-y)^{3/2}-2x^3$ é planificável. Escrever a equação do plano tangente com um único parâmetro, e determinar a aresta de reversão. R: *Tem-se* $s^2-rt=0$. *Então,* $p=\varphi(q)$, *e a equação do plano tangente no ponto* (x,y,z) *escreve-se* $Z=\varphi(q)X+qY+\Psi(q)$, *sendo* $\Psi(q)=z-\varphi(q)x-qy$. *Para* $y=0$, *tem-se* $p=q=0$, *logo* $\varphi(0)=0$; *para* $x^2=y$, *tem-se* $p=-x^2$, $q=x$, *logo* $\varphi(x)=-x^2$; *isto leva-nos a verificar que* $\varphi(q)=-q^2$. *Tem-se então,* $\Psi(q)=z+q^2x-qy$. *Para* $x=y=0$, *tem-se* $z=q=0$; *para* $x^2=y$, *tem-se* $z=x^3/3$, $q=x$; *logo* $\Psi(0)=0$, $\Psi(x)=x^3/3$, *o que nos leva a verificar que* $\Psi(q)=q^3/3$. *A equação do plano tangente é, então,* $Z=-q^2X+qY+q^3/3$. *E a aresta de reversão tem para equações* $Z=X^3/3$ *e* $Y=X^2$.

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — exame final, Junho de 1943.

1551 — Sendo $\rho=\cos^2\theta/2$ a equação de uma linha plana, determinar o perímetro da curva e os pontos de ordenadas máximas ou mínimas. R: *Tem-se* $ds=\cos\theta/2\cdot d\theta$; *portanto, o perímetro é* $s=2\int_0^{\pi}\cos\theta/2\cdot d\theta=4$. *Como* $y=\rho\,\text{sen}\,\theta$, *a condição de máximo ou mínimo dá* $\theta_1=\pi/3$, $\theta_2=\pi$, $\theta_3=5\pi/3$; *no ponto* θ_1, y *tem um máximo, no ponto* θ_2 *não tem máximo nem mínimo, no ponto* θ_3 *tem um mínimo.*

1552 — Integrar a equação $(1-x)y''+xy'-y=0$, sabendo-se que admite a solução $y=x$. Determinar a linha integral que passa pelo ponto $(0,1)$ onde a tangente é paralela ao eixo dos xx, e calcular as coordenadas do centro de curvatura nêsse ponto. R: *Trata-se de uma equação linear de 2.ª ordem. Poremos* $y=Cx$ *e, variando a constante, obtem-se* $(1-x)xC''+[2(1-x)+x^2]C'=0$, *que é uma equação incompleta. Pondo* $C'=z$ *e separando variáveis, obtem-se* $\frac{dz}{z}+\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{1-x}\right)dx=0$, *cujo integral geral é* $z=C_1e^x(1-x)/x^2$. *Finalmente, obtem-se* $y=C_2x-C_1e^x$, *que é o integral geral procurado. As condições iniciais, dão-nos* $C_1=C_2=-1$. *A linha integral pedida é, pois,* $y=e^x-x$; *e o seu centro de curvatura no ponto* $(0,1)$ *é o ponto* $(0,2)$.

1553 — Sejam $x=u+v$, $y=u+2v$, $z=e^u\varphi(v)$ as equações duma superfície (S). Determinar $\varphi(v)$ de modo que (S) seja planificável e determinar as constantes de modo que (S) passe pelo ponto $(0,0,1)$ e seja tangente nesse ponto ao plano $x-2y+z=1$. R: *Obtêm-se* $\varphi(v)=e^{c_1v+c_2}$ *e, em seguida,* $\varphi(v)=e^{3v}$.

Soluções dos n.ºs 1548 a 1553 de A. Pereira Gomes.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1554 — Resolver a equação biquadrada:
$$\left[x^2+\sqrt{x}+2x\,(1+\sqrt{x})\right]\cdot\left[x^2+\sqrt{x}\,(2x-1)\right]=159600.$$

Problema proposto por J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

1555 — Circunscrever um tetraedro a um tetraedro dado, cujas fases passam por 4 rectas dadas.

Problema proposto por José Morgado (do Pôrto).

