N. 0172

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXV | Mar. 2014 | 4,20€

A Terra é um Pião

EDUARDO MARQUES DE SÁ

Conversa com Gilbert Strang

GONÇALO MORAIS

A Medalha que Veio do Frio

FABIO CHALUB

NA LINHA DE FRENTE

32.as OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

BANCO ESPIRITO SANTO · spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Participar nestas Olimpíadas é acertar em cheio!

Inscrições até **30 de abril 2014** • **http://mopm.mat.uc.pt/MOPM**

CATEGORIA

MINI-OLIMPÍADAS (3º E 4º ANOS DO ENSINO BÁSICO)

PROVA ÚNICA Maio de 2014

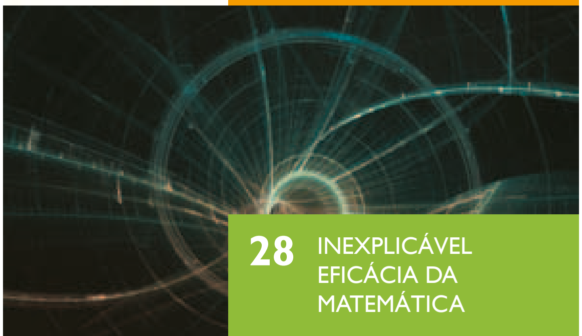
4ª Edição Nacional das Olimpíadas de Matemática do 1º Ciclo do Ensino Básico

CONTACTOS: www.spm.pt Tel.: 217 986 353 Telm.: 960 130 506 Email: opm@spm.pt

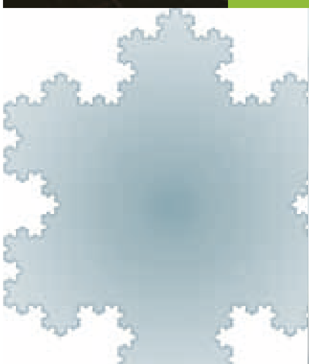
M

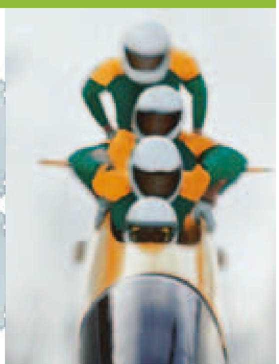
ÍNDICE

36 CAPICUAS



28 INEXPLICÁVEL EFICÁCIA DA MATEMÁTICA





10 CANTO DÉLFICO
Jogos de Cerco e Fuga

14 NA LINHA DE FRENTE
A Medalha que veio do frio

44 CONVERSA COM...
GILBERT STRANG

EDITORIAL

Adérito Araújo
Universidade
de Coimbra
alma@mat.uc.pt

SEJAMOS **DIGNOS** DOS **MATEMÁTICOS PORTUGUESES** DA **DÉCADA** DE **40**

Apropriando-se do título do artigo de F.R. Dias Agudo, publicado no n.º 138 da *Gazeta de Matemática*, em janeiro de 2000, a nova equipa editorial assume os propósitos que motivaram a fundação da revista.

Quando, em janeiro de 1940, António Monteiro, Bento Caraça, Hugo Ribeiro, José da Silva Paulo e Manuel Zaluar Nunes fundaram a *Gazeta de Matemática*, elegeram como preocupação central a preparação matemática dos estudantes das escolas superiores e dos candidatos às universidades. Era seu objetivo fundamental construir "um organismo vivo, um instrumento eficiente de trabalho e ao mesmo tempo um Amigo animado do desejo de bem servir". Mais tarde, em janeiro de 2000, quando a revista voltou a ser publicada após 34 anos de interregno, a orientação editorial reafirmou a vontade de tornar a *Gazeta* "o jornal do ensino pré-universitário do século XXI".

A nova equipa editorial assume, claramente, o objetivo que motivou os fundadores da *Gazeta* e seus sucessores. Tal como os matemáticos de então, temos plena consciência de que "uma publicação desta natureza vingará e terá condições de vida apenas na medida em que consiga interessar à massa dos estudantes a que se dirige". Sem fazer nenhuma concessão quanto à qualidade, procuraremos temas atuais que estimulem o gosto pelo estudo da disciplina e fomentem a discussão viva em torno dos textos publicados e dos desafios propostos.

Ao contrário do que acontecia na década de 40, em que os meios de divulgação da ciência eram escassos, hoje abundam em Portugal páginas de Internet, museus, associações e programas de televisão que o fazem com grande qualidade. Então, qual o papel da *Gazeta* hoje em dia? Qual o caminho a trilhar neste panorama tão complexo e rico? Será que ainda faz sentido a sua existência? Temos a certeza de que sim. Uma revista com o prestígio da *Gazeta*, além do património que representa, constitui um importante espaço de sistematização e síntese, um fórum que reúne especialistas, pedagogos, estudantes e amantes da disciplina, totalmente disponível para dar eco às propostas mais interessantes no âmbito da divulgação da cultura matemática.

Uma revista não é feita apenas pelos seus diretores. Longe disso. Se a *Gazeta* é hoje o que é, muito o deve a todos os que, de forma generosa, têm contribuído com o envio de textos, participado na redação ou colaborado na edição, seja como revisores ou como membros do Conselho Editorial. A verdade, porém, é que a *Gazeta* só continua a existir porque conta com leitores interessados e críticos. E é precisamente a esses leitores que lançamos o repto de se tornarem verdadeiros embaixadores desta revista que é de todos.

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu site *www.atractor.pt* .
Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

FENDA **HIPERBÓLICA**

Um módulo expositivo de Matemática para o exterior.

Em Março de 2000, por ocasião do Ano Internacional da Matemática, o Atractor, criado menos de um ano antes, foi convidado para conceber e realizar uma exposição temporária, prevista para quatro a seis meses, dedicada à Matemática, que viria a ser inaugurada em Novembro daquele ano no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa, sob a designação de "Matemática Viva". Tratou-se, segundo a informação na altura prestada pelo Ciência Viva, da primeira exposição concebida e construída de raiz inteiramente no nosso País, tendo as outras já lá existentes sido compradas a instituições estrangeiras de renome. Na "Matemática Viva", foi pensado para o exterior do Pavilhão um módulo expositivo, que seria visível pelas pessoas que passavam no local, mesmo aquelas que normalmente não têm o hábito de visitar um museu ou uma exposição. Queria-se um módulo que tivesse impacto junto de um público não especializado e a escolha recaiu em algo que aqui designaremos por Fenda Hiperbólica. A "Matemática Viva" viria a estar no Pavilhão do Conhecimento durante cerca de 10 anos, em vez dos seis meses inicialmente previstos[1]. Quanto à Fenda Hiperbólica, continuaria no mesmo local (figura 1) mais cerca de três anos, tendo passado no

Figura 1

[1] Essa mudança de escala na duração da exposição deveu-se ao que na altura foi classificado pelo Ciência Viva como um grande sucesso; ainda segundo a mesma fonte, a exposição teve mais de dois milhões de visitantes.

Figura 2

Figura 3

verão de 2013 para as arcadas do edifício da Universidade do Porto (figura 2), na Praça Gomes Teixeira.

O módulo, resguardado num cubo com mais de dois metros de lado e paredes laterais de vidro, é constituído por duas hastes retilíneas inclinadas, presas numa placa circular que gira continuamente em torno de um eixo vertical (ver figura 3 e animação em [1]). Sobre uma das diagonais da base quadrada existe uma grande placa retangular vertical, de aço, placa essa que tem apenas duas ranhuras curvas. Parece evidente a priori que as duas hastes retilíneas nunca poderão passar pelas fendas curvas sem roçarem nos seus bordos. O aspeto inesperado para o observador desprevenido e que cria o efeito espetacular do módulo é a descoberta de que esta "óbvia" impossibilidade não é real: o observador assiste, dir-se-ia com *suspense* e surpresa, à passagem das hastes retilíneas sem tocarem nos bordos da fenda curva.

Ao longo destes anos, presenciámos as reações de muitos observadores e pudemos verificar que a surpresa e o *suspense* também ocorreram muitas vezes em pessoas com uma preparação matemática de nível universitário, que nunca tinham pensado nesta situação concreta. Com a vinda do módulo para o Porto, algumas pessoas nessas condições testemunharam o fascínio que lhes causara o módulo que tinham visto em Lisboa, sem nunca se terem apercebido de que a autoria era do Atractor. E qual a reação dos observadores, constituindo a maioria da população, sem nenhuma preparação matemática específica? A primeira indicação positiva de que, mesmo para essas pessoas, o módulo iria cumprir a sua função – de despertar a curiosidade e a reflexão sobre as razões geométricas do seu comportamento – foi-nos dada antes mesmo da sua construção. Durante a primeira entrevista com o serralheiro que viria a construir o módulo, um excelente profissional do setor, foi manifestada uma certa incredulidade relativamente ao comportamento final que estava a ser previsto e a reação foi mais ou menos esta: "Eu faço, mas não tomo a responsabilidade de que funcione como está a ser descrito." A segunda entrevista ocorreu na manhã seguinte e a reação foi aproximadamente esta: "Estive a pensar e já acredito que possa funcionar como descreveu..." Este *volte-face* deu-se sem acesso a nenhum desenho especial, nem apoio de qualquer espécie de módulo virtual ou de uma animação do género das hoje existentes, muito

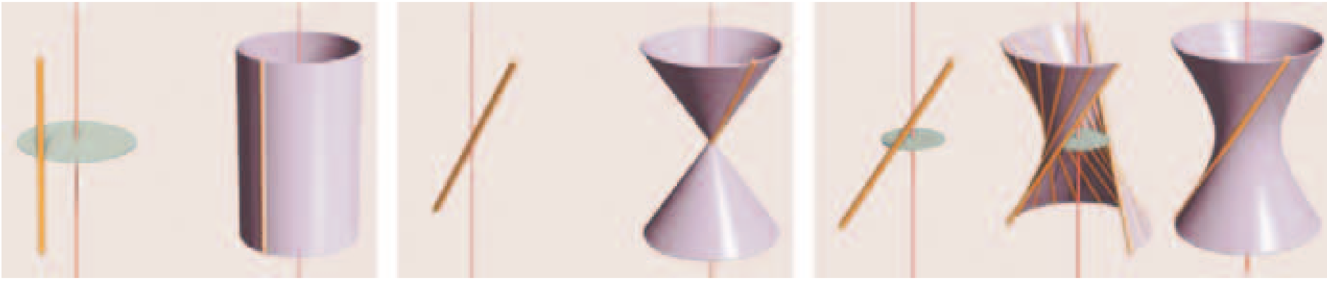


Figura 4

menos com recurso a meios matemáticos; deu-se porque a incredulidade inicial provocou curiosidade e levou a uma reflexão suficiente para descobrir a razão do comportamento esperado. Para quem se dedica à divulgação matemática, conseguir este tipo de reação é certamente aquilo a que mais pode aspirar ao conceber um módulo[2].

Qual a matemática envolvida? Imaginemos uma reta vertical (fixa) e outra reta rodando em torno da primeira. Há três possibilidades distintas: as duas retas são paralelas, concorrentes ou nem uma coisa nem outra (ver figura 4). No primeiro caso, reunindo os pontos de passagem da reta móvel, obtemos um cilindro – o cilindro de revolução gerado pela reta móvel girando em torno da reta fixa. No segundo caso, temos um (duplo) cone de revolução, com vértice no ponto de encontro das duas retas. O terceiro caso é o que nos interessa: a superfície gerada é um hiperbolóide de revolução. Podemos garantir que nenhuma das posições da reta móvel leva a pontos fora do referido hiperbolóide. Então, se, no caso do nosso módulo, intersetarmos essa superfície com o plano diagonal acima referido, nenhuma posição da reta móvel terá pontos fora da curva obtida pela interseção do plano com o hiperbolóide. Assim, abrindo uma ranhura na placa vertical à volta dessa curva (ver figura 5), em nenhuma posição a reta móvel toca no resto da placa. Por outras palavras, a haste móvel passa pela ranhura. E que curva é esta? Trata-se de uma hipérbole.

Esta apresentação com recurso ao hiperbolóide gerado pelas hastes em movimento é a forma mais natural e elegante de apresentar o funcionamento e o tipo de curva obtido para ranhura. Se quisermos prescindir do uso explícito do hiperbolóide descrito, podemos provar diretamente que a curva interseção da haste móvel com a placa vertical é uma hipérbole. Para tal, podemos partir da caracterização da hipérbole como lugar geométrico dos pontos de um plano tais que a diferença das distâncias a dois pontos fixados nesse plano tem módulo constante.

Figura 5

[2] Durante o período de construção, o módulo funcionou como uma espécie de *ex-libris* da oficina e era mostrado e explicado aos clientes de passagem.

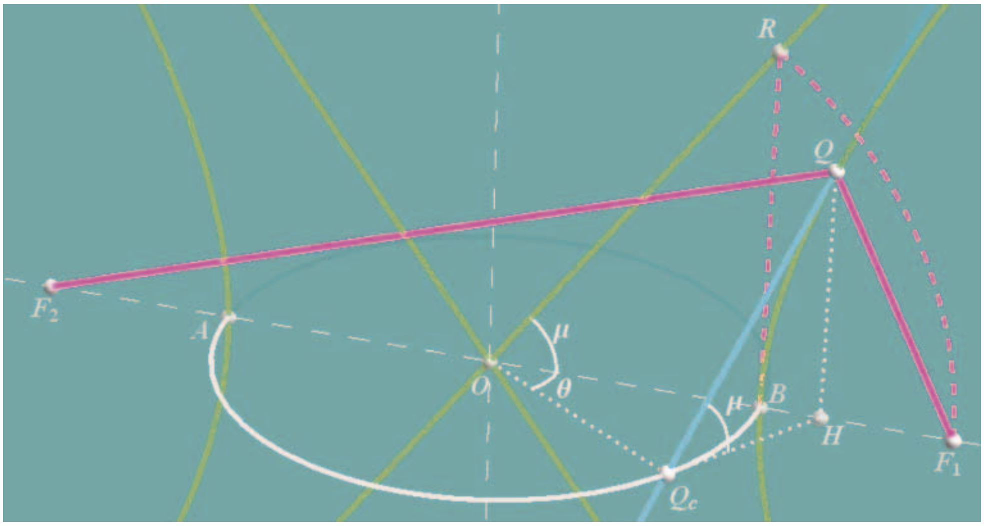


Figura 6

No caso que nos interessa, comecemos por verificar essa constância usando trigonometria. O ponto Q_c da haste à distância mínima do eixo descreve uma circunferência que interseta o plano da placa vertical em dois pontos, A e B (ver figura 6); designando por μ o ângulo (constante) da haste com o plano horizontal, consideremos as retas na placa vertical passando pelo ponto médio O de AB que fazem um ângulo μ com o plano horizontal e designemos por R um dos pontos de interseção de uma dessas retas com a vertical passando por B. A circunferência do plano vertical de centro O e passando por R interseta o plano horizontal da circunferência mínima em dois pontos F_1 e F_2, simétricos relativamente a O.

Designando por Q o ponto de interseção da haste com a placa vertical, queremos provar que $||QF_2 - QF_1||$ se mantém constante durante o movimento da haste, isto é, não depende do ponto Q_c, ou, o que é o mesmo, do ângulo $\theta (= BOQ_c)$. Se r designa o raio da circunferência horizontal mínima e H a projeção horizontal de Q, da análise da figura resultam facilmente as igualdades:

$$|Q_cH| = r \operatorname{tg} \theta,$$

$$|HQ| = r \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \mu,$$

$$|OH| = r \sec \theta,$$

$$|OF1| = |OR|\, r \sec \mu,$$

$$|HF_1| = |r(\sec \mu - \sec \theta)|.$$

$$|HF_2| = |r(\sec \mu + \sec \theta)| \text{ e}$$

$$||QF_2| - |QF_1|| = |r\sqrt{(\operatorname{tg}^2\theta \operatorname{tg}^2\mu + (\sec\theta + \sec\mu)^2)} - $$
$$-r\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta \operatorname{tg}^2\mu + (\sec\theta - \sec\mu)^2}\,|$$

Pode-se verificar que o segundo membro pode ser escrito na forma seguinte:

$$||QF_2| - |QF_1|| = r\,|\sqrt{\frac{(1+\cos\theta\cos\mu)^2}{(\cos\theta\cos\mu)^2}} - \sqrt{\frac{(1-\cos\theta\cos\mu)^2}{(\cos\theta\cos\mu)^2)}}\,| = 2r,$$

valor que não depende de θ, como queríamos concluir, nem aliás de $\mu \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Se o leitor prefere uma demonstração mais geométrica de que a curva obtida para fazer as ranhuras é realmente uma hipérbole, poderá ver a que se indica em [1] ou, melhor ainda, procurar descobrir uma outra justificação que exija menos contas...

O leitor poderá ainda encontrar em [1] animações interativas, com as quais pode, por exemplo, variar continuamente a inclinação da reta vendo como a fenda vai mudando a excentricidade (poderá ter de importar da rede os *plugins* para *shockwave* e *Mathematica*). Também encontrará filmes mostrando o módulo real em funcionamento.

[1] *http://www.atractor.pt/mat/FendaHiperbolica*


DE MATEMÁTICA
Gazeta de Matemática
Setembro 2009
Gazeta de Matemática

Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

DOMINÓ **EULERIANO**

As 28 peças de Dominó constituem um sistema muito rico, que permite a prática de um sem-número de jogos interessantes. Hoje veremos como algumas propriedades matemáticas permitem até criar magia de belo efeito. A base teórica reside no famoso Teorema de Euler, naturalmente associado ao nascimento da Teoria de Grafos.

As peças de Dominó são um objeto familiar. Todos sabem, pelo menos, a regra básica: duas peças consecutivas partilham um valor. Na realidade, as peças de Dominó constituem um sistema de jogos, já que muitos jogos diferentes podem praticar-se com este material.

Seguindo a regra básica do Dominó, é possível dispor as 28 peças na mesa, formando um circuito fechado.

Este resultado pode explicar-se sob dois pontos de vista: um internalista, outro mais matemático.

No que segue vamos sistematicamente ignorar os *dobles* (peças com igual número de pintas nas duas metades) por não serem essenciais aos nossos argumentos. Imaginemos que tentámos construir tal circuito. Num momento qualquer, antes de terminar, temos duas extremidades da nossa sequência de peças. Suponhamos que as extremidades apresentam valores distintos, por exemplo, que uma das extremidades apresenta um terno (i.e., três pintas). Como há seis ternos (em notação óbvia: 3-0, 3-1, 3-2, 3-4, 3-5, 3-6), e estes surgem na sequência de peças aos pares, com exceção do da extremidade, obtemos um número ímpar de ternos... Portanto, temos de certeza mais um terno para prolongar a nossa sequência! No caso de os valores nas extremidades serem iguais e termos esgotado peças

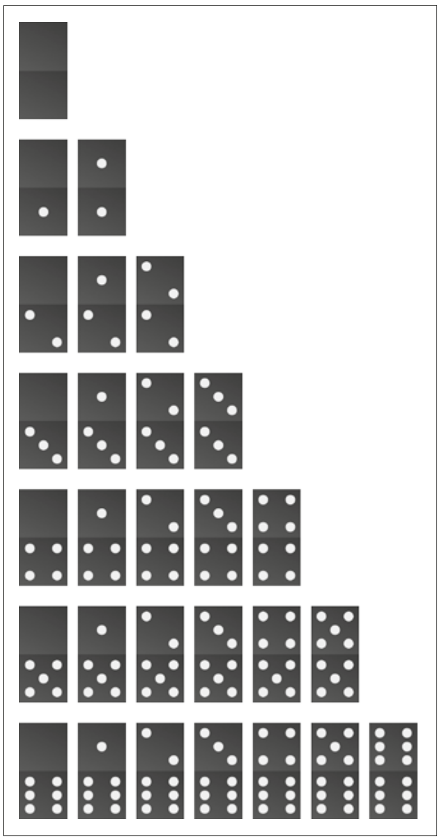


Figura 1: As 28 peças do Dominó

com esse número de pintas (em linguagem de jogador: o jogo está *fechado*), uma análise direta mostra que se podem inserir as peças restantes em local interior da sequência. O argumento matemático que segue é mais claro do que a investigação por casos concretos.

Para abordar este problema matematicamente, representemos cada peça do Dominó (ignoremos, de novo, os *dobles*) por uma aresta do seguinte grafo.

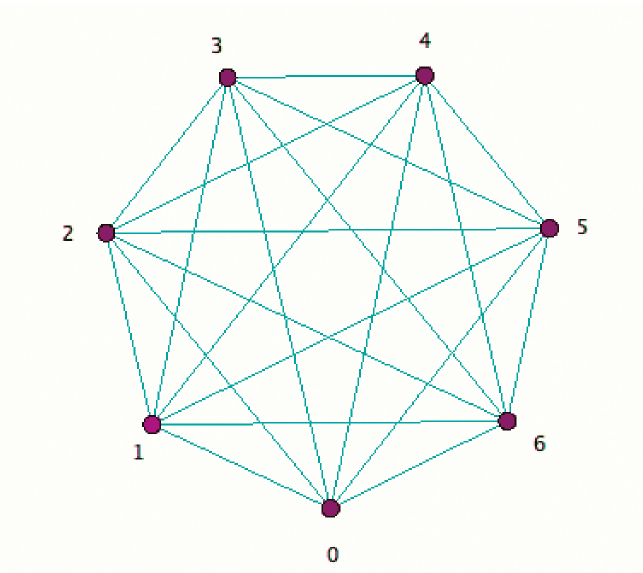


Figura 2: K_7 representa as peças de Dominó. Para considerar os *dobles* cada vértice teria um lacete.

Como todos os vértices têm grau par, existe um circuito euleriano. Para o implementar basta escolher um vértice e seguir por uma aresta ainda não utilizada, até não haver mais arestas. Sim, o teorema invocado é o que Euler criou no século XVIII relacionado com o problema das pontes de Koenigsberg!

Um dos efeitos que o Circo Matemático (*http://ludicum.org/cm*) usa nas suas atuações, recorrendo às peças de Dominó, é o seguinte: um voluntário recebe 27 peças e coloca-as em sequência, respeitando a regra básica, mas tendo de resto todas a liberdade de escolha. O Mágico adivinha as pintas das extremidades de tal sequência!

Como? Bom, o Mágico esconde uma peça, por exemplo, o duque-quadra (2-4). O grafo correspondente é agora:

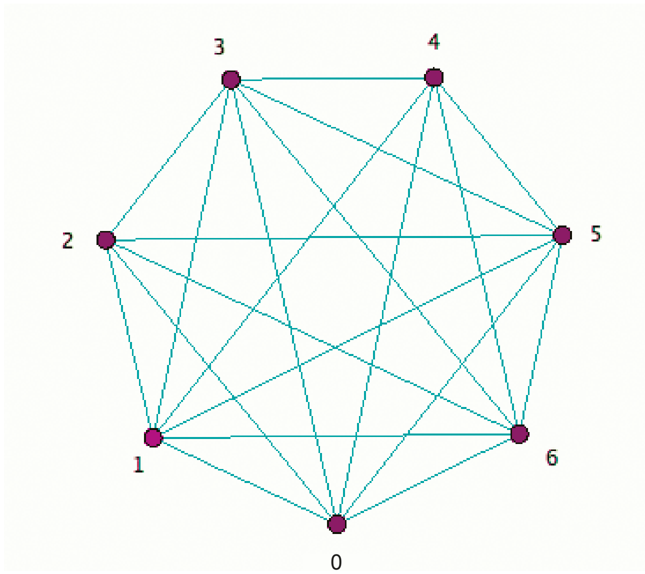
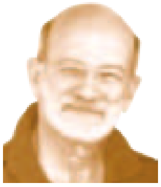


Figura 3: Grafo com caminho euleriano, já que só tem dois vértices de grau ímpar.

Este só tem dois vértices de grau ímpar: o 2 e o 4. Têm de ser estes os extremos do caminho euleriano!



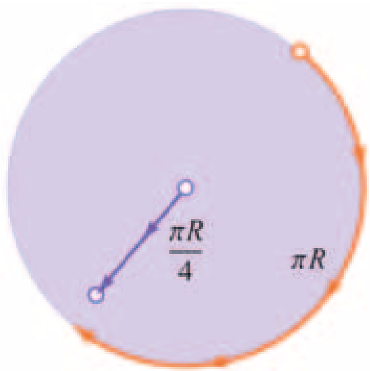
Eduardo Marques de Sá
Universidade de
Coimbra
emsa@mat.uc.pt

JOGOS DE CERCO E FUGA

Os problemas de perseguição e fuga são dos mais populares e estudados na teoria dos jogos, tendo o desenvolvimento intenso da sua análise sido, infelizmente, suscitado e pago pelos jogos de guerra. Perseguição, cerco, sítio, sequestro, às vezes sinónimos, foram e são manifestações da agressividade humana praticadas desde tempos imemoriais. Neste *Canto*, descrevemos versões aparentemente mais benignas e divertidas, com pseudónimos de animais pouco simpáticos também.

A SENHORA DO LAGO

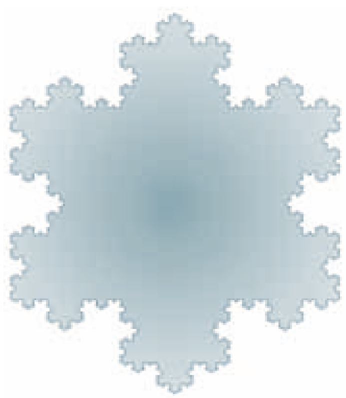
O primeiro problema deste *Canto* é bem conhecido e tem muitos anos de idade. Vi-o pela primeira vez num artigo de Rufus Isaacs [1], o pioneiro dos jogos ditos diferenciais, nos quais os contendores escolhem trajetórias num meio contínuo em vez de escolherem opções de um conjunto finito de possibilidades como nos jogos tradicionais de tabuleiro, Xadrez, Go, Nim, etc. Do problema de Isaacs retira-se a seguinte versão simplificada: no centro duma piscina circular nada uma banhista que se vê surpreendida pela presença dum cavalheiro com intenções pouco recomendáveis. Ele desloca-se na fronteira da piscina, esperando apanhá-la mal ela ponha os pés em terra. Para azar dela, ele pode mover-se na fronteira a uma velocidade máxima 4 vezes superior ao máximo da sua velocidade na água. Para sorte dela, ele não está interessado em molhar os pés e, correndo os dois em terra, ela é bem mais veloz do que ele. *Terá ela uma estratégia para escapar ao cerco?*



Supondo serem v e W as velocidades máximas da banhista na água e do predador em terra, o parâmetro $p = W/v$ é fundamental no problema e o valor $p = 4$ prescrito não é inocente. A estratégia óbvia da banhista é fugir a todo o gás do centro ao ponto da circunferência diametralmente oposto ao que o indivíduo ocupa no instante inicial da fuga; para a apanhar, ele terá de correr π vezes a distância por ela percorrida. Se for $p = 3$, ela escapa, obviamente. Com $p = 4$ essa estratégia não serve (como a figura mostra) e a ajuda do leitor torna-se indispensável. É intuitivamente óbvio, mas exige de si uma prova, pois p é "muito grande", a banhista não tem meio de escapar: rende-se ou fica eternamente de molho. Isto mostra a existência dum número real c, chamado *parâmetro crítico da piscina*, tal que: se $p < c$ ela pode escapar, se $p > c$ ele pode cercá-la para sempre. A questão agora é estimar o valor de c:

Será $c > 4$*? Será* $c < 5$*?*

Pede-se ao leitor que comprove estas estimativas mediante estratégias de uma ou de outra das partes em conflito e que descubra melhores estimativas.



É natural que, para piscinas de forma não circular, com o predador confinado à fronteira, o parâmetro crítico tenha valores diferentes. Um caso interessante é o das piscinas em forma de floco de neve, a famosa ilha de Koch, recomendada para banhistas lentos. É que, na fronteira fractal, o *cavalieri* fica sempre entalado por muito lesto que seja. *Porquê?*

UMA FÁBULA DISCRETA

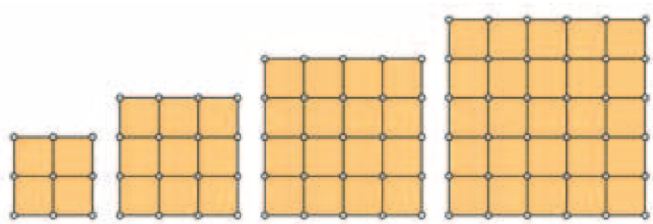
Uma das dificuldades da banhista, do cavalheiro e do leitor que queira ajudá-los é o facto de a piscina ser um meio contínuo, onde os contendores podem descrever curvas planas de grande complexidade. Podemos conceber versões em tempo discreto desse problema admitindo estratégias combinatórias de perseguição e fuga. Eis uma possibilidade: o lago é agora um tabuleiro de xadrez $n \times n$ cujas casas são quadradinhos de lados de comprimento 1. A banhista é substituída por uma pulga e o predador é substituído por um escorpião, que vão jogar uma partida a dois de cerco e fuga. É dado um real positivo p que não muda até ao fim do jogo. A pulga ocupa um dos nodos do tabuleiro, saltando de um nodo para outro em cada jogada. O escorpião arrasta-se continuamente sobre a fronteira do tabuleiro e pode ocupar qualquer ponto dessa fronteira (não apenas os $4n$ nodos periféricos). Em cada jogada da pulga, ela tem de desocupar o nodo em que se encontra e saltar para um dos nodos adjacentes a esse; cada jogada do escorpião consiste em arrastar-se sobre a linha periférica, podendo percorrer qualquer distância $\leqslant p$.

Na primeira jogada, a pulga ocupa um nodo inicial à sua escolha; depois, o escorpião ocupa um ponto da fronteira à sua escolha; a seguir, a pulga salta; depois, o escorpião arrasta-se, etc., jogando alternadamente.

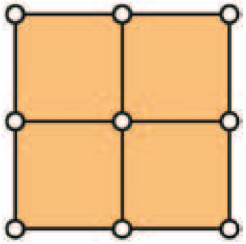
QUEM GANHA? Diz-se que a pulga *escapa* e *ganha* a partida se salta para um nodo periférico aonde o escorpião não pode chegar na jogada seguinte. Se ela se coloca num nodo periférico que o escorpião também ocupa na jogada seguinte, ele *ganha*.

Falta saber o que faz o árbitro se a pulga nunca jogar para um nodo periférico, prolongando assim o jogo indefinidamente. Um tal impasse pode dever-se à falta de interesse da pulga em escapar ou deixar-se comer; resta determinar que mérito poderá ter o escorpião numa situação dessas. Declaramos o escorpião como *vencedor*, se ele mostrar um algoritmo que impossibilita o escape da pulga. Claro que isto supõe a intervenção dum escorpião matemático que conceba algoritmos e dum árbitro matemático que os analise. Será essa a função do leitor nos exemplos seguintes.

PARÂMETRO CRÍTICO. Fixado n, admitamos que os dois contendores jogam o melhor possível. Claro que, para p suficientemente grande, o escorpião ganha e, para p suficientemente pequeno, ganha a pulga. Portanto, existe um número real c_n, chamado *parâmetro crítico* do tabuleiro $n \times n$, definido pela propriedade: para $p < c_n$ ganha a pulga, para $p > c_n$ ganha o escorpião. Para cada n temos, pois, um problema: determinar o valor de c_n. E mesmo que não consigamos determinar c_n, podemos procurar números α e β tais que $\alpha \leqslant c_n \leqslant \beta$; a prova de $\alpha \leqslant c_n$ faz-se inventando uma estratégia de escape da pulga; a prova de $c_n \leqslant \beta$ faz-se inventando um algoritmo de cerco eterno por parte do escorpião.

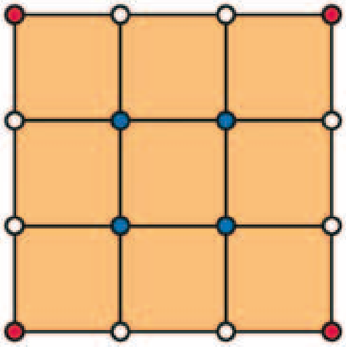


EXEMPLOS E PROBLEMAS



Caso $n = 2$.

Num tabuleiro tão pequeno não há estratégias complicadas. Para qualquer n, se a pulga escolhe no início um nodo periférico, o escorpião come-a logo. Assim, no tabuleiro 2×2, cada partida dura uma ou duas jogadas para cada lado. Deixo ao leitor a determinação do parâmetro crítico c_2.



Caso $n = 3$.

Se $p = 3$, o escorpião tem uma estratégia simples de cerco eterno à pulga. Na primeira jogada ela escolhe um dos nodos centrais, a azul. O escorpião coloca-se no canto do tabuleiro mais próximo da pulga. Para cada salto da pulga para um nodo azul, ele arrasta-se para o canto mais próximo dela. Assim ela não escapará. Note que há outras estratégias parecidas com esta. Se alterássemos levemente uma das regras do jogo estipulando que

(*) *em cada jogada, o escorpião pode percorrer uma distância* inferior a 3,

o escorpião não poderia numa só jogada ir de um canto ao outro do tabuleiro, o que torna inexequível a estratégia acima delineada. Esta limitação sugere novo problema

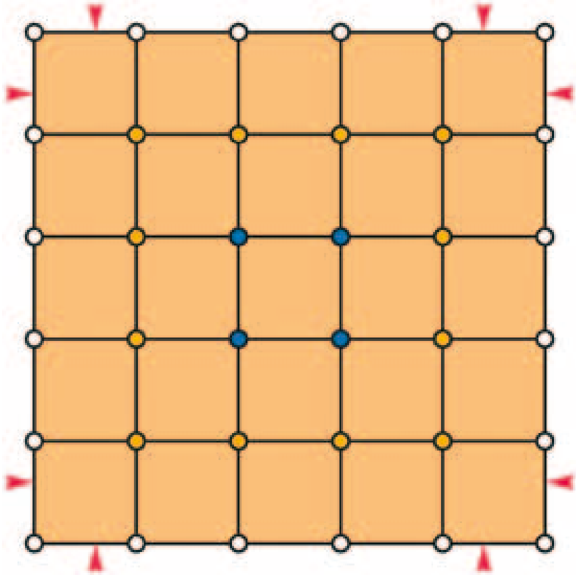
Será que a regra (*) *confere à pulga uma estratégia de escape?*

O cálculo do parâmetro crítico no caso 4×4 dar-lhe-á rodagem para tratar problemas mais gerais. Eis uma proposta simples:

Prove que, se $n \neq 4$ *e* $p \leqslant 3$, *a pulga tem estratégia para escapar.*

DE CARAS. Tomamos $p > 3$, a partir de agora. Ao escorpião convém tirar vantagem duma manobra, inspirada nas pegas *de caras* e *de cernelha* do cerco ao touro, que consiste em acorrer aos pontos periféricos mais próximos do nodo em que está a pulga. Para exemplificar, considere-se o tabuleiro 5×5, a seguir. Parece não valer a pena à pulga deslocar-se para um nodo amarelo, a não ser que possa saltar de imediato para a periferia e fugir.

Admitamos que ele está no canto noroeste do tabuleiro e ela salta para o amarelo a nordeste; o escorpião ataca de cernelha correndo o mais que pode para este e, se ela se mantiver nos amarelos, ele pôr-se-á de caras em 3 ou menos jogadas; e poderá manter-se de caras até ela recuar para um nodo azul. O posicionamento de caras deve preparar-se à distância: se a pulga salta para o nodo azul a noroeste, ao escorpião convém dirigir-se a um dos lados norte ou oeste, claro, mas as táticas são mais subtis quando se joga nas imediações do parâmetro crítico.



Caso $n = 5$. Trata-se do primeiro caso menos fácil. Não se dá solução completa mas apenas um diagrama que ilustra a determinação do parâmetro crítico. As setinhas vermelhas na periferia do tabuleiro apontam *pontos-chave* para conceção de estratégias da pulga e do escorpião, quando p está nas imediações do parâmetro crítico. O escorpião pode arrastar-se de cada um deles para cada um dos seus dois vizinhos em apenas uma jogada. Descobri-los foi complicado, utilizá-los é bem interessante, como o leitor verificará tentando determinar matematicamente o parâmetro crítico.

FUGA À ETERNIDADE

Ser árbitro duma partida destas não é fácil, especialmente no caso em que o escorpião ganha sem comer a pulga; aí é preciso analisar um algoritmo publicado pelo escorpião, onde ele clama: *a pulga não escapará!* Teremos um problema se o árbitro for um burocrata com a única função de registar cada posição da partida, no estilo do Xadrez: *"Jogada k: a pulga salta para o nodo X e o escorpião desloca-se para o local Y"*.

Será possível, apenas com esse registo, e com razoável justiça!, declarar a vitória do escorpião mesmo que a pulga não se deixe comer?

Talvez ajude a regra seguinte, inspirada numa das cláusulas de empate no Xadrez:

X. *O escorpião vence se a pulga dá um salto após o qual a posição atingida repete uma posição anterior da partida.*

Veja bem as dificuldades adicionais que isto levanta a ambos os contendores. Para a pulga, o arrependimento e o tentar de novo podem sair caros. A seu favor, o escorpião tem uma infinidade de locais onde parar, mas a cláusula X obriga-o a visitar os mesmos locais frequentemente, para que a pulga venha a repetir uma posição anterior da partida. O último problema deste *Canto* consiste em saber se sim ou não

Tendo o escorpião um algoritmo de cerco eterno da pulga, ele tem também um modo de a obrigar a repetir posições.

Experimente resolver esta questão no caso concreto $n = p = 3$, com a regra $(^*)$ acima referida, que deixa o escorpião deslocar-se uma distância *inferior a* 3. Curiosamente, a resposta é negativa: se a pulga circular nos nodos azuis sempre no mesmo sentido, para suster o escape da pulga, o escorpião não pode visitar por duas vezes o mesmo local. Portanto, o árbitro burocrata nunca lhe dará crédito num cerco perpétuo óbvio.

NOTAS FINAIS

Pelos meus cálculos, o parâmetro crítico da piscina circular é $c = 4.60333884\ldots$

Numa piscina de fantasia em floco de neve, qualquer segmento da fronteira tem comprimento infinito. Ao *cavalieri* acontece o que há muito tempo devia ter feito: ficar quieto e andar parado.

Na invocação de existência dos parâmetros críticos foi tido como intuitivamente óbvio que se a pulga não tem estratégia de escape, então o escorpião tem um algoritmo de cerco eterno. A supressão dessa lacuna fica para o leitor atento.

Com a regra $(^*)$ a pulga também não se safa.

Para todo o n, a regra que permite ao escorpião deslocar-se de uma distância $\leqslant p$ pode alterar-se, como em $(^*)$, para $< p$, o que conduz a problemas distintos. Será interessante determinar, em ambos os casos, quem tem estratégia de vitória no caso $p = c_n$.

BIBLIOGRAFIA

R. Isaacs, "Differential Games: Their Scope, Nature, and Future", *J. Optim. Th. Appl.*, 3(1969), pp. 283-295.

E. Marques de Sá, A. Branquinho, A. Gonçalves, "Olimpíadas de Matemática da Lusofonia/Banco de Problemas/Enunciados e Respostas", DMUC, 2011.

Fabio Chalub
Universidade Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

A **MEDALHA** QUE **VEIO** DO **FRIO**

Em 2014, realizam-se os Jogos Olímpicos de Inverno. O desporto também não é imune à matemática e tão velha quanto os jogos é a tentativa de adivinhar os seus resultados. Agora, uma nova investigação pretende prever o quadro de medalhas de Sochi, na Rússia. Desde a reunificação, a Alemanha liderou o *ranking* em cinco das seis competições que disputou. No entanto, diz-nos o modelo, a derrota para os EUA nos jogos de 2010 veio para ficar. Estes ficarão novamente em primeiro lugar na tabela.

Escrevo este texto em dezembro de 2013, dois meses antes dos Jogos Olímpicos de Inverno em Sochi, Rússia. Portanto, não sei o quadro de medalhas da competição. Tão-pouco sabe o resultado Wladimir Andreff, autor do estudo [1] no qual há uma previsão facilmente verificável para um evento próximo – algo raro num artigo científico. De acordo com o professor emérito de Sorbonne, presidente honorário da Associação Internacional de Economia do Desporto e ex-presidente da Associação Francesa de Ciências Económicas, o vencedor será os Estados Unidos com um número total de medalhas entre 33 e 38. Seguem-se a Alemanha (26 - 30 medalhas), Canadá (25 - 28), Rússia (21 - 27), Noruega, Áustria, Suécia, França, China, etc.

É importante ter em mente que a previsão do modelo se refere ao número de medalhas, não à ordem dos primeiros colocados. Se, por exemplo, o Canadá tiver 26 medalhas e a Rússia 27, então nos dois casos a previsão estará dentro da margem de erro. O ordenamento, no entanto, será trocado.

O ponto de partida deste e de qualquer modelo é o de encontrar estudos semelhantes já disponíveis e validados noutros contextos. No caso, uma série de estudos econométricos já haviam sido feitos para os jogos de verão. Estes normalmente baseiam-se em duas variáveis mais relevantes: o produto interno bruto (PIB) *per capita* e a população total de cada país. A estas adiciona-se uma variável booleana (ou seja, do tipo "é ou não é", 1 ou 0), indicando se o país é o anfitrião da competição. Para olimpíadas mais antigas, a caracterização do regime político – comunista ou capitalista – também se mostrou importante.

