N. 0175

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA | Ano LXXVI | Mar. 2015 | 4,20€

75 Anos

Gazeta de Matemática

TABELA DE PUBLICIDADE 2015

Características Técnicas da Revista

Periodicidade: Quadrimestral
Tiragem: 1900
Nº de páginas: 64
Formato: 20,2 x 26,6 cm
Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

Condições Gerais:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

Contactos

Tel.: 21 793 97 85
imprensa@spm.pt

Especificações Técnicas:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK
Resolução: 300 dpi (alta resolução)
Margem de corte: 4 mm

Localizações Específicas:

Verso capa: 1240€
Contracapa: 1100€
Verso contracapa: 990€

	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

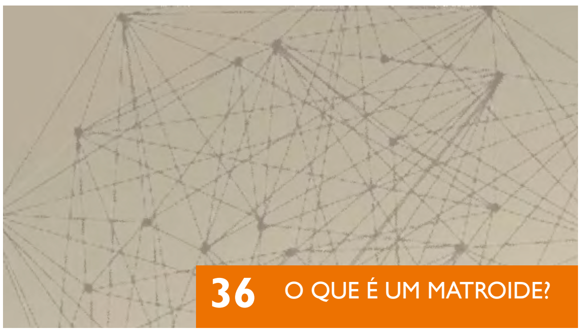
Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.

ÍNDICE

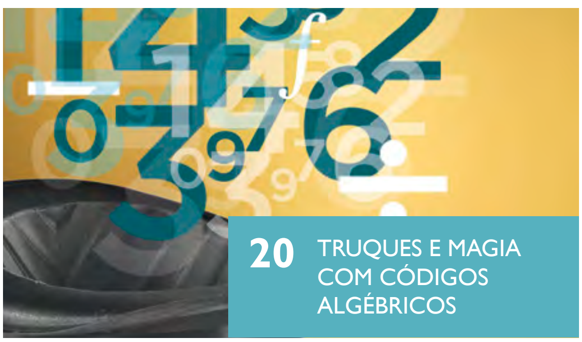
32 PAULUS GERDES - AS CULTURAS AFRICANAS NA CARTOGRAFIA ETNOMATEMÁTICA

03 ATRACTOR
Dinâmica de um Truque

50 UMA EXPLORAÇÃO COM PENTAMINÓS



36 O QUE É UM MATROIDE?



20 TRUQUES E MAGIA COM CÓDIGOS ALGÉBRICOS

Adérito Araújo
Universidade
de Coimbra
alma@mat.uc.pt

OS 75 ANOS DA *GAZETA DE MATEMÁTICA*

Assinalamos, neste número, o 75.º aniversário da *Gazeta de Matemática*. É um orgulho para a comunidade matemática portuguesa poder comemorar esta importante efeméride.

António Aniceto Monteiro, Bento Caraça, Hugo Ribeiro, José da Silva Paulo e Manuel Zaluar Nunes, fundadores da *Gazeta de Matemática*, tinham plena consciência de que o País andava muito "longe das correntes vitais do pensamento matemático moderno" e de que o "ensino das ciências matemáticas necessitava de uma remodelação completa" [1]. Enquanto brilhantes cientistas e empenhados cidadãos, abraçaram a tarefa de "modificar o ambiente matemático em Portugal", o que, segundo eles, só poderia ser conseguido "pelo estudo, pelo trabalho de investigação e pela propaganda das matemáticas"[1]. A *Gazeta*, que se assumia como o "jornal dos concorrentes ao exame de aptidão e dos estudantes de matemática das Escolas Superiores", servia claramente esse propósito. Como também escreveu António Aniceto Monteiro em 1942, o "ressurgimento dos estudos matemáticos em Portugal só é possível na medida em que a imensa energia intelectual da juventude for completamente mobilizada"[2].

Os matemáticos da geração de 40 desenvolveram a sua atividade num ambiente hostil caracterizado por um regime ditatorial adverso a novas ideias, potencialmente subversivas (especialmente as vindas do exterior), e pela grande inércia dos setores mais conservadores da Academia, também eles muito resistentes à mudança e à inovação. Nesse contexto, uma publicação como a *Gazeta de Matemática* adquiria uma importância maior. O curioso, como nos relata Graciano de Oliveira num artigo que publicamos nesta edição, é que a revista é publicada "com regularidade muito razoável para a época" até 1975 e o seu declínio só acontece depois da instauração da democracia. A *Gazeta* só regressou às publicações regulares no ano 2000, passando, desde essa altura, a ser propriedade da Sociedade Portuguesa de Matemática.

A *Gazeta de Matemática*, no conjunto das suas 175 edições, constitui um património importante e muito valioso. Fazendo jus a esse património, um dos grandes projetos que temos em mãos consiste na digitalização de todas as edições da revista para tornar os seus conteúdos disponíveis a um público alargado. Mas a melhor homenagem que podemos prestar aos fundadores da *Gazeta* é não nos prendermos ao passado. O "ambiente matemático" português é hoje muito diferente do que se vivia há 75 anos. E se é verdade que muitas das discussões de então continuam a fazer sentido, hoje já não somos meros espetadores do "movimento matemático moderno". Ao invés, somos atores de pleno direito, assumindo, não poucas vezes, papéis principais.

A vitalidade da matemática portuguesa é bem visível na personalidade e no trabalho do nosso entrevistado desta semana. André Neves, especialista em Análise Geométrica, atualmente a trabalhar no Imperial College, em Londres, é um dos mais estimulantes matemáticos da atualidade. Mas a dimensão cultural da disciplina, muito cara aos fundadores da *Gazeta*, é também hoje amplamente reconhecida, como prova a atribuição do Prémio Pessoa 2014 a Henrique Leitão. É uma distinção inteiramente justa que premeia o excelente trabalho que tem feito em prol do legado histórico-científico português (e não só) para a ciência moderna.

[1] António Monteiro, "Movimento Matemático. Origem e objectivo desta secção", *Gazeta de Matemática* 10 (1942), pp. 25-26.

[2] António Monteiro, "Clubes de Matemática", *Gazeta de Matemática* 11 (1942), pp. 8-12.

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

DINÂMICA DE UM TRUQUE

Caro leitor: Pense num número natural *abc* com três dígitos, sendo $a \neq c$. Depois, secretamente, inverta-o, obtendo *cba*, e calcule a diferença do maior pelo menor. Bastará agora que nos indique o primeiro dígito dessa diferença para lhe revelarmos o resultado.

Descobrimos por que funciona o truque anterior se o experimentarmos. Por exemplo, se $abc = 165$, então $cba = 561$ e $cba - abc = 396$; se $abc = 990$, então $cba = 099$ e $abc - cba = 891$; em geral, nas condições pedidas pelo truque, a diferença $abc - cba$ (ou $cba - abc$) é sempre um número da forma $\alpha 9 \beta$ e, além disso, tem-se $\alpha + \beta = 9$; daí que, conhecendo α, saibamos qual é o número.

O valor de $\alpha + \beta$ não nos surpreende: uma vez que um número e a sua versão invertida têm a mesma soma dos respetivos dígitos, eles estão na mesma classe de congruência módulo 9 e, portanto, a diferença entre eles é um múltiplo de 9. A imagem da transformação f, que atua no conjunto N_3 dos números naturais com três dígitos (permitindo-se zeros à esquerda) e que a cada número associa a distância dele para a sua versão invertida, contém apenas dez elementos, nomeadamente

$$\{000, 099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891\}.$$

Note-se ainda que, como o domínio da função f é finito, se iterarmos f, obtendo para cada x de N_3 a respetiva órbita por f, temos de chegar a um ciclo, cujos elementos estão na imagem da função f. Dos dez números anteriores, 000 é um ponto fixo de f, que atrai todos os números abc com $a = c$; e

$$099 \rightarrow 891 \rightarrow 693 \rightarrow 297 \rightarrow 495$$

é um ciclo de período 5 a que chegam todas as outras órbitas em não mais do que duas iterações de f. (ver figura 1 na página seguinte).

Poderíamos ter começado por considerar uma transformação f_1 análoga a f mas a atuar no conjunto N_1 de números naturais com dízimas de um dígito: nesse caso, f_1 envia cada número no ponto fixo 0. No conjunto N_2 de números naturais com dois dígitos, além do ponto fixo 00 a aplicação f_2 tem um ciclo de período 5

$$09 \rightarrow 81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 45$$

a que chegam todos os números ab com $a \neq b$ em um ou dois iterados de f_2. Observe-se que este ciclo está relacionado com o ciclo de igual período em N_3: o de três dígitos obtém-se deste colocando um 9 no meio de cada número. A figura 2 (na página seguinte) ilustra a dinâmica de f_2.

Que propriedades tem este sistema dinâmico quando consideramos números com quatro ou mais dígitos? Seja N_D o conjunto de naturais com D dígitos de $\{0,1,\ldots,9\}$, permitindo-se zeros à esquerda; e seja $i_D : N_D \rightarrow N_D$ a função definida da seguinte forma: a 0 associa 0 e a cada x não nulo de N_D, escrito na base 10 e representado por D dígitos $x = x_{D-1} \ldots x_m x_{m-1} \ldots x_1 x_0$, com $m =$ máximo $\{i : 0 \leq i \leq D-1 \text{ e } x_i \neq 0\}$, associa o natural $i_D(x) = x_0 x_1 \ldots x_{m-1} x_m \ldots x_{D-1}$ obtido invertendo a ordem dos dígitos de x.

Se f_D designa a função $N_D \rightarrow N_D$ definida por $f_D(x) = |x - i_D(x)|$, todos os números da imagem de f_D são múltiplos de 9 (e, quando D é ímpar, são simultaneamente múltiplos de 9 e de 11).

De facto, essa imagem reduz-se a $(19^{D/2} + 1)/2$ elementos se D é par, e a $(19^{(D-1)/2} + 1)/2$ se D é ímpar. Além disso, como N_D é finito, cada órbita de f_D tem de terminar num ciclo cujos elementos estão na imagem de f_D.

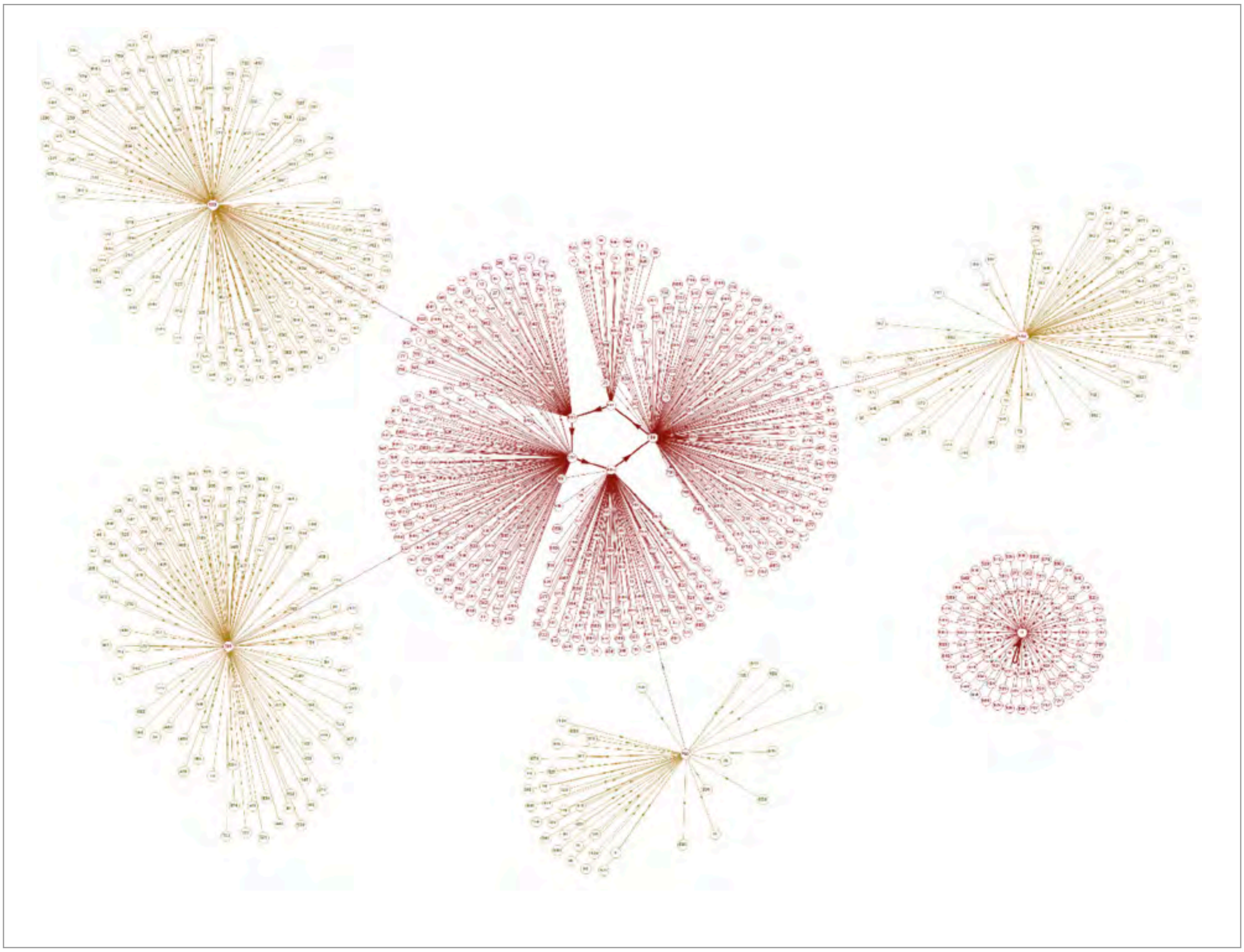


Figura 1. Ciclos e pré-ciclos em N_3.

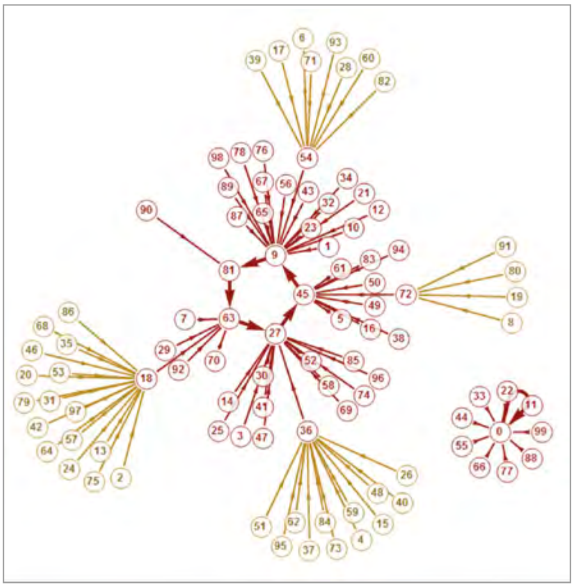


Figura 2. Ciclos e pré-ciclos em N_2.

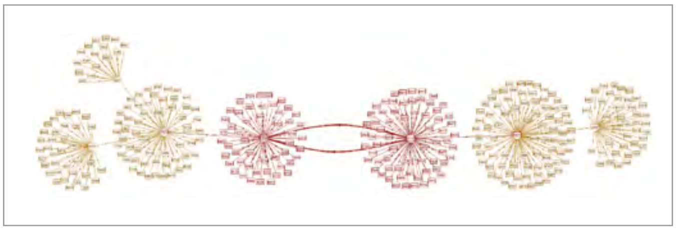


Figura 3. Ciclo de período 2 de N_4 com as suas pré-imagens.

D	N.º de ciclos	Períodos	Pré-período máximo	[Período; Número de ciclos por período]
1	1	1	1	[1; 1]
2	2	1, 5	2	[1; 1], [5; 1]
3	2	1, 5	2	[1; 1], [5; 1]
4	5	1, 2, 5	12	[1; 1], [2; 1], [5; 3]
5	5	1, 2, 5	12	[1; 1], [2; 1], [5; 3]
6	12	1, 2, 5, 9, 18	47	[1; 1], [2; 2], [5; 7] [9; 1], [18; 1]
7	12	1, 2, 5, 9, 18	47	[1; 1], [2; 2], [5; 7] [9; 1], [18; 1]
8	26	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 4], [5; 15], [9; 2], [10; 1], [14;1], [18; 2]
9	26	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 4], [5; 15], [9; 2], [10; 1], [14; 1], [18; 2]
10	49	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 7], [5; 31] [9; 3], [10; 2], [14; 2], [18; 3]
11	49	1, 2, 5, 9, 10, 14, 18		[1; 1], [2; 7], [5; 31], [9; 3], [10; 2], [14; 2], [18; 3]

Tabela 1

A tabela 1 reúne alguma informação sobre a dinâmica de f_D para $1 \leq D \leq 11$: quantos ciclos tem, os respetivos períodos e, para $1 \leq D \leq 7$, os pré-períodos máximos.

Em [1], encontram-se algumas figuras que ilustram a dinâmica de f_D para estes valores de D; e pode ler-se uma descrição mais completa de algumas propriedades destas dinâmicas.

Analisemos agora os dados da tabela 2, que contém os ciclos de f_D, para $1 \leq D \leq 6$. Notamos aqui alguns padrões. Para cada natural D, a aplicação f_D só tem um ponto fixo. Se $D > 1$ é ímpar, os ciclos de N_D surgem dos ciclos de N_{D-1} por um dos processos seguintes:

(a) fixamos um elemento de um ciclo de N_{D-1} e colocamos um 9 a meio (vejam-se, por exemplo, os ciclos {2178, 6534} de $D = 4$ e {21978, 65934} de N_5); ou

(b) fixamos um elemento de um ciclo de N_{D-1} e acrescentamos um 0 na posição central (é, por exemplo, essa a relação entre os ciclos {09009, 81081, 63063, 27027, 45045} de $D = 5$ e {0909, 8181, 6363, 2727, 4545} de N_4).

Estes procedimentos não alteram o período do ciclo, mas nem todas as possibilidades produzem ciclos (por exemplo, 09909 não pertence a nenhum ciclo de N_5). Pode ler-se em [1] por que é válida esta propriedade para todo o $D > 1$ ímpar.

Para D par, parece haver maior variedade de meios para se formarem os ciclos de N_D. Por exemplo, podemos fixar um elemento de um ciclo de N_{D-2} e colocar um zero em cada topo (como em {0090, 0810, 0630, 0270, 0450} quando $D = 4$); ou escolher um elemento de um ciclo de $N_{D/2}$ e repeti-lo duas vezes (veja-se o ciclo {0909, 8181, 6363, 2727, 4545}, quando $D = 4$); ou selecionar ciclos de valores de D menores e juntá-los depois de uma permutação conveniente (como no ciclo {978021, 857142, 615384, 131868, 736263, 373626, 252747, 494505, 010989} de $D = 6 = 2 + 4$, cujo primeiro elemento resulta de uma tal união entre os ciclos {09, 81, 63, 27, 45} de N_2 e {2178, 6534} de N_4).

A lista de procedimentos detetados para $1 \leq D \leq 12$ é extensa (veja-se [1]) e alguns deles geram ciclos com períodos novos relativamente aos já obtidos para valores menores de D. O programa elaborado pelo Atractor para calcular os ciclos de f_D demorou centésimas de segundo para fornecer a lista completa dessas órbitas especiais quando $2 \leq D \leq 4$; gastou poucos segundos para $D = 6$ e cerca de dois minutos para $D = 8$. Quando se fixou $D = 12$, porém, o tempo previsto subiu para cerca de um ano (embora, usando amostras ao acaso de elementos da imagem de f_{12}, a busca de ciclos tenha sido mais rápida). Fica, por isso, o desafio de se provarem, para $D \geq 12$ e sem recurso ao computador, algumas das propriedades detetadas nas dinâmicas anteriores.

D	Per°	Ciclos em N_D
1	1	{0}
2	1	{00}
	5	{09, 81, 63, 27, 45}
3	1	{000}
	5	{099, 891, 693, 297, 495}
4	1	{0000}
	2	{2178, 6534}
	5	{0999, 8991, 6993, 2997, 4995}
		{0090, 0810, 0630, 0270, 0450}
		{0909, 8181, 6363, 2727, 4545}
5	1	{00000}
	2	{21978, 65934}
	5	{09999, 89991, 69993, 29997, 49995}
		{09009, 81081, 63063, 27027, 45045}
		{00990, 08910, 06930, 02970, 04950}
6	1	{000000}
	2	{219978, 659934}
		{021780, 065340}
	5	{099999, 899991, 699993, 299997, 499995}
		{090009, 810081, 630063, 270027, 450045}
		{009990, 089910, 069930, 029970, 049950}
		{000900, 008100, 006300, 002700, 004500}
		{009090, 081810, 063630, 027270, 045450}
		{090909, 818181, 636363, 272727, 454545}
		{099099, 891891, 693693, 297297, 495495}
	9	{978021, 857142, 615384, 131868, 736263, 373626, 252747, 494505, 010989}
	18	{043659, 912681, 726462, 461835, 076329, 847341, 703593, 308286, 374517, 340956, 318087, 462726, 164538, 670923, 341847, 406296, 286308, 517374}

Tabela 2

A transformação f_D pode ser considerada como atuando nos naturais quando representados numa outra base que não 10 (designemo-la por $f_{D,base}$), esperando-se dinâmicas distintas, uma vez que o comportamento das órbitas de $f_{D,base}$ depende dos dígitos permitidos na representação dos naturais. Por exemplo, na base 2 e para $D = 4$, a imagem de uma tal transformação $f_{4,2}$ contém cinco números e há quatro ciclos fixos, nomeadamente {0000}, {0010}, {0101}, {0111}; e são apenas estes os atractores de $f_{4,2}$. Mais geralmente, nesta base e para todos os valores de D par, há $2^{D/2}$ pontos fixos (e conjetura-se que são apenas esses os atractores de $f_{D,2}$). Em base 3 e para $D = 6$, encontramos três pontos fixos ({000000},{010120},{102212}) e uma órbita de período 2 ({010212, 201021}), e só estes ciclos. Em [1] prova-se que, para algum D, $f_{D,B}$ tem pontos fixos não nulos se e só se B for não congruente com 1 módulo 3. Um ponto fixo de $f_{2,B}$ é $((B-2)/3, (2B-1)/3)_B$ se B é congruente com 2 módulo 3; um ponto fixo de $f_{4,B}$ é $(B/3, B/3-1, 2B/3-1, 2B/3)_B$, se B for múltiplo de 3.

Em [1] encontram-se mais dados sobre estas e outras bases, alguns dos quais obtidos através de applets interativos que o leitor é convidado a explorar.

REFERÊNCIAS

[1] *www.atractor.pt/mat/ABC-CBA*

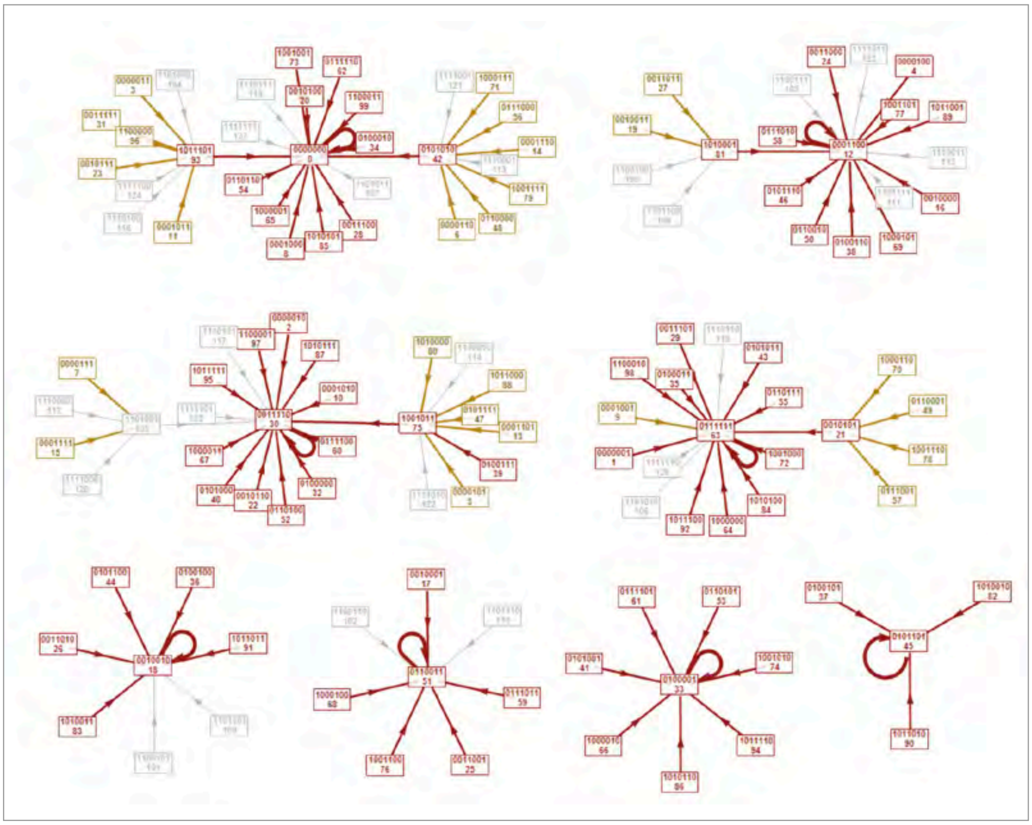


Figura 4. Ciclos e pré-ciclos em $f_{7,2}$.

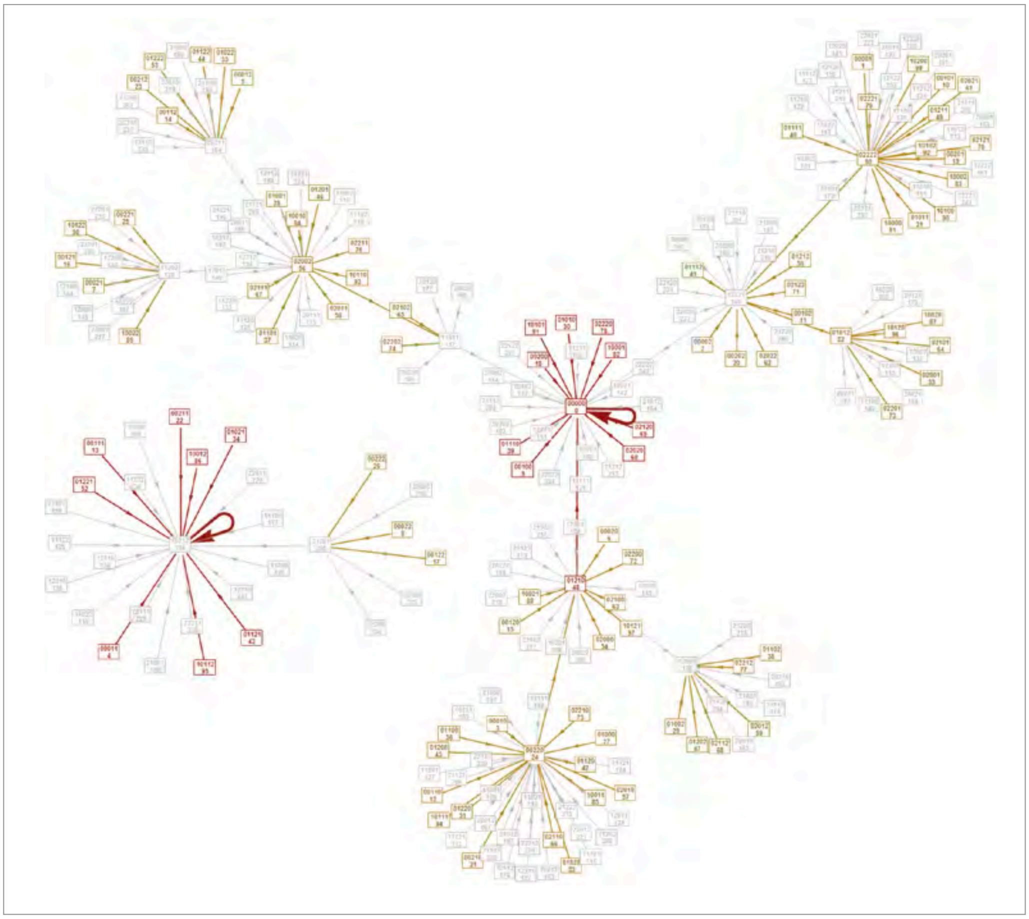


Figura 5. Ciclos e pré-ciclos em $f_{5,3}$.

Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

PITÁGORAS AFRICANO

Paulus Gerdes, que faleceu em novembro, deixou uma obra fantástica, principalmente na área hoje denominada Etnomatemática. Muitos dos seus livros estão disponíveis, em português, em versão eletrónica, grátis[1]. Um deles tem o título desta secção. Foi o primeiro em que pensei quando recebi a terrível notícia do seu desaparecimento. Assim, hoje visitamos uma prova do Teorema de Pitágoras de sua autoria. Uma das infinitas provas que nos deixou!

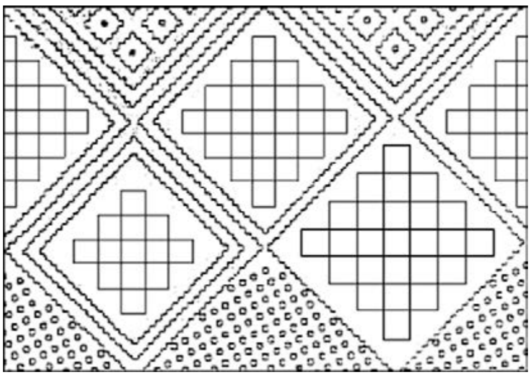


Figura 1. Motivo decorativo tradicional angolano.

Tudo começou com a observação dos padrões que embelezam os cestos africanos.

Às figuras geométricas que se repetem neste motivo costuma chamar-se "quadrados dentados". É fácil construir um quadrado com a mesma área de cada um deles (figura 2).

Vejamos como o mais famoso teorema da matemática se insinua neste contexto. Partamos de um triângulo retângulo, e construamos dois quadrados nos catetos. Dividam-se estes, como indicado na figura abaixo, em 9 e 16 quadrados.

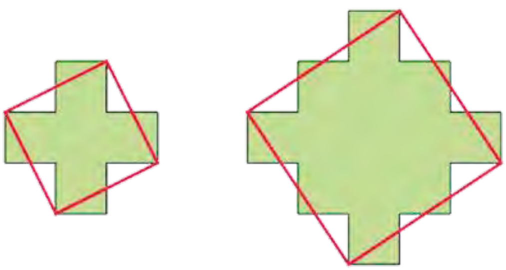
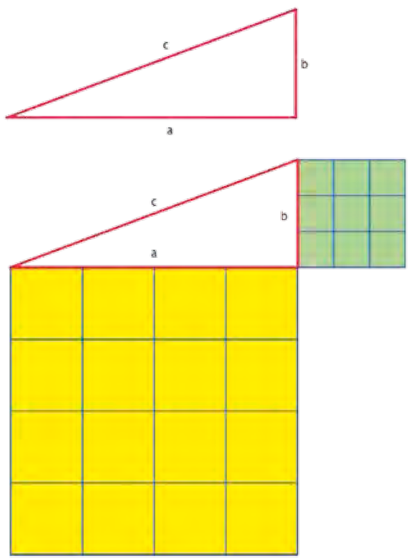
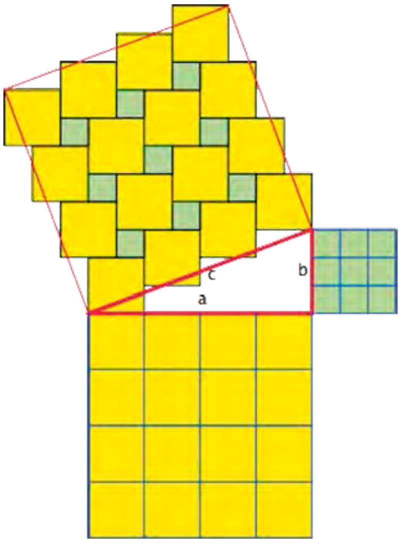


Figura 2. "Quadratura" dos "quadrados dentados" de 5 e 13 unidades de área.



Construa-se agora, ao longo da hipotenusa, o padrão composto pelas duas famílias de quadrados.



Como no caso dos "quadrados dentados", não é difícil deduzir que a área da figura composta pelos dois tipos de quadrados é c^2, como assinalado pelas linhas vermelhas. E o Teorema de Pitágoras fica estabelecido. Claro que, no lugar de 9 e 16, podíamos ter usado uma outra divisão em n^2 e $(n+1)^2$ quadrados. Temos assim uma infinidade de provas...

Paulus Gerdes propõe muitas outras motivações para a proposição pitagórica. Aconselho a todos a consulta dos seus livros nesta e noutras matérias.

Sobre a nossa última coluna, Racio(ci)nar: Trata-se de um disfarce para uma variante do jogo do NIM, normalmente chamada Northcott (ver Berlekamp, Conway, Guy, *Winning ways for your mathematical plays*, Vol. I, AK Peters 2001, p. 54).

[1] http://www.lulu.com/

Eduardo Marques de Sá
Universidade de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

QUADRADOS, QUADRÍCULAS E A HIPÉRBOLE DE OBSERVAÇÃO DUMA ELIPSE

Num Canto da *Gazeta de Matemática* anterior foram propostos problemas sobre a representação em perspectiva linear e a observação de quadros concebidos de acordo com essa teoria. Neste Canto sugerimos mais problemas e algumas respostas das quais emerge o curioso conceito de hipérbole de observação duma elipse.

COMO DEVE «VER-SE» O CUBO?

O primeiro problema a considerar é o da figura 1, cujo título sugere tratar-se da imagem duma caixa cúbica, com uma face transparente, através da qual se vê o interior em perspectiva. Acerca dela, pergunta-se: *qual é o ponto de observação no qual o leitor deve colocar o seu olho para ver algo que o nosso cérebro "aceite" ser um cubo?*

Na figura traçou-se a mediatriz dos lados verticais dos quadrados que determina os pontos *A, B, C, D*. A primeira preocupação de quem observa um quadro em perspectiva rigorosa é determinar o seu centro perspectivo, isto é, a projecção ortogonal, sobre a tela, do olho do pintor quando executou a obra; claro que o centro perspectivo da figura 1 é o

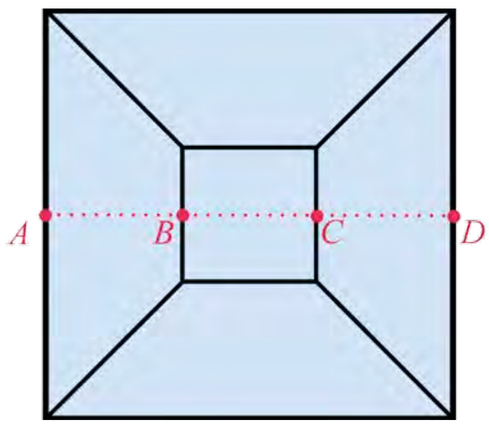


Figura 1. Interior dum cubo.

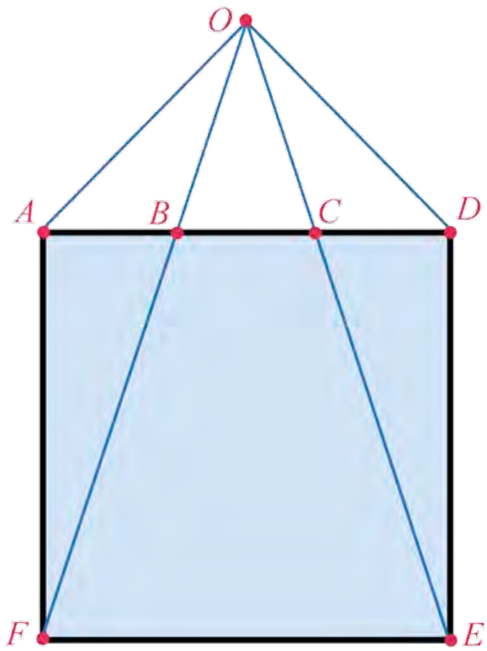


Figura 2. Cubo em observação.

centro geométrico dos quadrados; recorda-se que o tal centro é o ponto de fuga do feixe de rectas (do real retratado no quadro) perpendicular ao plano da tela – o ponto de encontro das diagonais dos quadrados da figura 1. Portanto, deve o leitor observar a figura com um só olho, de modo a que o eixo óptico seja perpendicular à folha de papel e passe pelo centro dos quadrados.

Falta saber a que distância deve colocar-se a pupila. Na figura 2 intervém o geómetra, bem ao jeito dos arquitectos renascentistas, como Leon Alberti, e dos matemáticos pintores cujo representante maior foi Piero della Francesca; a figura representa o cubo, em projecção ortogonal, sendo observado, do ponto O, pelo "artista" que desenhou a figura 1, da qual o grande quadrado está agora representado de topo pelo segmento $[AD]$ e o quadrado pequeno por $[EF]$. Os pontos A, B, C, D estão agora representados sobre a face superior do cubo. Podemos imaginar que o observador desenha o seu quadro num vidro assente sobre a face superior do cubo, como num perspectógrafo. Da pirâmide visual mostram-se as linhas OA, OD, OE, OF; os pontos B e C são as intersecções com AB das linhas de vista OD e OE. Como $\overline{BC} = 1/3\overline{AD}$, a distância de O a AD é metade do lado do quadrado maior. Isto conduz às instruções para bem observar a figura 1:

Olhe a figura com um só olho de modo a que o eixo óptico seja perpendicular ao plano do papel e passe pelo centro dos quadrados, colocando a pupila a uma distância igual a metade do lado do quadrado maior.

OS PROBLEMAS DA BOLA-8

Esquecendo os pormenores (oitos, sombras e reflexos) e olhando apenas para as duas imagens da bola-8 como discos, um circular e o outro elíptico, o problema a resolver é o seguinte:

Existem pontos do espaço acima da folha de papel dos quais o seu olho vê o segundo disco como disco circular. Qual é o lugar geométrico desses pontos?

Figura 3. Bola-8, circular e "esticada".

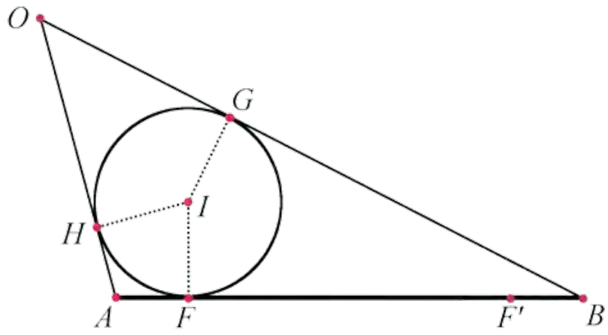


Figura 4. Esfera de Dandelin.

Precisemos um pouco a questão; um disco circular traçado num papel (como o da primeira bola-8) vê-se como disco na sua "circularidade plena", quando e só quando o observamos com o eixo óptico do olho perpendicular ao plano do desenho e passando pelo centro do círculo. Isto acontece se e só se o prisma visual do disco for um cone de revolução. Portanto, o problema proposto pode reformular-se do seguinte modo: *dada uma elipse no espaço tridimensional, determine o lugar geométrico dos vértices dos cones de revolução que têm a dita elipse por secção plana.* Na figura 4 a elipse está de topo, representada pelo segmento $[AB]$, o seu eixo maior; os pontos F e F' são os focos. Suponhamos que, vista de O, o cone visual da elipse é de revolução. O plano da figura é o das geratrizes OA e OB, que contém o eixo de revolução do cone. Na figura esboçou-se uma esfera de Dandelin, necessariamente tangente ao plano da elipse no foco mais próximo de O. Ela tem centro I, o incentro do triângulo $[OAB]$.

Da identidade $2\overline{AF} + 2\overline{BG} + 2\overline{OH} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{OA}$ resulta que

$$\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{FF}'. \qquad (1)$$

Note-se que $\overline{FF}'$ é constante. Recorde-se, da chamada "definição geométrica" da hipérbole (prima do método do jardineiro para traçar elipses), o lugar geométrico dos pontos O que satisfazem (1) é uma hipérbole de focos A, B. Portanto, o ponto O está sobre a hipérbole $\mathscr{H}$, de plano perpendicular ao da elipse, que tem por vértices os focos da elipse e por focos os vértices da elipse. Deixa-se ao leitor a prova (simples) de que todo o ponto O da hipérbole, excepto F e F', é um *bom* ponto de observação, isto é, vértice dum cone de revolução que tem a nossa elipse por secção plana. Podemos, pois, dizer que $\mathscr{H}$ é a *hipérbole de observação da elipse*. Portanto,

o lugar geométrico que o problema pede é a parte da hipérbole de observação da elipse que fica estritamente acima do plano da folha de papel.

INTERPRETAÇÃO CARTESIANA

Introduzamos um sistema cartesiano ortonormado, centrado no centro da elipse, com eixo dos x's segundo o eixo maior da elipse, eixo dos y's segundo o eixo menor e eixo dos z's ortogonal ao plano da elipse. Sendo a e b ($a > b$) os semi-eixos da elipse, a sua semi-distância focal é $f = \sqrt{a^2 - b^2}$ e as suas equações são

$$z = 0\,, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

É fácil ver que as equações da hipérbole $\mathscr{H}$ são

$$y = 0\,, \qquad \frac{x^2}{f^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Os bons pontos de observação são os (x, y, z) que satisfazem as equações (2).

No caso da bola-8 esticada, adoptamos o raio da bola como unidade de medida, o que dá $b = 1$, $a = 3$ e $f = \sqrt{8} \approx 2.83$. Na figura 5, representa-se a hipérbole $\mathscr{H}$ de observação da bola-8 esticada; aqui, a elipse muito oblonga representa uma perspectiva da segunda imagem *bidimensional* da figura 3, despojada do seu conteúdo gráfico. O segmento $[AB]$ é, pois, o eixo maior da bola-8 esticada; para bem a observar, o leitor deverá colocar a pupila dum olho num ponto da dita hipérbole e orientar o eixo óptico segundo a bissectriz do ângulo $\widehat{AOB}$ (o eixo do cone visual).

Escólio. Em geral, os quadros renascentistas executados por matemáticos como Piero della Francesca possuem informação suficiente para determinar um único ponto de observação. Como vimos, não é esse o caso na observação duma elipse, sem conteúdo gráfico, de que apenas se sabe ser representação perspectiva duma circunferência.

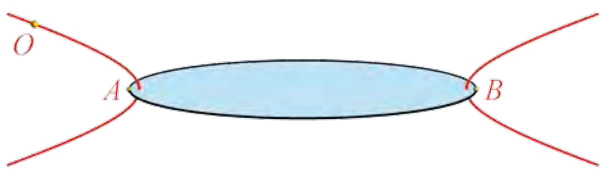


Figura 5. A hipérbole de observação.

A ELIPSE DE *MAKE POVERTY HISTORY*

Podemos desde já resolver o problema 5 do Canto Délfico anterior. Tratava-se da anamorfose de Julian Beever, que aqui se reproduz para reavivar a memória. Pergunta-se: qual o eixo menor da elipse, sabendo que o eixo maior é 13 m e que o ponto de observação óptima está colocado a uma altura de 1.5 m, na vertical dum ponto do solo que dista 2 m do referido eixo maior.

Duas notas prévias: em primeiro lugar, há um só ponto O de observação óptima, dada a complexidade do conteúdo da imagem de Beever; por outro lado, esse ponto está sobre a hipérbole de observação da elipse (cf. figura 5).

O semi-eixo maior mede, pois, $a = \frac{13}{2}$ e, feitas as contas com o sistema cartesiano acima adoptado, o ponto O tem coordenadas $x = a + 2 = 8.5$, $y = 0$, $z = 1.5$. De (5) vem

$$\frac{8.5^2}{8.5^2 - b^2} - \frac{1.5^2}{b^2} = 1 \;\therefore\; b \approx 1.65\,\mathrm{m}$$

Portanto, o eixo menor da elipse mede ≈ 3.30 m.

E O CONTEÚDO DA BOLA-8?

Um dos problemas colocados no Canto Délfico anterior foi este: *tome agora em conta os conteúdos das imagens bidimensionais, nomeadamente: oitos, sombras e reflexos. Existe algum ponto do espaço do qual se consegue observar a segunda imagem e ver uma imagem matematicamente semelhante à primeira imagem da bola-8?*

Para vermos que a resposta a tal questão é negativa, vamos dar uma outra volta ao problema. Substitua-se o conteúdo da bola-8 por uma quadrícula como a da figura 6. Coloque-se o círculo quadriculado na posição indicada na figura 7, de modo a que o cone visual seja de revolução; nessa situação, o nosso olho, em O, vê o disco na sua circularidade plena. Projecte-se de O a grelha num outro plano (horizontal, na figura 7). Se retirarmos de cena o disco circular e olharmos de O para a grelha projectada no plano horizontal, o nosso olho continua a ver a figura 6!

Observe agora, na figura 8, a projecção da grelha[1] no

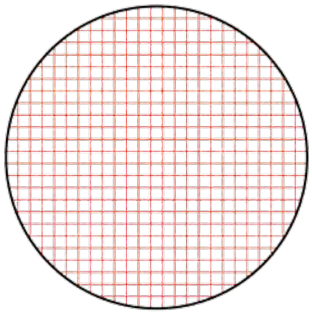


Figura 6. Quadrícula base.

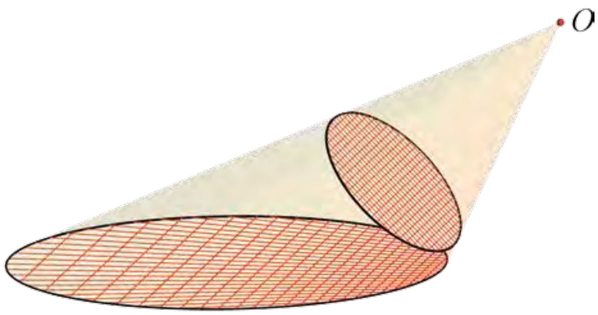


Figura 7. Projecção da grelha da figura 6.

plano horizontal (cf. figura 7) comparada com a malha que se obtém esticando linearmente a figura 6 tal como se fez para obter da bola-8 a imagem elíptica da figura 3. A diferença visualmente clara entre as duas deformações da quadrícula inicial ilustra quão ingénua é a ideia de que observar "de esguelha" uma imagem esticada pode reconstituir a imagem original com todo o seu conteúdo.

OUTROS PROBLEMAS

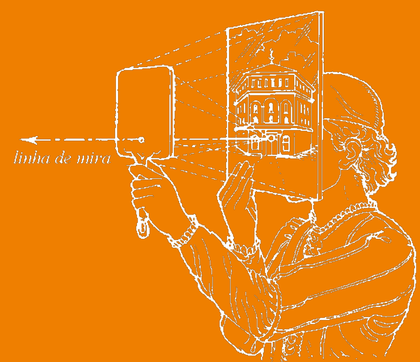
Mantém-se, no entanto, o problema de conceber argumentação matemática sólida que prove as impressões que o grafismo acima sugeriu. Acrescentamos dois problemas aos cinco do Canto Délfico do n.º 174 da *Gazeta de Matemática*:

Problema 6. *As rectas que atravessam, da esquerda para a direita, a primeira imagem da figura 8 parecem convergir num ponto. Será isso verdade? E, se assim for, que ponto é esse, que relação tem com o cone visual da figura 7?*

Problema 7. *Para a primeira imagem da figura 8, de que pontos da hipérbole de observação da elipse se vê uma imagem matematicamente semelhante à da figura 6?*

O autor escreve de acordo com a grafia antiga

O método (de pôr e tirar grelha) tem fortes semelhanças com a experiência atribuída a Filippo Brunelleschi, por volta de 1420, para ilustrar leis da perspectiva por ele então redescobertas. A figura mostra-o, de acordo com a lenda, segurando na mão direita um desenho do Baptistério de S. João e, na esquerda, um espelho; quando este é retirado, Filippo vê o seu Baptistério, "tal qual" o desenho que executara de acordo com leis matemáticas que viriam a marcar a prática pictórica renascentista.



Se non è vero...

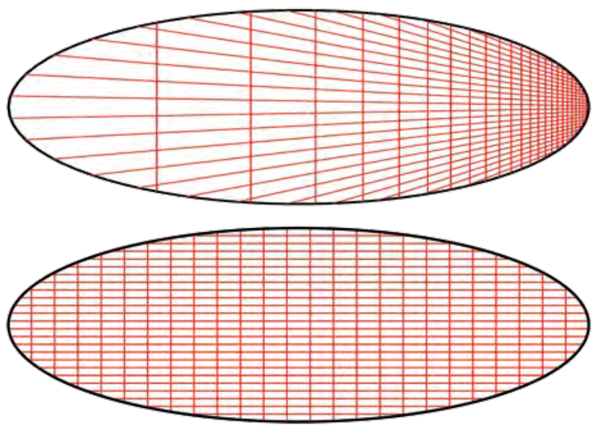


Figura 8. Duas malhas bem diferentes.

[1] Para caber numa coluna da *Gazeta de Matemática*, a elipse da figura 7 foi concebida com excentricidade bem menor do que as das figuras 8 e 3.

GAZETA DE MATEMÁTICA – 75 ANOS

GRACIANO DE OLIVEIRA
ULHT, LISBOA
gdoliv@mat.uc.pt

É conhecida, e muito citada, a frase do escritor F. Scott Fitzgerald “não há segundos actos na vida americana”. Como sucede com a maioria das sentenças com esta pretensão de abrangência, são muitos os exemplos na História americana que a contrariam. Em Portugal, seriam talvez ainda mais. A quantidade de “segundos actos” na vida portuguesa é abundante e nem a *Gazeta de Matemática* escapou a essa quase fatalidade. Uma vez que nem todos conhecem os detalhes dessa história (em bom rigor, dessas histórias), pedimos ao Professor Graciano de Oliveira, antigo director da revista, que nos contasse como tudo aconteceu.

Tenho de reconhecer que a passagem de mais um aniversário da *Gazeta de Matemática* torna oportuno recordar o recomeço que se deu no ano 2000 e assim relato alguns acontecimentos em que participei. E faço-o com especial prazer porque a minha modesta intervenção na vida da *Gazeta* constitui um dos pontos do meu *curriculum* de que mais me orgulho, embora, sinal dos tempos, pelos critérios actualmente em voga, nada valha para efeitos de *ranking*, matéria de que estou isento (suponho) graças à minha provecta idade. Talvez mereça mesmo nota negativa: basta pensar que obteria melhor pontuação caso o tempo que despendi com a *Gazeta* tivesse sido aplicado na escrita de um artigo (isto é, *paper*) e conseguisse publicá-lo numa revista da pesada. Como penso ao contrário, foi com agrado que recebi o pedido para que contasse o que se passou.

Mas passemos ao que interessa.

O primeiro número da *Gazeta* viu a luz do dia em 1940 e publicou-se, com uma regularidade muito razoável para a época, até 1975. Depois da instauração da Democracia, muitos sonhos, não todos, se tornaram realidade. Entre eles, a legalização da Sociedade Portuguesa de Matemática. Houve, nessa época, reuniões e negociações, em que não participei, que levaram à decisão de legalizar a Sociedade Portuguesa de Matemática, o que veio a ter lugar em 1977. Ficou também assente que a *Portugaliae Mathematica* passaria a ser propriedade da recém-legalizada associação. Quanto à *Gazeta de Matemática*, foi mais difícil por razões que nunca percebi. Houve desentendimentos que acabaram por deixar a *Gazeta* numa situação mal definida apesar da grande vontade de lhe dar continuidade.

A *Portugaliae Mathematica* era, e é, uma revista de investigação, portanto, dirigida a um número restrito de especialistas. A *Gazeta*, pelo contrário, era, como ostentava na capa, “o jornal dos concorrentes ao exame de aptidão e dos estudantes de matemática nas Escolas Superiores”. Era pois um jornal dirigido a todo aquele que tivesse algum interesse ou gosto pela matemática. A *Gazeta* permaneceu assim, em letargia, por falta de entendimento entre os entusiastas da sua publicação. Nunca percebi os detalhes. Em 1990 publicou-se o volume 137. Desconheço as movimentações que houve, mas suponho que o objectivo era continuar a publicação regular, o que não veio a acontecer.

Fui presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática nos biénios 1996-1998 e 1998-2000, terminando o segundo mandato a meio do Ano Mundial da Matemática, um belo ano para relançar a *Gazeta*. Assim foi, graças a acontecimentos fortuitos e em que, por mero acaso, estive no lugar certo.

Um dos entusiastas da *Gazeta de Matemática* e que muito trabalhou para a sua existência foi o Engenheiro Gaspar Teixeira e, tanto quanto sei, era ele que detinha a posse da revista. O Engenheiro Gaspar Teixeira estava com uma idade avançada e, no final da década de noventa, a sua saúde decaiu muito, tornando-o incapaz de qualquer actividade. Quando já estava acamado, a sua esposa, sabendo do amor que ele dedicara à *Gazeta*, telefonou para a sede da SPM a esse respeito. Não fui eu quem atendeu a chamada nem me lembro da data exacta, provavelmente terá sido em meados de 1999. Nessa chamada, a senhora abriu a possibilidade de a *Gazeta* passar a ser propriedade da Sociedade Portuguesa de Matemática. A D. Antonieta, funcionária da SPM, informou-me de imediato (eu residia em Coimbra) e deu-me o número do telefone da senhora a fim de eu a contactar. Coisa que não fiz logo. As infraestruturas da SPM eram frágeis, eu tinha as minhas funções a desempenhar como professor em Coimbra, havia muito a fazer no Ano Mundial da Matemática e o dinheiro era, sobretudo no início, escasso.

Por isso, o papelinho com a informação fornecida pela D. Antonieta repousou meses sobre a minha secretária, embora, diga-se, eu olhasse para ele todos os dias sem saber bem o que fazer e como fazer.

