

N. 0174

# Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXV | Nov. 2014 | 4,20€

## Coelhos e Lotaria

ANTÓNIO PEREIRA ROSA

Simetrias do  
Temperamento Igual

MARTA RAPOSO  
E RUI PACHECO

Comparando  
Dois Problemas  
Geométricos

TRACTOR



# 2015

INTERNATIONAL MEETING

**AMS / EMS / SPM**

american  
mathematical  
society

european  
mathematical  
society

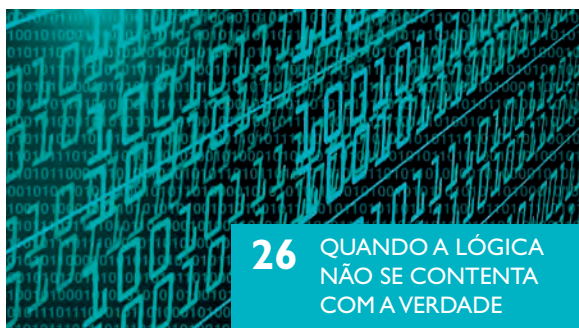
sociedade  
portuguesa de  
matemática

10 - 13 June, **Porto** - Portugal



Visite a página do Encontro em  
<http://aep-math2015.spm.pt/>



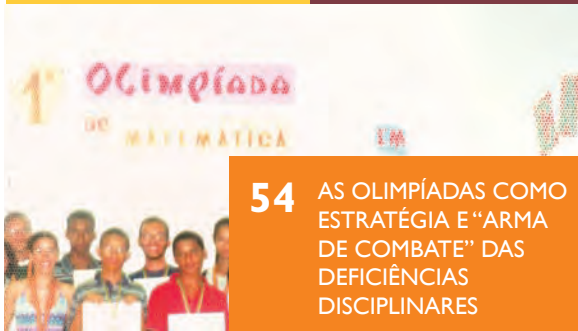


**26** QUANDO A LÓGICA  
NÃO SE CONTENTA  
COM A VERDADE



**34** AFINAL O QUE  
SÃO E COMO SE  
CALCULAM OS  
QUARTIS

**50** CONVERSA  
COM....  
Charles  
Fefferman



**54** AS OLIMPÍADAS COMO  
ESTRATÉGIA E “ARMA  
DE COMBATE” DAS  
DEFICIÊNCIAS  
DISCIPLINARES



**44** SIMETRIAS DO  
TEMPERAMENTO IGUAL

- 02 EDITORIAL** | Adérito Araújo
- 03 ATRACTOR**  
Comparando Dois Problemas Geométricos
- 08 RECREIO** | Jorge Nuno Silva  
Racio(ci)nar
- 09 CANTO DÉLFICO** | Eduardo Marques de Sá  
Cubos e Esferas, Perspetiva e Anamorfose
- 13 NA LINHA DE FRENTE** | Fabio Chalub  
Da Terceira para a Quarta Dimensão  
*artigo de capa*
- 16 COELHOS E LOTARIAS**  
António Pereira Rosa
- 24 APANHADOS NA REDE** | Óscar Felgueiras  
Quatro Quatros
- 26 QUANDO A LÓGICA NÃO SE  
CONTENTA COM A VERDADE**  
Gilda Ferreira
- 34 AFINAL O QUE SÃO E COMO  
SE CALCULAM OS QUARTIS**  
Susana Fernandes e Mónica Pinto
- 41 PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS  
SURPREENDENTES** | Manuel Silva e Pedro J. Freitas  
A Conjetura abc
- 43 BARTOON** | Luis Afonso
- 44 SIMETRIAS DO TEMPERAMENTO IGUAL**  
Marta Raposo e Rui Pacheco
- 50 CONVERSA COM ...** | Gonçalo Morais  
... Charles Fefferman
- 54 AS OLIMPÍADAS COMO ESTRATÉGIA  
E “ARMA DE COMBATE” DAS  
DEFICIÊNCIAS DISCIPLINARES**  
Natália V.K. Dias Furtado e Jeremias Dias Furtado
- 60 MATEMÁTICA E LITERATURA** | Nuno Camarinho  
Jorge Luis Borges e a Biblioteca de Babel
- 61 NOTÍCIAS**
- 63 CARTAS DA DIREÇÃO** | Fernando Pestana da Costa  
Entre Dois Dozes de Dezembro



ADÉRITO ARAÚJO  
Universidade  
de Coimbra  
alma@mat.uc.pt

## UTOPIA E ENERGIA<sup>1</sup>

Neste número da *Gazeta de Matemática*, especialmente dedicado à comunidade escolar, propomos um conjunto de temas e desafios que visam estimular a discussão e a partilha de ideias entre professores e alunos sobre temas relacionados com a matemática.

As escolas portuguesas vivem tempos difíceis. Após anos de sucessivos apertos orçamentais, o início deste ano letivo teve particularidades que o tornaram especialmente complicado. O processo de avaliação das unidades de investigação financiadas pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (ainda em curso) tem sido um motivo de forte preocupação nas universidades, onde muitos acreditam que irá comprometer o percurso de afirmação da investigação científica portuguesa no contexto internacional. Nas escolas básicas e secundárias, a forma caótica como decorreu o processo de colocação de professores criou perturbações que, propagando-se ao longo do ano letivo, impedem a estabilidade necessária para dar espaço ao debate de outras questões relevantes, nomeadamente as de natureza mais científica.

Este número da *Gazeta* foi elaborado com o objetivo de estimular a discussão matemática na comunidade escolar. Faz, por isso, todo o sentido começar por destacar o artigo “Coelhos e Lotaria”, de António Pereira Rosa, um colaborador de longa data da *Gazeta* e membro do seu conselho editorial. O autor parte de um problema que lhe surgiu num livro de preparação de exames do 12.º ano para explorar o assunto, mais geral, das lotarias. Através de uma escrita cuidada e simples, somos conduzidos num percurso que culmina num resultado que afirma que a resposta para o problema de encontrar o número total de maneiras de selecionar sequências de números não consecutivos dentre os primeiros números naturais se encontra na sucessão de Fibonacci. O convite à demonstração deste resultado pode ser um belíssimo desafio para alunos finalistas do ensino secundário.

Mas temos outras propostas, igualmente interessantes. Um exemplo disso é o artigo de Marta Raposa e Rui Pacheco “Simetrias do Temperamento Igual”, que evidencia, claramente, a

relação entre as transposições e inversões usadas por músicos e compositores e as correspondentes transformações de Möbius. Tirando partido do facto de um dos autores ter formação musical, a argumentação tem início num universo mais próximo da música, com a definição de nota musical e a discussão de assuntos relacionados com a afinação, para depois evoluir, de forma progressiva e natural, para um universo mais matemático e formal. Surpreendentemente, este artigo tem pontos em comum com o publicado na secção à responsabilidade da Associação Atractor e, em certa medida, ambos ganham em ser lidos em conjunto. Apesar de a temática ser distinta, recorrem os dois ao belíssimo argumento da inversão geométrica. O leitor menos familiarizado com esse conceito tem aqui uma excelente oportunidade de o explorar.

Os motivos de interesse deste número da *Gazeta de Matemática* não se esgotam nos dois artigos que destacamos. Escolhemos estes pois foram escritos por professores do ensino secundário (o segundo em coautoria com um professor do ensino superior) e foi a pensar nesses profissionais que elaborámos esta edição da revista. Convidamos o leitor a percorrer as 64 páginas que constituem o 174.º número da *Gazeta de Matemática* e a fazer a sua própria seleção.

P.S. - É com enorme tristeza que compartilho a notícia do falecimento de Paulus Gerdes no dia 10 de novembro de 2014, véspera do seu 62.º aniversário. O iminente professor moçambicano foi um ativo colaborador do Conselho Editorial da *Gazeta de Matemática* e a sua obra constitui uma referência obrigatória para todos quantos pretendem dedicar-se ao estudo da Etnomatemática.

<sup>1</sup>Título de um artigo de Pedro Branco, professor do 1.º ciclo do ensino básico do Externato Fernão Mendes Pinto, publicado no n.º 1149 do Jornal de Letras.

## COMPARANDO DOIS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Evocaremos aqui um célebre problema de geometria proposto por Jakob Steiner e compará-lo-emos com um outro, que é usual designar por Hexlet. Como veremos, as respostas a ambos utilizam, na demonstração, ideias e ferramentas análogas. No entanto, mesmo após o conhecimento da resposta ao primeiro e da sua justificação, a resposta ao segundo é, em geral, uma surpresa.

O *Porisma de Steiner* tem a ver com o seguinte: fixado um par de circunferências<sup>1</sup> disjuntas no plano, será sempre possível construir uma sucessão finita de  $n \geq 3$  circunferências, todas tangentes às duas iniciais, e tal que cada uma das novas seja tangente à anterior e a última seja tangente não só à anterior mas também à primeira<sup>2</sup>?

A primeira figura mostra uma escolha do par inicial em que é possível. Da segunda figura não concluímos nada imediatamente: começando pela circunferência azul-clara dessa figura, o anel não fecha, mas *a priori* poderíamos imaginar que, para uma posição diferente da circunferência inicial do anel, o novo anel já fechasse (ver figura 3). Note-se que as duas circunferências do par inicial podem ser exteriores – é o caso das figuras 4 e 5: na primeira, as do anel também são exteriores, na segunda uma das do anel envolve todas. Mas há um caso particular, o de as duas circunferências iniciais serem concêntricas (ver figuras 6, 7, 8, 9), em que po-



Figura 1



Figura 2

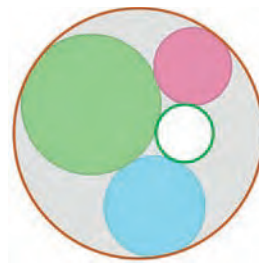


Figura 3

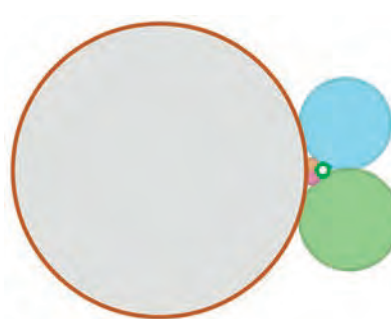


Figura 4

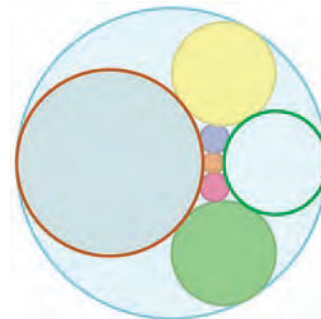


Figura 5

<sup>1</sup> Representadas com as cores castanha e verde escura nas figuras 1 a 3.

<sup>2</sup> Neste texto, estamos a supor que só os pontos de tangência estão em mais do que uma circunferência da sucessão. Em [2] existe um *applet* em que é possível construir sucessões sem esta condição: elas podem fechar ao fim de mais de uma volta.





Figura 6



Figura 7



Figura 8



Figura 9

demos claramente concluir que, se um anel fecha (respetivamente não fecha), qualquer outro anel fecha (respetivamente não fecha). E, quando as circunferências são concêntricas, é fácil concluir que “os anéis fecharem ou não” depende apenas da razão dos raios. Trigonometria elementar permite encontrar as razões correspondentes aos anéis que fecham. A tabela mostra valores aproximados das primeiras 25, obtidos usando a fórmula

$$\text{razão dos raios} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}{1 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Portanto, já temos uma resposta ao problema, tal como foi proposto: nem sempre há um anel que feche e basta escolher como contraexemplo o par de circunferências concêntricas representado nas figuras 6 e 7. O que fizemos até agora sugere outra questão interessante: haverá algum par de circunferências iniciais, em que o anel feche para certa escolha da primeira circunferência do anel e não feche para outra escolha (da primeira circunferência)? Esta é uma questão que não parece fácil de abordar. Notemos, porém, que, pelo que escrevemos anteriormente, a haver um tal par de circunferências iniciais, elas serão necessariamente não concêntricas. Seria ótimo se pudéssemos reduzir o caso geral ao caso particular das circunferências concêntricas, em que a resposta é

#### ANÉIS FECHADOS

N.º de circ.	Razão de raios
3	13.92820323
4	5.828427125
5	3.851839996
6	3
7	2.532843231
8	2.239828809
9	2.039606729
10	1.894427191
11	1.784478148
12	1.698396372
13	1.629211496
14	1.572416528
15	1.524970987
16	1.484750842
17	1.450228262
18	1.420276625
19	1.394047222
20	1.370888706
21	1.350292994
22	1.331857993
23	1.315261385
24	1.300241804
25	1.286585105

Tabela

conhecida. Como tentar? Convir-nos-ia uma transformação geométrica que enviase circunferências em circunferências e conservasse a propriedade de tangência (portanto, enviando anéis de circunferências tangentes em anéis de circunferências tangentes), mas não conservasse (necessariamente) a propriedade “ser concêntrico”. Ora, uma tal transformação existe: uma inversão<sup>3</sup>, cujo centro não pertença a nenhuma das circunferências.

Assim, por exemplo, os anéis de circunferências concêntricas representados nas figuras 10-11 e 12-13 são enviados por inversões em anéis de circunferências não concêntricas representados nas figuras correspondentes. Num caso ambos os anéis fecham; noutra ambos não fecham. Mas o que é

inesperado é que, naqueles dois exemplos de anéis de circunferências não concêntricas, tal como nos das circunferências concêntricas, o anel fechar ou não fechar não depende da posição da primeira circunferência do anel. Podemos acrescentar: aquele comportamento – “o anel fechar ou não” não depender da primeira circunferência escolhida – é não só o dos pares de circunferências concêntricas, como o de todos os pares de circunferências provindo por uma inversão de um par de circunferências concêntricas! Então, agora a questão interessante é a de saber se, dado qualquer par de circunferências disjuntas, ele poderá ser obtido por uma inversão de um par de circunferências concêntricas. Se a resposta for afirmativa, teremos concluído que o comportamento, para qualquer par de circunferências disjuntas, é o mesmo que para os pares de circunferências concêntricas: haverá pares para os quais nenhum anel fecha (é a situação genérica) e pares excepcionais<sup>4</sup> para os quais todos os anéis fecham<sup>5</sup>! Neste ponto, sugerimos aos leitores com alguma experiência em trabalhar com inversões que tentem diretamente provar que qualquer par de circunferências disjuntas provém de um par de circunferências concêntricas, o que é o mesmo que provar que dado qualquer par de circunferências disjuntas, há uma inversão que o transforma num par de circunferências concêntricas. Quem não quiser seguir a sugestão poderá encontrar no que se segue uma prova (ilustrada na figura 14) não construtiva<sup>6</sup> da existência de uma tal inversão. Note que há uma grande variedade de inversões que produzem o resultado desejado. Imporemos algumas condições suplementares que restringem as inversões a considerar.

Se  $A$  e  $B$  são os centros das duas circunferências  $a$  e  $b$ , vamos escolher uma inversão cujo centro esteja na reta  $AB$ . Poderemos ainda conseguir que envie  $b$  sobre si própria: basta-

<sup>3</sup> Recorde-se que, no plano, uma inversão relativamente a uma circunferência de centro  $C$  e raio  $r$  envia qualquer ponto  $P$  diferente de  $C$  num ponto  $P'$  tal que  $OP' = kOP$ , onde  $k = 1/r^2$ . Analogamente no espaço relativamente a uma superfície esférica de centro  $C$  e raio  $r$ .

<sup>4</sup> Cada um destes pares tem uma vizinhança na qual para nenhum outro par o anel fecha.

<sup>5</sup> É a um problema com um desfecho deste tipo que é costume chamar “porisma”.

<sup>6</sup> Uma demonstração construtiva, acompanhada por um *applet* de Geogebra, com a respetiva construção, pode ser encontrada em [1].

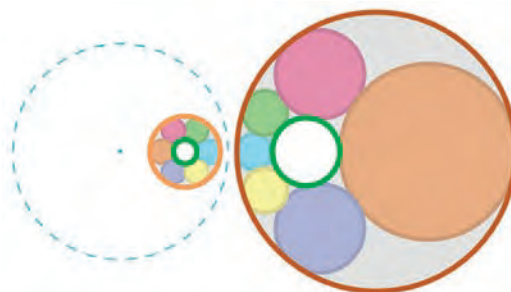


Figura 10

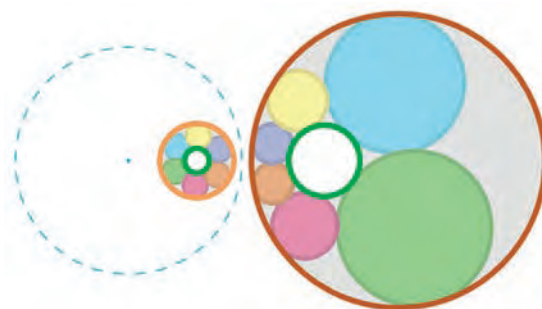


Figura 11

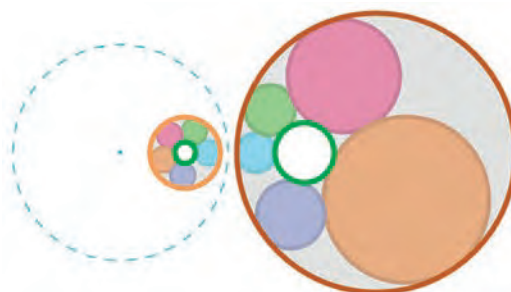


Figura 12

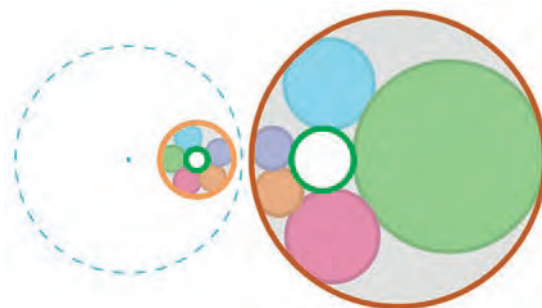


Figura 13

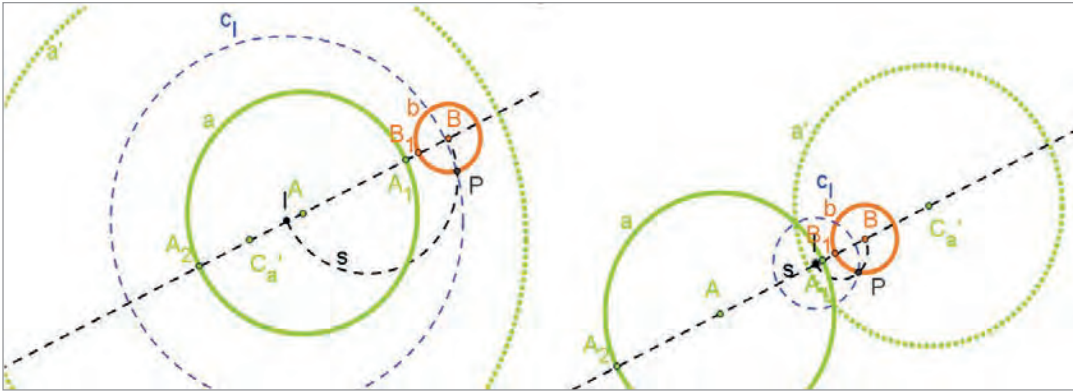


Figura 14

rá que a circunferência de inversão  $c_1$  corte  $b$  ortogonalmente. E, para tal, se  $I$  designa o ponto que queremos para centro da inversão, há simplesmente que construir a semicircunferência  $s$  de diâmetro  $IB$ : a circunferência  $c_1$  de centro  $I$ , passando pelo ponto  $P$  de interseção de  $s$  com  $b$ , corta  $b$  ortogonalmente em  $P$ . Quando  $I$  se desloca na reta, a inversa  $a'$  de  $a$ , representada a pondeado na figura, desloca-se e o seu centro  $C_{a'}$  também. Vejamos o que sucede quando  $I$  percorre o segmento  $AA_1$  (aberto à direita). Se  $I = A$ ,  $C_{a'} (=A)$  está francamente à esquerda de  $B$ ; e, quando  $I$  tende para  $A_1$ , o centro  $C_{a'}$  tende para infinito à direita de  $B$ . Como a função é definida e contínua naquele intervalo, há nele uma posição de  $I$  para a qual a inversa  $a'$  de  $a$  tem centro  $C_{a'} = B$ , isto é, essa inversão envia as duas circunferências dadas em duas circunferências  $a'$  e  $b'$  ( $=b$ ) concêntricas (com centro  $B$ ). O raciocínio funciona de modo semelhante no caso de  $b$  ser interior a  $a$ .

Resolvido o porisma de Steiner, envolvendo certos anéis de circunferências tangentes no plano, é natural pensar se não haverá problemas de índole semelhante, envolvendo anéis de superfícies esféricas no espaço euclidiano tridimensional. É neste contexto que surge o Hexlet, que, sem ser a simples transposição do problema anterior no plano, com ele apresenta algumas semelhanças. Consideremos fixadas à partida três superfícies esféricas tangentes entre si, duas a duas, em três pontos distintos. Se acrescentarmos àquelas três uma outra superfície esférica tangente a todas elas, haverá em geral<sup>7</sup>, “de cada lado” desta superfície acrescentada, uma única superfície esférica, que lhe seja tangente, bem como às outras três fixadas inicialmente. A escolha da primeira vai, pois, em geral, determinar um anel de superfícies

esféricas, em que cada uma é tangente à anterior e em que todas são tangentes às três fixadas à partida. Esse anel dir-se-á fechado ou aberto conforme a última seja ou não tangente à primeira. Nas figuras 15, 16 e 17 estão representados, respetivamente, um terno de superfícies esféricas – a vermelha contendo as outras duas, azul e verde –, as mesmas com um anel (fechado) de seis, e somente o mesmo anel. Nas figuras 18 e 19 estão representados, respetivamente, um terno de superfícies esféricas, agora exteriores duas a duas, e as mesmas com um anel com a superfície esférica amarela<sup>8</sup> envolvendo todas as outras.

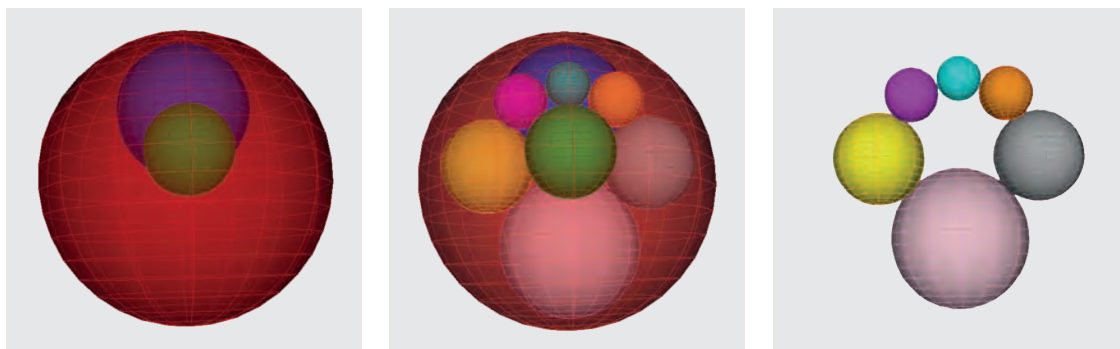
Os problemas análogos aos da situação anterior, que analisámos no plano, formulam-se agora do seguinte modo:

1. Será que há anéis que fecham e outros que não fecham?
2. “Fechar ou não” depende das posições e dos tamanhos das superfícies esféricas iniciais, mas não da posição da primeira do anel?
3. O número de superfícies esféricas de um anel que feche varia com os raios e as posições das três iniciais, mas não com a posição da primeira do anel?
4. “Não fechar” é a situação genérica e “fechar” a excepcional?

Surpreendentemente, as respostas a **todas** estas perguntas são negativas! Sugere-se que o leitor não avance sem primeiro refletir sobre o que é que esta informação permite concluir...

Tal como fizemos no caso plano, tentemos ver se, usando inversão no espaço, é possível reduzir este problema geral a um caso em que as conclusões sejam simples de tirar. Proceder assim é aqui mais imediato do que no problema precedente. Basta verificar que, tomando como centro de inversão





Figuras 15 - 17 ▶

o ponto de tangência de duas das três superfícies esféricas fixadas inicialmente, essas duas são transformadas em dois planos paralelos e a terceira é transformada numa superfície esférica  $S$  tangente aos dois planos. Deixa-se ao leitor a tarefa de refletir sobre quais serão os anéis de superfícies esféricas tangentes a  $S$  e a esses dois planos (ver figura 20 e recorrer ao *applet* de [3]). Após o que, por certo, o nome Hexlet para este problema geométrico lhe parecerá natural. Na figura 21, está representado o mesmo anel de superfícies esféricas da figura 19 (correspondente ao terno da figura 18), mas observado de outro ponto de vista.

Para estes dois belos problemas, encontrará em [1] aplicações interativas (Java, Mathematica–CDF e Geogebra) com as quais poderá manipular situações e desenvolver alguma intuição geométrica.

## REFERÊNCIAS

- [1] <http://www.atractor.pt/mat/SteinerHexlet>
- [2] <http://www.atractor.pt/mat/SteinerHexlet/apSteiner.html>
- [3] <http://www.atractor.pt/mat/SteinerHexlet/apHexlet.html>

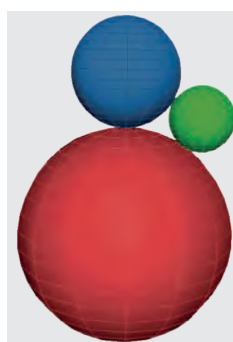


Figura 18

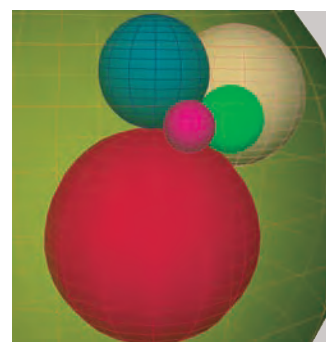


Figura 19

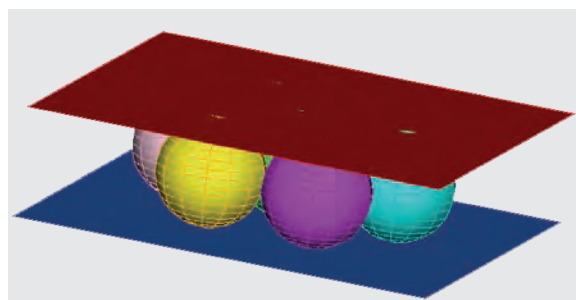


Figura 20

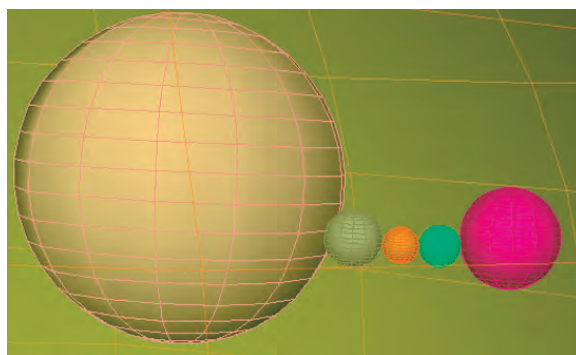


Figura 21

<sup>7</sup> Na verdade, há situações-limite em que a superfície esférica "degenera" num plano.

<sup>8</sup> Note que nas figuras 15, 16, 19 e 21 há uma superfície esférica colorida semi-transparente envolvendo as outras, pelo que as cores destas são um pouco alteradas na figura.



JORGE NUNO SILVA  
Universidade de Lisboa  
jnsilva@cal.berkeley.edu

## RACIO(CI)NAR

O esqueleto matemático de um jogo pode estar escondido sob a roupagem temática com que este se apresenta. Hoje propomos um desses casos. A teoria que permite analisar o *Racio(ci)nar* baseia-se no trabalho de Charles Bouton de 1902, mas as variantes propostas necessitam de desenvolvimentos posteriores, devidos a E.H. Moore (1910), entre outros.

**T**emos a seguinte situação de racionamento de açúcar, arroz, carvão e bacalhau. Cada uma de duas famílias dispõe de senhas de racionamento correspondentes a 15 kg de bacalhau, 20 kg de açúcar, 25 kg de arroz e 30 kg de carvão. Estas quantidades correspondem também à totalidade de bens a distribuir pelos Fulanos e pelos Cicranos.

No início, cada família lança um dado normal para determinar a quantidade de cada produto que lhe cabe à partida. Tudo o resto é colocado na zona de compra/venda.

De seguida, alternadamente, os Fulanos os Cicranos efetuam uma transação na zona apropriada, da quantidade que acharem melhor, *mas somente de um produto*. Por exemplo, os Cicranos, na sua vez, podem decidir comprar todos os sacos de carvão disponíveis, ou vender alguns dos seus sacos de arroz (desde que a zona disponha de senhas de arroz em quantidade suficiente). Podem adquirir ou vender as quantidades

que quiserem, mas não podem passar, alguma mercadoria tem de ser transacionada entre a família a que toca jogar e a zona de compra/venda.

Neste jogo ganha a família que ficar na posse de todos os bens.

Vejamos um exemplo. Após os lançamentos dos dados, os Fulanos têm 2 kg de bacalhau, 4 kg de açúcar, 2 kg de arroz e 4 kg de carvão, enquanto os Cicranos partem com 1 kg de bacalhau, 5 kg de açúcar, 5 kg de arroz e 6 kg de carvão. Na zona de transações estão, então, 12 kg de bacalhau, 13 kg de açúcar, 18 kg de arroz e 20 kg de carvão.

Suponhamos que são os Fulanos os primeiros a jogar. Será que dispõem de uma estratégia que lhes permita ganhar, isto é, açambarcar todos os géneros?

E se as regras permitissem negociar, em cada jogada, dois tipos de bem? Neste caso entende-se que cada família pode transacionar quantidades arbitrárias de dois bens, sendo obrigatório fazer, pelo menos, uma troca (de um tipo).

E se fosse possível negociar três?...



Figura 2: Os Fulanos e os Cicranos determinam as quantidades iniciais de cada um dos quatro recursos pelo lançamento de um dado.



Figura 1: Cada senha de racionamento corresponde a um tipo de produto.



EDUARDO MARQUES DE SÁ  
Universidade  
de Coimbra  
[ems@mat.uc.pt](mailto:ems@mat.uc.pt)

## CUBOS E ESFERAS, PERSPETIVA E ANAMORFOSE

A perspetiva linear levanta problemas matemáticos interessantes, uns de resolução fácil e outros não, como em tudo na vida. Neste *Canto*, exploram-se os conceitos de *pirâmide visual* e *ponto de observação* e propõem-se problemas elementares inversos do da representação pictórica: perante um quadro executado em perspetiva rigorosa, de que local ou locais do recinto de exposição devemos contemplá-lo?

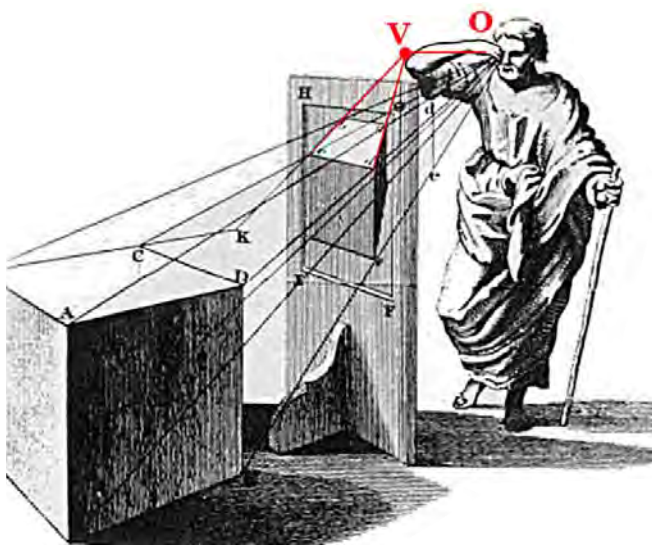


Figura 1: A pirâmide visual de Alberti.

### PIRÂMIDE VISUAL

A perspetiva linear é, no essencial, uma teoria matemática desenvolvida por artistas do Renascimento, na sua busca de métodos de representação planar tão "fiéis" quanto possível dos objetos e paisagens que nos rodeiam. O documento fundador da teoria – o tratado *De Pictura* de Leon Alberti, de 1435 – indica como motivação básica do pintor o desenho duma secção plana da *pirâmide visual* determinada pelo objeto a representar e que tem como vértice o olho<sup>1</sup> do artista. A figura 1 (do livro *New Principles of Linear Perspective*, de Brook Taylor, 1811) mostra um paralelepípedo, a respetiva pirâmide visual (com vértice O, o olho do artista) e a sua secção pelo plano da tela montada num cavalete; mostra também um ponto notável, V, chamado *centro do quadro*, que é a projeção ortogonal do olho sobre o plano da tela. O *centro do quadro* é o ponto de intersecção (dito de fuga) das retas do plano do quadro que representam retas do real tridimensional ortogonais ao plano de projeção. Os artistas do Renascimento recu-



peraram da geometria euclidiana clássica teoremas como este para utilização prática imediata na execução dos seus quadros.

A pirâmide visual é um conjunto de semirretas emergentes de  $O$ , cada uma delas dirigida a um ponto visível do objeto observado e dotada de cor adequada ao ponto a que se dirige; uma versão abstrata do feixe de luz que podemos ver sair dum projetor de diapositivos.

## PONTO DE OBSERVAÇÃO

Quando contemplamos um quadro, o nosso olho e os pontos coloridos do quadro geram uma pirâmide de contemplação; se o quadro estiver concebido de acordo com os princípios da perspectiva linear, o nosso ponto de observação deve ser tal que as duas pirâmides – a visual utilizada pelo artista e a nossa de contemplação do quadro – sejam "iguais". Mas os quadros duma exposição não costumam trazer instruções sobre o modo de observar.<sup>2</sup> Em tais casos, quem contempla e entende do assunto pode colocar o seu ponto de observação em local adequado baseado em mensagens matemáticas subtilmente escondidas na obra observada. O pintor constrói o quadro intersetando a pirâmide visual; o observador procura reconstruir a pirâmide a partir dessa interseção. Eis um exemplo matemático deste problema inverso. A figura 2 inclui dois quadrados concêntricos, o mais pequeno com  $1/9$  da área do

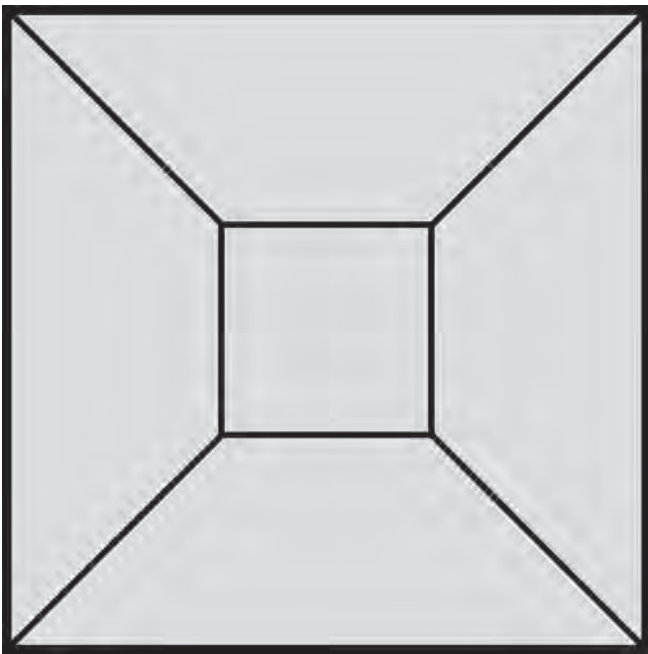


Figura 2: Interior dum cubo.

maior; ela pode representar uma infinidade de poliedros em perspectiva linear, pirâmides quadrangulares truncadas, por exemplo. Mas o título diz tratar-se dum cubo, talvez com uma face transparente, revelando-se o interior em perspectiva através desta face. Não é difícil aceitar que a figura representa um prisma quadrangular; no entanto, à distância normal de leitura o suposto prisma aparenta demasiada profundidade para ser cubo. Aproximando o olho do centro da figura, a coisa melhora bastante para quem não sofre de vista cansada.

**Problema 1.** Qual é o ponto de observação no qual o leitor deve colocar o seu olho para "ver o cubo como o artista o viu"?

Existe um único ponto nessas condições acima da folha de papel, mas a unicidade dependeu de informação adicional não contida na forma abstrata mas dada pelo título da obra.

## ESFERAS, CONES E PLANOS

Uma das ilustrações mais antigas da pirâmide visual é de Leonardo da Vinci, figura 3, uma miniatura rudimentar que ele esboçou à margem dum projeto de bomba de água.<sup>3</sup> Trata-se do espectrógrafo de Leonardo, com o qual o artista desenha, numa janela de vidro, a projeção plana duma esfera armilar; o centro de projeção é fisicamente marcado por um pequeno orifício numa tábuca, firmemente imobilizada, através do qual o artista espreita a esfera.<sup>4</sup> No caso duma esfera, esquecidos os anéis, o pirâmide visual é um cone de revolução, pelo que a representação pictórica é uma cónica, mais precisamente, uma *elipse* por se supor que a esfera e o centro de projeção estão em lados opostos do plano da janela.

A tríade envolvida – esfera, cone e plano – traz à memória os famosos teoremas belgas das cónicas, resultados belíssimos que Germinal Dandelin publicou em 1822, que podem ver-se como uma alternativa elegante e sintética à teoria clássica das cónicas. Apolónio de Perga não desdenharia ter descoberto a manobra seguinte de que se dá apenas o essencial. Secciona-se uma superfície cónica de revolução por um plano que não contenha o vértice. Aqui, e na figura 4, apenas consideramos o caso que

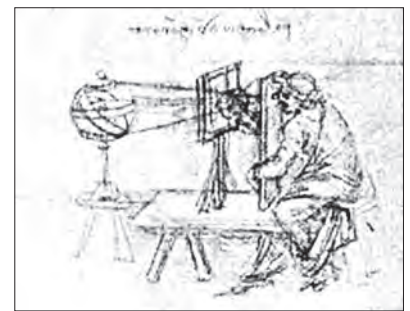


Figura 3: Janela de Leonardo.

mais nos interessa, o da elipse. Dentre as esferas inscritas no cone, existem duas, ditas *esferas de Dandelin*, que são tangentes ao plano dado em pontos de tangência denotados por  $F$  e  $G$ . Cada esfera de Dandelin é tangente à superfície cônica ao longo duma circunferência (a branco) de plano perpendicular ao eixo do cone. Um ponto  $P$  arbitrário da cônica determina pontos  $A$  e  $B$  nas circunferências brancas de contacto, com  $A$ ,  $B$  e  $P$  sobre uma geratriz do cone. A distância  $\overline{AB}$  não depende de  $P$ ; por outro lado, tem-se  $\overline{PF} = \overline{PA}$  e  $\overline{PG} = \overline{PB}$  por motivos que facilmente se entendem. Portanto,  $\overline{PF} + \overline{PG}$  é uma constante  $d$  independente de  $P$ .

A teoria da elipse pode refazer-se assim: por definição, os pontos de tangência  $F$  e  $G$  chamam-se *focos*,  $f = \overline{FG}$  é a *distância focal* e  $f/d$  é a *excentricidade* da elipse. O argumento acima mostra que esta pode construir-se "à jardineiro".

A figura 5 mostra duas imagens duma bola-oito; a primeira tem contorno circular e a segunda foi obtida da primeira por simples alteração (linear) de escala ao longo da direção paralela ao bordo inferior desta folha de papel. O contorno da segunda imagem é, pois, uma elipse. Esqueça, por agora, os pormenores (oitos, sombras e reflexos), olhando apenas para as imagens como discos, um circular e o outro elíptico.

**Problema 2.** *Existem pontos do espaço acima da folha de papel dos quais o seu olho vê o segundo disco como disco circular. Qual é o lugar geométrico desses pontos?*

**Problema 3.** *Tome agora em conta os conteúdos das imagens bidimensionais, nomeadamente: oitos, sombras e reflexos. Existe algum ponto do espaço do qual se consegue observar a segunda imagem e ver uma imagem matematicamente semelhante à primeira imagem da bola-oito?*

Se o conteúdo do disco circular fosse monocromático, a resposta a esta questão seria positiva (problema 2). Mas, para os conteúdos da figura 5, a resposta é negativa; isto pede alguma reflexão sobre o que significa ver duas imagens como semelhantes e um argumento matemático que mostre serem em geral diferentes as duas transformações praticadas, leve e brevemente descritas por: contrair linearmente uma imagem e olhá-la obliquamente. Isto sugere outro problema aparentemente mais complicado:

**Problema 4.** *Para que conteúdos é positiva a resposta ao problema 3?*

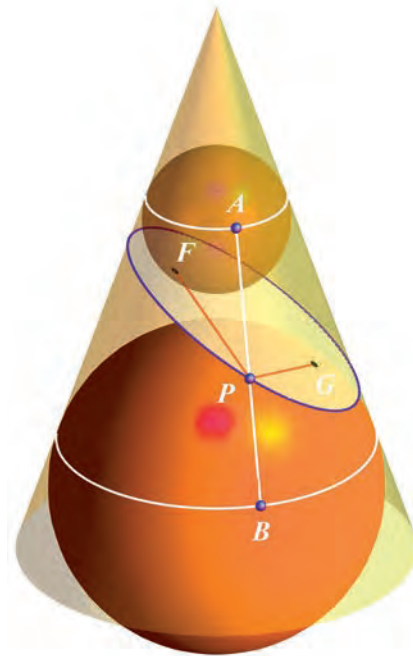


Figura 4: Esferas de Dandelin.



Figura 5: Bola-oito, circular e "esticada".

<sup>1</sup> Seria mais preciso falarmos do centro ótico dum olho.

<sup>2</sup> Claro que há exceções. O mural *Anamorfose Obliqua* do Atractor/Matemática Viva no Pavilhão do Conhecimento, inclui "modo de usar" que pode ver-se na página [www2.pavconhecimento.pt/exposicoes/modulos](http://www2.pavconhecimento.pt/exposicoes/modulos) (visitada em 9 de agosto 2014).

<sup>3</sup> Em *Codex Atlanticus*, uma coleção de esboços e escritos executados entre 1478 e 1519.

<sup>4</sup> Os pormenores de execução são discutidos por Leonardo na obra póstuma *Trattato della pittura* publicada em 1651.



cado a uma altura de 1.5m, na vertical dum ponto do solo que dista 2m do referido eixo maior.

**Problema 5.** Qual o comprimento do eixo menor da elipse?

Navegando pelas páginas

[www.julianbeever.net](http://www.julianbeever.net),

[www.youtube.com/watch?v=hf18Dz\\\_13Ms](http://www.youtube.com/watch?v=hf18Dz\_13Ms),

[www.youtube.com/watch?v=eKakTPiLpxI](http://www.youtube.com/watch?v=eKakTPiLpxI)

(visitadas em 10 de agosto 2014) o leitor poderá encontrar coisas interessantes e divertidas relacionadas com a matéria aqui tratada.

## ANAMORFOSE E ARTE DE RUA

Termina este *Canto* com dois exemplos de anamorfoses. O primeiro é o famoso quadro *The Ambassadors*, de Hans Holbein, de 1533. É um dos quadros renascentistas mais discutidos, não tanto pelo rigor da perspetiva como pelo conteúdo das prateleiras – com referências matemáticas em quantidade considerável – e pela formação estranha que atravessa diagonalmente a parte central inferior do quadro. Em visão rasante vê-se uma caveira humana, cuja posição e cujo significado têm sido longamente tratados; o artista teve razões que não revelou, boas notícias para a especulação e fantasia, em particular por cultores das ciências ocultas dada a presença conspícua do símbolo da morte. A caveira não é objeto esférico, mas tem rotondidade suficiente para que possa enquadrar-se na discussão sobre as anamorfoses da esfera.

O segundo exemplo é duma pintura de rua de Julian Beever, um artista plástico que utiliza os princípios da perspetiva de modo rigoroso para dar relevo a figuras planas. O seu trabalho *Make poverty history* não é dos mais espetaculares, mas mostra uma utilização inesperada duma elipse muito excêntrica para dar a ilusão duma esfera que emerge do chão. Mostram-se aqui duas fotos: uma tirada com a câmara colocada no ponto de observação correto, a outra fotografada dum ponto 'errado'.

De acordo com informação de Julian Beever na sua página web [www.julianbeever.net](http://www.julianbeever.net), o eixo maior da elipse da última foto é 13m. Admitamos que o ponto de observação ótima está colo-







FABIO CHALUB  
Universidade Nova  
de Lisboa  
[chalub@fct.unl.pt](mailto:chalub@fct.unl.pt)

## DA TERCEIRA PARA A QUARTA DIMENSÃO

Há muito tempo se conhecem os polígonos (em duas dimensões), poliedros (em três dimensões) e politopos (em quatro ou mais dimensões) regulares: infinitos no caso plano, cinco para o nosso espaço usual, seis na quarta dimensão e apenas três daí por diante. Mas até agora o estudo tem sido feito para cada caso separadamente. Uma nova investigação mostra como podemos aumentar as dimensões aos poucos e construir os politopos quadridimensionais a partir dos cinco sólidos platónicos.

Vamos desenhar um polígono. Mas não um polígono qualquer, e sim um polígono regular, aquele cujos lados e vértices são todos iguais (neste texto, vamos falar apenas do caso convexo). É fácil ver que existem polígonos regulares qualquer que seja o número de lados da encomenda (a partir de 3).

Desenhe um círculo centrado na origem e marque um ponto qualquer sobre este. Divida o ângulo de uma volta completa ( $2\pi$  radianos) pelo número de lados  $n$ , e em ângulos igualmente espaçados marque um ponto. O ponto  $n+1$  será novamente o ponto inicial. Ligue cada ponto aos seus dois vizinhos imediatos por seguimentos de retas e, *voilà*, o polígono está feito, com os seus  $n$  lados e vértices, todos idênticos.

Agora pegue na folha de papel e rode ligeiramente. Quando tivermos mudado a sua orientação pelo mesmo ângulo usado na construção, ou seja,  $2\pi/n$ , teremos uma figura em tudo idêntica à original. Dizemos que a figura possui uma simetria de rotação pelo ângulo  $2\pi/n$ . Evidentemente, esta não é a única simetria: muitas outras rotações são possíveis, e mesmo reflexões e inversões que a preservem (ou seja, quando a imagem da figura é ela própria). *Grosso modo*, o conjunto de transformações que preserva o polígono constitui um exemplo daquilo a que os matemáticos chamam *grupo*: um

conjunto com uma operação que satisfaz uma série de regras.

Pensar num quadrado como um objeto com simetria de rotação de  $90^\circ$  parece mais complicado do que o necessário, mas há ganhos na abstração – ou seja, em pensar nos exemplos concretos como casos particulares de uma descrição que vai muito para além dos mesmos. A principal vantagem é permitir estudar situações mais complicadas, nas quais a nossa intuição de pouco nos vale.

Vamos agora para as três dimensões: o que seria, então, o equivalente dos polígonos regulares? Aqui podemos apreciar a particularidade da existência de infinitos polígonos regulares, pois só há cinco poliedros regulares, conhecidos como "sólidos platónicos". Os poliedros são constituídos por faces (figuras planas que os delimitam), arestas (linhas retas nas fronteiras das faces) e vértices (pontos que marcam as extremidades de cada aresta). Se todos estes forem iguais entre si, dizemos que o poliedro é regular.

Já fica claro o que acontece: rotações em três dimensões são muito mais complicadas do que em duas dimensões e não há grupos de simetria que correspondam a sólidos com qualquer número de vértices.

Os cinco sólidos platónicos são o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, cada qual com 4, 6, 8, 12 e 20



Figura 1. Em cima, os sólidos platônicos de 4, 6, 8, 12 e 20 lados (tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro, respectivamente). Em baixo, os únicos dados honestos possíveis, pois a probabilidade de cair qualquer um dos lados voltado para cima é a mesma. (Fonte:Wikimedia Commons).

faces, respetivamente. Veja a figura 1. Estes são tão especiais que o filósofo grego, na obra *Timeu*, supôs serem parte de um princípio organizador do Universo. Mesmo mais de mil anos depois, o grande astrónomo Kepler continuava a procurar neles grandes princípios cosmológicos. Veja a figura 2.

Além das simetrias de rotação, reflexão e inversão que com um pouco de imaginação podem ser vistas para cada uma das figuras, há uma outra estrutura importante: a dualidade. Explicitamente, considere o cubo, marque o ponto central de cada face e ligue cada ponto aos pontos das faces adjacentes. Construímos, então, um octaedro. Faça o mesmo com o octaedro, e temos um cubo. É mais difícil visualizar, mas a figura dual do icosaedro é o dodecaedro e vice-versa. Isto indica que as simetrias do cubo e do octaedro são as mesmas, assim como as das figuras de 12 e 20 faces. O tetraedro é um caso à parte, pois é autodual, ou seja, marcando os centros das suas faces e ligando estes pontos, encontramos um novo tetraedro.

E o que é que acontece em dimensões mais altas? Neste caso, a visualização do objeto de pouco nos vale e é realmente necessário recorrer às estruturas matemáticas abstratas. Para começar, em todas as dimensões há um *hipercubo*, uma figura obtida considerando o produto cartesiano dos intervalos  $[0,1]$  tantas vezes quanto quisermos. A *hiperface* é também um hiper-cubo, com uma dimensão a menos, e desta forma o hiper-cubo é um *politopo* regular. (Chamamos assim à generalização para dimensões arbitrárias dos polígonos e poliedros.) Tomando o ponto central de cada hiperface e ligando cada uma aos adjacentes, temos o *hiperoctaedro*, que portanto também existe em todas as dimensões. E finalmente temos o *hipersimplex*, a generalização do tetraedro. Este é definido

(em termos de coordenadas cartesianas) como o subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , dado pelos vetores  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , tais que  $x_i \geq 0$  e  $\sum_i x_i \leq 1$ . Como no caso tridimensional, este é autodual.

E será que existem outros? Vamos ter de recorrer à álgebra e aos seus estudos da simetria. O resultado não poderia ser mais surpreendente: além do que foi descrito no parágrafo acima, só existem mais três politopos regulares e todos em dimensão 4. Evidentemente, a sua visualização não é fácil, mas podemos recorrer a um artifício. Quando queremos construir um cubo, desenhamos seis quadrados no papel, com uma estrutura próxima de uma cruz, cortamos e, colando

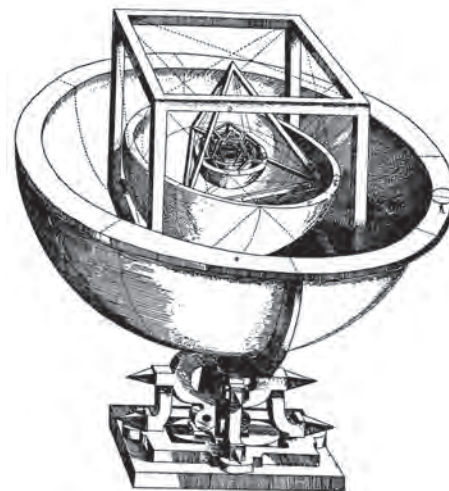


Figura 2: A busca de harmonização do mundo natural pela excecionalidade dos sólidos platônicos. Com uma boa dose de imaginação, o astrónomo Johann Kepler encaixou as posições relativas dos planetas nos polígonos regulares, relacionando o raio das suas órbitas com a razão das figuras inscritas. (Fonte:Wikimedia Commons).

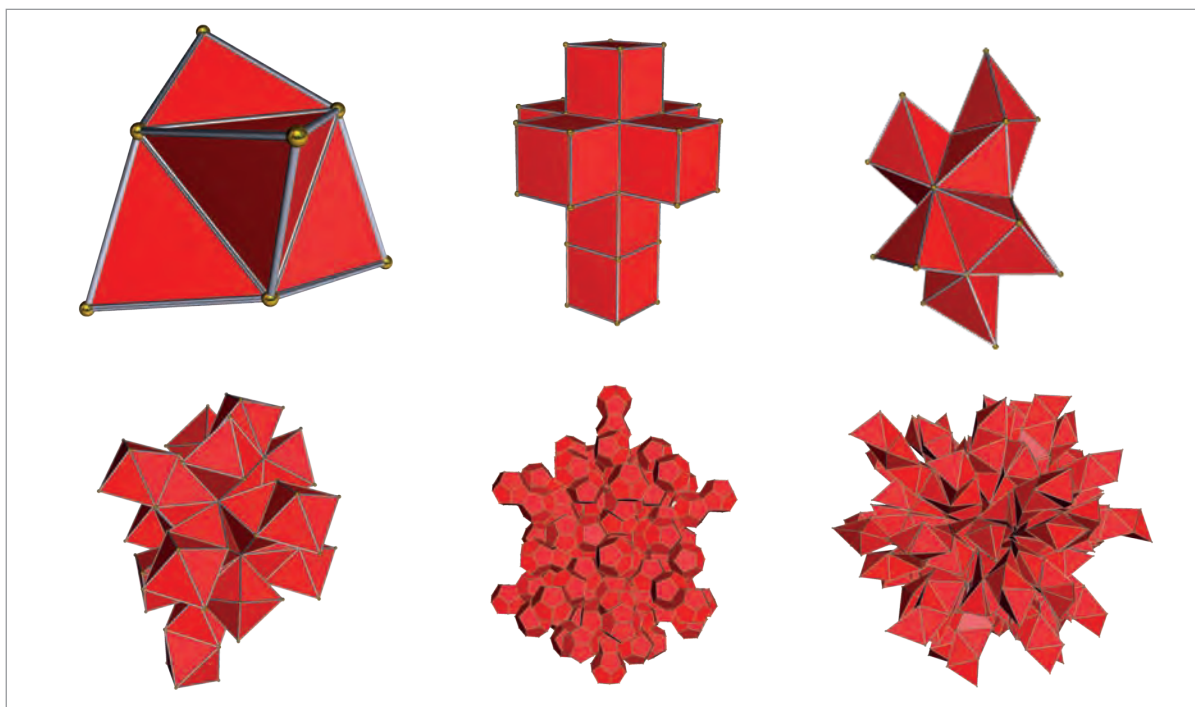
as arestas corretas, temos a figura tridimensional desejada. Para um tetraedro, podemos fazer algo similar, desenhando quatro triângulos contíguos e dobrando-os adequadamente. O mesmo ocorre na próxima dimensão: colamos num arranjo preciso um certo número de poliedros regulares e depois dobramos, na quarta dimensão, a figura obtida. Veja a figura 3.

Em toda esta análise, a construção foi feita em cada dimensão em separado, a partir do estudo dos grupos de simetria de cada distinto espaço. Em nenhum momento foi usado algo que de certa forma até é óbvio: que para corretamente construir um politopo em dimensão  $n$  é necessário conhecer os politopos de dimensão  $n - 1$  (que são as suas hiperfaces) -- ou seja, há uma forma natural de fazer esta construção subindo a escada da dimensionalidade, um degrau de cada vez. Foi esta abordagem que o artigo [1] optou por fazer. Assim, estudando as rotações em quatro dimensões dos sólidos platônicos, o físico e matemático Dechant reproduziu toda a análise acima usando uma estrutura matemática mais

simples e mais elegante. Valeu-se de trabalho de grandes matemáticos do século XIX, tais como Grassmann, Hamilton e Clifford, e de um dos maiores geómetras do século XX, o britânico e canadiano Harold Scott MacDonald Coxeter, que já havia dedicado grande parte dos seus esforços ao estudo dos politopos. Curiosamente, uma das estruturas centrais no trabalho de Dechant é o *spinor*, um objeto cuja origem está fundamentalmente nos estudos de simetrias do século XIX, mas cujo estudo foi muito impulsionado pela mecânica quântica. Toda a excepcionalidade dos politopos regulares que não os hipercubos, hipersimplexos e hiperoctaedros é muito mais naturalmente compreendida nesta abordagem.

## REFERÊNCIAS

[1] Pierre-Philippe Dechant. "Platonic Solids Generate Their Four-dimensional Analogues". *Acta Cryst.* A69, 592-602 (2013).



▲ Figura 3: Construção dos seis politopos regulares a partir de poliedros regulares, colocados estrategicamente colados uns aos outros. Tudo o que nos falta é dobrar a figura acima no espaço quadridimensional. O primeiro exemplo é do hipersimplexo (com cinco hiperfaces tetraedrais) e o segundo exemplo é do hipercubo (oito faces cúbicas). As restantes têm, respetivamente, 16, 24, 120 e 600 hiperfaces. (Fonte: [Wikimedia Commons](#)).





# Coelhos e Lotarias

ANTÓNIO PEREIRA ROSA

ESCOLA SECUNDÁRIA MARIA AMÁLIA VAZ DE CARVALHO

[antoniopereirarosa@gmail.com](mailto:antoniopereirarosa@gmail.com)

## 1. INTRODUÇÃO

Num conhecido livro de preparação para o exame nacional de Matemática A do 12.º ano de escolaridade ([14], página 179, exercício 44), surge o seguinte problema, a que vamos chamar “Problema dos coelhos”:

*“Numa coelheira há 20 coelhos sendo 5 brancos e 15 pretos. Abre-se a porta da coelheira e deixa-se sair os coelhos **um a um**. Qual a probabilidade de que saiam, pelo menos, 2 coelhos brancos seguidos?”*

O livro em causa apresenta apenas a resposta a este problema (232/323), sem dar qualquer indicação sobre o processo seguido para a obter<sup>1</sup>. Se tentarmos resolver este problema pelos métodos usuais no 12.º ano (cálculo da probabilidade do acontecimento contrário e aplicação da Regra de Laplace), verificamos rapidamente que a parte difícil é a determinação do número de sequências de 20 coelhos, 5 brancos e 15 pretos, que **não** têm dois coelhos brancos seguidos.

Este tipo de problema de contagem surge com alguma frequência na literatura; veja-se, por exemplo [10] ou [1], em que se pergunta qual o número de sequências binárias<sup>2</sup>, de comprimento  $n$ , com  $m$  zeros, em que nunca figuram dois zeros consecutivos, ou ainda [12], página 72.

Seguidamente, vamos apresentar soluções para este problema e mostraremos também que ele está diretamente re-

Um problema de cálculo combinatório e probabilidades no 12.º ano leva-nos às lotarias, aos números de Fibonacci e, claro, ao triângulo de Pascal.

lacionado com um conhecido problema de lotarias, a saber, qual a probabilidade de, num concurso do género do Totoloto com bolas numeradas de 1 a  $n$ , saírem dois números consecutivos quando se faz uma extração de  $m$  bolas. Esta abordagem, sugerida em [2] e desenvolvida em [7] e [17], parece-nos mais interessante e instrutiva do que a simples resolução do problema dos coelhos por meio dos processos que indicamos na próxima secção.

## 2. RESOLUÇÕES DIRETAS DO PROBLEMA DOS COELHOS

Apresentamos em seguida uma solução elementar para o problema dos coelhos, que encontramos em [9]. Pensando em termos de sequências de coelhos brancos (B) e pretos (P), vamos calcular a probabilidade do acontecimento contrário, isto é, a probabilidade de nunca surgirem dois B seguidos. Para que não surjam dois B consecutivos, tem de haver, pelo menos, um P a separá-los, como acontece, por exemplo, na sequência seguinte

... BPBPPBPBP...

Mais precisamente, a seguir a cada um dos quatro primeiros coelhos B terá de sair, obrigatoriamente, um coelho P, pelo que os coelhos brancos apenas podem ocupar 16 posições (uma motivação para este facto é dada mais à frente na prova do Teorema 1). Por isso, estes coelhos podem ser dispostos de  ${}^{16}A_5$  maneiras distintas. Além disso, como os coelhos pretos podem permutar entre si de  $15!$  maneiras, concluímos que o número de casos favoráveis a “não saírem dois coelhos brancos consecutivos” é  ${}^{16}A_5 \times 15!$ . Dado que os 20 coelhos podem permutar entre si de  $20!$  maneiras distintas, a probabilidade de **não** saírem dois coelhos brancos seguidos é de  ${}^{16}A_5 \times 15! / 20! = 91/323$  e a resposta ao problema inicial é  $1 - 91/323 = 232/323$ .

Observe-se que se dividirmos ambos os termos da fração  ${}^{16}A_5 \times 15! / 20!$  por  $15! \times 5!$ , a probabilidade pode ser escrita na forma  ${}^{16}C_5 / {}^{20}C_5$ , que sugere uma fórmula geral para este tipo de questões. O mesmo sucede com o problema de con-

<sup>1</sup>No mesmo livro (página 178) surge um outro problema semelhante a este, referente à disposição de livros numa prateleira de uma estante, apresentando-se de novo apenas a solução 11/13.

<sup>2</sup>Sequências de zeros e uns.

tagem referido na secção 1: se houver  $m$  zeros numa sequência binária de comprimento  $n$ , a consideração da expressão  ${}^{n-m+1}C_m / {}^nC_m$ , bem como o facto bem conhecido de haver  ${}^nC_m$  sucessões binárias deste tipo, sugere que há exactamente  ${}^{n-m+1}C_m$  sequências sem zeros consecutivos. Vamos agora provar a correção dessa expressão.

**Teorema 1:** Há  ${}^{n-m+1}C_m$  sucessões binárias de comprimento  $n$ , compreendendo  $m$  zeros (e, logo,  $n - m$  uns) sem zeros consecutivos.

*Demonstração:* Começemos por escrever os  $n - m$  símbolos "1": 1 1 1 1 ... 1. Depois coloquemos os  $m$  símbolos "0" nos espaços entre os símbolos "1", incluindo o espaço antes do primeiro "1" e o espaço depois do último. Há  $n - m + 1$  espaços e vamos escolher  $m$  deles para colocar os símbolos "0", o que pode ser feito exactamente de  ${}^{n-m+1}C_m$  maneiras, concluindo-se assim a demonstração.  $\square$

Está assim resolvido o problema dos coelhos: a probabilidade de não saírem dois coelhos brancos seguidos é

$${}^{20-5+1}C_5 / {}^{20}C_5 = {}^{16}C_5 / {}^{20}C_5.$$

Problemas deste género foram abordados pela primeira vez por Abraham de Moivre<sup>3</sup>, no século XVIII (veja-se [16]); no século XIX, o matemático inglês William Allen Whitworth<sup>4</sup> mostrou que a sua solução pode ser obtida directamente por meio do cálculo dos coeficientes de certos polinómios; o leitor interessado pode consultar [18], página 201, proposição LII.

### 3. O PROBLEMA DA LOTARIA

Consideremos uma lotaria em que, de uma urna contendo  $n$  bolas, numeradas de 1 a  $n$ , se extraem, sem reposição,  $m$  bolas (por exemplo, no nosso Totoloto,  $n = 49$  e  $m = 6$ ). Pretende-se saber qual a probabilidade de não saírem números consecutivos (ou, mais geralmente, a probabilidade de a diferença mínima entre quaisquer dois números saídos ser igual a  $k > 0$ ; a não existência de números consecutivos corresponde a  $k = 2$ ). Há muitas maneiras de resolver este problema (a referência [7] apresenta quatro processos distintos). Escolhemos a segunda das soluções de [7], que é particularmente interessante. Tal como sucede com o problema dos coelhos, a parte difícil é a determinação do número de casos favoráveis ao acontecimento "não saírem números consecutivos"; o número de casos possíveis é simplesmente  ${}^nC_m$ .

Pensando no Totoloto português, é imediato que o número de chaves possíveis é  ${}^{49}C_6 = 13983816$ ; resta saber qual o número de casos favoráveis ao acontecimento "sair chave sem números consecutivos". Consideremos uma chave ordenada com essa propriedade, por exemplo,

$$7, 9, 13, 25, 44, 49$$

e tiremos respetivamente 0, 1, 2, 3, 4 e 5 a cada um dos seus termos. Obtemos a nova sequência,

$$7, 8, 11, 22, 40 e 44.$$

Os seus termos estão certamente entre 1 e 44, já que subtraímos números entre 0 e 5 a números entre 1 e 49; por outro lado, como na primeira sequência não há números consecutivos, na segunda os termos são todos distintos. Se repararmos que o processo é reversível, isto é, que dada uma sequência de seis números naturais entre 1 e 44 e lhe somarmos da maneira descrita os números 0, 1, 2, 3, 4 e 5, obtemos certamente uma sequência de seis números naturais não consecutivos e entre 1 e 49, concluímos que existe uma bijecção entre o conjunto  $A$  das sequências (ordenadas) de seis números naturais entre 1 e 44 e o conjunto  $B$  das sequências (ordenadas) de seis números naturais não consecutivos entre 1 e 49. Assim,  $Card(A) = Card(B)$  e como obviamente  $Card(A) = {}^{44}C_6$ , vem que  $Card(B) = {}^{44}C_6$  e a probabilidade é de  ${}^{44}C_6 / {}^{49}C_6 \approx 0,5048$ .

Um pouco mais formalmente, vamos provar o seguinte teorema:

**Teorema 2:** Sejam  $n \geq 1$  e  $m \geq 0$  dois números inteiros. Sejam  $F_m^n = \{X \subseteq \{1, 2, \dots, n\} : Card(X) = m, \text{ e não há em } X \text{ números consecutivos}\}$

$$G_m^n = \{X \subseteq \{1, 2, \dots, n + 1 - m\} : Card(X) = m\}.$$

Então estes dois conjuntos têm o mesmo número de elementos.

*Demonstração:* Basta construir uma bijecção entre os dois conjuntos.

Seja  $\{a_1, \dots, a_m\} \in F_m^n$ ; podemos desde já supor que  $a_i < a_{i+1}$  para cada  $i \in \{1, \dots, m - 1\}$ . Pondo  $b_k = a_k + 1 - k$ , vem que  $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_m \leq n + 1 - m$ . Com efeito, é óbvio que  $b_1 \geq 1$  e

$$b_m = a_m - m + 1 \leq n - m + 1 = n + 1 - m;$$

quanto ao resto, como  $a_{i+1} - a_i \geq 2$ , vem que

$$b_{i+1} - b_i = a_{i+1} - a_i - 1 \geq 1 \text{ e}$$

portanto,  $b_{i+1} > b_i$ .



Podemos então estabelecer a bijecção pretendida associando a cada  $\{a_1, \dots, a_m\} \in F_m^n$  (supondo os elementos de  $A$  escritos por ordem crescente) o conjunto  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ , com  $b_k = a_k + 1 - k$ ; do que foi dito anteriormente resulta que  $B \in G_m^n$ . Resta-nos provar a injetividade e a sobrejetividade. Quanto à injetividade, se dois subconjuntos de  $F_m^n$ , digamos  $\{a_1, \dots, a_m\}$  e  $\{a_1^*, \dots, a_m^*\}$ , tivessem a mesma imagem, viria que  $a_k + 1 - k = a_k^* + 1 - k$  para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$  e, portanto,  $a_k = a_k^*$  para todo o  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Para verificar a sobrejetividade, dado  $B = \{b_1, \dots, b_m\} \in G_m^n$ , basta considerar os elementos  $a_1, \dots, a_m$  definidos por  $a_k = b_k + k - 1$  para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$  para se concluir que

$$B = \{b_1, \dots, b_m\} \in G_m^n$$

é a imagem de  $\{a_1, \dots, a_m\} \in F_m^n$  por meio da aplicação considerada. □

**Corolário:**  $\text{Card}(F_m^n) = n^{-m+1}C_m$ .

*Demonstração:* decorre imediatamente do teorema e do facto de  $G_m^n$  ter precisamente  $n^{-m+1}C_m$  elementos. □

Reparemos agora que uma sequência binária  $\mathcal{B}$  pode representar uma sequência de números naturais  $\mathcal{N}$  se convençionamos que:

- a) Um “1” na  $n$ -ésima posição de  $\mathcal{B}$  significa que o número  $n$  faz parte da sequência  $\mathcal{N}$ .
- b) Um “0” na  $n$ -ésima posição de  $\mathcal{B}$  significa que o número  $n$  **não** faz parte da sequência  $\mathcal{N}$ .

Por exemplo, à sequência de números naturais 1 3 4 7 corresponde a sequência binária 1 0 1 1 0 0 1 e vice-versa. Com esta correspondência, verifica-se que a uma sequência binária de comprimento  $n$  contendo exatamente  $k$  símbolos “1”, não consecutivos, está associada uma sequência de  $k$  elementos de  $\{1, 2, \dots, n\}$  sem números consecutivos.

Assim, a solução obtida para o problema da lotaria levamos a uma solução (algo indireta) do problema de contagem subjacente ao problema dos coelhos, o que possibilita a solução quase imediata deste último.

O Teorema anterior fornece a base para um curioso jogo de azar: supondo, para fixar ideias, que  $n = 49$  e  $m = 6$ , podemos apostar na saída de dois números consecutivos quando retiramos ao acaso seis bolas duma urna com 49 bolas nume-

radas de 1 a 49. Se consideramos as probabilidades anteriormente calculadas, verificamos que o jogo é favorável à banca, mas por muito pouco; se a aposta for de 1 euro, a esperança de lucro da banca é 0,0096 ( $= 1 \times 0,5048 - 1 \times (1 - 0,5048)$ ), ligeiramente inferior a um cêntimo por cada euro apostado.

Apresentamos em seguida uma generalização do Teorema 2.

**Teorema 3:** O número de maneiras distintas  $f_k(m, n)$  de escolher  $m$  números em  $\{1, 2, \dots, n\}$  tais que a menor das distâncias entre dois quaisquer deles é igual a  $k > 0$  é dado por

$$f_k(m, n) = n - (k-1)(m-1) C_m, \text{ com } n > m > 1, k \geq 1$$

(o Teorema 1 é precisamente o caso  $k = 2$ ).

*Demonstração:* Não vamos apresentá-la; o leitor interessado pode consultar [5] ou [7], onde surgem várias demonstrações, que são, de um modo geral, semelhantes às do Teorema 2, embora algo mais “pesadas”. □

**Corolário:** Numa lotaria em que as bolas têm os números 1, 2, ...,  $n$ , e a chave tem  $m$  números, a probabilidade de que, pelo menos, dois dos números da chave tenham distância inferior a  $k$  é de

$$p_k(m, n) = 1 - \frac{n - (k-1)(m-1) C_m}{n C_m}.$$

*Demonstração:* É imediata, a partir do Teorema 3. □

No resto desta secção, vamos proceder a uma análise mais fina das chaves da lotaria, numa direção diferente do Teorema 3, usando ideias que encontrámos em [11]. Começemos por uma definição:

**Definição 1:** Consideremos  $r$  números distintos,

$$a_1, a_2, \dots, a_r \in X_n = \{1, 2, \dots, n\},$$

ordenados por ordem crescente. Um grupo da sequência  $a_1, a_2, \dots, a_r$  é:

- (i) um conjunto singular formado por um desses números, quando a distância a qualquer dos outros da sequência for superior a 1.

ou

<sup>3</sup> Abraham de Moivre (1667-1754), matemático inglês de origem francesa.

<sup>4</sup> William Allen Whitworth (1840-1905), matemático e sacerdote anglicano.

(ii) um subconjunto de dois ou mais destes números, consecutivos, quando a distância de cada um dos números do subconjunto a qualquer dos outros da sequência (que não do subconjunto) for superior a 1.

Por exemplo, na sequência 2, 4, 5, 7, 21, 22, 23, temos os grupos com um elemento {2} e {7}, o grupo com dois elementos {4, 5} e o grupo com três elementos {21, 22, 23}.

Se chamarmos  $g$  ao número de grupos na sequência,  $d$  ao número de diferentes tipos de grupos (números isolados, pares de números consecutivos, ternos de números consecutivos, etc.) e  $g_i (i = 1, 2, \dots, d)$  ao número de grupos de tipo  $i$ , é óbvio que  $g_1 + g_2 + \dots + g_d = g$ .

No exemplo anterior,  $g = 4, d = 3$  e

$$g_1 + g_2 = 2 + 1 + 1 = 4 = g.$$

O resultado que pretendemos provar é o seguinte:

**Teorema 4:** Seja  $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$  e consideremos as sequências de  $r$  números distintos  $a_1, a_2, \dots, a_r$  extraídas de  $X_n$ . Destas sequências, o número  $N$  das que têm  $g$  grupos, de  $d$  tipos diferentes, com  $g_i (i = 1, 2, \dots, d)$  grupos de tipo  $i$ , é dado por

$$N = \frac{g!}{g_1! \times g_2! \times \dots \times g_d!} \times^{n-r+1} C_g.$$

*Demonstração:* É semelhante à do Teorema 2. O número de hipóteses para a escolha de uma sequência  $a_1, a_2, \dots, a_r$  extraída de  $X_n$  e com  $g$  grupos é  $^{n-r+1}C_g$ , se ignorarmos as permutações dos grupos, pelo raciocínio feito na prova do referido Teorema; por outro lado, para cada configuração com  $g$  grupos de  $d$  tipos, existem  $\frac{g!}{g_1! \times g_2! \times \dots \times g_d!}$  possibilidades, pela fórmula das permutações com repetições. Combinando os dois resultados, vem que  $N = \frac{g!}{g_1! \times g_2! \times \dots \times g_d!} \times^{n-r+1} C_g$ , como queríamos.

□

Por exemplo, se  $X_n = \{1, 2, \dots, 30\}$  e considerarmos chaves com sete elementos, com dois grupos com um elemento, um grupo com dois elementos e um grupo com três elementos, verificamos que existe um total de  $\frac{3!}{2! \times 1! \times 1!} \times^{30-7+1} C_3 = 6072$  chaves; uma delas é 2, 4, 5, 7, 21, 22, 23, que vimos anteriormente.

Deixamos ao cuidado do leitor a verificação da tabela 1, que ilustra a situação para o Totoloto nacional ( $n = 49$  e  $r = 6$ ).

Repare-se que a soma dos números da última coluna é  $13983816 = {}^{49}C_6$ , o número de chaves existentes no Totoloto português.

Tipo de Chave	Núm. de tipos de grupos ( $d$ )	Núm. de cada tipo de grupo ( $g_i$ )	Núm. total de grupos ( $g$ )	$N$
Seis números isolados	1	$g_1 = 6$	6	7059052
Quatro números isolados e dois consecutivos	2	$g_1 = 4, g_2 = 1$	5	5430040
Três números isolados e três consecutivos	2	$g_1 = 3, g_2 = 1$	4	543004
Dois números isolados e quatro consecutivos	2	$g_1 = 1, g_2 = 1$	3	39732
Um número isolado e cinco consecutivos	2	$g_1 = 1, g_2 = 1$	2	1892
Seis números consecutivos	1	$g_1 = 1$	1	44
Dois números isolados e dois pares de números consecutivos	2	$g_1 = 2, g_2 = 2$	4	814506
Três pares de dois números consecutivos	1	$g_1 = 3,$	3	13244
Um número isolado + um par + um terno de números consecutivos	3	$g_1 = 1, g_2 = 1, g_3 = 1$	3	79464
Quatro números consecutivos + um par de números consecutivos	2	$g_1 = 1, g_2 = 1$	2	1892
Dois pares de três números consecutivos	1	$g_1 = 2$	2	946

Tabela 1

#### 4. RESOLUÇÕES DIRETAS DO PROBLEMA DE CONTAGEM DOS NATURAIS NÃO CONSECUTIVOS

O problema de contagem “Determinar o número de maneiras de selecionar  $m$  objetos de entre  $n$  objetos numerados de 1 a  $n$  e dispostos numa fila, sem que surjam objetos com números consecutivos”, é muito antigo e pode ser resolvido de várias maneiras<sup>5</sup>. Dentre as várias soluções conhecidas, escolhemos uma que é, em nossa opinião, particularmente interessante.

Em 1943, Irving Kaplansky<sup>6</sup>, apresentou uma resolução elementar do famoso *Problème des Ménages* de Édouard Lucas (veja-se [4], [8], [12] ou [15]) baseada em dois lemas, que são conhecidos neste contexto como primeiro e segundo lemas de Kaplansky. O primeiro lema de Kaplansky é precisamente uma resolução do problema de contagem que temos vindo a estudar.

**Teorema 5 (primeiro lema de Kaplansky):** O número  $f(n, m)$  de maneiras de escolher  $m$  objetos dentre  $n$  objetos alinhados, sem que haja dois consecutivos, é dado por  $f(n, m) = {}^{n-m+1}C_m$ .

*Demonstração:* É óbvio que  $f(n, 1) = n = {}^{n-1+1}C_1$  e que  $f(n, n) = 0 = {}^{n-n+1}C_n$ , se  $n > 1$ .

Seja então  $m$  tal que  $1 < m < n$ . Podemos considerar dois tipos de seleções nas condições do enunciado, aquelas a que o primeiro objeto pertence e aquelas a que este não pertence.

Quanto às primeiras, é óbvio que não podem conter o segundo objeto e são em número de  $f(n-2, m-1)$ ; quanto às segundas, são em número de  $f(n-1, m)$ . Disto decorre que o número  $f(n, m)$  verifica a relação

$$f(n, m) = f(n-2, m-1) + f(n-1, m). \quad (1)$$

Podemos então provar a relação  $f(n, m) = {}^{n-m+1}C_m$  por indução. Como  $n > m > 1$ , comecemos por notar que

$$f(3, 2) = 1 = {}^{3-2+1}C_2.$$

Por hipótese de indução,

$$f(n-1, m) = {}^{n-m}C_m \text{ e } f(n-2, m-1) = {}^{n-m}C_{m-1};$$

substituindo em (1), vem que

$$f(n, m) = {}^{n-m}C_m + {}^{n-m}C_{m-1} = {}^{n-m+1}C_m,$$

(por uma conhecida propriedade das combinações), como queríamos. □

A título de curiosidade, enunciamos o segundo lema de Kaplansky, cuja demonstração pode ser vista em [15]:

**Teorema 6 (segundo lema de Kaplansky):** O número  $g(n, m)$  de maneiras de escolher  $m$  objetos dentre  $n$  objetos dispostos sobre uma circunferência, sem que haja dois consecutivos, é dado por  $g(n, m) = \frac{n}{n-m} {}^{n-m}C_m$ , para  $n > m$ .

#### 5. UMA RELAÇÃO COM OS NÚMEROS DE FIBONACCI

O problema das lotarias permite obter uma curiosa relação entre os coeficientes binomiais e os números de Fibonacci (não é de espantar que estes surjam em problemas relacionados com coelhos...). Na figura abaixo, está representado o triângulo de Pascal, bem como as suas “diagonais secundárias”.

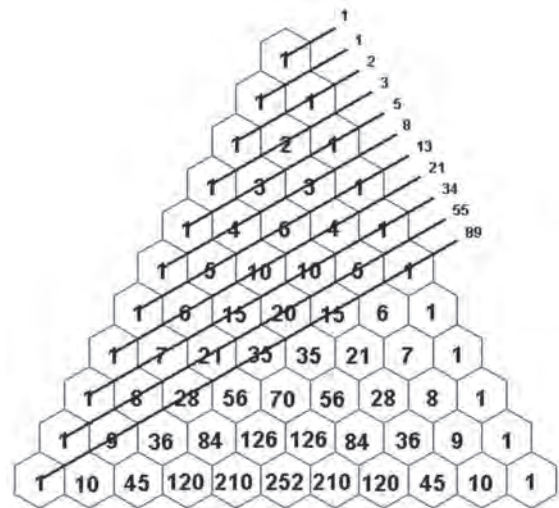


Figura 1

**Teorema 7:** O número total de maneiras de selecionar números dentre os  $n$  primeiros números naturais sem que se obtenha números consecutivos (incluindo a seleção vazia), é igual a  $f_{n+2}$ , o  $(n+2)$ -ésimo número de Fibonacci.

*Demonstração:* A prova é muito semelhante à do Teorema 5. Seja  $a_n$  o número a determinar. Quando escolhermos uns tantos elementos de  $\{1, 2, \dots, n\}$  sem que haja números consecutivos, há duas hipóteses mutuamente exclusivas:

1) O número  $n$  está entre os escolhidos.

ou

2) O número  $n$  não está entre os escolhidos.

<sup>5</sup> Veja-se, por exemplo, [13]. O autor da solução aí apresentada, Thomas Muir (1884 - 1934), foi um especialista em determinantes; uma outra solução, recorrendo a uma equação diofantina, aparece em [3], página 37.

<sup>6</sup> Irving Kaplansky (1917-2006), matemático canadiano.



No caso 2), estamos em presença de uma das  $a_{n-1}$  seleções sem números consecutivos que se pode fazer em  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ ; no caso 1),  $n-1$  não faz certamente parte da seleção e os restantes elementos desta constituem certamente uma das  $a_{n-2}$  possíveis maneiras de escolher um certo número de elementos de  $\{1, 2, \dots, n-2\}$  sem números consecutivos. Repare-se que pode dar-se o caso de não haver elementos restantes, no caso de a seleção no caso 1) se reduzir a  $n$ . Disto resulta que o número de seleções contendo  $n$  é precisamente  $a_{n-2}$  e, portanto,  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ . Como estamos a incluir a seleção vazia, vem que  $a_1 = 2$  e  $a_2 = 3$  e a sucessão  $(a_n)$  é  $2, 3, 5, 8, 13, \dots$ , sendo assim  $a_n = f_{n+2}$ , o  $(n+2)$ -ésimo número de Fibonacci.  $\square$

Vejamos uma aplicação ao estudo do triângulo de Pascal. Considere-se  $n = 4$  e enumeremos as seleções de elementos de  $\{1, 2, 3, 4\}$  sem elementos consecutivos.

- 1) Seleção vazia.
- 2) Seleções com um elemento – são 4, a saber “1”, “2”, “3” e “4”.
- 3) Seleções com dois elementos – são 3, a saber “1, 3”, “1, 4” e “2, 4”.

Há um total de  $1 + 4 + 3 = 8$ , que é precisamente o 6.º número de Fibonacci.  $\square$

Relacionemos estes resultados com a fórmula do corolário do Teorema 2:

- 1) Neste caso,  $n=4, m=0$  e  ${}^{n-m+1}C_m = {}^5C_0 = 1$
- 2) Neste caso,  $n=4, m=1$  e  ${}^{n-m+1}C_m = {}^4C_1 = 4$
- 3) Neste caso,  $n=4, m=2$  e  ${}^{n-m+1}C_m = {}^3C_2 = 3$

e a igualdade acima pode ser escrita como

$${}^5C_0 + {}^4C_1 + {}^3C_2 = f_6,$$

ou seja, a soma dos elementos da 6.ª diagonal secundária é precisamente igual ao 6.º número de Fibonacci.

O caso geral pode ser tratado da mesma maneira, chegando-se à conclusão de que a soma da  $n$ -ésima diagonal secundária do triângulo de Pascal é igual ao  $n$ -ésimo número de Fibonacci. Este resultado pode ser interpretado apenas como uma igualdade envolvendo os números  $f(n, m)$  do primeiro lema de Kaplansky, mas parece-nos mais interessante e apelativa a versão envolvendo o triângulo. Para concluir, referimos que se pode fazer um estudo semelhante para os números  $g(n, m)$  do segundo lema de Kaplansky, obtendo-se em vez dos números

de Fibonacci os *números de Lucas*<sup>7</sup>; o leitor interessado pode consultar [6] para a prova desta afirmação.

**Agradecimento:** O autor agradece ao *referee* a leitura atenta do texto; as correções e sugestões que apresentou muito contribuíram para melhorar a qualidade do artigo.

## 5. REFERÊNCIAS

- [1] André, C. e Ferreira, F. (2000), *Matemática Finita*, Universidade Aberta, Lisboa.
- [2] APM (2008) – Questão respondida sobre o “problema dos coelhos”, recurso “Pergunta Agora”, Associação dos Professores de Matemática.
- [3] Balakrishnan, V. K. (1995), *Theory and Problems of Combinatorics*, McGraw-Hill, Inc., New York.
- [4] Chen, C-H. e Koh, K-M (1992), *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific, Singapura.
- [5] Drakakis, K. (2007) *Facta Universitatis: Mathematics and Informatics*, Volume 22, Issue 1, 2007, pp. 1-10.
- [6] Honsberger, R. (1985), *Mathematical Gems III (Dolciani Mathematical Expositions, No. 9)*, The Mathematical Association of America.
- [7] Howard, F. T. (1996), “The Probability of Consecutive Numbers in Lotto, Applied Probability Trust”, disponível em <http://ms.appliedprobability.org/data/files/Articles2028/28-2-4.pdf>.
- [8] Kaplansky, I. (1943), “Solution of the “Problème des Ménages””, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49, 784-885.
- [9] Linhares, A. (s/d), “Coelhos em Fuga”, site Matemática.com (<http://matematica.com.sapo.pt>), secção “Probabilidades (12º)”.
- [10] Mattson Jr., H. F. (1978), *Discrete Mathematics with applications*, John Wiley and Sons, New York.
- [11] McPherson, I. e Hodson, D. (2009), “Lottery Combinatorics, Mathematical Spectrum” 41(3), 110-115, Applied Proba-

bility Trust, disponível em <http://ms.appliedprobability.org/data/files/selected%20articles/41-3-4.pdf>.

[12] Morgado, A. C., O., Carvalho, J. B. P., Carvalho, P. C. P., Fernandez (1991), *Análise Combinatória e Probabilidade*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.

[13] Muir, T. (1902), "Note on Selected Combinations", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, Vol. XXIV, 102-104, Neil and Company, Limited, Edinburgh.

[14] Neves, M.A. F. e Guerreiro, L. (2007), *Acesso ao Ensino Superior – Matemática A*, Porto Editora, Porto.

[15] Ryser, H. B. (1965), *Combinatorial Mathematics (The Carus Mathematical Monographs No. 14)*, 2nd impression, The Mathematical Association of America, distribuído por John Wiley and Sons.

[16] Todhunter, I. (1865), *A History of the Mathematical Theory of Probability*, MacMillan and Co., Cambridge.

[17] Watson, R. (1996), "Lateral Thinking", 70, *Teaching Statistics*, vol. 18, nº. 3, Nottingham, Grã-Bretanha.

[18] Whitworth, W. A. (1901), *Choice and Chance (5th edition)*, Deighton Bell and Co., Cambridge.

Consultámos ainda os sites BibM@th.net ([www.bibmath.net](http://www.bibmath.net)) e MacTutor History of Mathematics ([www-history.mcs.st-and.ac.uk](http://www-history.mcs.st-and.ac.uk)), este último para as biografias dos vários matemáticos referidos neste trabalho.

#### SOBRE O AUTOR

**António Pereira Rosa** é licenciado em Matemática (1986) e mestre em Matemática para o Ensino (2008) pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É professor do quadro da Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho desde 1994.

<sup>7</sup>Os números de Lucas são os termos da sucessão 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ..., definida por  $L_1 = 1, L_2 = 3, L_n = L_{n-1} + L_{n-2} (n > 2)$ . Estes números gozam de muitas propriedades semelhantes às dos números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., já que a relação de recorrência que os define é igual; apenas a segunda condição inicial é diferente.



Visite o site da  
Gazeta de Matemática.

[www.gazeta.spm.pt](http://www.gazeta.spm.pt)

Para aceder à área reservada a assinantes, solicite o seu código de subscrição através do e-mail [gazeta@spm.pt](mailto:gazeta@spm.pt)



ÓSCAR FELGUEIRAS  
Universidade  
do Porto  
olfelgue@fc.up.pt

## QUATRO QUATROS

Como escrever um número com quatro quatros?

Se um certo número pode ser escrito com quatro quatros, porque não também escrever o número que o sucede dessa forma? E no caso de não se conseguir mesmo, será que se pode usar alguma notação diferente que o permita? Vejamos alguns exemplos, convidando o leitor a encontrar soluções para os sucessores dos números apresentados (repostas no rodapé<sup>1</sup>):

$$\begin{array}{lll} 0 = 44 - 44 & 2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} & 4 = 4 \times \left(\frac{4}{4}\right)^4 \\ 6 = 4 + 4 + \sqrt{4} - 4 & 8 = 4 + 4 + 4 - 4 & 10 = \frac{44 - 4}{4} \\ 20 = 4 \times \left(4 + \frac{4}{4}\right) & 24 = 4! + (4 - 4) \times 4 & 44 = 44.4 - .4 \end{array}$$

O problema dos quatro quatros teve a sua primeira aparição impressa conhecida em 30 de dezembro de 1881, na revista semanal *Knowledge, An Illustrated Magazine of Science*. Ele surge incluído numa carta enviada ao editor, Richard Proctor, assinada sob o nome de Cupidus Scientiae, eventualmente um pseudónimo do próprio editor. Ao longo dos anos este problema foi revisitado por vários autores que lhe deram popularidade e mais recentemente por entusiastas que se dedicaram a criar programas para o resolver.

Na formulação original de 1881, apenas eram consideradas as operações aritméticas mais usuais de soma, subtração, multiplicação, divisão e raiz quadrada. Com tais regras é possível encontrar expressões para todos os números até 20, com exceção do 19. Foi notado logo na altura que, com uma pequena flexibilização das regras, poder-se-ia resolver o caso do 19: usando o símbolo de fatorial,  $19 = 4! - 4 - 4/4$ , ou usando o ponto decimal,  $19 = (4 + 4 - .4)/.4$ .

Esta questão de encontrar um número a partir de outros não era propriamente novidade. O reverendo inglês Thomas Dilworth tinha incluído no seu manual de aritmética,

*The Schoolmaster's Assistant* de 1743, dois exercícios de tipo semelhante. Neles eram pedidas representações para o 12 a partir de quatro algarismos iguais e para o 34 utilizando quatro vezes o 3. Esse manual teve várias edições em Inglaterra e nos Estados Unidos a partir de 1769, tendo-se tornado um livro de matemática muito seguido na época.

Em 1911 o matemático inglês Rouse Ball incluiu pela primeira vez o problema dos quatro quatros na 5.<sup>a</sup> edição do seu livro *Mathematical Recreations and Essays*. Nele propunha a utilização de fatoriais, subfatoriais e pontos decimais. A operação subfatorial consiste em associar a cada número inteiro não negativo  $n$  o número de permutações de  $n$  sem elementos fixos, também chamadas de desarranjos de  $n$ , denotando-se por  $!n^2$ . Esta operação é conveniente pois permite obter o 9 com um só quatro ( $9 = !4$ ). Quanto ao ponto decimal, ele era entendido como sendo usado na forma simples de dízima finita,  $.4 = 2/5$ , ou na forma de dízima infinita,  $.4 = 4/9$ ; em particular, possibilitando uma nova solução para 19,  $\frac{4+4+.4}{.4}$ . Em 1914, na 6.<sup>a</sup> edição do seu livro, Rouse Ball tinha já feito um estudo bastante extensivo do problema dos quatro quatros, referindo que era possível exprimir todos os números até 877. Sem usar subfatoriais conseguia fazê-lo até 112, tal como mencionava num seu artigo de 1912<sup>3</sup>. De salientar que, apesar de aceitar o número 2 expresso com apenas um quatro ( $2 = \sqrt{4}$ ), era excluída explicitamente a expressão de números como .2 ou 22 com um ou dois quatros, respetivamente.

Posteriormente houve vários livros de divulgação matemática que deram visibilidade a este quebra-cabeças. Entre aqueles com mais impacto destacam-se três:







# Quando a Lógica Não se Contenta com a Verdade

GILDA FERREIRA

UNIVERSIDADE LUSÓFONA DE HUMANIDADES E TECNOLOGIAS E CMAF - CENTRO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES FUNDAMENTAIS

[gferreira@fc.ul.pt](mailto:gferreira@fc.ul.pt)

Ainda que muitas vezes sem nos apercebermos, a lógica está presente não apenas na prática matemática mas nos mais variados aspetos da nossa vida quotidiana. Noções de lógica são usadas para encadearmos o nosso raciocínio, chegarmos a conclusões válidas e tomarmos decisões fundamentadas. Quando se fala em lógica, quase garantidamente o leitor pensará em lógica clássica, a lógica mais amplamente utilizada e estudada, assente no conceito de verdade. Haverá outras? A resposta é afirmativa e será ilustrada com dois exemplos que mostram que a introdução de novas lógicas não é um mero (estéril) exercício intelectual, mas um caminho com um vasto leque de aplicações práticas.

## 1. INTRODUÇÃO

O termo “lógica” vem da palavra grega *logos* que significa “razão” e, enquanto disciplina, pode ser definida como a ciência do pensamento e do raciocínio válido/racional. O seu estudo estava já presente em várias civilizações antigas remontando, no ocidente, a Aristóteles (384 ac-322 ac). Só em meados do século XIX, a lógica matemática – que explora as aplicações da lógica formal à matemática – se estabeleceu como um ramo próprio da matemática. Nomes como George Boole, Augustus De Morgan, Charles Peirce, Gottlob Frege, Giuseppe Peano e, um pouco mais tarde, Bertrand Russell e David Hilbert participam neste processo. Em menos de dois séculos, a lógica matemática tornou-se uma disciplina madura, multifacetada e com contributos importantes em outras áreas para além da matemática entre as quais destacamos a ciência da computação. A presença de lógicos matemáticos em departamentos de filosofia, matemática e ciência da

computação por todo o mundo mostra bem o carácter transversal e interdisciplinar da sua área de atuação. Atualmente a lógica matemática encontra-se *grosso modo* ramificada em quatro áreas: teoria de conjuntos, teoria da recursão, teoria de modelos e teoria da demonstração. O imbricamento dos vários ramos é extenso sendo, por exemplo, a lógica clássica de primeira ordem uma ferramenta transversal.

A lógica clássica, a forma mais dissimulada de pensamento matemático, baseado no paradigma da *verdade*, será justamente o tema da Secção 2 do presente artigo.

Existem, contudo, outras formas de raciocínio. Durante o século XX alguns matemáticos mudaram a sua atenção da *verdade* para a *justificação/demonstração*: a *lógica intuicionista*, que, em vez da propagação da verdade, propaga demonstrações *construtivas*, acabou de nascer. Na Secção 3, apresentaremos esta lógica e algumas das suas aplicações.

A lógica intuicionista não é, porém, o único caminho que conduz ao *construtivismo*. Este pode ser conseguido, por exemplo, através de uma dinâmica de consumos. A *lógica linear*, protagonista na Secção 4, em vez de propagar as noções de verdade ou demonstrabilidade, foca-se nos *recursos* e em como manter registo dos *consumos* ao longo de uma demonstração. Encerramos (Secção 5) com breves considerações sobre a existência de outras lógicas não-clássicas, para além das tratadas neste artigo.

## 2. LÓGICA CLÁSSICA

A matemática usual, que o leitor está habituado a ler e a usar, assenta na lógica clássica. A lógica clássica baseia-se na noção de verdade. Uma asserção declarativa, bem-formada e não ambígua terá de ser necessariamente verdadeira ou falsa (não podendo ser verdadeira e falsa em simultâneo – princípio da não-contradição). Isto independentemente do que quer que se afirme ou mesmo da existência ou não de alguma verificação ou prova. De forma sucinta, a lógica clássica<sup>1</sup> caracteriza-se por aceitar a lei do terceiro excluído (em latim *tertium non datur*):  $A \vee \neg A$  (lê-se “A ou não A”), independentemente do significado de A. Por exemplo, a veracidade de

<sup>1</sup> Para uma formalização detalhada da lógica clássica (proposicional e de predicados) incluindo sistemas formais de derivação, sugerimos a leitura de [3] (capítulos 1 e 2), a leitura de [12] (secções 3, 9, 12 e 13) e a consulta de [11].



“No dia 25 de abril de 1974 choveu em Lisboa ou não choveu em Lisboa” é um dado adquirido. Ainda que não saibamos o estado do tempo nesse dia na capital, ou bem que choveu ou bem que não choveu.

A noção que a lógica clássica pretende captar (e propagar) é a de verdade. Dado que se  $A$  é verdadeiro, então  $\neg A$  é falso, e se  $A$  é falso então  $\neg A$  é verdadeiro,

$A$	$\neg A$
V	F
F	V

concluimos que  $A \vee \neg A$  terá necessariamente de ter o valor lógico verdadeiro. Note que, para que uma disjunção seja verdadeira, basta que uma das asserções que a compõem o seja:

$A$	$B$	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Abaixo encontram-se as tabelas de verdade para outros conectivos lógicos, nomeadamente  $\wedge$  (conjunção) e  $\rightarrow$  (implicação). Relembramos que  $A \wedge B$  se lê “ $A$  e  $B$ ” e que  $A \rightarrow B$  se lê “se  $A$ , então  $B$ ”.

$A$	$B$	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

De modo equivalente<sup>2</sup>, a lógica clássica pode ser caracterizada por permitir a eliminação da dupla negação  $\neg\neg A \rightarrow A$  ou a técnica de demonstração por contradição (para provar  $A$ , basta partir de  $\neg A$  e chegar a uma contradição).

Vamos ilustrar um tipo de argumentação válido em lógica clássica que o leitor já encontrou certamente em várias demonstrações matemáticas. Concretamente, iremos demonstrar que “existem números irracionais  $a$  e  $b$  tais que  $a^b$  seja racional”.

**Teorema 1**  $\exists a, b \in \mathbb{R}$ , irracional( $a$ )  $\wedge$  irracional( $b$ )  $\wedge$  racional( $a^b$ ).

*Demonstração.* Consideremos o número  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Se for racional, temos o pretendido, basta tomar  $a$  e  $b$  como sendo ambos o número irracional  $\sqrt{2}$ . Caso contrário,  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  será irracional. Mas então

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

que é certamente um número racional. Bastando neste caso tomar  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  e  $b = \sqrt{2}$ . □

A demonstração anterior tem por base o princípio do terceiro excluído: “ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  é um número racional ou  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  não é um número racional”.

Repare, contudo, que, mesmo depois de ver a demonstração, se alguém lhe pedir números irracionais  $a$  e  $b$  tais que  $a^b$  seja racional, não terá nenhum exemplo seguro para fornecer, pois não sabe qual dos casos se dá, i.e., não sabe se  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  é racional ou irracional.

A demonstração acima não é construtiva. Prova-se a existência de dois irracionais nas condições do enunciado sem os apresentar concretamente.

Note a diferença para a demonstração que se segue, esta sim, construtiva.

*Demonstração.* Considere os números irracionais  $a := \sqrt{2}$  e  $b := 2 \log_2 3$ . Temos que

$$a^b = (\sqrt{2})^{2 \log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3 \in \mathbb{Q}.$$

$\therefore$  Existem números irracionais  $a$  e  $b$  tais que  $a^b$  seja racional. □

O leitor concordará certamente que a segunda demonstração é mais informativa do que a primeira. Elementos precisos nas condições do enunciado são apresentados.

Embora os princípios da lógica clássica possam ser muito intuitivos e as aplicações imensas – só a título de exemplo, a lógica de primeira ordem,<sup>3</sup> que está na base da linguagem de programação Prolog [16], tem aplicações na verificação sequencial de programas, no *design* de circuitos, em robótica, em inteligência artificial, em processamento de língua natural, etc. – não são a única forma de raciocínio. Dependendo do ponto de vista e dos objetivos a alcançar, poderá ser vantajoso usar outras lógicas.

### 3. LÓGICA INTUICIONISTA

A busca do *construtivo* em oposição ao meramente *verdadeiro* surgiu nos finais do século XIX, em resposta ao uso cada vez mais generalizado de noções e métodos abstractos/infinitários na prática matemática. O surgimento de paradoxos e inconsistências na formalização inicial da teoria de conjuntos, em plena viragem do século, veio aumentar os receios de que a matemática não estivesse alicerçada em pilares sólidos. Os matemáticos dividiam-se, então, entre os que achavam que o raciocínio clássico devia ser permitido, e haveria forma de o justificar finitisticamente (como David Hilbert) e os que consideravam (como L. E. J. Brouwer) que a matemática devia evitar argumentos não construtivos. Para uma percepção mais palpável do clima intelectual (com vigorosas discussões) que se vivia à época, sugerimos a leitura de [6].

Há inúmeras variantes no construtivismo. Provavelmente, a mais conhecida é o *intuicionismo*, introduzido por Brouwer no início do século XX como um programa de reconstrução da matemática. Mais tarde, a lógica intuicionista seria rigorosamente formalizada através de matemáticos como Arend Heyting, Andrey Kolmogorov, Valery Glivenko, Gerhard Gentzen, Kurt Gödel e Dag Prawitz.

O intuicionismo caracteriza-se por não aceitar, ao contrário da lógica clássica, o princípio do terceiro excluído  $A \vee \neg A$ .

Como a lógica por detrás do intuicionismo é uma de demonstrabilidade e não de verdade, para que  $A \vee \neg A$  seja aceite (i.e., para se ter uma prova de  $A \vee \neg A$ ), seria preciso termos uma prova de  $A$  ou uma prova de  $\neg A$ .

Ora, afirmações como

“ $P$  é igual a  $NP$  ou  $P$  não é igual a  $NP$ ”<sup>4</sup>

não são intuicionisticamente aceites pois não temos uma prova de  $P = NP$  nem da sua negação.

Enquanto o leitor terá experiência em ver se uma asserção é válida classicamente ou não (a propagação da verdade ao longo dos conectivos proposicionais  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  e a noção de verdade associada aos quantificadores  $\forall$  e  $\exists$  são prática comum), poderá estar a interrogar-se: “Como saber se uma asserção é válida intuicionisticamente?”.

Informalmente, pense na propagação de demonstrabilidade.

Por exemplo,  $A \wedge B$  será válida intuicionisticamente se tivermos ambas, uma prova de  $A$  e uma prova de  $B$ . A ideia é de que ambas, em conjunto, constituem uma prova da conjunção.

A implicação  $A \rightarrow B$  será válida intuicionisticamente, i.e.,

temos uma prova da implicação, se para cada prova de  $A$  formos capazes de produzir uma prova de  $B$ . Ter uma prova de  $\exists x A(x)$  é ter um elemento  $a$  do domínio de  $x$  e uma prova de  $A(a)$ . Uma prova de  $\neg A$  é uma construção que transforma cada suposta prova de  $A$  numa contradição.

Para uma completa formalização da lógica intuicionista, consulte [10].

Dado o seu carácter construtivo, a lógica intuicionista tem não só aplicações em matemática mas também em teoria da computação, funcionando como base para expressar especificações e verificar programas. Um momento chave na ligação entre lógica intuicionista e teoria da computação deu-se com o *isomorfismo de Curry-Howard* [15], quando estes dois matemáticos se aperceberam de que deduções intuicionistas apenas com implicação correspondiam à linguagem funcional conhecida como *cálculo-lambda simplesmente tipado*. A lógica era uma linguagem de programação, e a linguagem de programação uma lógica.

Voltando às duas demonstrações apresentadas na secção anterior, embora ambas classicamente válidas, deve agora ser claro que só a última é aceite intuicionisticamente (a primeira usa o princípio do terceiro excluído).

Formalizando convenientemente as lógicas clássica e intuicionista num sistema formal (axiomas + regras de dedução), podemos expressar a primeira ( $LC$ ) como a segunda ( $LI$ ) enriquecida com um único axioma: a lei do terceiro excluído, i.e.

$$LC = LI + (A \vee \neg A).$$

Embora totalmente correto, o último parágrafo pode levar o leitor ao engano, concluindo, por exemplo, que a lógica clássica seria mais abrangente, enquanto a lógica intuicionista validaria menos expressões. Afinal,  $A \vee \neg A$  é válida classicamente mas não intuicionisticamente.

<sup>2</sup> Esta equivalência pressupõe a lógica clássica formalizada num sistema formal com axiomas e regras de dedução, e.g. sistema de Hilbert, cálculo de sequentes, cálculo de dedução natural, etc. Para uma apresentação detalhada dos primeiros dois sistemas, consulte [2], o sistema de dedução natural, a par com os outros dois sistemas, é apresentado em [18] e [12].

<sup>3</sup> Também conhecida por cálculo de predicados.

<sup>4</sup> Relembramos que a questão de  $P$  ser ou não igual a  $NP$ , colocada em 1971 por Stephen Cook, continua em aberto e a resposta poderá ter enorme impacto em ciência da computação. O Clay Mathematics Institute oferece desde o ano 2000 um prémio de um milhão de dólares a quem apresente a primeira resposta correta à questão. Para uma explicação do problema  $P$  versus  $NP$  sugerimos a consulta de [5].

Tal é apenas uma ilusão!

A lógica intuicionista é muito mais poderosa, podendo expressar todo o raciocínio clássico. O segredo está em que devemos perceber os conectivos da lógica intuicionista não na mesma dinâmica dos da lógica clássica mas como um refinamento destes.

Ora vejamos:

enquanto classicamente (pelas leis de De Morgan e da dupla negação) se tem que  $A \vee B$  é logicamente equivalente a  $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ , i.e.,

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B),$$

ou seja, classicamente a disjunção coincide com a negação da conjunção das negações (e, portanto, a validade de uma segue automaticamente da validade da outra), intuicionisticamente, são asserções distintas.

Analisemos o seguinte caso particular (em que  $B$  é  $\neg A$ ). Classicamente, temos:

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge A)$$

que, como sabemos, é uma equivalência entre asserções válidas (verdadeiras).

Ora intuicionisticamente, como já vimos,  $A \vee \neg A$  não é, em geral, válida (nem sempre se consegue exibir uma prova de  $A$  ou de  $\neg A$ ), mas  $\neg(\neg A \wedge A)$  é intuicionisticamente válida (qualquer suposta prova de  $\neg A \wedge A$ , i.e., uma prova de  $A$  e uma prova de  $\neg A$ , nos levaria a uma contradição).

Enquanto no cálculo clássico a disjunção não acrescenta absolutamente nada em relação à negação e à conjunção, podendo ser definida através destes últimos conectivos, a disjunção intuicionista é algo novo, um grau de refinamento acima, inexistente na lógica clássica.

Idêntico comentário poderia ser feito em relação ao quantificador existencial. Em lógica clássica,  $\exists$  podia não ser um símbolo primitivo, sendo simplesmente definido através da negação e do quantificador universal através de

$$\exists x A(x) :\Leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x).$$

Quando classicamente afirmamos que  $\exists x A(x)$ , não é necessário que conheçamos nenhum elemento nessas condições, basta saber que não é verdade que nenhum esteja nessas condições; em lógica intuicionista,  $\exists x A(x)$  é mais forte do que  $\neg \forall x \neg A(x)$ , realmente requer a apresentação da testemunha.

Que o raciocínio intuicionista é um refinamento do raciocínio clássico, contendo este último, fica evidente atra-

vés do seguinte (bem conhecido) resultado, que apresenta uma tradução<sup>5</sup> da lógica clássica na lógica intuicionista:

**Proposição 2.** *Considere a seguinte tradução  $(\cdot)^+$  de fórmulas da lógica clássica em fórmulas da lógica intuicionista, definida indutivamente por<sup>6</sup>:*

$$\begin{aligned} A_{\text{at}}^+ &::= \neg \neg A_{\text{at}}, \text{ se } A_{\text{at}} \text{ é uma fórmula atômica} \\ (A \wedge B)^+ &::= A^+ \wedge B^+ \\ (A \vee B)^+ &::= \neg(\neg A^+ \wedge \neg B^+) \\ (A \rightarrow B)^+ &::= A^+ \rightarrow B^+ \\ (\forall x A)^+ &::= \forall x A^+ \\ (\exists x A)^+ &::= \neg \forall x \neg A^+ \end{aligned}$$

*Se  $A$  é classicamente válida então  $A^+$  é intuicionisticamente válida.*

*Demonstração.* A demonstração é por indução no tamanho da derivação de  $A$  em lógica clássica<sup>7</sup>. Veja [15].

□

Ou seja, temos uma imersão da lógica clássica na lógica intuicionista.

## LÓGICA LINEAR

Por volta de 1987, motivado por um entendimento mais profundo da semântica do cálculo-lambda, Jean-Yves Girard [8] introduz uma nova lógica, a *lógica linear*. Enquanto a lógica clássica assenta no conceito de verdade e a lógica intuicionista, no de demonstrabilidade, a lógica linear pretende captar a ideia de *posse de recursos e consumos*. Embora, com esta parca descrição, a ligação não se adivinhe de imediato, veremos adiante que a lógica linear é muitíssimo expressiva, sendo inclusive um refinamento da lógica clássica e da intuicionista.

Tentemos motivar a ideia por detrás da lógica linear com um exemplo.

Suponha que sabe que as seguintes asserções são válidas:

1.  $A$
2.  $A \rightarrow B$
3.  $A \rightarrow C$ .

Num raciocínio clássico ou intuicionista, poderíamos concluir que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são todas asserções válidas. Em lógica clássica, basta atentar na tabela de verdade para a implicação apresentada na Secção 2: implicações verdadeiras com ante-



cedente verdadeiro têm de ter conseqüente verdadeiro. Em lógica intuicionista, basta observar que se estamos na posse de uma prova de  $A$  e temos forma de a partir de uma prova de  $A$  chegar não só a uma prova de  $B$  mas também a uma prova de  $C$ , no final garantimos provas para  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

O raciocínio da lógica linear é diferente. Pense em recursos e na implicação  $A \rightarrow B$  como indicando que, tendo o recurso  $A$ , posso produzir o recurso  $B$  (note, contudo, que nesse processo o recurso inicial  $A$  é consumido). Se temos  $A$  e se sabemos que de  $A$  podemos produzir  $B$  e de  $A$  podemos produzir  $C$ , em lógica linear podemos deduzir  $B$  ou deduzir  $C$ , mas não ambos. Usar  $A$  na implicação 2. acima irá consumi-lo, não estando já mais disponível para a implicação 3. e vice-versa.

Note que a lógica por detrás das receitas culinárias ou das experiências químicas é linear. Como veremos no final da secção, o universo de aplicações deste tipo de raciocínio é, todavia, muito mais vasto!

Enquanto nas lógicas clássica e intuicionista usamos os mesmos símbolos  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  para designar conectivos ainda que com diferentes graus de refinamento consoante a lógica (relembramos, por exemplo, que o  $\vee$  intuicionista é mais refinado do que o  $\vee$  clássico), em lógica linear usamos símbolos diferentes, correspondendo, nalguns casos, a uma duplicação dos conectivos anteriores.

Por exemplo, a implicação da lógica linear, a tal que segue a dinâmica do consumo de recursos, é denotada por  $\multimap$  para a distinguir da habitual  $\rightarrow$ .

De ora em diante, por lógica linear referimo-nos à lógica linear intuicionista e não à lógica linear clássica (esta última tem mais conectivos sem ganho em poder expressivo).

A título de curiosidade, na lógica linear, além de  $\multimap$ , existem (entre outros) conectivos como:

$$\otimes, \&, !.$$

Para uma completa apresentação da sintaxe da lógica linear, consulte [17].

Os conectivos  $\otimes$  e  $\&$  correspondem a diferentes formas de  $\wedge$ .

Imagine que de  $A \wedge B$  se deduz  $C$  e que nessa dedução ambos  $A$  e  $B$  são essenciais. Essa noção cumulativa (multiplicativa) de conjunção é expressa em lógica linear pelo conectivo  $\otimes$ . Num cenário diferente, imagine que de  $A$  se deduz  $C$ , então obviamente pode concluir que de  $A \wedge B$  se deduz  $C$ . Nesta última conjunção, para deduzir  $C$  não precisa de  $A$  e  $B$  em simultâneo,

escolhe qual deles usa, neste caso o  $A$ . Esta última noção não-cumulativa (aditiva) de conjunção é captada pelo conectivo  $\&$ . É usual pensar-se em  $\otimes$  como significando “ambos” e em  $\&$  como “estando ambos disponíveis (e daí o seu carácter conjuntivo), optamos por apenas um”. O exemplo seguinte ajuda a ilustrar a coexistência das duas formas de conjunção. Imagine uma máquina de refrigerantes que contém dois tipos de bebidas,  $A$  e  $B$ , custando 1 euro cada, e que o valor que introduzimos na máquina tem de coincidir exatamente com o custo dos produtos selecionados. Se introduzirmos duas moedas de 1 euro podemos obter  $A \otimes B$  mas não  $A \& B$ . Note que na primeira situação ( $A \otimes B$ ), adquirimos ambas as bebidas, o que corresponde exatamente ao valor dos 2 euros introduzidos na máquina. Na segunda situação ( $A \& B$ ) ambos os recursos estão disponíveis (i.e., existem na máquina ambas as bebidas) mas vemo-nos obrigados a optar por apenas uma delas, e qualquer uma das bebidas isoladamente não corresponde a um custo de 2 euros. Todavia, se introduzirmos apenas 1 euro na máquina obtemos  $A \& B$ , i.e. podemos escolher qual a bebida que queremos dentre  $A$  e  $B$ , mas não  $A \otimes B$ , pois a máquina não libertará ambas as bebidas mediante o pagamento de apenas 1 euro.

O conectivo  $!$  (que se lê *bang*) existe em lógica linear para que, com o foco em manter registo de consumos, não se perca a expressividade das lógicas anteriores. Essencialmente, quando temos  $!A$  podemos pensar no recurso  $A$  como sendo ilimitado, isto é, temos tantas cópias de  $A$  quantas quisermos. É como se nessa situação em particular escolhêssemos deixar de pensar em consumíveis para voltar à dinâmica da verdade ou da demonstrabilidade. Com o exponencial  $!$ , a lógica linear capta facilmente o raciocínio intuicionista e, por maioria de razão, o clássico.

A afirmação anterior é confirmada pela tradução abaixo<sup>8</sup> (uma das várias possíveis) da lógica intuicionista na lógica linear:

<sup>5</sup> Existem variadíssimas traduções da lógica clássica na lógica intuicionista tendo sido a primeira introduzida por Kolmogorov [9] em 1925. Para um estudo comparativo das traduções mais frequentes na literatura, veja [7].

<sup>6</sup> Uma fórmula atômica, abaixo representada por  $A_{\text{at}}$ , é uma fórmula que não contém nenhuma fórmula mais simples, ou seja, é uma fórmula que não contém  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\forall$  nem  $\exists$ .

<sup>7</sup> Estamos a considerar sistemas dedutivos formais (corretos e completos) para a lógica clássica e para a lógica intuicionista.

<sup>8</sup> A tradução usada na Proposição 3 foi apresentada por Girard em [8].

**Proposição 3.** Considere a seguinte tradução  $(\cdot)^*$  de fórmulas da lógica intuicionista para fórmulas da lógica linear, definida indutivamente por:

$$\begin{aligned} A_{\text{at}}^* & : \equiv A_{\text{at}}, \text{ se } A_{\text{at}} \neq \perp \text{ é uma fórmula atômica} \\ \perp^* & : \equiv 0 \\ (A \wedge B)^* & : \equiv A^* \& B^* \\ (A \vee B)^* & : \equiv !A^* \oplus !B^* \\ (A \rightarrow B)^* & : \equiv !A^* \multimap B^* \\ (\forall x A)^* & : \equiv \forall x A^* \\ (\exists x A)^* & : \equiv \exists x !A^* \end{aligned}$$

Se  $A$  se prova em lógica intuicionista, então  $A^*$  prova-se em lógica linear.<sup>9</sup>

*Demonstração.* A demonstração sai fora do âmbito deste artigo. Consulte [14].

□

Ou seja, existe uma imersão da lógica intuicionista, e portanto também da clássica, na lógica linear.

Note que o conectivo intuicionista  $\rightarrow$  corresponde em lógica linear a  $\multimap$  com o antecedente precedido por  $!$ . Tal vem completamente de encontro à discussão dos conectivos feita anteriormente: a implicação  $\rightarrow$ , ao contrário de  $\multimap$ , não consume o antecedente, razão pela qual é traduzida recorrendo a  $!$ , que torna o recurso ilimitado.

A lógica linear foi acolhida com grande entusiasmo por lógicos matemáticos mas também (até talvez mais enfaticamente) por investigadores em ciência da computação. Dada a sua capacidade de controlar recursos, captou imediatamente o interesse de *designers* de linguagens de programação. Note que, por exemplo, na implementação de *software*, a gestão de recursos é uma questão de grande relevância. Entre outras, destacamos a aplicação da lógica linear à programação funcional, à inteligência artificial e à teoria da simultaneidade (*concurrency*). Veja [4].

Dos inúmeros artigos científicos que anualmente surgem sobre lógica linear, apenas uma minoria é sobre a lógica linear em si mesma, sendo a maioria trabalhos em que a lógica linear é aplicada com sucesso a diversas áreas (praticamente todas) da ciência da computação, algumas com enorme impacto prático. Tal facto espelha bem o carácter multidisciplinar da lógica introduzida por Girard.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não queremos de forma alguma que o leitor fique com a ideia de que as lógicas levemente dadas a conhecer neste artigo – intuicionista e linear – esgotam o leque das lógicas não-clássicas. Tal está completamente longe da verdade. A título de exemplo, apontamos outras duas: a *lógica modal* [1] (que permite expressar conceitos como os de possibilidade, necessidade, probabilidade, eventualidade,... e tem aplicações a diversas áreas da ciência da computação, e.g., inteligência artificial, engenharia de *software*, linguística computacional) e a *lógica fuzzy* [13] (que lida com raciocínio que não é exato nem fixo, mas sim aproximado: o valor de verdade varia no intervalo real [0,1] e tem notáveis aplicações práticas. Talvez a mais mediática tenha sido o uso de lógica *fuzzy* para controlar comboios de alta velocidade em Sendai, Japão, aumentando consideravelmente a eficiência e o conforto e diminuindo o tempo de paragem. Entre outras aplicações concretas, destacamos o reconhecimento de escrita manual em plataformas digitais, a previsão de terramotos e o controlo da ventilação dos sistemas de ar condicionado).

## AGRADECIMENTOS

A autora agradece o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia (bolsas SFRH/BPD/34527/2006 e SFRH/BPD/93278/2013), do CMAF – Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais da Universidade de Lisboa e do NIM – Núcleo de Investigação em Matemática da Universidade Lusófona. A autora agradece também ao revisor anónimo sugestões pertinentes, nomeadamente em termos de bibliografia.

## REFERÊNCIAS

- [1] P. Blackburn, M. Rijke, Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 53, Cambridge University Press, 2002.
- [2] S. Buss. “An Introduction to Proof Theory”, *Handbook of Proof Theory*. Edited by S. R. Buss, Elsevier Science, 1998.
- [3] D. van Dalen. *Logic and Structures*. Springer-Verlag (fourth edition), 2008.

[4] T. Ehrhard, J.-Y. Girard, P. Ruet, P. Scott. *Linear Logic in Computer Science*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 316, Cambridge University Press, 2004.

[5] F. Ferreira. "O problema *P versus NP*". *2000 Matemática Radical*. Coletânea organizada por Miguel Ramos, Jorge Nuno Silva e Luís Trabucho. Textos de Matemática, Departamento de Matemática da Universidade de Lisboa, pp. 1-15, 2002.

[6] F. Ferreira. "Grundlagenstreit e o intuicionismo Brouweriano". *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*. 58:1-23, 2008.

[7] G. Ferreira, P. Oliva. "On the Relation Between Various Negative Translations". *Logic, Construction, Computation*. Ontos-Verlag Mathematical Logic Series, 3:227-258, 2012.

[8] J.-Y. Girard. "Linear logic". *Theoretical Computer Science*, 50(1):1-102, 1987.

[9] A.N. Kolmogorov. "On the Principle of the Excluded Middle" (Russian). *Mat. Sb.*, 32:646-667, 1925.

[10] G. Mints. *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*. The University Series in Mathematics, Springer US, 2002.

[11] Augusto J. Franco de Oliveira. *Lógica e Aritmética: Uma Introdução Informal aos Métodos Formais*. Gradiva, Lisboa, 1991.

[12] Augusto J. Franco de Oliveira. "Sistemas dedutivos". Publicação online acessível em: <https://sites.google.com/site/tutas-place/Home/cursos>.

[13] T. Ross. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. Wiley, 2004.

[14] H. Schellinx. "Some syntactical observations on linear logic". *Journal of Logic and Computation*, 1(4):537-559, 1991.

[15] M.H. Sørensen, P. Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 149, Elsevier, 2006.

[16] L. Sterling, E. Shapiro. *The Art of Prolog*. MIT Press Series in Logic Programming, second edition, 1994.

[17] A. S. Troelstra. "Lectures on Linear Logic". Center of the Study of Language and Information – Lecture Notes, 29, 1992.

[18] A. S. Troelstra, H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory*, second edition. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 43, Cambridge University Press, 2000.

#### SOBRE A AUTORA

**Gilda Ferreira** é doutorada em Matemática, área de Álgebra, Lógica e Fundamentos, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Detém atualmente uma bolsa de pós-doutoramento da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no Lasige (Laboratório de Sistemas Informáticos de Grande Escala) - Universidade de Lisboa. É Professora Auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias e membro do CMAF (Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais).

<sup>9</sup> Pense no símbolo  $\perp$  como significando absurdo (é comum formular as lógicas clássica e intuicionista numa linguagem em que os símbolos primitivos são  $\perp$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\forall$  e  $\exists$  e definir  $\neg A$  como abreviando  $A \rightarrow \perp$ ). Os símbolos  $0$  e  $\oplus$  devem ser entendidos como uma versão linear do falso e da disjunção. Para uma completa formulação das lógicas intuicionista e linear consulte a Secção 3 de [2].



# Afinal, o Que São e Como se Calculam os Quartis?

SUSANA FERNANDES E MÓNICA PINTO

UNIVERSIDADE DO ALGARVE

[sfer@ualg.pt](mailto:sfer@ualg.pt) e [martinsmonica.wix.com/matematica](http://martinsmonica.wix.com/matematica)



Sabia que existem vários métodos para o cálculo dos quartis? Se usar uma máquina de calcular, uma folha de cálculo e um programa estatístico para determinar os quartis de um mesmo conjunto de dados os resultados obtidos podem não coincidir. Conheça a diferença entre o método apresentado nos ensinos básico e secundário e o método apresentado no ensino superior.

## INTRODUÇÃO

Imaginemos que queremos calcular os quartis de um conjunto de dados. Se consultarmos vários manuais de matemática do ensino básico e do ensino secundário e sebatas de estatística do ensino superior encontramos diferentes definições e fórmulas para o cálculo dos quartis, que algumas vezes conduzem a resultados diferentes. Se recorrermos a meios tecnológicos para determinar o valor dos quartis do mesmo conjunto de dados, usando uma máquina de calcular, uma folha de cálculo ou um programa estatístico, pode acontecer que fiquemos com mais algumas respostas diferentes. Afinal, o que são e como se calculam os quartis? Neste texto abordaremos a questão, considerando apenas dados discretos não agrupados. Salientamos que nos ensinos básico e secundário se ensinam formas de cálculo dos quartis distintas da apresentada no ensino superior, sem que seja referido que existem vários métodos para o cálculo dos quartis. Argumentamos que o método introduzido no ensino superior é preferível e apresentamos uma proposta de uniformização do cálculo dos quartis em todos os níveis de ensino.

## QUARTIS – DEFINIÇÃO SIMPLES

Uma forma simples, mas pouco rigorosa, de definir os quartis é:

**Definição 1:** Quartis são os valores que dividem um conjunto de dados em quatro partes iguais.

Uma vez ordenado o conjunto de dados, o segundo quartil ( $Q_2$ ), mais conhecido como mediana, é o valor central dos dados. Isto é, a mediana é o valor que divide o conjunto de dados em duas partes (metades) com igual número de elementos; a primeira metade com os elementos do conjunto de valor não superior à mediana e a segunda metade com os dados de valor não inferior à mediana. Depois o primeiro quartil ( $Q_1$ ) será a mediana da primeira metade do conjunto de dados e o terceiro quartil ( $Q_3$ ) será, analogamente, a mediana da segunda metade do conjunto de dados. Consideremos, por exemplo, o conjunto de dados, já ordenado

$$\{x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 10, x_5 = 14, x_6 = 18, \\ x_7 = 21, x_8 = 25, x_9 = 29, x_{10} = 32\}.$$

Ao todo temos 10 elementos, logo, o valor central dos dados estará entre o quinto e o sexto elementos, isto é, entre  $x_5 = 14$  e  $x_6 = 18$ . O ponto médio entre 14 e 18 é 16 e, por isso, considera-se  $Q_2 = 16$ . Este valor divide o conjunto de dados em duas metades:  $\{x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 10, x_5 = 14\}$  e  $\{x_6 = 18, x_7 = 21, x_8 = 25, x_9 = 29, x_{10} = 32\}$ . Agora o primeiro quartil será o valor central do primeiro subconjunto. Este subconjunto tem um número ímpar de elementos, logo, o valor central é um elemento do subconjunto – o elemento  $x_3 = 6$ , logo  $Q_1 = 6$ . Da mesma forma, o terceiro quartil será a mediana do subconjunto  $\{x_6 = 18, x_7 = 21, x_8 = 25, x_9 = 29, x_{10} = 32\}$  e, mais uma vez, como o número de elementos deste subconjunto é ímpar, o valor central é  $x_8 = 25$ , logo  $Q_3 = 25$ .

Consideremos agora o conjunto de dados

$$\{x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 10, x_5 = 14, \\ x_6 = 18, x_7 = 21, x_8 = 25, x_9 = 29\}$$

com nove elementos (usamos a letra  $n$  para representar o número de elementos do conjunto, neste caso  $n = 9$ ). Como o número de elementos é ímpar, a mediana (segundo quartil) será o elemento central, isto é  $Q_2 = x_5 = 14$ . Até aqui, tudo bem. Mas agora como é que dividimos o conjunto de dados em duas metades? O elemento  $x_5$  deve ser incluído em ambas as metades, em nenhuma das duas ou apenas numa delas? Esta incerteza origina diferentes métodos de cálculo dos quartis. Vejamos dois deles.

**Método inclusivo:** Quando o conjunto de dados tem um número ímpar de elementos, o elemento correspondente a  $Q_2$  é incluído em ambas as metades do conjunto de dados para cálculo dos  $Q_1$  e  $Q_3$ .

Usando este método as duas metades do conjunto de dados serão  $\{x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 10, x_5 = 14\}$  e  $\{x_5 = 14, x_6 = 18, x_7 = 21, x_8 = 25, x_9 = 29\}$  e então teremos  $Q_1 = x_3 = 6$  e  $Q_3 = x_7 = 21$ . Repare-se que tendo o conjunto de dados  $n$  elementos, desta forma cada uma das metades terá  $(n + 1)/2$  elementos.

**Método exclusivo:** Quando o conjunto de dados tem um número ímpar de elementos, o elemento correspondente a  $Q_2$  não é incluído em nenhuma das metades do conjunto de dados para cálculo dos  $Q_1$  e  $Q_3$ .

Usando este método, as duas metades do conjunto de dados serão  $\{x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 10\}$  e  $\{x_6 = 18, x_7 = 21, x_8 = 25, x_9 = 29\}$  e então teremos  $Q_1 = (x_2 + x_3)/2 = 4.5$  e  $Q_3 = (x_7 + x_8)/2 = 23$ . Repare-se que tendo o conjunto de dados  $n$  elementos, desta forma cada uma das metades terá  $(n - 1)/2$  elementos.

O processo de determinação de cada quartil inclui dois passos: primeiro, determinar a posição do quartil no conjunto de dados; segundo, calcular o valor do quartil. Quando o quartil coincide com um elemento do conjunto de dados, dizemos que a sua posição é um valor inteiro  $k$ , e neste caso o valor do quartil é imediato. Por exemplo, para o conjunto de dados inicial com 10 elementos, a posição de  $Q_1$  é  $k = 3$ , logo o seu valor é  $Q_1 = x_3 = 6$ . Quando o quartil fica entre dois elementos dizemos que a sua posição é um valor não inteiro. Ainda neste conjunto de dados com  $n = 10$ , a posição de  $Q_2$  é entre os elementos  $x_5$  e  $x_6$ , pelo que dizemos que a sua posição é  $k = 5.5$  e, neste caso, é necessário calcular o seu valor fazendo, por exemplo, a semi-soma dos valores dos elementos nas posições 5 e 6, isto é,  $Q_2 = (x_5 + x_6)/2 = (14 + 18)/2 = 16$ .

A posição dos quartis pode também ser calculada matematicamente. Todos os métodos determinam a posição da mediana (segundo quartil) da mesma forma. Considere-se um conjunto de dados ordenado com  $n$  elementos  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$ .

**A posição de  $Q_2$  num conjunto de dados com  $n$  elementos é  $(n+1)/2$ .**

$n$ par		$n$ ímpar		
$Q_1$	$Q_3$	$Q_1$	$Q_3$	
$k = \frac{n+2}{4}$	$k = \frac{3n+2}{4}$	$k = \frac{n+3}{4}$	$k = \frac{3n+1}{4}$	Método inclusivo
		$k = \frac{n+1}{4}$	$k = \frac{3n+3}{4}$	Método exclusivo

Tabela 1: Fórmulas para cálculo das posições de  $Q_1$  e  $Q_3$ .

$k$ inteiro	$Q_p = x_k$
$k$ não inteiro $i < k < i + 1$	$Q_p = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Tabela 2: Fórmulas para cálculo do valor de  $Q_p$  dada a sua posição  $k$ .

Já a forma de determinar a posição dos  $Q_1$  e  $Q_3$  no conjunto de dados varia consoante o método utilizado.

A Tabela 1 apresenta as fórmulas para cálculo das posições dos primeiro e terceiro quartis correspondentes aos métodos inclusivo e exclusivo.

Uma vez conhecida a posição dos quartis, a forma de cálculo do seu valor é igual em ambos os métodos. A tabela 2 apresenta a forma de calcular um quartil  $Q_p$ , dada a sua posição  $k$  no conjunto de dados.

Todos os manuais do ensino básico consultados ensinam a determinar os quartis usando o método exclusivo, de acordo com as indicações do Ministério da Educação e Ciência [1]. Começam por definir a mediana como o centro do conjunto de dados ordenado e depois definem o 1.º quartil como sendo a mediana dos dados que ficam à esquerda da mediana do conjunto de dados e o 3.º quartil como sendo a mediana dos dados que ficam à direita da mediana do conjunto de dados. Os manuais do ensino secundário consultados ensinam também o método exclusivo (embora a brochura de estatística do 10.º ano faça referência aos métodos inclusivo e exclusivo [4]), apresentando as fórmulas para determinação das posições dos quartis. Em nenhum manual dos ensinos básico e secundário encontramos informação sobre a existência de outros métodos para o cálculo dos quartis. Quando no ensino superior se ensina outro método para o cálculo dos quartis (que algumas vezes conduz a valores distintos), os alunos reagem

com alguma ‘desconfiança’ e confusão relativamente ao conceito de quartil.

Existem muitos métodos para o cálculo dos quartis, diferenciando quer no primeiro passo do processo (determinação da posição dos quartis) quer no segundo passo do processo (cálculo do valor dos quartis). Quando a posição dos quartis no conjunto de dados não é um inteiro, os métodos inclusivo e exclusivo calculam a semissoma dos valores dos elementos do conjunto de dados mais próximos da posição do quartil. Métodos há que arredondam a posição do quartil, sendo este sempre igual a um elemento do conjunto de dados, e existem métodos com formas de arredondamentos distintas. Outros métodos optam por fazer interpolação dos valores dos elementos mais próximos da posição do quartil. Por exemplo, imaginemos que a posição do quartil é 2.85. Fazendo interpolação, o valor do quartil seria dado por  $0.85 \times x_2 + 0.15 \times x_3$ . O leitor interessado encontrará no artigo [3] a descrição de 15 métodos para o cálculo de quartis, assim como a equivalência entre alguns deles e as respetivas referências.

Mas, então, qual será o melhor método para calcular os quartis? Depende do uso que deles queremos fazer.

## QUARTIS VISTOS COMO ESTIMADORES

No ensino superior interessa-nos olhar para os dados como valores observados de uma dada população e, neste sentido, o conjunto de dados é uma amostra de observações e as medidas calculadas com base na amostra são vistas como estimativas de parâmetros da população subjacente (assume-se que a amostra é aleatória e representativa da população em estudo – neste texto não abordaremos o assunto da recolha/construção de uma amostra válida). Ora, a forma de calcular os quartis nos ensino básico e secundário, embora muito intuitiva, não fornece um bom estimador para o parâmetro da população correspondente (ver, por exemplo, [2] pág. 87). Para perceber de que parâmetros falamos, interessa aqui introduzir o conceito de percentil (ou quantil). Considere-se  $X$  a variável aleatória discreta que representa a característica da população em estudo. Percentil populacional de proporção  $p$  (ou de percentagem  $100p\%$ ) é o valor  $P_p$  tal que  $P(X \leq P_p) \geq p$  e  $P(X \geq P_p) \geq 1 - p$ . O primeiro quartil é, pois, o percentil de proporção 0.25, isto é, o valor  $P_{0.25}$  tal que a probabilidade de a variável  $X$  tomar um valor não superior a  $P_{0.25}$  é, pelo menos, 0.25 e simultaneamente a probabilidade

de a variável  $X$  tomar um valor não inferior a  $P_{0.25}$  é, pelo menos, 0.75. Analogamente, o terceiro quartil é o percentil de proporção 0.75 (75%) e o segundo quartil (mediana) é o percentil de proporção 0.5 (50%).

Quem é que nunca ouviu a mãe de uma criança pequena comentar ‘O meu filho está no percentil 95 da altura’? O que isto significa é que, considerando todas as crianças portuguesas com a mesma idade do filho da senhora, pelo menos, 95% dessas crianças terão uma altura não superior à altura do filho da senhora e simultaneamente, pelo menos, 5% dessas crianças terão uma altura não inferior à altura do filho da senhora. Dada uma amostra representativa da população descrita pela variável aleatória  $X$ , estimamos a probabilidade de a variável assumir um valor não superior a determinado valor  $x$  pela proporção de valores não superiores a  $x$  na amostra, isto é, estimamos a função de distribuição de  $X$  pela função de distribuição cumulativa dos valores da amostra. Assim uma definição rigorosa e geral para todos os percentis amostrais será:

**Definição 2:** Percentil amostral de proporção  $p$  –  $P_p$  – é o valor tal que a proporção de valores da amostra não superiores a  $P_p$  é, pelo menos,  $p$  e simultaneamente a proporção de valores da amostra não inferiores a  $P_p$  é, pelo menos,  $1 - p$ .

Chamamos aqui a atenção para o facto de, ao adotar o método exclusivo para o cálculo dos quartis, que produz valores de quartis que não respeitam esta definição, as metas curriculares do ensino básico optam por pedir apenas que os alunos saibam reconhecer que, pelo menos, 75% dos dados da amostra é não inferior ao primeiro quartil e, pelo menos, 75% dos dados da amostra é não superior ao terceiro quartil, induzindo uma definição dos quartis pouco rigorosa e também pouco intuitiva ([1] OTD8 1.4 pág. 72).

Baseado na definição 2 surge um método para o cálculo dos percentis de uma amostra que muitas vezes se designa por método CDF, do inglês, *cumulative distribution function*. O leitor interessado encontrará no artigo [3] a demonstração de que o método CDF produz sempre um percentil de acordo com esta definição.

**Método CDF:** Dada uma amostra com  $n$  observações, se  $np$  é um valor inteiro, então  $P_p = (x_{np} + x_{np+1})/2$ ; se  $np$  não é um valor inteiro, seja  $k$  a parte inteira de  $np$ , então  $P_p = x_{k+1}$ .

Este método produz um bom estimador para o percentil populacional, mas tem a desvantagem de não ser nada intuitivo. Os métodos inclusivo e exclusivo referidos anteriormente, embora intuitivos, além de não produzirem bons estimadores, têm também a desvantagem de não ser generalizáveis ao cálculo de outros percentis que não os quartis.

### PROPOSTA PARA UNIFORMIZAÇÃO DO CÁLCULO DOS QUARTIS EM TODOS OS CICLOS DE ENSINO

Como dissemos na introdução deste texto, o facto de ensinarmos ao longo dos vários ciclos de ensino formas diferentes de calcular os quartis que em certas situações conduzem a valores distintos, sem que logo de início se refira que existem diferentes métodos para o fazer, é desconfortável para os alunos e confunde-os, o que em nada contribui para a aquisição do conceito e dá origem a uma certa desconfiança relativamente à estatística. Argumentamos que tal é evitável e divulgamos uma forma mais intuitiva do método CDF, passível de ser ensinada nos ciclos básico e secundário do ensino português. Voltemos à noção intuitiva de que os quartis dividem uma amostra com  $n$  observações em quatro partes iguais. Ora, ao fazer a divisão inteira de  $n$  por 4 ou o resto dá 0 ou dá 1 ou dá 2 ou dá 3. Isto é, dado  $n$  o número de observações da amostra, existe um  $m$  inteiro não negativo tal que ou  $n = 4m$ , ou  $n = 4m + 1$ , ou  $n = 4m + 2$ , ou  $n = 4m + 3$ . Podemos então determinar as fórmulas para a posição dos primeiro e terceiro quartis segundo o método CDF de acordo com o resto da divisão inteira de  $n$  por 4 da forma explicitada

	$n = 4m$	$n = 4m + 1$	$n = 4m + 2$	$n = 4m + 3$
$Q_1$	$k = \frac{n+2}{4}$	$k = \frac{n+3}{4}$	$k = \frac{n+2}{4}$	$k = \frac{n+1}{4}$
$Q_3$	$k = \frac{3n+2}{4}$	$k = \frac{3n+1}{4}$	$k = \frac{3n+2}{4}$	$k = \frac{3n+3}{4}$

Tabela 3: Fórmulas para cálculo das posições de  $Q_1$  e  $Q_3$  com o método CDF.

na Tabela 3.

Note-se que as fórmulas são iguais nos casos em que o resto da divisão inteira de  $n$  por 4 é 0 ou 2, isto é, quando o  $n$  é par. Alternativamente, podemos organizar a tabela para  $n$  par e ímpar, considerando dois casos para  $n$  ímpar – um quando o

	$n$ par	$n$ ímpar	
		$n = 4m + 1$	$n = 4m + 3$
$Q_1$	$k = \frac{n+2}{4}$	$k = \frac{n+3}{4}$	$k = \frac{n+1}{4}$
$Q_3$	$k = \frac{3n+2}{4}$	$k = \frac{3n+1}{4}$	$k = \frac{3n+3}{4}$

Tabela 4: Fórmulas para cálculo das posições de  $Q_1$  e  $Q_3$  com o método CDF – apresentação alternativa.

resto é 1 e outro quando o resto é 3, como mostra a Tabela 4. Note-se que a posição da mediana (segundo quartil) continua a ser dada por  $(n + 1)/2 = (2n + 2)/4$ , para todos os valores de  $n$ .

Uma vez conhecida a posição dos quartis, a forma de cálculo do seu valor é igual ao apresentado para os métodos inclusivo e exclusivo na Tabela 2. Isto é, quando a posição do quartil é um número inteiro, o seu valor é igual ao da observação nessa posição na amostra; no caso de a posição do quartil não dar um número inteiro, o valor do quartil será dado pela semissoma das observações mais próximas dessa posição não inteira.

Repare-se que no caso em que  $n = 4m + 1$ , as fórmulas para o cálculo da posição dos quartis com o método CDF coincidem com as fórmulas do método inclusivo e, no caso em que  $n = 4m + 3$ , as fórmulas do método CDF coincidem com as fórmulas do método exclusivo. Assim, uma forma intuitiva de apresentar o método CDF ao alunos dos ensinos básico e secundário será o de, definindo os quartis como as medianas das metades inferior e superior da amostra, apresentar a problemática que surge no caso de  $n$  ser ímpar – incluir ou não a mediana da amostra nas duas metades a considerar para cálculo dos quartis – e indicar o uso do método inclusivo quando  $n$  a dividir por 4 dá resto 1 e o uso do método exclusivo quando  $n$  a dividir por 4 dá resto 3.

No artigo [3], o autor sugere que, definindo os quartis como as medianas das metades inferior e superior da amostra e apresentada a problemática de incluir ou não a mediana da amostra nas duas metades no caso de  $n$  ser ímpar, se apresente a solução de, quando  $n$  ímpar, incluir ou não a mediana da amostra nas metades inferior e superior da amostra por forma a que o número de elementos das metades também seja ímpar. Esta forma de apresentação do método CDF evita a referência ao resto da divisão inteira, o que poderá ser preferível no ensino básico.



Assim, por exemplo, para uma amostra com  $n = 5$  observações (note-se que a divisão inteira de 5 por 4 dá resto 1), por exemplo  $\{x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 10, x_5 = 14\}$ , a mediana será  $Q_2 = x_3 = 6$  e as metades a considerar irão incluir a mediana, sendo  $\{x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6\}$  e  $\{x_3 = 6, x_4 = 10, x_5 = 14\}$ , o que conduzirá a  $Q_1 = x_2 = 3$  e  $Q_3 = x_4 = 10$ . Já para uma amostra com, por exemplo, 7 observações (note-se que a divisão inteira de 7 por 4 dá resto 3), por exemplo

$\{x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 10, x_5 = 14, x_6 = 18, x_7 = 21\}$ , a mediana será  $Q_2 = x_4 = 10$  e as metades a considerar não incluirão a mediana, sendo  $\{x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6\}$  e  $\{x_5 = 14, x_6 = 18, x_7 = 21\}$ , o que conduzirá a  $Q_1 = x_2 = 3$  e  $Q_3 = x_6 = 18$ .

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas metas curriculares do ensino básico justifica-se a escolha do método exclusivo para cálculo dos quartis pela sua simplicidade e pelo facto de este ser o método programado na grande maioria das calculadoras ([2] pág. 89). Nas atividades de carácter investigativo na área de organização e tratamento de dados, certamente o computador será um suporte tão ou mais utilizado do que as calculadoras, e quer as folhas de cálculo quer os programas estatísticos apresentam, por defeito, o cálculo dos quartis por métodos que não o exclusivo.

É, pois, por isso importante que o professor esteja ciente deste facto quando decidir usar algum destes recursos. Como ilustração apresentamos na Tabela 5 os resultados obtidos no cálculo dos quartis de conjuntos de dados de dimensões 4, 5, 6 e 7. Usámos duas calculadoras, uma Texas e outra Casio, vulgarmente usadas por alunos dos ensino básico e secundário; duas folhas de cálculo, o Excel da Microsoft e uma folha de cálculo de livre acesso – o LibreOffice, presentes na maioria dos computadores pessoais dos alunos de todos os níveis de ensino; dois programas estatísticos introduzidos na maioria das disciplinas de estatística nos primeiros anos dos cursos do ensino superior, o SPSS e o R (de acesso livre); e ainda o sítio da Internet WolframAlpha (<http://www.wolframalpha.com/>), autodenominado uma ferramenta computacional do conhecimento, onde é possível não só procurar informação como também realizar cálculos (e produzir gráficos), na área da matemática e em muitas outras áreas. Os programas estatísticos SPSS e R, assim como o sítio da Internet Wolfram Alpha implementam dois métodos distintos para o cálculo dos quartis, dependendo da ‘funcionalidade’ selecionada (na realidade, se alterarmos a opção definida por defeito na função *quantiles* do R, podemos obter qualquer um de nove métodos distintos para o cálculo dos quartis, conforme indicado no manual de instruções do programa [5]).

	$n = 4$ {1, 3, 6, 10}			$n = 5$ {1, 3, 6, 10, 14}			$n = 6$ {1, 3, 6, 10, 14, 18}			$18n = 7$ {1, 3, 6, 10, 14, 18, 21}		
	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$
Método exclusivo calculadora Casio calculadora Texas	2	4.5	8	2	6	12	3	8	14	3	10	18
SPSS ( <i>weighted average</i> )	1.5	4.5	9	2	6	12	2.5	8	15	3	10	18
Método inclusivo R ( <i>boxplot.stats</i> ) SPSS ( <i>Tukey's hinges</i> )	2	4.5	8	3	6	10	3	8	14	4.5	10	16
Microsoft Excel LibreOffice R ( <i>quantiles</i> )	2.5	4.5	7	3	6	10	3.75	8	13	4.5	10	16
Método CDF	2	4.5	8	3	6	10	3	8	14	3	10	18
Wolfram Alpha ( <i>quartiles</i> )	2	4.5	8	3.5	6	8	3	8	14	3.75	10	17
Wolfram Alpha ( <i>quantiles</i> )	1	3	6	3	6	10	3	6	14	3	10	18

Tabela 5: Valores de quartis obtidos em diferentes suportes tecnológicos.

Quanto a nós, o método CDF é o mais indicado para introduzir o cálculo dos quartis de amostras (com poucos elementos repetidos), uma vez que é o único que produz sempre resultados de acordo com a definição rigorosa dos quartis. Ainda que o método CDF venha a ser o método de cálculo dos quartis adotado em todos os ciclos de ensino, as máquinas de calcular, as folhas de cálculo e os programas de estatística continuam a calcular os quartis por outros métodos, que muitas vezes produzirão valores diferentes. É, pois, importante que desde muito cedo se apresente aos alunos a noção de que existem diferentes métodos para o cálculo dos quartis.

## BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, M.C. Timóteo, “Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática”, Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação e Ciência, 2013. (Portal da DCE [www.dgidec.min-edu.pt/index.php?s=noticias&noticia=396](http://www.dgidec.min-edu.pt/index.php?s=noticias&noticia=396)).

[2] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, M.C. Timóteo, “Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática, Caderno de Apoio 3.º Ciclo”, Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação e Ciência, 2013. (Portal da DCE [www.dgidec.min-edu.pt/index.php?s=noticias&noticia=396](http://www.dgidec.min-edu.pt/index.php?s=noticias&noticia=396)).

[3] E. Langford, “Quartiles in Elementary Statistics”, *Journal of Statistics Education*, Vol. 14, Nº.3, (2006). [www.amstat.org/publications/jse/v14n3/langford.html](http://www.amstat.org/publications/jse/v14n3/langford.html).

[4] M.E.G. Martins, C. Monteiro, J.P. Viana, M. A. A. Turkman, “Brochuras de Matemática para o Secundário – ESTATÍSTICA 10.º Ano”, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 1997. (Portal da DCE [www.dgidec.min-edu.pt/outros-projetos/index.php?s=directorio&pid=148](http://www.dgidec.min-edu.pt/outros-projetos/index.php?s=directorio&pid=148))

[5] R Project, “R Documentation”, [www.r-project.org](http://www.r-project.org) (Other/manuals, help pages and News/R-patched/reference/packages/stats/quantile)

### SOBRE AS AUTORAS

**Susana Fernandes** é professora auxiliar no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia na Universidade do Algarve e membro fundador do Centro de Estudos e Desenvolvimento da Matemática no Ensino Superior. Licenciou-se em Estatística e Investigação Operacional e fez o mestrado em Investigação Operacional na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É doutorada em Investigação Operacional pela Universidade do Algarve.

**Mónica Pinto** é licenciada em Matemática (ramo científico) pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e mestre em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário pela Universidade do Algarve. Nos últimos doze anos tem-se dedicado ao ensino da matemática lecionando no centro de estudos ExpliAlgarve, em Faro.



LOJA  
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em [www.spm.pt](http://www.spm.pt)



MANUEL SILVA  
Universidade Nova  
de Lisboa  
[mnas@fct.unl.pt](mailto:mnas@fct.unl.pt)



PEDRO J. FREITAS  
Universidade  
de Lisboa  
[pedro@ptmat.fc.ul.pt](mailto:pedro@ptmat.fc.ul.pt)

## A CONJETURA ABC

“A conjectura abc é o problema em aberto mais importante de análise diofantina.” Dorian Goldfeld

### TÃO SIMPLES COMO $A + B = C$

A conjectura abc que iremos descrever é um dos problemas em aberto mais importantes da Teoria dos Números. Da sua validade resultariam como corolários diversos teoremas clássicos e seria ainda possível resolver problemas novos. O último Teorema de Fermat demonstrado por Andrew Wiles em 1994, o qual afirma não existirem soluções inteiras positivas para a equação  $a^n + b^n = c^n$  com expoente  $n \geq 3$ , teria a demonstração curta sonhada em tempos por Fermat. Resolver a conjectura abc implica certamente ir um pouco mais longe na compreensão da estrutura dos números naturais. Mas será que ainda existem problemas por resolver envolvendo apenas os números naturais?

Sabemos que um número natural pode ser primo ou composto, mas seria interessante ter uma medida que permitisse decidir qual entre dois números naturais é mais composto. Por exemplo, apetece dizer que  $1024 = 2^9$  é fortemente composto, e que  $481 = 13 \times 37$ , que é produto de dois primos, é quase-primo. Dado um natural  $n$ , definimos  $r(n)$  como sendo o produto dos fatores primos de  $n$ . No caso de  $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ , teremos  $r(n) = 2 \times 3 \times 7 = 42$ . Seja  $\alpha > 0$  o expoente  $\alpha$  a que temos de elevar  $r(n)$  para obter  $n$ . Se  $n$  for

um quadrado perfeito, então o valor do expoente  $\alpha$  é naturalmente não inferior a 2. Se  $n$  é um inteiro livre de quadrados (nenhum fator primo aparece repetido), então o expoente  $\alpha = 1$ . Em geral, o expoente  $\alpha$  é dado por  $\alpha = \ln n / \ln(r(n))$ .

O teorema fundamental da aritmética diz-nos que todo o número natural admite uma fatorização única como produto de números primos. Por exemplo,  $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ . Os números 2, 3 e 5 são os fatores primos, um dos quais aparece duas vezes. A conjectura abc, que iremos descrever com mais precisão, prevê restrições inesperadas nas fatorizações de triplos de inteiros positivos  $(a, b, c)$  tais que  $a + b = c$ . Nos triplos de inteiros considerados não podem existir fatores comuns entre  $a$  e  $b$ , i.e., o máximo divisor comum entre  $a$  e  $b$  é 1.

Dado um triplo de inteiros positivos  $(a, b, c)$ , definimos o radical do triplo, e denotamos por  $r(a, b, c)$ , como o produto de todos os fatores primos distintos em  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Por exemplo, dado o triplo 9, 16, 25 (onde  $25 = 16 + 9$ ), teremos  $r(9, 16, 25) = 3 \times 2 \times 5 = 30$ . Uma tarefa difícil é encontrar triplos  $(a, b, c)$  tais que  $r(a, b, c) < c$ . Ainda assim, existem infinitos triplos que satisfazem esta desigualdade. Por exemplo, os triplos de inteiros dados por:  $a = 1, b = 9^n - 1$  e  $c = 9^n, n \in \mathbb{N}$ , verificam a desigualdade referida.

Seja  $q$  o expoente a que devemos elevar o radical  $r(a, b, c)$  do triplo de modo a obter  $c$ . A qualidade de um triplo  $(a, b, c)$  é dada pelo valor do expoente  $q$ . Os triplos interessantes correspondem a valores do expoente  $q$  maiores do que 1. O valor máximo conhecido até hoje para algum triplo  $(a, b, c)$  é aproximadamente 1.63, obtido à custa do improvável triplo:  $a = 2$ ,  $b = 3^{10} \times 109$  e  $c = 23^5$ .

A conjectura abc tem diversas formulações, uma delas estipula que existe um majorante para o valor do expoente  $q$ , i.e., o valor de  $q$  não pode ser arbitrariamente grande. Um enunciado alternativo, e ainda mais forte, da conjectura abc afirma que o número de triplos  $(a, b, c)$  com qualidade maior do que um dado  $h > 1$  é finito.

De um modo mais intuitivo, podemos dizer que a conjectura abc nos diz que se somarmos dois números  $a$  e  $b$  fortemente compostos, então o resultado desta soma  $c = a + b$  deve ser um número quase-primos. Parece existir aqui uma estranha interferência entre a operação de adição nos naturais com uma propriedade de tipo multiplicativo (fatorização de números).

A validade da conjectura abc permitiria demonstrar por exemplo uma propriedade importante sobre os inteiros que são potências com expoente maior do que 1. Se considerarmos o conjunto dos quadrados perfeitos, facilmente verificamos que estes se afastam cada vez mais uns dos outros: a diferença entre  $n^2$  e  $(n + 1)^2$  é  $2n + 1$ . Os cubos perfeitos têm um comportamento análogo.

Consideremos agora

$$S = 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, \dots$$

o conjunto dos naturais  $n = m^k, k > 1$  das potências perfeitas. Será que também neste caso as potências perfeitas se afastam indefinidamente? Embora não pareça existir nenhuma razão que impeça a existência de infinitos pares de potências perfeitas  $(x, y)$  tal que  $|y - x| < 100$ , uma famosa conjectura do matemático S. Pillai estipula que o número de pares nestas condições se esgota.

Um fenômeno do mesmo tipo, e talvez mais intrigante, é saber se o conjunto das potências  $a^n, n \in \mathbb{N}$  se afasta indefinidamente do conjunto das potências  $b^n$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros positivos primos entre si. A este respeito, a famosa conjectura de Catalan, demonstrada em 2002 por Preda Mihalescu, diz-nos que não existem potências de inteiros consecutivas com expoentes maiores do que um, exceto 8 e 9.

No caso particular em que  $a = 2$  e  $b = 3$  é possível provar que cada uma das equações  $2^n - 3^m = k, n, m \in \mathbb{N}$ , e  $k$  inteiro não nulo fixo, tem apenas um número finito de soluções. O teorema fundamental da aritmética diz-nos, e a sua demonstração explica, por que razão nenhuma potência  $a^n$  pode coincidir com uma potência  $b^n$ , onde  $a$  e  $b$  são primos entre si e  $n > 1$ . Uma questão mais profunda é a de saber por que razão dois conjuntos de potências distintos se afastam indefinidamente. A demonstração da conjectura abc ajudaria a perceber quais as forças misteriosas que operam no conjunto dos números naturais, repelindo neste caso as potências de base distinta.

### UM INTERGEÓMETRA UNIVERSAL

Em agosto de 2012, o matemático japonês Shinichi Mochizuki afirmou ter obtido uma demonstração da conjectura abc. No total, os argumentos para a prova da conjectura ocupam cerca de 500 páginas, sendo introduzidos ao longo do texto diversos conceitos completamente novos. Até agora, nenhum especialista na área considerou válida a demonstração apresentada. Não fosse o caso de Mochizuki ser um matemático conceituado, ninguém daria importância à sua tentativa de demonstrar a conjectura abc. Na sua página pessoal, Shinichi Mochizuki não se intitula matemático mas intergeómetra universal, não sendo claro o que isso possa significar. Julgo que qualquer matemático, num caso destes, deseja que uma demonstração nova apresentada de um qualquer problema famoso esteja correta. Isso significa que o universo matemático se expande mais uma vez, dando origem a outras questões tão simples e curiosas como o último Teorema de Fermat ou a conjectura abc.





Publicado originalmente no jornal Público, em 2014/07/17. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

## FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

**Adérito Araújo** Universidade de Coimbra

EDITORES:

**Daniel Pinto** Universidade de Coimbra

**Sílvia Barbeiro** Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:

**António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M<sup>a</sup> Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Arsélio Martins** Escola Secundária José Estevão, Aveiro • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Joana Latas** HDB - Tourism Investments, Departamento de Educação, São Tomé e Príncipe • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Marcelo Viana** IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Paulus Gerdes** Instituto Superior de Tecnologias e Gestão, Boane, Moçambique & Academia Africana de Ciências • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

**Sílvia Dias** SPM

REVISÃO:

**Margarida Robalo**

DESIGN:

**Ana Pedro**

IMPRESSÃO:

**Dossier – Comunicação e imagem**

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

**Alojamento Vivo**

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

**Sílvia Dias** SPM

PROPRIEDADE:

**Sociedade Portuguesa de Matemática**

Av. República 45, 3<sup>a</sup> Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

TIRAGEM **1500 Exemplares**

ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



# Simetrias do Temperamento Igual

MARTA RAPOSO<sup>a</sup> E RUI PACHECO<sup>b</sup>

<sup>b</sup>UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

<sup>a</sup>martaraposor@gmail.com e <sup>b</sup>rpacheco@ubi.pt.

**T**ransposições e inversões são transformações no conjunto de todas as notas musicais recorrentemente utilizadas por músicos e compositores. No contexto do sistema de afinação de temperamento igual, transposições e inversões podem ser naturalmente identificadas com as transformações de Möbius que preservam um certo subconjunto discreto da espiral logarítmica.

## 1. TEMPERAMENTO IGUAL

Não vamos repetir aquela velha história do passeio de Pitágoras e dos martelos na oficina do ferreiro, mas relembremos a observação fundamental habitualmente atribuída ao mesmo Pitágoras: os sons produzidos ao pressionar pontos que dividem a corda de um monocórdio nas razões 1:2, 2:3 e 3:4 estão em extrema consonância, no sentido de que são “agradáveis” ao ouvido quando combinados entre si. Os métodos introduzidos por J. B. Fourier, no século XIX, trouxeram um entendimento mais profundo sobre o fenómeno. Uma corda esticada quando vibra produz um som que é a soma de várias ondas sinusoidais (os *harmónicos* do som produzido) com frequências múltiplas inteiras da *frequência dominante* (ou *natural*) da corda.

Denominamos por *nota musical* um som associado a uma única onda sinusoidal – e, portanto, a uma única frequência. Na realidade, tais sons puros não existem na natureza. Quando, por exemplo, se refere a nota  $la^3$ , o  $lá$  central do piano, pensamos na frequência dominante da respetiva corda (tipicamente ajustada para 440 Hz). Se a frequência de uma determinada nota é  $\omega_0$ , então a *oitava acima* é a nota com frequência  $2\omega_0$ , aquela que corresponde à razão pitagórica 1:2. Homens e mulheres cantando em uníssono, na realidade fazem-no (bom, pensemos em cantores minimamente talentosos) com o intervalo de uma oitava. Este facto levou diferentes culturas a aceitar a oitava como intervalo de referência.

O ouvido humano tem a capacidade de distinguir dezenas de notas diferentes compreendidas num tal intervalo. De entre essas notas podemos seleccionar algumas e organizá-las em sequências, da mais grave à mais aguda, que designaremos por *escalas*. Na tradição ocidental, consideram-se 12 notas no intervalo de uma oitava. A *escala cromática* é precisamente a sequência formada por essas 12 notas:

dó, dó♯, ré, ré♯, mi, fá, fá♯, sol, sol♯, lá, lá♯, si.

Mas a escolha do número 12 não é universal. Por exemplo, na cultura indiana é frequente a divisão da oitava em 22 *shrutis* [1].

Estabelecidas 12 notas, coloca-se o problema, diga-se pouco pacífico [3, 4], de encontrar valores para as razões das respetivas frequências: o problema do *temperamento* da escala cromática. A matemática envolvida nesta discussão é rica, tanto em relação à modelação do fenómeno de emissão, propagação e perceção do som [1], como em relação à construção artesanal de instrumentos musicais compatíveis com os diferentes sistemas adotados [6]. A divisão em intervalos iguais, o *temperamento igual*, adequa-se com facilidade à construção e à execução de instrumentos de teclas, como o piano ou o cravo. Neste caso, a razão entre as frequências de duas notas consecutivas é dada por  $\tau = \sqrt[12]{2}$ , um número irracional! Se a nota de referência tem frequência  $\omega_0$ , as 12 notas da escala cromática terão frequências dadas por  $\omega_k = \tau^k \omega_0$ , com  $k = 0, 1, \dots, 11$ . A melhor aproximação à *quinta pitagórica* (a nota associada à frequência  $\frac{3}{2}\omega_0$ ) ocorre para  $k = 7$ :  $\omega_7 \approx 1.4983\omega_0$ .

Se esta diferença parece não perturbar muito os ouvidos dos músicos mais experimentados, outros intervalos no temperamento igual podem ser bem mais delicados de compatibilizar com as consonâncias “naturais” observadas por Pitágoras [3]. Não obstante, o temperamento igual é hoje amplamente adotado na afinação de diferentes instrumentos musicais, como o piano e a guitarra.

## 2. CONJUNTO DAS NOTAS MUSICAIS NO TEMPERAMENTO IGUAL

Fixemos uma nota de referência, digamos a nota  $do^3$ , o  $dó$  central do piano, com frequência  $\omega_0$ . Seja  $\mathbf{M}$  o conjunto das notas musicais do temperamento igual, ordenadas de acordo com o valor das frequências correspondentes:  $\omega_n = \tau^n \omega_0$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Temos portanto uma bijecção  $F : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{Z}$  que preserva a relação de ordem entre os dois conjuntos,

...,  $F(si^2) = -1, F(do^3) = 0, F(do\sharp^3) = 1, F(re^3) = 2, \dots$   
de acordo com a seguinte figura:



Figura 1. Escala cromática.

Os pares ordenados  $(X, Y) \in \mathbf{M} \times \mathbf{M}$  serão designados por *intervalos musicais*. Consideremos a aplicação *amplitude*  $J : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $J(X, Y) = F(X) - F(Y)$ . Seguindo a terminologia usual, intervalos musicais de *um tom* são os pares  $(X, Y)$  para os quais  $J(X, Y) = \pm 2$  e intervalos de *meio-tom* são os pares  $(X, Y)$  para os quais  $J(X, Y) = \pm 1$ . Por exemplo,  $J(mi^2, re^3) = F(mi^2) - F(re^3) = -10$ , o que corresponde a uma *sétima menor inferior* (10 meio-tons).

### 3. TRANSPOSIÇÕES E INVERSÕES

Dado um inteiro  $k$ , a *transposição musical* por  $k$  meio-tons é a transformação  $T_k : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$  que “adiciona”  $k$  meios-tons a todos as notas, preservando desta forma a relação de ordem e a amplitude dos intervalos. Ou seja, temos  $T_k(Z_n) = Z_{n+k}$ , onde  $Z_n$  é a nota musical correspondente a  $n : F(Z_n) = n$ . Por outro lado, as *inversões musicais* são transformações no conjunto  $\mathbf{M}$  que também preservam a amplitude dos intervalos mas que invertem a relação de ordem. Mais concretamente, dados dois inteiros  $i$  e  $j$ , com  $0 \leq |j - i| \leq 1$ , a inversão  $I_{i,j} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$  é definida por  $I_{i,j}(Z_n) = Z_{i+j-n}$ . Claramente,  $I_{i,j} = I_{j,i}$ . Quando  $i = j$ , também denotamos  $I_i = I_{i,i}$ , a *inversão de  $\mathbf{M}$  relativamente a  $Z_i$* . Neste caso,  $I_i(Z_i) = Z_i$ .

Por exemplo, a transposição por sete meios-tons do subconjunto  $K = \{Z_0, Z_4, Z_7\}$ , que corresponde ao acorde habitualmente designado por *Dó Maior*, resulta no conjunto  $T_7(K) = \{Z_7, Z_{11}, Z_{14}\}$  (acorde de *Sol Maior*). Por outro lado, a inversão do mesmo acorde relativamente a  $Z_1 = do\sharp^3$  resulta no acorde  $I_1(K) = \{Z_2, Z_{-2}, Z_{-5}\}$  (acorde de *Sol Menor*).

*Observação.* Em teoria musical, o termo *inversão* pode ter diferentes significados. O conceito de inversão de um acorde que estamos aqui a tratar é diferente do conceito de inversão associado à modificação das *linhas de baixo* dos acordes. Neste segundo sentido, a *primeira inversão* do acorde  $K = \{Z_0, Z_4, Z_7\}$ ,

por exemplo, é o acorde  $K' = \{Z_4, Z_7, Z_{12}\}$ , ou seja, todas as notas de  $K'$  são iguais às de  $K$  a menos de uma oitava, mas a nota mais grave, o *baixo*, passou a ser a nota  $Z_4$ .

Transposições e inversões são recursos frequentemente utilizados por músicos e compositores. Na figura 2 vemos um exemplo extraído da obra de J. S. Bach. O *Cânone a 2 “Quaerendo Invenietis”*, da Oferenda Musical (BWV 1079), que consiste num cânone por inversão, à distância de sétima menor:



Figura 2. Cânone por inversão.

A linha melódica inferior inverte os intervalos da linha superior. A voz inferior é igual a  $I_{-5} = T_{-10} \circ I_0$  da voz superior. Mais exemplos podem ser encontrados em [5].

Uma transposição por  $k$  meios-tons, seguida de uma outra transposição por  $k'$  meios-tons, resulta numa transposição por  $k + k'$  meios-tons; uma transposição seguida de uma inversão é equivalente a uma inversão; uma inversão seguida de outra inversão corresponde a fazer uma única transposição. Mais explicitamente,

$$T_k \circ T_{k'} = T_{k+k'} \quad I_{i,j} \circ I_{p,l} = T_{i+j-l-p}$$

$$T_k \circ I_{i,j} = I_{i+[k/2], j+[k/2]} \quad I_{i,j} \circ T_k = I_{i-[k/2], j-[k/2]}$$

onde  $i \leq j, [k/2]$  é o maior inteiro  $n$  tal que  $n \leq k/2$  e  $[k/2]$  é o menor inteiro  $m$  tal que  $k/2 \leq m$ .

Assim, o conjunto de todas as inversões e transposições admite uma estrutura natural de *grupo não abeliano*. Recordamos que um par  $(G, \circ)$  constituído por um conjunto  $G$ , não vazio, e uma operação binária  $\circ$  diz-se um *grupo* quando verifica os seguintes axiomas:

(1) *Associatividade.*

$$\text{Para quaisquer } x, y, z \in G, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z);$$

(2) *Existência de identidade.*



Existe  $e \in G$ , a *identidade* do grupo, tal que, para todo  $x \in G$ ,  $x \circ e = e \circ x = x$ ;

(3) *Existência de inverso*.

Para cada  $x \in G$ , existe  $x' \in G$ , o *inverso* de  $x$ , tal que  $x \circ x' = x' \circ x = e$ .

O grupo diz-se *abeliano* se  $x \circ y = y \circ x$  para todos os elementos  $x, y \in G$ . Em relação ao grupo das transposições e inversões, o inverso de  $T_k$  é  $T_{-k}$ , o inverso de qualquer inversão é ela própria e a identidade é a transposição  $T_0$ .

Uma forma usual de descrever geometricamente este grupo, que denotaremos por  $G_M$ , consiste em identificar as 12 notas da *escala cromática*  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{11}$  com os 12 vértices de um dodecágono regular. Assim, inversões e transposições correspondem a elementos do grupo de simetria do dodecágono, o *grupo diedral*  $D_{12}$ . No entanto, este modelo não distingue notas que difiram por oitavas nem reflete qualquer propriedade do temperamento utilizado. Nas duas secções seguintes apresentamos um modelo para o conjunto  $M$  das notas musicais no sistema temperado que resolve estas dificuldades e a correspondente descrição geométrica do grupo  $G_M$ .