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

881 — Calcular o integral

$$I_n(x)=\int_0^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}};\quad B^2-AC\neq 0\ (n \text{ inteiro}$$

positivo). R: *O integral é definido, pois sendo* $B^2-AC\neq 0$ *o radicando do denominador da função integranda só tem raízes simples. Vamos deduzir uma fórmula de recorrência para o seu cálculo. Suporemos* $n>1$.

$$I_n(x)=\int_0^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=$$

$$=\frac{1}{A}\int_0^x \frac{(Ax+B)\,x^{n-1}-Bx^{n-1}}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{A}\int_0^x x^{n-1}\,d\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\,dx-$$

$$-\frac{B}{A}\int_0^x \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\frac{1}{A}x^{n-1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}-$$

$$-\frac{n-1}{A}\int_0^x x^{n-2}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\,dx-\frac{B}{A}I_{n-1};$$

por outro lado

$$\int_0^x x^{n-2}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\,dx=$$

$$=\int_0^x \frac{x^{n-2}(Ax^2+2Bx+C)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=AI_n+2BI_{n-1}+CI_{n-2};$$

donde

$$I_n=\frac{x^{n-1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{A}-\frac{2n-1}{n}\frac{B}{A}I_{n-1}-\frac{n-1}{n}C\cdot I_{n-2}\qquad (n>1).$$

Com esta fórmula de recorrência reduz-se o cálculo de I_n *aos de* I_1 *e* I_0, *que se efectuam pelas regras habituais.*

884 — Estudar a convergência da série cujo termo geral é $u_n=\left[\operatorname{sen}\left(a+\frac{\alpha}{n}\right)\right]^n$ $0<a<\frac{\pi}{2}$.

R: *Aplicando o critério de Cauchy, temos*

$\sqrt[n]{u_n}=\operatorname{sen}\left(a+\frac{\alpha}{n}\right)$ *cujo limite para* n *infinito é* $\operatorname{sen} a<1$. *A série é pois convergente.*

885 — Integra-se a função $e^z z^{n-1}$ $(n>0)$ ao longo dum contôrno formado por um raio OA segundo ox, um arco de circunferência AB de centro O e raio OA, e um raio BO, sendo B tal que $\alpha=A\hat{O}B$ esteja entre 0 e $\pi/2$.

Fazendo crescer OA indefinidamente deduzir do resultado os integrais definidos:

$$\int_0^\infty u^{n-1}e^{-au}\cos bu\,du\qquad \int_0^\infty u^{n-1}e^{-au}\operatorname{sen} bu\,du.$$

R: *Damos apenas os resultados, visto o enunciado indicar o caminho a seguir e os cálculos serem bastante longos:*

$$\int_0^\infty u^{n-1}e^{-au}\cos bu\,du=(a^2+b^2)^{-n/2}\cos\left[n\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right]\Gamma(n)$$

$$\int_0^\infty u^{n-1}e^{-au}\cos bu\,du=(a^2+b^2)^{-n/2}\operatorname{sen}\left[n\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right]\Gamma(n)$$

em que $\Gamma(n)$ *é a função de Euler* $\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$.

886 — Dada a curva plana de equação $y^q-Ax^p=0$ (A constante, p e q inteiros), pretende-se saber em que casos o arco pode ser expresso na abscissa por meio das transcendentes elementares.

R: *Dada a curva* $y=y(x)$ *o elemento de arco é dado por* $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$. *No caso presente temos* $ds=[1+A^{1/q}p^2q^{-2}x^{2p/q-2}]^{1/2}dx$. *Reduzindo esta diferencial binómia à forma canónica pela mudança de variável* $A^{1/q}p^2q^2x^{2p/q-2}=t$ *obtêm-se*

$$ds=B(1+t)^{1/2}t^{\frac{3p-2q}{2(p-q)}}dt\qquad (B \text{ constante}).$$

Sabemos que o integral de $(1+t)^m t^n\,dt$ *pode exprimir-se pelas transcendentes elementares se forem inteiros* m, n, *ou* $m+n$. *No nosso caso vê-se fàcilmente que essas condições correspondem a ser inteiro par um dos números* $\frac{q}{p-q}$ *ou* $\frac{p}{p-q}$.