Numa tarde de inspiração, telefonei à esposa do Engenheiro Gaspar Teixeira e fiquei a saber que era seu desejo que a *Gazeta* passasse para a posse da Sociedade Portuguesa de Matemática e que continuasse a existir e a desempenhar o papel que os fundadores lhe destinaram. Assim, num golpe de sorte, fiz renascer a *Gazeta de Matemática*.

Desloquei-me ao Instituto da Comunicação Social, no Palácio Foz, onde pude verificar o que se passava com a *Gazeta*. Informaram-me que, uma vez que há muito se não publicava, o título caíra no domínio público e qualquer entidade, pública ou privada, podia registá-lo e tornar-se sua proprietária. Havia formalidades, por acaso muito simples, a cumprir para o registo, entre elas tinha de se indicar um director. Havia urgência, pois receávamos, eu e a direcção da Sociedade Portuguesa de Matemática, que alguém, ou alguma colectividade, se adiantasse e se apoderasse do título. Por esta razão, acabei por ser eu próprio indicado para director pela direcção da sociedade a que presidia. Tive algumas dúvidas sobre a bondade desta solução, mas acabei por a aceitar, pressionado pelas circunstâncias. Não queríamos, de maneira nenhuma, que a *Gazeta* passasse para a posse de qualquer entidade que não fosse a Sociedade Portuguesa de Matemática.

Assim, graças a uma série de acasos, tornei-me no director da *Gazeta* renascida. O Ano Mundial da Matemática facilitou-me a tarefa no aspecto financeiro.

Aproveito para agradecer ao corpo redactorial que comigo colaborou nessa fase de arranque, especialmente ao director adjunto, Doutor Vítor Neves, que desempenhou um papel fundamental numa altura em que eu estava com uma sobrecarga excessiva.

Decidimos que a transição devia ser suave e demonstrativa de que a nova *Gazeta* continuava a ser a *Gazeta* que nascera em 1940.

Por essa razão, o primeiro volume, com o número 138, saiu com um aspecto, tanto gráfico como em dimensões, em tudo idêntico ao que fora o da *Gazeta* durante várias décadas. O volume seguinte sofreu uma pequena alteração, pois a capa apresentava, em fundo, o ícone do Ano Mundial da Matemática. No seguinte, a alteração foi maior, mas procurou-se, e suponho que se conseguiu, que fizesse lembrar o aspecto tradicional da *Gazeta*. Começou a utilizar-se o sistema de *refereeing* e tentou aproximar-se a *Gazeta* dos interesses dos seus destinatários. Se se conseguiu ou não, compete a eles dizer. Mas fizeram-se esforços. Procurou-se ainda expandir a revista para os países de língua portuguesa e espanhola, objectivo em que o sucesso foi muito limitado.

Tudo tem um fim e em 2009 achei que era tempo de deixar as funções que desempenhei com muito gosto e orgulho.

O autor escreve de acordo com a antiga ortografia.

SOBRE O AUTOR

Graciano de Oliveira foi durante décadas professor da Universidade de Coimbra. Exerceu as funções de presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática e foi diretor da *Gazeta de Matemática* de 2000 a 2007.

Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

MATEMÁTICA EM DUAS RODAS

Pedalar é bom para o ambiente, para o bolso, exercita os músculos e... gera problemas interessantes de matemática. Numa das cidades com mais mobilidade alternativa do mundo, um grupo de matemáticos está a tentar tornar mais eficiente o sistema de aluguer por hora de bicicletas. Assim torna-se mais simples ir de um lado para o outro na musical cidade de Viena, capital da Áustria.

Com mais de uma centena de postos e 2500 bicicletas de aluguer, a Citybike Wien é uma das maiores e mais antigas empresas de serviços de transporte alternativo do mundo. Com um simples registo e com o fornecimento do número do cartão bancário ou de crédito, é possível a qualquer um utilizar uma bicicleta gratuitamente por uma hora, com um preço crescente no tempo a partir da segunda hora. Estas podem ser recolhidas e devolvidas em qualquer um das centenas de postos de serviço espalhados pela capital austríaca. Veja a figura 1.

Fazer o serviço funcionar, no entanto, exige algum esforço dos responsáveis. As deslocações tendem a ser da periferia para o centro na parte da manhã e na direção contrária no final do dia. Outras características, como a topografia e as condições meteorológicas, induzem assimetria nas rotas. Desta forma, é necessário haver um sistema de transporte das bicicletas das estações cheias para as estações vazias. Para isto, há um serviço de carrinhas que circula durante todo o dia, carregando as bicicletas ociosas no contra fluxo dos utentes.

Figura 1. Um posto de serviço da Citybike Wien, temporariamente cheio. (Fonte: Wikimedia Commons).

Ora, se há um serviço a ser feito, há um matemático a pensar em como este pode ser otimizado. E sendo Viena não só uma cidade amiga das duas rodas, mas também um dos locais com maior tradição científica no mundo, é natural que um grupo de cinco investigadores do Institute of Computer Graphics and Algorithms da Universidade Técnica de Viena se debruçasse sobre o problema [1].

O primeiro passo é o de definir um objetivo para cada uma das diversas estações de serviço, mais especificamente, a quantidade de bicicletas que deve estar disponível em cada ponto. Ao contrário do que pode parecer à primeira vista, o ideal não é tê-lo cheio, pois ele serve também para devoluções. Ao não haver espaço para deixar a bicicleta, é necessário procurar outro – pagando o tempo necessário para isto. O valor ideal é fornecido pela própria administração da Citybike. A ocupação das diversas estações de serviço num certo momento é um dos dados iniciais do problema. Desta forma, define-se um grafo, onde cada ponto de apoio v é um nodo, ao qual associamos uma *capacidade máxima* C_v, um *valor corrente*

p_v e *valor ideal* q_v. Cada arco que liga dois nodos u e v é associado ao tempo $t_{u,v}$ que uma carrinha demora a ir de um ponto ao outro. Há também um último nodo, representando o *depósito*, onde as carrinhas passam a noite.

As carrinhas têm de percorrer o grafo acima, carregando e descarregando bicicletas pelos diversos pontos de apoio de forma a rebalancear o sistema da melhor maneira possível e no mínimo tempo. Evidentemente, neste ínterim já há um novo desbalanceamento e o serviço deve recomeçar. Uma vez definido, o serviço de carrinhas não alterará as suas instruções até que o mesmo esteja completo. Sobre isto, dizemos que o processo de otimização é "estático". (A quantidade instantânea de bicicletas disponíveis pode ser consultada no *http://www.citybikewien.at*).

Evidentemente, há várias restrições ao serviço. As carrinhas têm uma capacidade máxima e também mínima (zero!). As suas rotas começam e terminam no depósito, e as viagens começam e terminam vazias, pois as bicicletas não podem passar a noite nas carrinhas estacionadas (o depósito de carrinhas é aberto ao público e não há forma prática de prender as bicicletas nas carrinhas). Algumas soluções podem ser particularmente curiosas, como uma carrinha deixar um certo número de bicicletas num ponto de apoio que logo a seguir será visitado por outra carrinha, que as recolherá. Além de haver certos inconvenientes práticos desta solução (como, por exemplo, um único atraso resultar num efeito em cascata), matematicamente é necessário impor que a cada momento o número de bicicletas disponíveis em cada posto seja um número maior ou igual a zero. Além disto, os estudos numéricos mostram que se considerarmos que numa volta completa de rebalanceamento, cada estação será apenas *carregada* ou *descarregada*, a solução obtida não é significativamente pior do que aquelas que usam as estações como local de armazenamento temporário de bicicletas. Dizemos que consideraremos apenas as soluções em que a disponibilidade de bicicletas em cada estação é uma função monótona do tempo.

Embora gostássemos de ter no final do serviço cada estação com o número ideal de bicicletas, isto frequentemente não é possível. Portanto, o objetivo é o de *minimizar* esta diferença. Leva-se em conta, também, mas como pesos significativamente inferiores (da ordem de uma centena de milésimo), o tempo necessário para o serviço, incluindo não só o tempo do transporte mas também o de carga e de descarga. Os pesos relativos foram definidos pelos serviços da empresa, que se mostrou muito mais interessado em ter o número correto de veículos disponíveis aos utentes do que em minimizar os custos do rebalanceamento.

No entanto, não é possível fazer aquilo a que se chama *busca exaustiva*, ou seja, olhar todas as possibilidades para escolher a mais adequada. O espaço de soluções a ser investigado é tão amplo que é necessário definir um algoritmo de procura. Inicialmente, desenvolve-se um algoritmo ineficiente para desenhar uma primeira solução possível, e depois trata-se de melhorar esta solução introduzindo algumas perturbações no sistema. Veja a figura 2.

No primeiro caso, utiliza-se o algoritmo *glutão* (*greedy*): numa carrinha inicialmente vazia, vamos primeiro para as estações cheias, onde as bicicletas devem ser recolhidas. De cada estação segue-se para aquela que maximiza a quantidade a ser recolhida em relação ao tempo para lá chegar. Repete-se o processo até chegarmos à capacidade máxima do transporte e a seguir é iniciado o processo de entregas. De cada estação vai-se àquela onde a razão entre bicicletas entregues e tempo gasto é maximizado, até a carrinha estar esvaziada. Este algoritmo demora um longo tempo para gerar uma solução ineficiente, mas que poderia bem servir como ponto de partida para a segunda fase. No entanto, optou-se por usar um algoritmo (conhecido como PILOT) distinto para gerar uma solução melhor do que a do caso anterior (ainda que também ineficiente), e que é gerada mais rapidamente.

Para a segunda fase, na qual a solução inicialmente obtida é sucessivamente melhorada, usa-se o que é conhecido como *Variable Neighborhood Descent*, que procura soluções melhores, próximas da que já foi obtida, até atingir um ótimo local (ou seja, tal que pequenas modificações produzam sempre soluções piores). Em seguida, produz-se uma perturbação maior, de forma a escapar deste ótimo local e a procurar algum outro, que seja possivelmente ainda melhor. Assim se segue até se encontrar algo que seja satisfatório (mesmo que não seja, já que isto não é possível saber, o ótimo global – a melhor de todas as soluções).

O algoritmo foi testado com os dados reais, numa rede que à época tinha 92 pontos, com bons resultados. No entanto, para uma rede tão pequena, os primeiros algoritmos já forneciam uma resposta razoável e com instruções simples, e, de facto, próximo do que já era implementado de forma intuitiva pela Citybike Wien. As verdadeiras diferenças ocorriam com o aumento artificial da rede (até 700 nodos) mostrando também quais os algoritmos mais eficientes aquando do aumento da rede e em função das

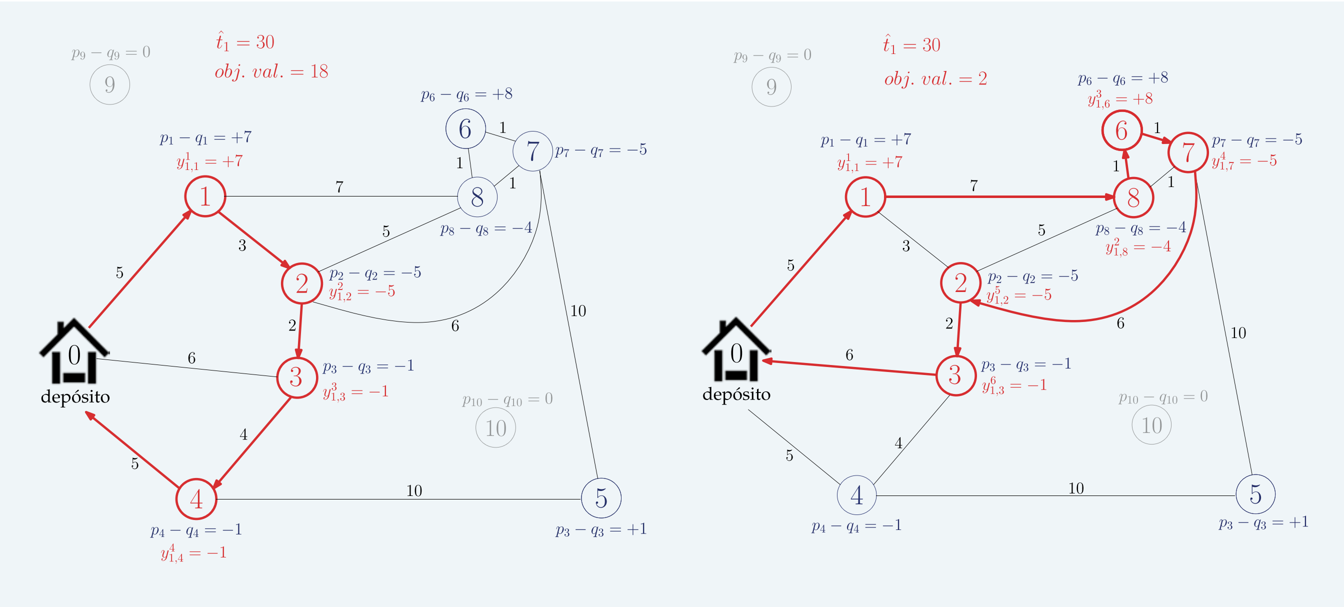


Figura 2. Dois exemplos de solução gerada inicialmente. No primeiro caso (acima), a carrinha segue o percurso ditado pelo algoritmo *glutão*, recolhendo sete bicicletas na primeira paragem, e deixando cinco, uma e um nas três paragens seguintes, antes de voltar ao depósito, menos de meia hora após iniciar o percurso. No segundo caso (abaixo), gerado pelo PILOT o funcionário da Citybike Wien recolhe sete, cinco, deixa quatro, volta a recolher oito e deixa cinco, cinco e uma, antes de voltar ao depósito em 28 minutos. Nos dois casos, a procura de soluções foi limitada àquelas em que a carrinha voltava ao depósito em, no máximo 30 minutos. Figuras gentilmente cedidas pelos autores do artigo [1] em particular G. Raidl.

restrições a serem implementadas (número de carrinhas, por exemplo). Assim, os resultados do trabalho são, de certa forma, modestos, mas mostram como, em problemas ainda mais complexos do que aquele com que estamos a lidar, a correta especificação do problema e dos seus algoritmos de solução pode ser crítica.

REFERÊNCIAS

[1] Marian Rainer-Harbach, Petrina Papazek, Günther R. Raidl, Bin Hu, Christian Kloimüllner. "PILOT, GRASP, and VNS approaches for the static balancing of bicycle sharing systems", *Journal of Global Optimization*, publicação online: 02 abril 2014.

ERRATUM

Na figura 1 do último artigo ("Da Terceira Para A Quarta Dimensão", *Gazeta de Matemática* 174) há uma afirmação errada: a de que os únicos dados honestos são aqueles obtidos a partir dos sólidos platónicos. Há outras estruturas matemáticas que produzem dados onde a probabilidade de cair uma dada face para cima é independente da face, como por exemplo, a colagem pela base de duas pirâmides cujas faces (fora a base) são triângulos isósceles. Ser sólido regular é um pouco mais exigente, pois não só as faces devem ser idênticas, mas também os vértices e arestas. Agradeço ao leitor e colega Arala Chaves por me ter apontado o engano.

TRUQUES E MAGIA COM CÓDIGOS ALGÉBRICOS

Estefani Moraes Moreira e Jorge Picado
Universidade de Coimbra
moraesfani@gmail.com e picado@mat.uc.pt

A teoria algébrica dos códigos é uma área excitante da matemática que usa técnicas e estruturas algébricas abstratas, clássicas e modernas, na conceção de sistemas de identificação e códigos detetores e corretores de erros. Este artigo apresenta alguns truques de magia que ilustram de forma recreativa o alcance e a eficácia de códigos algébricos simples.

Two weekends in a row I came in and found that all my stuff had been dumped and nothing was done. I was really aroused and annoyed because I wanted those answers and two weekends had been lost. And so I said, 'Dammit if the machine can detect an error, why can't it locate the position of the error and correct it?'

Richard Hamming (1949)

1. DOIS TRUQUES DE MAGIA

Comecemos com um truque que provavelmente alguns leitores conhecerão. O mágico pede a um voluntário entre a assistência que pense num número entre 0 e 15:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Em seguida, pede ao voluntário que diga se o número em que pensou está em cada um dos cartões da figura 1 ('Sim' ou 'Não').

Imediatamente o mágico adivinha o número. Como? Simplesmente somando o algarismo mais à esquerda da linha de cima em cada um dos cartões com resposta afirmativa!

Vejamos porquê. Este truque baseia-se na representação binária dos números naturais. Em vez de 'Sim' ou 'Não', podemos representar as respostas com a ajuda dos algarismos binários 1 e 0. Os números foram dispostos nos quatro cartões de modo a que, e aqui reside a eficácia do truque, cada sequência de sins e nãos (uns e zeros) corresponda precisamente a um dos primeiros 16 naturais:

N N N N = 0000 = 0	S N N N = 1000 = 8
N N N S = 0001 = 1	S N N S = 1001 = 9
N N S N = 0010 = 2	S N S N = 1010 = 10
N N S S = 0011 = 3	S N S S = 1011 = 11
N S N N = 0100 = 4	S S N N = 1100 = 12
N S N S = 0101 = 5	S S N S = 1101 = 13
N S S N = 0110 = 6	S S S N = 1110 = 14
N S S S = 0111 = 7	S S S S = 1111 = 15

Como cada número *abcd* em representação binária corresponde ao número (em representação decimal)

$$a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2^1 + d \times 2^0,$$

colocando os números $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$ e $2^0 = 1$ numa posição especial em cada cartão (por exemplo, na linha de cima, no lugar mais à esquerda), o mágico tem um processo muito rápido para passar da representação binária dada pela sequência de respostas para o número a adivinhar: somando estes números em cada um dos cartões com resposta afirmativa.

É evidente que o truque funciona de modo semelhante

8	9	10	11
12	13	14	15

4	5	6	7
12	13	14	15

2	3	6	7
10	11	14	15

1	3	5	7
9	11	13	15

Figura 1: Cartões do primeiro truque.

para qualquer potência de 2 (isto é, para os números entre 0 e $2^n - 1$); nesse caso serão necessários n cartões nos quais se dispõem os números de acordo com a sua representação binária, 2^{n-1} números em cada cartão. Habitualmente este truque usa seis cartões e os números variam entre 0 e 63.

Se o voluntário mentir em algum dos cartões, o truque não funciona. Será possível conceber truques deste tipo em que se dê a possibilidade ao voluntário de mentir? Sim! É esse o nosso objetivo com este artigo: divulgar os truques produzidos por Todd Mateer [6] a partir de uma ideia original de Richard Ehrenborg [1]. Faremos isso no resto desta secção e nas secções 4, 5 e 6, com material retirado desses artigos. Nas secções 2 e 3 explicaremos as ideias matemáticas da teoria algébrica de códigos que permitem que os truques funcionem.

Comecemos pelo truque seguinte, muito mais elaborado do que o anterior, retirado de [6] .

O mágico pede novamente a um voluntário entre a assistência que pense num número entre 0 e 15. O mágico exibe então sete cartões de cor (figura 2) e pede ao voluntário que pense numa dessas cores e responda sequencialmente se o número em que pensou aparece em cada cartão ('Sim' ou 'Não'; mas desta vez é-lhe permitido que no cartão da cor escolhida possa mentir).

Além destes sete cartões, o mágico tem ainda outro cartão, o *cartão-base* (figura 3).

Após cada resposta, o mágico vai empilhando os cartões sobre o cartão-base; em caso de resposta negativa, coloca o cartão virado ao contrário depois de rodado de acordo com a figura 4 (observe que os números do cartão-base que ficariam cobertos pelo cartão na sua orientação original aparecem à vista após a rotação, e vice-versa).

Por exemplo, a figura 5 mostra, à esquerda, a colocação dos cartões após uma resposta afirmativa no cartão vermelho e, à direita, o resultado após respostas sem mentira à escolha do número 14 nos primeiros quatro cartões (ou seja: sim, sim, sim, não).

No final das sete respostas, o mágico adivinha o número e se o espetador mentiu ou não; caso tenha mentido, adivinha ainda o cartão acerca do qual o espetador mentiu (ou seja, a cor escolhida). De facto, no final uma de duas situações pode ocorrer: ou exatamente um número no cartão-base está à vista ou todos os números estão cobertos. No primeiro caso, o espetador nunca mentiu e o número à vista é o número pensado. No outro caso, só um número do cartão-base está coberto por exatamente um cartão: esse é o número pensado e a cor desse cartão é a cor do cartão acerca do qual o voluntário mentiu.

Mais uma vez, não há magia nenhuma, só matemática! Neste caso, a matemática dos códigos corretores de erros, que explicaremos sucintamente de seguida.

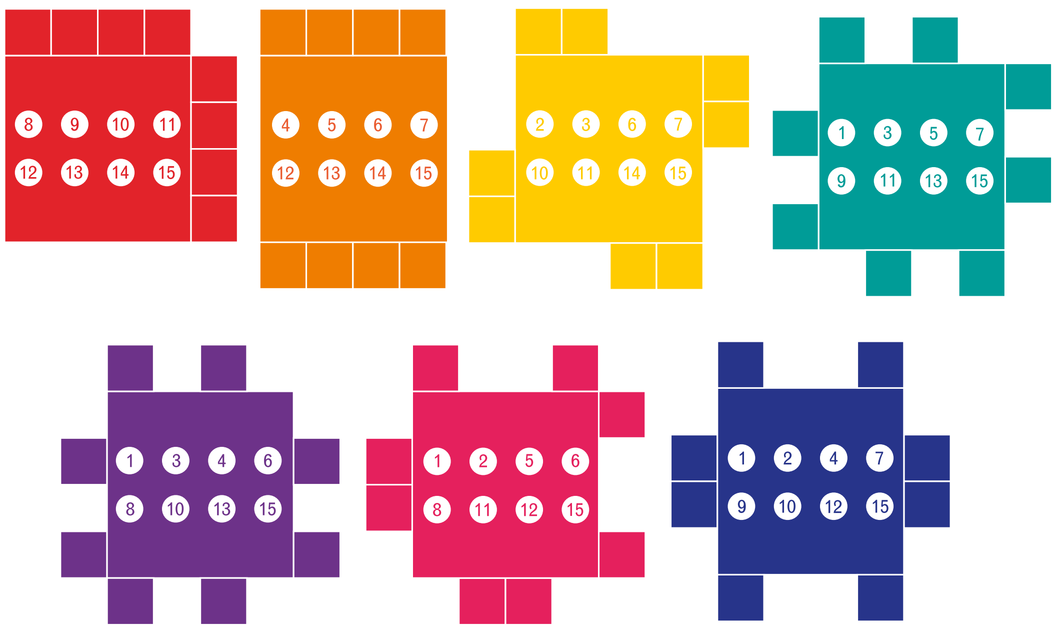


Figura 2: Cartões do segundo truque.

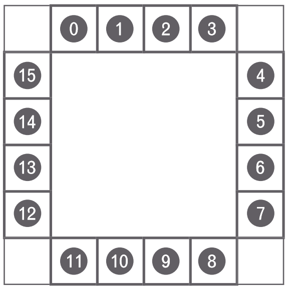


Figura 3: Cartão-base.

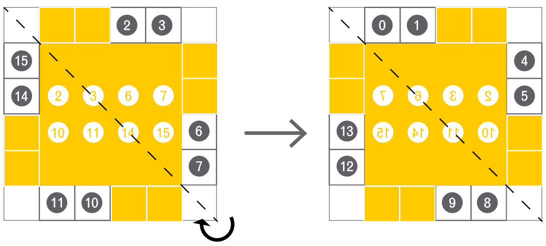


Figura 4: Empilhamento do cartão
no caso de resposta negativa.

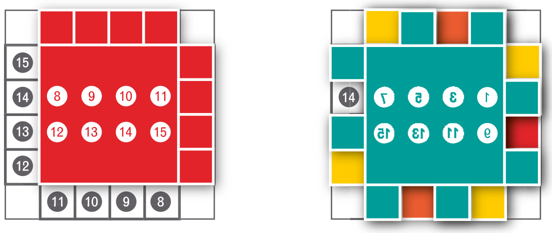


Figura 5: Exemplos de empilhamento de cartoes.

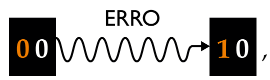
2. COMO DETETAR E CORRIGIR ERROS: MAGIA?!

A teoria dos códigos corretores de erros nasceu em 1945 nos Laboratórios Bell com o artigo [10] de C. Shannon sobre a teoria matemática da transmissão de informação. R. Hamming foi o outro pioneiro com o decisivo artigo [2]. Nos últimos 70 anos, os códigos algébricos revelaram-se uma das mais importantes aplicações da álgebra abstrata, base dos sistemas de comunicação modernos. São hoje usados em quase todos os sistemas de identificação, sistemas automáticos de telecomunicações, equipamentos de gravação e reprodução de informação, equipamentos óticos e *scanners*. É devido a eles que conseguimos comunicar com tanta eficácia a longa distância e ter larguras de banda tão grandes em redes de comunicações sem fios.

Qual é a ideia básica dos códigos algébricos? Por exemplo, consideremos o seguinte código binário, que designaremos por $\mathcal{C}_1$, que permite dar as instruções de comando a um leitor de DVD, através de um comando à distância:

Instruções	PLAY	REW	FORWARD	STOP
Código $\mathcal{C}_1$	00	01	10	11

Suponhamos que carregamos na tecla PLAY do comando, a que corresponde a palavra 00 do código; o comando transmite esta palavra ao leitor de DVD, mas se, porventura, nessa comunicação ocorrer o erro singular



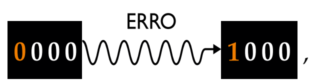
o leitor receberá a palavra 10, e como esta faz parte de $\mathcal{C}_1$ (corresponde à instrução FORWARD), aquele não terá nenhuma maneira de detetar o erro e executará a instrução FORWARD!

$\mathcal{C}_1$ é um exemplo de código definido sobre o alfabeto (corpo) $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, constituído por todas as palavras de comprimento 2 nesse alfabeto. Trata-se de um código muito pobre pois nem sequer detecta erros *singulares* como o exemplo acima ilustra.

Qual é o truque de Hamming para melhorar o código? Muito simples. O que é que fazemos habitualmente quando não entendemos bem o que outra pessoa nos está a dizer? Pedimos que repita. Façamos isso no código $\mathcal{C}_1$, duplicando a informação em cada palavra:

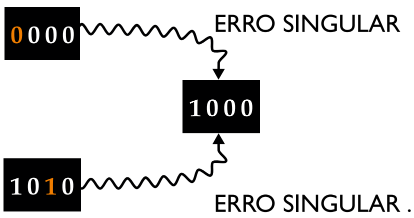
Instruções	PLAY	REW	FORWARD	STOP
Código $\mathcal{C}_2$	00 00	01 01	10 10	11 11

Agora, ao ser transmitida a instrução PLAY (ou seja, a palavra 0000), se ocorrer o mesmo erro singular de há pouco,



como a palavra recebida não faz parte de $\mathcal{C}_2$, o leitor de DVD pode concluir imediatamente que ocorreu algum erro na transmissão. Neste caso, o código $\mathcal{C}_2$ já deteta este erro singular (e é fácil de ver que deteta qualquer outro erro singular). Bastou acrescentar alguma redundância às palavras do código para resolver o problema.