#### 4. AS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

Uma *transformação de Möbius* é uma transformação no plano complexo que é representada por uma fração racional da forma

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são números complexos que satisfazem a condição  $ad - bc \neq 0$ . Prova-se que as transformações de Möbius, com a operação binária definida pela composição de transformações, formam um grupo, que denotaremos por **Mob**, o *grupo de Möbius*. Por exemplo, o inverso da transformação (1) é dado por

$$z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Vejamos alguns exemplos de transformações de Möbius:

(1) *Translação*. Para qualquer número complexo  $b = b_1 + ib_2$ , onde  $i$  é a unidade imaginária, a transformação  $z \mapsto z + b$  representa uma translação no plano pelo vetor  $\vec{b} = (b_1, b_2)$ .

(2) *Rotação*. Para qualquer  $a \in \mathbb{C}$  com  $|a| = 1$ , a transformação  $z \mapsto az$  representa uma rotação no plano em torno da origem. Se considerarmos a representação em coordena-

das polares de  $a = e^{i\theta_0}$  e  $z = |z|e^{i\theta}$ , temos  $az = |z|e^{i(\theta+\theta_0)}$ , uma rotação de ângulo  $\theta_0$  (tomando como sentido positivo o sentido anti-horário).

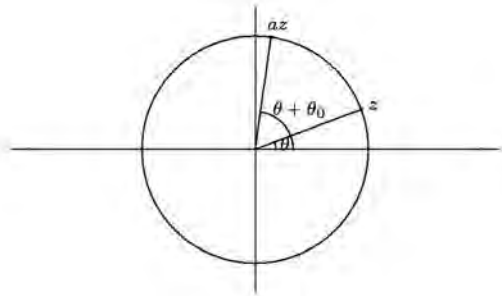


Figura 3. Rotação de ângulo  $\theta_0$ .

(3) *Homotetia*. Para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto az$  representa uma homotetia no plano centrada na origem e de razão  $a$ .

(4) *Inversão seguida de reflexão*. Recorde-se que, dada uma circunferência  $C$  de raio  $r$  centrada em  $O$  e um ponto  $P$  diferente de  $O$ , o inverso  $P'$  de  $P$  relativamente a  $C$  é o único ponto sobre a semirreta  $OP$  que satisfaz  $|OP||OP'| = r^2$ . Em notação complexa, se  $P = z$  e  $C$  é a circunferência unitária centrada na origem, então  $P' = \frac{z}{|z|^2}$ .

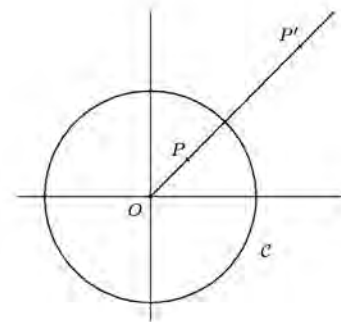


Figura 4. Inversão em relação a uma circunferência.

Por outro lado,  $z \mapsto \bar{z}$  dá-nos a reflexão em relação ao eixo real.

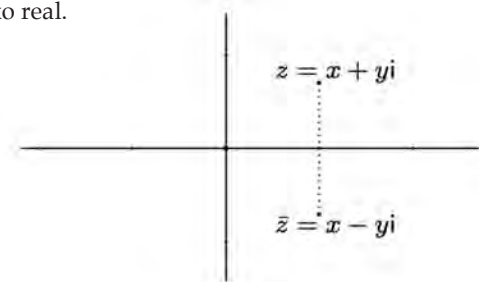


Figura 5. Reflexão em relação ao eixo real.

Assim, a transformação de Möbius  $z \mapsto \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  representa uma inversão em relação à circunferência unitária centrada na origem seguida de uma reflexão.

Qualquer transformação de Möbius pode ser obtida por composição de translações, reflexões, rotações, inversões e dilatações. Com efeito, considerem-se as seguintes transformações:  $g(z) = z + \frac{d}{c}$  (translação pelo vetor  $\frac{d}{c}$ );  $h(z) = \frac{1}{z}$  (inversão seguida de reflexão);  $m(z) = -\frac{ad-bc}{c^2}z$  (rotação e homotetia);  $s(z) = z + \frac{a}{c}$  (translação pelo vetor  $\frac{a}{c}$ ). Então, é possível provar que:

$$\frac{az+b}{cz+d} = s \circ m \circ h \circ g(z).$$

*Observação.* Uma transformação conforme é uma transformação que preserva ângulos. Ou seja, duas curvas que se intersectam num certo ponto  $P$  segundo um ângulo  $\alpha$  são transformadas em outras duas curvas que se intersectam no transformado de  $P$  segundo o mesmo ângulo  $\alpha$ . Pela teoria das funções de variáveis complexas, qualquer transformação de Möbius  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  é conforme. Devemos observar que, em geral, estas transformações não estão definidas em todo o plano complexo. Juntando a  $\mathbb{C}$  um ponto  $\infty$  no “infinito”, podemos identificar a esfera unitária  $S^2$  com o plano completo  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  por meio de uma projeção estereográfica, que é uma transformação conforme. Desta forma, uma transformação de Möbius  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  corresponde a uma transformação conforme em  $S^2$ , fazendo  $\infty \mapsto \frac{a}{c}$  e  $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$ . Sabe-se que o grupo de Möbius é precisamente o grupo das transformações conformes de  $S^2$  que preservam a orientação [2].

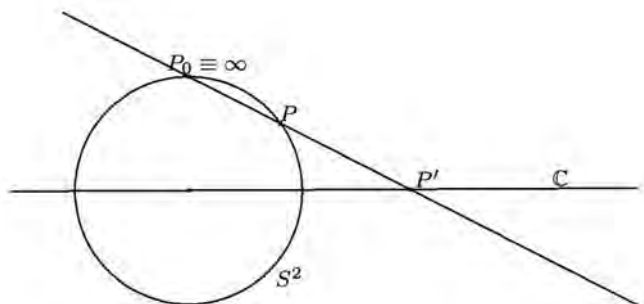


Figura 6. Projeção estereográfica.

## 5. A ESPIRAL LOGARÍTMICA E O TEMPERAMENTO IGUAL

A espiral logarítmica é um tipo de espiral que aparece frequentemente associado a diversos elementos na Natureza: conchas de certos moluscos, galáxias espirais ou ciclones tropicais, por exemplo. Face às suas propriedades singulares, Jacob Bernoulli designou-a por *Spira Mirabilis*.

A equação da espiral logarítmica, em termos de coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , é dada por  $\rho = \rho_0 e^{b\theta}$ , com  $\rho_0 > 0$  e  $b$  constantes reais. Esta espiral pode ainda ser caracterizada pela seguinte propriedade: o ângulo  $\beta$  formado pela tangente à espiral no ponto  $(\rho, \theta)$  e a correspondente reta radial é constante, mais precisamente,  $\beta = \arctg \frac{1}{b}$ .

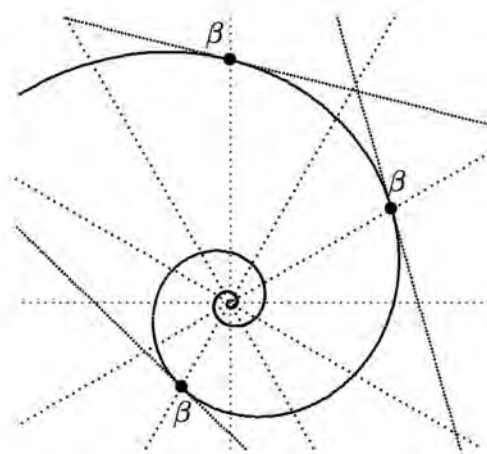


Figura 7. Espiral logarítmica.

Sejam  $\mathcal{S}$  a espiral logarítmica  $\rho = e^{\theta \frac{\ln 2}{2\pi}}$  e  $\mathcal{M}_{\mathcal{S}} \subset \mathbf{Mob}$  o seu subgrupo de simetria, isto é,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}} = \{f \in \mathbf{Mob} : f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}\}.$$

Este subgrupo é formado pelas transformações  $z \mapsto \alpha_0 z$  e  $z \mapsto \frac{\beta_0}{z}$ , com  $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{S}$ . De facto, se

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

preserva a espiral  $\mathcal{S}$ , então  $f$  também preserva os seus pontos limites, isto é,  $f(0) = 0$  e  $f(\infty) = \infty$ ; ou  $f(0) = \infty$  e  $f(\infty) = 0$ . No primeiro caso teremos  $b = 0$  e  $c = 0$ ; logo,  $f(z) = \frac{a}{d}z$ ; uma vez que  $1 \in \mathcal{S}$ , o seu transformado,  $f(1)$ , também deve estar em  $\mathcal{S}$ , logo,  $\alpha_0 = \frac{a}{d} \in \mathcal{S}$ . Do mesmo modo, no segundo caso, teremos  $f(z) = \frac{b}{c} \frac{1}{z}$ , com  $\beta_0 = \frac{b}{c} \in \mathcal{S}$ .

Seja  $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$  a imagem de  $\mathbb{Z}$  por meio da aplicação

$$n \in \mathbb{Z} \mapsto z_n = e^{\frac{n}{12} \ln 2} e^{i \frac{2\pi n}{12}} \in \mathcal{S}.$$

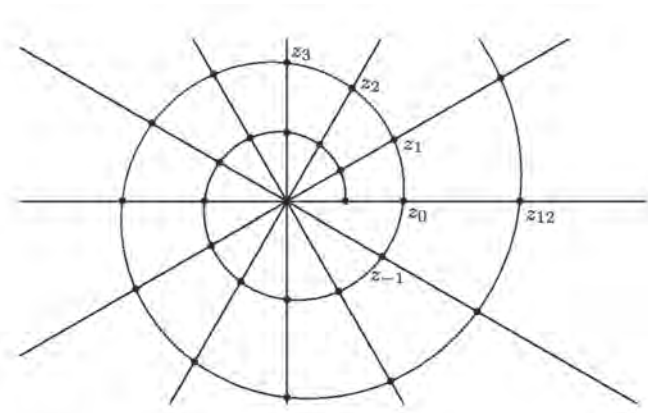


Figura 8. Representação em espiral do conjunto  $\mathbf{M}$ .

Tendo em conta a identificação entre  $\mathbb{Z}$  e o conjunto  $\mathbf{M}$  estabelecida por  $F$ , obtemos uma nova representação para o conjunto das notas musicais do sistema de temperamento igual, aquela que a  $Z_n \in \mathbf{M}$  associa o número complexo  $z_n$ . Repare-se que, se atribuirmos ao dó central do piano,  $F(do^3) = 0$ , a frequência  $\omega_0 = 1$ , a frequência de  $Z_i$ , relativamente ao sistema de temperamento igual, é dada por  $\omega_i = \tau^i$ , com  $\tau = \sqrt[12]{2}$ , ou seja,  $\omega_i = |z_i|$ .

Finalmente, designemos por  $\mathcal{M}_{S_0} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$  o subgrupo de simetria de  $S_0$ . As transformações  $z \mapsto \alpha_0 z$  e  $z \mapsto \frac{\beta_0}{z}$  estão em  $\mathcal{M}_{S_0}$  se, e só se,  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  estiverem em  $S_0$ . Assim, o subgrupo  $\mathcal{M}_{S_0}$  é formado pelas seguintes transformações:

$$z \mapsto z_i z; \quad z \mapsto \frac{z_i}{z}.$$

A primeira destas transformações é dada por uma rotação de ângulo  $\frac{2\pi i}{12}$  em torno da origem seguida de uma homotetia centrada na origem de razão  $\tau^i$ ; transforma  $z_k$  em  $z_{i+k}$ , logo corresponde à transposição  $T_i$ . A segunda transformação é dada por uma inversão em relação à circunferência unitária centrada na origem seguida de uma transformação do primeiro tipo; transforma  $z_k$  em  $z_{i-k}$ , correspondendo deste modo à inversão  $I_{[i/2],[i/2]}$ .

## 6. CONCLUSÃO

Se identificarmos o conjunto  $\mathbf{M}$  das notas musicais do sistema temperado com o subconjunto discreto

$$S_0 = \{e^{\frac{n}{12} \ln 2} e^{i \frac{2\pi n}{12}} : n \in \mathbb{N}\}$$

da espiral logarítmica  $\mathcal{S}$  definida em coordenadas polares por  $\rho = e^{\theta \frac{\ln 2}{2\pi}}$ , o grupo  $G_{\mathbf{M}}$  das transposições e inversões é precisamente o grupo formado pelas transformações de Mö-

bius que preservam  $S_0$ .

**Agradecimentos.** Os autores gostariam de agradecer ao revisor deste artigo, pela leitura atenta e pelas muitas sugestões que ajudaram a melhorar uma versão preliminar, e ao Helder Vilarinho, pelo incentivo que deu para que o artigo fosse escrito.

## 7. REFERÊNCIAS.

- [1] D. J. Benson, *Music – A Mathematical Offering*, Cambridge University Press. 2007.
- [2] D. Blair, *Inversion Theory and Conformal Mapping*, Student Mathematical Library, American Mathematical Society. 2000.
- [3] R. Duffin, *How Equal Temperament Ruined Harmony (and Why You Should Care)*, W. W. Norton & Company. 2008.
- [4] S. Isacoff, *Temperament: How Music Became a Battleground for the Great Minds of Western Civilization*, Vintage, 2003.
- [5] J. Paiva de Oliveira, *Teoria Analítica da Música do Século XX*, Fundação Calouste Gulbenkian. 1998
- [6] B. Scimemi, “The Use of Mechanical Devices and Numerical Algorithms in the 18th Century for the Equal Temperament of the Musical Scale”, *Mathematics and Music: A Diderot Mathematical Forum*, Springer Verlag. 2002.

### SOBRE OS AUTORES

**Marta Raposo** é licenciada e mestre em Ensino de Matemática pela Universidade da Beira Interior e concluiu o Curso Complementar de Formação Musical no Conservatório da Covilhã.

**Rui Pacheco** é licenciado em Física e mestre em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e doutor em Matemática pela University of Bath, no Reino Unido. Desde 2004, é professor auxiliar no Departamento de Matemática na Universidade da Beira Interior.



GONÇALO MORAIS  
Instituto Superior de  
Engenharia, Lisboa  
[gmorais@adm.isel.pt](mailto:gmorais@adm.isel.pt)

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

## CHARLES FEFFERMAN

O Professor Charles Fefferman (ou Charlie como insiste em ser tratado) nasceu em 1949 em Washington D.C. e demonstrou desde cedo ser uma criança prodígio. Tendo começado a frequentar cursos universitários com 12 anos, formou-se em Matemática aos 17 anos e completou o doutoramento aos 20. Em 1978 foi um dos premiados com a Medalha Fields pelas generalizações para dimensões superiores de resultados clássicos de Análise Complexa, pelos seus trabalhos em Equações às Derivadas Parciais, Análise de Fourier e espaços de Hardy. Atualmente tenta compreender a natureza fundamental da turbulência e de que forma poderemos encontrar padrões na chamada Era da Informação. É uma pessoa simples e afável. Transcrevo aqui parte da agradável conversa que mantivemos.

GONÇALO É um prazer estar aqui consigo...

FEFFERMAN Obrigado! [Risos]

GONÇALO Começando talvez por um aspeto mais biográfico, poderia dizer-nos como é que começou o seu evidente fascínio pela matemática?

FEFFERMAN Quando era ainda muito novo, comecei a ler livros de divulgação científica que explicavam o funcionamento dos foguetes. Não fiquei minimamente satisfeito com as explicações aí dadas e procurei outras mais detalhadas num livro de física que encontrei na biblioteca municipal do sítio onde vivia. Não consegui perceber nada do que aí era descrito. O meu pai explicou-me que era natural que nada percebesse porque o livro tinha uma linguagem matemáti-

ca demasiado desenvolvida para um miúdo como eu, que na altura ia começar a frequentar o quarto ano da escola primária. Então perguntei-lhe se podia estudar matemática e ele comprou-me o livro de matemática do quarto ano. Eu li-o num dia ou dois. Ao meu pai pareceu-lhe estranho que eu lesse um livro, que habitualmente demorava um ano a ser lido, em dois dias. Fez-me algumas perguntas e ficou para ele claro que eu tinha compreendido perfeitamente o que estava no livro. Então comprou-me o livro do ano seguinte e a mesma coisa aconteceu repetidamente até ao momento em que estudei o equivalente ao curso de Análise dos primeiros anos da faculdade. Neste ponto, o meu pai conseguiu que um professor da Universidade de Maryland, o professor James Hummel, fosse meu tutor. Todos no Departamento de Matemática me apoiaram e se dedicaram imenso durante o meu percurso ao longo das várias disciplinas.



GONÇALO Que idade é que tinha nesse momento?

FEFFERMAN Deixe-me pensar... Julgo que teria uns 10 ou 11 anos... 11 anos talvez, visto que, com 12 anos, comecei a assistir aos cursos normais oferecidos pela universidade, ao mesmo tempo que continuava os meus estudos na escola secundária. Isto durou um ano ou dois, até ao momento em que os meus professores na universidade me disseram, a mim e aos meus pais, que esta situação era ridícula e que eu deveria ser um estudante universitário. Eles trataram de tudo para que tal fosse possível. Então, com 14 anos, entrei para a Universidade de Maryland onde me formei em Matemática, tendo depois rumado a Princeton, onde trabalhei com Professor Elias Stein, um professor e uma pessoa extraordinária, e sob a sua direção obtive o doutoramento, começando aí a minha carreira como matemático.

GONÇALO E alguma vez voltou aos foguetes?

FEFFERMAN Fiz os cursos normais de Física para caloiros e resolvi os problemas usuais que os alunos têm de resolver sobre foguetes. [Risos] A partir do momento em que comecei a estudar matemática, fiquei tão deslumbrado que nunca mais voltei a olhar para qualquer outra coisa.

GONÇALO E de que forma é que ter trabalhado com Elias Stein influenciou o modo como faz matemática?

FEFFERMAN Ele mostrou-me que, para qualquer problema, existe sempre uma maneira correta ou interessante de o abordar. Depois de descobrirmos de que forma atacamos um problema, tudo o resto segue naturalmente até o resolvermos. Além disso, ele possui um otimismo contagiante. Mesmo que tivéssemos um problema muito difícil, para ele não importava, achava sempre que haveríamos de o resolver. Experimentar isto não tem preço e é algo que transportamos para o resto da vida.

GONÇALO Para si faz sentido a distinção entre Matemática Pura e Matemática Aplicada?

FEFFERMAN Não! Para mim existe uma matemática que é interessante e outra que não é assim tão interessante. Exis-



Com Charles Fefferman no ICMAT, Madrid.

tem problemas que motivam e outros que não. A distinção entre Matemática Pura e Matemática Aplicada é, na minha opinião, artificial.

GONÇALO Existirá talvez um processo evolutivo na matemática, em que uns ramos emergem e são esquecidos enquanto outros vingam e tornam-se centrais...

FEFFERMAN À partida, é virtualmente impossível saber o que irá ou não ser aplicado. Talvez o desenvolvimento mais importante da matemática no século XIX tenha sido a Álgebra

Linear, mas estou certo de que, se perguntasse a um matemático da altura qual o aspeto mais excitante da matemática, ele dificilmente apontaria essa área.

GONÇALO E quais são os problemas mais excitantes que tenta resolver neste momento?

FEFFERMAN Neste momento, interesse-me essencialmente por resolver pequenos problemas com vista a perceber a natureza da turbulência nos fluidos. É sempre difícil de prever, mas julgo que estamos talvez a um século de perceber este comportamento. Contudo, temos de dar os primeiros passos e começar a estudar casos mais simples onde algo se possa dizer. Mas estamos ainda longe de perceber aquilo que entendemos por turbulência.

GONÇALO E ganhou a Medalha Fields...

FEFFERMAN É verdade. Ganhei a Medalha Fields *a long time ago*...

GONÇALO O que é que mudou na sua vida depois disso?

FEFFERMAN Essencialmente, dá-me algum conforto. Ser um bom matemático significa trabalhar em problemas difíceis e por isso sentimos muitas vezes desalento por não sabermos por onde ir. E isto pode deprimir qualquer um. Nos momentos de depressão, posso dizer a mim próprio: "Que Diabo! Eu ganhei a Medalha Fields!" [Risos] Isto é o que de mais significativo mudou para mim depois desse momento. [Risos]

GONÇALO Estava à espera de ganhar?

FEFFERMAN Sabia que era um dos suspeitos óbvios. Mas estar à espera é talvez demasiado forte para o que sentia naquele momento. Existiam outros matemáticos com reais hipóteses de ganhar o mesmo prémio e com mérito equivalente. Mas o número de medalhas atribuídas é sempre reduzido e existem sempre uns que ficam de fora.

GONÇALO Ambos assistimos a uma conferência de Ingrid Daubechies, na qual ela demonstrou todo o poder das Wavelets. O Professor esteve na origem dessa revolução, pois

trabalhou na chamada Teoria de Paley-Littlewood. Isto permitiu estender as habituais noções de ortogonalidade a outros espaços, o que levou, entre outras coisas, ao desenvolvimento da Teoria das Wavelets com todo o manancial de aplicações conhecidas. Era para si expectável todo o impacto posterior do trabalho que na altura desenvolviam?

FEFFERMAN De modo algum! Acho que posso falar por todos os que na altura trabalhavam nessa área. Estávamos a trabalhar em algo profundamente puro e tínhamos a convicção de que, talvez dentro de um ou dois séculos, pudesse vir a ser de alguma forma aplicado, mas nunca num tempo tão imediato. Foi deslumbrante ver que esse trabalho gerou frutos nas aplicações.

GONÇALO E quando se apercebeu de que de imediato esse trabalho tinha aplicações tão fundamentais, qual foi a sua reação?

FEFFERMAN "UAU! Quem poderia dizer!" Tão simples quanto isto. [Risos]

GONÇALO Acha que a melhor forma de fazer matemática é pensar profundamente acerca dos problemas e depois *quem sabe?*

FEFFERMAN Acho que isso é absolutamente verdade. Existem muitas motivações para os problemas matemáticos e alguns dos mais interessantes vêm de problemas práticos. Outros têm uma origem diferente. É óbvio que se um problema tem origem numa questão prática, é natural que a solução tenha de imediato aplicação. Mas julgo que tanto as questões fundamentais como as grandes mudanças vêm de todos os lados. Julgo que o grande impacto que a matemática teve no mundo inteiro durante o século XX foi através do computador, e os desenvolvimentos primordiais deste tiveram origem em respostas matemáticas a problemas motivados pela filosofia. Por isso, *quem sabe?*

GONÇALO Hoje vivemos na chamada Era da Informação. Será possível prever a emergência de um método matemático para discernir padrões, no amontoado de dados que todos os dias nos cercam e que, de alguma maneira, nos confundem?



Charles Fefferman  
com Gonçalo Morais.

**FEFFERMAN** Se eu posso prever o futuro? Não! [Risos] Mas nos últimos 15 anos tenho trabalhado num problema que está, de alguma forma, relacionado com isso e que trata apenas um aspeto do problema. Mas certamente que, pelo facto de estarmos cercados por dados, existe uma motivação natural para se fazer investigação fundamental nas próximas décadas. O que se tornará importante para lidar com esse oceano que nos cerca não podemos saber.

**GONÇALO** Poderia aprofundar um pouco mais acerca do problema de que falava?

**FEFFERMAN** Claro! Vamos supor que os nossos dados são pontos num espaço tridimensional. Num problema concreto, os dados podem estar em espaços de dimensão superior, mas ignoremos, por agora, esse facto. Então, dados os pontos que temos no nosso espaço tridimensional, de que forma podemos prever onde estarão os pontos futuros gerados pelo mesmo processo? Uma hipótese muito interessante, denominada *Manifold Learning Hypothesis*, diz que existe uma superfície suave no espaço considerado e que os pontos no futuro irão estar próximos dessa superfície. Se agora considerarmos, ao invés de um espaço tridimensional, um espaço de dimensão superior, esta mesma hipótese diz-nos que existirá o análogo a uma superfície nesse espaço onde estarão as observações futuras do processo gerador da informação. Podemos dizer se esta hipótese é verdadeira? Sendo verdadeira, poderemos

encontrar essa superfície? Poderemos descobrir essa superfície de uma forma computável? Estes são os projetos que me ocuparão no futuro.

**GONÇALO** E estas ideias são válidas mesmo no caso de os dados terem ruído?

**FEFFERMAN** Sim, mesmo no caso em que existe ruído.

**GONÇALO** E, assim, poder-se-á estabelecer uma ligação entre o mundo discreto dos dados e o mundo contínuo?

**FEFFERMAN** Conheço muitos matemáticos que estão a produzir resultados excelentes, mas saber se alguns desses resultados irão ter consequências práticas é algo a que não sei responder. Acho que nem no dia anterior a essa ligação ser feita conseguirei dizer se isso seria possível. Nem mesmo no dia a seguir! Talvez muitos dias depois já pudesse dizer alguma coisa acerca do assunto.

**GONÇALO** Nesse dia voltaremos a falar! Obrigado por esta conversa tão interessante e boa sorte para os problemas futuros!

**FEFFERMAN** Obrigado eu!

A deslocação ao ICMAT, em Madrid, foi patrocinada através do projeto PEst-OE/MAT/UI0297/2014





# As Olimpíadas como Estratégia Extracurricular e 'Arma de Combate' das Deficiências Disciplinares

NATÁLIA V. K. DIAS FURTADO E JEREMIAS DIAS FURTADO

UNIVERSIDADE DE CABO VERDE

natalia.furtado@docente.unicv.edu.cv



O ensino da matemática tem exigido, um pouco por toda a parte, além do cumprimento de programas e desafios curriculares da disciplina, esforços extracurriculares, relacionados mais com a prática do que com o engenho; mais com o gosto, o prazer e muita prática na resolução de exercícios e demonstração de teoremas do que com uma eventual genialidade ou um dote sobrenatural. Isto, sem se olvidar da necessária apropriação da teoria e da linguagem matemáticas. Tudo, num ambiente de instituições cognitivas e normativas<sup>1</sup>, favoráveis à criação de uma cultura de excelência e de superação, de modo a cativar e a incentivar os alunos, em particular os melhores, a terem uma relação de ‘química’, proximidade e empatia com a matemática, em troca de um certo encanto, gozo e comprazimento com os resultados obtidos na resolução de exercícios – corolários de acertos e de erros cometidos – não numa lógica hedonista ou utilitária, mas altruística e racional, em busca do belo e do sublime...

Sendo consensual que a mais poderosa imagem de marca de Cabo Verde é a sua música, postulamos à partida que, devido à relação umbilical que existe entre a música e a matemática, esse país não poderia deixar de possuir matéria-prima moldável matematicamente, ou melhor, jovens talentos

**A**s Olimpíadas de Matemática são um instrumento extracurricular, capaz de ajudar a colmatar as deficiências curriculares no processo ensino-aprendizagem de países em desenvolvimento, onde esta disciplina é um grande desafio. Por conseguinte, propõe-se a extensão das Olimpíadas a todas as disciplinas, numa abordagem interdisciplinar da educação ao nível do ensino secundário.

por descobrir, enquanto tesouros, dado que onde há música deve existir, naturalmente, a matemática e vice-versa, na medida em que a matemática é musical e a música, matemática. Devia haver, por isso, jovens com talento em matemática, que urge sempre descobrir e potenciar pelo trabalho. Assim, no contexto de uma procura que se pretende já institucionalizada, nos dias 25 e 26 de abril de 2014, foi realizada a Final Nacional das 7.<sup>as</sup> Olimpíadas de Matemática (OM) ao nível do Ensino Secundário. As provas das categorias A, B e C foram realizadas no dia 25 de abril, em regime simultâneo, e a cerimónia de encerramento e entrega de prémios, presidida pela senhora ministra do Ensino Secundário e Desporto, Fernanda Marques, logo no dia seguinte. Nessa edição das OM participaram 8370 alunos das 43 escolas secundárias de nove ilhas do País. Os quatro mais bem classificados na categoria C (11.º - 12.º anos de escolaridade) participaram nas 4.<sup>as</sup> Olimpíadas da CPLP 2014, realizadas em Angola, e conquistaram duas medalhas de prata e duas de bronze.