1007 — Prove que para n inteiro as funções de Bessel $J_n(z)$ verificam $J_n(y+z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(y)J_{n-m}(z)$.

R: *Podemos definir* $J_m(z)$ *por* $e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(z)\cdot t^m\quad (t\neq 0)$. *Aplicando êste desenvolvimento a ambos os membros da identidade*

$$e^{\frac{1}{2}(z+y)\left(t-\frac{1}{t}\right)}=e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}\cdot e^{\frac{1}{2}y\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

vem

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(z+y)t^m=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}J_k(z)\cdot t^k\cdot\sum_{l=-\infty}^{+\infty}J_l(y)\cdot t^l$$

e igualando os coeficientes de t^m *temos* $J_m(z+y)=$

$$=\sum_{k+l=m} J_k(z)\cdot J_l(y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\cdot J_{m-n}(y) \quad \text{q. e. d.}$$

1008 — Ache o recíproco de $1+\rho^2$ no corpo definido por $f(\rho)=\rho^3-3\rho+1=0$. R: *Seja* $f(x)=x^3-3x+1$ $g(x)=x^2+1$. *Vamos calcular dois polinómios* a *e* b *tais que* $af+bg=1$. *O recíproco pedido será evidentemente* $b(\rho)$. *O algoritmo de Euclides aplicado a* f *e* g *dá*

$$f=x\cdot g+(1-4x)$$

$$g=-\frac{1}{16}(4x+1)(1-4x)+\frac{17}{16}$$

donde

$$1=\frac{16}{17}g+\frac{1}{17}(4x+1)(1-4x)$$

$$=\frac{16}{17}g+\frac{1}{17}(4x+1)(f-xg)$$

$$=g\left[-\frac{4}{17}x^2-\frac{1}{17}x+\frac{16}{17}\right]+f\left[\frac{4}{17}x+\frac{1}{17}\right].$$

O recíproco pedido é pois

$$b(\rho)=-\frac{4}{17}\rho^2-\frac{1}{17}\rho+\frac{16}{17}.$$

1010 — São dados um plano ω e um ponto O dêsse plano. Pede-se a equação geral das superfícies Σ tais que, sendo M um ponto de Σ, MN a normal em M ($N \in \omega$), MP a perpendicular a ω ($P \in \omega$), seja igual a uma constante dada a^2 a área do triângulo ONP. Com os mesmos dados fazer $N\hat{O}P=$const. R: *Tomando* ω *para plano* Oxy *e o ponto* O *para origem, a área do triângulo* ONP *é dada por* $S=1/2\cdot z(py-qx)$. *A equação do problema é pois* $2a^2=z(py-qx)$. *O sistema das características desta equação às derivadas parciais admite os integrais primários*

$$x^2+y^2=R^2 \quad e \quad z^2+4a^2\theta=C \quad (\textit{em que } y=x\,\mathrm{tg}\,\theta).$$

Donde vem a solução do problema, dada por $z^2+4a^2\,\mathrm{arc\,tg}\,y/x-\varphi(x^2+y^2)=0$ *em que* φ *é uma função arbitrária.*

1011 — Demonstrar que, dados os pontos M_1 e M_2 representativos dos complexos z_1 e z_2, se M_1 descreve uma recta paralela ao eixo Ox, o ponto M representativo do produto $z_1 z_2$ descreve uma recta paralela a OM_2. R: *Sejam* z'_1 *e* z''_1 *dois valores de* z_1. *Será* $\arg(z'_1 z_2 - z''_1 z_2) = \arg[(z'_1-z''_1)z_2] = \arg(z'_1-z''_1)+\arg z_2 = \arg z_2$ *por ser* $\arg(z'_1-z''_1)=0$. *A igualdade* $\arg(z'_1z_2-z''_1z_2)=\arg z_2$ *prova a proposição enunciada.*

Soluções dos problemas anteriores de Mário de Alenquer.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

25 — ALBERT A. ADRIAN — **Introduction to Algebraic Theories** — The University of Chicago Press, 1943.