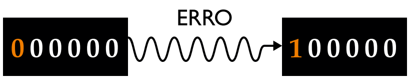
Será $\mathcal{C}_2$ capaz de corrigir esse erro, isto é, de identificar a palavra original (*assumindo que na transmissão só poderão ocorrer, quando muito, erros singulares*)? É claro que não, pois existem duas palavras em $\mathcal{C}_2$ que poderiam ser as originais:



Mas se triplicarmos a informação, com o código $\mathcal{C}_3$ definido pela tabela

Instruções	PLAY	REW	FORWARD	STOP
Código $\mathcal{C}_3$	00 00 00	01 01 01	10 10 10	11 11 11

além de qualquer erro singular ser detetável, também pode ser corrigido automaticamente (assumindo novamente que *na transmissão só poderão ocorrer, quando muito, erros singulares*). Por exemplo, o erro singular



é evidentemente detetado e corrigido; a única palavra de $\mathcal{C}_3$ que poderia ter dado origem à palavra 100000 é a palavra 000000:

Palavra de $\mathcal{C}_3$	000000	010101	101010	111111
Palavra recebida	100000	100000	100000	100000
N.º de erros	1	4	2	5

É claro que se puderem ocorrer erros duplos no canal de comunicação, $\mathcal{C}_3$ já não corrige o erro singular acima: a palavra original poderia muito bem ser a palavra 101010.

Assim, esta ideia de construir códigos corretores de erros só funciona se conhecermos *a priori* um limite para o número de erros que pode ocorrer no respetivo canal de comunicação. Ou, então, se adotarmos o seguinte princípio de bom senso, o chamado *princípio do vizinho mais próximo*:

> A palavra original correspondente a uma palavra recebida com erros deve ser a palavra do código "mais próxima" da palavra recebida.

(Ou seja, assumimos que é mais provável que o menor número de erros possível tenha ocorrido na transmissão.) Daqui em diante, assumimos sempre este princípio. (Na secção seguinte, tornaremos precisa a noção de distância implícita no termo "mais próxima".)

3. CÓDIGOS ALGÉBRICOS

Os códigos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ são exemplos de códigos binários. Um *código binário de comprimento n* é um subconjunto $\mathcal{C}$ de $(\mathbb{F}_2)^n$. Denotaremos as *palavras* de $\mathcal{C}$ (que têm todas comprimento n) por $a_1a_2\ldots a_n$. Mais geralmente, podemos considerar códigos definidos sobre um corpo finito arbitrário [3], mas todos os exemplos que consideraremos neste artigo são binários.

Precisemos agora a noção de distância entre duas palavras de $(\mathbb{F}_2)^n$:

> A *distância de Hamming* entre duas palavras $\boldsymbol{a} = a_1a_2\ldots a_n$ e $\boldsymbol{b} = b_1b_2\ldots b_n$, que denotamos por $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, é o número de índices $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ para os quais $a_i \neq b_i$.

Por exemplo, $d(1101, 0111) = 2$. Note que $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ indica o número de erros ocorridos quando $\boldsymbol{a}$ é a palavra transmitida e $\boldsymbol{b}$ é a palavra recebida.

> É muito fácil provar que a distância de Hamming satisfaz as propriedades usuais de distância (é uma *métrica* em $(\mathbb{F}_2)^n$): $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \geq 0$, $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ se e só se $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = d(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ e $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \leq d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + d(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$. Esta última propriedade é a chamada *desigualdade triangular.*

> A *distância mínima* de um código $\mathcal{C}$, que denotamos por $\delta(\mathcal{C})$, é o número
> $$\min\{d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathcal{C},\ \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}\}.$$
> Por exemplo, $\delta(\mathcal{C}_1) = 1$, $\delta(\mathcal{C}_2) = 2$ e $\delta(\mathcal{C}_3) = 3$.

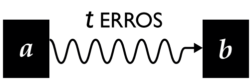
É claro que quanto maior for o valor de $\delta(\mathcal{C})$, mais eficiente será o código. Portanto, um dos objetivos na conceção de um código é que tenha as palavras o mais afastadas entre si. Por outro lado, isto limita o número de palavras do código, logo, limita a sua capacidade de armazenar e transmitir informação. Conciliar estes dois objetivos de sentido oposto, procurando o ponto de equilíbrio entre eles, é o desafio central da teoria dos códigos.

Seja t um número natural. Um código $\mathcal{C}$ *deteta até t erros* se deteta qualquer combinação de t erros em qualquer palavra. Diz-se que $\mathcal{C}$ *corrige até t erros* se corrige qualquer combinação de t erros em qualquer palavra.

A proposição seguinte é um resultado fundamental da teoria algébrica de códigos.

Proposição 3.1. Seja $\mathcal{C}$ um código com distância mínima $\delta(\mathcal{C})$. Então:
(a) $\mathcal{C}$ deteta até t erros se e só se $t \leq \delta(\mathcal{C}) - 1$.
(b) $\mathcal{C}$ corrige até t erros se e só se
$$t \leq \frac{\delta(\mathcal{C}) - 1}{2}.$$

Demonstração. (a) É evidente que existindo duas palavras $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ em $\mathcal{C}$ tais que $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \delta(\mathcal{C})$, se a palavra transmitida for $\boldsymbol{a}$ e acontecerem $\delta(\mathcal{C})$ erros que a transformem em $\boldsymbol{b}$, esses erros nunca serão detetados. Portanto, se $\mathcal{C}$ deteta até t erros então $t < \delta(\mathcal{C})$. Reciprocamente, suponhamos que na transmissão de uma palavra $\boldsymbol{a} \in \mathcal{C}$ ocorreram t erros, resultando na palavra $\boldsymbol{b}$:

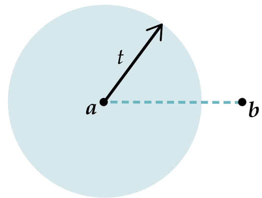


(portanto, $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = t$). Para provarmos que o código terá a capacidade de detetar o erro, teremos que garantir que $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}$, o que é fácil: como $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = t < \delta(\mathbb{C})$ e $\boldsymbol{a} \in \mathcal{C}$ então $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{C}$.

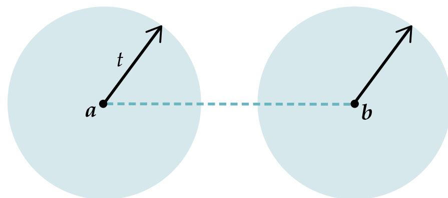
(b) Se $\mathcal{C}$ corrige até t erros, então $2t \leq \delta(\mathcal{C}) - 1$. De facto, $\delta(\mathcal{C}) = 2t$ implicaria a existência de duas palavras $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ diferindo exatamente em $2t$ posições; acontecendo t erros em metade dessas $2t$ posições na transmissão de $\boldsymbol{a}$, nunca seria possível corrigir esses erros, pois poderia ter sido a palavra $\boldsymbol{b}$ a palavra emitida (tendo os t erros ocorrido na outra metade dessas $2t$ posições).

Reciprocamente, suponhamos que na transmissão de uma palavra $\boldsymbol{a} \in \mathcal{C}$ ocorreram t erros, resultando na palavra recebida $\boldsymbol{b}$ (portanto, $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = t$). Agora, para provarmos que o código terá a capacidade de corrigir o erro, bastará garantir que mais nenhuma palavra em $\mathcal{C}$ além de $\boldsymbol{a}$ pode ter dado origem à palavra errada $\boldsymbol{b}$, ou seja, que qualquer outra palavra $\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$ está a uma distância de $\boldsymbol{b}$ maior do que t. Isto resulta da desigualdade triangular da distância:
$$d(\boldsymbol{b}, c) \geq d(\boldsymbol{a}, c) - d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geq \delta(\mathcal{C}) - t \geq 2t + 1 - t = t + 1.$$
□

Portanto, um código consegue detetar t erros se quaisquer duas palavras do código estiverem a uma distância de Hamming, de pelo menos, $t + 1$:



Por sua vez, um código consegue corrigir até t erros se quaisquer duas palavras do código estiverem a uma distância de Hamming de, pelo menos, $2t + 1$, ou seja, se quaisquer bolas de raio t centradas em palavras distintas forem disjuntas:



Nos exemplos da primeira secção temos:

Código	$\delta(\mathcal{C})$	Tipo de erros que deteta	Tipo de erros que corrige
$\mathcal{C}_1$	1	0	0
$\mathcal{C}_2$	2	singulares	0
$\mathcal{C}_3$	3	duplos	singulares

Suponhamos que, num determinado sistema de comunicação, necessitamos de um código com, no máximo, 2^k palavras. Poderemos então usar todas as palavras binárias $a_1 a_2 \cdots a_k$ de comprimento k. Este código será muito pouco eficiente, uma vez que a distância mínima entre palavras é igual a 1. A proposição 3.1 diz-nos que se quisermos aumentar a eficiência deste código teremos de aumentar a distância mínima entre as suas palavras. Como é que poderemos fazer isso? Muito simplesmente, acrescentando a cada palavra $\boldsymbol{a} = a_1 a_2 \cdots a_k$ um bloco
$$\boldsymbol{c_a} = c_{k+1} \cdots c_n \in (\mathbb{F}_2)^{n-k}$$
tal que $d(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c_a}, \boldsymbol{b}\boldsymbol{c_b}) > d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ para qualquer par de palavras distintas $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

Os primeiros k símbolos de cada nova palavra

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = a_1 a_2 \cdots a_k c_{k+1} \cdots c_n$$

são a *mensagem original* e os $n-k$ símbolos adicionais são os chamados *símbolos de controle*.

Um dos métodos mais utilizados para gerar os símbolos de controle e, por conseguinte, as palavras do código, usa uma matriz binária, i.e., com entradas em $\mathbb{F}_2$,chamada *matriz de controle*,

$$C = (A \mid I_{n-k})$$

onde A é uma matriz $(n-k) \times k$ e I_{n-k} é a matriz identidade de ordem $n-k$. O conjunto $\mathcal{C}$ das palavras é dado pelas soluções do sistema de equações $C\mathbf{a}^T = \mathbf{0}$, sendo $\mathbf{0}$ o vetor nulo de $(\mathbb{F}_2)^{n-k}$. Estes códigos, criados por Hamming nos anos 40 do século passado, chamam-se *códigos (n,k)-lineares* e podem ser estudados usando álgebra linear uma vez que $\mathcal{C}$ é um subespaço vetorial de $(\mathbb{F}_2)^n$ (isto é, qualquer múltiplo de uma palavra é uma palavra do código, a soma de quaisquer duas palavras do código é ainda uma palavra do código). Por exemplo, é fácil ver que, em qualquer código linear $\mathcal{C}$,

$\delta(\mathcal{C}) = \min \{d(\boldsymbol{a}, \mathbf{0}) \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}\}$ *(ou seja, $\delta(\mathcal{C})$ é igual ao menor número de dígitos não nulos nas palavras diferentes da palavra nula).* (3.2)

Para mais informação sobre estes códigos, consulte, por exemplo, o clássico [5] (ainda muito atual) ou os mais recentes[3, 4]. A referência [9] contém muitos dos códigos mais utilizados hoje em dia.

Os códigos $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ da secção anterior são códigos lineares binários: $\mathcal{C}_2$ é um código (4,2)-linear, com matriz de controle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

enquanto $\mathcal{C}_3$ é um código $(6,2)$-linear, com matriz de controle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O código $(7,4)$-linear $\mathcal{C}_4$ definido pela matriz de controle

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1\quad 1\quad 0\quad 1}}^{A}\hphantom{\quad 1\quad 0\quad 0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

é constituído pelas palavras $\mathbf{a} = a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, c_5\, c_6\, c_7$ $(a_i, c_j \in \mathbb{F}_2)$, em que os símbolos de controle c_5, c_6, c_7 podem ser calculados resolvendo o sistema $C\mathbf{a}^T = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_4 + c_5 = 0 \\ a_1 + a_3 + a_4 + c_6 = 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 + c_7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_5 = a_1 + a_2 + a_4 \\ c_6 = a_1 + a_3 + a_4 \\ c_7 = a_2 + a_3 + a_4 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{C}_4$ é formado pelas 16 palavras

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_1 + a_2 + a_4, a_1 + a_3 + a_4, a_2 + a_3 + a_4).$$

Trata-se de todos os múltiplos e somas (chamadas combinações lineares) das linhas da *matriz geradora*

$$G = (I_k \mid A^T) = \begin{array}{c} \hphantom{1\quad 0\quad 0\quad 0\quad}\overbrace{\hphantom{1\quad 1\quad 0}}^{A^T} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Da fórmula (3.2) decorre imediatamente que $\delta(\mathcal{C}_4) = 3$, pelo que $\mathcal{C}_4$ corrige erros singulares.

À laia de curiosidade, refira-se que $\mathcal{C}_4$ é precisamente o código que Hamming criou em 1950, nos Laboratórios Bell, para lidar com os erros frequentes cometidos pelo computador Bell Model V, uma das primeiras máquinas da história da computação, na leitura dos cartões perfurados contendo os dados de entrada dos programas. Foi a frustração de Hamming, por ter muitas vezes de reiniciar os seus cálculos no computador, que o levou a dedicar-se à investigação de códigos corretores de erros.

4. EXPLICAÇÃO DO TRUQUE

Estamos agora em condições de perceber o funcionamento do truque com os sete cartões coloridos. Tal como no primeiro truque, cada número de 0 a 15 é representado por uma palavra binária de comprimento 4. Mas agora, como queremos detetar uma possível mentira (corresponde a corrigir um possível erro), precisamos de acrescentar três algarismos de controle de modo a que a distância mínima entre palavras seja 3. O código (7,4)-linear da secção anterior é um exemplo possível e é nele que este truque se baseia. É por isso que o truque usa sete cartões. A disposição dos números nos sete cartões é feita de modo a que cada sequência de sins e nãos corresponda precisamente a uma das 16 palavras do código, que representam os primeiros 16 naturais (a seguir a cada palavra, entre parêntesis, indica-se a distância da palavra à palavra nula, o que confirma que o código tem, de facto, distância mínima 3).

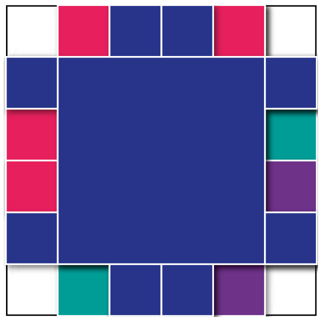
N N N N N N N	= 0 0 0 0 0 0 0 (0)
N N N S S S S	= 0 0 0 1 1 1 1 (4)
N N S N N S S	= 0 0 1 0 0 1 1 (3)
N N S S S N N	= 0 0 1 1 1 0 0 (3)
N S N N S N S	= 0 1 0 0 1 0 1 (3)
N S N S N S N	= 0 1 0 1 0 1 0 (3)
N S S N S S N	= 0 1 1 0 1 1 0 (4)
N S S S N N S	= 0 1 1 1 0 0 1 (4)
S N N N S S N	= 1 0 0 0 1 1 0 (3)
S N N S N N S	= 1 0 0 1 0 0 1 (3)
S N S N S N S	= 1 0 1 0 1 0 1 (4)
S N S S N S N	= 1 0 1 1 0 1 0 (4)
S S N N N S S	= 1 1 0 0 0 1 1 (4)
S S N S S N N	= 1 1 0 1 1 0 0 (4)
S S S N N N N	= 1 1 1 0 0 0 0 (3)
S S S S S S S	= 1 1 1 1 1 1 1 (7)

Observe que as palavras correspondentes aos números 1, 2, 4 e 8 são precisamente as linhas da matriz geradora do código e, portanto, o facto enunciado na secção anterior de que as linhas da matriz geradora geram, por combinação linear, todas as outras palavras, corresponde ao facto observado na primeira secção de que os primeiros 16 naturais são múltiplos e somas dos números 1, 2, 4, 8.

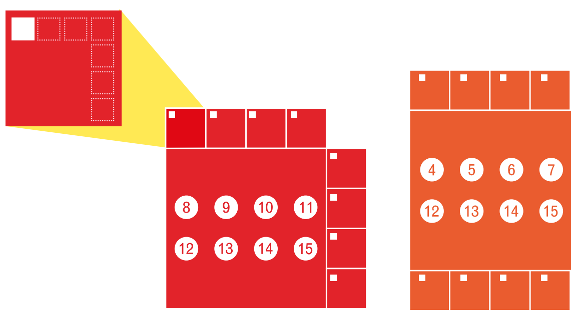
Quanto à explicação para a forma dos cartões de cor, é aquela que, após sobreposição do cartão no cartão-base, permite que fiquem à vista precisamente os números inscritos no cartão de cor (confirme isso, caro leitor, nos cartões da esquerda nas figuras 4 e 5).

5. FACILITANDO A APRESENTAÇÃO DO TRUQUE

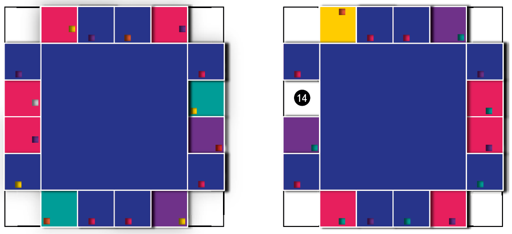
Como vimos, se o voluntário não mentir, no final do truque o número a adivinhar fica à vista no cartão-base. Mas no caso de uma mentira, os números ficam todos cobertos e o número a adivinhar será o que corresponde à palavra que está mais perto de uma das 16 palavras do código, ou seja, aquele que só está coberto por um dos cartões (precisamente o cartão onde o voluntário mentiu). Os restantes 15 números ficam cobertos por, pelo menos, dois cartões. Um mágico muito experiente, conhecendo bem os cartões, conseguirá identificar que número e cartão serão esses (jogando com a espessura dos cartões). No entanto, uma pessoa menos experiente terá dificuldade em apresentar o truque. Por exemplo, se o voluntário escolher o número 14 e o cartão cor-de-rosa e mentir neste, o resultado final será:



Este problema pode ser ultrapassado fazendo uns buraquinhos nos pequenos quadrados de cada cartão. A posição destes buracos terá de variar de cartão para cartão, pelo que precisamos de sete posições distintas: quando colocados um sobre o outro, nenhum par de cartões pode partilhar uma posição comum. Na seguinte figura, mais à esquerda, podemos ver um esquema possível para a colocação dos buracos nos quadrados. Nas duas figuras da direita, podemos ver como posicionar os buracos nos dois primeiros cartões (vermelho e laranja).



Agora, no caso de há pouco (quando o voluntário escolhe o número 14, o cartão cor-de-rosa e mente neste), no final o mágico observa o seguinte (figura da esquerda):



A figura da direita mostra o resultado final na situação análoga em que o voluntário não mente. No primeiro caso, o mágico vê um buraco branco na posição 14 e a cor rosa à volta do buraco, o que significa que é o cartão cor-de-rosa que está imediatamente sobre o cartão-base. No segundo caso, o 14 fica à vista.

Uma simulação computacional deste truque bem como modelos para construir os cartões encontram-se no material suplementar indicado em [6].

6. MAIS UM TRUQUE

A ideia do truque anterior pode estender-se facilmente a um truque que corrija duas mentiras, ou seja, erros duplos [8]. Neste caso, em vez de um só buraco em cada quadrado dos cartões, serão precisos dois buracos ou, equivalentemente, duas ranhuras transversais (ver cartões na figura 6) que permitam que uma segunda cor fique visível quando os cartões são empilhados sobre o cartão-base. No final, duas ranhuras brancas aparecerão na posição do número a adivinhar.

Neste truque, são mostrados à assistência 10 cartões (figura 6) e o mágico tem ainda consigo o cartão-base branco. Um voluntário deverá escolher um número entre 0 e 7 bem como duas das cores dos cartões.

Tal como anteriormente, a pessoa terá de dizer se o número em que pensou está em cada cartão, podendo desta vez mentir em dois dos 10 cartões. O mágico adivinhará o número e os dois cartões.

Caberá agora ao leitor descobrir qual o código corretor de erros que faz funcionar o truque (o código terá oito palavras correspondentes aos oito números, a sua matriz geradora terá de ser uma matriz 3×8 e a sua

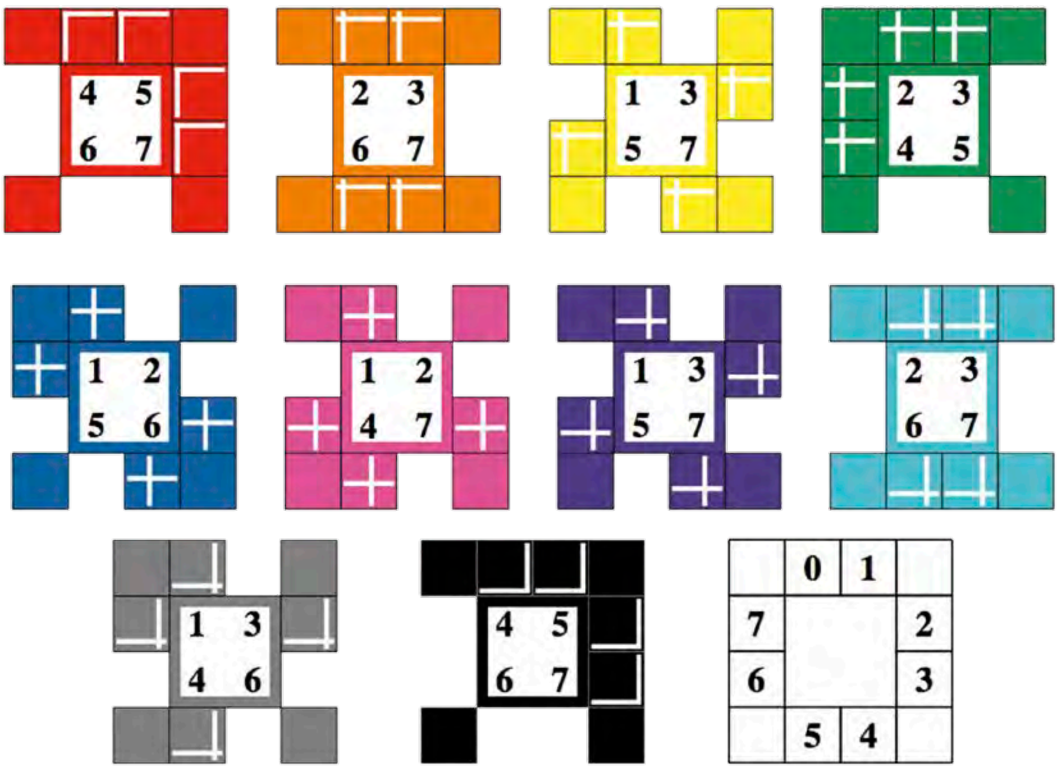


Figura 6: Cartões do terceiro truque.

distância mínima terá de ser 5 para que detete de facto erros duplos).

Para mais truques baseados noutros códigos corretores de erros (sobre outros corpos finitos) consultar [7] e *mthsc.clemson.edu/misc/MAM_2014/MagicErrorCorrectingCodes.html*.

7. REFERÊNCIAS

[1] R. Ehrenborg, "Decoding the Hamming code", *Math Horizons* 13 (Abril, 2006), 16-17.

[2] R. W. Hamming, "Error detecting and error correcting codes", *Bell System Tech. J.* 29 (1950), 147-160.

[3] R. Lidl e H. Niederreiter, *Introduction to Finite Fields and their Applications*, Cambridge University Press, 2000.

[4] S. Ling e C. Xing, *Coding Theory: A First Course*, Cambridge University Press, 2004.

[5] F. J. MacWilliams e N. J. A. Sloane, *The Theory of Error--Correcting Codes*, New York: Elsevier, 1978.

[6] T. Mateer, "A magic trick based on the Hamming Code", *Math Horizons* 21 (Novembro, 2013), 9-11. Material suplementar em: *www.maa.org/publications/periodicals/math-horizons/math-horizons-supplements/supplements-to-a--magic-trick-based-on-the-hamming-code.*

[7] T. Mateer, "A Reed-Solomon code magig trick", *Math. Magazine* 87 (2014) 125-131.

[8] T. Mateer, "A magic trick based on a double error-correcting code", *mthsc.clemson.edu/misc/MAM_2014/ double-magic.pdf.* Consultado em Agosto de 2014.

[9] J. Picado e H. Pinto, "Sistemas de identificação com algarismos de controlo", em: *Atractor - Matemática Interactiva, www.atractor.pt/mat/alg_controlo*, 2006.

[10] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication I, II", *Bell System Tech. J.}* 27 (1948), 379-423, 623-656.

SOBRE OS AUTORES

Estefani Moraes Moreira é estudante do último ano da Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Brasil. Estudou na Universidade de Coimbra, em dois anos letivos (2012/2013 e 2013/2014), por meio do Programa de Licenciaturas Internacionais (PLI). Interessa-se por jogos matemáticos e também por história da matemática.

Jorge Picado é professor associado do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (UC). É doutorado e agregado em Matemática Pura pela UC. É membro do Centro de Matemática da UC, onde investiga no grupo de Álgebra, Lógica e Topologia. A sua área de especialização é a topologia "sem pontos". É co-autor do livro *Frames and Locales: topology without points* (Springer, 2012), onde se tenta explicar as ideias fundamentais desta abordagem *locálica* à topologia.

GAUSS E A MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

Terá Gauss concebido e mandado levar a cabo uma experiência destinada a testar se o universo é ou não euclidiano?

José Carlos Santos
Universidade do Porto
jcsantos@fc.up.pt

Figura 1. Carl Friedrich Gauss.

Carl Friedrich Gauss (figura 1) é um colosso na História da Matemática, que também fez notáveis contribuições para a astronomia, a geodesia e outras áreas de ciência. Como pessoa, geralmente é visto como uma figura distante e pouco abordável, que preferia concentrar-se mais nos seus estudos científicos do que em divulgar ou aplicar os seus resultados a problemas concretos[1]. Em contraste com esta imagem, há uma história famosa que circula a respeito de Gauss[2], segundo a qual ele teria medido a soma dos ângulos internos de um triângulo enorme (os seus vértices eram os picos de três montanhas) a fim de testar experimentalmente se o valor obtido era, de facto, igual a π. Já agora, a resposta foi afirmativa (dentro da margem de erro da medição efetuada).