Partindo destes estudos, Andreff construiu uma equação que prevê o número de podia para cada delegação nos jogos de verão de 2008 (Beijing). Esta incluiu uma variável regional, ou seja, o globo foi dividido em Europa Ocidental, Europa do Leste, Oceania, Médio Oriente, Ásia (excluindo Médio Oriente), Norte da África, África Subsaariana, América do Norte e Caraíbas e, finalmente, América do Sul e Central. Este parâmetro geográfico permite acomodar questões culturais e até biológicas relativas a certas modalidades: *sprint* nos EUA e Caraíbas, corridas de fundo em África, ténis de mesa na Ásia, luta greco-romana e ginástica artística nos países do leste europeu etc.

De acordo com o modelo, o número esperado de medalhas num certo ano olímpico é dado pelas combinações lineares do logaritmo do PIB *per capita* (tomada a média nos quatro anos anteriores) e o logaritmo da população, mais uma certa soma ponderada das variáveis booleanas referidas anterior-mente (se o leitor considera estranho o uso do logaritmo, recomendo a leitura de "O logaritmo dos estímulos", *Gazeta de Matemática* 163, p. 13.)

Os pesos para cada uma destas variáveis devem ser ajustados pelos dados históricos. Desta forma, foi possível acertar o número de medalhas de 88% das nações presentes nos jogos de Pequim com uma margem de erro de apenas duas medalhas. Um resultado impressionante!

Dentre todos os resultados errados, o mais relevante foi o da China, que soube usar as suas vantagens de anfitriã como nunca antes havia sido feito. Por outro lado, a França, pátria do autor do estudo, tinha uma previsão de 35 a 38 medalhas; a Secretária de Estado do Desporto previa 40 subidas ao pódio. Numa agradável surpresa, os gauleses retornaram com 41 premiações.

A partir deste passado de previsões bem-sucedidas, foi construído um novo modelo, adaptado às especificidades dos jogos de inverno. A grande diferença é que, de uma forma ou de outra, todos os países conseguem treinar os seus atletas em boa parte do ano para os desportos de verão. O mesmo não é verdade no caso das competições na neve. Assim, a divisão geográfica segue parâmetros climatéricos distintos. As diferentes nações são divididas em quatro grupos: no primeiro, aquelas onde é possível treinar na maior parte do ano (Rússia, Noruega etc.); um segundo grupo onde pode fazer-se um treinamento de alta qualidade, mas restrito a meio ano (Áustria, República Checa, EUA, Espanha); no terceiro escalão estão os países onde há alguma cobertura de neve no inverno, é possível algum desporto mas o treinamento para a alta competição é limitado, incluindo Portugal; no último grupo estão aqueles países que já participaram nos Jogos Olímpicos de Inverno pelo menos uma vez, mas onde é essencialmente impossível praticar desportos de frio (neste grupo está a Jamaica, veja figura 1).

Uma segunda variável discreta foi incluída para considerar uma certa *cultura de desportos de inverno* – afinal, não é porque dois países têm clima semelhante que o empenho da população na promoção destas modalidades é idêntico. Medir isto, no entanto, é difícil, e optou-se por considerar o investimento financeiro em *resort* de esqui como indicador principal. Assim, incluem-se na categoria de alto investimento a Áustria, o Japão e a Noruega; no médio investimento estão a Austrália, o Líbano e o Irão e no último grupo figuram a Dinamarca, o Luxemburgo e Portugal.

O modelo foi calibrado com os dados dos Jogos de Inverno a partir de 1964, criando a tabela 1 (página seguinte) com as previsões para Sochi 2014. Quando o leitor tiver em mãos este artigo, já poderá saber se o ordenamento e sobretudo as premiações referidas estão corretas. O facto de os EUA liderarem a tabela não é tão trivial quanto possa parecer. Nos últimos jogos, o primeiro posto no quadro de medalhas (por número total, como neste estudo) tem sido sistematicamente da Alemanha.

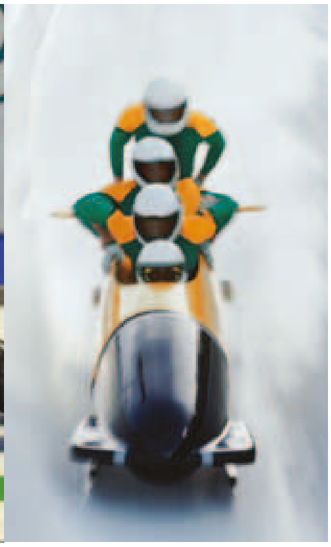


Figura 1. À esquerda, condições de treino e de financiamento perfeitas para o atleta canadiano de *curling:* Kevin Martin joga uma bola de granito para atingir o alvo e conquistar a medalha de ouro de 2010 (Fonte: Wikimedia Commons). À direita, no extremo oposto do clima e do investimento está a equipa da Jamaica, aqui a participar na competição de *bobsleight* (Fonte: David Madison/Digital Vision/Getty Image, Royalty Free Image.)

Uma pergunta deve passar pela cabeça do leitor: para quê isto tudo? Será que o objetivo é ganhar em *sites* de apostas na internet? O primeiro ponto é que, evidentemente, as previsões deste e de qualquer modelo terão sempre erros. Caso contrário, a própria competição perde o sentido, já que antes de começar sabemos quem vai ganhar. A paixão desportiva só pode sobreviver se o imprevisível tiver sempre lugar garantido no relvado (na neve, neste caso). No entanto, muitos governos investem na promoção do desporto nacional de alta competição. Não há muito, saiu em todos os órgãos de comunicação social a notícia de que Portugal tem um novo plano para os Jogos de Verão Rio 2016. Um tal plano só pode ser formulado se houver alguma ideia de quais são os fatores mais importantes para subir no quadro de medalhas. Desta forma, tais estudos acabam por mostrar onde colocar o dinheiro – público ou privado – de forma mais eficiente para conseguir os seus objetivos. Isto vale tanto para as atividades atléticas quanto para qualquer área competitiva.

Mas há uma outra implicação destes estudos. Lembro-me bem de começar a gostar de matemática enquanto fazia contas com os resultados do futebol. Diziam os meus amigos que eu iria ser um destes "matemáticos da bola", que aparecem no domingo à noite nas TVs a comentar as probabilidades de estes ou aqueles passarem à próxima fase da Liga dos Campeões. Estou longe, muito longe disto. Mas não tenho dúvidas de que a cada rodada do campeonato acabava por descobrir mais uma faceta encantadora da matemática. Instigar o prazer pela ciência nos mais jovens usando como exemplo o desporto é sempre uma tática a considerar.

País	Previsão	Mínimo	Máximo
EUA	36	33	38
Alemanha	28	26	30
Canadá	27	25	28
Rússia	24	21	27
Noruega	24	22	25
Áustria	15	14	16
Suécia	13	12	14
França	12	11	13
China	11	9	13
Coreia do Sul	11	10	13
Suíça	9	8	10
Japão	7	6	9
Itália	7	6	8
Holanda	6	5	7
Polónia	6	4	8
República Checa	6	4	7
Finlândia	5	3	6
Austrália	3	1	4
Eslovénia	2	1	4
Croácia	2	0	4
Eslováquia	2	0	3
Bielorrússia	1	0	3

Tabela 1: Previsões do artigo [1] para o número de medalhas (ouro, prata ou bronze) a ser conquistado por cada país nos Jogos Olímpicos de Sochi, 2014. Quando ler esta tabela, já poderá consultar nos jornais se a previsão se verificou ou não, caso a caso.

REFERÊNCIAS

[1] Wladimir Andreff. "Economic development as major determinant of Olympic medal wins: predicting performances of Russian and Chinese teams at Sochi Games." *Int. J. of Economic Policy in Emerging Economies*, 2013 Vol.6, No.4, pp. 314-340

PÓS-ESCRITO: Passados os Jogos de Sochi, tive a oportunidade de fazer a revisão final do texto. Das 22 previsões da tabela 1, 11 estavam certas e igual número, erradas, com a primeira colocação em número de medalhas para os anfitriões e o segundo lugar para o favorito, EUA. Agora, já podemos concluir alguma coisa do modelo: o desporto é mesmo emocionante!

A Terra é um Pião

Eduardo Marques de Sá
Universidade de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

No rescaldo de 2013, ano da Matemática no Planeta Terra, apresenta-se uma descrição breve e muito leve de um assunto matemático de dificuldade técnica elevada: a precessão dos equinócios. Fala-se da sua descoberta no séc. II a.C. e da justificação físico-matemática desse fenómeno concebida na segunda metade do séc. XVIII. A teoria que Leonhard Euler criou a esse propósito explica também o curioso movimento dos piões de brincar, não sendo por isto que as coisas se tornaram simples de entender.

ANO SÓTICO

O nosso planeta não é muito diferente dos outros no que toca às voltas que dá em torno do Sol e em torno do seu próprio eixo. Desde há milénios que esses movimentos se detetam por medição do que se observa: os movimentos aparentes do Sol, da Lua e das estrelas, fixas e errantes.

Um exemplo interessante é o movimento anual da Terra em torno do Sol e o modo como isso se avaliava e media na Antiguidade. Cada estrela nasce e se põe tal qual a estrela Sol, em virtude do movimento diurno da Terra em torno do seu eixo; quando certa estrela nasce ao mesmo tempo que o Sol (melhor, uns minutos antes de o Sol a ofuscar) diz-se que ela tem o seu nascer heliacal. No antigo Egito era hábito marcar o início do ano de acordo com o nascimento heliacal da estrela Sirius, que os egípcios designavam por Serpet e os gregos por Sotis, a estrela mais brilhante do firmamento. A manhã em que Sotis nascesse imediatamente antes do Sol marcava o início do ano sótico. Nos dias que se iam seguindo a esse início de ano, Sotis nascia cada vez mais cedo do que o Sol; por exemplo, no décimo dia do ano sótico, ela nasce cerca de 40 minutos antes do Sol. O tempo decorrido entre dois nasceres heliacais consecutivos de Sotis era o ano sótico[1]. Assim se observou que o Sol descreve sobre o fundo estrelado do céu uma trajetória que é sempre a mesma ano após ano; ele atravessa sempre as mesmas constelações estelares que vieram a receber nomes bem familiares, os do Zodíaco, o zoológico do céu: Carneiro, Touro, Gémeos, Caranguejo, Leão, Virgem, Balança, Escorpião, Sagitário, Capricórnio, Aquário e Peixes, regressando ao Carneiro, por esta ordem.

Em vez de 'ano sótico' usamos ano sideral, definido como o período do movimento da Terra em torno do Sol, quando observado no sistema das "estrelas fixas". De facto, a medição dos movimentos planetários faz-se relativamente a um referencial, dito *sideral*, cujos pontos de referência são objetos muito distantes de nós, tão distantes que os seus movimentos não são detetáveis pelos sistemas de medida utilizados. Hoje, a medição de movimentos das estrelas mais próximas é feita relativamente a sistemas de referência ancorados em outras estrelas ou objetos similares bem mais distantes; os mais utilizados são os *"quasars"*, objetos galácticos antiquíssimos distantes de nós na ordem dos milhares de milhões de anos luz.

ANO TRÓPICO

Para os astrónomos da Antiguidade, a Terra ocupava o centro do mundo, envolta pela esfera celeste onde residiam as estrelas, como a figura 1 ilustra. Este é um modo simplificado de descrever o chamado sistema geocêntrico introduzido por Platão e Aristóteles e levado por gerações de astrónomos a um estado de complexidade e fiabilidade notáveis, culminando com a obra *Almagesto*, de Ptolemeu, no séc. II da nossa era. A figura 1 mostra a eclítica a ponteado amarelo; a negro estão o eixo e o equador da esfera celeste que se obtêm prolongando o eixo e o equador terrestres; dantes, era a esfera que rodava em torno do seu eixo reproduzindo o movimento diurno

---

[1] Claro que havia erro substancial na definição de cada ano individual, pois o Sol e Sírius não estão à mesma altura em nasceres heliacais consecutivos. Mas um astrónomo que acumulasse muitos anos de observações herdadas dos seus antepassados poderia estimar o ano sótico com uma precisão muito grande: sendo o erro de avaliação do início do ano sótico cerca de um dia, se o nosso astrónomo utilizasse o registo do número de dias acumulado em 200 anos sóticos, obteria uma estimativa do ano sótico com erro da ordem de 1/200 do dia, isto é, 7,2 minutos.

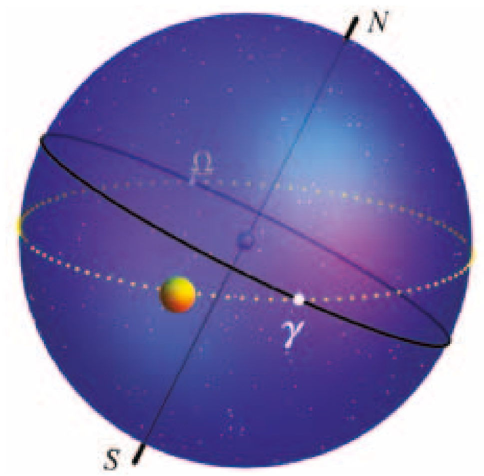


Figura 1: O ponto vernal.

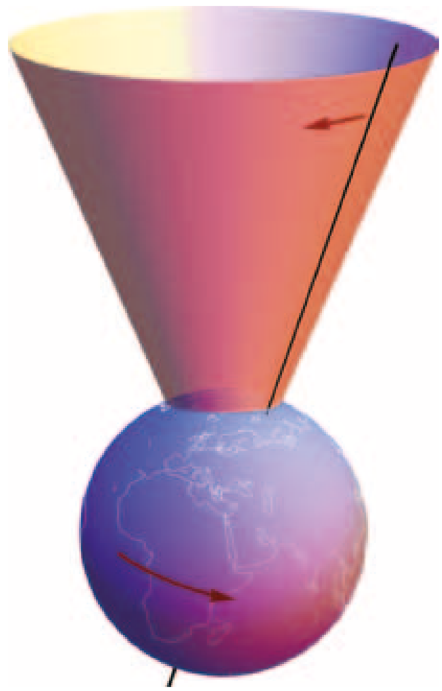


Figura 2: Rodando como um pião.

das estrelas, hoje vemo-la como entidade geométrica fixa. A branco, com a letra γ, está o ponto vernal, um dos pontos de interseção da trajetória solar com o equador celeste; em posição diametralmente oposta está o ponto outonal, Ω.

A bola amarela do Sol descreve a sua trajetória anual no sentido direto para quem observa de norte e, na figura, está a um mês de chegar a γ. O momento em que ocupa γ chama-se equinócio de março; quando chega ao ponto da eclítica à distância máxima acima do equador, dá-se o solstício de junho; chega ao ponto outonal no equinócio de setembro; passados cerca de três meses, dá-se o solstício de dezembro, depois do qual o Sol volta ao ponto vernal. O tempo que decorre entre duas passagens consecutivas pelo ponto vernal é o chamado *ano trópico*, o das estações.

Nos primórdios da astronomia, acreditava-se que ano trópico e ano sideral tinham igual duração. Mas Hiparco de Rodes (190-120 a.C.), considerado pai da trigonometria e maior astrónomo da Antiguidade, descobriu que isso não era assim, estimando que o ano trópico é mais curto que o sideral em pouco mais de 18 minutos e meio, diferença notavelmente próxima do valor moderno, de 20 minutos e 23 segundos. Chama-se a isto a *precessão dos equinócios* pois, começando a contagem do tempo com o Sol no ponto vernal, o próximo equinócio vernal precede a completação pelo Sol duma volta inteira à eclítica.

DE QUE SIGNO SOU?

Voltando à figura 1, a precessão dos equinócios significa um lento deslocamento do ponto vernal sobre a eclítica, no sentido retrógrado para quem observa de norte, isto é, em sentido oposto ao da circulação do Sol. Esse movimento de γ faz-se a uma velocidade de cerca de 50 segundos de arco por ano; umas contas simples mostram que, se essa velocidade se mantiver, o ponto vernal dará uma volta inteira à eclítica em cerca de 26 milénios, e vai percorrendo as constelações do Zodíaco pela ordem inversa à do percurso solar. No tempo de Hiparco, γ estava sobre o primeiro ponto do Carneiro, isto é, na fronteira entre Carneiro e Peixes; durante os dois mil e tal anos subsequentes atravessou os Peixes e encontra-se hoje na porta de entrada do Aquário.

Os astrólogos de hoje consideram que eu sou Escorpião por ter nascido no dia 10 de novembro. De facto, no corres-

Figura 3: Trajetória do polo norte celeste.

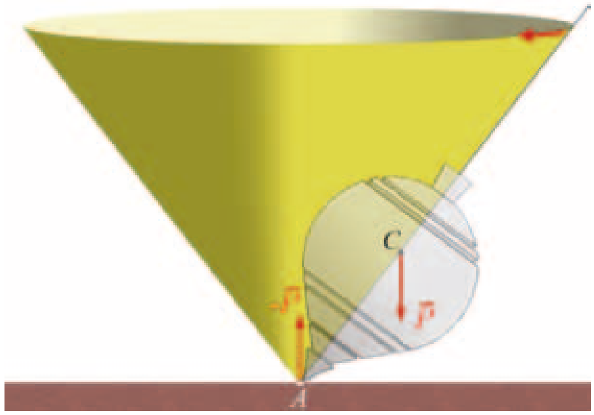


Figura 4: Pião num campo gravítico.

pondente a esse dia, ao tempo de Hiparco, o Sol estava a meio da constelação do Escorpião; mas, no dia em que nasci, mais de 21 séculos depois de Hiparco, o Sol estava bem no meio da Balança. Parece ser esta a única influência que a precessão dos equinócios tem na minha vida; afinal não sou tão ruim quanto os horóscopos das revistas de lazer querem fazer-me crer.

A TERRA E O PIÃO

Hoje sabemos algo que não estava ao alcance de Hiparco: o ângulo dos planos do equador e da eclítica é constante, melhor dizendo, tem pequenas oscilações à volta dum valor médio de 23° 27′, chamado *obliquidade da eclítica*, que a teoria matemática prevê se mantenha assim *per seculum a seculorum*. Nestas condições, o movimento de precessão é fácil de descrever, como mostra a figura 2: a Terra roda em torno do seu eixo, o qual, solidário com o equador, roda em torno dum eixo perpendicular ao plano da eclítica e descreve a superfície cónica aí representada. Note-se que é precisamente isso que faz um pião lançado sobre um plano horizontal como na figura 4. O pião roda em torno do seu eixo de simetria e esse eixo, por sua vez, roda em torno do eixo vertical que passa no ponto de apoio *A*. A este comportamento do pião chama-se, por extensão, *movimento de precessão*.

No tempo de Hiparco e durante milénio e meio, a precessão foi vista como um movimento especial da esfera celeste ou, melhor, duma das muitas esferas celestes concêntricas que desde a Antiguidade Clássica se foram criando para descrever os movimentos dos corpos visíveis no céu. A primeira referência à precessão como movimento do eixo da Terra parece ter sido de Nicolau Copérnico, na obra *Sobre as revoluções das esferas celestes*, de 1543, onde introduziu o seu famoso sistema heliocêntrico. A mudança de direção do eixo da Terra faz com que o polo norte celeste (*N*, na figura 1) mude com o tempo. A figura 3 mostra uma projeção da trajetória do polo norte celeste visto da Terra. Ele descreve a circunferência amarela no sentido direto; a marca 0 indica o início da nossa Era, e 13000 o meio curso precessional. A nossa Estrela Polar estará na sua máxima proximidade do polo norte, a cerca de 27' de grau, no início do séc. XXII. No tempo da construção das grandes pirâmides (c. 3000 a.C.) a "estrela polar" era α do Dragão. A figura mostra que, daqui a 11 milénios, a brilhante Vega indicará o norte.

A precessão dos equinócios foi um mistério sem justificação científica por quase dois milénios após a descoberta de Hiparco. Foi Jean d'Alembert, em 1749, o primeiro a dar uma solução matemática para o problema. Em diversos textos publicados entre 1736 e 1765, Leonhard Euler estabeleceu as equações, ditas *de Euler*, que determinam de forma completa o modo como se movem os sólidos. Em particular, permitiram explicar como se movem os piões de brincar, o pião-planeta onde vivemos, os discos e dardos lançados por um atleta, etc. Aqui, só será possível tocar ao de leve a teoria matemática. Quando um pião está em contacto com o solo, o seu peso $\vec{P}$ e a reação $-\vec{P}$ do solo no ponto de apoio produzem um binário que tende a forçar o eixo do pião a mudar a sua direção. Se o pião não está em rotação, o eixo roda em torno de A e descreve um ângulo de queda paralelo ao plano do binário. Mas uma rotação rápida em torno do eixo de simetria fá-lo reagir de modo muito estranho ao binário produzido pela gravidade: o eixo do pião começa a descrever um ângulo de vértice A e plano perpendicular ao plano do binário $(\vec{P}, -\vec{P})$. Daí que o eixo do pião descreva uma superfície cónica de revolução, de eixo vertical e vértice A.

TORÇÃO E ROTAÇÃO

Consideremos um sólido com centro de massa C a que chamamos, apenas, *centro* do sólido. Dada uma força $\vec{F}$ aplicada num ponto X do sólido, o produto vetorial $\overrightarrow{CX} \wedge \vec{F}$ designa-se por *torção* de $\vec{F}$. Um campo de forças origina uma força aplicada em cada ponto do sólido; a soma de todas estas forças designa-se por *resultante*, ou *força total*; a soma das torções de todas as forças do campo exercidas sobre o sólido é a t*orção total*[2].

UM PIÃO DE MAXWELL. No nosso campo gravítico uniforme, o centro dum sólido é o único ponto que satisfaz a propriedade seguinte: se suspendermos o corpo por um ponto, o centro estará sobre a vertical do ponto de suspensão qualquer que este seja. O centro nem sempre é fisicamente acessível, mas há casos em que é. Nesses casos, se o corpo se apoia no centro ele fica numa situação de equilíbrio *indiferente*: mudando a posição de apoio no centro, mantém-se o equilíbrio. A ideia de criar um pião apoiado no centro de massa ocorreu, em 1859, a James Maxwell, o famoso criador das leis matemáticas do eletromagnetismo.

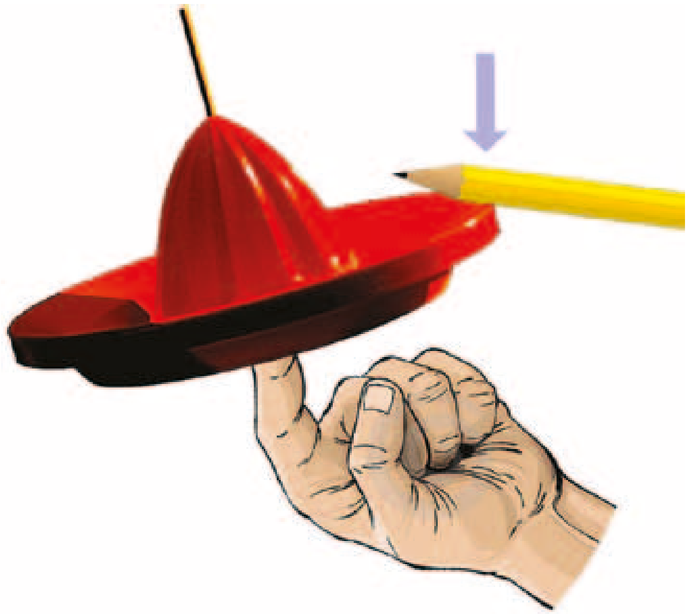


Figura 5: Pião espremedor. O palito axial deve ser maior do que a figura sugere e a sua ponta acerada deve cravar-se na polpa do dedo.

Trabalhos manuais. O centro dum espremedor de citrinos como o da figura 5 está na concavidade do espremedor. Perfure com um palito de espetada que entra no vértice do espremedor e vai a uma profundidade q.b. de modo a que a ponta do palito fique muito próxima do centro do espremedor. Para saber se a ponta já está no centro, teste com um dedo, como na figura, procurando o centro por tentativas; depois fixe com super-cola e calibre, acrescentando pequenas massas adesivas até detetar equilíbrio indiferente. Acaba de fabricar um pião de Maxwell!

Experiências.

(a) Faça-o girar com boa velocidade, rolando o palito com a sua mão livre. O eixo de rotação, que pode alterar manipulando o palito, mantém-se estável, em qualquer posição, sem precessão!

(b) Percuta o bojo do pião com uma pancada seca como a flecha indica; observa-se um outro movimento, dito *nutação*, ou *precessão livre*, que rapidamente desaparece por ação do atrito no apoio do palito.

(c) Pressione o bojo, ao de leve mas continuadamente, com um lápis, por exemplo, no sentido da flecha, e verá o "milagre matemático" em ação! O eixo-palito, em vez de rodar no plano do papel, rodará num plano perpendicular.

(d) Encoste ao palito (próximo do topo) um objeto irregular qualquer mantido imóvel (a sua mão de dedos abertos, por exemplo); verá o *efeito de Maxwell*: o palito 'cola-se' ao objeto e rola sobre ele! Esta colagem é corolário do milagre matemático que vamos referir na página seguinte.

Por ação de um campo de forças, o centro do sólido desloca-se e o sólido roda. Euler demonstrou que podemos estudar separadamente esses dois efeitos: por um lado, o deslocamento do centro e, por outro, a rotação do sólido em torno dum eixo, como se o centro estivesse parado. Esta decomposição do movimento faz parte da nossa experiência visual televisiva, quando um operador de câmara persegue, por exemplo, uma bola de futebol ou um dardo em pleno voo; num *follow up* bem feito, o centro do projétil parece parado no ecrã, sendo bem visível a rotação em torno dum eixo que pode variar por ação de forças aerodinâmicas. O sistema que esse tipo de filmagem invoca é o sistema dito *baricêntrico*, cuja origem é o centro do sólido e os eixos são dirigidos para estrelas fixas, como nos sistemas siderais. Assim, supomos que o eixo de rotação dum sólido passa pelo seu centro.

A resultante $\vec{R}$ das forças aplicadas ao sólido determina o movimento do seu centro de massa: este desloca-se como se fosse um ponto material único, com massa igual à massa do corpo, atuado por $\vec{R}$. É este teorema que legitima representar o peso (força resultante do campo gravítico atuando num corpo) como força aplicada no centro C dum sólido, como na figura 4.

Pelo seu lado, a torção total dum campo de forças está intimamente ligada com a rotação adquirida pelo sólido. Se um corpo roda é porque sobre ele se exercem ou exerceram forças de torção não nula. Se um corpo que não esteja a rodar for atuado por um campo de torção total nula ao longo do tempo, o centro poderá deslocar-se de forma muito complexa mas não terá rotação.

LANÇAMENTO DUM PIÃO

Quando lançamos um pião como o da figura 6, os nossos dedos exercem sobre ele um binário, $(\vec{F}, -\vec{F})$, com uma torção $\vec{T}$.

Se o lançamento for "perfeito", isto é, se o plano do binário for perpendicular ao eixo do pião, este rodará com eixo de rotação coincidente com o eixo de simetria; quer dizer $\vec{T}$ produz uma rotação de eixo paralelo à torção $\vec{T}$[3]. A rotação

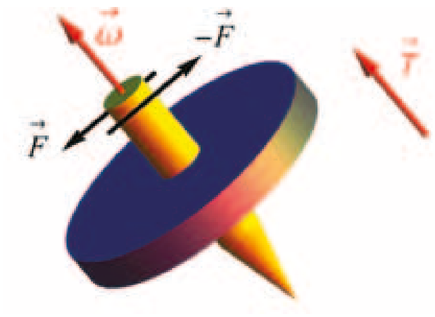


Figura 6: Torção e rotação.

costuma representar-se vetorialmente como o $\vec{\omega}$ da figura: trata-se dum vetor com a direção do eixo de rotação, com módulo igual à velocidade angular do movimento rotativo e sentido dado pela "regra do saca-rolhas", a mesma que adotámos para o produto vetorial[4].

Experimente lançar o pião ao ar, da forma descrita, e observe o voo do pião. Para este efeito, o campo gravítico terrestre pode considerar-se uniforme o que implica o anulamento da torção total. Então $\vec{\omega}$ manter-se-á invariável e, durante o voo, o centro do pião descreve a conhecida parábola de subida e queda dos graves. A situação modifica-se radicalmente quando a ponta do pião encontra um plano horizontal de apoio; a partir desse momento ele passa a descrever o movimento de precessão já descrito: $\vec{\omega}$ roda em torno dum eixo vertical.

Porquê? A explicação de Euler é uma dedução difícil feita com base na axiomática newtoniana do movimento dos corpos. Ela é, dita de forma pouco rigorosa: se um pião em rotação rápida $\vec{\omega}$ for sujeito a uma torção $\vec{T}$, $\vec{\omega}$ varia com o tempo e a sua derivada é, em cada instante, paralela a $\vec{T}$ e tem a direção de $\vec{T}$ nesse instante. Na figura 4, se $\vec{\omega}$ tiver origem

[2] Estamos a supor que o sólido é constituído por um número finito de átomos. A matemática do contínuo é algo mais complicada.

[3] A arte de bem lançar um pião consiste precisamente em exercer sobre ele um binário de plano "o mais possível" perpendicular ao eixo do pião. Após um mau lançamento, o pião iniciará a sua rotação em torno dum eixo que não o de simetria, produzindo uma oscilação indesejada que, em caso de inabilidade extrema, o pode levar a uma cambalhota frustrante.

[4] Na figura 6, o binário exercido faz rodar o pião no sentido direto para quem observa de cima. Se o eixo fosse um saca rolhas tradicional, este progrediria no sentido de $\vec{\omega}$, como na figura.

A (no plano do papel) e direção de A para C , a extremidade de $\vec{\omega}$ mover-se-á na direção e sentido de $\vec{T}$, isto é, foge para lá da folha de papel! Trata-se duma reação anti-intuitiva, no sentido em que falham as tentativas de a explicar noutros termos e de modo convincente. O famoso físico Richard Feynman chamou *milagre matemático* à precessão dos piões![5]

COMO É A TERRA POR DENTRO?

Enquanto a forma e tamanho da Terra são conhecidos desde a Antiguidade, a sua densidade média só foi determinada no séc. XVIII. Quanto ao tamanho, os números hoje aceites são: diâmetro equatorial 12756 km e diâmetro polar 12714 km, o que dá um achatamento na ordem dos 0,33%. O achatamento, ou desvio de esfericidade, obtém-se, para qualquer bola, calculando a diferença Δ entre o maior e o menor diâmetro, e dividindo Δ pelo maior diâmetro. Para comparar, referira-se que a *Jabulani* do Mundial de 2010, tida como a bola de futebol "mais perfeita do mundo", tinha, à saída de fábrica, um desvio de esfericidade *triplo* do da Terra.

O nosso planeta tem massa total de cerca de 6×10^{24} kg e a densidade média ronda os 5.5. Mais interessante que os números é o modo como essa massa se distribui. O planeta é constituído por várias camadas de densidades distintas, camadas essas também aproximadamente esféricas e concêntricas. A densidade cresce da crusta para o centro, entre valores aproximados de 3 a 13. O modelo matemático mais simples aqui adotado é o duma Terra esférica sólida com simetria radial, isto é, onde a densidade em cada ponto depende apenas da distância ao centro da Terra; portanto, ela é união duma infinidade de cascas (= superfícies) esféricas, com densidade constante em cada casca. O modelo mais complicado que aqui interessa é o duma Terra que resulta do modelo esférico achatando todas as cascas segundo o eixo de rotação; mais precisamente, as cascas são elipsoides de revolução, concêntricos e semelhantes entre si, sendo a densidade constante em cada casca elipsoidal.

O modo ingénuo de calcular a massa da Terra com um modelo destes é partir o modelo em pequenos pedaços e somar as massas desses pedaços. Podemos parti-lo usando, por exemplo, uma malha cúbica de pequenos cubinhos de 1 cm^3 cada; podemos também estimar a força gravítica que o Sol exerce sobre a Terra, somando as forças gravíticas exercidas sobre cada cubinho. Estes cálculos são impraticáveis por estarem envolvidos mais de 10^{27} cubinhos, mas o que conta é a ideia, já utilizada noutros contextos por Arquimedes, que viria a culminar na criação do cálculo integral moderno nos séculos XVII e XVIII. O que disto interessa intuitivamente fixar é que a cada ponto X associaremos uma massa igual à dum cubinho centrado em X. Assim, se a densidade da casca a que X pertence for, digamos 7, a massa atribuída a X será 7 gramas.

NUMA TERRA ESFÉRICA...

Se a Terra fosse esférica de simetria radial, a ação do Sol (ou de qualquer outro corpo celeste) produziria um campo gravítico sem torção. A figura 7 mostra como isso se prova; o plano da eclítica é perpendicular ao plano da imagem e está representado pela linha vermelha horizontal; o centro do Sol encontra-se à direita, sobre a eclítica, a uma distância muito grande relativamente ao raio da Terra (cerca de 23 mil raios terrestres). Escolhido A , um ponto arbitrário da Terra, B denota o seu simétrico relativamente ao plano da eclítica; A' e B' são os pontos da Terra simétricos de A e B relativamente ao plano perpendicular ao da eclítica e que contém os centros da Terra e do Sol. Claro que, na figura, as imagens de A e A' (e as de B e B') coincidem. Estando os quatro pontos à mesma distância do centro da Terra e à mesma distância do Sol,

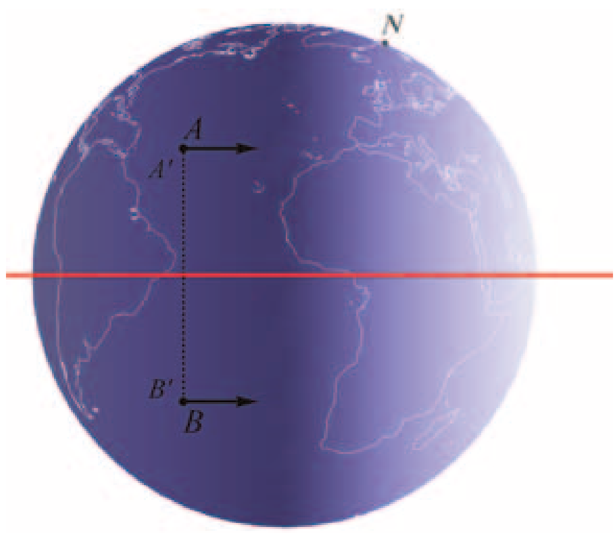


Figura 7: Terra esférica.

as forças exercidas sobre eles pelo Sol são iguais. Daí resulta que a torção relativa a essas quatro forças é nula e, portanto, que a torção total é nula. Conclusão, se a Terra tivesse esta forma perfeita, nem o Sol nem nenhum outro corpo celeste exerceria torção sobre a Terra e não existiria precessão dos equinócios.

NUMA TERRA ELIPSOIDAL...

A figura 8 apresenta o nosso planeta como elipsoide de achatamento muito pronunciado para se entender melhor a situação. O plano da eclítica está representado como na figura 7. O momento escolhido é o solstício de junho, com o centro do Sol do lado direito e no plano da figura; a linha vertical vermelha representa o plano de topo que passa pelo centro da Terra e é perpendicular à direção dos raios solares. Dada a distância a que o Sol está, podemos supor que a força gravítica que exerce sobre cada ponto material da Terra é paralela à eclítica e ao plano da figura. A esta distância, o campo gravítico solar é praticamente uniforme, mas não é uniforme; por exemplo, escolhido um ponto A sobre a Terra, seja B o ponto diametralmente oposto a A , e considerem-se os pontos A' e B' construídos de modo análogo ao da figura 7. Claro que as forças exercidas pelo Sol em A e A' (e em B e B') são iguais; mas as que se exercem em A e A' são de menor módulo do que as que se exercem em B e B' por estes estarem mais perto do Sol. Feitas as contas, as forças nestes quatro pontos produzem uma torção não nula perpendicular ao plano da figura, apontando para o leitor (do lado do ponto vernal). Esta conclusão vale para todos os A,B,A',B' que se projetam nos quadrantes pares determinados pelos eixos vermelhos da figura plana. Se considerarmos os dois gomos da Terra que se projetam nos quadrantes ímpares, a conclusão é: essas regiões do planeta contribuem com uma torção perpendicular ao plano da figura que aponta no sentido oposto ao da contribuição dos quadrantes pares. A torção total é a soma dessas duas contribuições e queremos saber qual dessas duas prevalece; parece ser claro que prevalece a contribuição dos quadrantes pares, pois neles se projeta maior quantidade de matéria terrestre do que nos quadrantes ímpares. Esta última frase não é um raciocínio matemático, apenas dá uma dica sobre a possibilidade de provar rigorosamente o teorema: no solstício de junho, a torção que o Sol exerce sobre a Terra é perpendicular ao plano da figura 8 e aponta para o ponto vernal.

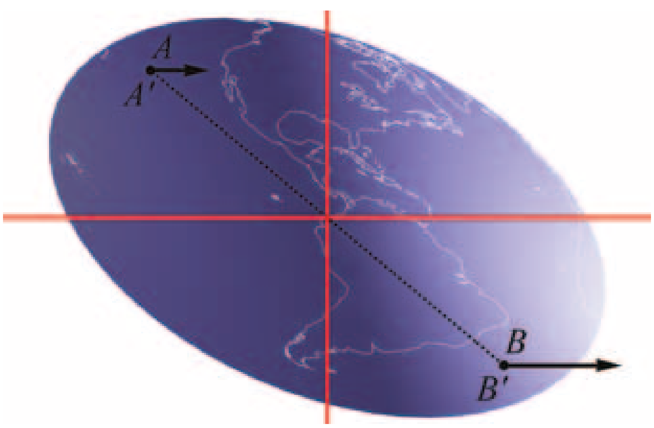


Figura 8: Terra achatada vista do ponto vernal.

No solstício de dezembro a conclusão é a mesma, como o leitor facilmente verificará imaginando, na figura 8, o Sol do lado esquerdo. Portanto,

> *num solstício, o Sol exerce sobre a Terra uma torção dirigida para o ponto vernal.*

Deixa-se ao leitor o exercício de provar que

> *num equinócio, a torção total do campo gravítico solar é nula.*

Este é apenas o início dum raciocínio analítico difícil que conduz a esta conclusão: no decorrer dum ano, a torção exercida pelo Sol não é uniforme, mas, no cômputo anual, ela é perpendicular ao plano da figura 8 e aponta para o ponto vernal.

Em termos ingénuos, é como se o Sol tentasse diminuir a obliquidade da eclítica, sem o conseguir, pois a Terra reage com uma precessão como manda o "milagre matemático" acima referido a propósitos dos piões. O raciocínio feito para o Sol pode repetir-se para a Lua e os planetas do sistema solar; como esses astros têm planos orbitais pouco inclinados em relação à eclítica, as suas ações de torção reforçam a do Sol.

QUAL O SENTIDO DA PRECESSÃO?

No caso dum pião de brincar assente sobre um plano horizontal, a teoria diz exatamente aquilo que o leitor pode obser-

[5] Cf. *The Feynman Lectures on Physics, Vol.I*, S20-3.

var experimentando. Se lançar o pião como na figura 6, o lançamento preferido dos esquerdinos, o pião rodará no sentido que $\vec{\omega}$ indica, ou seja, o sentido direto para quem observa de cima, e a precessão do eixo faz-se nesse mesmo sentido. Se fizermos o pião rodar no sentido retrógrado, a precessão será também retrógrada. Resumindo, para um pião assente sobre um plano horizontal, a precessão e a rotação em torno do eixo fazem-se no mesmo sentido.

Mas não é isso que a Terra faz, conforme representado na figura 2: para quem observa de norte, a rotação é direta e a precessão, retrógrada. Mas esta diferença não é significativa, como veremos.

Na figura 4, eliminemos mentalmente a faixa escura que representa a 'mesa' em que o pião está assente, mas mantendo a ligação no ponto A. O pião tem duas posições de equilíbrio: uma estável, quando C está na vertical de A abaixo de A, e outra instável, quando C está na vertical de A acima de A.

PIÕES DORMENTES. A posição de equilíbrio instável é dinamicamente estável se o pião for posto a rodar com uma velocidade angular suficientemente elevada. Todos temos a experiência de ver um pião dormir, isto é, rodar estavelmente com o eixo imóvel na posição vertical. O atrito no ponto de apoio vai retardando a rotação do pião que, em certo momento, deixa de dormir e entra em precessão: o eixo vai aumentando o ângulo que faz com a vertical e o ritmo de precessão aumenta na mesma proporção que o ritmo de rotação diminui, até que cai. Cada pião tem a sua velocidade angular crítica, acima da qual ele pode dormir e abaixo da qual não dorme; pelos meus cálculos, um pião como o da figura 4 tem uma velocidade angular crítica na ordem das 15 voltas por segundo; por isso esses piões precisam dum cordão ou doutro auxiliar de lançamento. Já o pião da figura 9, feito com um suporte de panelas, de corticite, e um palito de espetada, consegue dormir a velocidades de cerca de 2 voltas por segundo. O segredo está em que a velocidade crítica será tanto menor quanto mais achatado for o pião e menor for o seu pé(distância do centro ao ponto de apoio). Quando quiser comprar ou fazer um bom pião, lembre-se deste critério: ele deve ser chato e de pé curto.

Voltando à figura 4 sem a faixa escura, suponha que o pião tem rotação e precessão no sentido retrógrado para quem observa de cima. O atrito em A faz diminuir a velocidade de rotação e o ponto C vai baixando; quando estiver abaixo do ponto A, o observador vê o pião rodar no sentido direto e continua a ver precessão retrógrada! Em vez de imaginar a Terra como um pião tradicional de cabeça para baixo, experimente testar um brinquedo fascinante, um giroscópio como o da figura 10. Trata-se dum pião que pode ser apoiado no ponto S ou suspenso de N. Ponha-o a rodar como indica a figura, no sentido direto quando visto de norte, como a Terra. Se o apoiar em S, ele terá uma precessão em sentido direto. Se o suspender de N, a precessão será retrógrada, como no caso da Terra; o atrito vai retardando o pião e, decorrido algum tempo, S descreverá uma espiral descendente até o pião adormecer com S na vertical de N. Na Terra, temos o atrito das marés...

Irá o nosso planeta adormecer?

Irão acabar as estações do ano?

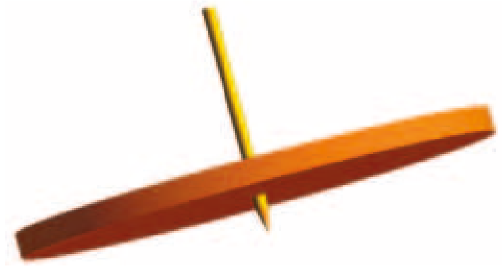


Figura 9. Pião dormente.

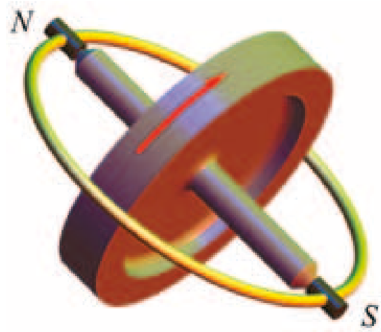


Figura 10: Giroscópio, apoiado ou suspenso.

REFERÊNCIAS

Nos seus *Principia Mathematica* (1687), obra considerada a mais influente na ciência de todos os tempos, Isaac Newton propõe uma axiomática do movimento dos corpos e a lei de atração universal, princípios que ele aplica à descrição e à explicação de caráter matemático dos movimentos planetários do sistema solar. Newton apresentou a precessão dos equinócios como resultado da ação gravítica do Sol e da Lua, mas foi Jean d'Alembert (1749) quem estabeleceu com rigor matemático o papel da atração luni-solar na precessão. Logo de seguida, em 1750, Leonhard Euler apresenta "um novo princípio da mecânica" (no essencial, o 'milagre matemático' acima referido), que viria a culminar na sua teoria geral do movimento dos corpos rígidos, em 1765. Refiram-se outros matemáticos cujas obras foram decisivas no estabelecimento da teoria da rotação dos corpos rígidos: Joseph-Louis Lagrange e a sua mecânica analítica, em 1788; Louis Poinsot e a sua mecânica geométrica, em 1834; Felix Klein e Arnold Sommerfeld publicaram o tratado definitivo do pião, em língua alemã, entre 1897 e 1910; a tradução inglesa, *The Theory of the Top*, começou a ser publicada em 2008, estando a publicação do quarto volume prevista para 2014.

SOBRE O AUTOR

Eduardo Marques de Sá é professor catedrático aposentado do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, membro correspondente da Academia das Ciências de Lisboa, membro do Centro de Matemática da UC, onde investiga no grupo de Álgebra e Combinatória, e membro da equipa do Projecto Delfos de que foi cofundador.

A inexplicável eficácia da matemática

Alessandro Margheri
Universidade de Lisboa
margheri@ptmat.fc.ul.pt

A que é que se deve a capacidade aparentemente mágica da linguagem matemática, linguagem elaborada pelo homem, de descrever o comportamento do mundo físico, desde o infinitamente pequeno ao infinitamente grande, de forma tão precisa e profunda? Como é que pode uma equação, ou um conjunto de equações, capturar de forma tão essencial alguns aspetos da realidade, permitindo, por exemplo, prever a existência de partículas elementares que só posteriormente serão encontradas experimentalmente? (É bem recente a confirmação experimental da existência do bosão de Higgs, teorizado pelo físico britânico Peter Higgs em 1964). E, ainda, porque é que alguns conceitos e resultados matemáticos, desenvolvidos no âmbito teórico e por curiosidade científica, se tornam, anos depois, ferramentas essenciais no estudo da Natureza?

O Prémio Nobel da física Eugene Wigner [9] mostrou-se maravilhado pelos poderes quase divinos da matemática, falando no mistério da "*não razoável eficácia da matemática*".

Desde a origem da matemática, a ligação evidente entre as entidades abstratas que constituem o seu objeto de estudo e os correspondentes, imperfeitos, simulacros materiais, conduziram a uma conceção "naturalista" dos objetos matemáticos (Pitágoras e Platão podem ser considerados dois exemplos de "naturalistas" ilustres). Simplificando um pouco, podemos dizer que, de acordo com esta conceção, os entes geométricos e os números têm uma existência própria e transcendente, independente da existência dos seres humanos, e constituem o molde com o qual se forja toda a realidade sensível. A mente humana consegue ter acesso a esta realidade eterna e perfeita, *descobrindo* os objetos matemáticos e as relações entre eles. Torna-se assim *necessário* que os teoremas que são provados para estas entidades abstratas tenham uma correspondência com o comportamento dos fenómenos do mundo natural.

Esta conceção atinge a maturidade no século XVI com Galileu Galilei, que no seu trabalho "Il Saggiatore" [3] escreve:

"A Filosofia encontra-se escrita neste grande livro – o universo – que continuamente se abre perante os nossos olhos, que não se pode entender antes de conhecer a língua e os caracteres com os quais está escrito. Está escrito em linguagem matemática e os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas sem os quais é impossível entender as palavras; sem eles vagueamos perdidos por um obscuro labirinto." [1]

[1] No original: "*La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*"

Neste trabalho aborda-se, de uma forma leve e simplificada mas, esperamos, não demasiado superficial, um dos maiores mistérios que envolvem a matemática. Dá-se também uma contribuição para a sua solução…

Figura 1. Mais uma evidência de que o mundo está escrito em caracteres matemáticos…..

Galileu expressa desta forma a ideia de que o grande livro da Natureza é escrito por Deus em caracteres matemáticos e geométricos. As entidades matemáticas deixam assim o mundo das ideias de Platão para se tornarem os elementos que constituem a própria realidade. Correspondentemente, a matemática torna-se a linguagem que descreve a essência do cosmo. Com este instrumento o homem pode ultrapassar o aspeto qualitativo e aparentemente confuso dos fenómenos do mundo terrestre e perceber as simples regras que Deus utilizou na sua criação. Newton levou mais longe a revolução iniciada por Galileu. A sua obra *Principia* [7] e a invenção do cálculo infinitesimal deram um impulso fundamental ao programa de Galileu de desvendar os segredos da criação divina através da matematização da ciência. Com a contribuição de outro gigante do pensamento científico, Descartes, que também acreditava num "Deus matemático", a matemática tornou-se a rainha das ciências...

No século XIX, com a descoberta (ou deveríamos escrever "com a invenção"?) das geometrias não euclidianas por Gauss, Bolyai e Lobachevsky e com o desenvolvimento da teoria das funções de variável complexa por Cauchy, o ponto de vista naturalista sofreu um duro golpe e entrou em crise. A existência de objetos e de mundos matemáticos perfeitamente coerentes do ponto de vista lógico mas sem correspondência com o mundo natural (pelo menos, de acordo com os conhecimentos da época) levou ao aparecimento de uma posição oposta à anterior, designada por "formalismo": a matemática é vista como uma criação da mente humana, livre e independente de qualquer ligação, física ou metafísica, com o mundo exterior, um jogo onde a natureza das entidades consideradas não interessa, sendo apenas importante o relacionamento lógico entre elas e a estrutura lógico-dedutiva, as regras do jogo, por assim dizer. Este ponto de vista é bem ilustrado pela célebre frase do famoso matemático Hilbert: "Se em vez de ponto, reta, plano, disséssemos cadeira, mesa e caneca de cerveja, a geometria ficaria inalterada."

Como é que se colocam os matemáticos e os cientistas de hoje em relação à natureza dos objetos matemáticos e à sua ligação com o mundo físico?

Podemos dizer que ainda há apoiantes quer do platonismo quer do formalismo, com uma panóplia de posições intermédias. Na frente dos platonistas, vale a pena recordar o grande matemático do século XX Godfrey Harold Hardy, que no seu livro *A Mathematician's Apology* ([5] é a sua tradução portuguesa), escreve:

''I believe that mathematical reality lies outside us, that our function is to discover or observe it, and that the theorems that we prove, and which we describe grandiloquently as our `creations', are simply our notes of our observations.''

Alain Connes, matemático galardoado com a medalha Fields (o equivalente ao Prémio Nobel na matemática) em 1982, também acredita que a matemática tem uma realidade ''incontestável como a realidade física" [2] representada por objetos como circunferências ou números inteiros, e que é independente da experiência da mente humana.

Numa posição naturalista, mas sem o enquadramento metafísico, encontramos o cosmólogo Max Tegmark [8] que, mesmo rejeitando a existência de um mundo de entes matemáticos separado do mundo físico, acredita que haja um *isomorfismo* entre a matemática e a Natureza. Mais precisamente, Tegmark assume a existência de uma realidade física independente dos seres humanos (hipótese denominada por ERH, External Reality Hypothesis) e que a estrutura desta realidade é matemática (hipótese MUH, Mathematical Universe Hypothesis).

É, no fundo, a visão de Galileu, mas sem assumir a existência de Deus.

Uma visão completamente diferente é defendida por Sir Michael Atiyah, medalha Fields em 1966 e um dos maiores matemáticos do século XX. De acordo com Sir Atiyah [1], a matemática é uma linguagem que evoluiu a partir da experiência humana, e os conceitos matemáticos foram *criados* pelo homem com base na sua interação com o mundo físico. Só posteriormente são investigadas e descobertas as conexões entre eles.

Uma elaboração deste ponto de vista encontra-se em [4], onde Enrico Giusti, analisando as definições dadas nos *Elementos* de Euclides dos entes geométricos elementares, como as de reta e de circunferência[2], conclui que estas representam a abstração não de objetos reais, mas sim de processos ligados a práticas e técnicas dos agrimensores. De facto, lendo estas definições, é difícil não encontrar uma forte correspondência com a utilização de cordas para traçar segmentos de reta e circunferências no terreno. No primeiro caso, estende-se uma corda entre duas estacas fixas, no segundo, uma das extremidades da corda tensa roda em torno da outra, ligada a uma estaca fixa. Quanto à origem de objetos matemáticos mais sofisticados, como por exemplo os grupos, Giusti considera que estes aparecem inicialmente de forma não muito precisa, como instrumentos de investigação e como métodos demonstrativos, cristalizando-se e ganhando vida apenas num segundo tempo como novos objetos matemáticos (que se tornam, por sua vez, objeto de estudo.)

Em qualquer caso, Atiyah Giusti e Mario Livio em [6] (e, diga-se de passagem, também o autor deste artigo) concordam com o facto de que os objetos matemáticos são quer *inventados* quer *descobertos*. Inventados no momento da sua introdução no mundo matemático, ou por abstração ou como instrumentos demonstrativos. Descobertos quando são objeto de investigação, quando as suas propriedades são reveladas à luz de novos teoremas.

Mas, afinal, como é que se explica a não razoável eficácia da matemática nas ciências da natureza?

Já vimos que para os naturalistas essa eficácia deve-se ao facto de o mundo físico ser intrinsecamente matemático.

Na outra frente, encontramos várias hipóteses, diferentes e que se complementam, que pretendem explicar, pelo menos parcialmente, o sucesso da matemática na descrição do nosso universo. Por exemplo, como já foi referido acima, para Sir Michael Atiyah [1], a matemática é uma mera linguagem. Mas esta linguagem foi desenvolvida pelo cérebro humano, órgão que evoluiu para fazer frente aos desafios da realidade física, e logo não deveria ser assim tão surpreendente que ela esteja adequada a esse objetivo.

[2] Na tradução portuguesa dos *Elementos* de Euclides, feita em 1774 por João Chrysostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos e Sá, e publicada pela Universidade de Coimbra em 1855, as definições de reta e circunferência são as seguintes: **IV.** "*Linha recta é aquella, que está posta egualmente entre as suas extremidades.*"; **XV.** "*Circulo é uma figura plana, fechada por uma só linha, a qual se chama circumferencia: de maneira que todos as linhas rectas, que de um certo ponto existente no meio da figura, se conduzem para a circumferencia, são eguaes entre si.*"

Em parte, como defendido em [6], os sucessos da rainha das ciências poderão dever-se à seleção operada pelo homem dos instrumentos matemáticos com base na sua capacidade de prever de forma correta os resultados de experiências e de observações importantes (pense-se, por exemplo, no desenvolvimento dos números inteiros e das suas propriedades para enfrentar problemas de contagem). Para além disso Mario Livio sugere que os próprios problemas nos quais trabalham poderão ter sido escolhidos pelos cientistas de forma a poderem ser enfrentados do ponto de vista matemático, e que poderá haver mesmo parte da realidade que não consegue enquadrar-se em nenhuma teoria matemática.

Mas estas explicações, que foram apenas acenadas neste trabalho e que, esperamos, o leitor queira aprofundar utilizando a bibliografia aconselhada, poderão não convencer todos.

Deixamos então a nossa contribuição para a solução do mistério que envolve a linguagem matemática no *matematicartoon* abaixo…

AGRADECIMENTOS

O *cartoon* reflete a profunda influência que teve a leitura dos livros de *The Far Side Gallery*, do cartoonista americano Gary Larson. Portanto, se o *cartoon* acima tem alguma piada, o mérito é só parcialmente meu (mas se não tiver, naturalmente, a culpa é toda minha).

BIBLIOGRAFIA

[1] Atiyah M., "Review of Conversations on Mind, Matter and Mathematics by Jean-Pierre Changeux and Alain Connes", *Times Higher Education* Supplement, 1995.

[2] Changeux, J.-P. e Connes, A., *Matière à Pensée*, O. Jacob, Paris, 1989.

[3] *Galilei GIl Saggiatore*, Roma, 1623, ou *Opere di Galileo Galilei*, UTET, Torino, 1980, vol. I.

[4] Giusti E., *Ipotesi sulla Natura degli Oggetti Matematici*, Bollati Boringhieri,1999.

[5] Hardy G. H., *Apologia de um Matemático*, Gradiva, 2007.

[6] Livio M., *Is God a Mathematician?*, Simon&Schuster, 2009.

[7] Newton I., *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

[8] Tegmark M., "The Mathematical Universe", *Founds. Phys*, 2007, 116.

[9] Wigner E. P., "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, n. 1, 1960.

SOBRE O AUTOR

Alessandro Margheri licenciou-se em Matemática pela Facoltá di Scienze dell'Universitá degli Studi di Firenze (Itália) em 1988. Desde o ano 2000 é professor auxiliar do DM da FCUL. A sua área de especialização é a de Equações Diferenciais Ordinárias.


MANUEL SILVA
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

PEDRO J. FREITAS
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

A **ESTRUTURA** DOS **NÚMEROS PRIMOS**

It is evident that the primes are randomly distributed but, unfortunately, we don't know what 'random' means. R. C. Vaughan (1990)
É evidente que os primos se distribuem de forma aleatória, mas infelizmente não sabemos o que é que "aleatório" significa.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Hoje voltamos a falar sobre os números primos. O seu estudo interessa aos matemáticos como objeto em si, mas também porque na tentativa de os compreender têm também surgido novas e fecundas teorias.

Historicamente, o primeiro resultado conhecido sobre a estrutura do conjunto dos números primos aparece nos *Elementos* de Euclides (300 a.C.) e diz-nos que estes nunca acabam, i.e., existem infinitos números primos. Euclides demonstrou ainda que todo o número natural admite uma decomposição única como produto de primos. Por exemplo, $2013 = 3 \times 11 \times 61$, não existindo um outro produto de números primos cujo resultado seja 2013. Podemos assim dizer que os primos são os blocos a partir dos quais todos os números podem ser construídos.

Foi preciso esperar cerca de 2000 anos para que um novo resultado importante acerca da distribuicão dos números primos fosse conhecido.

Teorema 1 (Dirichlet, 1837). *Dados inteiros a e b primos entre si, existem infinitos primos na progressão aritmética*

$$\{an + b : n \in \mathbb{N}\}.$$

Assim, por exemplo, existem infinitos primos p tais que $p = 3n + 1$, ou seja, quando divididos por 3 deixam resto 1. Existem também infinitos primos cujo resto da divisão por 3 dá 2. Entre os 3 restos possíveis na divisão por 3 (0, 1 e 2), podemos mostrar que a probabilidade de o resto dar 1 é $1/2$ e a probabilidade de o resto dar 2 é também $1/2$.

Gauss (1777-1855) conjeturou um resultado estatístico sobre a distribuição dos primos: a densidade dos números primos no intervalo $[0, x]$ deveria ser assimptoticamente $\frac{x}{\log x}$. Este resultado foi demonstrado por Hadamard e La Vallée-Poussin (1896) usando métodos analíticos (variável complexa), e mais tarde de modo *elementar* por Selberg e Erdös (1946). A importância de uma demonstração elementar, no sentido de mais direta, é que esta traz consigo uma compreensão mais profunda.

PRIMOS AO ACASO

Os especialistas em teoria dos números acreditam que os números primos se comportam de modo aleatório. Obviamente que não podemos esperar que algures na sequência dos primos apareça um número par maior do que 2. O teorema de Dirichlet referido acima diz-nos que não havendo nenhuma obstrução óbvia tal como esta, todas as progressões $\{an + b : n \in \mathbb{N}\}$ contêm infinitos números primos, sendo a sua densidade na verdade a esperada para uma sequência aleatória com a mesma densidade dos primos. Podemos dizer que existem propriedades como a de ser um 'número par' que são incompatíveis com ser primo. Por outro lado, muitas outras propriedades naturais são satisfeitas pelos primos como se estes tivessem sido escolhidos ao acaso, respeitando a densidade notada por Gauss.

Será por isso de alguma forma razoável esperar que na sequência dos números primos surjam todo o tipo de estruturas que possamos imaginar. E no entanto, muito poucos resultados sobre padrões de números primos são conhecidos. Não faltando conjeturas plausíveis para desafiar os matemáticos mais corajosos.

Sabemos, por exemplo, que existe necessariamente um número primo em qualquer intervalo $[n, 2n]$ onde n é um número natural. Este resultado foi demonstrado pelo matemático Chebyshev em 1852. Mas não sabemos, por exemplo, se existem infinitos primos da forma $n^2 + 1$. Podemos formular questões análogas para qualquer outro polinómio irredutível. Outra questão do mesmo tipo que permanece em aberto é a de saber se existem infinitos pares de primos (pares de Sophie Germain) da forma $(n, 2n + 1)$, como por exemplo: 2 e 5; 3 e 7; 5 e 11; 11 e 23; 23 e 47; 29 e 59; 41 e 83.

Não é fácil decidir *a priori* quais as questões matemáticas mais naturais ou fecundas, e por isso dignas de maior atenção. Uma dificuldade do mesmo tipo encontramos nós próprios na escolha que precisamos constantemente de fazer das nossas prioridades. Qual a importância, por exemplo, de saber se existem ou não infinitos pares de primos que distam duas unidades p, $p + 2$ (primos gémeos)? Alguns matemáticos chegaram mesmo a dizer com certa maldade que os primos serviam para multiplicar e não para somar. A questão dos primos gémeos seria por isso uma questão artificial e desprovida de interesse. Os resultados recentes obtidos na direção da conjetura dos primos gémeos permitem-nos perceber que se trata na verdade de uma questão natural e importante.

PRIMOS E BEM PRÓXIMOS

Em abril 2013, Yitang Zhang demonstrou que existem infinitos pares de primos que distam no máximo uma dada constante fixa L. A conjetura dos primos gémeos seria equivalente a reduzir o valor para $L = 2$. O valor obtido por Zhang foi $L = 70\,000\,000$. Para tal, Zhang obteve uma nova estimativa para o número de primos em progressões aritméticas com poucos elementos. Em novembro de 2013, motivado pelo surpreendente resultado de Zhang, James Maynard reduziu o valor de L para $L = 600$. Maynard generalizou ainda o resultado de Zhang para k-tuplos de primos. Denotaremos por $p_1, p_2, \cdots$ a sequência dos números primos.

Teorema 2. *Dado* $m \in \mathbb{N}$, *tem-se*

$$\liminf_n (p_{n+m} - p_n) \ll m^3 e^{4m}.$$

Este resultado diz-nos, por exemplo, que existem infinitos intervalos de comprimento fixo $C = C(k)$ (constante depende apenas de k) contendo, pelo menos, k primos. Isto significa que podemos não só encontrar infinitos pares de primos relativamente próximos (distância não superior a 600), como também que existem k-tuplos de primos não muitos afastados uns dos outros. Os argumentos de Maynard têm ainda a vantagem de ser mais simples, por não usarem resultados da distribuição dos primos em progressão aritmética nem o teorema de Bombieri-Vinogradov, por exemplo.

James Maynard obteve recentemente o seu doutoramento em Oxford (2013). O resultado obtido, ainda mais numa fase inicial da carreira científica, foi surpreendente para os especialistas na área.

O teorema de Maynard foi obtido independentemente pelo omnipresente Terence Tao, usando o mesmo tipo de argumentos. Este fenómeno de obtenção simultânea de progressos científicos é relativamente comum em matemática. De alguma forma, cada momento histórico está preparado para atacar certo tipo de problemas. O desenvolvimento da Física no ínicio do século XX criou condições para o aparecimento de um Einstein.

Foram já obtidos alguns resultados novos como consequência do trabalho de Maynard. Granville mostrou por exemplo que, dados dois inteiros positivos a e b primos entre si e $m > 1$, existem m primos consecutivos $p_n, p_{n+1}, \cdots, p_{n+m-1}$ congruentes com a módulo m (os restos da divisão destes primos quando divididos por b são todos iguais a a). Segundo Granville é também possível demonstrar uma antiga conjetura de Erdös e Turán relacionada com a distância entre dois primos consecutivos $d_n = p_{n+1} - p_n$. Este novo resultado de estrutura para os primos diz-nos que existem sequências crescentes com um número arbitrário de elementos $d_n < d_{n+1} < \cdots < d_{n+m}$, e também sequências decrescentes $d_n > d_{n+1} > \cdots > d_{n+m}$, ou seja, k-tuplos de primos progressivamente mais próximos e outros progressivamente mais afastados.

Podemos tentar adivinhar qual será o próximo resultado obtido sobre a estrutura dos números primos. Um candidato plausível pode ser uma conjetura formulada por Dickson em 1904, a qual afirma que dados certos conjuntos finitos $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \subset \mathbb{N}$ ditos *admissíveis* existem infinitos valores de n tais que $n + a_1, n + a_2, \cdots, n + a_k$ são todos primos.

Em matemática, e em especial na teoria dos números, quando algum problema importante é resolvido, quase sempre a sua resolução nos sugere novas questões cuja resposta nos escapa. Não parece fazer sentido imaginar um matemático no futuro possuidor de uma *teoria final* para os números primos, capaz de responder a todas as questões que lhe fossem propostas. Os primos são e serão sempre uma fonte inesgotável com novos e importantes desafios. Se fosse possível viajar no tempo e fazer uma pergunta ao matemático futuro (no ano 3000, por exemplo), em vez de lhe perguntar como se demonstra a conjetura dos primos gémeos (fácil para ele certamente), melhor seria perguntar quais eram as grandes questões em aberto do seu tempo relacionadas com os números primos.

REFERÊNCIAS

[1] D. A. Goldston, J. Pintz, and C. Y. Yildirim. "Primes in tuples. I." *Ann. of Math.* (2), 170(2), 819–862, 2009.

[2] J. Maynard, "Small gaps between primes". (Preprint) arXiv:1311.4600, 23pp., 2013.

[3] Polymath, D. H. J. "A new bound for gaps between primes". (Preprint)

[4] Y. Zhang, "Bounded gaps between primes". Aceite para publicação em *Ann. of Math.*

[5] Erica Klarreich, "Together and alone, closing the prime gap", *Quanta Magazine*. Diponível online em *www.simonsfoundation.org/quanta/20131119-together-and-alone-closing-the--prime-gap*

Capicuas

Joaquim Eurico Nogueira

Universidade Nova de Lisboa

jen@fct.unl.pt

Que haverá de mais banal do que uma capicua? Será que 1991 tem algo de especial? Ou 2112? À partida, nada! Mas isso é sem contar com a enorme criatividade dos matemáticos, que em tudo conseguem encontrar problemas interessantes! A conjectura das capicuas, referida no texto, ilustra bem esta situação. Formulada há 75 anos, aguarda ainda resolução, a qual, seguramente, demorará muitos anos a chegar!

As *capicuas*[1] (palavra com origem catalã, onde "*cap i cua*" significa "cabeça e cauda") são números cuja disposição dos algarismos é simétrica (ou seja, lidos da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita são iguais). Não é difícil dar exemplos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 e 99

são todos os que existem entre 1 e 100. Não parece existir nenhuma fórmula simples que gere sequencialmente todas as capicuas existentes, muito embora se note que muitas surgem regularmente espaçadas; pode, no entanto, mostrar-se que, dada uma base n, de entre os números que possuem k algarismos, $n^{(k-2)/2} \times (n-1)$ são capicuas, se k for par, e $n^{(k-1)/2} \times (n-1)$, se k for ímpar.

No caso concreto da base 10, verifica-se então que existem 9 capicuas com um algarismo {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e outras 9 com dois {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}; existem $90 = 10 \times 9$ capicuas com três e quatro algarismos, $900 = 100 \times 9$ capicuas com cinco e seis algarismos, etc.

Existe uma curiosa conjectura, a respeito destes números, à qual Martin Gardner se refere no seu livro *Puzzles From Other Worlds* por meio de uma pequena e interessante história, que seguidamente se reproduz:

No decorrer da longa viagem através da Via Láctea o computador VOZ da nave espacial Bagel estava a sentir-se aborrecido. Para o entreter o comandante da nave, o coronel Ronald Couth, propôs-lhe a seguinte questão:

– Existe um problema que ainda nunca foi resolvido e acerca do qual ainda muito pouco se sabe. Chama-se a conjectura das capicuas.

– O quê? – pergunta Gigo, o seu imediato.

– Ela existe desde os anos 30 do século XX[2] *, e diz que se se começar com um qualquer número, se invertermos a ordem dos seus algarismos a fim de obtermos um outro e somarmos os dois assim obtidos, após um número finito de aplicações sucessivas deste processo chegar-se-á sempre a uma capicua. É claro que se se partir de uma capicua não é preciso fazer contas nenhumas. Vamos experimentar com o número do ano em que estamos: 2058.*

Ronald Couth principiou a fazer cálculos e após sete aplicações sucessivas do processo chegou à capicua 56265.

– Isto funciona sempre?

– Aí é que está o cerne da questão - responde o comandante - ninguém sabe. Se se começar com um número assimétrico de dois algarismos cuja soma for menor do que 10 ou então 11 obtém-se uma capicua aplicando o processo uma única vez. Se a soma for 10, 12 ou 13 é necessário aplicá-lo duas vezes. Para as somas 14 e 15 o número de aplicações é 3 e 4 respectivamente. E se a soma for 16 repete-se o processo 6 vezes.

– E se for 17? – pergunta o imediato.

– O 17 é que é o problema. Só dois números de dois algarismos têm 17 como soma dos seus algarismos: o 89 e o 98. Com qualquer um deles é necessário aplicar 24 vezes o processo para se chegar a uma capicua, que é o 8813200023188.

Ao ser-lhe proposto este jogo, o computador ficou encantado e principiou, de imediato, a verificar todos os inteiros por ordem crescente. Todos eles forneciam capicuas até que chegou ao número 196. Mas com este algo estava mal... Após alguns minutos de cálculos e milhares de operações, não havia ainda capicua. Passaram algumas horas e vários biliões de cálculos e a capicua continuava sem aparecer.

- Eu poderia repetir este processo alguns biliões de vezes - disse VOZ - mas acho que seria pura perda de tempo. Já fiz correr sofisticados algoritmos probabilísticos e as possibilidades de vir a encontrar uma capicua desta maneira para este número são praticamente nulas. Vou tentar escrever um programa para testar se a conjectura é ou não falsa.

---

[1] Por vezes também são designadas de capicuas as palavras cuja disposição das letras é simétrica, como: anona, sopapos, mexem, marram, salas, socos, seres, matam, ovo, rapar, rasar… Por motivos óbvios, neste artigo restringimo-nos apenas aos números.

[2] Foi D. H. Lehmer (1905-1991) o primeiro a formular a conjectura, em 1938, num artigo publicado na revista belga *Sphinx*. Um ano depois, na mesma revista, D. C. Duncan mostrou que a conjectura era falsa em bases que sejam potências de 2. Para mais detalhes consultar [4].

Não sabemos como é que a história acabou. Afinal ela passou-se no futuro...

Investigações feitas por vários matemáticos parecem indicar, embora não de forma conclusiva, que a conjectura é falsa. A aplicação deste processo a todos os números inferiores a 10^5 mostra que a percentagem daqueles que originam uma capicua em menos de 10.000 iterações tende a diminuir, e isto de forma regular.

São as seguintes as percentagens de naturais que, nos intervalos considerados, e em menos de 10.000 iterações do referido processo, convergem para uma capicua:

$1 \leq n \leq 9$	$\rightarrow 100\%$
$10 \leq n \leq 99$	$\rightarrow 100\%$
$100 \leq n \leq 999$	$\rightarrow 98,6\%$
$1000 \leq n \leq 9999$	$\rightarrow 97,4\%$
$10000 \leq n \leq 99999$	$\rightarrow 93,5\%$

Dentre os números que vão de 100 a 10.000 há 249, que se agrupam em cinco sequências distintas (cada elemento de uma sequência é obtido do anterior por aplicação do algoritmo atrás descrito), e que parecem não convergir para nenhuma capicua; dentre aqueles que vão de 10.000 a 100.000 há 5.842 com o mesmo comportamento, e que se agrupam em 69 sequências distintas. Estes números integrantes de sequências que não parecem convergir para nenhuma capicua são habitualmente designados por *Números Lychrel*, termo criado em 2002 pelo matemático Wade Van Landingham, que os estudou aprofundadamente, baseado nas letras do nome da sua namorada, Cheryl; por sua vez, o conjunto formado pelos primeiros elementos destas sequências (que, como é óbvio, é um subconjunto dos Lychrel) é designado, simplesmente, por *geradores* (assinale-se que estas notações não são consensuais pois alguns puristas preferem atribuir a designação de números Lychrel apenas aos geradores). Os números Lychrel inferiores a 2000 são:

196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986, 1495, 1497,1585, 1587, 1675, 1677, 1765, 1767, 1855, 1857, 1945, 1947, 1997.

Por sua vez, a sequência gerada pelo 196 começa assim

196, 887, 1675, 7436, 13783, 52514, 94039, 187088, 1067869, 10755470, ... ;

em finais de 2012 já haviam sido calculadas 1000 milhões de iterações, e já havia sido alcançado um número com quase 414 milhões de algarismos... e ainda sem se conseguir alcançar uma capicua!

As figuras acima mostram exemplos de capicuas no quotidiano.

Outro aspecto curioso é o facto de, até 10.000, de entre os números que de facto convergem, não haver nenhum que necessite de mais de 24 passos para alcançar uma capicua, sendo este valor atingido pelos números 89 e 98. Até 100.000, o número que mais iterações necessita é o 10.911: após 55 aplicações deste método, finalmente surge a capicua

4.668.731.596.684.224.866.951.378.664.

O mais recente recorde de que tenho conhecimento (datado de 28 de Março de 2007) pertence ao número com 20 algarismos 10.200.000.000.065.287.900 que *gera* uma capicua após 257 iterações!

Repare-se ainda que alguns dos números que, usando este método iterativo não originam capicuas, falham esse objectivo por muito pouco. Vejam-se os exemplos (entre parênteses está referida a ordem da iteração; as falhas estão a sublinhado):

$$\begin{aligned}
196(16) &= 897\underline{1}0\underline{0}798\\
7059(6) &= 46\underline{9}2\underline{8}64\\
879(8) &= 88\underline{8}4\underline{7}88\\
10911(55) &= 466\underline{4}7315966842248669513 7\underline{8}664\\
1997(15) &= \underline{9}3\underline{5}2322\underline{6}3\underline{8}\\
8029(22) &= 279988\underline{6655}889972
\end{aligned}$$

De seguida apresenta-se o quadro completo das capicuas obtidas pelo referido processo, a partir dos números 1 a 100. Entre parênteses indica-se o número de iterações necessárias para se alcançar o resultado:

$1(0) \to 1$	$2(0) \to 2$
$3(0) \to 3$	$4(0) \to 4$
$5(0) \to 5$	$6(0) \to 6$
$7(0) \to 7$	$8(0) \to 8$
$9(0) \to 9$	$10(1) \to 11$
$11(0) \to 11$	$12(1) \to 33$
13 e $31(1) \to 44$	14 e $41(1) \to 55$
15 e $51(1) \to 66$	16 e $61(1) \to 77$
17 e $71(1) \to 88$	18 e $81(1) \to 99$
19 e $91(2) \to 121$	$20(1) \to 22$
$22(0) \to 22$	23 e $32(1) \to 55$
24 e $42(1) \to 66$	25 e $52(1) \to 77$
26 e $62(1) \to 88$	27 e $72(1) \to 99$
28 e $82(2) \to 121$	29 e $92(1) \to 121$
$30(1) \to 33$	$33(0) \to 33$
34 e $43(1) \to 77$	35 e $53(1) \to 88$
36 e $63(1) \to 99$	37 e $73(2) \to 1221$
38 e $83(1) \to 121$	39 e $93(2) \to 363$
$40(1) \to 44$	$44(0) \to 44$
45 e $54(1) \to 99$	46 e $64(2) \to 121$
47 e $74(1) \to 121$	48 e $84(2) \to 363$
49 e $94(2) \to 484$	$50(1) \to 55$
$55(0) \to 55$	56 e $65(1) \to 121$
57 e $75(2) \to 363$	58 e $85(2) \to 484$
59 e $95(3) \to 1111$	$60(1) \to 66$
$66(0) \to 66$	67 e $76(2) \to 484$
68 e $86(3) \to 1111$	69 e $96(4) \to 4884$
$70(1) \to 77$	$77(0) \to 77$
78 e $87(4) \to 4884$	79 e $97(6) \to 44044$
$80(1) \to 88$	$88(0) \to 88$
89 e $98(24) \to 8813200023188$	$90(1) \to 99$
$99(0) \to 99$	$100(1) \to 101$

Terá esta conjectura alguma hipótese de ser verdadeira? É extremamente improvável, dado que os elementos de cada uma das anteriores sequências que parecem não produzir capicuas atingem um número de algarismos cada vez maior, enquanto que, simultaneamente, a percentagem de capicuas relativamente ao total de números que possuem 3, 4, 5, ..., 10, ..., 20, ..., etc., algarismos está sempre a diminuir!...

Algo de que já se tem a certeza é que a conjectura das capicuas é falsa em base 2, pois nessa situação foi possível obter um contra-exemplo: o número 101010 (ou 42, em notação decimal). Após quatro aplicações do processo obtemos $10\underline{11}01\underline{00}$, após oito obtemos $10\underline{111}01\underline{000}$, após doze tem-se $10\underline{1111}01\underline{0000}$, isto é, cada quatro aplicações do processo iterativo aumentam as sequências sublinhadas em um elemento. O irmão[3] Alfred Brousseau provou que este facto se repete indefinidamente, o que impossibilita o aparecimento de capicuas. Basta reparar no seguinte: considerando que 1_n e 0_n significam n uns consecutivos e n zeros consecutivos, respectivamente, verifica-se, na base 2, o seguinte processo iterativo, que não produz capicuas:

$$\ldots \to 101_n010_n \to 110_{n-2}01 \to 101_n010_{n+1}$$
$$\to 110_n101_{n-1}01 \to 101_{n+1}010_{n+1} \to \ldots$$

[3] Pertencia à ordem dos irmãos das escolas cristãs, Fratres Scholarum Christianarum.

Repare-se agora que esta sequência não é um contra-exemplo isolado, pois foi possível obter mais alguns, descobertos por David Seal, noutras bases. O exemplo representado na tabela 1 generaliza-se facilmente a qualquer base que seja potência de 2 (E e F são os algarismos que, em base 16, representam os números decimais 14 e 15, e U e V são os que, em base 32, representam os decimais 30 e 31) ou então os exemplos esporádicos na tabela 2 (em base 26 tem-se a correspondência com os números decimais $A = 11$, $B = 12$, ..., $J = 20$, $K = 21$, $L= 22$, ...), para além de outros nas bases 11, 17 e 20. Como curiosidade, refira-se que os menores números que, desde a base 2 até à 19 originam sequências que *parecem não produzir capicuas* (em alguns casos isso foi provado) são os seguintes, escritos em notação decimal:

2	22	**8**	1021	**14**	361
3	100	**9**	593	**15**	447
4	255	**10**	196	**16**	413
5	708	**11**	1011	**17**	3297
6	1079	**12**	237	**18**	519
7	2656	**13**	2196	**19**	341

Uma possível generalização deste problema poderia ser a seguinte: admitindo que numa dada base existem números que, por aplicação do método atrás descrito, nunca originam capicuas, qual será a menor base onde isso já sucede? É óbvio que uma base nestas condições existe: basta tomar a base n+1 se o número em questão for n (pois nessa base n é escrito usando um único algarismo, o qual, trivialmente, é capicua); mas só excepcionalmente esta será a menor base onde tal fenómeno ocorre. Haverá algum método que nos permita determiná-la?

Para terminar este assunto refiram-se ainda as seguintes curiosidades: é verdade que a maior parte das capicuas, quando elevadas ao quadrado ou ao cubo, deixa de o ser (apesar de haver algumas excepções como $11^2 = 121$, $111^2 = 12321$ ou $111^3 = 1367631$); no entanto, se o quadrado ou o cubo de um número for uma capicua é muito provável que o número inicial também o seja. No caso dos quadrados encontram-se apesar de tudo algumas, raras, excepções, sendo as duas mais pequenas dadas pelos números 676, que admite a raiz quadrada 26 e 698896, que admite a raiz quadrada 836. No caso dos cubos parece existir apenas uma única excepção: foram analisados todos os cubos, que são capicuas, até $2,8 \times 10^{14}$ e só foi descoberta uma única raiz cúbica, que não é capicua: 2201, a raiz cubica de 10662526601.

A situação das quartas potências parece ser ainda melhor: todos os números até $2,8 \times 10^{14}$ que são raízes quartas de alguma capicua foram investigados e descobriu-se não só que também são capicuas, e mais ainda, que são sempre da forma 10000... 00001. Mais *para cima* o panorama parece, subitamente, alterar-se... É que, até agora, não foi encontrada nenhuma capicua que seja quinta, sexta, ..., décima potência, de alguma outra capicua. E por isso mesmo Gustavus J. Simmons conjecturou que todas as potências da forma X^k (onde $k \geq 5$), com X capicua (exceptuando, obviamente, o 1), não são capicuas...

Acrescente-se ainda que, abaixo de 10^{14}, há 310 quadrados que simultaneamente são capicuas e de entre estes apenas sete, ou seja 2,3%, têm um número par de algarismos. Haverá alguma razão para que isso aconteça? Quanto a cubos que simultaneamente são capicuas, há a salientar que, abaixo de $1,102 \times 10^6$, existem apenas trinta.

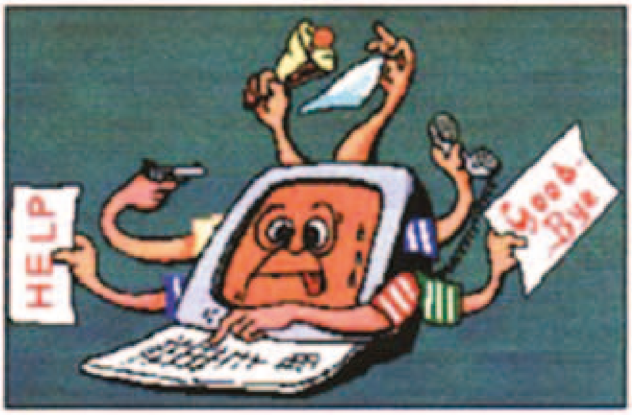
Aproveito para colocar o seguinte problema (da autoria de Mario Borelli e Cecil Mast, Indiana, E.U.A.): chamando *capicuístico* a um número natural n tal que existe uma base b, (com b menor ou igual a $n/2$) onde podemos escrevê-lo como capicua, como poderemos caracterizar este tipo de números?

Tabela 1

Base	Número	Após n iterações obtemos
2	10_n11010_n00	$n = 4 \rightarrow 101_{n+1}11010_{n+1}00$
4	103_n33230_n00	$n = 6 \rightarrow 103_{n+1}33230_{n+1}00$
8	107_n77670_n0	$n = 8 \rightarrow 107_{n+1}77670_{n+1}00$
16	$10F_nFFEF0_n00$	$n = 10 \rightarrow 10F_{n+1}FFEF0_{n+1}00$
32	$10V_nVVUV0_n00$	$n = 12 \rightarrow 10V_{n+1}VVUV0_{n+1}00$

Tabela 2

Base	Número	Após n iterações obtemos
4	$10332020002322_n2302333113230$	$n = 6 \rightarrow 10332020002322_{n+3}2302333113230$
26	$1N5ELA6CP_nP6E70_n0D59ME5N$	$n = 4 \rightarrow 1N5ELA6CP_{n+1}P6E70_n0D59ME5N$



O computador VOZ tentando provar a conjectura das capicuas.

Por exemplo, 11 não é um número capicuístico, pois

$$11_{10} = 1011_2 = 102_3 = 23_4 = 21_5$$

mas sim o 13, pois $13_{10} = 111_3$. É fácil de provar que os números da forma $b^k \pm 1$, $k \geq 2$ são capicuísticos e que todo o número natural maior ou igual a 7 não capicuístico é primo; mas o contrário já não é verdade, como vimos com o exemplo do 13, atrás referido.

Os primeiros números não capicuísticos são:

4, 6, 11,19, 53,79, 103, 137, 139, 149, 163, 179,
223, 263, 283, 293, 311, 317, 347.

O mexicano Carlos Rivera calculou a soma dos inversos de todas as capicuas (em base 10) inferiores a 10.000.000 e verificou que essa soma converge para um valor muito próximo de 3,36977. Como, para bases m cada vez maiores, os primeiros m números são forçosamente capicuas e se sabe que a soma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots$$

tende para infinito, tem de se concluir que a soma dos inversos das capicuas numa base m tende para infinito à medida que m aumenta. Mas essa soma tende para infinito muito *depressa*, muito *devagar*, tem algum comportamento especial?

São imensos os problemas suscitados pelas capicuas e que nunca se resolveram por falta de linguagem e algoritmos apropriados. Mas não se deve perder a esperança de que isso ainda venha a suceder. Pode ser que no ano 2058 o nosso amigo, o computador VOZ, descubra se estas conjecturas são verdadeiras ou falsas...

E não resisto a colocar um problema: *mostre que toda a capicua com um número par de algarismos é sempre divisível por 11*, e a transcrever uma anedota que encontrei num fórum sobre capicuas: "Sabem os senhores como é que eu aprendi o que era uma capicua? Quando ouvi pela primeira vez, garoto ainda e no Portugal a preto e branco do pré-74, uma anedota palerma que se contava na altura, a meia voz: capicua é um GNR, besta-sela-besta." Memórias[4] do passado!...

BIBLIOGRAFIA:

[1] Delahaye, Jean-Paul, "Déconcertantes conjectures", em *Pour la Science*, nº 169, págs. 92-97.

[2] Gardner, Martin, *Puzzles From Other Worlds: Fantastical Brainteasers from Isaac Asimov's Science Fiction Magazine*, Vintage, 1984.

[3] Nogueira, Joaquim Eurico, *Curiosidades numéricas*, Colecção Leituras em Matemática, editado pela SPM, Sociedade Portuguesa de Matemática, 2001.

[4] Styer, Robert, *The Palindromic conjecture and the Fibonacci sequence*, em *www41.homepage.villanova.edu/robert.styer/index.html.*

SOBRE O AUTOR

Joaquim Eurico Nogueira é autor de artigos científicos sobre grupos e recorrências lineares, e de livros sobre divulgação da matemática.

O autor escreve de acordo com a antiga ortografia.

[4] Com isto não se pense que não tenho admiração e respeito pelos militares da GNR que procuram eficazmente cumprir o seu papel na defesa da ordem e da tranquilidade públicas, da segurança e da protecção das pessoas e bens, assim como na prevenção da criminalidade. Esta anedota tem de ser entendida no contexto da época (anterior à revolução dos cravos), em que a antipatia que parte da população portuguesa tinha pelo Governo se estendia às forças policiais que se encontravam sob a sua alçada.

NUNO CARMANEIRO
Universidade de Aveiro
nfcm@ua.pt

O GRUPO **OULIPO**

O grupo OuLiPo, acrónimo de *Ouvroir de Littérature Potentielle*, que pode ser traduzido por "Oficina de Literatura Potencial", é um movimento literário constituído em França em 1960 por escritores e matemáticos que se autodefinem como "ratos que constroem o labirinto do qual se propõem sair". O grupo foi fundado pelo escritor Raymond Queneau e pelo matemático François Le Lionnais e dele fizeram parte autores importantes como Italo Calvino, Jacques Roubaud e Georges Perec, o artista multifacetado Marcel Duchamp e o matemático Claude Berge, um dos fundadores da teoria dos grafos.

O objetivo do grupo (que ainda está em atividade) é o de explorar a relação entre matemática e criação literária, recorrendo a fórmulas, jogos e restrições diversas que as obras devem respeitar. A partir dessa dificuldade autoimposta, os membros do grupo tentam criar objetos artísticos originais que incluam novos padrões e estruturas.

Algumas das restrições utilizadas pelos membros do grupo são: o "abecedário", que consiste em escrever frases em que a inicial de cada palavra segue a ordem alfabética, por exemplo: "A Brader : Cinq Danseuses En Froufrou" (ABCDEF); o "anaeróbico", em que se suprime foneticamente a letra "R"; o "método S+7", em que se substitui o substantivo que se pretende utilizar pelo sétimo que o sucede no dicionário; o "palíndromo", frases que podem ser lidas nos dois sentidos, por exemplo: "A dama admirou o rim da amada"; ou ainda a "bola de neve", poemas em que cada verso é constituído por uma única palavra e em que cada palavra deve ter mais uma letra do que a precedente.

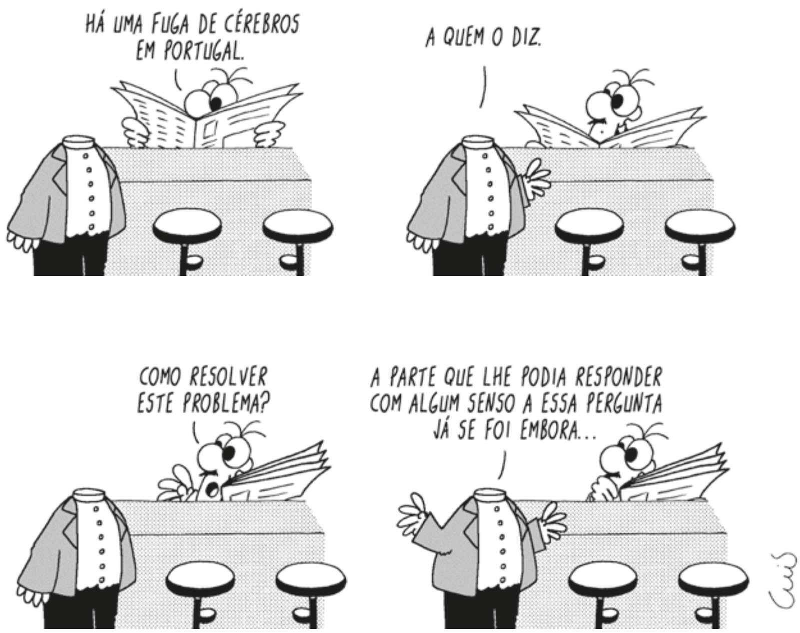
Existem diversas obras publicadas sob os preceitos do OuLiPo, deixo aqui alguns exemplos das mais conhecidas.

- *Exercícios de Estilo*, de Raymond Queneau – Uma história simples passada num autocarro é recontada 99 vezes, sempre utilizando um recurso estilístico diferente: metáforas, onomatopeias, soneto, tom exclamativo, anagrama, etc., etc.
- *O Desaparecimento*, de Georges Perec – Um romance de 300 páginas escrito sem utilizar a letra "E", umas das mais comuns do vocabulário francês. O livro parodia o género policial e o principal mistério é o desaparecimento da personagem "António Vogal".
- *Se Numa Noite de Inverno um Viajante*, de Italo Calvino – O romance conta a história de um leitor que começa por ler um livro chamado *Se Numa Noite de Inverno um Viajante*, mas que, por motivos diferentes, vai sendo desviado para livros diferentes, num abismo de narrativas dentro das narrativas.

O grupo OuLiPo conseguiu provar que não existem barreiras entre a lógica matemática e a arte literária, podendo uma servir a outra e até inspirá-la.

Consultei a página de Internet do grupo (*www.oulipo.net*) e reparei que na lista de associados não consta qualquer português. Haverá entre os matemáticos alguém com vontade de brincar à literatura?

Luis Afonso



Publicado originalmente no jornal Público, em 31/01/2014. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Adérito Araújo Universidade de Coimbra

EDITORES:
Daniel Pinto Universidade de Coimbra
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:
António Machiavelo Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Arsélio Martins** Escola Secundária José Estevão, Aveiro • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Joana Latas** HDB - Tourism Investments, Departamento de Educação, São Tomé e Príncipe • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Marcelo Viana** IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Paulus Gerdes** Instituto Superior de Tecnologias e Gestão, Boane, Moçambique & Academia Africana de Ciências • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Sílvia Dias SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

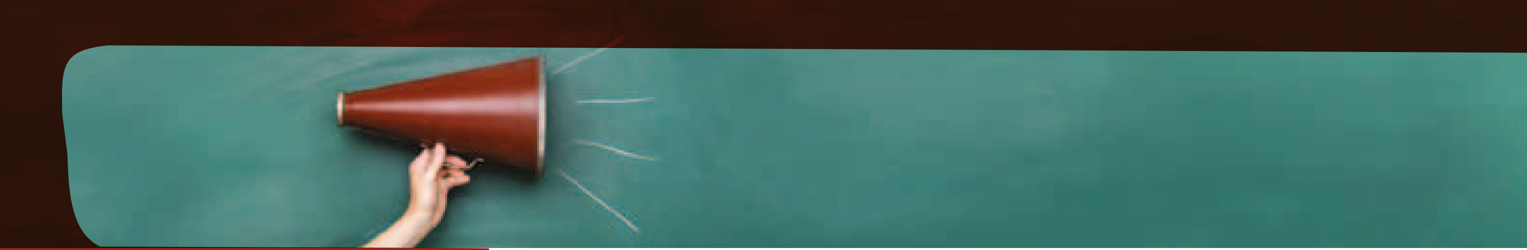
IMPRESSÃO:
Dossier – Comunicação e imagem

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM **1500 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



CONVERSA COM...

Gonçalo Morais
Instituto Superior de Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

GILBERT STRANG

O Professor Gilbert Strang nasceu em Chicago, tendo recentemente completado 79 anos de idade. Fez o doutoramento em Matemática na University of California, Los Angeles, em 1959, sob orientação do matemático suíço Paul Henrici. Fez contribuições importantes para diversas áreas da matemática pura e aplicada ao longo da sua carreira. Dentre estas, podemos destacar o *Joint Spectral Radius*, apresentado em coautoria com Gian-Carlo Rota em 1960, tendo sido mais recentemente utilizado para demonstrar propriedades fundamentais na Teoria das Wavelets. Professor no Massachusetts Institute of Technology (MIT) desde 1962, tornou-se mundialmente conhecido nos últimos anos, não só por causa dos vários livros que publicou, mas sobretudo pelos vídeos das suas aulas disponibilizados através do MIT OpenCourseWare. Continua a lecionar ativamente e publicará dentro de pouco tempo mais um livro sobre Álgebra Linear e Equações Diferenciais. É uma pessoa de contacto fácil, e esta entrevista é apenas um excerto da longa conversa que tivémos sobre o futuro da matemática e do ensino da mesma a um nível universitário.

GONÇALO Professor, gostaria de, em primeiro lugar, saber a sua perspetiva sobre a evolução do ensino da matemática desde o momento que começou a lecionar.

STRANG Bem, tenho apenas uma perspetiva pessoal e posso apenas falar sobre o ensino da matemática no MIT nos últimos 50 anos. Uma grande mudança ocorreu há dez anos, quando as minhas aulas foram gravadas e disponibilizadas no MIT OpenCourseWare. Possivelmente as pessoas que vão ler esta entrevista já contactaram de uma forma ou de outra com os materiais disponibilizados na Internet. Todos os cursos do MIT passaram a ter uma descrição *online* dos seus conteúdos e destes, à volta de 20, disponibilizaram igualmente o registo das aulas em vídeo. Neste momento o MIT está a dar o passo seguinte com o MITx, onde estão disponibilizados não só os vídeos, mas também os exames e os vários trabalhos pedidos aos alunos, pretendendo-se assim uma interatividade real.
Antes disso, tinham já ocorrido mudanças profundas. No meu caso, a mudança deu-se quando passei da matemá-

tica pura, com teoremas e demonstrações, para uma matemática útil, matemática aplicada à engenharia sobretudo, em que deixei de me focar apenas nos alunos de matemática pura e passei a ter também em atenção os alunos de engenharia. Para mim, falar nessa linguagem é um prazer enorme, discutindo mais as ideias do que as demonstrações. Como pôde observar, nas minhas aulas as demonstrações não são a parte essencial.

GONÇALO Soube que o facto de as suas aulas terem sido gravadas deve-se quase a um acaso...

STRANG Sim, é verdade! [Risos] Bem, havia um professor de física, o Professor Lewin, que tinha um grande projeto relacionado com o OpenCourseWare. Eu apenas perguntei à equipa que estava a fazer as gravações se podia ficar mais uma hora e gravar a minha aula. Ela ficou e gravou as minhas aulas como habitualmente as ensino. O que mais retiro desta experiência são as mensagens das pessoas a relatarem como foi importante para elas terem acesso a estes materiais.

GONÇALO Foi para si uma surpresa o impacto que as suas aulas tiveram?

STRANG Foi, de facto, inesperado. Os vídeos foram já visionados por mais de três milhões de pessoas. Não foi só inesperado para mim, estou certo que foi uma surpresa para o próprio MIT. Fi-lo sobretudo para servir de exemplo aos outros professores de matemática, na esperança de que fizessem algo semelhante, visto que alguns deles são muito bons professores.

GONÇALO Voltando um pouco atrás, depois de ter assistido às suas aulas, um dos aspetos que mais surpreenderam foi o de não haver um único teorema ou demonstração...

STRANG [Risos] É verdade...

GONÇALO É assim que vê o futuro?

STRANG A minha classe é formada por qualquer coisa como 200 alunos de engenharia e eles não estão interessados em demonstrações rigorosas, para eles são as ideias que são importantes. Hoje o tema da aula foi sobre determinantes. O meu objetivo é mostrar o que é um determinante e porque é que ele é importante. Essa é a forma como ensino agora, mais discutindo as ideias e apresentando exemplos do que com demonstrações.

GONÇALO Acha que um bom exemplo é melhor do que uma demonstração...

STRANG É melhor para todos nós! Nós aprendemos a viver vendo as experiências uns dos outros e não por lermos uma demonstração de que esta é a maneira correta de fazer as coisas. Todos aprendemos através de exemplos.

GONÇALO E essa atitude perante o modo como se ensina terá também consequências da forma como se faz investigação em matemática?

STRANG Eu estou ainda a meio caminho entre o matemático puro e o matemático aplicado. Ainda formulo teoremas, mas as minhas demonstrações são agora mais informais. A investigação também mudou muito devido à Internet, sendo agora possível escrever um artigo com alguém de Portugal, porque podemos comunicar de várias formas antes impensáveis. Os meus livros, por exemplo... Eu ainda escrevo tudo à mão, à maneira antiga. Depois digitalizo os meus apontamentos e eles são reenviados da Índia em LaTeX.

GONÇALO Mas quando vemos um jornal como o *Mathematics of Computation* da AMS, reparamos que os artigos publicados nos anos 60 ou 70 tinham uma inclinação mais prática, com muitos algoritmos e ideias. Hoje, quando o lemos, parece-se cada vez mais com um jornal de matemática pura...

STRANG Não sei... De facto a matemática pura foi dominante nos últimos anos e os jornais da AMS são reflexo disso, mas os jornais da SIAM têm uma perspetiva diferente. Por exemplo, a Transformada Rápida de Fourier foi simplesmente uma ideia extraordinária! É um algoritmo muito importante porque é eficiente e não porque alguém o demonstrou.

GONÇALO Quais são as suas principais referências enquanto professor e matemático?

STRANG Durante estes anos todos conheci pessoas extraordinárias que me marcaram e que se tornaram referências para mim. O primeiro foi o meu orientador do doutoramento. Depois dele, durante muitos anos, o meu principal mentor foi o Peter Lax, professor da Universidade de Nova Iorque (NYU). Tinham os seus estilos particulares, mas ambos gostavam de escrever, que é algo que eu aprecio. Os seus artigos eram sempre interessantes, nos quais as ideias estavam em primeiro lugar e o rigor das demonstrações vinha depois.

GONÇALO Mas continua a achar que uma demonstração rigorosa é parte essencial da matemática...

STRANG Sim, perceber porque é que uma afirmação é verdadeira do ponto de vista lógico é essencial, embora já não escreva as demonstrações como as escrevia antigamente, mas continuo a achar que elas são uma parte crucial.

GONÇALO Todos os dias aparecem problemas que vão buscar conceitos antigos de matemática, os reinterpretam computacionalmente e de alguma maneira os reinventam. Como é que vê esta interacção?

STRANG É verdade. Muitas vezes o cerne de um bom algoritmo é uma ideia matemática. A matemática está lá sempre. É sempre uma questão de juntar as peças, ter aquele *click*. Quer seja um teorema ou um bom algoritmo, é sempre ela que está no centro de tudo, ela é sempre a ideia.

GONÇALO Vê, portanto, um processo em que ambos os lados se vão alimentando...

STRANG Sem dúvida, porque se as ideias podem vir da matemática, é muito importante perceber que os problemas vêm de outros lados. A matemática vive de problemas, é isso que a alimenta, problemas interessantes e esses vêm da engenharia e da computação. Ultimamente também existem muitos problemas vindos da biologia. É importante manter este diálogo aberto.

GONÇALO Escreveu um pequeno artigo intitulado "Too Much Calculus". Acha que o futuro passa por dar mais ênfase à matemática discreta?

STRANG Sim! Bem, acho que a análise matemática é fantástica, mas não é tudo, e a matemática discreta tem também um papel importante. Este departamento onde nos encontramos tem muitos especialistas em combinatória e probabilidades, que são áreas realmente importantes, que têm vindo a ocupar um lugar central. E, obviamente, álgebra linear, porque é dessa forma que na realidade a computação é realizada. No fim acabamos sempre por resolver uma equação do tipo $AX = B$. Por isso achei que não estava correto que as disciplinas que os alunos têm nos seus cursos sejam análise, análise, análise... Talvez equações diferenciais, e fiquem por aí, não tendo assim oportunidade de estudar tantas outras coisas também importantes.

GONÇALO Existe um movimento que pretende estabelecer um novo padrão na forma como se ensina matemática, mostrando não só a parte analítica, mas dando também muita importância à geometria e ao cálculo numérico. Exemplo disso são os dois volumes que uma série de matemáticos escreveu em coautoria. Estou a lembrar-me do David Mumford e do Jeff Feldman, entre outros. Por outro lado, existe uma resistência em que as coisas mudem. Como é toda essa dinâmica?

STRANG Eu, como estou sempre a ensinar álgebra linear ou algum tipo de álgebra linear, aplicada ou computacional, não ensino análise matemática diretamente, sei apenas que existe um movimento de reforma, mas que só atingiu um certo ponto, e depois a inércia e o hábito tomaram conta dos acontecimentos. Eu tento fazer o mesmo em álgebra linear, porque é uma área mais pequena. A análise é um elefante à procura de lugar.

GONÇALO Durante o almoço tivemos oportunidade de falar sobre a experiência de fazer matemática antes da existência de computadores ou, pelo menos, antes da existência dos computadores pessoais. Podia descrever-nos o começo do uso dos computadores na matemática?

STRANG Bem, tenho de admitir que não sou grande especialista a escrever código para o Matlab. Tenho a honra de a minha disciplina ser patrocinada pela MathWorks, mas o meu código geralmente *crasha*. Preciso sempre de ajuda para pôr tudo a funcionar. Basicamente, foi uma nova maneira de pensar, mas no fundo é matemática. Calcular invariantes algébricos, geométricos, ou calcular uma aproximação numérica é simplesmente matemática.

GONÇALO Professor, uma última questão: planos para o futuro?

STRANG [Risos] Bem, alucinada ou estupidamente comecei a escrever um novo livro. Dei oportunidade aos meus amigos de dizerem: "Não o faças". Mas comecei-o. O título é *Differential Equations and Linear Algebra*. A sua razão de existir deve-se ao facto de, especialmente para o caso de equações lineares, que é aquilo que na maior parte dos casos ensinamos, se falar muitas vezes de equações particulares e de soluções homogéneas, e muitas vezes os alunos não percebem a relação disso com a álgebra linear. Pelo que, afinal de contas, tenho de escrever sobre análise! [Risos] Na verdade, vou agora assistir a uma aula de equações diferenciais, porque nunca tive de ensinar essa matéria. Quando vi o exame final dessa disciplina não consegui fazê-lo. Disse para mim mesmo: "Se queres escrever sobre o assunto, vais ter de ir assistir às aulas, pelo menos, uma vez". E assim fiz. Será isso que me manterá ocupado nos próximos tempos.

Gilbert Strang com Gonçalo Morais.

Gazeta de Matemática

TABELA DE PUBLICIDADE 2014

Características Técnicas da Revista

Periodicidade: Quadrimestral
Tiragem: 1900
Nº de páginas: 64
Formato: 20,2 x 26,6 cm
Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

Condições Gerais:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

Contactos

Ana Rita Ferrer
Tel.: 21 793 97 85 Tlm.: 96 184 89 66
rita.ferrer@spm.pt

Especificações Técnicas:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK
Resolução: 300 dpi (alta resolução)
Margem de corte: 4 mm

Localizações Específicas:

Verso capa: 1240€
Contracapa: 1100€
Verso contracapa: 990€

	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.

ENCONTRO NACIONAL SPM REGRESSA EM JULHO

Este ano realiza-se mais uma edição do Encontro Nacional da SPM, nos dias 14, 15 e 16 de julho. O Encontro terá lugar na Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade Nova de Lisboa, no Campus da Caparica. Do programa do Encontro fazem parte inúmeras sessões temáticas que abrangerão áreas diversificadas: Álgebra e Combinatória, Análise e Equações com Derivadas Parciais, Ensino da Matemática, Geometria e Topologia, História da Matemática, Matemática nas Ciências e Tecnologia, Otimização/Investigação Operacional, Probabilidades e Estatística e Sistemas Dinâmicos. Está também prevista uma sessão específica para estudantes de doutoramento e uma ação de formação acreditada para professores de Matemática (15 horas, 0.6 créditos). Mais informações sobre o Encontro podem ser consultadas em *http://enspm14.spm.pt*.

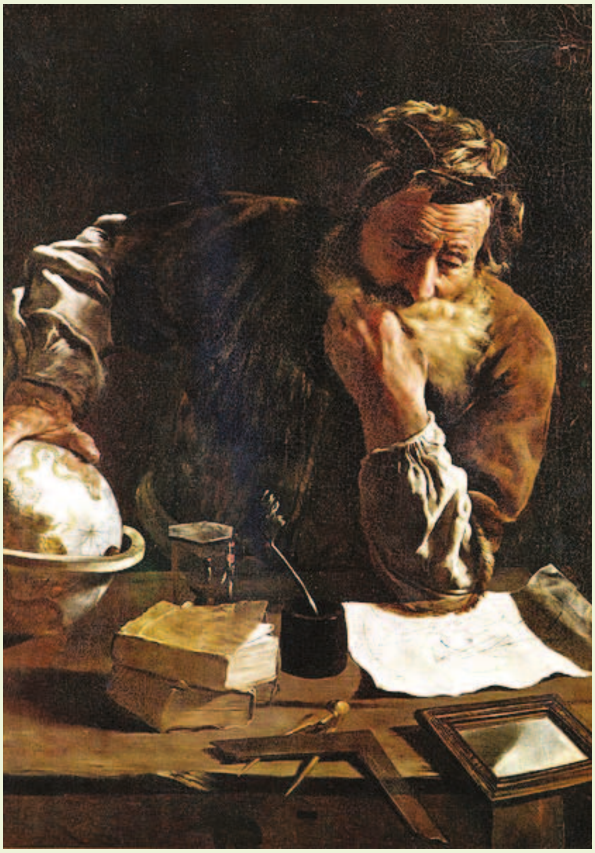
PORTO RECEBE ENCONTRO INTERNACIONAL AMS/EMS/SPM EM 2015

Todos os anos a American Mathematical Society (AMS) realiza com uma sociedade anfitriã de outro país um encontro conjunto que reúne matemáticos de ambas as comunidades científicas. Em 2015, este encontro internacional será organizado em parceria com a Sociedade Portuguesa de Matemática e com a European Mathematical Society (EMS), e terá lugar na cidade do Porto, entre os dias 10 e 13 de junho de 2015. O programa deste encontro será composto por sessões plenárias de interesse geral, bem como por sessões especiais focadas nos desenvolvimentos da investigação em diferentes áreas; ao longo destes três dias, haverá ainda uma palestra aberta ao público e uma grande variedade de sessões especiais, além de um atrativo programa social. A submissão de propostas para a organização de sessões especiais está já a decorrer e encerrará no dia 1 de junho de 2014. A página do encontro pode ser visitada em *http://aep-math2015.spm.pt/*.

5.º ENCONTRO IBÉRICO **SPM-RSME** EM AVEIRO

O encontro que pretende incentivar a colaboração entre matemáticos portugueses e espanhóis e desenvolver a investigação matemática na Península Ibérica está de volta a terras lusas. O 5.º Encontro Ibérico de Matemática realiza-se na Universidade de Aveiro, entre os dias 3 e 5 de outubro, numa organização conjunta entra a Sociedade Portuguesa de Matemáticas e a Real Sociedad Matemática Española. Os temas das sessões recairão sobre as áreas das Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos, da Geometria e Topologia, e da Matemática Industrial. O Encontro Ibérico de Matemática realizou-se pela primeira vez em fevereiro de 2007, na Fundação Calouste Gulbenkian, em Lisboa.

7.º ENCONTRO **LUSO-BRASILEIRO** DE **HISTÓRIA** DA **MATEMÁTICA,** DE **15 A 19 OUTUBRO**



Estão abertas as inscrições para o 7.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, que decorrerá em Óbidos, entre 15 e 19 de outubro. No âmbito deste encontro, serão considerados trabalhos sobre quaisquer temas de História da Matemática e suas vertentes. Os resumos (10-30 linhas), incluindo bibliografia, devem ser enviados para: Luís Saraiva (Portugal), *mmff5@ptmat.fc.ul.pt* ou para Sérgio Nobre (Brasil), *sernobre@rc.unesp.br,* até 15 de junho. As fichas de inscrição para este encontro estão disponíveis na página da SPM, em *www.spm.pt,* e podem ser enviadas para a comissão organizadora até 15 de setembro. Esta é uma iniciativa conjunta da SPM/Seminário Nacional de História da Matemática e da Sociedade Brasileira de História da Matemática.

CIDADE DOS MOLICEIROS SERÁ PALCO DA **FINAL DAS OLIMPÍADAS**

A Final Nacional das XXXII Olimpíadas Portuguesa de Matemática (OPM) realiza-se entre os dias 3 e 6 abril, no Agrupamento de Escolas Dr. Mário Sacramento, em Aveiro, onde serão esperados os 90 finalistas desta competição. Os alunos das categorias Júnior (6.º e 7.º anos), A (8.º e 9.º anos) e B (10.º, 11.º e 12.º anos) realizarão provas durante dois dias, e participarão em outras atividades lúdicas e culturais. A cerimónia de entrega de prémios, em que serão anunciados os nomes dos vencedores, realiza-se no domingo, dia 6 de abril, no Centro Cultural e de Congressos de Aveiro. As OPM são organizadas pela Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), em parceria com o Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, com o objetivo de desenvolver o conhecimento da matemática, o treino do raciocínio e o gosto pelos desafios matemáticos. A SPM conta com o apoio do Ministério da Educação e Ciência, da Ciência Viva, da Fundação Calouste Gulbenkian, do Banco Espírito Santo, da Pathena e do jornal Público. Encerrada a etapa nacional, começam no mês de julho as competições internacionais, com as Olimpíadas Internacionais de Matemática, que decorrerão entre 3 e 13 desse mês, na África do Sul. Ainda em julho, outra delegação portuguesa representará Portugal em Angola, em mais uma edição das Olimpíadas de Matemática da CPLP. Por fim, setembro será mês das Olimpíadas Ibero-americanas de Matemática, que este ano se realizam nas Honduras.

INCRIÇÕES ABERTAS PARA AS **MINI-OLIMPÍADAS**

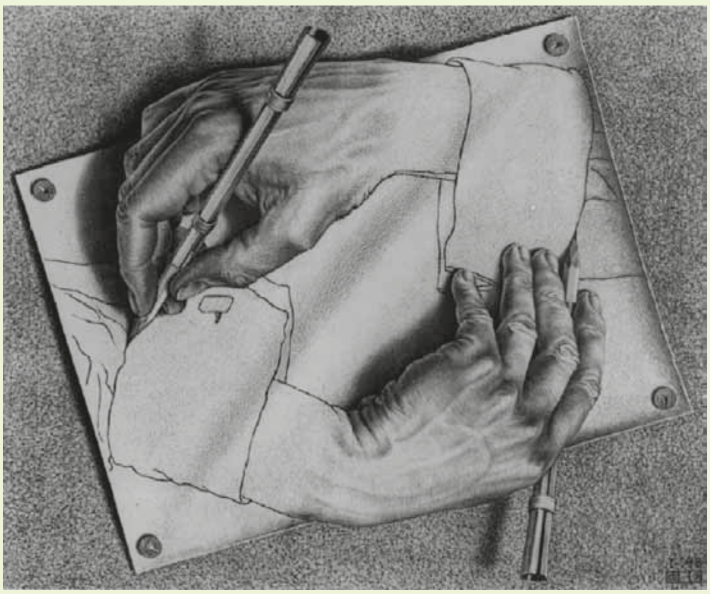
As Mini-Olimpíadas, dirigidas aos alunos dos 3º e 4º anos, realizam-se no próximo mês de maio. As inscrições terminam no dia 30 de abril. Esta competição reúne todos os anos cerca de 10 mil alunos em todo o País.

27.º ENCONTRO DO **SEMINÁRIO NACIONAL** DE **HISTÓRIA** DA **MATEMÁTICA**

A Escola Naval, no Alfeite, será novamente a anfitriã do Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática, que assinala este ano a sua 27.ª edição. Este encontro realiza-se nos dias 6 e 7 de junho. Mais informações serão disponibilizadas em breve na página da SPM.

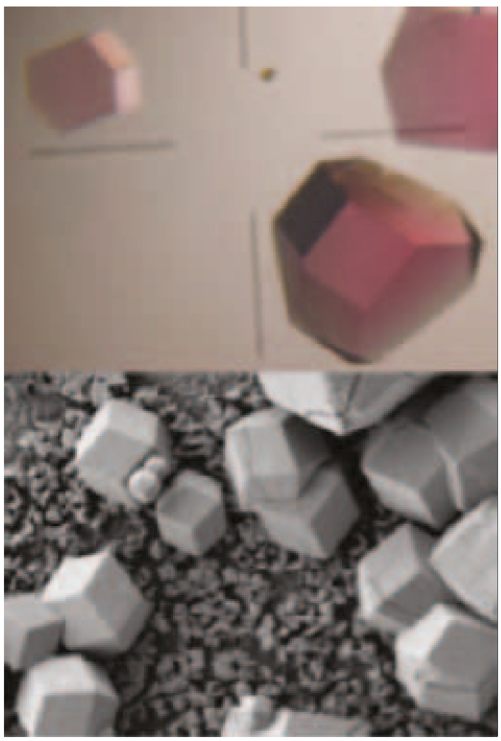
TARDES DE MATEMÁTICA EM **BRAGA, ÉVORA** E **VILA REAL**

As Tardes de Matemática continuam a animar diversas cidades de norte a sul do País. Durante os próximos meses será possível assistir a estas palestras em Braga, Vila Real e Évora. Em Braga, as Tardes de Matemática realizam-se na Biblioteca Lúcio Craveiro da Silva, onde, no dia 10 de maio, pelas 15 horas, decorrerá a sessão "M.C. Escher e o Disco de Poincaré". No mesmo dia, em Vila Real, o tema será "Terra - um desafio matemático: o posicionamento terrestre". No dia 14 de junho, a palestra será dedicada ao malabarismo, com a sessão "Matemática e malabarismo, ou a utilidade das coisas inúteis" e, no dia 28 do mesmo mês, aos jogos combinatórios, "Uma estratégia vencedora". Em Vila Real, estas sessões realizam-se às 11 horas da manhã, na Biblioteca Municipal. Mais a sul, em Évora, também no dia 10 de maio, o desafio será perceber "O que há de comum entre o fumo de um cigarro e as regiões onde nascem estrelas? - Usando a Matemática para compreender o Universo." Por fim, "Paradoxos: amor e ódio?" realiza-se no dia 7 de junho. As Tardes de Matemática em Évora têm lugar no Colégio Luís Verney, Universidade de Évora, às 15 horas.



UNIVERSIDADE NOVA COMEMORA **ANO INTERNACIONAL** DA **CRISTALOGRAFIA**

No Ano Internacional da Cristalografia, uma iniciativa com o alto patrocínio da UNESCO, a Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa promove uma série de conferência, de abril a dezembro, para assinalar este acontecimento e para promover uma melhor compreensão do papel da cristalografia no mundo que nos rodeia. A organização convida todos a darem o seu contributo àquele que consideram ser um acontecimento interdisciplinar, que envolve investigadores de campos como a bioquímica, a ciências dos materiais e a matemática. O programa do evento pode ser consultado em *http://xtal.dq.fct.unl.pt/iycr2014/Welcome.html.*



FINAL DO **CAMPEONATO NACIONAL** DE **JOGOS MATEMÁTICOS** REALIZOU-SE NO **FUNDÃO**

O Fundão foi a cidade anfitriã da final da décima edição do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM), no passado dia 14 de março. Milhares de jovens de todo o País reuniram-se no Pavilhão Municipal do Fundão para se defrontarem em jogos como o Semáforo, Gatos & Cães, Rastros, Hex, Avanço e Produto. O CNJM realiza-se desde 2004, promovido pela Associação Ludus, pela Sociedade Portuguesa de Matemática, pela Associação de Professores de Matemática e pela Agência Ciência Viva.

MATEMÁTICA E **INDÚSTRIA** EM ANÁLISE, ENTRE **5 E 9 DE MAIO**

A 101.ª edição dos European Study Groups with Industry (ESGI) decorrerá de 5 a 9 de maio, no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade Nova de Lisboa. Os ESGI destinam-se a fomentar as relações entre matemáticos e parceiros industriais usando a matemática como ferramenta para abordar problemas propostos por empresas. Este tipo de encontros teve origem no Reino Unido, em 1968, sob o nome "Oxford Study Groups with Industry". O conceito tem sido, desde então, adotado por outros países, tornando-se uma referência de sucesso na interação entre matemática e indústria na Europa. Além de serem uma fonte de novos problemas em matemática, os grupos de estudo também funcionam como um terreno privilegiado para a transferência de tecnologia matemática entre a universidade e as empresas. Este é o 9.º encontro desta série realizado em Portugal.

CONFERÊNCIA INTERNACIONAL SOBRE **VOLUMES FINITOS** DE **ALTA DEFINIÇÃO**

A primeira conferência Sharing Higher-order Advanced Know-how on Finite Volume - SHARK-FV 2014 terá lugar em Ofir, Braga, entre 28 de abril e 2 de maio. A iniciativa pretende reunir investigadores nacionais e estrangeiros para discutirem o estado de arte dos métodos de volumes finitos de alta definição, para a resolução de problemas das áreas da física e da engenharia. Além das apresentações ministradas por especialistas na área, decorrerão paralelamente *workshops* intensivos. As inscrições para a SHARK-FV 2014 terminam no dia 15 de abril.

INSCRIÇÕES ABERTAS PARA **CHAIRE POINCARÉ**

Estão abertas até 31 de maio as inscrições para o Chaire Poincaré, criado em conjunto pelo Institut Henri Poincaré e pelo Clay Mathematics Institute. Esta iniciativa pretende oferecer a jovens matemáticos excecionalmente talentosos um programa de investigação de seis meses ou um ano em qualquer campo da matemática. O Chaire Poincaré foi lançado em janeiro de 2013 com o objetivo de fomentar o desenvolvimento de projetos científicos.

CONGRESSO PARA **MULHERES MATEMÁTICAS** NO **ICM 2014**

No ano em que Seul recebe a 27.ª edição do International Congress of Women Mathematicians (ICM 2014), entre 13 e 21 de agosto, a capital sul-coreana será também palco do International Congress of Women Mathematicians 2014 (ICWM 2014). Este evento, associado ao ICM 2014, tem como objetivos reunir matemáticas de todo o mundo para apresentarem as suas contribuições para a área, promover a partilha de ideias sobre como apoiar e incentivar carreiras ativas para as mulheres nas ciências matemáticas, e proporcionar a jovens matemáticas, em particular às oriundas de países em desenvolvimento, a oportunidade de privarem com mulheres que desenvolvem o seu trabalho neste campo científico. O ICWM 2014 é uma iniciativa da Korean Women in Mathematical Sciences, com o apoio da International Mathematical Union (IMU).

Lucía Fernández-Suaréz
Direção SPM
lsuarez@adm.isel.pt

MATEMÁTICA AO VIVO, NAS REDES SOCIAIS E NA TELEVISÃO

No próximo fim de semana verifiquem se há alguma Tarde de Matemática a decorrer nas redondezas, não percam o episódio de sábado de "Isto é Matemática" e, se decidirem passar tempo frente ao computador, dediquem algum ao Clube da Matemática!

A divulgação da matemática é uma das pedras angulares da SPM, em todos os formatos possíveis: a própria *Gazeta*, as palestras das Tardes de Matemática, a página *online* do Clube de Matemática e, inclusivé, um programa de televisão, a bem-sucedida série "Isto é Matemática".

As Tardes de Matemática começaram a sua caminhada em finais dos anos 80, organizadas pela delegação Centro da SPM e por vários docentes empenhados da zona. Como o nome indica, as Tardes são palestras realizadas à tarde, numa linguagem acessível, sobre temas que ilustram a beleza e a omnipresença da matemática no mundo atual. Desde aqueles começos em Coimbra, as Tardes expandiram-se por todo o País: em 2001, a SPM começou uma colaboração com o programa Ciência Viva para organizar Tardes no Pavilhão do Conhecimento em Lisboa; em 2005, a delegação Norte iniciou uma colaboração com a FNAC para organizar Tardes no grande Porto; em 2007, a colaboração com o programa Ciência Viva estendeu-se à Fábrica de Aveiro... No ano passado, tiveram lugar Tardes de Matemática nos Açores, em Braga, em Évora, no Porto e em Vila Real e para 2014 já estão agendadas Tardes em Braga, em Coimbra, em Évora, no Porto e em Vila Real. Os temas das próximas Tardes são, como é usual, muito variados: desde a espantosa geometria hiperbólica por detrás das gravuras "Circle Limit" de M.C. Escher, até à insuspeitada e estreita relação entre a matemática e o malabarismo (*www.spm.pt/tardes_matematica_2014*).

O Clube de Matemática (*http://www.clube.spm.pt*), após uns tempos de inatividade, completou em dezembro três anos cheios de contos, curiosidades e enigmas matemáticos, histórias de matemáticos e da matemática... O Clube é basicamente um espaço de partilha *online*, com conteúdos realmente heterogéneos (problemas de matemática elementar, discussões desportivas, entrevistas "matemáticas" a personalidades...), no qual qualquer pessoa interessada na matemática encontrará boas desculpas para falar dela. De facto, desde a abertura de uma conta no Facebook em finais de 2011, o Clube tornou-se realmente numa plataforma interativa onde os colaboradores habituais, os visitantes frequentes e os curiosos esporádicos trocam ideias, polémicas e até material de trabalho para as aulas. Os leitores da *Gazeta* amantes das redes sociais podem aceder ao Clube e aos seus conteúdos no Facebook através do *link* que se encontra na página da SPM.

Finalmente, o maior e mais ambicioso projeto de divulgação da SPM de sempre, o ciclo de programas "Isto é Matemática", produzido pela Sigma3 com o apoio do COMPETE e da Agência Ciência Viva, iniciou a sua emissão na SIC Notícias em outubro de 2012. Cada episódio de "Isto é Matemática" aborda uma questão quotidiana (rodas, o Euromilhões, o Sudoku ...), explicando a matemática por detrás da questão e algumas generalizações e caminhos inusitados por onde a matemática nos leva (rodas não redondas, *donuts* perfeitos ...). O carisma do apresentador, o nosso caro Rogério Martins, a cuidadosa seleção dos tópicos e a preparação dos guiões, fizeram com que o sucesso da primeira série de 13 programas justificasse a continuação do projeto com a gravação e a emissão de mais episódios. De facto, neste momento está em emissão, aos sábados, às 20h45, a sexta e penúltima série de 13 episódios! Além do sucesso a nível de público, não podemos deixar de mencionar que este programa obteve recentemente reconhecimento internacional. Efetivamente, "Isto é Matemática" recebeu o prémio Homenagem Especial VerCiência 2013, na Mostra Internacional de Ciência na TV do Brasil, pela "excelência dos programas produzidos, apresentando tópicos da matemática de forma atraente e divertida".

Os programas das Tardes de Matemática, o *link* para o Clube de Matemática e o arquivo com os episódios emitidos até agora de "Isto é Matemática" encontram-se na página *web* da SPM: *www.spm.pt*. Não hesite em visitar a página, encontrará de certeza muita matemática divertida e interessante!

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2014

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3º esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*