Os que estudaram álgebra abstrata sabem bem que os seus métodos são simultâneamente mais simples e fáceis de assimilar e mais penetrantes do que os processos clássicos; mas os que tomaram contacto com a álgebra abstracta não ignoram que se apresenta um grande obstáculo ao estudante que deseja travar conhecimento com esta nova orientação da álgebra. O principiante tem de aprender primeiro a lidar com conceitos e a utilizá-los tão fàcilmente como se se tratasse de números, se bem que, depois de tal ter conseguido, note que tudo se desenvolve com mais facilidade.

Tem por objectivo esta «Introdução às teorias algébricas» auxiliar o estudante na sua tentativa de vencer as dificuldades apontadas e de adquirir os hábitos de raciocínio abstracto, que são o fundamento, não só da álgebra abstracta, mas de quási tôdas as teorias matemáticas de hoje. Visto que êste livro tem o intuito de ser uma obra de iniciação, não requere nenhum conhecimento prévio — além de técnicas algébricas já conhecidas dos matemáticos do Renascimento — ainda que uma boa vontade de trabalhar e pensar sejam indispensáveis.

Os assuntos tratados neste texto são os que naturalmente eram de esperar: matrizes, equivalência e semelhança, e certos outros assuntos ligados. Tal impõe o estudo de alguns elementos da teoría dos polinómios — por razões de ordem técnica — e dos espaços lineares, estudo êste indispensável para a compreensão do significado real dos conceitos relativos às matrizes. Indicações da técnica de generalização — tão importantes no momento actual — e da sua utilização são dadas constantemente. O último capítulo constitui o ponto culminante de tôda a obra onde os conceitos fundamentais da álgebra abstracta são introduzidos como a conseqüência natural das considerações precedentes.

Um grande número de exercícios—tanto exemplos numéricos, como desenvolvimentos matemáticos — dão ao leitor uma oportunidade de avaliar os conhecimentos adquiridos. O livro está escrito com clareza de estilo, e os assuntos são apresentados com a elegância e precisão que eram de esperar do autor. Assim esta obra revelar-se-à valiosa tanto para o aluno como para o mestre.

(de Reinhold Baer em «Bulletin of the American Mathematical Society» Vol. XLVII, n.º 11 — Nov. 1941 — Trad. M. Z.)

26 — SMART, W. M. — **Foundations of Astronomy** — Longmans, Green and Co., London, New York and Toronto, 1942.

O Prof. W. M. Smart não necessita de apresentação como autor de livros de astronomia. Estes vão desde as divulgações populares como «O Sol, as Estrêlas e o Universo» até à valiosa e compreensível obra «Dinâmica estelar», concernente ao movimento das estrêlas.

A obra, agora em crítica, está entre as divulgações populares de astronomia e os livros de texto para os estudantes universitários, como o típico «Text-book» de Astronomia Esférica do mesmo autor, de que há já 2.ª edição.

Os «Fundamentos de Astronomia» são dirigidos aos estudantes que freqüentam o 1.º ano dum curso de astronomia das universidades e a todos os que se interessam por estes assuntos e que têm necessidade duma base mais sólida do que a dada pela maioria dos livros descritivos. O autor deseja que o livro possa ser útil a muitos dos jóvens das fôrças navais e aéreas que necessitam de conhecimentos de astronomia e das suas aplicações como introdução aos manuais dos serviços onde é dado relêvo especial aos assuntos técnicos.

Abrindo com os capítulos «Geometria da Esfera» e «A Esfera Celeste», o livro apresenta definições de muitos termos astronómicos, acompanhando-os de explicações completas e cuidadosas, simples de seguir, e ilustrando-os com exemplos. A salientar nestas explicações é o uso de diagramas apropriados, bem imaginados e elaborados. Simultâneamente com as definições são dadas, por uma forma muito clara, descrições e explicações de fenómenos naturais. É de notar que a parte da trigonometria esférica utilizada depende só de uma única fórmula — a fórmula do coseno — e que esta dependência é directa em cada caso.

Apesar de se tratar principalmente de astronomia de posição, o capítulo «As estrêlas» inclui uma breve introdução ao estudo dos espectros e dalguns dos mais importantes e fascinantes resultados que podem obter-se a partir do estudo da constituïção da luz das estrêlas. Também figura um capítulo sôbre a «Determinação da posição da Terra».