Vejamos em que contexto é que isto teria sido feito. Quando Gauss chegou à idade adulta, no fim do século XVIII, só havia uma geometria: a de Euclides. E nessa geometria a soma dos ângulos internos de um triângulo, medidos em radianos, é igual a π (proposição 32 do livro I dos *Elementos*). Quando Gauss faleceu, em 1855, já o matemático russo Nikolai Lobachevsky publicara os seus trabalhos sobre geometria não-euclidiana, os quais foram lidos e elogiados por Gauss (que aprendeu russo aos 62 anos de idade). Pela mesma altura que Lobachevsky, o matemático húngaro János Bolyai formulou o mesmo tipo de ideias. De facto, como veio a saber-se mais tarde pelos seus diários e pela sua correspondência, já Gauss pensara bastante em geometria não-euclidiana, embora tenha optado por nada publicar sobre o assunto.

Repare-se que a proposição que afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π, embora válida no plano, não é válida noutros contextos. Por exemplo, se, na superfície da Terra, considerarmos, como na figura 2, um triângulo formado por três arcos de círculo máximo, com um vértice num polo e os outros dois vértices no equador, então os ângulos situados no equador são retos, pelo que a soma dos ângulos internos do triângulo é superior a π. No caso particular em que um dos vértices situados no equador está a meio caminho entre o outro vértice e o seu antípoda, então o triângulo tem três ângulos retos, pelo que a soma dos seus ângulos internos é igual a $\frac{3}{2}\pi$. A regra geral é a seguinte: a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é igual a $\pi \times (1 + 4p)$, onde p é a razão entre a área do triângulo e a da esfera.

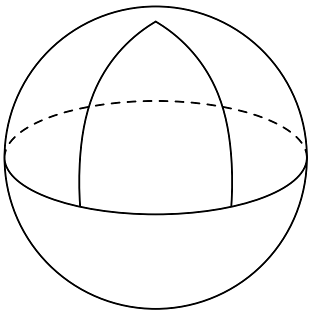


Figura 2. Triângulo esférico.

Gauss interessou-se pela geodesia, ou seja, pelo estudo de como medir e representar a Terra. Inclusivamente, inventou em 1821 um instrumento, o heliotropo (veja-se a figura 3), destinado a levantamentos geodésicos, o qual foi usado para esse fim durante um século e meio. E é verdade que, num levantamento geodésico feito sob a sua supervisão, foram medidos os ângulos internos de um triângulo cujos vértices eram os picos de três montanhas.

A partir daqui, é fácil pensar que Gauss quis que fossem medidos os ângulos atrás mencionados para testar se os enunciados da geometria euclidiana são ou não válidos no universo físico. Foi precisamente isso o que pensou Sartorius von Walterschausen, um geólogo que foi colega de Gauss na Universidade de Göttingen, no que viria a ser apoiado décadas mais tarde por outro matemático de Göttingen, Felix Klein. A ser assim, Gauss teria concebido uma experiência que permitiria, em princípio, decidir se o Universo é ou não euclidiano.

Só que não foi isto o que se passou.

Gauss, de facto, recorreu às medições dos ângulos internos de um grande triângulo para fazer uma experiência, mas que tinha um objetivo bastante menos mediático do que aquele que foi conjeturado depois. Ao projetar-se sobre um plano uma porção da superfície terrestre, as amplitudes dos ângulos sofrem alterações e há uma fórmula, da autoria de Lagrange, que permite calcular a amplitude dos ângulos projetados em função dos ângulos originais, cuja dedução parte do princípio de que a Terra é uma esfera. Mas acontece que não é, pois é ligeiramente achatada nos polos. As medições das amplitudes dos ângulos serviram para determinar se a fórmula de Lagrange podia ainda ser aplicada, sem que o erro fosse significativo. E, de facto, assim é[3].

Se o leitor, ao chegar a este ponto, ficou com a impressão de que afinal Gauss só estava interessado em ciência teórica, deve lembrar-se de uma coisa: ele inventou o heliotropo!

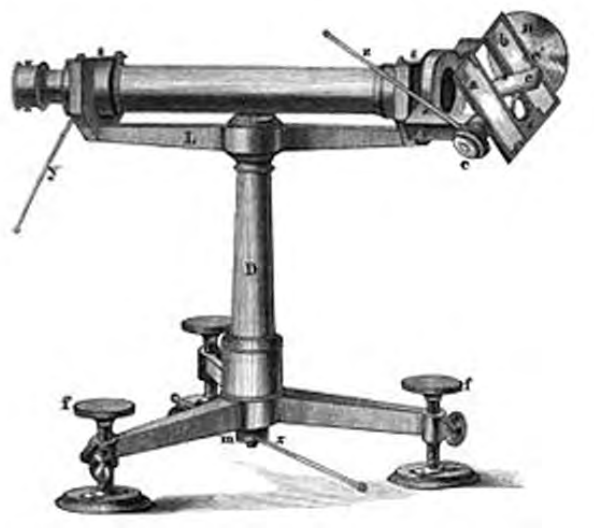


Figura 3. Heliotropo.

[1] Uma exceção a isto consiste no desenvolvimento do método dos mínimos quadrados, que foi criado para ser empregue (e foi efetivamente empregue) na deteção de objetos celeste após um reduzido número de observações.

[2] Veja-se *http://www.mathaware.org/mam/05/shape.of.universe.html* ou *http://thatsmaths.com/2014/07/10/gausss-great-triangle-and-the-shape-of--space/*.

[3] Para mais detalhes, veja-se *The Myth of Gauss' Experiment on the Euclidean Nature of Physical Space*, de Arthur I. Miller (Isis, Vol.63, No.3, (1972), pp. 345-348).

PAULUS GERDES — AS CULTURAS AFRICANAS NA CARTOGRAFIA ETNOMATEMÁTICA

José Vitória
Universidade de Coimbra
jvitoria@mat.uc.pt

Fala-se na chegada de Paulus Gerdes à Universidade Eduardo Mondlane. Destaca-se o empenho cívico e político de Paulus Gerdes na fase da Utopia Frelimista e a grande produtividade como historiador e etnomatemático, mesmo em condições difíceis de sobrevivência e de segurança. Insiste-se na qualidade do grande etnomatemático que foi Paulus Gerdes. Menciona-se a lenta, mas segura, aquisição de uma consciência nacional por parte de moçambicanos comuns.

Paulus Gerdes faleceu prematuramente, no dia 10 de novembro de 2014, antes de fazer 62 anos.

Ubiratan D'Ambrosio escreve, em 2 de dezembro de 2014, uma nota na *HPM Newsletter, History and Pedagogy of Mathematics*, na qual traça as linhas fundamentais biográficas e científicas de Paulus Gerdes.

Neste texto, apresentarei alguns factos e opiniões relacionados com a chegada de Paulus Gerdes à Universidade Eduardo Mondlane, talvez no ano letivo de 1976/1977.

Aquilo que direi — factos, opiniões, críticas, comentários — em nada beliscará o extraordinário trabalho na área da etnomatemática que Paulus Gerdes veio a desenvolver em Moçambique: indício da assumida, empenhada e profunda integração cultural e política na sociedade moçambicana.

Paulus Gerdes apresentou-se, no Departamento de Matemática da Universidade Eduardo Mondlane, de sandálias, calções rotos, longo cabelo loiro e fita no cabelo.

Primeiro choque: Paulus, quem queres impressionar? A burguesia obesa da Holanda ou o povo moçambicano? Que diz o Presidente Samora Machel? Vestir e alimentar o nosso Povo... E tu apresentas-te aqui roto, quase descalço? E essa fita?

Devido à saída em massa dos professores portugueses, foi decidido acabar com os dois últimos anos do ensino secundário.

A Universidade Eduardo Mondlane foi encarregue de ministrar um "Curso Propedêutico", de cerca de um ano letivo, que permitisse uma entrada acelerada de estudantes nos vários cursos da Universidade e nos vários níveis de formação de professores e de outras profissões.

O Departamento de Matemática empenhou-se a sério na preparação desses estudantes, que vinham de todas as partes de Moçambique. Três colegas — António César de Freitas, Elvira Coimbra e João Vieira — escreveram uma pequena brochura sobre Lógica, para apoio desses estudantes.

Segundo choque: Paulus Gerdes distribui largamente um panfleto, em que ataca o conteúdo da mencionada brochura — há outras lógicas, (...) andam a enganar os estudantes.

Estupefação no Departamento de Matemática: reunião do Conselho do Departamento — onde já tinham assento estudantes (moçambicanos brancos e indianos) e funcionários (contínuos pretos).

Paulus escolhera bem o alvo: o poder dentro do departamento (o diretor, António César de Freitas, e o prestigiado João Vieira).

Reunião tensa: os autores da brochura diziam, e bem, que se tratava de um texto de Lógica Elementar, semelhante ao que se fazia em todo o mundo — isto "irritava" Paulus Gerdes, que "não estava contente", por ter vindo encontrar na Universidade Eduardo Mondlane disciplinas com conteúdos e abordagens didáticas homólogos às de um país capitalista avançado como era o seu, a Holanda: nós — os oito docentes portugueses que ficaram de entre os cerca de 20, na altura do 25 de abril de 1974 — ficámos satisfeitos por ter sido reconhecido que tínhamos algumas qualidades.

Sabíamos que havia outras lógicas: tínhamos acesso ao texto de Leo Apostel, no livro editado por Piaget *Logique et Connaissance Scientifique* e lêramos o livro *Logique Formelle et Logique Dialectique,* de Henri Lefebvre.

Claro, aqui entrou a batalha das citações — apesar de sabermos, como intelectuais, que se afirmava, com desdém, que o "conhecimento é o caminho mais curto entre duas citações".

As citações eram de cor: os meus livros já estavam encaixotados num contentor, no cais do porto de Maputo; os livros de Paulus Gerdes ainda vinham no mar, provenientes da Holanda!

Quem nos corrigia a trajetória citacional? O nosso colega Samuel Moral — responsável da Causa Monárquica em Moçambique, ainda em 24 de abril de 1974 — que tinha lido Lefebvre e outros autores marxistas e tinha muito boa memória.

Quem resolveu o diferendo? Um representante dos funcionários, António Gerente Cossa (contínuo, 5.º ano liceal): esta discussão anda à volta de um tema que, necessariamente, ultrapassa os meus conhecimentos; porém, tendo em conta o passado dos docentes que aqui ficaram e achando pouco ortodoxa a maneira como a brochura de Lógica foi atacada, sou levado a considerar que o camarada Paulus Gerdes foi um pouco oportunista.

E a fita no longo cabelo loiro? Como disse acima, foram extintos os últimos dois anos do ensino secundário. Generalizada reação de desagrado.

O Presidente Samora Machel convoca uma reunião a ter lugar no Pavilhão Coberto do Sporting.

Comício com Samora? Fila e saco com farnel! Duas possantes guerrilheiras armadas à entrada. Paulus Gerdes ia à minha frente: «Tira a fita» — imperativa a guerrilheira, «Gerdes: camarada....», «Tira a fita»... e Paulus Gerdes tirou a fita... para sempre. Vês, Paulus, o diálogo da Kalashnikov impôs-se à minha capacidade dialética!

É claro: durante várias horas, Samora Machel, de improviso, fez uma vívida intervenção de grande rigor teórico e de elevada qualidade formal.

Paulus Gerdes entrou em confronto com a atitude profissional — conceções organizacionais, científicas, didáticas e metodológicas — dos poucos docentes de matemática que ficaram, depois da Independência de Moçambique, em 25 de junho de 1975.

Paulus Gerdes vinha, de facto, colaborar na Revolução Moçambicana, na materialização da Utopia Frelimista.

Paulus Gerdes integrou-se profundamente nas atividades da população moçambicana, participando nas tarefas de produção e no convívio do dia a dia — o que, diga-se a verdade, nenhum dos docentes portugueses havia feito.

Paulus Gerdes aprendeu a falar e a escrever corretamente a língua portuguesa: não falava com aquele sotaque que alguns dos meus amigos moçambicanos brancos e indianos — de bom "ouvido político-ideológico", mas, que fique claro, convicta e seriamente adeptos da Frelimo — começaram a usar, após dois meses de contacto com quadros e guerrilheiros da Frelimo que chegaram a Moçambique, em setembro de 1974, no âmbito dos Acordos de Lusaka e da implantação do Governo de Transição.

Paulus Gerdes — moçambicano da Holanda — moderou-se: passou a andar de fato e gravata; ensinou e desempenhou cargos de responsabilidade — diretor do Departamento de Matemática e da Faculdade de Educação — na Universidade Eduardo Mondlane, até 1989; depois transferiu-se para a Universidade Pedagógica, de que foi reitor, de 1989 a 1996; foi Presidente da Comissão Instaladora, em 2006, da Universidade do Lúrio, Nampula, a terceira universidade pública de Moçambique; e ultimamente exercia funções numa universidade privada de Maputo — ISTEG.

Paulus Gerdes foi historiador da matemática e etnomatemático muito produtivo, reconhecido e respeitado internacionalmente. Nos quase 40 anos que viveu em Moçambique — às vezes, em terríveis condições de sobrevivência e de segurança — escreveu dezenas de textos: na *Amazon.co.uk*, estão listados cerca de 100 livros, em várias línguas; na ZentralblattMATH são indicadas 48 publicações, incluindo 23 livros; na MatScinet/Mathematical Reviews constam 38 entradas, das quais 14 livros.

Escreveu um livro que, por afinidades de especialidade, me agradou muito: *Adventures in the World of Matrices* (2007), Nova Science Publishers, no qual (com base nos seus estudos etnográficos) apresenta várias classes de matrizes e, em particular — partindo do exame do entrançado de esteiras do norte de Moçambique — introduziu uma generalização de matriz circulante, a matriz "cíclica" que possui [conjeturo] a propriedade de os seus valores singulares — [que são, também conjeturo, número de ouro ou inverso do número de ouro ou simétrico do número de ouro] — serem independentes das entradas da matriz.

Um exemplo de tais matrizes encontra-se nas figuras seguintes retiradas do artigo de Paulus Gerdes “Mwani colour inversion, symmetry and cycle matrices”, *Visual Mathematics*, volume 9, n.º 3 (2007) acessível em *http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/gerdesmwani/mwani.htm*

p	r	s	q
s	p	q	r
r	q	p	s
q	s	r	p

a	b	c	d
b	d	a	c
c	a	d	b
d	c	b	a

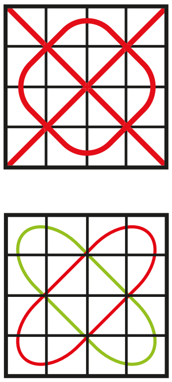


Figura 1: Matriz cíclica positiva e negativa.

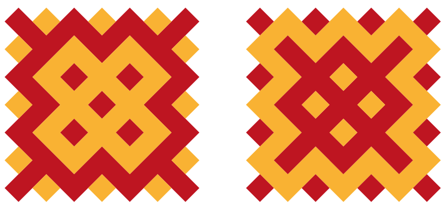


Figura 2: Como as matrizes cíclicas surgem nas tiras das esteiras Mwani.

África e Moçambique muito devem a Paulus Gerdes — as culturas africanas, libertadas da abordagem eurocêntrica, são integradas na etnomatemática, com a dignidade que só lhes pode conferir quem tenha uma sólida formação matemática de base.

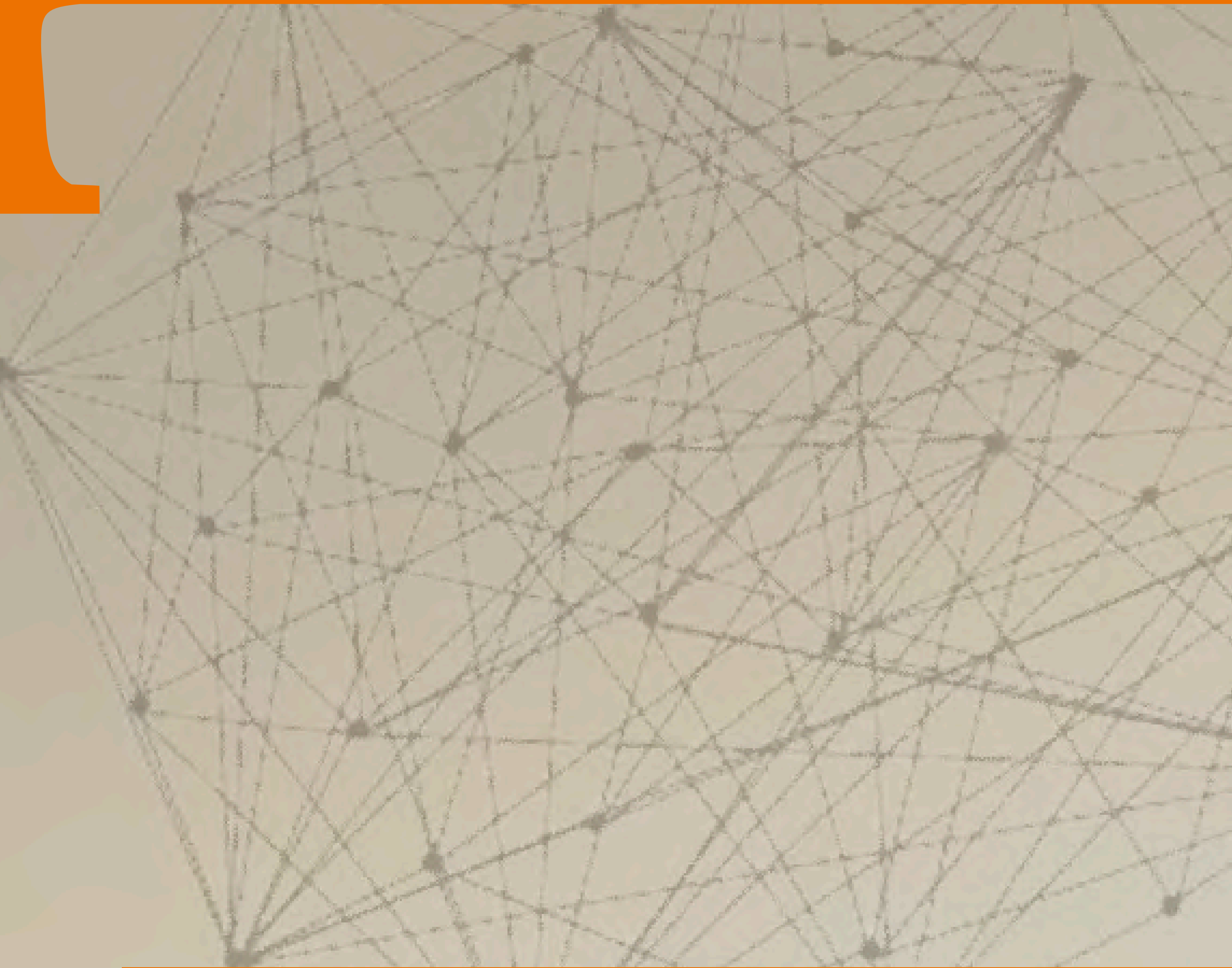
Paulus Gerdes, mais tarde, fez várias visitas a Portugal, cooperou com educadores matemáticos portugueses e fez um seminário sobre as “suas” matrizes no meu Departamento de Matemática. Levei-o a jantar a minha casa — falámos da vida, da família, dissimulámos as nossas desilusões.

Neste pequeno texto, dedicado à memória de Paulus Gerdes, desaparecido cedo de mais, não posso deixar de realçar o quanto me enriqueceu a participação, durante mais de três anos, na formação de um país novo, no esforço colossal de construir uma nação a partir do Estado e, *last but not the least*, de testemunhar a lenta, mas segura, aquisição, por parte de moçambicanos comuns, da consciência de fazer parte de uma nação, de se ter uma pátria: ver alargar o seu peito e levantar a sua cabeça. Isto sim, eu verifiquei em muitos moçambicanos — nos meus companheiros de autocarro, às seis da manhã e às seis da tarde; nas *mamanas* falando só português ou só ronga com as suas crianças; nos transeuntes e nos engraxadores da Baixa; e, mesmo, nos “pedintes com quem tinha avença” — mas sobretudo em dois contínuos do Departamento de Matemática: António Gerente Cossa e Augusto Jaime Muhau.

SOBRE O AUTOR

José Vitória é professor catedrático, aposentado, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. De março de 1966 até julho de 1977, exerceu a sua atividade de docente e de investigador ligado à Universidade de Lourenço Marques/Universidade Eduardo Mondlane. A partir de 1 de novembro de 1977, exerceu funções na Universidade de Coimbra.

[CIDMA/FCT/UID/MAT/04106/2013 Scopus Author ID: 55899791800; ORCID iD *http://orcid.org/0000-0003-3964-2425*]



O QUE É UM MATROIDE?

Rosário Fernandes
Universidade Nova de Lisboa
mrff@fct.unl.pt

1. ORIGEM DO TERMO MATROIDE

Tal como o nome sugere, matroide vem da palavra matriz. O conceito de matroide surgiu em 1935 [8] quando Whitney tentou generalizar a noção de dependência linear de um conjunto de vetores, pertencentes a um dado espaço vetorial. Noção esta conhecida por todos os que frequentaram uma disciplina elementar de álgebra linear. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.1 *Seja A a seguinte matriz, com três linhas, seis colunas e preenchida por números reais:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Numerando as colunas da matriz A da seguinte forma,

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

e simplificando a notação, podemos designar por $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o conjunto das colunas da matriz A. Reparando nas colunas 1, 4, 5, se tentarmos encontrar números reais a_1, a_2, a_3 tais que

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

teremos de encontrar números reais a_1, a_2, a_3 tais que

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é equivalente a encontrar números reais a_1, a_2, a_3 tais que

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ a_2 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, resolver o sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}.$$

A única solução deste sistema é $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Isto significa que o subconjunto de E formado pelas colunas 1, 4, 5 de A é linearmente independente. Este subconjunto não era linearmente independente se o sistema anterior tivesse mais do que uma solução.

Sendo $\mathcal{I}_1$ a coleção de subconjuntos de E, formados por colunas da matriz A, linearmente independentes, então, podemos afirmar que $\mathcal{I}_1$ tem todos os conjuntos com, no máximo, três elementos de $E - \{6\}$, exceto os conjuntos $\{1, 2, 5\}$ e $\{3, 4, 5\}$.

□

Outra noção, menos conhecida, mas que nos últimos anos tem sido muito divulgada, é a de grafo. Este pode ser definido como um conjunto de pontos (chamados vértices do grafo) e uma coleção de linhas a unir determinados pontos (chamadas arestas do grafo).

São passados quase 80 anos desde que pela primeira vez surgiu o termo matroide e este continua desconhecido da maioria dos amantes da matemática. Apesar disto, os matroides têm um papel muito importante em diversas áreas científicas. Álgebra, geometria, teoria da computação, investigação operacional são algumas das que os utilizam, muitas vezes sem o saberem. O pai da teoria dos matroides foi Whitney, mas para o seu desenvolvimento contribuiram grandes investigadores a nível mundial, destacando-se entre os portugueses o nome de Raúl Cordovil. Neste artigo é apresentada, de uma maneira muito leve, a noção de matroide.

Exemplo 1.2 *Na figura 1 pode ver-se o grafo G com o conjunto de vértices, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e a coleção das arestas, $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$.*

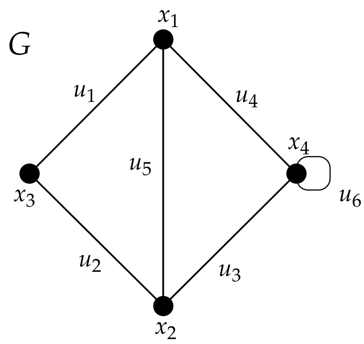


Figura 1.

□

Para falarmos da noção de dependência em grafos, necessitamos de um outro conceito.

Um ciclo é uma sequência alternada de vértices e arestas de um grafo, iniciada e terminada num vértice, tal que cada aresta tem uma extremidade no vértice que imediatamente a precede na sequência e outra extremidade no vértice que imediatamente a sucede na sequência. Além disto, num ciclo, todas as arestas são distintas e todos os seus vértices também, à exceção do primeiro e do último, que são o mesmo.

Reparando na figura 1:

- a sequência $x_3, u_1, x_1, u_5, x_2, u_2, x_3$ é um ciclo do grafo G,
- a sequência x_4, u_6, x_4 também é um ciclo do grafo G (ciclos com uma única aresta chamam-se laços).

Porque nomeando uma aresta ficam definidos os vértices que são extremidades dessa aresta, podemos omitir os vértices quando estamos a escrever um ciclo. Pensando nos ciclos que exemplificámos anteriormente no grafo G, poderíamos escrever o primeiro ciclo como u_1, u_5, u_2, e o segundo, que é um laço, como u_6. Com o conceito de ciclo estabelecido, podemos falar da noção de dependência nos conjuntos constituídos por arestas de um grafo.

Exemplo 1.3 *Olhando para o grafo G, e sendo $\mathcal{I}_2$ a coleção dos subconjuntos de U, formados por arestas do grafo G, que não contêm nenhum ciclo do grafo, então, podemos afirmar que $\mathcal{I}_2$ tem todos os conjuntos com, no máximo, três elementos de $U - \{u_6\}$, exceto os conjuntos $\{u_1, u_2, u_5\}$ e $\{u_3, u_4, u_5\}$.*

□

Repare na semelhança que existe entre $\mathcal{I}_1$ do exemplo 1.1 e $\mathcal{I}_2$ do exemplo 1.3. Whitney reparou nesta semelhança e reparou também nas seguintes três propriedades que $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ verificavam: (designando por $\mathcal{I}$ indiferentemente as coleções $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$)

I_1) $\emptyset$ é elemento de $\mathcal{I}$.

I_2) Se $Y \in \mathcal{I}$ e $Z \subseteq Y$, então $Z \in \mathcal{I}$.

I_3) Se $Z, Y \in \mathcal{I}$ e $|Z| = |Y| + 1$, então existe $z \in Z - Y$ tal que $Y \cup \{z\} \in \mathcal{I}$ (em que $|Y|$ e $|Z|$ designam o número de elementos dos conjuntos Y e Z, respetivamente).

Foi a partir destas três propriedades que Whitney definiu o conceito de matroide. Portanto, matroide M é um par ordenado $(E, \mathcal{I})$ em que E é um conjunto finito e $\mathcal{I}$é uma coleção de subconjuntos de E que verificam as três propriedades anteriores, isto é, as propriedades $I_1) - I_3)$ (ver [5, 2, 3, 7]).

Se $M = (E, \mathcal{I})$ é um matroide, então os conjuntos de $\mathcal{I}$ chamam-se conjuntos independentes do matroide M. O conjunto E é o suporte do matroide M.

Pelo que expusemos anteriormente, o conjunto das colunas da matriz A, do exemplo 1.1, que designámos por E, é o suporte do matroide $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$. Da mesma forma, o conjunto das arestas do grafo G é o suporte do matroide $M_2 = (U, \mathcal{I}_2)$ (exemplo 1.3).

O termo *matroid* não foi universalmente aceite. Ao longo dos anos vários nomes foram surgindo para este conceito. O que mais tem perdurado é o de *Combinatorial Geometry*, dado por Gian-Carlo Rota, a quem se deve o primeiro livro sobre este assunto, publicado em 1970 [1]. Apesar de não estar nos objetivos de Whitney quando tentou unificar a dependência na álgebra linear e na teoria dos grafos, o conceito de matroide tornou-se importantíssimo em diversas áreas científicas: álgebra, geometria, teoria da computação, investigação operacional, ...

2. MATRIZES E MATROIDES

Matroides construídos a partir das colunas de uma determinada matriz D, pelo processo descrito no exemplo 1.1, chamam-se matroides vetoriais e denotam-se por $M[D]$.

Na secção anterior, mencionámos que as coleções $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ dos matroides construídos nos exemplos 1.1 e 1.3 eram semelhantes. Se olharmos para os conjuntos suporte destes matroides, ou seja, o conjunto E das colunas da matriz A e o conjunto U das arestas do grafo G, eles têm o mesmo número de elementos e conseguimos estabelecer uma correspondência entre eles, por forma a passar dos conjuntos independentes de um dos matroides para os conjuntos independentes do outro matroide. Basta pensarmos na seguinte bijecção (correspondência injetiva e sobrejetiva) de E (conjunto das colunas da matriz A) para U (conjunto das arestas do grafo G),

$$\phi : E \to U \text{ tal que } \phi(i) = u_i, \text{ para } i = 1,2,3,4,5,6.$$

Mais, esta bijecção transforma os elementos de $\mathcal{I}_1$ em elementos de $\mathcal{I}_2$. O que descrevemos com os dois matroides construídos na secção anterior é uma relação de equivalência que se define nos matroides.

Quando temos dois matroides $M_3 = (E_3, \mathcal{I}_3)$ e $M_4 = (E_4, \mathcal{I}_4)$ para os quais existe uma correspondência bijectiva $\phi : E_3 \to E_4$ tal que

$$Y \in \mathcal{I}_3 \text{ se, e só se, } \phi(Y) \in \mathcal{I}_4,$$

dizemos que os matroides M_3 e M_4 são isomorfos.

Se um matroide M é isomorfo a um matroide vetorial $M[C]$ em que C é uma matriz de números reais, dizemos que M é $\mathbb{R}$-representável e a matriz C diz-se uma $\mathbb{R}$-representação de M.

Com esta definição e com o que já afirmámos, podemos concluir que os matroides M_1 (do exemplo 1.1) e M_2 (do exemplo 1.3, construído com as arestas do grafo G) são isomorfos. Portanto, a matriz A do exemplo 1.1 é uma $\mathbb{R}$-representação de M_2.

Prova-se que todos os matroides que são construídos com o conjunto das arestas de um determinado grafo são $\mathbb{R}$-representáveis (ver [4]).

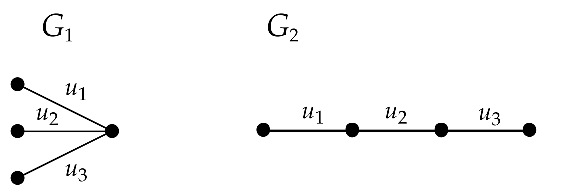
3. GRAFOS E MATROIDES

Matroides construídos a partir das arestas de um determinado grafo H, pelo processo descrito na secção 1, com o grafo G, chamam-se matroides cíclicos e denotam- -se por $M(H)$.

Se um matroide M é isomorfo a um matróide cíclico $M(P)$, para algum grafo P dizemos que o matroide M é gráfico e que P é uma representação gráfica de M.

Como é evidente, grafos distintos podem originar matroides cíclicos isomorfos.

Exemplo 3.1 C*onsideremos os seguintes dois grafos,* G_1 *e* G_2.



Como facilmente se vê, G_1 *e* G_2 *são grafos distintos. No entanto, os matroides cíclicos* $M(G_1)$ *e* $M(G_2)$ *são isomorfos. A matriz*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma $\mathbb{R}$*-representação dos dois matroides.*

□

Porque os matroides M_1 (do exemplo 1.1) e M_2 (do exemplo 1.3, construído com as arestas do grafo G) são isomorfos e este último é um matroide cíclico, podemos dizer que o matroide vetorial $M_1 = M[A]$ é gráfico e que o grafo G é uma sua representação gráfica.

Não fique o leitor a pensar que todos os matroides vetoriais são matroides gráficos porque isto não é verdade.

Exemplo 3.2 *Seja* B *a seguinte matriz, com duas linhas, quatro colunas e preenchida por números reais:*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se o matroide vetorial $M[B]$ *fosse gráfico, existiria um grafo com quatro arestas em que quaisquer três dessas arestas formariam um ciclo do grafo. Mais, quaisquer duas arestas não formariam um ciclo do grafo (atenda aos conjuntos linearmente independentes que se consegue formar com as colunas da matriz* B*). Sejam* u_1, u_2, u_3, u_4 *as quatro arestas do grafo. Então* u_1, u_2, u_3 *e* u_1, u_2, u_4 *eram dois ciclos do grafo. Mas isto implicaria que as extremidades das arestas* u_3 *e* u_4 *eram as mesmas. Assim sendo,* u_3, u_4 *seria um ciclo, o que é impossível. Portanto,* $M[B]$ *não é gráfico.*

□

A teoria dos matroides desenvolveu-se imenso com a relação que se estableceu entre grafos e matroides construídos com o conjunto das arestas dos grafos. De tal maneira foi este desenvolvimento, que muitos dos resultados que foram inicialmente expostos para grafos conseguiram generalizar-se para matroides. Um destes exemplos é o algoritmo de Kruskal (ver [5, 9]). Com o passar dos anos, mais se confirma o que Tutte escreveu em [6] *If a theorem about graphs can be expressed in terms of edges and circuits only it probably exemplifies a more general theorem about matroids.*

4. OUTROS MATROIDES

A teoria dos matroides não ficou cingida aos matroides vetoriais e aos matroides cíclicos, matroides estes que lhe deram origem. Nos últimos anos, têm surgido muitos outros tipos de matroides, confirmando que Whitney ao tentar unificar um conceito em duas teorias distintas (álgebra linear e teoria dos grafos) criou uma nova teoria que veio resolver problemas em imensas áreas científicas. Nesta secção veremos um exemplo prático, muito simples, de um matroide que é $\mathbb{R}$-representável mas que não tem representação gráfica.

Definição 4.1. MATROIDE UNIFORME: *Sejam n e r dois números inteiros não negativos, com $0 \leq r \leq n$. Chama-se matroide uniforme, denotando-se por $U_{r,n}$, a um matroide $M = (E, \mathcal{I})$ em que E é um conjunto com n elementos e $\mathcal{I}$ é a coleção de subconjuntos de E com, no máximo, r elementos.*

□

É um bom exercício para o leitor comprovar que o par $(E, \mathcal{I})$ da definição anterior constitui um matroide, ou seja, que verifica as propriedades $I_1) - I_3)$ da secção 1.

Vejamos um exemplo prático no qual estamos perante um destes matroides.

Exemplo 4.2 *O Rui tem uma lista de compras para o supermercado:*

- *1 dúzia de ovos;*
- *1 kg de arroz;*
- *1 lata de atum;*
- *1 pacote de salada.*

No supermercado, repara que se esqueceu da carteira em casa e que nos seus bolsos só tem três euros. Olha para as prateleiras e acrescenta à sua lista de produtos os respectivos preços:

- *1 dúzia de ovos = 1,00 euro;*
- *1 kilo de arroz = 1,10 euros;*
- *1 lata de atum = 1,30 euros;*
- *1 pacote de salada = 1,20 euros.*

Face ao exposto, o Rui tem, no máximo, dinheiro para comprar quaisquer dois produtos da sua lista. Ou não compra nada, ou compra um produto, ou compra dois produtos.

Estamos perante um problema que tem quatro elementos (os produtos da lista do Rui) e podemos construir subconjuntos destes quatro elementos com, no máximo, dois elementos (o Rui só tem dinheiro para comprar, no máximo, dois produtos da lista). Portanto o que temos neste exemplo é o matroide uniforme $U_{2,4}$.

Se o problema que o Rui pretende resolver é conhecer que produtos deve comprar para gastar o menos possível, então podemos usar a generalização do algoritmo de Kruskal para matroides.

□

Repare que o matroide $U_{2,4}$ não é gráfico, pois a matriz B do exemplo 3.2 é uma sua $\mathbb{R}$-representação.

Para aprofundar este tema, poderá recorrer à bibliografia em português [5].

REFERÊNCIAS

[1] Crapo, H.H. e Rota, G.-C., *On the foundations of combinatorial theory: Combinatorial Geometries*, Preliminary edition, MIT Press, Cambridge, 1970.

[2] Oxley, J.G., *Matroid Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1992.

[3] Oxley, J.G., "What is a matroid?" Cubo 5 (2003) 179-218. (*https://www.math.lsu.edu/~oxley/survey4.pdf*)

[4] Reiner, V., "Lectures on matroids and oriented matroids", Vienna 2005, (*http://www.math.umn.edu/~reiner/Talks/Vienna05/Lectures.pdf*)

[5] Simões Pereira, J.M.S., *Matemática Discreta: Grafos, Redes, Aplicações*, Editora Luz da Vida, Coimbra, 2009.

[6] Tutte, W.T., *Selected papers of W.T. Tutte*, vol. II (eds. D. McCarthy and R.G. Stanton), Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, 1979.

[7] Welsh, D.J., *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976.

[8] Whitney, H., "On the abstract proprieties of linear dependence", *Amer. J. Math*. 57 (1935) 509-533.

[9] Wilson, R.J. e Watkins, J.J., *Graphs an Introductory Approach*, Wiley, 1990.

SOBRE A AUTORA

Rosário Fernandes licenciou-se em Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa em 1987. Desde 1999 é professora auxiliar no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. É autora de diversos artigos científicos sobre álgebra multilinear e combinatória.

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

GROTHENDIECK

"A própria ideia de esquema é de simplicidade infantil – tão simples, tão humilde, que ninguém antes de mim se tinha atrevido a descer tão baixo."

No passado dia 13 de novembro, uma notícia percorreu vários jornais: a da morte de Alexander Grothendieck, um dos maiores matemáticos do século XX, considerado por muitos o maior de todos. A sua vida, para além da matemática, presta-se a ser relembrada também pelo seu percurso, pelas suas opções políticas e sociais, pelo seu recolhimento radical nos Pirenéus no fim da sua vida. Aqui vamos falar um pouco da matemática que Grothendieck nos deixou. Dada a vastidão da sua obra, vamos concentrar-nos apenas num dos maiores problemas do seu tempo, que ele resolveu em grande parte: a demonstração das conjeturas de Weil.

Antes, porém, de entrarmos em detalhes matemáticos, queremos falar do método que Grothendieck preferia para fazer matemática, o método do "mar que sobe", envolvendo os problemas e fazendo-os suavemente desaparecer. Citamos a sua autobiografia.

> "Consideremos, por exemplo, a tarefa de demonstrar um teorema que ainda permanece hipotético (coisa que, para alguns, parece resumir todo o trabalho matemático). Vejo duas maneiras de o fazer. [...]
>
> A imagem que me apareceu há algumas semanas era a seguinte. [A] coisa desconhecida pareceu-me ser como uma porção de terra, uma greda compacta relutante em permitir a entrada. Podemos atacá-la com picaretas ou pés-de-cabra ou mesmo martelos pneumáticos: esta é a primeira abordagem, correspondente ao 'escopro' (com ou sem martelo).
>
> A outra é a do mar. O mar avança gradual e silenciosamente, nada se parece quebrar, nada mexe, a água está tão longe que mal a ouvimos... No entanto, ela acaba por cercar a substância indómita, esta torna-se gradualmente uma península, em seguida uma ilha e depois uma ilhota, que acaba por ser submersa por sua vez, como se se tivesse finalmente dissolvido no oceano que se estende até ao horizonte..."
>
> *Récoltes et Semailles*

Deligne também corrobora este ponto de vista. Segundo ele, nas palestras de Grothendieck, apresentavam-se "pequenos passos e definições, nada parece acontecer, mas no fim da palestra aparece um teorema claramente não trivial."

Depois de estudar mais ou menos autonomamente, nos anos 50 Grothendieck dedica-se à análise funcional, no seguimento da tese de doutoramento que escreveu, aos 25 anos, sob a orientação de Schwarz. É em 1957 que começa a dedicar-se mais intensamente a questões de geometria algébrica, instalando-se no Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), então recentemente fundado. Nesse instituto a investigação é feita em seminários, que funcionam efetivamente como grandes grupos de trabalho intensivo, com discussões que chegam a durar mais de dez horas.

Nesses anos, Grothendieck ganhou fama ao demonstrar o teorema de Riemann-Roch-Hirzebruch, sobre a co-homologia de variedades complexas compactas. Uma co-homologia é uma sucessão de grupos abelianos que pode associar-se a uma determinada estrutura e que contém informação importante sobre essa estrutura, e foi uma das ferramentas de investigação mais frutíferas dentro do trabalho de Grothendieck. Pode definir-se uma co-homologia para qualquer espaço topológico, e esta descreve algumas características desse espaço, como, por exemplo o número e a posição relativa dos seus "buracos". Por exemplo, a co-homologia de um plano é diferente da co-homologia de um plano ao qual se retira um ponto.

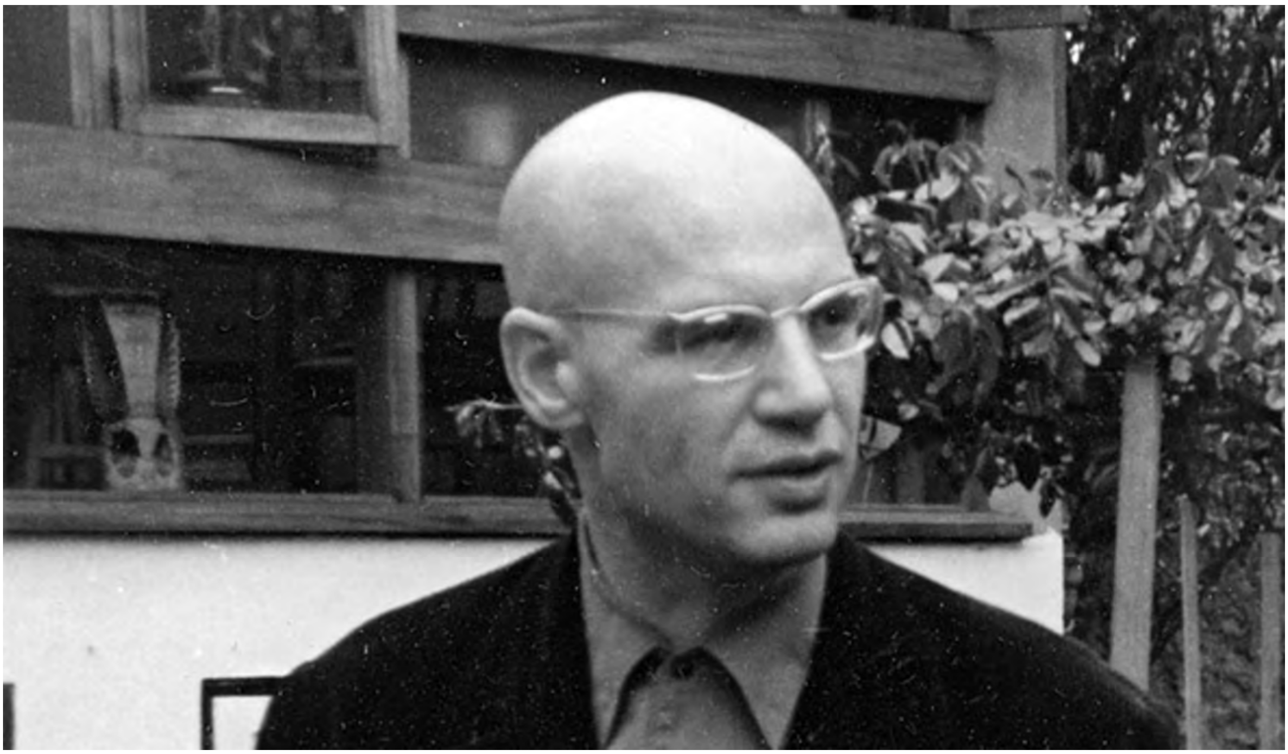
Um dos objetos que Grothendieck criou (embora baseando-se em ideias já conhecidas) e usou no seu trabalho de forma central foram os famosos *esquemas*, objetos muito abstratos que generalizam o conceito de variedade algébrica.

Uma variedade algébrica é o conjunto de zeros comuns a uma família de polinómios, geralmente em várias variáveis. São exemplos de variedades: circunferências, elipses, cónicas ou quádricas (neste caso, usando apenas polinómios de grau dois). A definição destas variedades depende do lugar onde procuramos os zeros: por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, a variedade definida pelo polinómio $x^2 + y^2 + 1 = 0$ é vazia, mas isso não acontece se a considerarmos definida sobre $\mathbb{C}^2$. Um esquema é um conceito mais abstrato que generaliza este.

Um dos seus companheiros de trabalho foi Jean-Pierre Serre, que, segundo Grothendieck, preferia o método de atacar os problemas a escopro e martelo, ainda que com grande elegância, indo diretamente à resposta. Foi Serre que, num seminário, apresentou uma demonstração parcial de uma das conjeturas de Weil, baseada justamente no estudo de um dos grupos de co-homologia de certas estruturas. Serre achava que tinha "forçado" a demonstração para obter os grupos de co-homologia, mas Grothendieck achou que os conceitos poderiam ser mais frutíferos, podendo ser trabalhados no sentido de se obter todos os grupos de co-homologia.

Com a colaboração de Artin, Grothendieck dedica-se à demonstração das conjeturas de Weil, desenvolvendo uma

Alexander Grothendieck no Institut des Hautes Études Scientifiques.



certa co-homologia inspirada no trabalho de Serre. Descrevemos brevemente estas conjeturas.

Seja F_q um corpo finito com q elementos e K o seu fecho algébrico. Seja X uma variedade projetiva sobre K (isto é, é o conjunto de zeros de uma família de polinómios homogéneos de coeficientes inteiros).

Seja N_r o número de pontos de X cujas coordenadas pertencem a F_{q^r}, corpo com q^r elementos, para $r = 1, 2, \ldots$. Com estes números N_r construímos agora uma função, chamada função zeta de X, definida do seguinte modo:

$$Z(t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}\right).$$

As conjeturas são então sobre esta função $Z(t)$:

(1) $Z(t)$ é uma função racional de t, isto é, pode ser escrita como quociente de dois polinómios em t,

(2) mais precisamente, se $n = \dim X$, temos

$$Z(t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\ldots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\ldots P_{2n}(t)},$$

em que cada raiz de cada $P_i(t)$ é um número complexo de módulo $q^{-i/2}$;

(3) as raízes de $P_i(t)$ são trocadas com as raízes de $P_{2n-i}(t)$ pela substituição $t \mapsto 1/q^n t$,

(4) se X se obtiver como redução, módulo p, de uma variedade $\bar{X}$ definida sobre um subcorpo de $\mathbb{C}$, então $b_i := \text{gr } P_i(t)$ é o i-ésimo número de Betti de $\bar{X}$.

A última parte de (2) é conhecida como a hipótese de Riemann (para esta função zeta, não para a função zeta de Riemann) e a afirmação (3) pode ser reescrita como uma equação funcional, satisfeita por $Z(t)$:

$$Z\left(\frac{1}{q^n t}\right) = \pm q^{nE/2} t^E Z(t),$$

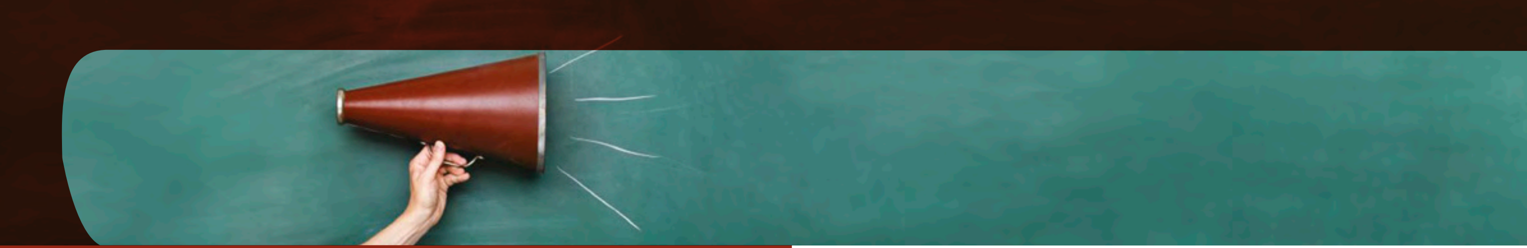
em que E é a característica de Euler de X.

Grothendieck tentou então criar uma co-homologia de certos espaços, de tal modo que, depois de e bem estabelecida e estudada, a demonstração destas conjeturas aparecesse simplesmente, como o mar subindo. O próprio Weil já tinha ensaiado uma co-homologia (chamada co-homologia de Weil), Grothendieck criou a co-homologia *étale*, que viria a ser uma das ferramentas fundamentais da demonstração destas conjeturas. Esta demonstração, em todo o caso, foi apenas terminada por Deligne, seu aluno, que acabou por obter uma demonstração muito subtil e intrincada do resultado, usando indução na dimensão da variedade.

Sobre o seu trabalho acerca das conjeturas de Weil, disse Grothendieck:

> "A coisa mais crucial aqui, do ponto de vista das conjeturas de Weil, é que a nova noção [de espaço] é suficientemente vasta para associar a cada esquema um 'espaço generalizado' ou *topos* (chamado o *topos étale* do esquema em questão). Certos 'invariantes de co-homologia' deste *topos* (infantis na sua simplicidade!) pareciam ter uma boa hipótese de fornecer 'o que seria necessário' para dar às conjeturas o seu significado completo e (quem sabe!) talvez fornecer os meios para a sua demonstração.
>
> A própria ideia de esquema é de simplicidade infantil – tão simples, tão humilde, que ninguém antes de mim se tinha atrevido a descer tão baixo. Em resumo, tão infantil que durante anos, e apesar das evidências, para muitos dos meus colegas eruditos 'não era uma coisa séria'. "
>
> *Récoltes et Semailles*

Estes desenvolvimentos teóricos, abstratos, em geometria algébrica foram postos em livro nos famosos *Éléments de Geometrie Algébrique* (EGA, que alguns matemáticos comparam aos *Elementos* de Euclides), e *Séminaire de Géometrie Algébrique*, escritos com o auxílio de Dieudonné. Estes descrevem a investigação feita no IHES nos anos 50 e 60 e tornaram-se de tal modo centrais na disciplina que Serre abriu uma palestra em Estocolmo em 1962 começando por dizer que, ao falar de Geometria Algébrica, tomava a expressão no sentido "que veio a tornar-se o seu após estes últimos anos: o da teoria dos esquemas". Terminamos com uma frase tirada do início dos EGA que diz algo quer sobre o conteúdo quer sobre o estilo do trabalho de Grothendieck: "É adequado dar à geometria algébrica toda a generalidade e a flexibilidade desejáveis, assentando-a sobre a noção de esquema".



GONÇALO MORAIS
Instituto Superior
Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

ANDRÉ NEVES

André Arroja Neves é um matemático português que está atualmente no Imperial College, em Londres, e que se tornou famoso por, em conjunto com Fernando Marques do IMPA, ter demonstrado a então chamada Conjetura de Willmore. O seu percurso académico começou no Instituto Superior Técnico, onde se licenciou em 1999. Rumou posteriormente a Stanford, onde se doutorou em Matemática em 2005 sob orientação de Richard Schoen. Trabalha na área de Análise Geométrica e numa das suas passagens por Portugal, deu-me o privilégio do seu testemunho sobre a sua efervescente atividade matemática.

GONÇALO Vamos começar pelo teu percurso académico. Este começou pela licenciatura no Instituto Superior Técnico (IST). O teu trabalho final de curso foi, curiosamente, com o meu orientador de mestrado, o Professor Luís Barreira, e depois mudaste para Stanford. Como é que surgiu a ideia de ires estudar para os Estados Unidos (EUA)?

ANDRÉ No meu último ano no IST, um número enorme de professores que tinham estado a estudar nos EUA voltou para Lisboa. Estamos a falar, por exemplo, da Ana Cannas da Silva, que entretanto já saiu do IST, e do Miguel Abreu. Tal como o Luís Barreira, todos eles sugeriram que eu fosse fazer o doutoramento para os EUA. Concorri e fui aceite em Stanford. Tinha boas referências dessa universidade dadas pelo Miguel Abreu, que tinha acabado de voltar de lá. Além disso tinha curiosidade de conhecer a Califórnia. A minha ideia inicial era a de ir estudar Sistemas Dinâmicos e tinha duas referências a seguir, dois professores já na altura idosos: o Katznelson e o Ornstein, que tinha provado um teorema fortíssimo na área da classificação dos Sistemas Dinâmicos.

GONÇALO E o ambiente?

ANDRÉ Eu gostei bastante. Lá tem-se uma vida de *campus*, onde toda a gente que está lá tinha de morar no *campus*. Morar em São Francisco é relativamente longe e a universidade oferecia alojamento de forma que, ao fim de semana ou à sexta-feira à noite, havia sempre alguém com vontade de sair ou alguma festa. Acho que por ano eles têm dois mil alunos de doutoramento enclausurados no *campus*.

GONÇALO Ainda por cima, aquilo tem aquele aspeto de mosteiro...

ANDRÉ Sim, a arquitetura pretende imitar as missões espanholas...

GONÇALO E a transição?

ANDRÉ Não notei nada de extraordinário. Os meus colegas eram trabalhadores, competitivos e estavam todos extremamente motivados para fazer o doutoramento.

O meu *background* era menos sofisticado do que o dos meus colegas que vinham de Harvard, de Princeton ou do MIT. Tive de aprender coisas que eles já sabiam, mas isso nunca foi um obstáculo. Nunca me senti em desvantagem por vir do IST.

GONÇALO E o ambiente académico? Tão efervescente quanto se imagina?

ANDRÉ Completamente! Completamente! Aquilo que mais apreciei foi o facto de ter sido exposto a um conjunto de matérias em matemática que se fosse por minha livre iniciativa tal nunca teria acontecido, muito para além da minha área. Fiz cursos tão díspares como a Classificação de Superfícies Complexas, bastantes cursos em Geometria Algébrica e em Teoria de Números. Nenhuma destas matérias alguma vez usei na minha carreira de investigador. Isto foi excelente. Além disso, a matemática é ensinada para alunos de doutoramento, avançada o suficiente para os alunos poderem ir progredindo mas não tão avançada que faça com que os alunos se percam. Isto permite que uma pessoa fosse guiada e ao mesmo tempo bem seguida.

GONÇALO Depois foste para Princeton fazer um *postdoc*...

ANDRÉ Sim, estive como *postdoc* nos dois primeiros anos e depois eles gostaram do meu trabalho e fui promovido a *assistant professor*, tendo ficado lá mais dois anos, altura em que mudei para Londres, onde estou presentemente.

GONÇALO Princeton deve ser também um local maravilhoso para trabalhar...

ANDRÉ Sim, conheci montes de matemáticos e fui, mais uma vez, exposto a montes de matemática. Esse continuou a ser o traço mais importante. Muitos desses matemáticos eram, além disso, considerados brilhantes. Isso mostrou-me que, de facto, o mais importante na matemática são mesmo as ideias para lá de todo o formalismo. Em matemática, a parte técnica é tão gigantesca que uma pessoa pode fazer uma carreira unicamente manobrando expressões. No entanto, a parte da ideia é absolutamente crucial, sendo muitas vezes essa a parte mais simples e que qualquer pessoa pode, de facto, entender. Claro que no fim há um formalismo grande para justificar tudo, mas, em Princeton, apercebi-me de que o fundamental é mesmo a ideia. Isso ajudou-me a nunca ficar atrapalhado pela parte técnica.

GONÇALO Há algum nome que queiras destacar?

ANDRÉ Existem muitos nomes. Por exemplo, fiz uma cadeira de Topologia com o Zoltán Szabo e aquilo de que mais gostei foi o facto de ele, em cada instante, estar sempre focado na ideia central da matéria que estava a explicar. A cadeira era sobre a resolução da conjetura de Poincaré para dimensão maior ou igual a cinco, e o facto de em cada momento se estar a explicar qual é a ideia central faz com que as coisas fiquem incrivelmente mais claras.

GONÇALO Quando chegaste a Londres tinham passado quatro anos da data do teu doutoramento. Como é que foi encetar a tua carreira de investigação?

ANDRÉ Isso foi a coisa boa de ter saído de Princeton. Estando lá, eu conseguia ter facilmente contacto com os maiores especialistas da minha área. Como já tinha adquirido a técnica, eles iam dando-me problemas e eu conseguia resolvê-los. Mas eu achava que estava a ser... *spoiled*...

GONÇALO Mimado...

ANDRÉ Isso... Toda a gente me dava problemas, eu era tecnicamente capaz e estava a conseguir fazer carreira dessa maneira. Quando mudei para o Imperial College, isso acabou e acho que foi uma coisa maravilhosa. Acho que foi a melhor coisa que me aconteceu, deixar de ter pessoas a sugerirem-me problemas e a guiarem-me na minha investigação e eu começar a fazer as coisas por mim. Ir por mim, escolher um problema em aberto e começar a tentar encontrar a solução foi fundamental para o desenvolvimento da minha carreira.

GONÇALO E depois aparece a Conjetura de Wilmore...

ANDRÉ Sim... Que foi um acidente. Eu já falava com o Fernando[1] há muitos anos. Quando fui para Inglaterra, começámos a ter interesse num tipo de problemas aparentemente abstrato em que se procura saber quais as superfícies mínimas que podemos construir num espaço tridimensional. Da forma mais simplificada, Superfícies Mínimas podem ser entendidas a partir da ideia de geodésica. Dados dois pontos, uma geodésica é a linha que os une com menor comprimento. Dado um bordo, a superfície mínima é aquela que, para esse perímetro, minimiza a área. Nós estávamos academicamente a pensar que tipo de superfícies poderíamos construir, quais os métodos disponíveis...

GONÇALO Construir mesmo...

ANDRÉ Sim! Pensar de que forma consegues produzi-las. É um problema difícil, mesmo para o caso das geodésicas, saber como é que se pode construir uma geodésica fechada. Dado o fluxo geodésico, uma pessoa parte de um ponto e vai avançando, mas não sabe se consegue voltar ao ponto. A mesma questão coloca-se para superfícies mínimas. Localmente, é possível construí-la. Mas como poderemos construir uma superfície mergulhada que seja completa, suave e que tenha todas as propriedades necessárias? Curiosamente, o método é o mesmo

que se usa para construir geodésicas e que se deve ao Birkhoff, o chamado Minimax. Nós estávamos então a olhar para essa técnica, em que a nossa inspiração era olhar para o que o Birkhoff fez para construir geodésicas numa superfície qualquer.

Tudo isto é um assunto relativamente pouco estudado e havia um enorme conjunto de perguntas a que nós não conseguíamos responder. Dando um bocado de *background*, o Birkhoff resolveu o problema olhando para todas as curvas que unem dois pontos de uma variedade e reparou que, no espaço gigantesco formado por estas curvas, existe uma que não pode ser contraída num ponto. Tecnicamente, no espaço de todas as curvas há uma curva que não é contráctil. Uma coisa difícil de uma pessoa imaginar. Uma destas curvas no espaço das linhas sobre a esfera em $\mathbb{R}^3$ é fácil de dizer qual é: considera-se o equador e faz-se uma rotação de 180º desta linha. Acaba-se no mesmo equador, mas numa linha com a orientação contrária. No espaço de todas as curvas, isto que acabamos de fazer é uma curva e esta não é contráctil. Usando a Teoria de Morse, podemos acabar de resolver o problema. Ora, o mesmo princípio funciona para superfícies em $\mathbb{S}^3$. Nesta variedade, as superfícies mínimas não são só o equador. Há também o toro de Clifford e a nossa pergunta era saber, visto que o equador corresponde a uma superfície não trivial, a que é que corresponderá o toro de Clifford? Parecia uma pergunta interessante e deveria ter uma resposta simples.

GONÇALO E não tinha...

ANDRÉ Não tinha de facto, mas compreendemos que se respondessemos a essa pergunta, resolveríamos a conjetura de Willmore. Usando Geometria Conforme, conseguimos imediatamente a resposta: tal como a existência do equador como superfície mínima corresponde à existência de uma curva a um parâmetro que não é contráctil, para o toro de Clifford existirá uma varieda-

[1] Surgiram rumores nas vésperas do ICM 2014, de que Fernando Marques poderia vir a obter a Medalha Fields. Tal não se veio a confirmar.

de de dimensão cinco no espaço de todas as superfícies em S^3 que nós percebemos que não deve ser contráctil. Se conseguíssemos provar isto, resolveríamos a conjetura de Willmore. Aí a motivação para resolver o problema disparou. O que eu quero frisar é que, nestes problemas em que muita gente trabalha, geralmente quando alguém acha a solução é por acaso. Se houvesse uma solução dentro do conjunto de técnicas que normalmente é usado, já alguém o teria resolvido.

GONÇALO A partir desse momento a demonstração do problema foi linear ou ainda teve algum percalço?

ANDRÉ Nesse momento sabíamos que tínhamos uma abordagem nova para a conjetura de Willmore. Combinámos passar um tempo juntos para ver se era possível resolver o problema ou não. E, felizmente, o meu filho tinha nascido. A minha mulher tirou uma *maternity leave* de meio ano e decidimos ir todos para Stanford onde nos encontrámos com o Fernando. Estivemos lá de outubro a dezembro e todos os dias íamos avançando. E foi assim.

GONÇALO E quando se chega ao fim, qual é a sensação?

ANDRÉ Quando percebemos que essa família a cinco parâmetros não era contráctil, sabíamos que o problema já não iria fugir-nos das mãos. E nesse momento a sensação foi algo que nunca irei esquecer.

GONÇALO E à vossa volta as pessoas sabiam o que estavam a fazer?

ANDRÉ Não! Era algo totalmente *top secret.*

GONÇALO E a reação das pessoas quando souberam que tinham resolvido o problema?

ANDRÉ Um misto de estupefação e alegria. Tenho mensagens dos maiores matemáticos a agradecerem-nos e a darem-nos os parabéns pelo *accomplishment,* visto que vários matemáticos famosos tinham trabalhado no problema. Tenho uma especial do Yau, que foi medalha Fields, a dizer-me que foi das coisas mais bonitas que já leu em matemática.

GONÇALO E não há sempre aquela ponta de ceticismo quando se chega ao fim de uma coisa destas, aquela eterna questão "será que nós"...

ANDRÉ [Risos] Houve um bocado. É natural uma pessoa ficar paranóica com a ideia de encontrar um erro. No nosso caso, contudo, havia muitas coisas que batiam certo e por isso não havia nenhuma razão para crer que a demonstração não estivesse correta.

GONÇALO Pensas em voltar algum dia para Portugal?

ANDRÉ Penso que talvez daqui a uns anos. Com as modernas tecnologias de comunicação, a forma como se faz investigação em matemática mudou radicalmente. Agora, sempre que quero falar com os meus colaboradores faço-o através do Skype, algo que há dez anos seria impensável. Estar numa universidade com bons professores é importante para se manter atualizado. Mas hoje é possível estar num sítio remoto, não é impedimento para fazer matemática.

GONÇALO Curioso é que, apesar disso, embora a origem dos matemáticos hoje seja muito mais dispersa, a verdade é que no topo continuam a estar pessoas que trabalham, na grande maioria dos casos, nos EUA, em Inglaterra ou em França...

ANDRÉ É verdade. Eu, por exemplo, tenho uma situação privilegiada no sítio onde estou: tenho de dar um total de 30 horas de aulas por ano, dão-me imenso tempo livre para fazer investigação, para viajar, tenho bolsas de investigação para convidar pessoas, para organizar conferências, contratar alunos *postdoc,* e isso claro que ajuda na qualidade da investigação que uma pessoa faz. Num país em que haja dificuldades de financiamento, ou em que uma pessoa tenha de dar muitas aulas, é claro que é difícil ser-se tão criativo como quando se tem todo o tempo para pensar em matemática. Para fazermos boa matemática e para sermos criativos, temos de estar descansados. Na universidade onde estou, as disciplinas com mais alunos têm professores especialmente contratados para as lecionar. E repara que ensinar 200 alunos está longe de ser uma tarefa fácil.

GONÇALO André, foi um prazer ter falado contigo e muito obrigado por esta entrevista.

ANDRÉ Eu é que agradeço.

NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

A ANGÚSTIA DO LEITOR

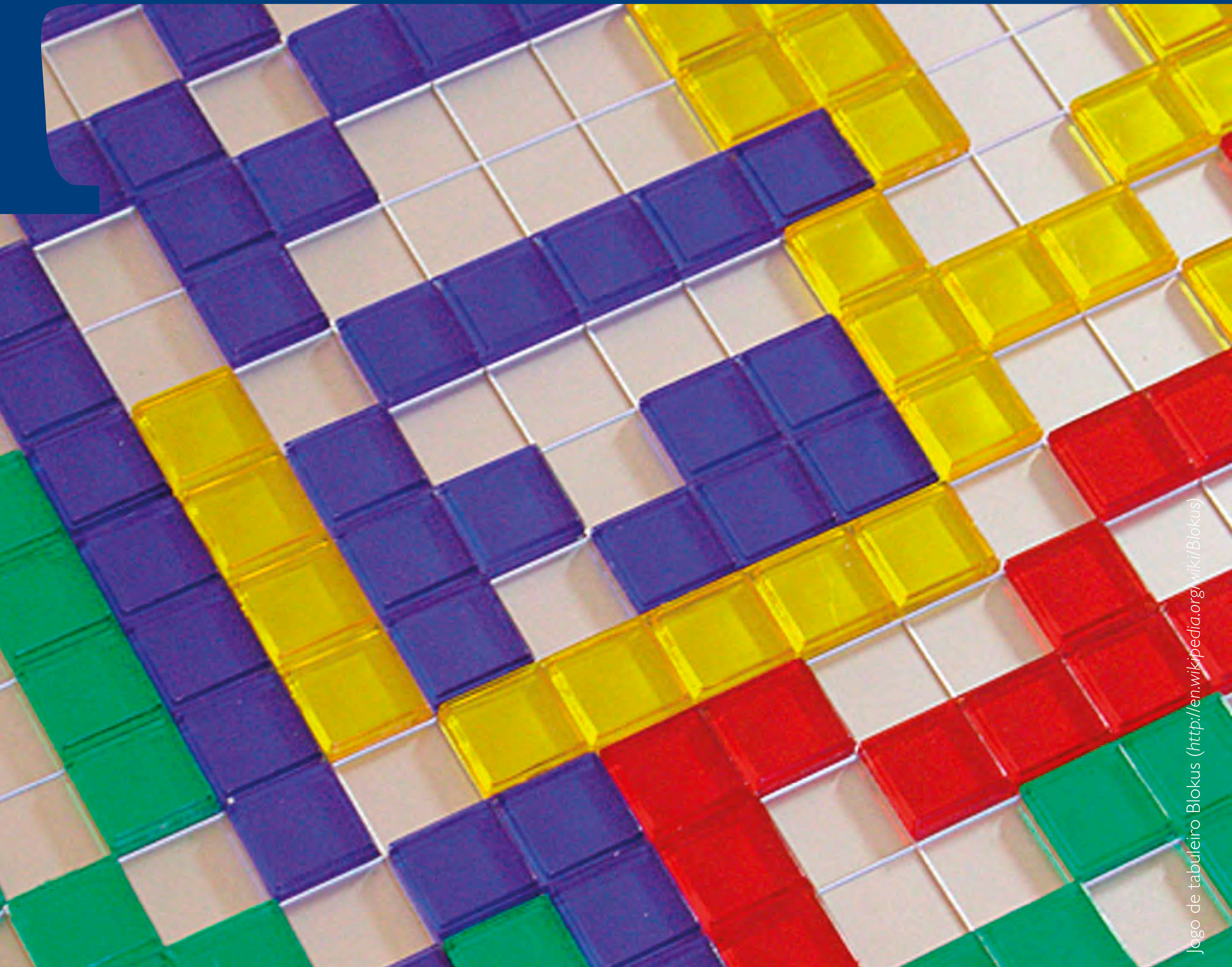
"Tão pouco tempo e tantos livros para ler!" Quantas vezes o dissemos ou pensámos? Este é provavelmente o maior lamento dos bibliófilos e vai-se agudizando à medida que os anos passam e nos aproximamos do fim (da vida, porque os livros não acabam nunca).

Existem vários homens acerca dos quais se afirma terem sido "o último a conseguir ler todos os livros publicados até à data da sua morte", entre estes incluem-se Aristóteles, Roger Bacon, Leonardo da Vinci, Francis Bacon, John Milton, Leibnitz e até Coleridge, já no séc. XIX. Na realidade, é pouco provável que algum deles o tenha feito, seja porque até ao séc. XV a tiragem e a circulação dos livros eram muito limitadas, seja porque após Gutenberg, o número de livros impressos veio dificultar essa tarefa.

Como se não bastassem todos os livros já publicados (a Biblioteca do Congresso, em Washington, a maior do mundo, conta com cerca de trinta e seis milhões de volumes), todos os anos são publicados no mundo inteiro mais de dois milhões de livros, pelo menos segundo a UNESCO. São números que assustam, mas podemos fazer pior. Se um grande leitor conseguisse ler quatro livros por dia, multiplicando pelos 365,25 dias do ano e por 80 anos de vida alfabetizada, chegaríamos a um total de 116.880 livros. Dito de outro modo, mesmo com esse ritmo de leitura digno de um professor Marcelo alimentado a anfetaminas, não conseguiríamos ler mais do que 0,32% da biblioteca do congresso.

Confrontados com o desacerto entre a nossa finitude e a imensidão da tarefa, resta-nos fazer uma escolha criteriosa das leituras. Já que não podemos ler os livros todos, que leiamos os melhores. Mas quais são os melhores?

Cada grande leitor tem uma resposta diferente para esta pergunta, mas vale a pena consultar algumas listas de grandes clássicos, também chamadas "cânones literários", por exemplo, a da biblioteca Plêiade da editora Gallimard, a coleção *Great Books of the Western World* da Encyclopædia Britannica, os clássicos da Penguin Books, ou a lista compilada pelo crítico e académico americano Harold Bloom no livro intitulado justamente *O Cânone Ocidental*, no qual figuram Camões, Eça de Queirós, Pessoa e Saramago, entre outros autores portugueses.



Jogo de tabuleiro Blokus (*http://en.wikipedia.org/wiki/Blokus*)

UMA EXPLORAÇÃO COM PENTAMINÓS

Óscar Felgueiras
Universidade do Porto
olfelgue@fc.up.pt

Um pentaminó é um conjunto de cinco quadrados unitários unidos por arestas em comum. A menos de isomorfismo, envolvendo rotações e reflexões, existem 12 peças diferentes.

Um pentaminó é um conjunto de cinco quadrados unitários unidos por arestas em comum. A menos de isomorfismo, envolvendo rotações e reflexões, existem 12 peças diferentes. Habitualmente são designadas por letras alfabéticas com as quais se assemelham, de acordo com a figura 1 abaixo.

O primeiro problema conhecido com pentaminós foi publicado em 1907 pelo inventor de puzzles inglês Henry Ernest Dudeney no seu primeiro livro, *The Canterbury Puzzles* [2]. No entanto, foi o americano Solomon Golomb que os batizou de "pentominoes", numa palestra em 1953 no Harvard Mathematics Club, e lhes deu maior visibilidade (ver [3]).

Neste artigo pretende-se explorar um puzzle que envolve pentaminós, criado a partir de uma ideia de Werner Metzner, chamado "Calendário de Pentaminós" (CP) ou "Pentomino-Kalender" no original. O CP surge descrito no livro *Wie man durch eine Postkarte steigt* [1] e faz parte de uma seleção de experiências matemáticas. Foi tornado objeto de exposição e também comercializado pelo museu Mathematikum, em Gissen, na Alemanha. O CP é um quebra-cabeças composto por sete dos 12 pentaminós existentes, nomeadamente, as peças L, N, P, U, V, Y, Z; e um tabuleiro com 31 casas. A forma do

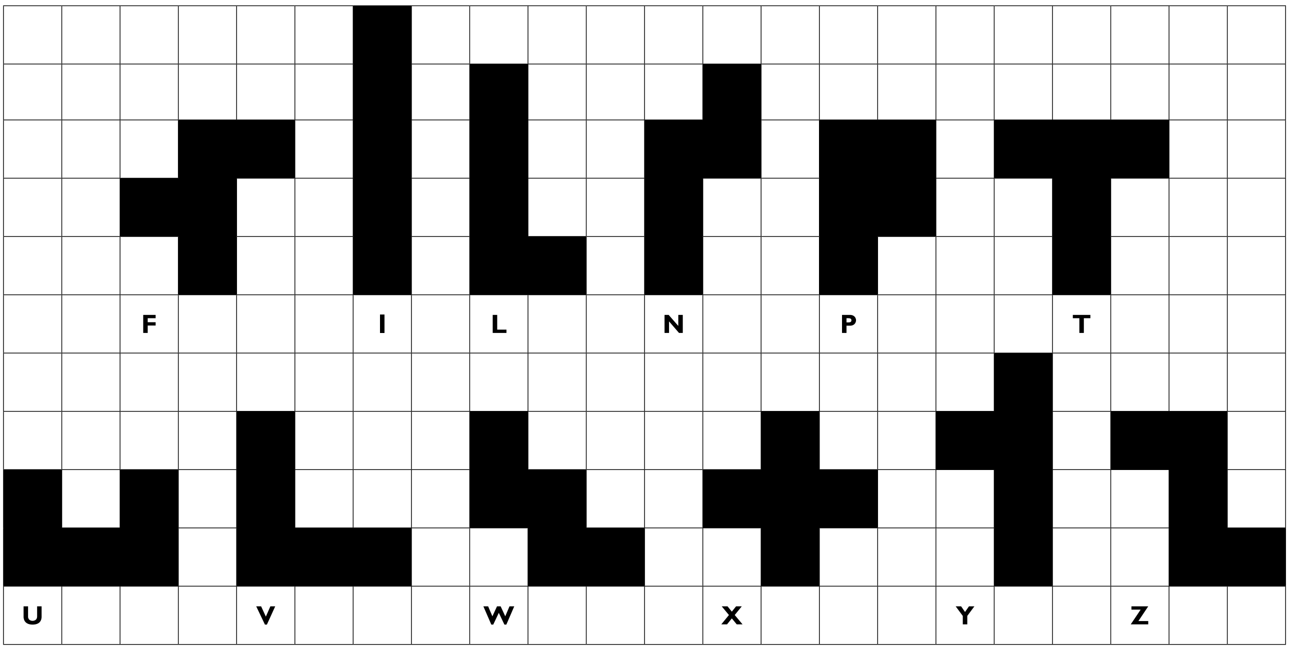


Figura 1: Os 12 pentaminós.

tabuleiro assemelha-se a um calendário e é a descrita na figura 2 abaixo.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Figura 2: O tabuleiro do CP.

Fixado um dos 31 dias, o objetivo é cobrir os restantes com seis das sete peças. No fundo, é como se este puzzle contivesse 31 puzzles diferentes num só. Veja-se a seguir um exemplo de como resolver o dia 20; ou seja, fixando o dia 20, apresenta-se uma solução em que este é o dia não coberto pelas peças (figura 3). Além desta solução, existem mais 50 para este dia, conforme será observado adiante. Também se constata que todos os dias do CP têm solução.

Figura 3: Uma solução para o dia 20.

O facto de o CP ser constituído por estas sete peças e não outras parece algo intrigante. Afinal, se existem 12 pentaminós diferentes, este conjunto é apenas um entre 792. E porquê sete peças e não seis? Cada solução necessita apenas de seis peças. Logo, não é clara à partida a necessidade de uma sétima peça. É inevitável o recurso a um computador para se obter estas respostas em tempo útil.

O artigo de Donald Knuth [4] exibe um algoritmo para encontrar soluções de problemas de coberturas exatas, nos quais se enquadram o CP ou o Sudoku. Este artigo começa por descrever um procedimento relativamente simples designado por algoritmo X que, na prática, consiste em seguir uma estratégia de tentativa e erro. Em seguida, apresenta um algoritmo designado por DLX (Dancing Links X), bem mais sofisticado, que é extremamente eficaz quando usado numa linguagem de programação adequada (Java, por exemplo).

Dado que as questões a que se pretende responder são essencialmente de índole estatística, foi utilizada a linguagem R, que é hoje bastante popular nesta área. Foi criada uma base de dados com todas as soluções do calendário, utilizando os 12 diferentes pentaminós. Obteve-se um total de 17.703 soluções formadas por peças distintas. Estas soluções são determinadas em menos de dois segundos por um applet da autoria de Jaap Scherphuis, em *http://www.jaapsch.net/puzzles/java/polyapplet/polyapp.htm*, o qual implementa o algoritmo DLX. Para tal, basta clicar em "File", "Download" e selecionar o ficheiro "Pentomino_Kalender" criado para o efeito.

Ao analisar a base de dados, começamos pela contagem da ocorrência de cada pentaminó nas 17.703 soluções. Isto porque se obtém daí uma ordenação das peças, que dá uma ideia comparativa daquelas que poderão ser as mais úteis, e que será usada como referência neste artigo para exibir qualquer conjunto de peças. A tabela 1 apresenta a ordenação obtida juntamente com a referida contagem. Além disso, é indicado, para termo de comparação, o número de colocações possíveis de cada peça no tabuleiro juntamente com o respetivo número de orientações.

Consultando esta tabela, observa-se que as sete peças do CP consistem das seis que mais ocorrem em soluções (PLYVUN) e da peça Z. Provavelmente, não admira muito que a peça P seja a que ocorre em mais soluções, dado que é aquela que pode ser colocada de mais formas sobre o tabuleiro. Assim como a peça X é a menos frequente, dado ser a que tem menos formas de ser colocada, o que advém de ser a única com apenas uma orientação possível. Note-se, no entanto, que se determinada peça tem mais formas de ser colocada no tabuleiro do que outra, ela não vai necessariamente ocorrer em mais soluções, embora a correlação entre as soluções e as colocações seja 0.77; isto é, há uma associação positiva clara entre o número de colocações de uma peça e o número de soluções em que essa peça aparece.

Pentaminó	Soluções	Colocações	Orientações
P	14.919	122	8
L	13.020	84	8
Y	11.375	85	8
V	11.345	46	4
U	10.403	60	4
N	10.147	85	8
F	8538	95	8
I	7705	15	2
T	6490	47	4
Z	5757	47	4
W	5005	47	4
X	1514	12	1

Tabela 1: Número de soluções, colocações e orientações de cada pentaminó.

Conjunto de sete peças com mais soluções	Soluções
PLYVUNF	1643
PLYVUNI	1208
PLYVUNT	1173
PLYVUNZ (CP)	1149
PLYUNFI	1052
Conjuntos de sete peças com menos soluções	**Soluções**
PYVUTZW	103
PVUFIZW	124
LYVUNZW	127
PYVUFZX	169
PLVFTZW	173

Tabela 3: Os conjuntos de sete pentaminós com mais e menos soluções.

De forma a estabelecer uma melhor compreensão das soluções associadas a cada conjunto de pentaminós distintos, começamos por observar os conjuntos de seis peças. Existem apenas sete conjuntos que resolvem todos os 31 dias do calendário, apresentados na tabela 2 juntamente com a contagem total de soluções.

Destaca-se a presença das peças P, L e Y em todos estes conjuntos e a ausência das peças Z, W e X. Como o CP é constituído pelas peças PLYVUNZ, daqui decorre também que a peça Z é dispensável devido a PLYVUN resolver todos os dias. Na verdade, é também a única dispensável do CP, dado que este não tem qualquer subconjunto de seis peças contendo Z que resolva todo o calendário.

Quanto aos conjuntos de sete pentaminós distintos, existem 125 que resolvem os 31 dias com número de soluções que variam entre 103 e 1643. Apresenta-se na tabela 3, dentro destes conjuntos, os cinco com mais e menos soluções.

Note-se que o conjunto do CP é o quarto com mais soluções e que o número máximo de soluções (1643) é atingido precisamente tomando as sete peças de maior frequência em soluções. É também de realçar que o conjunto PYVUTZW não só origina o número mínimo de soluções entre estes conjuntos (103), como é, de facto, aquele que resolve todos os dias com número mínimo de soluções ao tomar-se qualquer conjunto de peças distintas que resolvam todos os dias. Um dado curioso é a existência de 26 conjuntos de sete pentaminós com os quais não se consegue resolver nenhum dos 31 dias.

Ainda mais curioso é que ao se analisar os conjuntos de oito pentaminós distintos encontra-se um único que não resolve nenhum dia! É o caso do conjunto LNFIT-

Conjuntos	PLYVUN	PLYUNF	PLYUNI	PLYVNF	PLYUNT	PLYVUT	PLYVFT
Soluções	392	283	197	181	169	131	130

Tabela 2: Sete conjuntos de seis pentaminós e respetivos números de soluções.

ZWX. Repare-se que estão aqui presentes as sete peças de menor frequência em soluções juntamente com a peça L, a qual, apesar de ser a segunda de maior frequência, não combina bem com as restantes. Refira-se que qualquer conjunto com nove pentaminós distintos resolve sempre algum dia e que com 10 todos os dias são resolvidos.

Voltando aos conjuntos de sete peças, existe um parâmetro em que o CP se destaca mais do que na simples contagem de soluções, que é o número mínimo de soluções por dia. O CP tem um valor mínimo de soluções para os dias 22 e 24 nos quais existem 20 soluções. Na verdade, dentro dos conjuntos de sete peças este é o que tem o segundo maior mínimo, só ultrapassado pelo PLYVUNF, que tem um mínimo de 32. Na figura 4 apresenta-se o número de soluções do CP para cada um dos 31 dias.

Dada a singularidade da peça Z no CP, exibe-se também na figura 5 o número de soluções que a excluem, para cada dia.

Comparando estas duas figuras, verifica-se a não coincidência do número de soluções em nenhum dos dias, o que significa em particular que em todos eles existe sempre alguma solução envolvendo o Z.

Concentrando a atenção nos cinco conjuntos com mais soluções referidos na tabela 3 e analisando as suas distribuições de soluções por dia, obtêm-se os seguintes diagramas de extremos e quartis representados na figura 6.

Repare-se que dentro dos cinco conjuntos com maior número de soluções, o CP é o que tem uma distribuição de peças mais homogénea, no sentido em que tem a menor amplitude de variação do número de soluções para cada um dos 31 dias. Isto torna, digamos assim, o CP aquele que tem um grau de dificuldade mais uniforme para os 31 dias do calendário dentro destes cinco conjuntos.

Tendo tudo isto em conta, podemos sintetizar conclusões relativas à seleção das peças pertencentes ao CP. É o segundo conjunto de sete peças com maior número mí-

70	30	24	23	35	36	37
29	52	29	37	42	59	28
24	24	32	29	40	51	32
20	66	20	23	35	38	44
49	52	39				

Figura 4: Número de soluções do CP em cada dia.

25	11	8	5	13	19	16
8	12	9	18	11	17	16
9	9	3	18	13	16	16
7	21	3	7	14	18	17
6	17	10				

Figura 5: Número de soluções do CP sem a peça Z em cada dia.

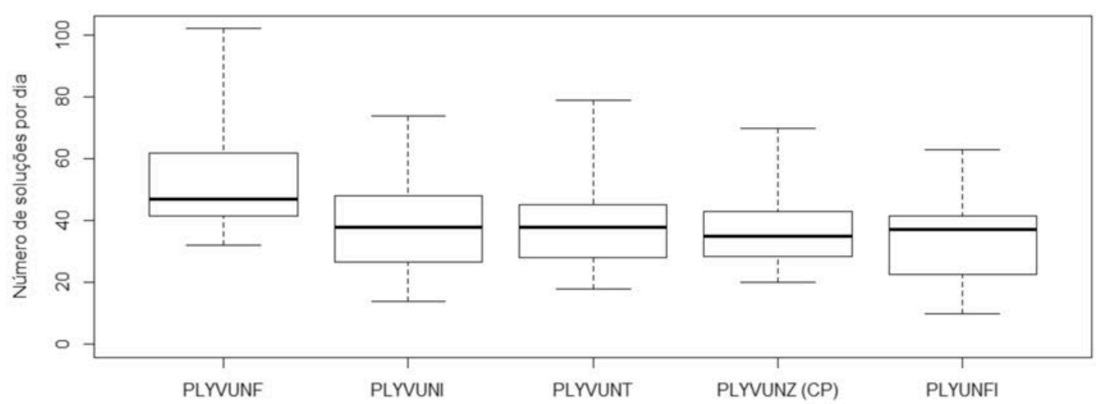


Figura 6: Diagramas de extremos e quartis das distribuições de soluções por dia de cinco conjuntos.

nimo de soluções por dia e o quarto com maior número total de soluções. Além disso, é um conjunto que assegura um bom compromisso entre maior quantidade e uniformidade de soluções por dia, fazendo do CP um puzzle simultaneamente acessível e equilibrado. O CP é constituído pelas seis peças de maior frequência em soluções e pela peça Z, que é a terceira que menos ocorre. O CP pode ser resolvido para todos os dias com ou sem a peça Z, o que constitui uma faceta oculta que lhe acrescenta versatilidade. Fica o desafio para o leitor de fixar, por exemplo, o seu dia de aniversário ou o dia de hoje, e encontrar uma solução utilizando algum dos conjuntos de seis ou sete pentaminós referidos neste texto.

REFERÊNCIAS

[1] A. Beutelspacher e M. Wagner, *Wie man durch eine Postkarte steigt*, Verlag Herder GmbH, Freiburg (Breisgau), 2008.

[2] H. E. Dudeney, *The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems*, W. Heinemann, London, 1907.

[3] S. W. Golomb, "Checker Boards and Polyominoes", *American Mathematical Monthly,* Vol. 61, n.º 10, 675-682, 1954.

[4] D. E. Knuth., "Dancing Links", *Millennial Perspectives in Computer Science*, 187-214, 2000. Disponível em *http://arxiv.org/pdf/cs/0011047.pdf*

SOBRE O AUTOR

Óscar Felgueiras é doutorado pela University of Michigan – Ann Arbor, EUA, com uma tese em Geometria Algébrica, e é professor no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Desenvolve atualmente investigação no Centro de Matemática da Universidade do Porto, na área de estatística e modelação matemática.

Luis Afonso

Publicado originalmente no jornal Público, em 17/02/2015. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Adérito Araújo Universidade de Coimbra

EDITORES:
Daniel Pinto Universidade de Coimbra
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:
António Machiavelo Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Arsélio Martins** Escola Secundária José Estevão, Aveiro • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Joana Latas** HBD - Tourism Investments, Departamento de Educação, São Tomé e Príncipe • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Marcelo Viana** IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Paulus Gerdes** Instituto Superior de Tecnologias e Gestão, Boane, Moçambique & Academia Africana de Ciências • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Sílvia Dias SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
Dossier – Comunicação e imagem

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM **1500 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

AVEIRO RECEBE **ESCOLA DE VERÃO** DA **SPM** EM **SETEMBRO**

Professores dos ensinos básico e secundário, professores universitários, estudantes e todos os que se interessam pela matemática e que com ela trabalham são convidados a participar na Escola de Verão da SPM 2015 (EVSPM2015), que se realiza entre os dias 2 e 5 de setembro, na Universidade de Aveiro. Esta Escola tem como objetivo divulgar novos meios de descoberta da cultura e do conhecimento matemáticos, assim como dar formação específica em certas áreas da matemática. O programa integra conferências plenárias, cursos de formação (nomeadamente formação creditada pelo Conselho Científico - Pedagógico da Formação Contínua), oficinas, mesas redondas, entre outras atividades. Uma das oficinas decorrerá no HOLOLAB - Laboratório de Holografia - onde os participantes poderão explorar e experimentar técnicas holográficas, colaborando na construção de um holograma durante a sessão laboratorial. O prazo para inscrições é 15 de julho.

CONTAGEM DECRESCENTE PARA **ENCONTRO AMS-EMS-SPM**

A cidade do Porto prepara-se para receber o encontro internacional organizado conjuntamente pela American Mathematical Society (AMS), pela European Mathematical Society (EMS) e pela SPM, entre 10 e 13 de junho. O programa será composto, entre outras atividades, por sessões plenárias de interesse geral e por 53 sessões especiais focadas nos desenvolvimentos da investigação em matemática. Um dos pontos altos do evento será a palestra aberta ao público "The Secret Mathematicians", apresentada por Marcus du Sautoy (University of Oxford, Reino Unido). A sessão decorrerá no dia 10 de junho, às 20h30, na Casa da Música, e será acompanhada de excertos musicais interpretados pela Orquestra Clássica da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Entre os oradores convidados do Encontro AMS-EMS-SPM estão também Rui Loja Fernandes (University of Illinois, EUA), Irene Fonseca (Carnegie Mellon University, EUA), Annette Huber (Albert-Ludwigs-Universität, Alemanha), Mikhail Khovanov (Columbia University, EUA), André Neves (Imperial College London, Reino Unido), Gigliola Staffilani (MIT, EUA), Marcelo Viana (Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Brasil) e a *EMS Distinguished Speaker* Sylvia Serfaty (Université Pierre et Marie Curie Paris 6, França). As inscrições estão a decorrer e poderão ser efetuadas a um preço reduzido até 30 de abril. Além desta redução, há ainda um desconto especial para estudantes e sócios das sociedades organizadoras.

E-LEARNING EM DISCUSSÃO **NO PORTO**

Nos dias 8 e 9 de junho, a cidade do Porto receberá o 7.º International Workshop on Mathematics e-Learning (e-Math 2015), um encontro internacional para docentes e investigadores em e-learning na área da matemática. As inscrições são gratuitas e deverão ser efetuadas até 30 de maio. O workshop incidirá sobre diferentes tópicos, nomeadamente tecnologia para e-learning em matemática, software open source, boas práticas e tendências futuras no campo do e-learning. O e-Math 2015 é co-organizado pela Universidade Aberta, pela Universidad Nacional de Educación a Distancia e pela Universitat Oberta de Catalunya. A Sociedade Portuguesa de Matemática, a Real Sociedad Matemática Española e a Societat Catalana de Matemàtiques apoiam esta iniciativa.

FINAL DAS **OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA** EM **RIO MAIOR**

Rio Maior foi palco da muito aguardada final das Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), que este ano letivo assinala a sua 33ª edição. Os 90 finalistas da competição, apurados entre mais de 40 mil participantes, reuniram-se na Escola Secundária Dr. Augusto César da Silva durante três dias para a realização das provas e para diversos momentos de convívio. No dia 22 de março foram conhecidos os nomes dos 36 medalhados – 12 na categoria Júnior (6º e 7º anos), 12 na categoria A (8º e 9º anos) e 12 na categoria B (10º, 11º e 12º anos). Terminada a final nacional, os vencedores da categoria B estão agora de olhos postos na etapa internacional das Olimpíadas, que arranca em julho com as Olimpíadas Internacionais de Matemática, realizadas na Tailândia, e as Olimpíadas de Matemática da CPLP, que decorrerão em Cabo Verde, terminando em setembro com as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, em Porto Rico. As OPM são organizadas pela SPM em parceria com o Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, com o objetivo de desenvolver o conhecimento da matemática, o treino do raciocínio e o gosto pelos desafios matemáticos. O Ministério da Educação e Ciência, a Ciência Viva, a Fundação Calouste Gulbenkian, o Novo Banco e a Pathena apoiam a realização das OPM.

11.º CAMPEONATO NACIONAL DE **JOGOS MATEMÁTICOS** EM **VILA REAL**

A Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), em Vila Real, foi no dia 6 de março o ponto de encontro para cerca de 1500 alunos de cerca de 300 escolas de todo o País, que participaram no 11.º Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM11). Os jogos disputados no CNJM11 - Cães & Gatos, Semáforo, Rastros, Avanço, Produto e Sesqui - são já bem conhecidos dos apreciadores deste tipo de jogos, na sua maioria jogos de tabuleiro para dois jogadores. A seleção dos participantes para esta grande final ficou a cargo das escolas inscritas no campeonato. A primeira edição, em 2004, contou com a participação de 500 alunos de 200 escolas e, desde então, o campeonato tem tido cada vez mais interessados. O CNJM é uma iniciativa da Associação Ludus, da SPM, da Associação de Professores de Matemática e da Ciência Viva. A edição deste ano contou ainda com a organização e apoio locais dos docentes do Departamento de Matemática da UTAD, do Agrupamento de Escolas Diogo Cão e da Escola S/3 de S. Pedro.

MATEMÁTICA SEM **FRONTEIRAS**

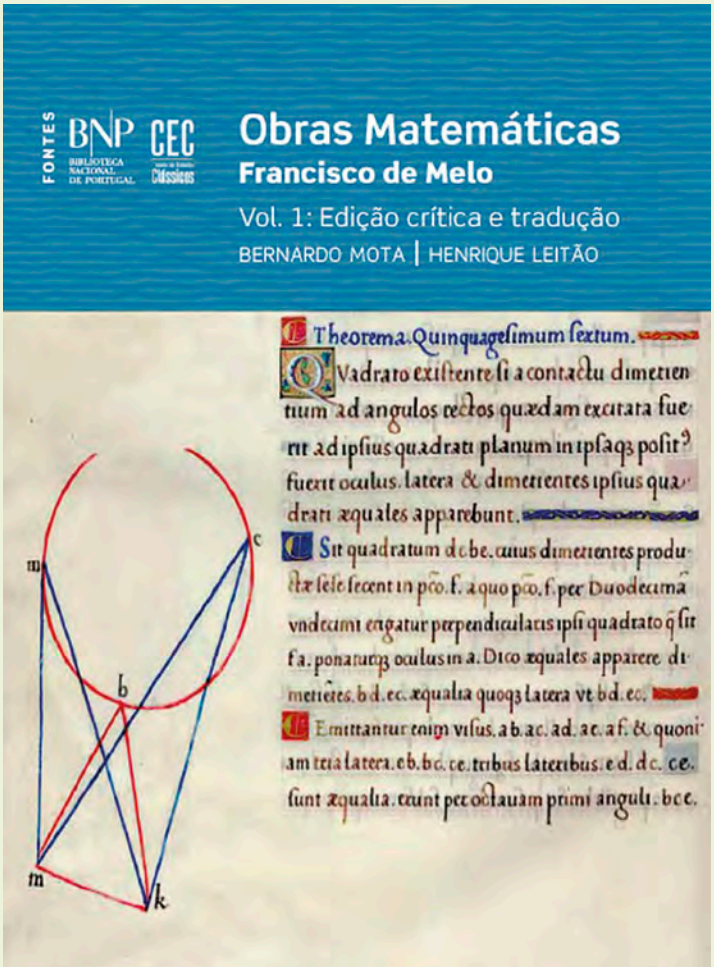
O Canguru Matemático sem Fronteiras 2015 realizou-se no dia 19 de março em simultâneo nos 47 países participantes, incluindo Portugal. O concurso, dirigido a todos os alunos do 2.º ao 12.º ano de escolaridade, tem como objetivo primordial estimular e motivar o maior número possível de crianças e jovens para a matemática. Em Portugal a organização deste concurso está a cargo do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra com o apoio da SPM.

O PERCURSO **DE JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA** EM **EXPOSIÇÃO** ITINERANTE

Escolas, universidades, bibliotecas e outros organismos poderão requisitar à SPM a exposição itinerante "José Sebastião e Silva - O Cientista e o Professor". Os painéis estarão expostos pontualmente nas tertúlias que decorrem até 27 de junho, no âmbito das comemorações do centenário de José Sebastião e Silva, podendo a exposição ser requisitada nos períodos entre cada tertúlia. Mais informações podem ser solicitadas através do e-mail imprensa@spm.pt ou do número 217 939 785.

EDITADA **OBRA** DO GRANDE **MATEMÁTICO PORTUGUÊS** QUE ANTECEDEU **PEDRO NUNES**

Referenciada desde o início do século XIX, a obra matemática de Francisco de Melo, considerado pelos historiadores o mais importante matemático português da geração anterior a Pedro Nunes, foi finalmente traduzida para português e estudada na sua totalidade por Bernardo Mota e Henrique Leitão. O primeiro volume das *Obras Matemáticas de Francisco de Melo*, consistindo numa edição crítica dos textos em latim e numa tradução portuguesa brevemente anotada, foi recentemente publicado numa edição da Biblioteca Nacional de Portugal e do Centro de Estudos Clássicos da Universidade de Lisboa. Esta obra pretende divulgar o conteúdo da obra matemática de Francisco de Melo entre especialistas e o público geral, realçando a sua importância no âmbito da história da ciência e da cultura portuguesa. O segundo volume incluirá o estudo pormenorizado dos textos agora publicados.



PRIMEIRA **CONFERÊNCIA** DO **ESPAÇO MATEMÁTICO** EM **LÍNGUA PORTUGUESA**

A primeira edição da Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa (CIEMeLP) terá lugar em Coimbra entre 28 e 31 de outubro de 2015. Este encontro tem como objetivo promover o intercâmbio entre os países e comunidades de língua portuguesa no campo da investigação e de projetos académicos nas linhas de ação do Espaço Matemático em Língua Portuguesa (EMeLP). O programa da CIEMeLP é composto por conferências plenárias e paralelas, e por vários grupos de discussão para os quais serão solicitadas comunicações, havendo ainda lugar à apresentação de *posters*. Todas as sessões decorrerão no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e no Museu da Ciência. O EMeLP nasceu em 2014, com o objetivo de fomentar no mundo lusófono o intercâmbio de projetos, ações e iniciativas no âmbito da matemática interdisciplinar, do ensino e da divulgação desta disciplina e das manifestações culturais matemáticas.

PORTAL SELOS E **MATEMÁTICA** BREVEMENTE **DISPONÍVEL**

A SPM, em parceria com a British Society for the History of Mathematics (BSHM), está a organizar um portal bilingue (inglês e português) sobre selos e matemática. A página disponibilizará para consulta o vasto material filatélico de que é proprietário Robin Wilson, grande nome da divulgação matemática e presidente da BSHM. As reproduções filatélicas exibidas serão complementadas com pequenos textos que as contextualizam. O Portal Selos e Matemática dará assim um importante contributo à divulgação da matemática junto do grande público, ao mesmo tempo que representa um objeto de interesse para todos os que se interessam por filatelia.

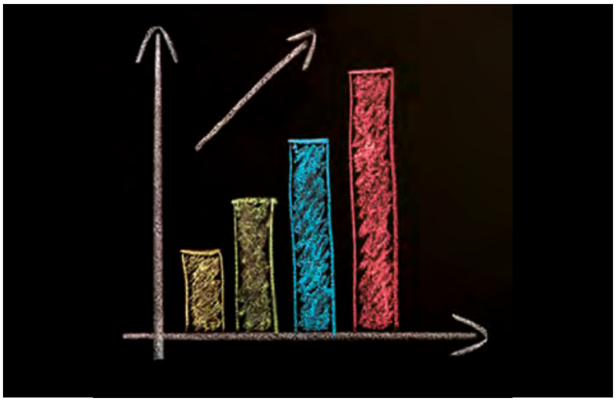
PRÉMIO PESSOA 2014 ATRIBUÍDO A **HENRIQUE LEITÃO**

Henrique Leitão foi galardoado com o Prémio Pessoa 2014, em dezembro passado. O investigador e historiador de ciência foi premiado pelo trabalho que tem vindo a desenvolver no campo da Ciência, tendo o júri destacado a exposição "360º - Ciência Descoberta", realizada na Fundação Calouste Gulbenkian em 2013, e da qual foi Comissário. Henrique Leitão desenvolve investigação no Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia, que ajudou a fundar em 2003, e leciona na Secção Autónoma de História e Filosofia das Ciências, na Universidade de Lisboa (UL). Doutorou-se em Física, em 1998, na Faculdade de Ciências da UL, mas o interesse crescente pela história das ciências acabou por torná-lo num "historiador de ciência a tempo inteiro". Entre os seus principais interesses está a história das ciências exatas nos séculos XV a XVII. Autor de vários livros, Henrique Leitão coordenou a Comissão Científica da publicação das *Obras* de Pedro Nunes, com a chancela da Fundação Calouste Gulbenkian e da Academia das Ciências de Lisboa. É membro de várias sociedades científicas, nacionais e internacionais, colaborando pontualmente com a SPM em algumas das suas atividades. No final de 2012, Henrique Leitão foi eleito membro efetivo da Academia Internacional de História das Ciências, uma prestigiada associação de historiadores de ciências, com sede em Paris. Esta distinção não era atribuída a um português há mais de 50 anos. O Prémio Pessoa, concedido ao investigador na sua 28.ª edição, foi criado em 1987 e distingue personalidades portuguesas cuja obra alcance particular destaque nos campos das Artes, Ciência ou Cultura. O valor do prémio é de 60 mil euros.

CONCURSO **IMAGINARY** TRANSFORMA **FÓRMULAS** EM **IMAGENS**

A Biblioteca Lúcio Craveiro da Silva, em Braga, e o Departamento de Matemática e Aplicações da Universidade do Minho estão a promover o concurso Imaginary, que desafia os participantes a criar imagens, construindo superfícies algébricas no programa de acesso livre SURFER. O concurso está aberto até 31 de agosto a todas as pessoas interessadas em participar. As imagens poderão ser submetidas a concurso individualmente ou em grupo, e serão premiadas pela sua originalidade, criatividade e beleza. Os melhores trabalhos selecionados pelo júri serão premiados no final de outubro, na Biblioteca Lúcio Craveiro da Silva, onde serão posteriormente expostos.

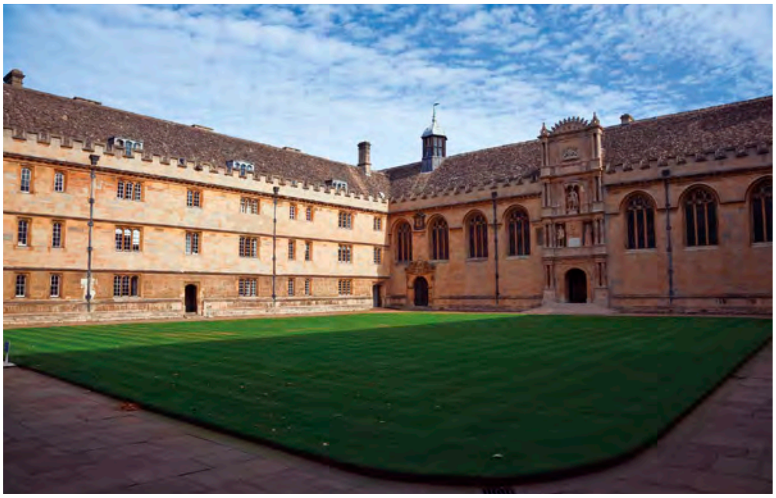
INFOESCOLAS TRAÇA **RETRATO** DE **ESCOLAS NACIONAIS**



O Ministério da Educação e Ciência lançou recentemente o portal Infoescolas, uma plataforma online que agrega dados relativos a 587 escolas de todo o País com alunos matriculados em cursos científico-humanísticos. Os dados disponibilizados no portal permitem conhecer o número de alunos matriculados em cada estabelecimento de ensino, a sua distribuição etária, por sexo, nacionalidade e curso. É possível também aferir o desempenho de cada escola no que toca à progressão relativa dos alunos nos exames nacionais de Matemática e Português do 9.º e do 12.º ano. O portal disponibiliza ainda dados relativos às taxas de retenção ou de desistência por escola e permite comparar os resultados dos alunos do 12.º ano de diferentes escolas públicas do continente inseridas em contextos semelhantes.

PROGRAMA PARA **JOVENS CIENTISTAS** NA **UNIVERSIDADE** DE **OXFORD**

A Universidade de Oxford, em parceria com o Clay Mathematics Institute, está a promover o PROMYS Europe, um programa que pretende reunir durante seis semanas no Wadham College, Universidade de Oxford, estudantes do ensino secundário de toda a Europa, rigorosamente selecionados. O programa, que decorrerá entre 11 de julho e 22 de agosto, tem como objetivo encorajar jovens cientistas a explorar de forma intensiva o criativo mundo da matemática, no campo da Teoria dos Números. As candidaturas para o PROMYS Europe terminam a 1 de abril.



Fernando Pestana da Costa
Presidente SPM
fernando.costa@uab.pt

A *PORTUGALIÆ* E A SUA BIBLIOTECA

Os periódicos de investigação matemática obtidos por troca com a *Portugaliæ Mathematica* constituem um importante património da SPM, com mais de uma centena de títulos e muitas décadas de existência: a Biblioteca de Permutas da *Portugaliæ*.

Das numerosas iniciativas desenvolvidas pelos matemáticos do Movimento Matemático de meados dos anos 1930 até ao final da década de 1940, três continuam hoje a existir, apesar das muitas vicissitudes intermédias: desde logo, a Sociedade Portuguesa de Matemática e a revista que o leitor tem presentemente nas mãos. A outra dessas três iniciativas é a revista de investigação *Portugaliæ Mathematica*, que surgiu em 1937 pelo impulso de António Aniceto Monteiro, e sobre a qual os leitores destas Cartas já tiveram oportunidade de ler apontamentos nos números da *Gazeta* de março de 2008 e de março de 2013.

Saberão, portanto, das linhas gerais da história da *Portugaliæ* e da importância que, até determinada altura da sua existência, ela teve para a atividade de investigação matemática em Portugal, bem como do esforço que desde as últimas décadas do século XX tem sido feito pelos diversos editores para recuperar a revista como veículo internacional de comunicação da investigação matemática, esforço que, apesar de não poder abrandar, tem sido largamente bem-sucedido. Tudo isto é conhecido, mesmo dos que não fazem investigação matemática e, portanto, não usam a *Portugaliæ* como instrumento de trabalho.

Mas, tal como os Três Mosqueteiros eram quatro, estas três iniciativas do Movimento Matemático acabam por ser, de facto, quatro. Isto porque há um outro aspeto relacionado com a *Portugaliæ* que será menos conhecido (mesmo entre alguns investigadores matemáticos) mas que foi desde o início extremamente importante, e continua a sê-lo atualmente: as permutas da *Portugaliæ*.

Desde o seu início, a *Portugaliæ* estabeleceu com muitas revistas congéneres estrangeiras acordos de permuta, os quais, com o decorrer dos anos, permitiram constituir um extraordinário acervo bibliográfico com mais de uma centena de títulos periódicos de matemática: a Biblioteca de Permutas da *Portugaliæ Mathematica*. Esta biblioteca teve, historicamente, uma importância considerável quando, por desinteresse ou dificuldades financeiras, o número de periódicos matemáticos assinados pelas bibliotecas universitárias nacionais era reduzido, e mesmo atualmente, quando os modos de acesso à informação de investigação matemática estão em intensa e rápida transformação e os investigadores das instituições nacionais possuem acesso eletrónico a muita documentação, via b-On ou outras bases de dados, a Biblioteca de Permutas permanece relevante, não apenas como acervo histórico mas também por possuir um largo conjunto de publicações dificilmente acessíveis, em Portugal, por outros meios.

A partir da década de 1980 e até à presente data, a preservação e a gestão técnica desta Biblioteca de Permutas tem sido assegurada pelos centros de investigação de matemática associados à Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e esse acervo tem estado alojado na biblioteca do edifício do antigo Complexo

Interdisciplinar II do INIC, atual Instituto para a Investigação Interdisciplinar (III). De facto, o papel da Universidade de Lisboa foi determinante ao assegurar os meios humanos e parte dos meios financeiros que permitiram que a Biblioteca de Permutas se tenha afirmado como um instrumento de trabalho fundamental, aberto a toda a comunidade matemática nacional.

Nos últimos anos, as alterações no III, que têm vindo a ser promovidas pela Universidade de Lisboa, fazem com que não seja impossível que a Biblioteca de Permutas venha a ter de abandonar as instalações do Instituto. A acontecer, é fundamental conseguir para a Biblioteca de Permutas da *Portugaliæ* um realojamento em condições adequadas à conservação deste espólio bibliográfico e à sua acessibilidade por parte de toda a comunidade dos matemáticos portugueses. Este objetivo da direção da SPM é também partilhado pela direção do Departamento de Matemática da FCUL, em particular pelo seu presidente, Prof. José Francisco Rodrigues, com quem a SPM tem trabalhado intensamente a fim de conseguir garantir que a Universidade de Lisboa continue a providenciar uma casa condigna à Biblioteca de Permutas da *Portugaliæ Mathematica.*

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2015

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3° esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*

VISITE A LOJA SPM EM *WWW.SPM.PT*

NOVIDADE!

Matemática Planeta Terra
2.ª Edição