As Olimpíadas de Matemática, em Cabo Verde, têm já a sua história; embora não tão rica como a de outros países de tradição matemática, mas com suas particularidades. No início, as coisas terão começado com a implementação da ideia das OM, trazida de Kiev (Ucrânia), por Tetyana V. K. Mendes Gonçalves e Natália V. K. Dias Furtado, enquanto depositárias de uma vasta vivência rotineira de resolução de exercícios, dilemas e teoremas matemáticos, experienciada nas Repúblicas da ex-União Soviética, particularmente, em áreas das ditas ciências exatas, com particular destaque para a temível FISMAT (i.e., Física e Matemática), onde o nível do ambiente competitivo, em matéria de conhecimento científico, era assaz desenvolvido, tanto a nível interno como no plano internacional, corolário de uma tradição, e paideia, educativa, cultural, social e institucional bem consolidadas. Assim, estas professoras estavam convictas de que ‘os talentos matemáti-

<sup>1</sup> Estas instituições não só definem as metas ou objetivos socialmente aceitáveis – e.g., obter boas notas –, mas também as formas adequadas de buscar a sua consecução – e.g., por vias éticas *in casu*, estudando e não plagiando. Por outro lado, as instituições cognitivas são estruturas e conhecimentos que são dados como consolidados pela população de um território, enraizados na sua cultura e, por isso, não questionados, mas adotados por indivíduos e organizações que os partilham, cumprem e defendem como regras convencionadas (Furtado et al. 2014: 229).

cos existem e podem ser potenciados em qualquer país e/ou território', particularmente, em Cabo Verde, pela sua particular idiossincrasia. A ideia de realização das OM em Cabo Verde apresentou-se-lhes então como uma "arma de combate", após terem sido confrontadas com a realidade do país, que apresentava e ainda apresenta, apesar das melhorias, um quadro de reprovação relativamente acentuado e uma certa falta de estímulo por parte dos alunos em relação a esta belíssima disciplina, quando comparada com outras.

Foi neste contexto de procura de caminhos e de soluções para o problema, que a ideia foi discutida, amadurecida e seguidamente apresentada à Prof.<sup>a</sup> Maria das Dores Morais, que teve a sagacidade de apreciar e de perscrutar a sua importância, enquanto instrumento de mudança das instituições cognitivas e normativas no ambiente académico cabo-verdiano, tendo decidido, de imediato, apoiar a sua concretização, ajudando tanto na conceção como na execução do projeto das OM, que posteriormente viria a ser absorvido pelo Centro de Matemática do já extinto Instituto Superior de Educação (ISE) nos idos anos de 1999.

Por conseguinte, as 1.<sup>as</sup> Olimpíadas de Matemática foram realizadas em Cabo Verde no ano letivo 2000/2001, sob o escopo da declaração do ano 2000 como o Ano Internacional da Matemática. Os principais objetivos das Olimpíadas de Matemática foram e continuam sendo: incentivar e desenvolver o gosto pela Matemática; aprofundar os conhecimentos adquiridos na sala de aula e aplicá-los na resolução de problemas não estandardizados; descobrir e potenciar jovens talentos nesta ciência; incentivar a troca de experiências entre alunos, professores, investigadores, responsáveis e gestores de estabelecimentos educativos dos países da CPLP; intercambiar experiências nesse domínio, no plano da cooperação internacional. E, dentro das suas responsabilidades, (direta ou indiretamente), combater o problema à volta do insucesso nessa disciplina, criando uma dinâmica de intercâmbio e de convívio entre os alunos das escolas secundárias do país.

O Centro de Matemática do Departamento de Ciência e Tecnologia do ex-ISE, desde 1999, preparou e realizou, por etapas, as 1.<sup>as</sup> Olimpíadas de Matemática em Cabo Verde, destinadas aos alunos pré-universitários, particularmente do Ensino



Encerramento das 1.<sup>as</sup> Olimpíadas de Matemática de Cabo Verde, em 2000.

Secundário. O grupo de trabalho (constituído pelos professores do Centro de Matemática do ex-ISE e por alguns professores de matemática de escolas secundárias da Ilha de Santiago) decidiu que as Olimpíadas seriam realizadas para três categorias, a saber: A, B e C, correspondentes, respetivamente, a 7.º- 8.º, 9.º- 10.º e 11.º- 12.º anos de escolaridade e que estas realizar-se-iam em duas eliminatórias e numa final nacional.

Para o efeito, foram elaborados documentos que servissem de instrumento e regulamentassem o processo. Esses documentos são: “Regulamento”, “Normas para Participação das Escolas”, “Calendário” e “Boletim de Inscrição”, onde cada escola indicava livremente as categorias em que se inscrevia e o respetivo responsável ao nível da escola, respeitando o princípio de democraticidade.

No dia 29 de abril do ano 2000, foi realizada a primeira eliminatória em todas as escolas inscritas. Nela participaram 559 alunos de 11 escolas secundárias e liceus das cinco ilhas de Cabo Verde, designadamente: Santiago, São Vicente, Fogo, Sal e São Nicolau. A partir desse momento, muitas escolas secundárias do país abraçaram a iniciativa e incluíram as Olimpíadas de Matemática nos seus planos de atividades escolares e extra-curriculares. Os melhores exemplos disso são as escolas secundárias e os liceus de S. Vicente e do Sal.

De mais a mais, nessas ilhas, além de OM internas dentro de cada liceu e interliceus ao nível da ilha, foram organizadas e realizadas Olimpíadas regionais (São Vicente, Sal) pelos respetivos professores de matemática, por exemplo, em 2010. Desde as 1.ªs Olimpíadas de Matemática Nacionais (2000/2001), que tanto os alunos como os professores destas regiões não pararam de se treinar na resolução de problemas matemáticos não estandardizados, enriquecendo, deste modo, o seu conhecimento e a sua experiência – o que tem vindo a traduzir-se numa relativa vantagem na preparação dos respetivos alunos para as competições do género, por exemplo, a nível nacional.

O ano de 2004 foi destacado, sobretudo, pela realização de dois eventos importantes: no dia 8 de julho de 2004 foi lançado em papel o boletim ou revista n.º1 das Olimpíadas de Matemática,

o qual não teve sequência (Natália et al., 2004); nos dias 16, 17 e 18 de dezembro de 2004, foi realizada a Final Nacional das 2.ªs Olimpíadas de Matemática. Nessa edição participaram 300 alunos das seis escolas secundárias e liceus das três ilhas, a saber: Santiago, São Vicente e Santo Antão. A primeira eliminatória foi realizada no dia 22 de novembro de 2004 e, na sequência, realizada de imediato a Final Nacional, nos dias 16, 17 e 18 de dezembro do mesmo ano, por razões que se prendem com limitações organizacionais e financeiras (*www.unicv.edu.cv*).

Passados seis anos sobre a data da realização das 1.ªs e das 2.ªs Olimpíadas de Matemática, mais concretamente no ano 2010, foi resgatada a ideia das Olimpíadas Nacionais de Matemática pelos professores do ensino secundário, os quais obtiveram para o efeito uma formação dedicada à resolução de problemas matemáticos no Brasil. No que se refere aos objetivos, as OM visam, por um lado, melhorar a qualidade do ensino da matemática e de ciências afins em Cabo Verde e, por outro, incentivar e desenvolver o gosto pela matemática e enfrentar com maior naturalidade as dificuldades da vida real. Além disso, as OM têm natureza qualitativa, volitiva, seletiva, restritiva, promovendo a cultura do “ótimo”, do perfeccionismo, a cultura da superação e da excelência. O objetivo último das OM consiste na identificação e na potenciação dos melhores entre os melhores (Dias-Furtado, 2011).

Entendemos que em todos os países, independentemente da política de inclusão escolar, (o que é salutar), deve haver escolas ou turmas que promovam a especialização dos me-



Encerramento das Olimpíadas de Matemática Nacionais, em 2011.





Vencedores das 7.<sup>as</sup> Olimpíadas Nacionais nas categorias A, B e C.



Participantes na 4.<sup>a</sup> edição das Olimpíadas de Matemática da CPLP, realizada em Luanda, 2014. [2.<sup>a</sup> e 3.<sup>a</sup> fotos]

lhores – e.g., turmas de especialização matemática, o que, aliás, existe em todos os países de tradição matemática –; e a institucionalização da figura de treinador olímpico, cujas funções são as de preparação conveniente, daqueles alunos mais esforçados, que queiram, efetivamente, participar nas OM, e sobre quem impendem responsabilidades de liderar os mais diferentes grupos e organizações societais, primando sempre pela excelência, dado que o destino coletivo deve estar nas mãos senão dos mais dotados, pelo menos, dos mais bem preparados. Os líderes preparam-se...

E disso decorre que, a inscrição para a participação nas OM é facultativa e é feita na base dos princípios de autonomia de vontade e de democraticidade. Isto significa que as OM devem deixar a possibilidade de escolha de participar ou não à direção das escolas, aos professores e aos potenciais alunos-candidatos, permitindo uma autosseleção prévia, de modo a que nelas participem apenas e só aqueles que verdadeiramente possam e queiram resolver exercícios matemáticos não estandardizados. (O grupo-alvo do projeto eram e são os alunos do Ensino Secundário, com especial enfoque sobre a Categoria C, que são os pré-universitários). Por conseguinte, dependendo da metodologia que se adote, no sentido de obrigar ou não as escolas e os alunos a participarem nas OM, o número de inscritos pode ser alto ou baixo. Por exemplo, a experiência tem demonstrado que o número de participantes na Olimpíada Nacional de Matemática de 2010, realizada no âmbito do projeto Amílcar Cabral – Programa Linguagem das Letras e dos Números, tendo sido financiada pela cooperação brasileira através dos ministérios da Educação, Ciência & Tecnologia, o equipolente às 3.<sup>as</sup> OM, ascendeu a 10.140 alunos, número esse considerado relativamente elevado se comparado, por exemplo, com os cerca de 2.000 alunos participantes na edição de 2010/2011 (as 4.<sup>as</sup> OM). Por outro lado, as 4.<sup>as</sup> OM abrangeram todas as nove ilhas habitadas de Cabo Verde, tendo nelas participado 39 escolas secundárias e/ou liceus e cerca de 2000 alunos (1864). Tiveram, por isso, um caráter, digamos, “qualitativo”, na medida em que os princípios de autonomia da vontade e de democraticidade garantiriam, *a priori*, senão maior qualidade, pelo menos, uma maior apetência ou familiaridade dos candidatos-participantes por e com a matemática. Já nas 5.<sup>as</sup> OM de 2011/2012 participaram cerca 11.000 alunos, das oito ilhas (exceto Ilha Brava) e nas 6.<sup>as</sup> OM de 2012/2013 – 9.284 alunos das nove ilhas, de 41 escolas secundárias.



Para concluir, dizer que, de uma análise crítica daquilo que tem sido a nossa realidade e a nossa capacidade competitivas (com base nas sete edições das OM realizadas em Cabo Verde), infere-se que, neste momento, ainda não se conseguiu lograr um nível de preparação que se considere alto, mas mesmo assim temos de ter objetivos ambiciosos, mais exigentes, e trabalhar em conformidade, preparando melhor os intervenientes do processo, de modo a elevar as *performances* matemáticas dos alunos, e assim, conseguir obter melhores resultados tanto a nível interno como a nível da CPLP. Ou seja, a campanha de sensibilização para as OM já passou e surtiu bons resultados. Agora passa-se para a etapa seguinte, que é a de melhor preparação de professores e alunos, utilizando para tanto outros meios e instrumentos didático-pedagógicos (fase de aperfeiçoamento).

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

[1] Dias-Furtado N. V. K. (2011). “As Olimpíadas de Matemática em Cabo Verde e a Formação Contínua de Professores: Génese, Historial e Comentários”. Formação Contínua. Textos de enquadramento e alguns exemplos de materiais, sob a coordenação de: Lurdes Serrazina, Fernanda Gomes, João Rosa, José Portela. Edição: Escola Superior de Educação//Instituto Politécnico de Lisboa, Depósito legal n.º 340 538/12, Lisboa.

[2] Furtado, J. D., García-Cabrera, A. M. e García-Soto, M. G. (2014). *Revista Turismo & Desenvolvimento*, N.º 21/22, vol. 4, pp. 227-238, Aveiro.

[3] Natália V. K. D. F., Tetyane V. K. M. G. & Maria das D. M. (2004). *Olimpíadas de Matemática – Boletim N.º1*, Ed. Gráfica da Praia, Praia.

#### REFERÊNCIAS SITOGRÁFICAS:

[www.unicv.edu.cv](http://www.unicv.edu.cv): “As Olimpíadas de Matemática em Cabo Verde” – Da 1.ª à 7.ª edições.

#### SOBRE OS AUTORES

**Natália Vítorovna Kôrmysheva Dias Furtado** doutorou-se em Álgebra, Lógica e Teoria dos Números, na Universidade de Kiev, Ucrânia, em 1995. Tem 27 anos de experiência letiva no ensino superior e, atualmente, é docente do Departamento de Ciência e Tecnologia da Universidade de Cabo Verde (Uni-CV) e presidente da Comissão de Provas das Olimpíadas Nacionais de Matemática.

**Jeremias Dias Furtado** é doutorando em Turismo e Gestão de Negócios pela ULPGC e mestre em Direito e em Ciências Sociais – Estudos Africanos, pelas Universidades de Kiev e do Porto. É docente na Escola de Negócios e Governação da Uni-CV, nas áreas de Direito e de Gestão Estratégica de Empresas.



## VISITE O CLUBE DE MATEMÁTICA

DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

- ✓ ARTIGOS DE OPINIÃO
- ✓ ENTREVISTAS
- ✓ PROBLEMAS
- ✓ HISTÓRIAS
- ✓ PASSATEMPOS
- ✓ PRÉMIOS

TUDO ISTO E MUITO MAIS EM [WWW.CLUBE.SPM.PT](http://WWW.CLUBE.SPM.PT)



NUNO CAMARNEIRO  
Universidade de Aveiro  
nfcam@ua.pt

## JORGE LUIS BORGES EA BIBLIOTECA DE BABEL

O argentino Jorge Luis Borges é um dos autores mais citados e lidos do séc. XX. Os seus contos, ensaios e poemas abriram caminhos literários e influenciaram (continuam a influenciar) gerações de escritores em todo o mundo. Da mesma forma que Euler, Newton, Riemann ou Leibniz marcaram a matemática, também se poderia dizer que existe uma literatura anterior e outra posterior a Borges.

No seu conto “A Biblioteca de Babel”, publicado inicialmente em 1941 e mais tarde integrado na colecção *Ficções* (1944), Borges descreve uma biblioteca/universo de características peculiares. Este espaço fantástico é composto por hexágonos adjacentes, em cada hexágono há cinco paredes, em cada parede, cinco estantes e em cada estante estão 32 livros de formato uniforme. Cada livro tem 410 páginas, cada página, 40 linhas e cada linha integra 42 caracteres de 25 possíveis (22 letras, o espaço, a vírgula e o ponto).

A biblioteca do conto é exaustiva e inclui todos os livros que poderiam ser escritos nesse formato. Assim, embora a esmagadora maioria destes livros seja desprovida de qualquer sentido, estão lá também todas as obras-primas da humanidade – os sonetos de Shakespeare, os *Lusíadas* e até os próprios livros de Borges (e, necessariamente, também o conto *A Biblioteca de Babel*).

No conto é-nos dito que alguns dos habitantes desse universo o consideram infinito, ou, pelo menos, incomensurável, mas para um matemático é apenas uma questão de aplicar o cálculo combinatório. Foi o que fez William Goldbloom Bloch, professor de matemática na Wheaton College, em Illinois, que no livro *The Unimaginable Mathematics of Borges’ Library of Babel* (Oxford University Press, 2011), se deu ao trabalho de calcular quantos livros contém a biblioteca de Borges, e chegou ao espantoso número de  $25^{1312000}$ , ou, em potências de dez, aproximadamente  $10^{1,834,097}$ , um seguido de um milhão, oitocentos e trinta e quatro mil e noventa e sete zeros.

Algum dia talvez consigamos desenvolver um super computador capaz de escrever todos esses livros, mas muito mais difícil será construir uma máquina capaz de os ler e seleccionar.



## SPM COMEMORA 74 ANOS NO DIA 12 DE DEZEMBRO

A comemoração do 74.º aniversário da SPM, que terá como pano de fundo o centenário do nascimento de José Sebastião e Silva (JSS), decorrerá na tarde de 12 de dezembro, dia em que o Museu de História Natural e da Ciência da Universidade de Lisboa abrirá as portas aos sócios da SPM, e a todos os que queiram juntar-se a esta dupla celebração. A sessão de homenagem ao maior matemático português do século XX contará com uma mesa redonda com testemunhos de quem conviveu com JSS, com o lançamento do catálogo da “Exposição Biográfica”, que assinala a sua vida e obra, e a apresentação de um selo comemorativo pelos CTT. Os 74 anos da SPM serão assinalados com um Porto de Honra num ambiente de festa, que terminará com um concerto do pianista José Eduardo Sebastião e Silva, filho de JSS.

## PROFESSORES PARTILHAM INFORMAÇÃO



Em breve, as portas das salas de aula de algumas escolas de referência do País estarão abertas a qualquer professor que queira observar diretamente boas práticas educativas aí implementadas. Em [www.aula-aberta.pt](http://www.aula-aberta.pt) será possível consultar testes, fichas de trabalho e outro material didático e ainda assistir a aulas gravadas em vídeo nas escolas participantes neste projeto, que compreende os 10.º, 11.º e 12.º anos. O Aula Aberta é um projeto promovido pela SPM e pela Fundação Calouste Gulbenkian, que pretende estimular a partilha de informação e um debate construtivo sobre boas práticas no ensino.



## OBRAS DE JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA NA LOJA SPM

No âmbito das comemorações do centenário do nascimento de José Sebastião e Silva, a SPM, em parceria com o Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, volta a disponibilizar ao público interessado as obras científicas completas deste grande matemático português, cujos três volumes se encontram agora à venda na Loja SPM. Os títulos podem ser adquiridos nas instalações da SPM, ou através da página da Loja, em [www.spm.pt](http://www.spm.pt)

## MINI-OLIMPIADAS EM JANEIRO

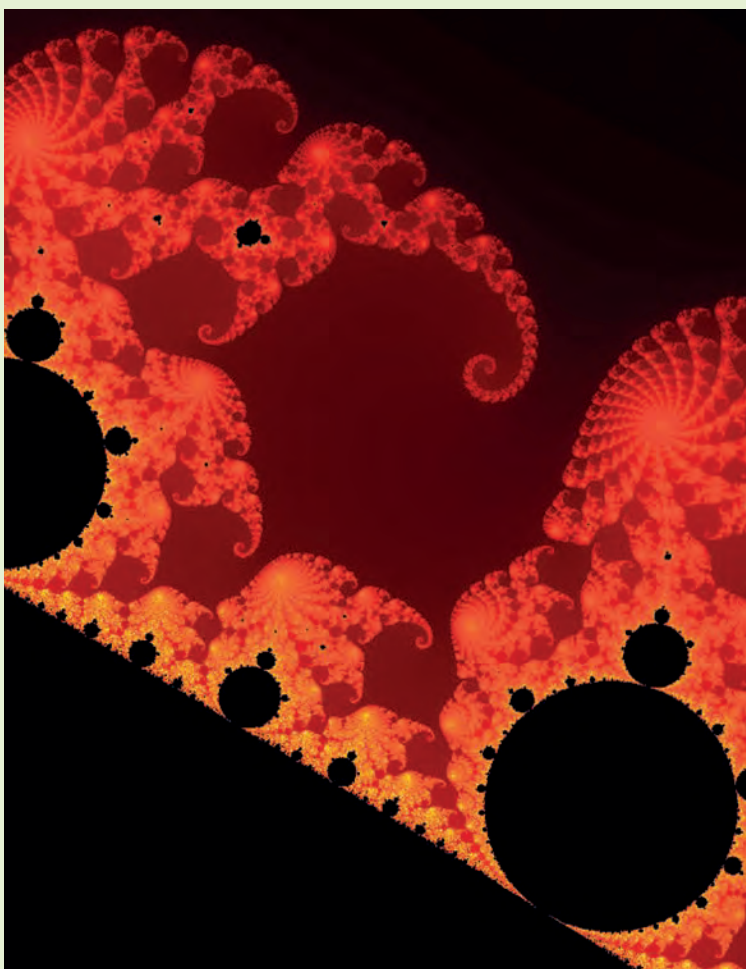
Os alunos do ensino básico que demonstrem interesse por desafios matemáticos poderão pôr o seu talento à prova nas Mini-Olimpíadas, a categoria das Olimpíadas Portuguesas de Matemática dirigida aos 3.º e 4.º anos de escolaridade. As escolas deverão fazer a sua inscrição na competição até 31 de dezembro, em <http://mopm.mat.uc.pt/MOPM/>. A prova única desta categoria realizar-se-á pela primeira vez em janeiro, nas escolas inscritas, no dia 28 desse mês.

## A MATEMÁTICA DOS CONTOS

O concurso “Um Conto que Contas” está de volta e pretende, mais uma vez, envolver todos os alunos do 1.º ao 12.º ano de escolaridade. Os trabalhos, que consistem na escrita e na ilustração de um conto que envolva conteúdos matemáticos, deverão ser submetidos a concurso até ao dia 10 de fevereiro de 2015. Os participantes podem concorrer a uma de oito categorias, de acordo com os ciclos de ensino em que estão integrados, individualmente ou em grupo, num máximo de quatro elementos. Esta iniciativa é organizada pela Delegação Regional do Sul e Ilhas da SPM. Mais informações em <http://www.spmsul.uevora.pt/concurso.htm>

## PRÉMIO PEDRO MATOS PROCURA A “MATEMÁTICA NAS ARTES”

Estão abertas as pré-inscrições para o Prémio Pedro Matos, um concurso nacional destinado a estudantes do ensino secundário, que nesta 7.ª edição terá como tema “Matemática nas Artes”. Esta iniciativa, apoiada pela SPM, pretende fomentar a criatividade e o interesse dos jovens do ensino secundário pela matemática e as suas aplicações. As candidaturas ao concurso podem ser apresentadas individualmente ou em grupo, do qual poderá ainda fazer parte um professor do ensino secundário, enquanto orientador. A pré-inscrição deverá ser efetuada online até 15 de março de 2015 e a entrega dos trabalhos, até dia 27 de maio. Mais informações em <http://www.premiopedromatos.ipleiria.pt/>





## ENTRE DOIS DOZES DE DEZEMBRO

Esta é a primeira “carta” da direção da SPM para o biénio 2014/16. Tendo tomado posse a 5 de setembro, a presente direção, da qual 40% são novos elementos, insere-se numa linha de renovação na continuidade, sem sobressaltos mas com expectativas de, ainda assim, trazeremos algo de novo à vida da nossa Sociedade.

O primeiro ano do nosso mandato promete ser bem recheado! É balizado por dois acontecimentos com particular relevância: o primeiro, a 12 de dezembro de 2014, são as comemorações do centenário do nascimento de José Sebastião e Silva, o maior matemático português do séc. XX, com uma atividade científica de qualidade e uma projeção internacional ímpares, à época e entre nós, e com um notável envolvimento na renovação do ensino da matemática nos ensinos secundário e universitário. A SPM tem apoiado ativamente as iniciativas do grupo da Universidade de Lisboa (UL) coordenado pelo prof. José Francisco Rodrigues que tem planeado as diversas ações, tais como o site <http://www.sebastiaoasilva100anos.org>, a “Exposição Biográfica” patente na reitoria da UL, as tertúlias que decorrerão nos próximos meses na Grande Lisboa e a sessão solene de homenagem que terá lugar no próximo dia 12 de dezembro (que é também o dia do 74.º aniversário da SPM) no Museu de História Natural e da Ciência, em Lisboa. Desta colaboração entre a SPM e a UL, gostaria de destacar ainda a produção conjunta de uma exposição itinerante sobre a vida e a obra científica de Sebastião e Silva, que, numa primeira fase, acompanhará

as várias tertúlias e que, posteriormente, ficará disponível para ser temporariamente cedida a escolas e outras instituições, como as restantes exposições itinerantes da SPM. Um outro resultado desta colaboração é relativo aos volumes das obras de José Sebastião e Silva. Destes livros, editados pelo extinto INIC e há muito desaparecidos das livrarias, umas poucas dezenas de exemplares serão em breve disponibilizados na loja da SPM, fruto de um acordo estabelecido com o Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais. Será uma oportunidade única, talvez a última, de se adquirir um exemplar em papel das obras científicas do maior matemático português do século passado.

O outro evento que balizará este primeiro ano de mandato é, naturalmente, o 12 de dezembro de 2015: data do 75.º aniversário da SPM. Sobre o que exatamente acontecerá nessa data teremos oportunidade de falar noutra altura, mas gostaríamos que tudo o que fizermos no período que medeia estes dois 12 de dezembro fosse, de certa maneira, uma celebração de todos os anos que já decorreram e um prenúncio do que virá. E haverá muitos eventos a decorrer, alguns da responsabilidade da SPM, outros em colaboração

com diversas entidades. Eis alguns deles: o AMS-EMS-SPM International Meeting, no Porto, em junho; a Escola de Verão, em Aveiro, em julho (nesta edição com a novidade de ter sessões destinadas aos nossos estudantes olímpicos); o 1.º Encontro do Espaço Matemático de Língua Portuguesa, em Coimbra, em outubro (uma iniciativa conjunta da SPM com a APM, a Ludus e a SPE, no âmbito da Comissão Nacional de Matemática), e o encontro Ciências Matemáticas e Didáticas, em Lisboa, em dezembro. No plano editorial, está para breve a publicação da 2.ª edição do livro *Matemática do Planeta Terra*, copatrocinada pela SPM e pelo Instituto Superior Técnico, e na primeira metade de 2015 haverá o lançamento do primeiro volume de uma nova série de livros dirigidos à formação inicial e contínua de professores do ensino básico, fruto de uma colaboração recentemente estabelecida com a Porto Editora. A área da formação contínua de professores merecerá, como é hábito, uma especial atenção da SPM, com a oferta de um conjunto alargado e renovado de ações de formação. Por último, dentre muitas outras iniciativas da responsabilidade da direção nacional ou das de-

legações regionais que estão previstas, destaco apenas mais duas: a renovação da página *web* da Sociedade (que não será apenas estética) e a construção de uma página *web* sobre “Seios e Matemática”, em colaboração com a British Society for the History of Mathematics.

Para terminar, não será demais lembrar que a Sociedade vive fundamentalmente dos seus sócios: das suas iniciativas e da sua participação, bem como do apoio que deles recebe, nomeadamente através do pagamento das quotas. Para que as atividades da SPM possam prosseguir com um nível cada vez melhor e com uma intensidade cada vez maior, e para que, com isso, a matemática tenha uma projeção e um prestígio junto da sociedade portuguesa que permitam atrair os jovens mais promissores para carreiras profissionais na matemática e na ciência, é indispensável alargarmos a base de sócios ativos, quer individuais quer institucionais. Repetindo o desafio que lancei no encerramento do mais recente Encontro Nacional: se cada um de nós trazer mais dois ou três amigos...

## Já é sócio da SPM?

Conheça as vantagens e saiba como aderir em [www.spm.pt](http://www.spm.pt) ou através do número 217 939 785



Consulte também as condições para os sócios institucionais (Departamentos, Faculdades, ESES, Politécnicos, etc.)

# M Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

## POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: [gazeta@spm.pt](mailto:gazeta@spm.pt).

## ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2015

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para [imprensa@spm.pt](mailto:imprensa@spm.pt)

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

[www.spm.pt](http://www.spm.pt)

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

[www.gazeta.spm.pt](http://www.gazeta.spm.pt)

VISITE A LOJA SPM EM [WWW.SPM.PT](http://WWW.SPM.PT)

**NOVIDADE!**

Obras de José Sebastião e Silva Volumes I, II e III