Caracterizadamente útil é a inclusão, no fim de quási tôdos os capítulos, de exercícios para o leitor e ainda a colecção de respostas do fim do livro. Há ainda apêndices com tabelas de constantes astronómicas e elementos dos planetas e satélites, figurando também um valioso índice.

A obra é belamente impressa e em nada dá a revelar a produção do tempo de guerra.

(de J. C. P. Miller em «Nature», Vol. CLI, n.º 3819, — 1943, Jan. 9 — Trad. M. Z.)

27 — SLATER, J. C. and FRANK, N. H. — **Introduction to theoretical physics** — International Series in Physics, 1933.

Do Prefácio :

. . . Êste curso teve origem na convicção de que a divisão do ensino da física teórica em cadeiras distintas como mecânica, teoria electromagnética, teoria do potencial, termodinâmica, tende a impedir o estudante de ver a unidade da física e de apreciar a importância da aplicação a um dado ramo dos princípios desenvolvidos para outro.

. . . tornou-se evidente que a estrutura da matéria não podia tratar-se sem uma compreensão perfeita dos princípios da mecânica ondulatória e que esta exigia uma cuidadosa preparação em física clássica.

No final de cada capítulo vem um conjunto de problemas. A capacidade de resolver problemas (note-se que o autor não se refere a simples exercícios com aplicação imediata de fórmulas decoradas), em nossa opinião, é essencial para uma compreensão adequada da física.

. . . Finalmente queremos lembrar ao leitor que êste é, exclusivamente, um livro de física teórica... (Não há dúvida ser de lamentar, do ponto de vista da unidade da física, uma separação dos aspectos experimental e teórico). Isto é particularmente certo quando nos lembramos que a maior dificuldade encontrada pelo estudante no domínio da física teórica é mais a aprendisagem do *como* aplicar a matemática a um caso físico, do *como* formular matemàticamente um problema, do que a resolução dum problema já formulado. Mas a única resposta satisfatória é um *vasto treino* no qual a física teórica caminhe passo a passo com a física experimental e com o trabalho de laboratório...

Fugas em sistemas no vácuo ou em circuitos eléctricos têm a sua contrapartida nas muitas coisas desastrosas que podem acontecer às equações. E é muitas vezes tão difícil encontrar um sistema matemático para tratar dum problema difícil, sem aproximações injustificáveis e complicações impossíveis, como construir um aparelho para medir uma grandeza difícil (de medir) ou para evidenciar um efeito novo. Estas coisas não podem ser ensinadas.. Mas metade da batalha está ganha se o estudante se acerca da física teórica, não como dum conjunto de fórmulas misteriosas, ou como duma rotina maçadora que se estuda por obrigação, mas antes como dum conjunto de métodos, de instrumentos, de aparelhos, submetidos a regras análogas às dos outros aparelhos físicos e conduzindo a resultados físicos de grande importância.

Titulos dos capítulos (é indicada entre parêntesis o respectivo número de página):

Zürich, 19-IX-43.

A. Gibert

28 — GONSETH, Ferdinand et GAGNEBIN, Samuel — **Éléments de Géométrie — I Géométrie Plane** — Librairie Payot. Lausanne. Da colecção da Société Suisse des Professeurs de Mathématiques 1942.

Trata-se de um livro destinado ao ensino da Geometria nas escolas secundárias suíças, edição em língua francesa de que só está publicada esta I parte. Em língua alemã encontram-se já publicadas as duas partes de que consta a obra. É um livro cuja leitura é de aconselhar em especial aos professores de matemática que desejam fazer o seu ensino, de modo a preparar o aluno de acôrdo com as modernas correntes de estudo da matemática. E não se julgue que os autores se perdem em altas abstracções ou teorizações se bem que a matéria seja apresentada a partir das idéias de grupo de transformações que deixam invariantes as propriedades das figuras. Veja-se, por exemplo, como é introduzida a noção de plano: «Entre as melhores realizações duma superfície plana que se sabem construir, citemos as que são utilizadas na imprensa, e em metalurgia com o nome de *mármores.* Como se fabrica um mármore? Realizam-se, para começar, três superfícies aproximàdamente planas M_1, M_2 e M_3. Aplica-se M_1 sôbre M_2, por exemplo, e desgastam-se uma contra a outra (*rodam-se* uma sôbre a outra) durante um certo tempo; depois substitui-se M_2 por M_3. Interrompe-se em seguida esta operação para desgastar M_2 contra M_3 e assim por diante. Se se prolonga suficientemente êste desgaste alternado, obtêm-se três superfícies lisas que se aplicam uma sôbre a outra de maneira extraordinàriamente perfeita, não deixando entre si qualquer espaço apreciável: eis os *mármores*. Além disso, se se rodam do mesmo modo um outro grupo de três mármores, cada um dêstes últimos gosa da mesma propriedade em relação a cada um dos primeiros. Para compreender que êste processo deve conduzir a três superfícies bem planas, basta observar que o desgaste de dois mármores sòmente, não conduziria necessàriamente a duas superfícies planas, mas antes a duas superfícies esféricas, uma convexa e outra côncava, ajustando-se uma contra a outra. Mas se se faz intervir uma terceira superfície, é excluída esta eventualidade, pois seria necessário que aquela terceira superfície fôsse ao mesmo tempo convexa para se aplicar sôbre a superfície côncava, e côncava para se aplicar sôbre a superfície convexa: ela deve ser plana bem como as outras duas». E daqui conclui os postulados do plano: «Para os planos ideais, estas propriedades dos mármores conduzem-nos às duas seguintes propriedades:

Dois planos são sobreponíveis.

Uma porção qualquer de um plano pode ser deslocada livremente neste plano».

O índice dar-nos-à uma idéia exacta da disposição e coordenação dos assuntos:

Primeiras noções fundamentais: A — Introdução; B — A superfície, a linha e o ponto; C O plano e a recta; D—A medida dos comprimentos; E — O plano, a recta e os seus deslocamentos. Angulos e rotações no plano; Simetria Axial; Os casos de igualdade dos triângulos; Paralelismo e simetria central; Os lugares geométricos, aplicações; O círculo; A medida das superfícies; Linhas proporcionais; Homotetia e

«COMO SE DEVE PROCURAR A SOLUÇÃO»?

1. Compreender a questão.
2. Achar um caminho que vá da incógnita aos dados — passando, se fôr preciso, por vários problemas intermediários. (Análise).
3. Realizar. Efectuar as construções (Síntese.
4. Verificar e criticar.

2

Formular a ou as relações entre a incógnita e os dados.
Transformar os elementos desconhecidos. Procurar-se-à introduzir novas incógnitas mais aproximadas dos dados.
Transformar os elementos dados. Procurar-se-à deduzir novos elementos mais aproximados das incógnitas.
Não resolver senão uma parte do problema.
Não satisfazer senão a uma parte das condições: que liberdade de variação se introduziu abandonando a outra parte? (Lugares geométricos).
Generalizar. Particularizar. — Proceder por analogia.

3

Examinar cada ponto e não admitir — com Descartes — senão o que «se pode ver com evidência ou deduzir com certeza».

1

De que se trata? O que se dá? O que se procura?
Os dados determinam a incógnita? Ou são insuficientes? ou superabundantes?
Pode-se pôr a questão doutro modo?
Pode-se relacionar o problema com outro que já se conheça? — cuja solução é mais simples? — ou mesmo imediata?
Estas questões devem-se repetir a cada problema intermediário. Além disso:
Tomam-se em consideração todos os factos?

«Substituir as definições no lugar dos definidos».

PASCAL

4

O resultado é plausível? Porquê?
Pode-se fazer uma verificação?
Há outro caminho conduzindo ao resultado? Há algum mais directo? Que outros resultados se poderiam obter pela mesma via?

semelhança; Os polígonos regulares; O comprimento da circunferência e a superfície do círculo.

Sôbre todos os capítulos a partir do II dão-nos exercícios graduados em número de 507. Por último apresentam um quadro devido ao professor G. Pólya [1] que pelo interêsse que pode ter para os alunos não resistimos à tentação de transcrever.

Enfim, o livro contém, pelo modo como são tratados, e não porque sejam novos, muitos assuntos de interêsse para o nosso ensino secundário. É claro e escrito numa linguagem acessível ao meio a que é destinado, apesar de um dos seus autores, Gonseth, ser um professor do ensino superior, professor da Escola Politécnica Federal de Zürich, e grande matemático suíço.

J. da Silva Paulo

[1] Note-se que um nome como o de G. Pólya não se desdoura com o escrever coisas tão comesinhas, verdades à *Mr. de la Palisse*, como acham certos matemáticos, sem se lembrarem que estes conselhos são dirigidos aos que principiam, se bem que não seja mau recordá-los mesmo àqueles que percorreram longo caminho.

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Agronomia Lusitana — Vol. 4 — n.º 2 — 1942. (Estação Agronómica Nacional).

Agros — Boletim dos Estudantes de Agronomia — Ano XXVI — n.º 2 — Março-Abril de 1943.

Euclides — (Madrid) — Revista mensal de Ciências Exactas, Físicas, Químicas y Naturales — Tomo III, n.os 30 e 31.

Considerações sôbre a perceptibilidade auditiva dos sinais horários rítmicos radiotelegráficos no processo das coincidências por extinção de sinais — José António Madeira — Coimbra, 1942.

Elementos da Teoria dos Anéis Almeida Costa — Publicação n.º ‹ do Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Pôrto, 1943.

Boletin Matematico — (Buenos Aires) — Revista argentina de Matemática Ano XVI — n.os 1 e 2.

Publicações do Sindicato Nacional dos Engenheiros Geógrafos — N.º 1 *Estudo comparativo dos processos de registo gráfico e de recepção acústica (extinção de sinais) na determinação da hora de recepção de um sinal horário rítmico*, por José António Madeira — Coimbra Editora.

2.ª série — n.º 1 — *Manual de Astronomia Geodésica*, por Manuel Pires de Matos — Lisboa, 1941.

Sur une généralisation de l'opérateur de projection $\mathcal{E}(I)$ – Ruy Luís Gomes — Publicação n.º 6 do Centro dos Estudos de Matemática da Universidade do Pôrto, 1943.

Técnica — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.º 140.

A situação financeira da «Gazeta de Matemática»

CONTA DO N.º 16 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Receita

Receita da venda avulso e por assinatura de 809 números	3.199$50
Existência de 667 números ao preço de custo	2.011$67
31-X-1943, *Déficit*	219$40
	5.430$57

Despesa

Composição, impressão, papel e brochura	4.416$60
Sua quota parte nas despezas gerais realizadas até 31 de Outubro de 1943	1.013$97
	5.430$57

O. M. R. e M. O. M.

A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

publicará o seu próximo número em Janeiro de 1944

AOS LEITORES

A orientação que a Redacção da «Gazeta de Matemática» imprimirá à Revista em 1944 será estruturalmente a mesma, mantendo as várias secções existentes, criando, se possível, outras. Continuará portanto a publicação em cada número de pontos dos exames de aptidão, de freqüência e finais das cadeiras de Matemática das escolas superiores. Além dos quatro números ordinários publicar-se-á, porém, no primeiro trimestre de 1944, um número extraordinário dedicado inteiramente às Matemáticas Elementares e exames de aptidão. No próximo número de Janeiro serão dadas indicações mais detalhadas.

AOS ASSINANTES

A Administração da «Gazeta de Matemática», apesar de todos os esforços feitos, como terá ocasião de submeter à apreciação dos seus leitores, no próximo número, vê-se obrigada a modificar como segue, as condições de assinatura e de aquisição de números avulso:

Preço de capa por cada número	6$50
Preço de assinatura anual de quatro números a publicar em Janeiro, Abril, Julho e Outubro	20$00
Preço de capa dum número extraordinário a publicar em 1944	10$00
A aquisição dêste número pelos assinantes far-se-á a Esc.	6$50

NÚMEROS ATRAZADOS

O pequeno número de colecções completas, ainda existente, destina-se exclusivamente às Bibliotecas de Escolas e dalguns Estabelecimentos Oficiais sendo a sua aquisição feita ao preço de Esc. 100$00 (colecção dos 17 primeiros números). Ao público serão vendidos avulso os números ainda não esgotados (3, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17) ao preço de Esc. 6$50 cada.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial