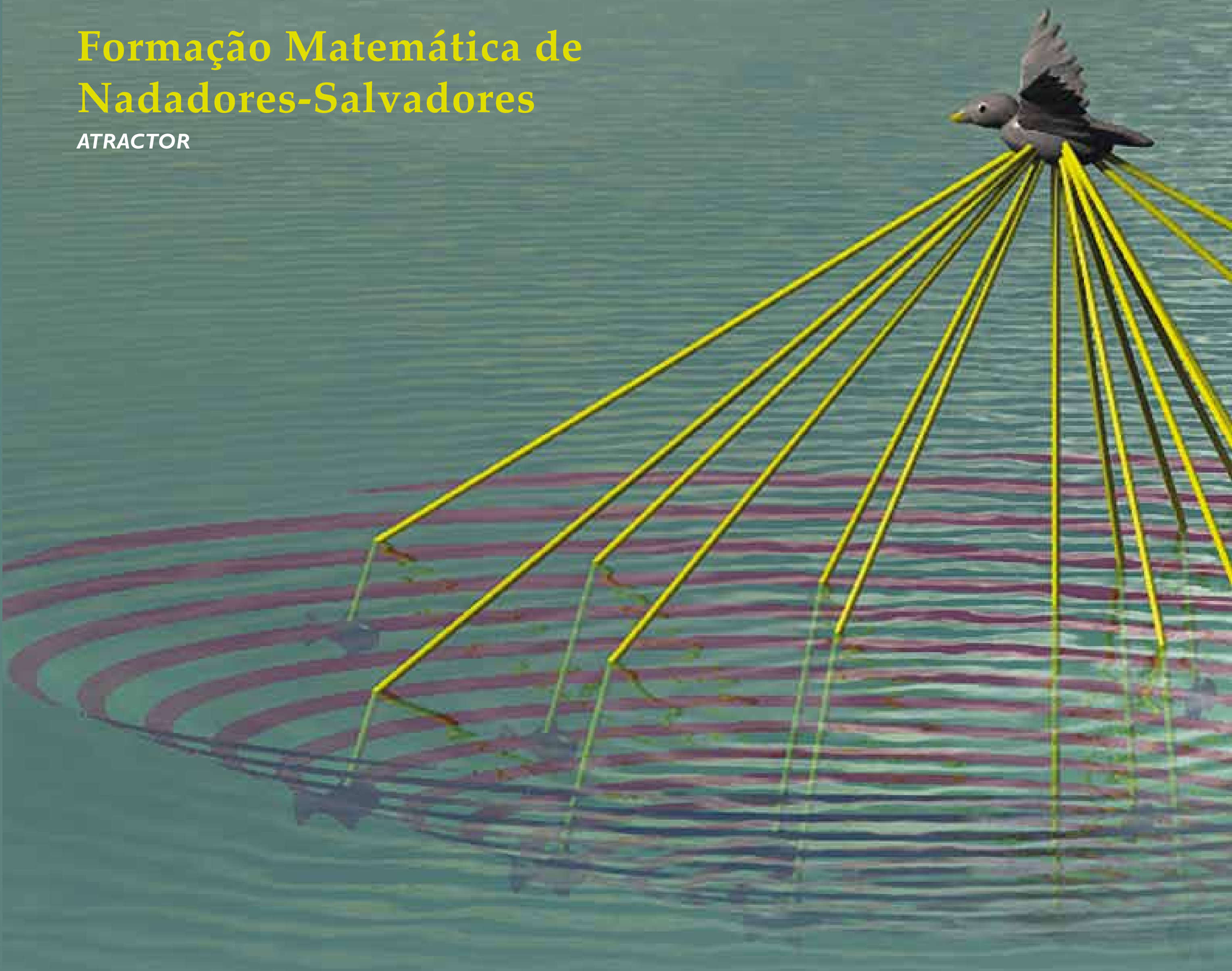
N. 0177

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXVI | Nov. 2015 | 4,20€



Formação Matemática de Nadadores-Salvadores

ATRACTOR

Luz

JORGE NUNO SILVA | *RECREIO*

As Cores de Goethe

NUNO CAMARNEIRO | *MATEMÁTICA E LITERATURA*

2015 ANO INTERNACIONAL DA LUZ

AS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E AS DITADURAS NO SÉCULO XX

A Europa Ocidental, Portugal, e as suas Conexões Atlânticas

10-12 dezembro 2015
Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa

http://matematicaeditaduras.spm.pt

CONFERÊNCIA INTERNACIONAL
Comemorações dos 75 anos da SPM

Organização:

spm Sociedade Portuguesa de Matemática 75 anos

Fundação Faculdade Ciências Universidade Lisboa

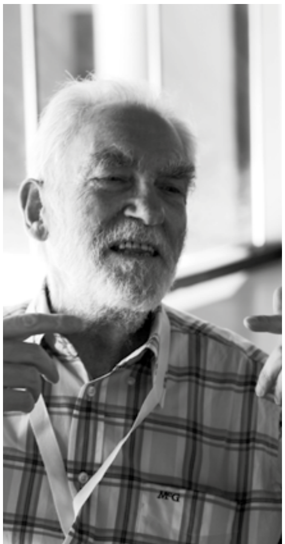
Apoios:

ICHM FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia CAMGSD

ÍNDICE

20 DIVISÃO EUCLIDIANA, CALENDÁRIO, ANOS BISSEXTOS… E SEXTA-FEIRA, DIA 13

32 3 PERGUNTAS A CÉDRIC VILLANI



34 CONVERSA COM... **Carles Simó**

40 UMA BREVÍSSIMA HISTÓRIA DOS INFINITOS INFINITOS

Adérito Araújo
Universidade
de Coimbra
alma@mat.uc.pt

MEHR LICHT!

Comemora-se este ano o Ano Internacional da Luz, e a *Gazeta de Matemática* não quis deixar de assinalar essa efeméride.

As últimas palavras de Johann Wolfgang von Goethe, de acordo com um artigo publicado pelo seu médico pessoal, Carl Vogel, foram "Mehr Licht!" (em português, "Mais Luz!"). Mas como Vogel não presenciou esse momento, a veracidade do depoimento não é unanimemente aceite.

Embora temperado pelas ideias mais humanistas do *Sturm und Drang* (Tempestade e Ímpeto), Goethe era um homem do Iluminismo, que buscava a rutura com os processos de alienação, fortemente enraizados no seu tempo. Compreende-se assim que as suas últimas palavras, pedindo que abrissem uma janela para dar mais luz, sejam hoje citadas no sentido de exigir mais instrução, mais verdade, mais ciência. Como lembra Nuno Camarneiro no texto que publica neste número da *Gazeta*, o interesse do grande poeta alemão pela ciência é visível no extenso tratado que dedica ao estudo da cor. Mas Goethe, quiçá o último génio universal do ocidente, não era um cientista. A sua obra pecava por falta de rigor e não teve eco na comunidade científica. Apesar de tudo, ela influenciou personalidades tão díspares como os filósofos Arthur Schopenhauer e Ludwig Wittgenstein ou o grande pintor da luz J. M. W. Turner.

Quem Goethe queria verdadeiramente confrontar com o seu *Zur Farbenlehre* era Isac Newton, cuja visão analítica e a abordagem eminentemente matemática ferozmente criticava. Chegou mesmo a acusar o sábio inglês e a sua teoria da refração da luz branca de blasfémia. Neste número da *Gazeta* deixamos a defesa das ideias de Newton e Descartes ao cuidado do artigo "Formação matemática de nadadores-salvadores", o primeiro de dois textos da autoria da Atractor sobre o fenómeno do arco-íris. E para aqueles que não perdem a oportunidade de exercitar o seu raciocínio matemático, o desafio que Jorge Nuno Silva nos coloca desta vez também se foca nesse objetivo.

A fascinante história da luz e da cor foi sempre palco de permanente diálogo entre a arte, a filosofia e a ciência, entre uma abordagem mais analítica e outra mais sensorial[1]. Talvez por isso não seja de estranhar que a bandeira usada por muitos movimentos que defendem a inclusão social seja a do arco-íris.

É bem provável que 2015 não fique para a história como o Ano Internacional da Luz. A enorme crise migratória que hoje se vive na Europa é de tal forma grave que tudo ofusca. Vale a pena, por isso, regressar às últimas palavras de Goethe: "Mehr Licht!" Mais luz, mais clarividência, mais sabedoria para resolver um dos maiores flagelos humanitários da nossa história recente.

[1] Curiosamente, a pessoa que, antes de qualquer outra, atribuiu sete cores ao arco-íris foi Dante Alighieri (1265 – 1321). Na sua *Divina Commedia*, chama a atenção para o arco-íris tanto no *Paradiso* como no *Purgatorio*, e no último, no canto 29, versos 76–78, escreve (na tradução de Vasco Graça Moura): «... que por cima mantinha-se distinto / em sete listras, todas nessas cores / de que faz arco o Sol e Délia o cinto.»

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

FORMAÇÃO MATEMÁTICA DE NADADORES-SALVADORES

Este é o primeiro de dois artigos dedicados ao Ano Mundial da Luz.

Imaginemos o seguinte cenário: num pedaço de costa retilínea e sem corrente, um banhista pede socorro e o nadador-salvador, suposto em terra, dirige-se para o salvar. Que percurso deve seguir para demorar o mínimo tempo possível? Claro que a resposta depende à partida das velocidades, de corrida em terra e de natação na água, do nadador-salvador. No caso de elas serem iguais, o que em geral está longe de acontecer, o percurso mais rápido coincide com o percurso mais curto e, portanto, é o segmento de reta que une a posição inicial do nadador-salvador à do banhista. Mas, em geral, a velocidade de corrida é francamente superior à de natação. Neste caso, ainda há uma situação particular em que a resposta é a mesma: aquela em que a linha reta unindo o banhista ao nadador-salvador é perpendicular à linha de costa. E nos outros casos? Um pouco de bom senso aconselha a que se *aumente o percurso em terra, onde a velocidade é grande, para depois ser mais pequeno o percurso em água, onde a velocidade é mais pequena*.

Mas como determinar com precisão o melhor ponto C na linha de costa, onde fazer a transição da corrida para a natação? Outra questão: temos estado a supor que o nadador-salvador estava em terra quando o banhista fez o apelo. À primeira vista, poderá pensar-se que, se ele já estiver na água, a melhor solução será a de nadar em linha reta na direção do banhista em apuros. Mas será necessariamente esse o caminho mais rápido?

Por uma questão de simplicidade, começaremos por tratar um caso particular: o nadador salvador A está mesmo

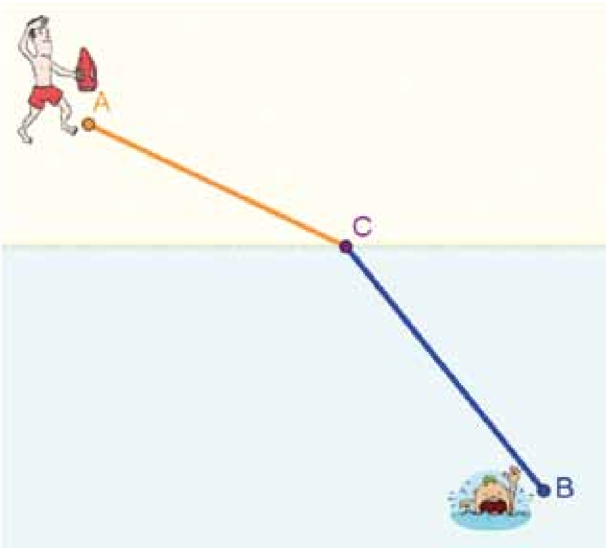


Figura 1

na linha de água e começa por correr ao longo dela até um ponto C, nadando depois em direção ao náufrago B. Como escolher C, de forma a que ACB seja o percurso mais rápido? Designemos por v_1 a velocidade de corrida e por $v_2 (< v_1)$ a velocidade de natação. Queremos C tal que (ver figura 2), para quaisquer pontos na linha de água, D à direita de C e E à esquerda de C, os percursos ADB e AEB sejam mais demorados do que o percurso ACB. F é o ponto da linha de água

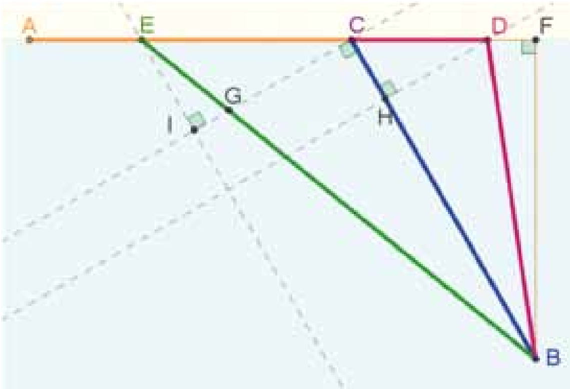


Figura 2

na perpendicular por B e a tracejado estão representadas as perpendiculares por C e D a CB e a paralela a CB por E, sendo G, H, I pontos de interseção claramente identificáveis na figura. O tempo do percurso ACB é $\overline{AC}/v_1 + \overline{CB}/v_2$. O de ADB é $\overline{AD}/v_1 + \overline{DB}/v_2$ e ele tem uma parte AC comum a ACB. Queremos encontrar uma condição sobre C que garanta que CB é mais rápido do que CDB para qualquer D à direita. Ora, HB é mais rápido do que DB: estão no mesmo meio, portanto, a velocidade é a mesma, e DB é hipotenusa de um triângulo de que HB é cateto, portanto, mais longa do que HB. Se a duração de $CH(= \overline{CH}/v_2)$ for inferior ou igual à de $CD(= \overline{CD}/v_1)$, poderemos concluir que o percurso CB é mais rápido do que CDB. Mas $\overline{CH}/v_2 \leq \overline{CD}/v_1$ equivale a $\overline{CH}/\overline{CD} \leq v_2/v_1$. E o triângulo CHD é semelhante ao triângulo CFB (são ambos retângulos e têm um ângulo agudo comum). Portanto, podemos afirmar que, se a "inclinação" de CB relativamente à linha de água, medida por $\overline{CF}/\overline{CB}$, for menor ou igual a v_2/v_1, então o percurso ADB é mais demorado do que o percurso ACB. Um raciocínio análogo, agora aplicado a AEB e tendo em conta que o triângulo retângulo EIC é também semelhante a CFB, permite concluir que, se $\overline{CF}/\overline{CB}$ for maior ou igual a v_2/v_1, o percurso ACB é mais rápido do que AEB. Podemos então concluir que, se $\overline{CF}/\overline{CB}$ for exatamente v_2/v_1[1], então o percurso por C é mais rápido do que os que estão à direita ou à esquerda! Este caso particular, em que A está na linha de água fica, pois, resolvido. No caso de A estar acima da linha de água, poderíamos proceder de modo análogo, mas agora relacionando a "inclinação" de CB com a de AC. Vamos, porém, observar e ter em conta as imagens seguintes[2].

Na aplicação correspondente às duas imagens da figura 3, para uma dada escolha das velocidades de corrida e de natação, ao deslocar C pode ver o tempo que o nadador-salvador leva a chegar ao banhista, para cada uma das escolhas de C na linha de costa; e, portanto, consegue determinar aproximadamente a melhor posição para o ponto C, isto é, aquela que define o trajeto mais rápido.

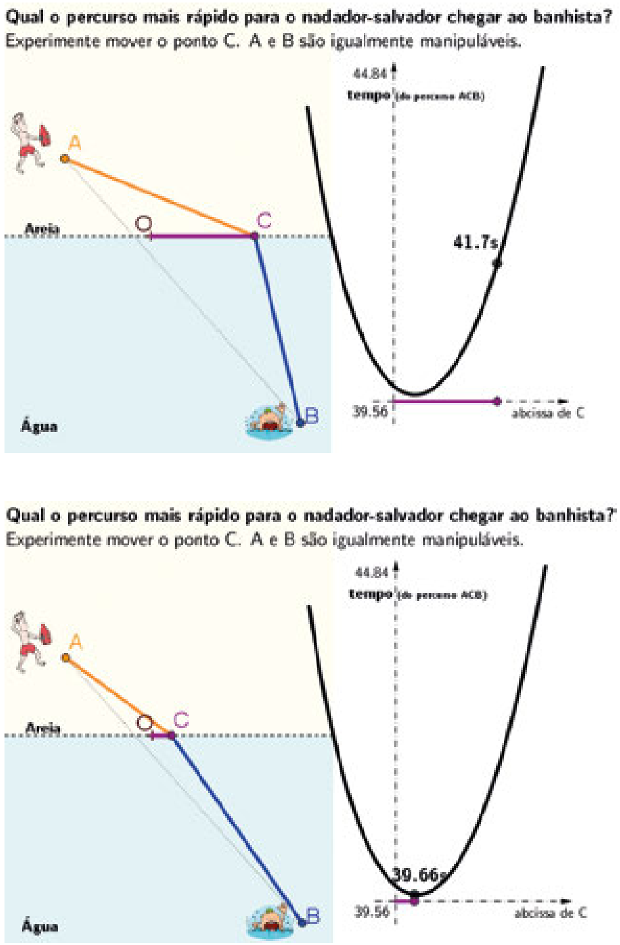


Figura 3.

Sejam D e E os pontos da linha de costa mais próximos, respetivamente, de A e de B. A razão entre as distâncias do ponto C, a D e a A, mede o grau de afastamento do percurso na areia, relativamente à perpendicular à linha de costa; e, analogamente para a razão entre as distâncias de C, a E e a B, no percurso em água. Na figura 4, estão ainda representadas: a vermelho, o quociente entre aquelas duas razões, variável com a posição do ponto C, e a verde, o quociente entre as velocidades de corrida e de natação, este independente da posição de C (e das de A e B).

Deslocando o ponto C, é possível observar que o percurso ótimo, correspondente ao mínimo de tempo (curva a preto) parece obter-se quando as razões das inclinações e das velocidades são iguais, o que se verifica se a abcissa de C for a do

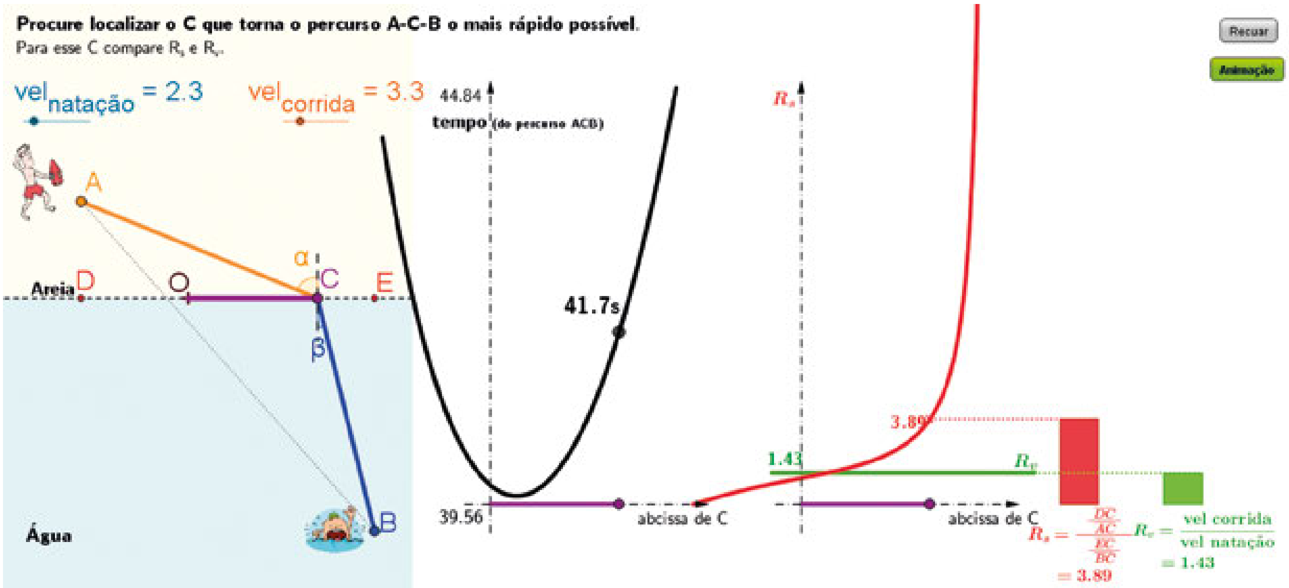


Figura 4

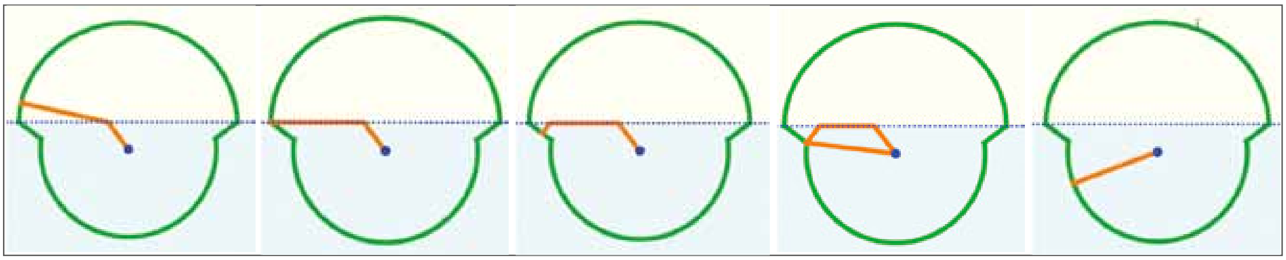


Figura 5

ponto de interseção dos gráficos a verde e a vermelho. Realmente, o melhor percurso é aquele em que há igualdade entre as duas razões[3].

Chamemos "circunferência temporal" de raio t, centrada no banhista, ao conjunto de todos os pontos de onde o nadador-salvador consegue atingir o banhista em exatamente o mesmo tempo t. Será que a forma da figura obtida[4] depende do "raio" t? Tratando esta questão num enquadramento um pouco diferente do que temos vindo a considerar (isto é, nadador-salvador em terra), agora consideraremos também a possibilidade de ele já estar na água.

Na figura 5, a "circunferência temporal" é constituída por um arco de circunferência (na água), dois segmentos de reta unindo os extremos desse arco à linha de costa e uma curva em terra. Na imagem do meio, o percurso mais rápido é formado por três segmentos de reta; um perpendicular ao segmento exterior, outro na linha de costa e o terceiro unindo o anterior à posição do banhista. Portanto, era errada a conjetura anterior, de que estando ambos na água, o melhor percurso era sempre o de um segmento retilíneo, como na imagem 5 da figura 5. Aliás, a solução encontrada é natural, pois se ambos estiverem perto da linha de terra, mas muito longe entre si, compensa ao nadador-salvador

[1] O que é equivalente a v_2/(inclinação de *CB*) ser igual a v_1. Note-se que esta condição só aparentemente é assimétrica relativamente a v_1 e v_2, porque v_1 também se pode escrever como v_1/(inclinação de *AC*), por, neste caso particular em que *A* está na linha de água, a inclinação de *AC* ser 1.

[2] Em [1] encontrará várias aplicações interativas, feitas com o Geogebra e com o Mathematica, das quais são extraídas as figuras que ilustram este texto.

[3] Um leitor conhecedor de funções trigonométricas e de uns rudimentos de cálculo diferencial poderá pensar numa demonstração curta desta propriedade. No portal do Atractor [1], poderá ver uma demonstração geométrica, exigindo menos conhecimentos matemáticos e que, no fundo, é uma extensão dos argumentos usados no caso particular anterior.

[4] Em [1] encontra uma aplicação interactiva (*CDF*) que lhe dá essa "circunferência" para diferentes valores de *t* e, para cada uma delas e cada um dos seus pontos, permite desenhar percursos ótimos "radiais" dele até ao banhista, usualmente um, excecionalmente dois.

nadar até terra, correr ao longo da costa e depois voltar a entrar na água em direção ao banhista. Finalmente, notemos que na posição correspondente à quarta imagem há dois percursos mínimos possíveis, partindo do mesmo ponto!

Vamos agora encarar um problema semelhante, mas que, contrariamente ao anterior, não é representável adequadamente num plano, exigindo uma representação no espaço. Imaginemos um lago, onde há peixes, nadando a diversas profundidades, e sobre o qual voam aves a diferentes altitudes. E imaginemos[5] que essas aves fazem voos picados, mergulhando na água para pescar os peixes. Qual

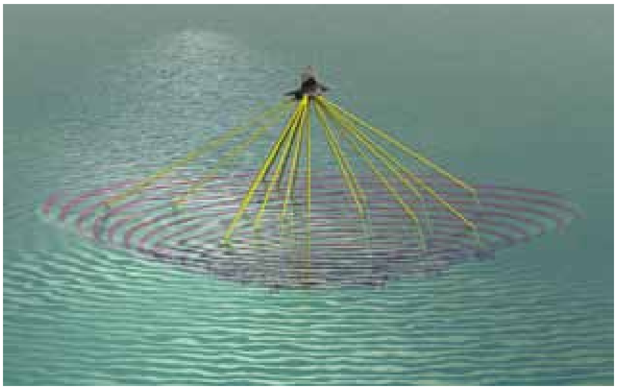


Figura 6

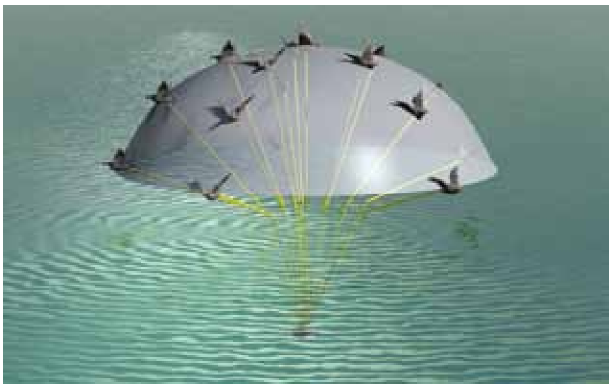


Figura 7

a melhor escolha possível de percurso para a ave? Se supusermos que a velocidade de voo (no ar) é constante[6] e superior à de mergulho (na água), também constante, temos um problema matemático muito semelhante ao anterior: para cada par de posições, da ave e do peixe, restringindo-nos ao plano vertical contendo essas posições, obtemos exatamente o problema anterior. Para uma certa posição da ave, a figura 6 representa diversos percursos para chegar a diferentes peixes, estando também representada uma superfície, que poderíamos designar por "temporalmente esférica", formada pelos pontos na água aos quais a ave chega num dado tempo (o mesmo para todos). De algum modo, permitiria à ave determinar quais os peixes que conseguiria alcançar em menos tempo. Analogamente, a superfície da figura 7 permitiria ao peixe saber quais as aves que mais o ameaçam, por poderem chegar em menos tempo.

Alguns leitores que nos acompanharam até aqui poderão interrogar-se sobre a relação do problema tratado com o subtítulo do artigo, que contém uma referência à luz. A relação é simples de enunciar: quando a luz percorre um meio diferente do vazio, a sua velocidade de propagação é diferente e depende do meio. E o percurso de um raio luminoso que parte de um ponto A e passa por outro ponto B tem uma forma tal que minimiza[7] o tempo de percurso (princípio de Fermat). Por exemplo, a velocidade de propagação da luz é, no ar, bastante superior à que tem lugar na água. Então, o raio luminoso tem uma alteração de direção na superfície dos dois meios, com ângulos satisfazendo a condição atrás deduzida. À relação entre as velocidades de propagação da luz, no ar e na água, chama-se índice de refração da água relativamente ao ar.

A figura 8 mostra três fotos, tiradas exatamente do mesmo ponto de vista, de uma caneca com uma moeda no fundo, quase totalmente não visível na primeira e que é progressivamente tornada visível quando a caneca é enchida com água[8].

Figura 8

Figura 9

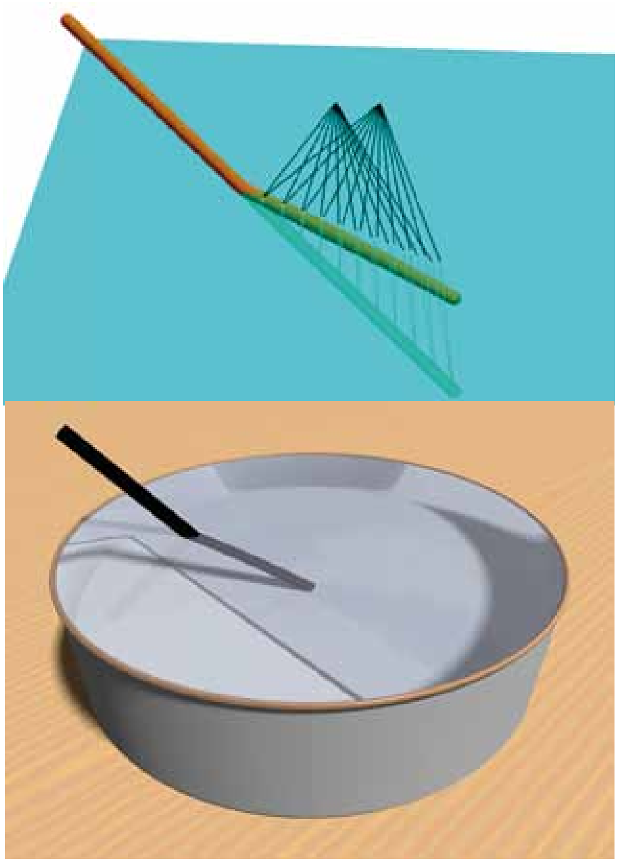


Figura 10

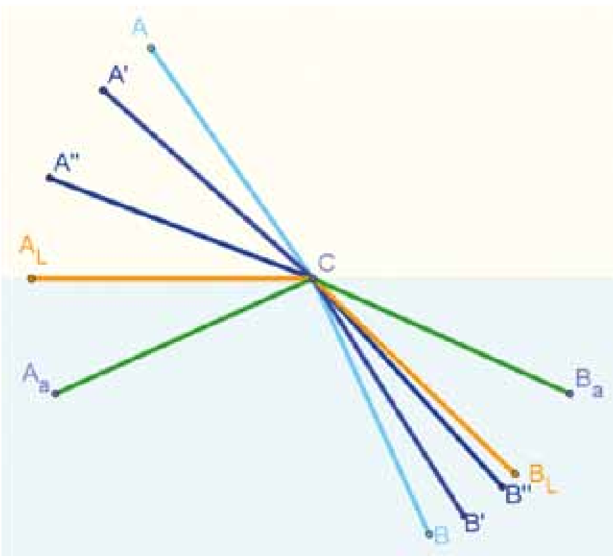


Figura 11

A explicação para o fenómeno ilustrado na figura 8 reside precisamente na mudança de direção que os raios luminosos partindo da moeda sofrem quando chegam à superfície da água.

E é uma explicação do mesmo tipo que está na base de outro fenómeno representado na foto da figura 9: a aparente quebra de uma haste cilíndrica perfeitamente direita, quando é mergulhada na água. O esquema representado na primeira imagem da figura 10 permite compreender a aparente quebra que se vê na segunda imagem e ainda verificar que a parte mergulhada não é vista como rigorosamente retilínea, como poderia parecer numa primeira observação[9].

Terminamos com a referência a um exemplo que põe em evidência um comportamento qualitativamente diferente. A figura 11 mostra (em diferentes tons de azul) três percursos passando por um mesmo ponto C situado na linha de separação dos dois meios. Cada um deles corresponde a duas situações possíveis, assim descritas nos casos de A e B: ver a partir de A o ponto B, aparentemente na direção AC, ou, para um observador mergulhado na água, ver a partir de B o ponto A, aparentemente na direção de BC. Quando A se aproxima da linha de separação dos dois meios, B aproxima-se de uma semirreta limite, fazendo um ângulo de desvio máximo, representado a laranja. O que acontecerá a um raio luminoso emitido de B_a numa direção com inclinação superior à dessa semirreta CB_L? Não pode atravessar a superfície de separação dos meios de maneira a satisfazer a condição que enunciámos! Na verdade, esse raio reflete-se segundo um raio CA_a, como indicado (a verde) na mesma figura 11. O raio refletido faz o mesmo ângulo com o meio de separação e é, portanto, também superior ao de desvio máximo. Assim, tal como

5 Este cenário não é fantasista, pelo contrário, é observável facilmente em certos contextos.

6 Por uma questão de simplicidade do modelo, não estamos a tomar em conta variações de velocidade dependentes da direção do voo, que deviam ser tomadas em conta atendendo à ação de gravidade, e estamos também a supor que o peixe não mudou de posição durante todo o voo-mergulho da ave e que não há vento no ar nem corrente na água.

7 Nos exemplos dados, o percurso total é realmente minimizado, mas o que se pode afirmar com generalidade é que o percurso seguido pela luz minimiza localmente o tempo gasto, isto é, minimiza-o relativamente a todos os percursos suficientemente próximos.

8 Ver filme do enchimento da caneca com água em [1].

9 Para mais detalhes e uma manipulação de uma aplicação interativa que permite modificar alguns parâmetros e observar os comportamentos resultantes dessas modificações, ver [1].

Figura 12

no caso anterior, o mesmo percurso pode representar um observador em A_a a ver um objeto em B_a, aparentemente na direção de A_aC, ou um observador em B_a, a ver um objeto em A_a, aparentemente na direção de B_aC. Mas há uma diferença fundamental relativamente à situação anterior: aqui, a imagem obtida tem a orientação trocada relativamente à do original.

Este fenómeno, dito de reflexão total, é posto em evidência nas imagens da figura 12. O recipiente representado na primeira imagem está cheio com água e a segunda imagem mostra a visão a partir de um observador mergulhado na água, olhando para o letreiro colado na parte lateral desse recipiente.

REFERÊNCIAS

[1] *http://www.atractor.pt/mat/luz1*.

Promotores:

34.as Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Queres ser campeão Olímpico?

Participa!

Inscrições até **20 de janeiro de 2016**

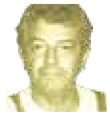
http://mopm.mat.uc.pt/MOPM

Categoria: **Mini-Olimpíadas** (3.° e 4.° anos do Ensino Básico)

Prova Única: **janeiro de 2016**

6.ª Edição Nacional das Olimpíadas de Matemática do 1.° Ciclo do Ensino Básico

CONTACTOS: **www.spm.pt** • **217 986 353** • **960 130 506** • **opm@spm.pt**



Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

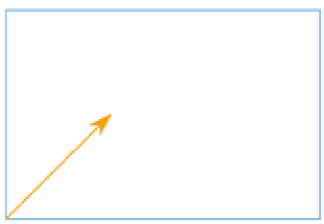
LUZ

Os espelhos podem surpreender-nos. Por *jogo de espelhos* entende-se muitas vezes um processo enganoso, em que o que parece nem sempre é. Também as recreações matemáticas contam com vários quebra-cabeças baseados em reflexões de raios luminosos. Hoje vamos apreciar dois tipos de sistemas de espelhos. Um raio somente chega para nos entreter algum tempo...

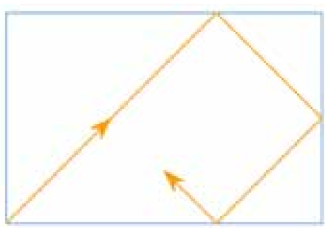
Imaginemos uma mesa de bilhar retangular, cujos lados, espelhados, medem m e n centímetros (m e n são números naturais).

Um raio parte do canto inferior esquerdo, fazendo 45º com a base. Quando atingir um lado, o raio é refletido segundo as leis habituais dos espelhos planos. Se atingir um canto, a aventura do raio luminoso termina.

Algumas questões surgem naturalmente: este raio atinge um canto? Se sim, qual e ao fim de quantas "tabelas"? De que forma as respostas a estas perguntas dependem de m e n?

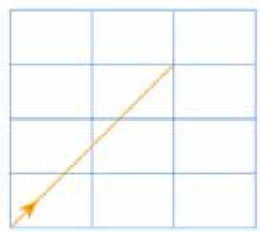


Podemos abordar esta situação marcando cuidadosamente o trajeto da luz.



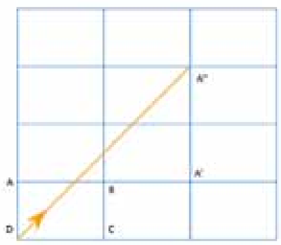
Mas cada escolha de m e n daria origem a uma figura diferente, o que não facilitaria a compreensão deste processo com generalidade.

Uma outra forma de modelar a questão consiste em refletir sucessivamente a mesa, em vez do raio de luz. Neste contexto, a viagem luminosa faz-se em linha reta. Por observação, procuramos o local em que essa linha passa pela reflexão de um dos cantos.

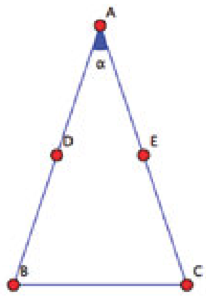


Na realidade, a figura contém mais reflexões dos espelhos originais do que as que são necessárias. Basta, por exemplo, efetuar um reflexão horizontal, seguida de uma vertical e de outra horizontal para conter o trajeto do raio de luz até um canto. A leitura da figura mostra-nos que foi o canto superior esquerdo o atingido.

Sugerimos ao leitor que experimente este método para alguns casos particulares, como $m = 2$, $n = 3$ e $m = 3$, $n = 5$ antes de formular conjeturas gerais. Usar papel quadriculado ajuda...

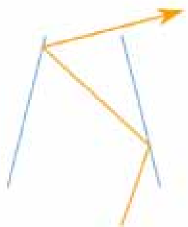


Vejamos agora uma disposição dos espelhos diferente. Consideremos um triângulo isósceles de base $BC = 2$ em que o ângulo oposto à base mede α graus.

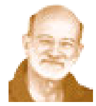


Marquemos os pontos médios dos lados D e E e consideremos somente os espelhos BD e CE.

Um raio que entre por onde estava a base pode sofrer várias reflexões e sair pela parte superior.



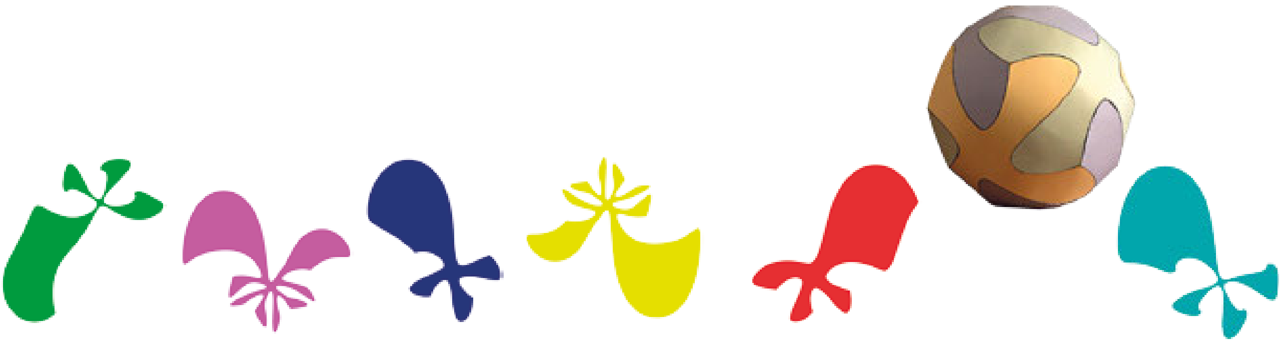
A questão que coloco aos leitores é a seguinte: qual é o máximo de reflexões que pode sofrer um raio que entre pela abertura inferior, entre B e C, e acabe por sair pela parte superior, entre D e E, se no triângulo original tivermos $\alpha = 1$?



Eduardo Marques de Sá
Universidade de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

CARTOGRAFANDO A *BRAZUCA*

Uma bola de futebol que tem muito de cubo sem ser cubo, o mesmo grafo de arestas e as mesmas simetrias rotacionais, que é mosaico esférico dum só ladrilho seis vezes repetido, cujas peças se entrelaçam como um *puzzle* escheriano... Perante tal coisa um matemático, mesmo em férias, não fica indiferente.



O Mundial de 2014 correu mal às nossas cores, e pior ainda às do país anfitrião. Mas a bola Brazuca era uma maravilha. A publicidade superlativa do fabricante vendedor falava do nascimento dum ícone (do qual, passada a febre da compra, pouco mais se falou), da sinuosidade do desenho inspirado nos meandros do Amazonas, etc. Depois de a coisa dar o que deu, falou-se de conspiração, que o esférico fora concebido por alemães e fabricado com tecnologia alemã, que eles sabiam bem os meandros da bola, que ela de Amazonas tinha pouco, etc.

Do lado menos cândido das coisas, a mão-de-obra foi paquistanesa, não infantil desta vez, com salários que nos envergonham. Este ano, os painéis da Brazuca migraram para a Taça das Nações Africanas, pintados de outras cores; FIFA e C.ia pouparam nas ideias, nas máquinas e não se sabe se no preço da mão-de-obra recrutada na chácara de Obiang. Talvez os meandros destes negócios venham à superfície na sequência das investigações em curso...

Todos se foram queixando dela: os cabeceadores porque era rija demais, os guarda-redes porque o desenho sinuoso não deixava ler a rotação que trazia; os futebolistas de blogue queixaram-se do óbvio, que os donos do jogo preferiam badalar uma 'nova colecção' a melhorar o que existia. A novidade vende mas a qualidade nem por isso, e os donos do negócio sabem disso.

A FAMÍLIA BRAZUCA

A Brazuca de 2014 tem vários atributos de sedução matemática. De entre as bolas VIP ela é a única quiral, isto é, 'distinta' da sua imagem espelhada. Os pontos triplos de junção de costuras são os oito vértices dum cubo e o seu grupo de simetrias é o grupo de rotações que deixa esse cubo invariante. Por outro lado, quanto a painéis e costuras ela é um mosaico esférico de um só ladrilho; são seis ladrilhos que se entrelaçam evocando desenhos famosos de M. C. Escher e objectos de inspiração escheriana.[1] Mas o facto mais notável é a Brazuca ser 'planificável', no mesmo sentido em que a Telstar o é: ambas são fabricadas com painéis planos cosidos ou grudados uns aos outros, adquirin-

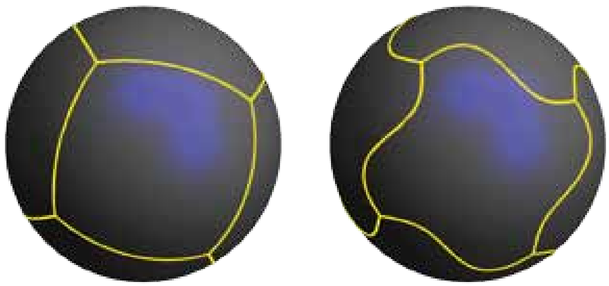


Figura 1. Deformação dum cubo esférico.

do forma esférica por *suave* deformação dos painéis. Só que a Telstar tem 32 painéis e a Brazuca apenas seis!

Ao insuflar-se um cubo para obter uma esfera, o resultado é o que a figura 1 ilustra, à esquerda, com enorme distensão das partes centrais das faces e retesamento das costuras. É um *cubo esférico*, com arestas que são arcos de círculos máximos. Fixados os vértices do cubo, substitua-se, como na figura 1, cada aresta por uma curva esférica simples, a que chamamos *costura*. Vamos supor que nenhuma destas costuras se cruza propriamente com outra; nessas condições, a configuração obtida tem seis faces que são regiões esféricas delimitadas por quatro costuras cada uma. Suporemos sempre o seguinte:

1. As costuras são *congruentes* entre si, significando isto que cada uma pode ocupar o lugar doutra qualquer mediante uma rotação da bola;[2]
2. Cada costura é centrossimétrica, isto é, a rotação da bola que troca as extremidades da costura transforma a costura em si própria.

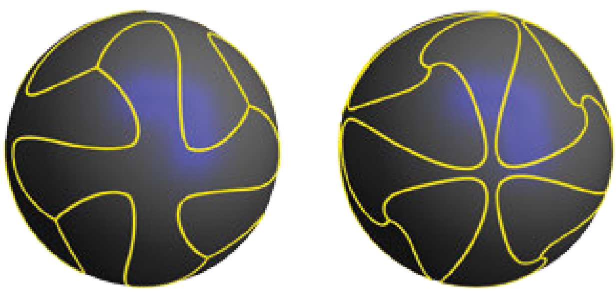


Figura 2. Duas brazucas.

A uma configuração nestas condições chamamos *brazuca*. A de 2014 é um exemplo de brazuca. Na figura 2 damos mais dois exemplos dos muitos que poderíamos dar, pois existem tantas brazucas quantos números reais.[3] A do lado esquerdo será modelo para o que segue e, pela parecença com a 'legítima', dá-se-lhe o mesmo nome próprio. A ausência de critério de ordenação das brazucas sugere a seguinte paráfrase da conjectura de J. H. Conway a propósito da curva da bola de ténis: duas definições da melhor brazuca dão resultados diferentes, excepto quando são trivialmente iguais. (Traduzido de [4]. *"Traduttore..."*).

Problema. *Determinar uma figura plana destinada a produzir seis painéis flexíveis iguais que, adequadamente colados como se monta um cubo, produzam um sólido de boa esfericidade.*

CARTAS DE MERCATOR

As projecções planas de regiões extensas da superfície terrestre criadas por cartógrafos, desde há séculos, oferecem uma solução promissora. De entre as muitas projecções disponíveis, a escolha recaiu sobre a que o geógrafo e cartógrafo Gerardus Mercator (1512-1594) criou em 1569 e que continua a ser uma das mais populares no desenho de mapas. Em primeiro lugar, fixa-se um referencial na bola a cartografar que se supõe ter raio 1: escolhem-se pontos antípodas, N e S, que farão os papéis de pólos norte e sul e que, em consequência, determinam o equador de serviço. A bola é envolvida por uma folha cilíndrica que lhe é tangente ao longo do equador seleccionado. Cada ponto P da superfície esférica é transformado num ponto da geratriz do cilindro determinada pelo semi-meridiano de P, como

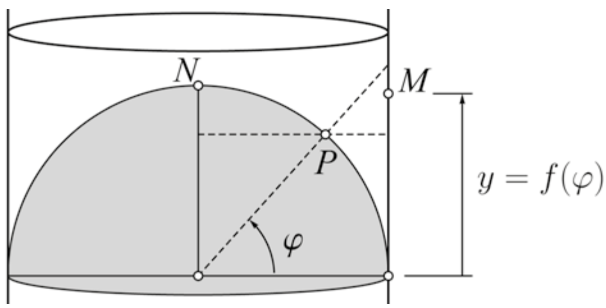


Figura3. Projecção cilíndrica.

[1] A FIFA não se lembrou desta!

[2] Aqui, as rotações da bola são as que lhe fixam o centro.

[3] Para quem aceite o axioma da escolha e a hipótese do contínuo...

na figura 3; a cota y a que se coloca a imagem de P é, nas chamadas *projecções cilíndricas*, uma função de apenas φ, a latitude de P, à escolha do cartógrafo. A opção de Mercator foi o ponto M à cota

$$y = f(\varphi) = \ln(\varphi + \sec\varphi).$$

Recorde-se que os logaritmos só viriam a ser inventados em 1614, por John Napier. O método de construção de Mercator seria provavelmente de tipo geométrico incremental como bem mostrara Pedro Nunes. A projecção de Mercator destina-se a produzir mapas nos quais as linhas de rumo são rectilíneas. Estas linhas, mais tarde chamadas *loxodrómicas*, são as trajectórias sobre o globo seguidas por um navio que navegasse a rumo constante (assim fazendo um ângulo fixo com os meridianos que fosse atravessando); foi o nosso grande matemático e cosmógrafo Pedro Nunes que provou, de 1537 a 1566, serem as linhas de rumo espirais esféricas que – no caso de o rumo não ser Norte, Sul, Este ou Oeste – se aproximam mais e mais dum pólo, espiralando em seu redor sem nunca lhe tocar. A obra maior de Nunes sobre as linhas de rumo está em [5], existindo nesta *Gazeta* uma excelente resenha do assunto, [6].

Figura 4.

Um dos traços mais marcantes da projecção de Mercator é a sua *conformidade*: se duas linhas da bola se cruzam num ponto, que não seja pólo, segundo certo ângulo, as suas imagens na carta cilíndrica cruzam-se segundo esse mesmo ângulo. Imagine o leitor uma Brazuca desenhada sobre o nosso Globo envolto num cilindro, como na figura ao lado. As costuras da Brazuca e as do planeta são projectadas à Mercator, constituindo um sistema de linhas muito sinuosas que delimitam sobre o cilindro as projecções das faces; na figura, as deformações das faces da bola são óbvias, não sendo tão óbvias as das linhas de costa terrestres por estarmos habituado a elas.

Querendo nós utilizar o sistema coordenado tradicional, será melhor olhar apenas para uma face e desenhá-la sobre o globo na posição particular que a figura 5 ilustra. Mais explicitamente, o centro da face fica sobre o equador e os braços Leste e Oeste alinham-se com o equador, ainda dentro das zonas tropicais onde o método de Mercator produz deformação pouco acentuada. Para nos livrarmos dos

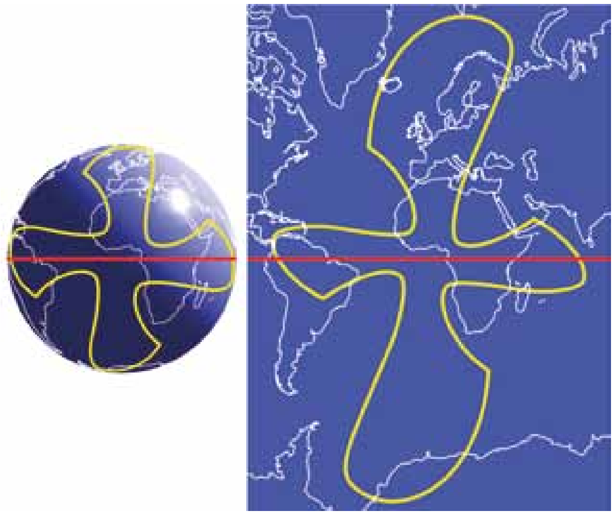


Figura 5. Uma face em posição alinhada.

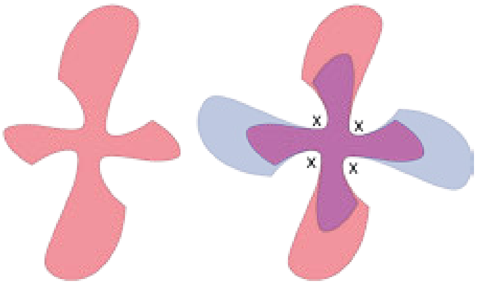


Figura 6. A cruz violeta.

braços muito deformados Norte e Sul, executamos o artifício ilustrado na figura 6: a projecção de Mercator da figura anterior, a cruz rosa de quatro braços, é intersectada com a cópia azul de si mesma rodada de 90º em torno do centro. Obtemos uma cruz violeta, que é a resposta que este *Canto Délfico* dá ao problema proposto. É meramente fortuito que o resultado final seja dado pela intersecção; como veremos, a questão fundamental é a definição de quatro pontos **x**, ditos 'de concatenação' dos braços.

UMA BRAZUCA OCTÓPODE

O caso duma brazuca gerada por uma curva de maior sinuosidade revela as dificuldades e limitações do método usado. A figura 7 mostra uma face duma nova brazuca; dos oito braços, escolhemos dois adjacentes. Para reduzir deformações, cartografa-se cada braço a respeito do melhor equador possível de entre os que passam pelo centro da face.[4] As duas projecções da octópode são as que se mostram na figura 7, nas quais os braços A e B estão em posições de baixa deformação. As duas projecções são

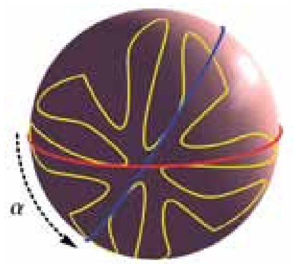


Figura 7. Dois equadores.

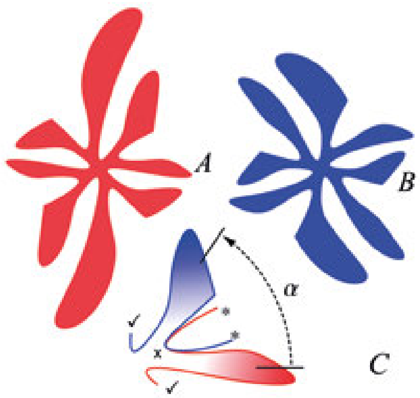


Figura 8. Sobreposição de cartas.

Figura 9. *Octopus Fuchsia.*

de seguida sobrepostas, de modo concêntrico, sofrendo a figura azul uma rotação de α, o ângulo diedro dos dois planos equatoriais utilizados; a preservação de ângulos na projecção é aqui decisiva. A terceira imagem da figura 8 mostra os contornos de A e B (este rodado de α) prontos a serem *truncados* e *concatenados*. As duas curvas intersectam-se num ponto **x** da axila; as 'pontas' marcadas com $*$ são eliminadas até **x**, que servirá de ponto de concatenação dos dois braços. O que se obtém é uma curva contínua, C. Depois sobrepõe-se C a outra cópia de C rodada de 90º em torno do centro das projecções; as pontas marcadas com ✔ serão devidamente truncadas para concatenação das duas cópias de C, etc. De tudo isto resultou a figura 9, outra resposta ao problema proposto.

'A MELHOR BRAZUCA' NÃO EXISTE!

Na ausência de critério, o matemático arranja um. Para cada região $\mathcal{R}$ duma esfera há um *equador óptimo* e um $s \geq 0$, a *semi-largura* de $\mathcal{R}$, tais que $\mathcal{R}$ está contida na região equatorial entre os paralelos de latitudes $-s$ e s, com s o menor possível. No referencial dum equador óptimo, projecte-se $\mathcal{R}$ sobre o cilindro, à Mercator, como na figura 10. Define-se $\Delta(\mathcal{R})$, o *coeficiente de deformação* de $\mathcal{R}$, como o supremo das distâncias dos pontos P de$\mathcal{R}$ às suas respectivas imagens M, em percentagem sobre o raio da esfera. é claro que

$$\Delta(\mathcal{R}) = \sqrt{(1 - \cos s)^2 + (f(s) - \operatorname{sen} s)^2},$$

função contínua de s que se anula se e só se $s = 0$, ou seja, $\mathcal{R}$ é parte dum círculo máximo. Aplicámos o *critério-*Δ às faces do cubo e da Telstar esféricos e aos braços das duas brazucas. O *ranking* é este, com indicação dos coeficientes de deformação: Octópode (3.4%), Brazuca (5%), Telstar (7.1%), Cubo esférico (44.3%).

Contas simples mostram que uma bola de praia com n gomos tem coeficiente de deformação evanescente com $n \to \infty$; assim, pelo critério-Δ, não existe uma bola de praia melhor do que todas as outras. Não é difícil imaginar que o mesmo acontece na família Brazuca. Um exemplo é o desta face dum membro da família, em projecção Mercator, com factor de deformação $\approx 0.2\%$. Descobrindo a ideia por detrás da medusa negra, o leitor poderá obter outras com mais braços e mais delgados. Porém, a demonstração formal do título desta secção dará muito trabalho e não caberia neste *Canto*.

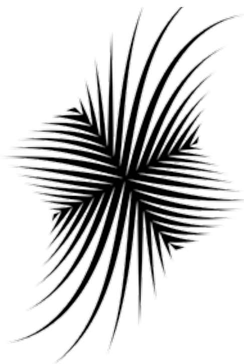


Figura 10.

O CRITÉRIO DA PRÁTICA

Mesmo no caso de se escolherem brazucas de costuras suaves, o processo de concatenação acima descrito gera pontos angulosos na curva resultante, os pontos **x**. Para sossego matemático, as curvas foram suavizadas nesses pontos (para o corte e a colagem não valeu a pena, dado o papel suavizador da tesoura). Pusemos em prática os testes óbvios: cortar seis cópias da *cruz violeta* e seis do

[4] A definição de "o melhor possível" fica a cargo do leitor. Para facilitar a exposição, não tomei o "equador óptimo" de cada braço, definido mais abaixo.

octopus e construir modelos da esfera baseados nessas duas brazucas. O resultado parece satisfatório. A brazuca tetrápode, construída em cartolina de três cores, tem foto no início deste artigo. Saiu algo esquinuda como era de esperar; em particular, no centro de cada face há um quadrado que se mantém plano depois da colagem. Os técnicos da Brazuca 2014 resolveram este e outros problemas usando poliuretano em vez de cartolina e, num golpe final, a Brazuca é literalmente passada a ferro, como uma francesinha prensada entre dois moldes metálicos semi-esféricos a alta temperatura.

Do *Octopus Fuchsia* fizemos seis cópias em material um pouco mais flexível do que a cartolina, mas o corte e a colagem topo-a-topo foram tão complicados que a octópode ficou incompleta. Deixou-se fotografar ao lado duma Brazuca, talvez sonhando ser a estrela portuga dum futuro Mundial.

Agradeço à Isabel parte substancial da construção dos modelos e supervisão de cores e formas.

NOTAS

O problema da "planificação" de superfícies e construção de modelos é abordado em [1], com pontos e objectivos em comum com este, mas metodologias muito diferentes.

Nos artigos [4] e [8] discute-se a matemática da curva da bola de ténis.

Sobre o *Canto Délfico* anterior: acabo de encontrar uma página digital, [2], anunciando a "bola mais redonda do mundo", também referida em [7]. O artigo [3] analisa numericamente o *stress* numa bola insuflada, em quatro casos conhecidos.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. Delp e B. Thurston, "Playing with Surfaces: Spheres, Monkey Pants, and Zippergons", in *Bridges 2011: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, Coimbra 2011.

[2] *Hyperball*, *http://www.hyperballcompany.nl*, vista em Setembro 2015.

[3] A. Lengyel e K. Hincz, "Stress analysis of inflated polyhedra for the 32-panel soccer ball", in: B. Kröplin, E. Oñate (Eds), *VI Internat. Conf. Textile Composites and Inflatable Structures*, Structural Membranes, 2013, pp. 530-537.

[4] P. Lynch, "The high-power hypar", in S. Parc (ed.), *50 Visions of Mathematics*, Oxford Univ. Press, 2014, pp. 110-113.

[5] Pedro Nunes, *Obras, Vol. IV, De arte atque ratione navigandi*, Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008. (Com tradução em português.)

[6] J. Queiró, "Pedro Nunes e as linhas de rumo", *Gazeta de Matemática*, 143(2002), pp. 42-47.

[7] T. Tarnai, "Hidden Geometrical Treasures", *Math. Intelligencer,* 35(2013), pp. 76-80.

[8] R. B. Thompson, "Designing a baseball cover", *The College Math Journal*, 29-1 (1998), pp. 48-61.

O autor escreve de acordo com a grafia antiga.

FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

QUAL NOME PARA O BEBÉ?

Se o leitor teve um filho em 2014, o mais provável é que tenha escolhido algum dos seguintes nomes: João, Rodrigo, Francisco, Martim ou Santiago. Para as meninas, as escolhas recaíram em Maria, Matilde, Beatriz, Leonor e Mariana. Se é evidente que uma escolha nunca se faz independentemente do meio em que se vive, o que será que o conjunto de escolhas pode mostrar sobre o nosso ambiente? Uma nova investigação mostra como a cultura americana evoluiu desde o princípio do século passado até ao momento atual, estudando apenas a evolução dos nomes dados aos recém-nascidos.

Por vezes, referimo-nos a duas diferentes culturas como "irmãs". Talvez porque partilhem traços – a língua ou a religião, por exemplo –, ou tenham um passado comum recente, ou ainda por terem uma grande interdependência económica. Mas seria possível quantificar, ou seja, determinar o quanto duas culturas são próximas ou distantes entre si?

Neste nível de generalidade, o problema é muito difícil. Mas seguindo os passos tradicionais do raciocínio analítico, devemos procurar algumas características que sejam fáceis de estudar – quantificáveis, com bases de dados completas e facilmente acessíveis. Podemos assim estudar a correlação de um determinado traço cultural tanto no espaço como no tempo.

Recentemente, uma equipa de físicos italianos resolveu usar as técnicas da estatística para saber como variam – no tempo e no espaço – os nomes que os pais dão aos seus filhos. Este é um traço cultural simples – não depende de interpretação do investigador, os registos são confiáveis e permitem uma clara quantificação. No entanto, a equipa resolveu debruçar-se sobre as bases de dados norte-americanas, provavelmente devido ao seu fácil acesso, mostrando a evolução temporal da correlação entre os muitos nomes dados aos recém-nascidos nos seus diversos Estados.

Há regras explícitas e implícitas nos nomes que nós escolhemos para os filhos. Nalguns países, estes devem cingir-se a uma lista; noutros, os progenitores dispõem de ampla liberdade. De qualquer forma, sempre há certas "modas", nomes que, por uma razão ou outra, se tornam comuns e depois desaparecem. As "modas" são tão importantes que são facilmente percetíveis quando estudamos quantitativamente a evolução dos nomes dados em longos períodos. Veja a figura 1. Mas não é o processo de escolha o objeto de estudo do artigo, mas sim como é que o conjunto de todas as escolhas feitas por uma população revela características do ambiente maior em que este grupo está inserido – é a isto que chamaremos um traço cultural.

Considerando duas diferentes regiões, a correlação entre as escolhas dos nomes indica o quanto estes dois Estados são culturalmente correlacionados. Mais especificamente, entre 1915 e 2014, 19.492 nomes femininos apareceram nos registos da Segurança Social, o que significa que em, pelo menos, um ano foram registadas, pelo menos, cinco crianças em algum dos 50 Estados ou no

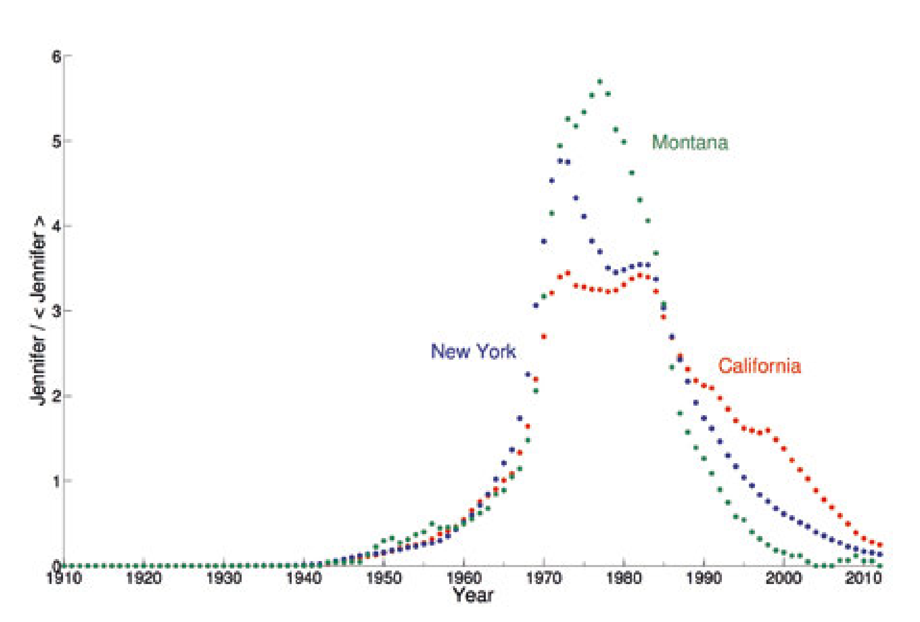


Figura 1. Nomes também têm "modas". Ascenção e queda do uso do nome *Jennifer* em três distintos Estados norte-americanos. O eixo *y* indica a fração de uso do referido nome em cada Estado de referência. **Figura (assim como a figura 2) gentilmente cedida por Giorgio Parisi (Universidade Sapienza, Itália).**

Distrito de Columbia. Assim, define-se $f_i(n,t)$, a fração de bebés com nome n no Estado i no ano t, e assim pode definir-se a matriz **C**, onde C_{ij} mede a correlação entre os diversos nomes nos estados i e j no ano t. Explicitamente,

$$C_{ij} = \frac{\sum_{n=1}^{19492} f_i(n,t) f_j(n,t)}{\sqrt{\sum_{n=1}^{19492} f_i(n,t)^2}\sqrt{\sum_{n=2}^{19492} f_i(n,t)^2}} .$$

É esta matriz que permite calcular a correlação entre dois Estados: obtém-se o vetor próprio associado ao maior valor próprio da matriz, o chamado "componente principal". Grosso modo, este indica uma forma unidimensional de extrair o máximo de informações de uma matriz bidimensional – a aproximaçao gerada é grosseira, sendo tanto melhor quanto maior for a diferença entre os dois primeiros valores próprios. É parte de um instrumento clássico de análise de dados, mas não entraremos em detalhes.

Usando as diversas entradas do referido vetor próprio, dito *dominante*, atribuímos aos diversos Estados norte-americanos um único número. Podemos ver quais são os mais próximos e os mais distantes a partir das diferenças entre os valores calculados. Para facilitar a interpretação, os autores do trabalho [1] usaram uma escala de cores que permite ver não apenas a similiaridade cultural entre os diferentes Estados, mas como estes se agrupam naturalmente em macrorregiões. Ver figura 2.

Sobressai nesta análise uma grande mudança cultural dentro dos Estados Unidos no século XX, que já havia sido notada noutras instâncias. A tradicional divisão norte-sul, que marcou tanto a ex-colónia britânica, desaparece em meados do século passado, notando-se uma oposição mais acentuada entre Estados costeiros e centrais. Atualmente é mais fácil encontrar semelhanças entre os distantes Estados de Nova Iorque e Califórnia, cada um numa costa, do que entre estes e Montana, apesar de este último ser mais próximo de ambos do que os dois entre si. Já o Texas deixa paulatinamente de ser um Estado tipicamente sulista para se juntar aos da costa oeste. Veja a tabela 1 para os dados mais recentes. A formulação completa dos mesmos pode facilmente ser encontrada no *site* da Segurança Social norte-americana (*http://www.ssa.gov/oact/babynames/top5names.html*).

Muitos outros dados podem ser usados para corroborar esta mudança de clivagem: de norte-sul para dentro-fora. Veja, por exemplo, na figura 3, a comparação dos resultados eleitorais de 1916 com os de 2012 – não é tão marcante, mas o movimento registado é o mesmo.

São mudanças profundas, notáveis e detetadas com precisão quando usamos métodos quantitativos. Certamente outros estudos virão corroborar a mudança de *topologia*: de norte-sul para dentro-fora.

REFERÊNCIA

[1] Paolo Barucca, Jacopo Rocchi, Enzo Marinari, Giorgio Parisi and Federico Ricci-Tersenghi. "Cross-correlations of American baby names." *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*

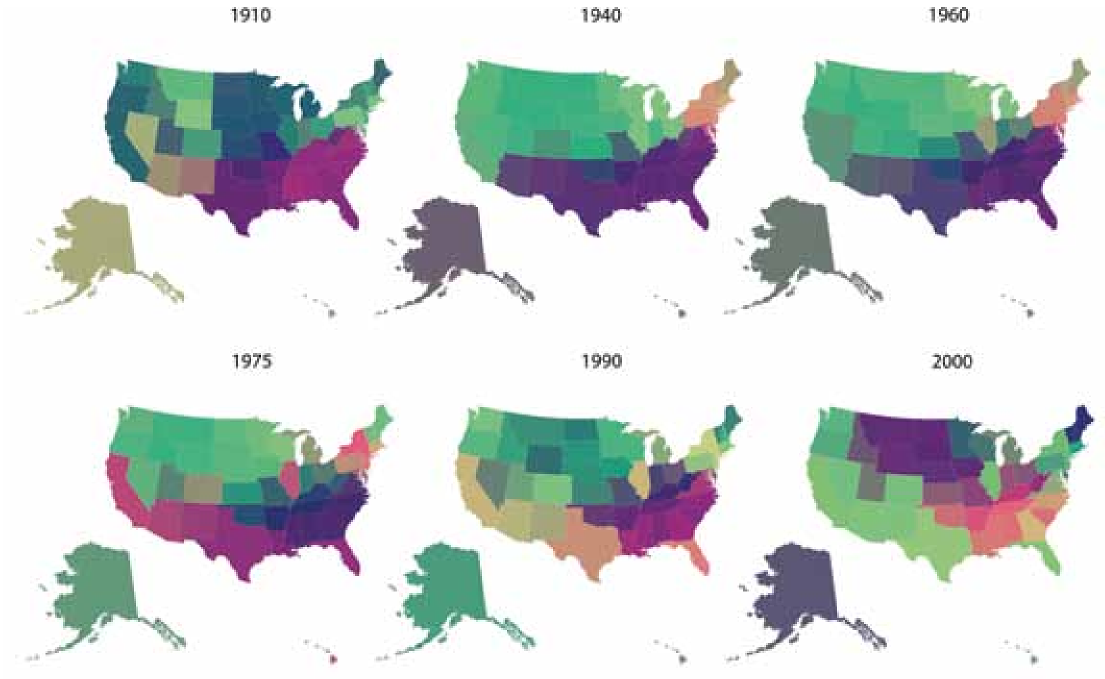


Figura 2. Estudo da correlação da escolha de nomes em cada Estado. Cores semelhantes indicam escolhas semelhantes para os recém-nascidos do sexo feminino. O estudo com nomes de meninos produziu resultados semelhantes, mas, para evitar repetições, não foi publicado.

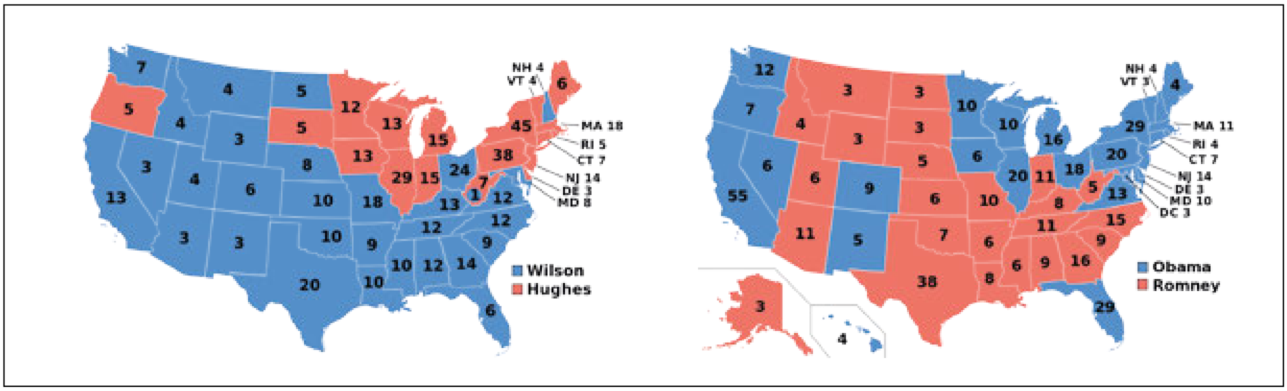


Figura 3. Divisão de votos nos Estados norte-americanos nas eleições de 1916 (esquerda), disputada entre os candidatos Woodrow Wilson (democrata) e Charles E. Hughes (republicano), e em 2012 (direita), quando Barack Obama (D) e Mitt Romney (R) disputaram os votos dos eleitores. Os números indicam a quantidade de votos dos colégios eleitorais e são irrelevantes para a presente discussão. **Fonte: Wikimedia Commons.**

Ordem	NY♂	MT♂	CA♂	NY♀	MT♀	CA♀
1	Jacob	William	Noah	Sophia	Emma	Sophia
2	Liam	Benjamin & Mason	Jacob	Olivia	Harper	Isabella
3	Ethan	...	Ethan	Emma	Sophia	Emma
4	Michael	Liam	Daniel	Isabella	Ava	Mia
5	Noah	Noah & Wyatt	Alexan-der	Mia	Emily & Isabella	Olivia

Tabela 1. Lista ordenada dos cinco nomes mais comuns dados a bebés nascidos em 2014 para meninos (♂) e meninas (♀) nos Estados norte-americanos de Nova Iorque (NY), Montana (MT) e Califórnia (CA). Compare com os nomes mais comuns de 1915 em todos os EUA: John, William, James, Robert e Joseph para os meninos e Mary, Helen, Dorothy, Margaret e Ruth para as meninas. Os empates estão marcados com '&'. Fonte: Wikipedia e sítio da Segurança Social norte-americana.

DIVISÃO EUCLIDIANA, CALENDÁRIOS, ANOS BISSEXTOS... E SEXTA-FEIRA, DIA 13

Paulo Sérgio Argolo
Sociedade Brasileira de Matemática
pauloargolo@bol.com.br

1. ALGUMAS PALAVRINHAS INICIAIS

Este artigo pretende responder às seguintes perguntas sobre o tema calendário:

1. Como reconhecer se um dado ano é bissexto ou não?
2. Porque é que os anos bissextos são assim chamados?
3. Como determinar o dia da semana em que caiu ou cairá determinada data?
4. É verdade que os calendários se repetem de 28 em 28 anos?
5. A sexta-feira, dia 13, ligada a tantas superstições, ocorre todos os anos? Quantas vezes?

Todas as respostas dadas se apoiam basicamente na conhecida divisão euclidiana e no conceito de múltiplo, sempre no universo $N = \{0, 1, 2, 3...\}$ dos números naturais.

Entretanto, usamos ainda um critério de divisibilidade por 4: um número natural, constituído por, pelo menos, dois algarismos, só é múltiplo de 4 quando os seus dois algarismos finais formam um múltiplo de 4.

Recorremos, num dado momento (e demonstramos), o seguinte teorema: "Dados n números naturais consecutivos, um deles, e somente um, é múltiplo de n."

Sem esquecer também que falar em anos bissextos conduz, inevitavelmente, a falar em progressões aritméticas, ainda que de forma bem elementar.

Convém lembrar que a divisão euclidiana de um número natural a por outro natural $b \neq 0$ consiste em obter dois outros naturais q e r, com $0 \leq r < b$, de modo a que se tenha $a = bq + r$.

Os calendários e a sua mais generosa companheira: a matemática. Uma parceria que vence o tempo.

Os números q e r são, respetivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de a por b.

O teorema que garante a existência (e a unicidade) dos números q e r é chamado geralmente teorema do algoritmo da divisão euclidiana e a sua demonstração figura em praticamente todos os textos introdutórios à teoria dos números.

Quando $r = 0$, o número a é um múltiplo do número b, enquanto b é um divisor de a.

Como o artigo lida frequentemente com os chamados anos bissextos, optamos por abordar esse assunto imediatamente na secção abaixo.

2. RECONHECIMENTO DOS ANOS BISSEXTOS E ORIGEM DESSA DESIGNAÇÃO

O nosso atual calendário (o gregoriano) surgiu mediante a bula pontifícia *Inter gravissimas*, promulgada pelo Papa Gregório XIII (1502 – 1585) em 24 de fevereiro de 1582, com a finalidade de corrigir o calendário que até então vigorava em todo o mundo cristão (o juliano).

Como o erro comprovado era de dez dias de atraso em relação ao Sol, tornava-se necessário que todos os países cristãos fizessem, simultaneamente, a devida atualização e, assim, foi escolhida a quinta-feira, 4 de outubro de 1582, para o novo calendário entrar em vigor. Desse modo, o dia seguinte, sexta-feira, já não seria o 5, mas o 15. De facto, isso foi feito na maioria dos países cristãos.

O novo calendário sofreria, entretanto, fortes resistências em muitas partes do mundo, especialmente nos países protestantes, que preferiam, segundo o ilustre astrónomo alemão Johannes Kepler (1571 – 1630), "estar em desacordo com o Sol a estar de acordo com o Papa". Em Inglaterra, por exemplo, o povo revoltou-se e encheu as ruas, gritando: "Não admitimos que o Papa nos roube 10 dias! Queremos os nossos 10 dias!"

Assim, o novo calendário foi implantado nas terras britânicas com quase dois séculos de atraso: em 1752.

Outros países adotaram a reforma do Papa ainda mais tardiamente. A Rússia, por exemplo, só a adotou em 1918. A Grécia, somente em 1924.

O calendário gregoriano apresenta grande precisão: somente após 3333 anos de uso é que será preciso eliminar um dia para corrigir o avanço do calendário sobre o Sol.

Passemos agora aos anos bissextos.

Podemos dizer, caro leitor, que os anos bissextos, de acordo com o calendário gregoriano, são os múltiplos de 4 (maiores do que 1582), mas não de 100, e os múltiplos de 400. Noutras palavras, anos bissextos são todos os múltiplos de 4 maiores do que 1582, exceto aqueles que são múltiplos de 100, mas não de 400. Estes, designaremo-los por anos pseudobissextos .

Os anos bissextos, como sabemos, ocorrem, geralmente, de quatro em quatro anos e têm mais um dia do que os anos comuns: é o dia 29 de fevereiro. Isto é, os anos comuns têm 365 dias, enquanto os anos bissextos têm 366 dias. Os anos pseudobissextos, como vimos acima, são anos comuns.

Uma regra simples para o reconhecimento dos anos bissextos é a seguinte:

- Ano que não seja múltiplo de 100

Só é bissexto quando é múltiplo de 4, ou seja, quando os seus dois últimos algarismos formam um múltiplo de 4.
Assim, por exemplo, 1740 foi um ano bissexto, pois 40 é múltiplo de 4; enquanto 2018 não será bissexto, pois 18 não é múltiplo de 4.

- Ano múltiplo de 100

Só é bissexto quando for múltiplo de 400.
Assim, 1600 e 2000 foram anos bissextos, mas 1700 e 1900 não.

Agora uma simples perguntinha: porque é que os anos bissextos são assim chamados?
Vejamos como explicar.

O imperador romano Júlio César (100 – 44 a.C.) instituiu um novo calendário (o juliano) no ano 45 a.C., introduzindo um dia extra no mês de fevereiro, entre os dias 24 e 25.

Esse dia extra não recebia nenhum número. Nessa época, fevereiro tinha, normalmente, 29 dias. Os romanos, que costumavam contar retroativamente os dias finais do mês, partindo do dia inicial do mês seguinte, procediam assim:

1.° de março (primeiro), 29 de fevereiro (segundo), 28 (terceiro), 27 (quarto), 26 (quinto), 25 (sexto), dia extra (segundo sexto), 24 (sétimo).

O dia extra era chamado, em latim, *bis sextus dies ante calendas Martias* (segundo sexto dia antes das calendas de março). *Kalendae* (calendas) era o nome que os romanos davam ao dia primeiro de todos os meses.

Bem... da expressão latina *bis sextus* surgiu a palavra portuguesa bissexto.

3. DETERMINANDO O DIA DA SEMANA

Continuando com a aritmética dos calendários, vejamos agora três questões sobre datas e as respetivas resoluções.

1. Em que dia da semana cairá o n-ésimo dia posterior a uma segunda-feira?

Bem... não é difícil responder à pergunta. Basta efetuarmos a divisão euclidiana de n por 7: $n = 7q + r$ (q e r são, respetivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de n por 7.)

Logo, n dias são q semanas e r dias ($0 \leq r < 7$).

Devemos então avançar r dias na semana. Quer dizer, o n-ésimo dia posterior a uma segunda-feira cairá no dia da semana que ocorre r dias após a segunda-feira.
Se tivermos, por exemplo, $n = 1000$, poderemos escrever:

$$1000 = 142 \times 7 + 6$$

Assim, 1000 dias são 142 semanas e seis dias.
Avançaremos então seis dias na semana: o milésimo dia posterior a uma segunda feira é, portanto, um domingo.

2. Num determinado ano, uma data qualquer cai numa quarta-feira. Em que dia da semana cairá no ano seguinte?

Creio que não será difícil notarmos que no ano seguinte a data cairá numa quinta-feira ou numa sexta-feira.
De facto:

– Não havendo entre as datas consideradas o dia 29 de fevereiro (próprio de ano bissexto), a resposta será quinta-feira, pois a data do ano seguinte é o 365.° dia posterior à data do ano inicial, e $365 = 52 \times 7 + 1$.

– Caso haja o dia 29 de fevereiro entre as datas, o intervalo entre elas será de 366 dias, ou seja, a data do ano seguinte será o 366.° dia posterior à data do ano inicial dado. Como $366 = 52 \times 7 + 2$, a data, no ano seguinte, avançará dois dias na semana em relação à data inicial e, portanto, será uma sexta-feira.

3. Observando um calendário, vemos que o Natal de 2015 ocorre numa sexta-feira. Em que dia da semana caiu o Natal de 1815?

Como vimos na questão anterior, se em determinado ano uma data cai em certo dia da semana, no ano seguinte a data avançará um dia na semana, não havendo entre elas o dia 29 de fevereiro; em caso contrário, o avanço na semana será de dois dias.

Vejamos quantas vezes o dia 29 de fevereiro aparece entre as datas que estamos a considerar.

Recordemos que o n-ésimo termo de uma progressão aritmética de razão r, em que a_1 é o primeiro elemento, vem dado por:

$$a_n = a_1 + (n–1)r.$$

Deste modo, na progressão aritmética finita $(a_1, \ldots, a_n)$ de razão $r \neq 0$, vem:

$$n = \frac{n_a - a_1}{r} + 1. \qquad (1)$$

Os anos bissextos que nos interessam formarão, com a inclusão do ano 1900, a progressão aritmética finita (1816, 1820, 1824, ..., 1900, ..., 2008, 2012), cuja razão é 4.

Para determinar o número n de termos dessa progressão, faremos, na fórmula (1) acima, $a_n = 2012$, $a_1 = 1816$ e $r = 4$.
Portanto:

$$n = \frac{2012–1816}{4} + 1 = 49 + 1 = 50.$$

Desses termos, devemos excluir o ano 1900, que não é bissexto, por ser múltiplo de 100, mas não de 400.

Assim, o dia 29 de fevereiro aparece 49 vezes entre as datas consideradas.
Temos:

$$2015–1815 = 200$$

$$200 + 49 = 249$$

Quer dizer, a questão resume-se a determinar o 249.° dia anterior a uma sexta-feira.

Como $249 = 35 \times 7 + 4$, devemos retroceder quatro dias na semana e, portanto, o Natal de 1815 caiu numa segunda-feira.

4. CALENDÁRIOS IGUAIS DE 28 EM 28 ANOS

Vamos demonstrar agora, pois iremos usá-lo logo a seguir, o teorema mencionado na secção 1: "Dados n números naturais consecutivos, um deles, e somente um, é múltiplo de n."

Seja $S = (k, k+1, k+2, \ldots, k+n–1)$ uma sucessão de n números naturais consecutivos, e sejam q e r o quociente e o resto, respetivamente, da divisão euclidiana de k por n. Podemos então escrever: $k = nq + r$, com $0 \leq r < n$.

Vemos que $k–r$ é múltiplo de n. Portanto:

- Se $r = 0$, k é o único múltiplo de n pertencente a S, pois o próximo múltiplo de n, superior a k, será $k + n$.

- Se $r > 0$, $k–r$ não pertence a S, e então $(k–r) + n$ é o único múltiplo de n pertencente a S, pois o múltiplo seguinte, superior a este, será $(k–r) + 2n$ e, portanto, não pertence a S. Convém observar que o teorema e a demonstração continuam válidos, quando substituímos os n naturais consecutivos por n inteiros consecutivos. A referência bibliográfica [4] oferece uma elegante abordagem do tema.

Voltemos agora aos calendários. No cômputo gregoriano do tempo (que aqui usamos e é de uso universal), os calendários anuais são exatamente iguais de 28 em 28 anos, caso não ocorra, no período que se considera, um ano pseudobissexto. Noutras palavras, os anos X e $X + 28$ terão calendários iguais, caso não haja um ano pseudobissexto em $(X, X+1, \ldots, X+28)$. Isso não é difícil de entender.

Consideremos uma sucessão de 28 anos consecutivos:

$$(X, X+1, X+2, \ldots, X+26, X+27).$$

Decorre do teorema acima demonstrado que esta sucessão apresenta sete múltiplos de 4, ou seja, sete anos bissextos.

Portanto, para determinar quantos dias na semana avançará o dia 1.° de janeiro do ano $X + 28$, em relação ao dia 1.° de janeiro do ano X, bastará calcular o resto da divisão euclidiana de $35(= 28 + 7)$ por 7. Como esse resto é 0, podemos concluir que não haverá nenhum avanço. Ou seja, o ano X e o ano $X + 28$ iniciam-se no mesmo dia da semana.

Além disso, se X é um ano comum, $X + 28$ também o será; se X é um ano bissexto, $X + 28$ também o será, pois X e $X + 28$ deixam o mesmo resto na divisão euclidiana por 4.

Podemos então concluir que os anos X e $X + 28$ têm calendários iguais.

Isso não significa, entretanto, que após o ano X, o próximo ano com calendário igual ao de X será, necessariamente, o ano $X + 28$. Os anos 2009 e 2015, por exemplo, apresentam calendários absolutamente iguais. Todavia, os calendários dos anos X e $X + n$ podem ser diferentes para todo o n, sendo $0 < n < 28$. Por exemplo, o primeiro ano posterior a 2000, com o calendário igual ao desse ano, é 2028.

Portanto, o menor valor de n, diferente de zero, que garante a igualdade dos calendários dos anos X e $X + n$ é 28. Aqui, mais uma vez, supomos a inexistência de um ano pseudobissexto na sucessão $(X, X+1, X+2, \ldots, X+28)$.

Convém observar que é o facto de os calendários se repetirem de 28 em 28 anos que permite a construção dos chamados "calendários permanentes", muito comuns nas agendas anuais comercializadas.

Caso haja algum ano pseudobissexto em (X, X + 1, X + 2, ..., X + 28), os anos X e X + 28 terão calendários diferentes.

Com efeito:

- Se X + 28 for pseudobissexto, então X será bissexto e, portanto, terão calendários distintos.

- Se houver um ano pseudobissexto em (X, X + 1, X + 2, ..., X + 27), esta sucessão apresentará então seis anos bissextos e, portanto, o dia 1.° de janeiro do ano X + 28 avançará seis dias na semana em relação ao dia 1.º de janeiro do ano X, pois 28 + 6 = 34 e 34 = 4 x 7 + 6.

Assim, X e X + 28 terão calendários diferentes.

5. SEXTA- FEIRA, DIA 13

Veremos agora que qualquer ano, seja comum ou seja bissexto, tem, no mínimo, uma sexta-feira, dia 13, e, no máximo, três.

Observemos, inicialmente, que quando um mês tem 30 dias, o dia 13 avançará, no mês seguinte, dois dias na semana; quando o mês tem 31 dias, o avanço será de três dias; quando o mês tem 28 dias, o dia 13 cairá, no mês seguinte, no mesmo dia da semana. Finalmente, se o mês tiver 29 dias (fevereiro em ano bissexto), o avanço na semana será de um dia.

Representemos a sucessão dos dias da semana referentes aos sete primeiros dias de um ano qualquer por A, B, C, D, E, F, G. Não é difícil concluir que uma dessas letras, e apenas uma, indica a sexta-feira, pois sete dias consecutivos quaisquer caem sempre nos sete diferentes dias da semana, o que é muito fácil constatar.

Observemos que 13 de janeiro terá F como dia da semana. Podemos, portanto, formar a seguinte tabela representativa do dia da semana em que o dia 13 cai em cada mês do ano arbitrário considerado:

	Ano Comum	Ano Bissexto
JAN	F	F
FEV	B	B
MAR	B	C
ABR	E	F
MAI	G	A
JUN	C	D
JUL	E	F
AGO	A	B
SET	D	E
OUT	F	G
NOV	B	C
DEZ	D	E

Facilmente constatamos que em ambas as linhas dos dias da semana cada letra ocorre, pelo menos, uma vez, e, no máximo, três. Isso mostra que qualquer ano tem, no mínimo, uma sexta-feira, dia 13, e, no máximo, três.

Como o ano pode começar por qualquer dia da semana, o que não é difícil verificar, podemos então afirmar, tendo em vista a nossa tabela, que existem, efetivamente, anos com uma única sexta-feira (dia 13), assim como também existem com duas e com três.

Considerando-se a tabela e o que foi dito logo no início desta secção, podemos concluir que quando ocorrem sextas-feiras, dia 13, em dois meses consecutivos, estes são, necessariamente, fevereiro e março de um ano comum.

Quando um ano apresenta três sextas-feiras, dia 13, essas ocorrem, como é possível perceber pela tabela, nos meses de fevereiro, março e novembro, em ano comum, ou em janeiro, abril e julho, em ano bissexto.

6. PALAVRINHAS FINAIS

Creio que o leitor concordará que a maior parte deste texto ficaria sem sentido caso os anos tivessem 364 dias. Realmente, como 364 = 52 x 7, a cada ano as datas cairiam sempre no mesmo dia da semana e, assim, um único calendário serviria para todos os anos.

Esse aspeto vantajoso de um ano com 364 dias tem despertado, há décadas, o interesse de muitos estudiosos do tema calendário. A ONU tem recebido, desde a sua criação, diversas propostas para implantar um novo calendário, de âmbito universal, com anos de 364 dias. Aliás, o tema já era discutido na Liga das Nações, que precedeu a ONU, conforme assegura o ilustre historiador brasileiro Hernâni Donato (1922 – 2012), na sua breve, mas erudita, História do Calendário.

A mais notória das propostas de reforma do atual calendário é a que propõe a criação do chamado Calendário Universal, cujas principais características são:

- Anos de 364 dias, iniciados sempre num domingo. Um calendário perpétuo, portanto.
- Trimestres e semestres de igual duração.

Isso será obtido dando-se 31 dias ao primeiro mês de cada trimestre e 30 dias aos dois seguintes. Assim, o ano terá quatro meses de 31 dias, e oito meses de 30 dias.

- A harmonia que o calendário deverá manter em relação ao ano solar estará assegurada pelo acréscimo de um dia ao quarto trimestre. Será um dia livre, não pertencendo a nenhuma semana e a nenhum mês. Embora ocorra a seguir a um sábado, esse dia especial não será um domingo, e sim um Dia Mundial.
- Um outro dia, também não pertencente a uma semana, será acrescentado ao mês de junho dos anos bissextos. Será o Dia Bissexto.

Como podemos notar, os anos desse novo calendário proposto têm, na verdade, exatamente a mesma duração dos anos do nosso calendário gregoriano.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Domingues, Hygino Hugueros. *Fundamentos de Aritmética*, Florianópolis, Editora da UFSC, 2009.

[2] Donato, Hernâni. *História do Calendário* (2.ª edição), São Paulo, Edições Melhoramentos, 1978.

[3] Duncan, David Ewing. *Calendário – A epopeia da humanidade para determinar um ano verdadeiro e exato*, Rio de Janeiro, Ediouro, 1999.

[4] Muniz Neto, Antônio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, volume 5 – Teoria dos Números*, Rio de Janeiro, SBM, 2012.

SOBRE O AUTOR

Paulo Sérgio Argolo é professor de Matemática (aposentado) da rede estadual do Rio de Janeiro (Brasil). Nasceu e vive na Cidade Maravilhosa.

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

COMPUTAÇÃO DISTRIBUÍDA E MATEMÁTICA

Sabe como é que o seu computador pode ser empregue para resolver problemas matemáticos em aberto?

INTRODUÇÃO

Uma questão natural para uma rubrica chamada *Apanhados na Rede* é a de saber de que modo é que a Internet interfere com a investigação em matemática. Será que interfere de algum modo? A resposta é afirmativa e, de facto, a interação da Internet com a investigação em matemática dá-se a vários níveis. Eis alguns exemplos:

1. Um grande número de revistas científicas tem os seus artigos acessíveis *online*.
2. A Internet facilita a colaboração entre matemáticos situados fisicamente longe uns dos outros.[1]
3. A Internet permite a utilização de *software* computacional, tanto através de instalação local desse *software* como através do uso diretamente pela Internet.[2]

O tipo de interferência da Internet com a investigação em matemática que vai aqui ser abordada é de outra natureza e tem a ver com computação distribuída, ou seja, com o uso de um grande número de computadores, em muitos casos distribuídos por todo o mundo, para efetuar cálculos que levariam demasiado tempo se fossem feitos por um único computador.

SETI

Um dos mais antigos projetos do género, e talvez o mais famoso de todos, é o SETI@home. SETI são as iniciais de *Search for Extra-Terrestrial Intelligence*, ou seja, Busca de Inteligência Extraterrestre. Foi lançado em maio de 1999 e destina-se, como o nome indica, à busca de sinais de vida inteligente no Universo. Quem quiser participar no projeto, tudo o que tem de fazer é ir à respetiva página de Internet[3], descarregar o *software* e fazer assim com que o seu computador use o seu tempo livre para ajudar a analisar sinais vindos do espaço a ver se contêm vestígios de vida inteligente. Na figura 1 pode-se ver o aspeto de um *screensaver* que vem com o programa em questão.

Figura 1. Screensaver do SETI@home

De facto, a busca de vestígios de vida inteligente no Universo não foi o único objetivo da criação deste projeto. Outro objetivo foi testar a viabilidade de um projeto desta natureza. Constatou-se que era viável e muitos outros projetos semelhantes surgiram.[4] No resto deste artigo, iremos focar-nos nos projetos ligados à matemática.

PRIMOS DE MERSENNE

No século XVII, Marin Mersenne observou que se n for um número natural composto, então $2^n - 1$ também é composto. Com efeito, se $n = pq$, com $1 < p, q < n$, então

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= (2^p)^q - 1^q \\ &= (2^p - 1)(2^{(q-1)p} + 2^{(q-2)p} + \cdots + 2^p + 1), \end{aligned}$$

pelo que $2^n - 1$ é composto. Como, obviamente, $2^1 - 1$ não é primo, resulta desta observação que só quando p for um número primo é que $2^p - 1$ poderá ser primo. Mas será que todos os números desta forma são primos? A resposta é negativa, pois, embora $2^2 - 1 (= 3)$, $2^3 - 1 (= 7)$, $2^5 - 1 (= 31)$ e $2^7 - 1 (= 127)$ sejam todos primos, $2^{11} - 1 (= 2047)$ é composto, pois é igual a 23×89.

Os números primos da forma $2^p - 1$ designam-se por *primos de Mersenne*. Por vezes, surge uma notícia a dizer que foi descoberto um número primo maior do que qualquer outro número primo conhecido (o recordista atual, descoberto em 2013,[5] é $2^{57.885.161} - 1$, um primo de Mersenne). De facto, há mais de 20 anos que o maior primo conhecido é sempre um primo de Mersenne. Aliás, os dez maiores números primos conhecidos são todos primos de Mersenne. Isto é assim por causa da existência do teste de Lucas-Lehmer, um teste de primalidade feito especificamente para os números de forma $2^p - 1$.

Em 1996 foi lançado o GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search),[6] um projeto de computação distribuída que se destina a descobrir novos primos de Mersenne. Ao todo, conhecem-se atualmente 48 primos de Mersenne, sendo o quadragésimo oitavo o recordista acima referido. A partir do trigésimo quinto (inclusive), foram todos descobertos no âmbito do projeto GIMPS.

Figura 2. Marin Mersenne.

Figura 3. Pierre de Fermat.

PRIMOS DE FERMAT

Pierre de Fermat, que era contemporâneo de Mersenne e que se correspondia com ele, acreditou ter conseguido provar que todos os números da forma $2^{2^n} + 1$ (com $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$) são primos. De facto, isto é verdade para $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, mas, no século XVIII, Euler provou que $2^{2^5} + 1$ é múltiplo de 641. Não se conhece mais nenhum número primo da forma $2^{2^n} + 1$para além dos cinco números já referidos. Hoje em dia sabe-se que todos os números da forma $2^{2^n} + 1$ com $5 \le n \le 33$ são compostos.

O projeto *Distributed Search for Fermat Number Divisors*[7] destina-se à busca de divisores dos números da forma $2^{2^n} + 1$. Pode provar-se que um tal divisor é necessariamente da forma $k \times 2^m + 1$, com $m \ge n + 2$ (por exemplo, $641 = 5 \times 2^7 + 1$) e este facto, como é natural, ajuda a limitar a busca de novos divisores.

SOMAS DE POTÊNCIAS

Euler conhecia o enunciado do Último Teorema de Fermat: uma potência de grau superior a 2 nunca é soma de duas potências com esse mesmo grau.[8] Embora não tivesse conseguido provar este teorema (isso só seria feito no fim do século XX por Andrew Wiles), Euler conjeturou que, mais geralmente, uma potência de grau n só

---

[1] Um exemplo notável de uma tal colaboração reside no projeto Polymath 8. Em 2013, Yitang Zhang provou que a diferença entre dois números primos consecutivos é menor ou igual a 70.000.000 numa infinidade de casos. Graças ao projeto em questão, este número desceu para 246; veja-se *http://www.ams.org/notices/201506/rnoti-p660.pdf.*

[2] Veja-se, por exemplo o Wolfram|Alpha: *http://www.wolframalpha.com.*

[3] *http://setiathome.ssl.berkeley.edu/*

[4] Veja-se *http://www.distributedcomputing.info*, por exemplo

[5] Veja-se *http://www.mersenne.org/primes/?press=M57885161*

[6] *http://www.mersenne.org*

[7] *http://www.fermatsearch.org*

[8] Neste contexto, "potência" é um número natural elevado a outro número natural.

[9] *http://euler.free.fr/*

Figura 4. Leonhard Euler.

pode escrever-se como soma de k potências de grau n (com $k > 1$) quando $k \geq n$. Por outras palavras, quando um cubo se pode escrever como soma de vários cubos, são necessários pelo menos três cubos (e, neste caso, a conjetura de Euler não afirma mais do que afirma o Último Teorema de Fermat), quando uma quarta potência pode escrever-se como soma de várias quartas potências, são necessárias pelo menos quatro quartas potências, e assim sucessivamente.

Em 1966, descobriu-se (recorrendo-se a um computador) que a conjetura é falsa, pois

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5. \qquad (1)$$

Vinte anos mais tarde, descobriu-se que a conjetura também é falsa para o expoente 4. Por exemplo,

$$95.800^4 + 217.519^4 + 414.560^4 = 422.481^4.$$

Para estudar este tipo de fenómenos, existe o projeto *Computing Minimal Equal Sums of Like Powers*.[9] Como o nome indica, o projeto é mais geral do que somente procurar contraexemplos da conjetura de Euler. Destina-se também a testar uma conjetura formulada por três matemáticos, L. J. Lander, T. R. Parkin e J. Selfridge (dos quais os dois primeiros foram quem descobriu o exemplo (1), que afirma que, dado um expoente k, se um número natural α puder exprimir-se como soma de m potências de grau k e também puder exprimir-se como soma de n potências de grau k, então $m + n \geq k$ (a menos que $m = n$ e que as duas maneiras de exprimir α como soma de potências de grau k coincidam). A conjetura continua em aberto. Assim, por exemplo, segundo esta conjetura, nenhum número natural pode ser expresso como soma de duas quintas potências de duas maneiras diferentes (pois $2 + 2 \not\geq 5$). Mas a conjetura é compatível com a existência de um número natural que possa ser escrito como soma de duas quintas potências e que também possa ser escrito como soma de três quintas potências. E, de facto,

$$14.132^5 + 220^5 = 14.068^5 + 6.237^5 + 5.027^5.$$

CONCLUSÃO

Há muitos outros projetos de computação distribuída em matemática além destes.[10] Qualquer leitor com um computador pode juntar-se a um deles. E, quem sabe, ajudar a resolver um problema em aberto.

[10] Veja-se em *http://www.distributedcomputing.info/ap-math.html* uma lista de projetos de computação distribuída na área da Matemática.


Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

A MELHOR MANEIRA DE EMPILHAR LARANJAS

No ano passado, um jornalista de Plymouth, Nova Zelândia, decidiu levar o 18º. problema de Hilbert para a rua. Parte do problema pode formular-se assim: Há alguma maneira melhor de empilhar laranjas do que as pirâmides que se encontram no lugar da fruta? Em pirâmides, as laranjas ocupam pouco mais de 74% do espaço. Será possível fazer melhor com outro arranjo? Os merceeiros de Plymouth não ficaram impressionados. "O meu pai ensinou-me a empilhar laranjas quando eu tinha cerca de quatro anos", disse um merceeiro chamado Allen. Depois de ter sido informado de que os matemáticos resolveram o problema após 400 anos, perguntámos a Allen se tinha sido difícil para ele encontrar o melhor arranjo. "Põe-se simplesmente uma em cima das outras", disse. "Levou para aí dois segundos."

Thomas Hales, *Cannonballs and Honeycombs.*

Este é um problema que se ajusta perfeitamente ao título desta coluna: a sua formulação é simples, e a resposta, sendo simples também, é surpreendentemente difícil de demonstrar. Falamos do problema do empacotamento de esferas, que pode ser formulado, de modo informal, da seguinte maneira: qual é a melhor maneira de empilhar laranjas? Julgo que todos os leitores, bem como todos os merceeiros, saberão a resposta. Mas saberão a demonstração?

A história deste problema remonta ao século XVII, a um pedido de Sir Walter Raleigh ao seu assistente Thomas Harriot: Raleigh queria saber quantas bolas de canhão caberiam numa pilha habitual. Harriot, depois de resolver o problema, correspondeu-se com Kepler, que veio a formular o problema do empilhamento mais económico no seu ensaio *On the six-cornered snowflake*, de 1611, no qual fala também de arranjos planares como o dos favos de mel. Por causa deste texto, o resultado ficou conhecido como a conjetura de Kepler.

Antes de avançarmos na história, vamos formalizar um pouco o enunciado. Pensando para já em duas dimensões, podemos perguntar-nos qual é a melhor maneira de organizar círculos, de igual raio, num plano. Apresentamos dois arranjos, supondo que o padrão se mantém infinitamente (ver figuras 1 e 2).

O conceito matemático que permite afirmar que o primeiro arranjo é melhor do que o segundo é a *densidade,* que é o quociente entre a área ocupada pelos círculos e a área total. Nestes dois casos a densidade coincide com o quociente entre a área do círculo e a área do polígono envolvente, hexágono ou quadrado. Os valores são, respetivamente,

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0{,}9069, \qquad \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$$

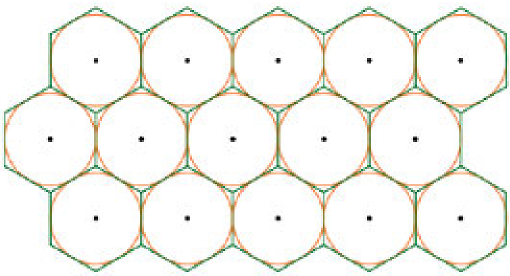


Figura 1: Circunferências em hexágonos.

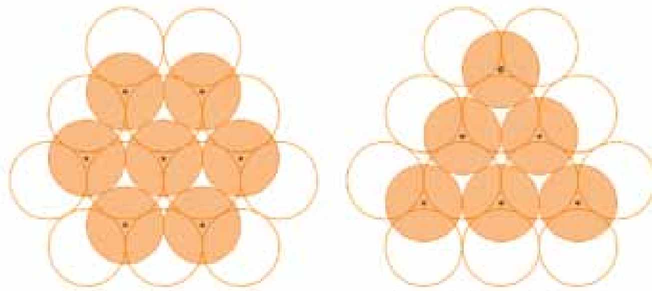


Figura 3: Dois níveis de esferas.

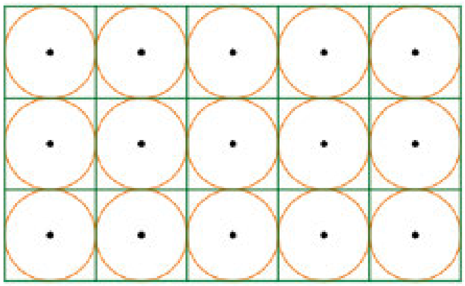


Figura 2: Circunferências em quadrados

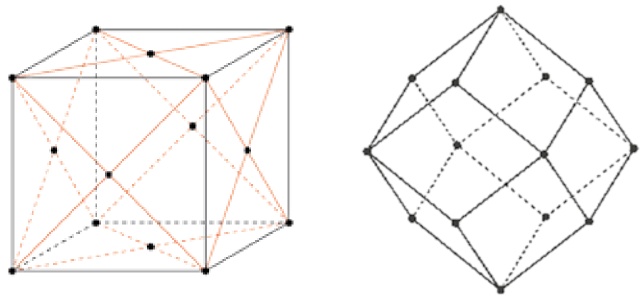


Figura 4: Disposição cúbica de faces centradas e dodecaedro rômbico

Assim, o primeiro arranjo é mais denso, o que faz dele uma melhor opção. Thue apresentou em 1892 uma breve demonstração, e outra em 1910, de que esta era a maior densidade possível. Ambas as demonstrações foram entretanto postas em causa, e outra demonstração foi apresentada por L. Tóth em 1940.

Os hexágonos e os quadrados têm também um papel importante: são as chamadas células de Voronoi determinadas pelos centros dos círculos. A célula que inclui um dado centro C é o conjunto dos pontos que está mais próximo desse centro do que de qualquer outro. Se desenharmos os segmentos que unem os centros, as fronteiras das células de Voronoi estão contidas nas mediatrizes desses segmentos.

Em três dimensões, o modo mais intuitivo de dispor esferas é o seguinte: num primeiro plano, colocar as esferas como os círculos no primeiro arranjo, e, num plano superior, colocar as esferas nas pequenas covas formadas por três esferas. Há duas formas de o fazer, descritas na figura 3 (as esferas a cheio são as do segundo nível).

Para o terceiro nível poderíamos usar qualquer destas opções de novo, originando várias disposições, todas com densidade $\pi/\sqrt{18} \approx 0{,}7405$. Uma destas disposições é a chamada *cúbica de faces centradas* (um nome usado na cristalografia), em que os centros das esferas se dispõem como na figura 4.

Neste caso, as células de Voronoi são dodecaedros rômbicos, polígonos com 12 faces, que são losangos congruentes. Pensando que uma das esferas está inscrita no polígono, as faces indicam as posições das 12 esferas que tocam nessa esfera central (tal como no caso de dimensão 2). Também aqui o volume da esfera dividido pelo volume do dodecaedro é igual à densidade. Podemos agora enunciar o resultado.

Conjetura de Kepler. *Uma disposição de esferas, com o mesmo raio, no espaço, não pode ter densidade superior a $\pi/\sqrt{18}$, que é a densidade da disposição cúbica de faces centradas.*

Um dos primeiros avanços foi feito por Gauss, em 1831, quando provou que a conjetura de Kepler é verdadeira, se considerarmos apenas arranjos periódicos de bolas no espaço. A demonstração não é muito intrincada, mas é teoricamente significativa: o problema a partir de agora era o de majorar a densidade em disposições não periódicas.

Em 1900, Hilbert incluiu a conjetura na sua famosa lista de 23 problemas, apresentada no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris – a conjetura aparece na segunda parte do problema 18.

Mais de meio século depois, em 1953, László Fejes Tóth mostrou que o problema de determinar um majorante para a densidade podia ser reduzido a um número finito de cálculos – finito, mas muito grande. Este resultado baseava-se na observação de que num arranjo optimal apenas um número finito de tipos de células de Voronoi pode aparecer.

A situação faz lembrar a do problema das quatro cores, e parecia apelar também a uma solução computacional, mas mesmo com o uso de máquinas (dos anos 50 ou mesmo mais recentes), a quantidade de cálculos era incomportável.

Quarenta anos mais tarde, em 1993, Wu-Yi Hsiang apresentou uma demonstração da conjetura no *International Journal of Mathematics*, usando essencialmente trigonometria esférica. Rapidamente surgiram algumas críticas: Thomas Hales (ele próprio a trabalhar já no problema) publicou um artigo no *Mathematical Intelligencer* pondo em questão as demonstrações dos resultados principais, ao qual Hsiang respondeu com um artigo na mesma revista. Ainda hoje se considera que a demonstração de Hsiang não é completamente aceitável.

Justamente por essa altura, Thomas Hales tentava uma aproximação computacional, como sugerido pelo resultado de László Tóth. Em 1992, em colaboração com o seu estudante de doutoramento Samuel Ferguson, iniciou um projeto de aplicação de técnicas computacionais para resolver o problema, que envolvia o estudo numérico de cerca de 100.000 problemas de programação linear. O resultado foi atingido em 1998: Hales anunciou que o projeto estava terminado, estando contido em 250 páginas de texto e três gigabytes de programas e dados computacionais.

Naturalmente, dada a extensão da demonstração, e depois do que se tinha passado com Hsiang, as revistas científicas estavam cautelosas. O *Annals of Mathematics* designou um júri de 12 *referees* para analisarem a demonstração, liderado por Gábor Tóth (filho de László). Depois de quatro anos de análise do trabalho de Hales, o relatório do editor Robert MacPherson afirmava:

> "Os *referees* gastaram muita energia neste estudo. Organizaram um seminário durante muito tempo. Verificaram várias afirmações particulares na demonstração, e todas estavam corretas. [...] Não conseguiram porém garantir a correção da demonstração e não conseguirão fazê-lo por já não terem energia para dedicar ao problema."

Depois de um pedido de revisão, o artigo de 121 páginas foi publicado em 2005 nessa prestigiada revista[1], remetendo os detalhes para dez artigos publicados na edição de julho de 2006 da revista *Discrete and Computational Geometry*.

Hales, porém, entendeu que era necessário apresentar uma demonstração mais convincente. Além de publicar vários artigos de divulgação, iniciou então o projeto *Flyspeck* (a partir das iniciais F, P e K, que significam *Formal Proof of Kepler*). O objetivo era produzir uma demonstração formal que pudesse ser verificada por computador, eliminando assim as dúvidas sobre a sua validade. O projeto, que envolveu um intenso trabalho de equipa, com participantes de vários países, foi dado como terminado a 16 de agosto de 2014.

Esta história acaba, assim, por ser mais do que a do próprio teorema, chegando mesmo ao conceito de demonstração matemática, e aos métodos aceitáveis para verificar a sua validade. Terminamos com uma citação de Hilbert a este respeito.

> "É necessário estudar a natureza genuína da demonstração matemática, por forma a clarificar questões como a decidibilidade por meio de um número finito de operações."

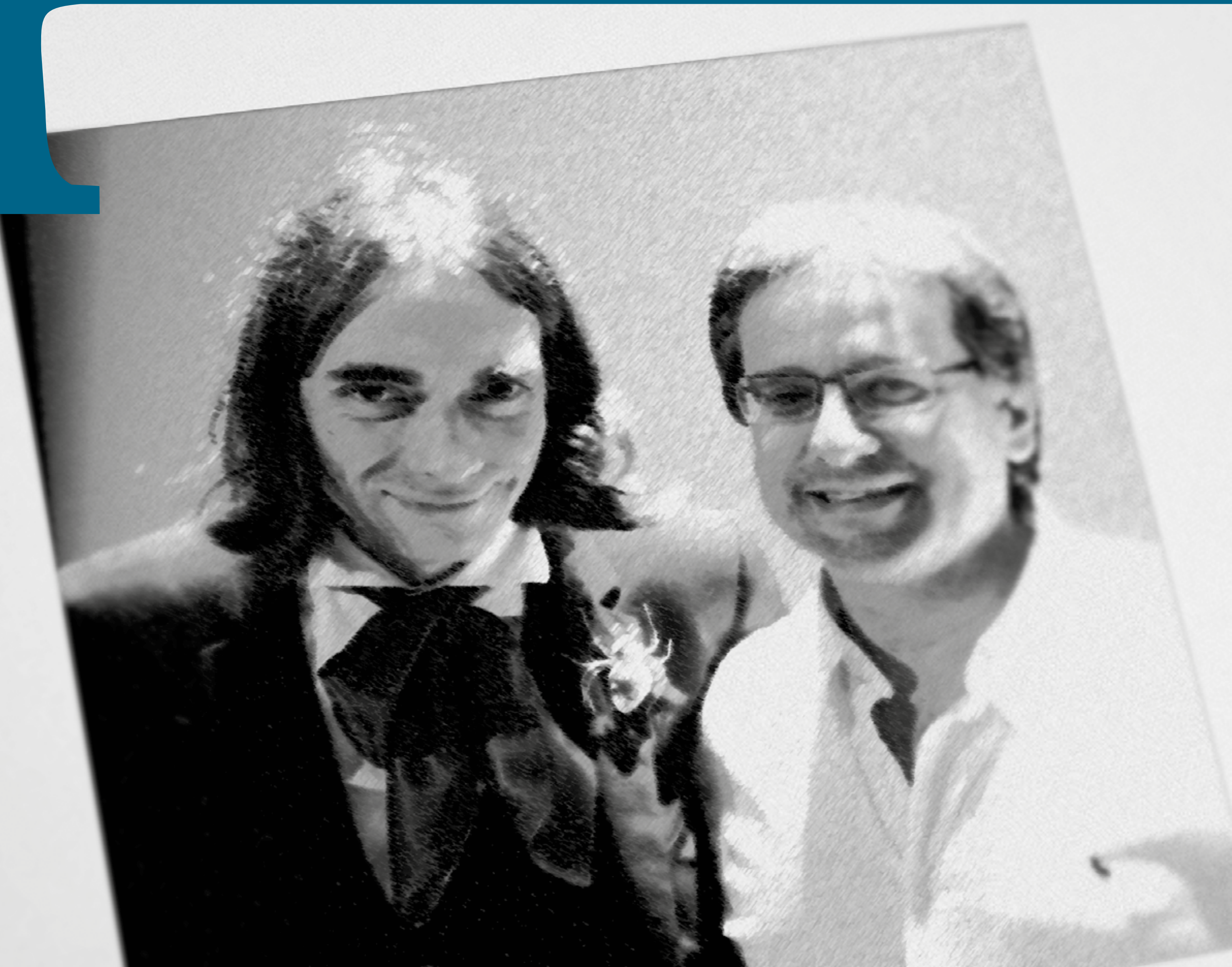
REFERÊNCIAS

[1] Thomas C. Hales, "Canonballs and honeycombs", *Notices Amer. Math. Soc.* 47 (2000), n.º 4, 440–449.

[2] Thomas C. Hales, "A proof of the Kepler conjecture", *Ann. of Math.* (2) 162 (2005), n.º 3, 1065–1185.

[3] Projeto *Flyspeck*, *http://code.google.com/p/flyspeck/*.

[1] O artigo esteve para ser publicado com o aviso "Os *Annals* não podem garantir que este artigo esteja correto. De qualquer forma, achamos que o artigo é relevante" (o que teria sido espantoso para uma revista como os *Annals*). Isso acabou por não acontecer.



3 PERGUNTAS A CÉDRIC VILLANI

Jorge Buescu
Universidade de Lisboa
jsbuescu@fc.ul.pt

O medalha Fields Cédric Villani esteve em novembro de 2015 em Portugal. Ele próprio estrela de cinema (foi protagonista do filme *Comment j'ai Detesté les Maths*, de Olivier Peyon, e da curta-metragem *La Main de Villani*, de Jean-Michel Alberola), foi membro do júri do LEFFEST (Lisbon and Estoril Film Festival), organizado por Paulo Branco, entre 6 e 15 de novembro. No dia 10, lançou a edição portuguesa do seu livro *Teorema Vivo*, no Teatro D. Maria II, e no dia 11, proferiu, em Coimbra, a conferência "Matemática, Cultura e Criação", no âmbito do Mês da Ciência, promovido pela Fundação Francisco Manuel dos Santos, com a participação de Paula Oliveira e Jorge Buescu.

Duas excelentes ocasiões para privar com esta mente brilhante.

JB: Livros, filmes, TV, BD, entrevistas… Como é que arranja tempo para ser o "embaixador da matemática"?

É verdade que explorei muitos caminhos… Seria necessário falar também das centenas de conferências que dei nestes últimos anos, do meu papel de presidente de associações, da minha cooperação com África, e do dinheiro de que foi necessário ir à procura para o meu instituto. No entanto, todos estes "chapéus" participam da mesma lógica "pública" e reforçam-se uns aos outros: um contacto criado num contexto pode revelar-se importante noutro; os progressos realizados num papel podem ser úteis para outro. É, portanto, uma questão de integração. Alguns pontos-chave da minha organização são: (1) A minha secretária faz um trabalho extraordinário, nunca me desembrulharia sem ela; (2) Qualquer que seja o projeto que se prossegue, o êxito é sempre uma questão humana: descobrir as boas pessoas, ter a boa compreensão, a boa empatia; (3) um grande rigor na gestão das comunicações, por exemplo, os emails.

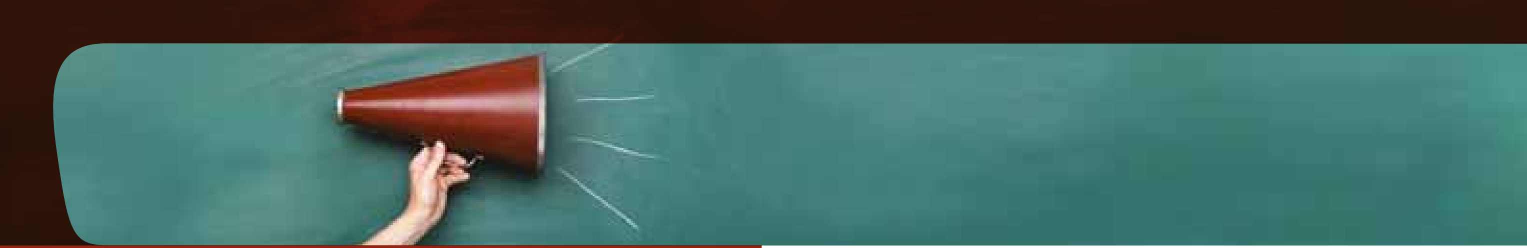
JB: A investigação exige total concentração, como se vê no seu *Teorema Vivo*. Não sente essa exposição pública por vezes como um entrave ao seu trabalho matemático?

É claro que a exposição mediática e o trabalho matemático não se dão bem em conjunto: as restrições que pesam sobre a utilização do tempo e o facto de ele ser tão esquartejado não são muito compatíveis com o ritmo prolongado da investigação. Tive de pôr de lado assuntos que me eram caros; e, acima de tudo, sofro por não poder trabalhar nos meus projetos de livros. Mas não há milagres: se se pretende atingir objetivos em comunicação, administração, contacto com a sociedade, é necessário investir nessas áreas durante anos. E é como em investigação: quando a oportunidade se revela, é preciso aproveitá-la a fundo. Dito isto, eu conservei a minha atividade de ensino: cursos de doutoramento, um MOOC[1] no ano passado e outros em preparação; e a minha atividade como editor permite-me ainda estar bem informado sobre as tendências atuais da investigação. Enfim, as conferências públicas foram preciosas para me permitir compreender o meu próprio trabalho e as suas relações com o resto da investigação.

JB: E o que é que pensam os seus colegas matemáticos acerca do seu envolvimento público?

Os meus colegas têm, seguramente, sentimentos diversos: alguns acham que é muito bom desencarcerar a disciplina, outros devem dizer que faço demasiadas coisas. Mas (quase) ninguém me censurou. E creio que todos eles veem que trabalho enormemente no assunto, e que isso tem efeitos muito positivos para a disciplina: a publicidade feita à profissão e às nossas universidades; os grandes financiamentos públicos obtidos para o desenvolvimento do Institut Henri Poincaré; e a nossa influência política acrescida em decisões importantes.

[1] MOOC: Massive Online Open Course.



Gonçalo Morais
Instituto Superior
Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM
CARLES SIMÓ

Carles Simó é um nome incontornável na área dos sistemas dinâmicos. Defensor acérrimo de que tudo o que evolui ao longo do tempo é um sistema dinâmico e que teoria e prática devem formar um só corpo, recebeu inúmeros prémios e distinções e é desde 1975 professor da Universitat de Barcelona. A sua investigação centra-se nas áreas de sistemas dinâmicos, sistemas hamiltonianos, mecânica celeste, análise numérica dos sistemas dinâmicos e simulação de sistemas. Carles Simó parece um homem de outro tempo, com uma cultura vasta e profunda. Foi difícil, numa conferência com várias centenas de matemáticos, encontrar um local sossegado e em que a nossa conversa não fosse perturbada. Juntos encontrámos um canto numa sala de arrumações. Neste local, encontrámos a paz para uma conversa que se materializou na entrevista que agora apresentamos[1].

En memòria dels temps en els que els homes eren homes i escrivíen els seus propis programes.

SIMÓ Vamos falar em espanhol, português, inglês, catalão, francês...

GONÇALO Falarmos em catalão será um pouco difícil, pois para lá de alguns nomes nada mais sei pronunciar. Vamos tentar uma mistura entre espanhol e português. Como é que começou o seu interesse por estudar matemática?

SIMÓ Na época em que fui para a universidade, os cursos de engenharia duravam sete anos. Havia um primeiro curso chamado Selectivo que durava um ano, um segundo curso chamado Iniciação e somente ao fim destes dois anos é que começavam os cinco anos do curso de Engenharia propriamente dito. Estes dois primeiros cursos podiam ser feitos numa faculdade de ciências ou de engenharia. Ao fim destes dois anos comecei a fazer ao mesmo tempo o curso de Engenharia Industrial e o curso de Matemática. E fiz tudo de uma ponta à outra, sem pedir equivalências entre as diferentes disciplinas.

GONÇALO Estamos a falar de que ano?

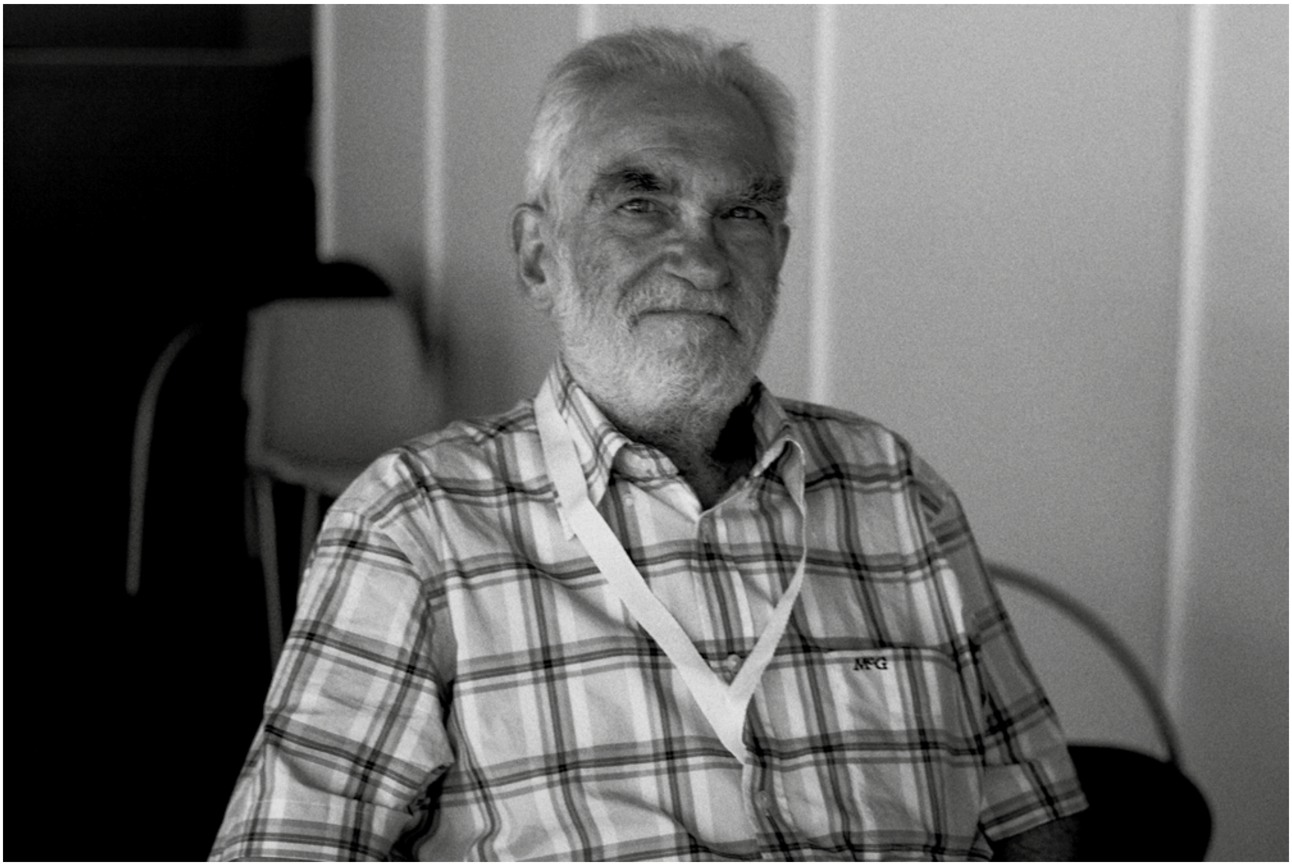
SIMÓ Estamos em 63, ano em que comecei a tirar os cursos de Engenharia e de Matemática. A experiência foi muito interessante. De um lado eu tinha um curso com equações diferenciais, teoremas de existência e unicidade, bifurcações onde não se calculava quase nada. Do outro lado ficavam estupefactos com a possibilidade de alguém questionar a existência de uma solução. Exclamavam:

— Como poderá não existir solução?! Tu atiras uma pedra ao ar e ela cai! Tu aqueces o que quiseres e o calor propaga-se!

Assumiam que se para um determinado modelo não existia solução, então o modelo estaria necessariamente incorreto. E tinham certamente razão. A verdade é que calculavam muitas coisas. Fui formado neste bolo quantitativo de um lado e qualitativo do outro e, na realidade, compreendi desde então que não tinha de existir diferença entre as duas abordagens. Quando acabei o meu quinto ano de Matemática e o meu terceiro ano de Engenharia, comecei a trabalhar na minha tese de doutoramento em Matemática ao mesmo tempo que fazia o quarto e o quinto anos de Engenharia num único ano. Estávamos então em 1969.

Quando era pequeno interessava-me muito por coisas do espaço, por energia nuclear e reatores, coisas em que se usa muita matemática. Falei então com o catedrático de Astronomia (Juan José de Orús Navarro) e disse-lhe que gostaria de fazer a minha tese em mecânica celeste. Ele respondeu-me que de mecânica celeste sabia o necessário para lecionar os cursos, mas ele tinha prosseguido a sua investigação em dinâmica de galáxias. Se eu quisesse seguir um rumo diferente, ele não poderia ajudar-me. Assim, nos verões dos anos 69, 70 e 71 fechava-me na biblioteca do Instituto Poincaré em Paris, pois na altura algumas revistas não estavam disponíveis em Barcelona. Quando estava a trabalhar já em aspetos topológicos, de formas normais, soluções formais e por aí adiante, dei-me conta de que muitos problemas de mecânica celeste podem ser abordados do ponto de vista dos sistemas hamiltonianos. Por sua vez, estes podem ser vistos a partir do ponto de vista mais geral dos sistemas dinâmicos, quer sejam de dimensão finita ou infinita, quer sejam discretos ou contínuos. Questionei-me se poderia continuar esta escalada e concluí que não. Concluí, de facto, que os sistemas dinâmicos abarcam quase tudo o que se entende por ciências experimentais e tecnológicas. Esta visão materializou-se num seminário que desde 75 funciona interruptamente em Barcelona.

[1] A deslocação a Madrid foi suportada pelo Centro de Matemática e Aplicações da FCT/UNL ao abrigo do programa PEst-OE/MAT/UI0297/2014.



GONÇALO Esses foram os anos finais do franquismo...

SIMÓ Bem... [longa pausa] Nesses anos não se podia falar catalão. Contudo, apesar de a maior parte das disciplinas funcionarem de facto em castelhano, havia já algumas que na realidade funcionavam em catalão. Atualmente existe uma certa liberdade e uma mistura muito grande de línguas por causa dos alunos estrangeiros. No dia 20 de novembro de 1975 morreu o Franco. No dia 21 não houve aulas mas todos os professores se apresentaram ao serviço com uma garrafa de champanhe [risos].

GONÇALO Parece-me merecido...

SIMÓ Sem dúvida!

GONÇALO Quem tem contacto com o seu trabalho e com o trabalho do grupo ao qual pertence fica imediatamente com a ideia de que existe um esforço muito grande da vossa parte em computar os modelos que estão a analisar. Ao mesmo tempo, alguns fenómenos dos sistemas dinâmicos são por natureza extremamente difíceis de computar. É preciso alguma dose de audácia para ligar as duas coisas, não?

SIMÓ O que há a fazer é perceber que métodos existem para resolver um determinado problema. Damo-nos conta rapidamente de que a maior parte dos métodos não é eficiente e então temos de inventar outros métodos. Por exemplo, fala-se em métodos de parametrização de variedades. Por volta de 78, estava a fazer cálculos sobre o Atractor de Hénon e usava os ditos métodos. Comecei então a colaborar com a Agência Espacial Europeia e tinha de explicar aos engenheiros que usando as variedades estáveis, instáveis e central poderíamos manobrar as naves com muito menos esforço. Ao mesmo tempo, estava também a trabalhar com um grupo de engenheiros químicos de Terragona e usávamos as mesmas técnicas para tratar os problemas de mecânica de fluidos. O que é a turbulência? Bem, não é mais do que uma cadeia heteroclínica de conexões de variedades invariantes. Existem, assim, muitos fenómenos que podem ser explicados através da geometria do espaço de fases. Para poderes usar esta ideia tens de a calcular e se não existe um método para calcular, tens de o inventar. Mas não basta inventar qualquer coisa que funcione. O que inventas só será útil se for eficiente, i.e., tens de obter os resultados numa quantidade razoável de tempo. Um amigo meu, o conhecido astrónomo Jacques Laskar, deu um curso de mecânica celeste e começou por explicar que cada operação que se faz em vírgula flutuante equivale a um erro. Então, o nosso objetivo será de fazer um cálculo com a precisão desejada e com o número mínimo de operações, não para que o computador processe tudo de forma mais rápida mas porque deste modo estamos a minimizar o número de erros.

GONÇALO E a Natureza encontra essas soluções em tempo real...

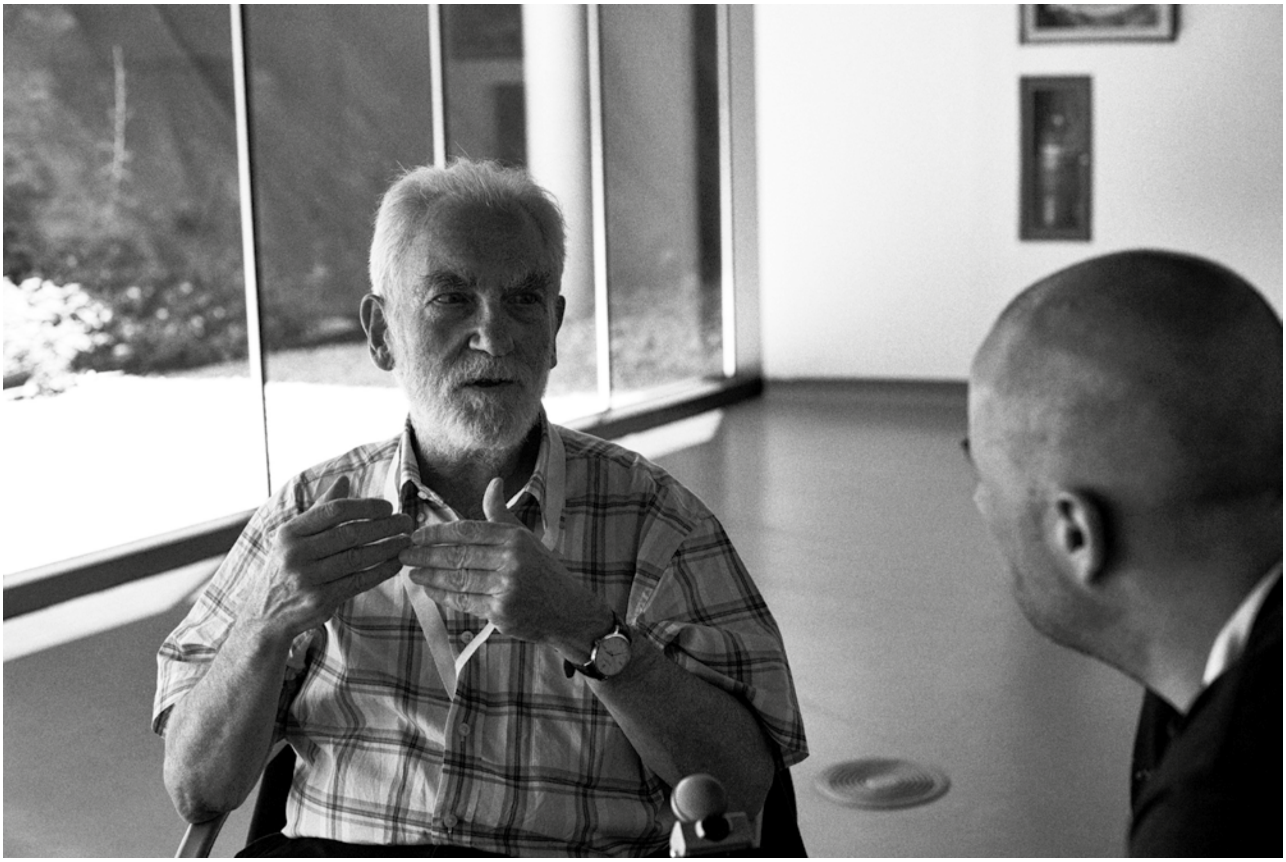
SIMÓ E à escala humana são estáveis, embora do ponto vista teórico possam ser caóticas. Por exemplo, a órbita da Terra é instável mas quanto tempo demora até aparecer um comportamento que demonstre um comportamento caótico? Dez milhões de anos! Como se diz em castelhano, *muito tempo mo fiarás!* Na prática, isto significa que quando fazes os cálculos para uma missão espacial que durará vinte anos, podes na verdade assumir que as órbitas dos planetas são quasi-periódicas. Tens de ter cuidado em verificar que na vizinhança da nave não passará nenhum cometa. Nesse caso será necessário mais cuidado.

GONÇALO Uma das coisas mais fascinantes que li no seu trabalho foi uma dedução de um método numérico deduzido a partir da série de Taylor das soluções, em que para garantir a precisão necessária usa 16 parcelas do dito desenvolvimento.

SIMÓ Bem, todos os métodos numéricos eficientes para calcular os expoentes de Lyapunov ou para calcular mil milhões de iteradas da aplicação de Poincaré são baseados nos métodos de Taylor...

GONÇALO Mas o que é mais curioso é que parece que voltámos...

SIMÓ ... ao início do século XIX! Há algo que se foi esquecendo ao longo dos anos: muitos cálculos podem ser feitos com a manipulação formal de séries de potências. Não se pode usar estes métodos para todo o tipo de equações, por exemplo se tiveres equações do tipo *stiff*. Mas numa enorme gama de equações podes usar ideias semelhantes aos métodos que usas para encontrar a solução da equação de Bessel para determinares os termos do desenvolvimento da série de Taylor da solução. Isto significa que tens de fazer um pouco mais de teoria antes de começares a calcular, mas existe um ponto em que



as coisas vão quase em paralelo. E quando o problema é muito complicado e não sabes por onde podes começar, fazer uma pequena simulação pode ser bastante útil.

Se o problema for realmente complicado, percebes rapidamente que não poderás usar um programa do tipo Mathematica ou Matlab para o simulares e tens de construir o teu próprio programa. Um antigo aluno meu, Angel Jorba, escreveu um artigo sobre métodos de Taylor e, como sabes, muitas vezes depois do nome do autor e antes do resumo do artigo coloca-se uma frase retirada de um livro ou em jeito de dedicatória. Ele pôs uma frase em catalão. O editor perguntou-lhe qual o significado da frase e ele disse-lhe: *Em memória dos velhos tempos, em que os homens eram homens e escreviam os seus próprios programas.* [Risos] O editor sugeriu-lhe que retirasse a frase, conselho que ele seguiu.

GONÇALO Numa conferência a que assisti disse que o principal objetivo do seu trabalho era diminuir a separação entre a teoria e a simulação. Considera-se bem-sucedido?

SIMÓ Acho que existe uma diferença cultural grande entre os matemáticos e, por exemplo, os engenheiros. O problema reside no facto de, como tu bem sabes, muitos problemas em matemática e sobretudo em análise se resolverem dizendo que dado um $\varepsilon < \varepsilon_0$ suficientemente pequeno existe um $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que se $|f(x)| < \delta$ então *esto, esto, esto...* A primeira pergunta que deveria formular-se é se eu tenho ε, como é que descubro o $\delta(\varepsilon)$? Eu acho que é importante mostrar o resultado, mas temos também de ser explícitos. A segunda questão: supondo que dado ε eu tenho um método para calcular $\delta(\varepsilon)$? Terceira: o resultado é válido para $\varepsilon < \varepsilon_0$. Quanto é que vale ε_0? Quarta pergunta: por que razão para valores inferiores a ε_0 não é válido o resultado? O que é que mudou? Eu acho que um matemático deveria colocar-se desde este ponto de vista porque de outra maneira sinto que estamos a enganar os clientes.

Todas as observações parecem mostrar que as trajetórias de Júpiter, Saturno, Urano e Neptuno em redor do Sol são quasi-periódicas. Isto não é verdade porque as trajetórias da Terra, de Mercúrio e de Plutão são caóticas e influenciam as demais, mas se desprezarmos isto serão quasi-periódicas. Qual é a massa de Júpiter? Um milésimo da massa do Sol, e todas as outras muito menores. Poderemos aplicar a teoria KAM, que nos diz que se tivermos o Sol e quatro planetas com massas suficientemente pequenas as órbitas quasi-periódicas irão persistir? Parece que sim, mas quando vais fazer os cálculos percebes que para isso seria necessário que a massa dos planetas fosse inferior a um quilo! O resultado é muito interessante, mas de facto tem de ser melhorado. Quando calculas as coisas, percebes imediatamente a importância dos resultados.

Existem outro tipo de dificuldades, quando não podemos deduzir os nossos modelos a partir de princípios físicos gerais mas apenas dispomos de dados. O problema surge muita vezes quando os dados de que dispomos não têm a precisão necessária. Isto passou-se no trabalho conjunto com os químicos de Tarragona de que falei atrás. Temos então de encontrar um método de medição que produza melhores resultados.

Um terceiro aspeto importante é quando tens um fenómeno muito interessante mas vais calcular a probabilidade de ele acontecer e percebes que ronda qualquer coisa da magnitude do 10^{-20}. Percebes imediatamente que pode ser muito interessante mas tem uma importância muito relativa.

GONÇALO Qualquer coisa como a solução em forma de oito para o problemas dos três corpos...

SIMÓ Precisamente! Isso é apenas uma curiosidade.

GONÇALO Como é que vê o futuro da investigação em matemática?

SIMÓ Além de diminuir a separação que temos vindo a discutir entre a teoria e a prática, julgo que no futuro o fundamental é que exista muito mais cooperação interdisciplinar.

GONÇALO Uma última questão. Há uma série de inovações que são desenvolvidas nas universidades. Contudo, vivemos numa sociedade cada vez mais desigual. De que forma podemos garantir que a sociedade lucra, como um todo, com o conhecimento gerado?

SIMÓ Não sei, mas dei há 15 ou 20 anos uma entrevista a um jornal em que dizia que nós, os matemáticos, estávamos subaproveitados. Há umas semanas, saiu na imprensa uma estatística que mostrava que, de todos os recém-licenciados, os matemáticos eram os que tinham uma taxa de desemprego mais baixa, rondando os cinco por cento. Julgo que isto reflete a minha certeza de que um matemático pode contribuir para que as coisas melhorem, para que se tornem mais eficientes. E isto poderá acontecer quer em medicina quer em produções agrícolas, no que quer que seja, pois podem contribuir para melhorar a planificação, questões relacionadas com o controlo de qualidade. Há pouco tempo esteve em Barcelona um matemático sueco da Universidade de Lund que passa parte do seu tempo no Instituto Pasteur, em Paris. Neste instituto dispõem de grandes quantidades de dados e a questão é saber se se pode fazer algum tipo de classificação. Contudo, para que os matemáticos possam demonstrar a sua utilidade é necessário ir para lá do 'para todo o delta existe um épsilon!' [Risos] E terão de ter a capacidade de comunicar com um físico, que é fácil, com um químico, que é menos fácil, e com um médico, que é muito menos fácil! [Risos] Há 40 anos, um filólogo vei ter comigo para ver se o podia ajudar a fazer uma análise morfológica de línguas semíticas: árabe, hebreu e aramaico. Disse-lhe que se ele me trouxesse as regras morfológicas e as literações, isso seria o suficiente para o ajudar. E de facto funcionou, mesmo eu não sabendo nada de árabe ou de aramaico. Ele estava consciente de que a matemática poderia ser útil porque tinha feito durante a licenciatura alguns cursos de matemática.

GONÇALO Existe o problema da linguagem...

SIMÓ Sim, a linguagem médica parece complicada mas na verdade tudo está ligado a uma origem etimológica que vem do grego e do latim. No caso da matemática as coisas são muito diferentes. Se vais explicar a um não matemático o que é uma variedade hiperbólica, essa pessoa irá certamente perder-se nos detalhes. Há que fazer um esforço para encontrar uma linguagem em que todos possam comunicar.

GONÇALO Bem, queria agradecer-lhe o facto de ter encontrado este canto para falarmos um pouco.

SIMÓ O prazer foi todo meu!

Nuno Camarneiro
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

AS CORES DE GOETHE

Goethe não era um grande cientista, mas era um observador minucioso, com uma acuidade sensorial que pôs ao serviço da poesia e da observação do mundo natural. Na obra *A Teoria das Cores* tentou, sem sucesso, derrotar a teoria de Newton, ficou a sua visão poética, humana e sensorial do fenómeno da cor.

Johann Wolfgang von Goethe (1749-1832) foi uma das maiores figuras da literatura alemã e do romantismo europeu. Poeta, ficcionista e dramaturgo, membro do movimento *Sturm und Drang* (Tempestade e Ímpeto) e o autor das obras *A Paixão do Jovem Werther* e *Fausto.* Goethe interessou-se também pela ciência, em particular pela botânica, a anatomia e a luz e a cor, o que o levou a escrever *Teoria das Cores*, uma obra extensa com mais de 1400 páginas, provavelmente o maior volume alguma vez publicado sobre o tema. Goethe orgulhava-se deste trabalho e esperava até que pudesse ser considerado o seu mais importante legado.

Do ponto de vista estrito da física, esta obra de Goethe está cheia de erros e de intuições erradas. Percebe-se que existia uma vontade de contrariar Newton e de restaurar algum simbolismo e uma perspetiva mais humana e artística à descrição do fenómeno da cor.

Segundo a sua conceção, existem duas cores fundamentais: o amarelo e o azul. O vermelho seria um "aumento" do amarelo e o violeta, um "aumento" do azul. Defende ainda que as cores decorrem de uma oposição primordial (e algo mística) entre luz e escuridão, uma luta entre dois poderes. Goethe opunha-se ao pensamento atomista e mecanicista, e Newton era o alvo a abater.

A História foi implacável para com a sua teoria e nenhum manual de ótica ou de física geral lhe reserva um lugar no índice, mas algumas das suas observações vieram a revelar-se certeiras, embora mais relevantes nos campos da arte, da psicologia e da fisionomia. Foi ele o percursor da divisão entre cores quentes (vermelho, amarelo, laranja) e cores frias (azul, violeta, cinzento), que muitos *designers* e decoradores ainda usam. É também responsável pela observação e pela descrição de fenómenos que só muito mais tarde viriam a ser explicados, tais como as sombras coloridas, os *blue shift* e *red shift* que se observam sob algumas condições atmosféricas, as cores complementares e as imagens residuais que se devem a diversos processos fisiológicos.

Goethe não era um grande cientista, mas era um observador minucioso, com uma acuidade sensorial que pôs ao serviço da poesia e da observação do mundo natural. Talvez lhe faltasse alguma matemática e um melhor entendimento do método científico, ou talvez representasse apenas uma vontade muito humana de encontrar o maravilhoso por entre o prosaico.

UMA BREVÍSSIMA HISTÓRIA DOS INFINITOS INFINITOS

Thiago Augusto S. Dourado
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
doranykov@yandex.com

> "Todas as coisas são de tal natureza que, quanto mais abundante é a dose de loucura que encerram, tanto maior é o bem que proporcionam aos mortais."
>
> Erasmo de Rotterdam

INTRODUÇÃO

A história aqui contada começa, não cronologicamente, em Halle, uma cidade provinciana do leste alemão, onde foi desencadeada na segunda metade do século XIX uma revolução protagonizada por um matemático da universidade municipal local. George Cantor (1845-1918) deu o "primeiro tiro" nesta tal revolução quando colocou a "simples" questão: *Quão grande é o infinito?*

O que daí decorreu acabou por abalar as fundações da matemática e de toda a ciência em geral.

É válido salientar que muitos antes de Cantor, pelo menos desde os gregos, com tanto prestígio como ele ou maior, confrontaram a questão do infinito. Mas foi este matemático russo, advindo da sofisticada São Petersburgo, quem fez a travessia transcendental que ninguém mais conseguira e encontrou a resposta, mas por isso pagou um alto preço. Cantor viria a morrer a 6 de janeiro de 1918, louco, internado num manicómio da Universidade de Halle, e as suas únicas companhias eram os soldados desfigurados oriundos da Primeira Guerra Mundial. A questão é: *O que é que poderia ele, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, ter visto que o levou à loucura?*

1. O INFINITO POTENCIAL E O INFINITO EM ATO

Todo o mundo moderno é baseado em curvas, trajetórias e forças, e no âmago destas coisas está o infinito. Ao se "olhar microscopicamente" para uma trajetória suave e lisa, ver-se-á que na realidade ela não é lisa, é, na verdade, composta por um número infinito de segmentos de retas infinitamente pequenos e cada segmento é um instante em que não há movimentos, é como quadros de um filme que, apresentados em sequência, dão a impressão de movimento.

Desta forma, toda a coisa se baseia então no conceito de infinito, e ele funciona, e o facto de ele funcionar era o que bastava para os pensadores da época. Entretanto Cantor veio e protagonizou o pensamento de que se tudo se baseia no infinito, tem-se de o entender, saber que funciona não deveria ser o suficiente.

Dizer que "o infinito funciona" significa dizer que o manuseio das relações matemáticas que envolvem este conceito é praticável sem que seja necessário um seu entendimento completo, tal como se deu com o conceito de número durante um longo período da História.

Para que se compreenda as ideias de Cantor é importante observar e clarificar que existem dois tipos de infinitos a considerar: o *infinito potencial* e o *infinito em ato*.

O conceito de *infinito potencial* está diretamente ligado à ideia de sucessão infinita, isto é, na sua dinâmica operacional nunca se encontra o fim, ou seja, o processo de operar nunca é finalizado.

Em suma, o infinito potencial é usado para processos que podem, em princípio, continuar por um tempo maior do que qualquer outro tempo, ou para objetos que podem, em princípio, crescer mais do que qualquer outro objeto.

Entre a comunidade filosófica e a comunidade matemática, o conceito de infinito potencial sempre foi de fácil aceitação e não apresentava controvérsias, o desconforto que vieram a sofrer estas comunidades deu-se quando se almejou considerar a *concretização do infinito potencial como um todo completo, um "infinito em ato"*, ou seja, uma quantidade que coloca um "fim completo" no *processo de atuação* do infinito potencial. Neste caso, o infinito não é mais visto como um processo, mas sim como uma "quantidade infinita" estática. Para se ter uma ideia da complexidade deste conceito, Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) considerava o infinito potencial e afirmava *não fazer sentido* pensar na sua concretização como um todo completo, ou seja, um infinito em ato. Perante estes factos, tem-se a questão: *será possível uma entidade completa e existente de tamanho infinito?*

2. A DEFINIÇÃO DE INFINITO

George Cantor foi um matemático de primeira grandeza, os seus trabalhos estendem-se a diversos ramos da matemática, inclusive à "rainha" Teoria dos Números. No entanto, a sua grande obra foi a polémica e revolucionária teoria do infinito, pela qual ele foi venerado e execrado.

Como já referido, o infinito em ato é a concretização do infinito potencial como um todo completo, desta forma não se trata de um objeto em si, mas de vários objetos cuja totalidade resulta numa "quantidade" chamada de *infinito*, ou seja, conjuntos cuja totalidade dos seus elementos, a sua *cardinalidade*, como é denominada, é infinita. Por exemplo, ao se dizer que a cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinita, não se está a fazer referência a um número em especial, mas sim à totalidade destes números. Escrever-se-á $\#A$ para denotar a cardinalidade do conjunto A.

Dir-se-á que os conjuntos A e B têm a mesma *cardinalidade*, $\#A = \#B$, se, e somente se, existir uma correspondência um-a-um (bijetiva) entre os elementos de A e os elementos de B. Neste caso, diz-se também que os conjuntos A e B *são do mesmo tamanho*.

Nos seus *Elementos*, Euclides ($\approx$ 300 a.C.) coloca como facto fundamental a seguinte "noção comum" (axioma): *o todo é maior do que as suas partes.* Richard Dedekind (1831-1916), entretanto, um grande amigo de Cantor e outro "gigante da matemática", fundador da Teoria Algébrica dos Números, admitiu uma propriedade vislumbrada por Bernard Bolzano (1781-1848), que contrariava o axioma de Euclides, e, em 1888, num artigo intitulado "Was sind und was sollen die Zahlen?" (O que são e para que servem os números?), ele utilizou-a para apresentar uma definição de conjunto infinito (e conjunto finito): *Um conjunto A é infinito se, e somente se, existir um subconjunto próprio*[1] *B de A e uma correspondência um-a-um entre A e B;* e o *conjunto A será finito se não for infinito.*

Desta forma, enquanto o conjunto vazio, simbolizado por $\emptyset$, é finito, pois não possui nenhum subconjunto próprio, o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, dos números naturais, por outro lado, é um conjunto infinito, pois existe uma correspondência um-a-um, dada pelo dobro, entre o conjunto dos números naturais e o conjunto $\mathbb{P}$ dos números naturais pares:

$$\begin{array}{rccccccc} \text{Números naturais:} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \text{Números naturais pares:} & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots \end{array}$$

E assim, o conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais e o conjunto $\mathbb{P}$ dos números naturais pares têm a mesma quantidade de elementos, ou seja, *existe a mesma quantidade de números naturais e números naturais pares.*

Neste exemplo tem-se um caso real que fere a intuição latente, se existe uma mesma quantidade de números naturais e números naturais pares, "aonde estão" os números naturais ímpares? O interessante é que o conjunto $\mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$ dos números naturais ímpares, e o conjunto $\mathbb{N}$ também são do mesmo tamanho, pois, como no caso atrás mencionado, existe uma correspondência um-a-um, dada pelo dobro acrescido da unidade, entre os números naturais e os números naturais ímpares. Assim, o conjunto dos números naturais pares, o conjunto de todos os números naturais e o conjunto dos números naturais ímpares são do mesmo tamanho, possuem a mesma cardinalidade.

Seguindo esta linha pode ver-se facilmente que se for retirada uma quantidade finita qualquer de números naturais do conjunto dos números naturais, o conjunto que resulta continuará a ser infinito. A título de exemplificação, suponha que sejam retirados os números 3 e 5 do conjunto dos números naturais. Ver-se-á, então, que o conjunto que resulta continua a ser infinito, tendo visto que se pode construir uma correspondência um-a-um da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \end{array}$$

Esta propriedade pode ser formalizada de uma maneira mais geral, como no seguinte teorema: *Se A é um conjunto infinito e $a_1, \ldots, a_n \in A$, então $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto infinito.*[2]

Cantor obteve então, com o uso deste teorema, o seu primeiro avanço na questão do "tamanho do infinito": *Não existe nenhum conjunto que seja infinito e que tenha cardinalidade menor do que a cardinalidade do conjunto dos números naturais, ou seja, não existe infinito menor do que o infinito dos números naturais.* Assim, ele utilizou o símbolo $\aleph_0$ para denotar a cardinalidade dos números naturais (o mesmo será seguido aqui).

3.CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

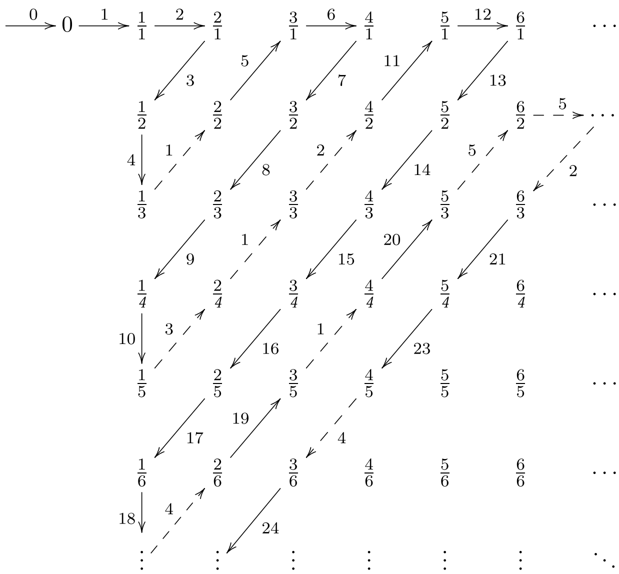
George Cantor havia conseguido vislumbrar um resultado fantástico, que dizia que todo o conjunto infinito tem cardinalidade igual ou maior do que a cardinalidade dos números naturais. Por outro lado, se todos os conjuntos infinitos tivessem cardinalidade não superior à cardinalidade de $\mathbb{N}$, então a questão do "tamanho do infinito" estaria resolvida, a saber, ter-se-ia que o infinito é do tamanho do conjunto que contempla a totalidade dos números naturais. Ele começoiu então a investigar esta questão, e em 1882, num trabalho intitulado *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen* (Fundamentos de uma teoria geral das multiplicidades. Uma investigação matemático-filosófica da teoria do infinito), introduziu o conceito de *enumerabilidade* de conjuntos: *Um conjunto é enumerável se, e somente se, for um conjunto finito ou estiver em correspondência um-a-um com o conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais.* Desta forma, a questão do "tamanho do infinito" traduz-se, em princípio, em analisar a enumerabilidade dos conjuntos.

Um facto intuitivamente claro é aquele que diz que entre dois números naturais consecutivos não existe nenhum número natural. Entretanto, sabe-se que existe uma infinidade de frações. E ainda, indo um pouco mais além, entre duas frações quaisquer existe ainda uma infinidade de frações. Vendo esta propriedade, é de se esperar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, de todas as frações, tenha cardinalidade maior do que a cardinalidade dos números naturais, ou seja, que seja não-enumerável, tendo visto que entre duas frações quaisquer existe [por si só] uma infinidade de frações. Entretanto, ao analisar a enumerabilidade do conjunto dos números racionais, Cantor obteve a surpreendente constatação de que este conjunto é do mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais, ambos possuem a mesma cardinalidade. Por outras palavras: *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais é um conjunto enumerável*.

Para demonstrar este resultado surpreendente, ele construiu uma correspondência um-a-um entre os racionais e os naturais usando um método totalmente novo, chamado *método da grade infinita*. Considera-se, inicialmente, uma grade infinita onde estão alocadas todas as frações: na primeira linha são alocadas as frações com 1 no denominador e, adicionalmente, o zero (os números naturais); na segunda linha são alocadas as frações (não-nulas) com 2 no denominador; na terceira linha, as frações (não-nulas) com 3 no denominador, e assim por diante.

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \cdots \\
 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \cdots \\
 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \cdots \\
 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \cdots \\
 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \frac{6}{5} & \cdots \\
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \frac{6}{6} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Todas as frações aparecem então em algum lugar bem estabelecido desta grade infinita, por exemplo, a fração $4/5$ é encontrada na quarta coluna da quinta fileira. Para obter uma bijeção entre os números naturais e os números racionais, traça-se uma linha poligonal entre 0 e 1, e que continua indo e voltando diagonalmente sem saltos pelas frações. Acompanhando a ordenação obtida por meio desta linha poligonal, obtém-se uma bijeção que pode ser ilustrada segundo o esquema abaixo:



Ou seja, tem-se uma enumeração do conjunto do números racionais, que pode ser representada mais explicitamente pelo seguinte:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 3 & 4 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
5 & 6 & \frac{5}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{3}{5} & \frac{5}{3} & \cdots
\end{array}$$

4. "TAMANHO DO INFINITO" - QUESTÃO ENCERRADA?

Com as descobertas de Cantor, a questão do "tamanho do infinito" parecia estar resolvida, tudo fazia crer que o infinito é do mesmo tamanho da totalidade dos números

[1] Por subconjunto próprio de *A* entende-se qualquer subconjunto de *A* que seja diferente de *A*.

[2] A notação *A**B* indica os elementos de *A* que não são elementos de *B*.

naturais. Foi então que ele se propôs a encontrar uma maneira de mostrar que o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, era enumerável, mas não obteve êxito.

Ao considerar o conjunto de todos os números reais, Cantor constatou que este conjunto não era enumerável, mas era infinito, pois $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{2}$$

é uma bijeção e o intervalo $(-1,1)$ é uma parte própria de $\mathbb{R}$. Logo, a cardinalidade dos números reais, também chamada de contínuo, e por isso com o símbolo $\mathfrak{c}$, é maior do que a cardinalidade do conjunto dos números naturais. Em símbolos:

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}.$$

Isto porque ambas as cardinalidades são infinitas, e distintas entre si, e pelo facto de não existir cardinalidade infinita que seja menor do que $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$.

Para provar que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável, é suficiente mostrar que o intervalo $(0,1)$ não é enumerável. Suponha, entretanto, o contrário, que $(0,1)$ é enumerável. Neste caso, existirá uma correspondência um-a-um entre $\mathbb{N}$ e o intervalo $(0,1)$, de modo a se poder listar todos os elementos do intervalo da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccl} 1 & \to & 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ 2 & \to & 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ & \vdots & \\ \ell & \to & 0, a_{\ell 1}a_{\ell 2}a_{\ell 3}\ldots \\ & \vdots & \end{array}$$

em que cada $a_{jk} \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Considere agora o número D entre 0 e 1 definido por $D = 0, d_1d_2d_3\ldots$, onde $d_1 = a_{11}+1$, $d_2 = a_{22}+1$, $d_3 = a_{33}+1$ e assim por diante, observando que se $a_{ii} = 9$, então $d_i = 1$. É bastante claro que D está entre 0 e 1, entretanto D não pode estar na lista acima, pois $d_1 = a_{11}+1 \neq a_{11}$, $d_2 \neq a_{22}$, $d_3 \neq a_{33}$, e assim sucessivamente, mostrando que o número D não está na lista. Portanto, não se pode criar uma correspondência um-a-um entre o conjunto dos números naturais e o intervalo $(0,1)$.

5. A HIERARQUIA INFINITA DE INFINITOS

Sabendo que o infinito dos números reais é maior do que o infinito dos números naturais, surgem as questões: Será que existem infinitos maiores do que o infinito dos números reais? Se houver, como os obter? Nesta secção encontram-se as respostas a estas questões e a apresentação dos dois maiores teoremas de Cantor.

O conjunto formado por todos os subconjuntos de um dado conjunto A é chamado *conjunto das partes* de A, e é denotado por $\wp(A)$.

(5.1) Primeiro Teorema de Cantor. *Se A é um conjunto, finito ou infinito, então a cardinalidade de A é (estritamente) menor do que a cardinalidade do conjunto das partes de A. Em símbolos:*

$$\#A < \#\wp(A).$$

Demonstração. Se $A = \emptyset$, então $\#A = 0 < 1 = \#\wp(A)$. Suponha que $A \neq \emptyset$. Neste caso, a função $g : A \to \wp(A)$, dada por $g(x) = \{x\} \in \wp(A)$, para todo $x \in A$, é injetiva. Desta forma, o conjunto A tem a mesma cardinalidade do conjunto $\{\{x\} \mid x \in A\}$ de $\wp(A)$ ou, equivalente, $\#A \leq \#\wp(A)$.

Para que a demonstração fique completa só resta mostrar que a cardinalidade de A não é igual à cardinalidade do conjunto das partes de A. Para isso suponha o contrário, que existe uma bijeção $f : A \to \wp(A)$. Considere o conjunto $S = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$, que consiste naqueles elementos de A que não estão nas suas imagens sob f. Como $S \in \wp(A)$ e $f : A \to \wp(A)$ é uma bijeção, existe um elemento $e \in A$ tal que $f(e) = S$. Neste caso, ou $e \in S$ ou $e \notin S$. Se $e \in S$, segue, da definição de S, que $e \notin f(e)$, o que é impossível, pois $f(e) = S$ e $e \notin S$. Se, por outro lado, $e \notin S$, como $f(e) = S$, tem-se $e \notin f(e)$, consequentemente, da definição de S, $e \in S$ e, portanto, $e \in f(e)$, o que é novamente impossível. Assim uma contradição foi gerada e o Primeiro Teorema de Cantor está demonstrado. □

Um escólio para o Primeiro Teorema de Cantor é o seguinte: *Para um conjunto qualquer, finito ou infinito, tem-se que a totalidade dos seus elementos é sempre menor do que a totalidade dos elementos do conjunto das partes deste mesmo conjunto. Por outras palavras, se um conjunto é infinito, existe um outro conjunto, diferente deste, que é maior na grandeza de infinito, que é, a saber, o conjunto das partes deste mesmo conjunto. Ou seja, sempre existe um infinito maior do que o infinito de qualquer conjunto infinito, que é o infinito do conjunto das partes deste mesmo conjunto.*

Desta forma, existe um conjunto maior na grandeza de infinito do que o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, que é, a saber, $\wp(\mathbb{R})$, e, que por sua vez, é menor, na grandeza de infinito, do que o conjunto $\wp(\wp(\mathbb{R}))$, que é menor do que o conjunto $\wp(\wp(\wp(\mathbb{R})))$, e assim sucessivamente. Portanto, estão respondidas explicitamente as questões colocadas no início desta secção.

O próximo teorema relaciona a cardinalidade das partes e as potências de cardinais.

(5.2) Teorema.*Se A é um conjunto qualquer, finito ou infinito, então a cardinalidade das partes de A é igual à cardinalidade do conjunto de todas as funções com domínio em A e contradomínio em $\{0,1\}$, ou seja,*

$$\#\wp(A) = 2^{\#A}.$$

Em particular, se $A = \mathbb{N}$ então $\#\wp(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$.

Demonstração. Se $A = \emptyset$, então

$$\#\wp(A) = \#\{0\} = 1 = 2^0 = 2^{\#A},$$

e o resultado verifica-se. Suponha então que $A \neq \emptyset$, e associa-se a cada subconjunto $D \subseteq A$ a função característica $\chi_D : A \to \{0,1\}$ definida por

$$\chi_D = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in D, \\ 0 & \text{se} \quad x \in A \setminus D. \end{cases}$$

Observe agora que a função de $\wp(A)$ em B^A que leva D em χ_D é uma bijeção, facto que segue diretamente da definição de χ_D. Portanto, os conjuntos $\wp(A)$ e B^A têm a mesma cardinalidade, ou seja, $\#\wp(A) = 2^{\#A}$.

□

Por fim, do Primeiro Teorema de Cantor tem-se $\aleph_0 < \#\wp(\mathbb{N})$ e do Teorema (5.2) tem-se $\#\wp(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$. Desta forma, pode-se exibir uma c*adeia hierárquica infinita de infinitos*, ou, noutras palavras, uma *sequência infinita ordenada de números (cardinais) transfinitos*[3], começando do menor entre eles:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < 2^{2^{2^{2^{\aleph_0}}}} < 2^{2^{2^{2^{2^{\aleph_0}}}}} < \cdots$$

O segundo grande teorema de Cantor veio responder à questão: *Quão maior do que o conjunto dos números naturais, na grandeza de infinitos, é o contínuo - o conjunto dos números reais?* A importância fundamental deste teorema é que ele fez por relacionar, numa equação, o cardinal $\aleph_0$ dos números naturais e o cardinal $\mathfrak{c}$ dos números reais.

(5.3) Segundo Teorema de Cantor. *A cardinalidade do conjunto das partes do conjunto dos números naturais é igual à cardinalidade do conjunto dos números reais. Em símbolos:*

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Demonstração. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \wp(\mathbb{Q})$ definido por

$$f(a) = \{a \in \mathbb{Q} \mid x < a\},$$

para cada $a \in \mathbb{R}$. Esta função é injetiva, pois se a e b são números reais tais que $a < b$, então, do facto de $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$, segue-se que existe um número racional r tal que $a < r < b$, logo, $r \in f(b)$, mas $r \notin f(a)$, ou seja, se a e b são reais distintos então $f(a) \neq f(b)$. Portanto, $\mathfrak{c} \leq \#\wp(\mathbb{Q}) = \#\wp(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$.

Para provar a desigualdade reversa, toma-se $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(f) = 0, f(1) f(2) f(3) \ldots$$

em que $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Note que $\psi(f)$ é um número decimal consistindo em 0's e 1's. Se $f, g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ são tais que $f \neq g$, então $\psi(f) = \psi(g)$, pois os decimais que definem $\psi(f)$ e $\psi(g)$ são diferentes. Logo, $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ é injetiva, e portanto, $\mathfrak{c} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Desta forma, $\mathfrak{c} \leqslant 2^{\aleph_0}$ e $2^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{c}$, e assim $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

□

6. A HIPÓTESE DO CONTÍNUO, O PROBLEMA QUE LEVOU CANTOR À LOUCURA

George Cantor já era consagrado, tudo corria bem na sua vida, e ele acreditava que isso era devido ao facto de ser guiado por Deus, mas foi então que ele fez a questão que fez, para desenvolver parte substancial da matemática do século XX, mas que também fez com que a sua vida declinasse: *Já se sabe que o infinito dos números naturais é menor que o infinito dos números reais – o contínuo – a questão é: será que existe um infinito que seja maior do que o infinito dos números naturais e menor do que o infinito dos números reais?* Cantor, a princípio, supôs que a resposta a esta questão seria negativa, e chamou a esta suposição *hipótese do contínuo*, isto é, ele supôs que não existia nenhum cardinal $\mathfrak{x}$ tal que

$$\aleph_0 < \mathfrak{x} < 2^{\aleph_0}.$$

O problema parecia ser simples e Cantor começou a trabalhar na solução, mas eis que a hipótese do contínuo mostrou não ser nada simples. Após mais de dois anos a trabalhar com afinco neste problema, em 1884, e com os ataques pessoais e profissionais que vinha a sofrer, devido às suas ideias revolucionárias, e que eram cada vez mais intensos, Cantor pensou não ser mais capaz de suportar tudo aquilo, e não suportou! Em maio daquele ano ele sofreu uma enorme crise nervosa, a sua filha descreveu como a sua personalidade se transformou, as falas sem sentido seguidas de silêncio absoluto e incomunicação total. Foi nessa época que ele foi internado pela primeira vez no Sanatório Universitário de Halle. Tudo em Cantor mudou após aquela

[3] A nomenclatura "número transfinito" foi dada por Cantor à quantidade que representa a cardinalidade dos conjuntos infinitos. O nome deriva do facto de estas quantidades transcenderem até mesmo o infinito.

crise, ele disse aos amigos não saber se ia conseguir fazer (ou ensinar) matemática novamente, pediu à universidade na qual era professor, autorização para ministrar cursos de filosofia em lugar dos cursos de matemática, pedido que foi aceite sem maiores problemas. Mas, apesar de ele afirmar não ser mais capaz de fazer matemática, jamais parou de trabalhar na hipótese do contínuo.

Mittag-Lefler (1846-1927), um matemático sueco, fundador da *Acta Matehmatica*, que era um grande amigo de Cantor, a certa altura recebeu uma carta eufórica deste dizendo que havia demonstrado a hipótese do contínuo e que a enviaria em algumas semanas. Mas, ao invés disso, três meses mais tarde, uma segunda carta apareceu, e nessa pode perceber-se o constrangimento de Cantor, nela ele dizia que sentia muito, que jamais deveria ter dito que havia provado a hipótese do contínuo. Posteriormente, três semanas após essa segunda carta, Cantor enviou uma outra, em que dizia: "Eu provei que a hipótese do contínuo é falsa." E o ciclo continua, ele prova que é verdadeira, depois prova que é falsa, para a frente e para trás. Na verdade, o que Cantor estava a fazer, era a levar-se à loucura aos poucos. Por mais que tentasse obter êxito, de alguma forma as suas tentativas eram frustradas e ele não conseguia resolver a hipótese do contínuo, descreve então o infinito como um abismo, um vácuo talvez, entre o que ele havia achado e o que ele sabia existir mas não podia alcançar.

Após este período, a hipótese do contínuo permaneceria inerte durante anos, até que, em 1938, Kurt Gödel (1906-1978), num trabalho intitulado *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory* (A Consistência do Axioma de Escolha e da Hipótese Generalizada do *Continuum* com os Axiomas da Teoria dos Conjuntos), veio e tirou-a desta inércia com um importante avanço. Tinham entretanto surgido alguns paradoxos na teoria dos conjuntos, exigindo assim que esta teoria fosse mais bem formalizada. A axiomática dada por Ernest Zermelo (1871-1953) e Abraham Fraenkel (1891-1965), acrescida do axioma de escolha, é considerada a mais eficiente formalização da teoria dos conjuntos. O que Gödel fez, em relação à hipótese do contínuo, foi fortalecer e ajudar a fixar esta axiomática à teoria dos conjuntos, pois provou que esta hipótese e esta axiomática eram consistentes: *A negação da hipótese do contínuo não pode ser provada a partir dos axiomas de Zermelo-Fraenkel mais o axioma de escolha, ou seja, eles são consistentes. Isto é, não há contradições entre a hipótese do contínuo e estes axiomas. Pode então construir-se toda a teoria dos conjuntos, baseada no axioma de escolha e nos axiomas de Zermelo-Fraenkel, e assumir que a hipótese do* continuum *é verdadeira.*

Em 1963, no entanto, usando uma técnica totalmente nova, chamada *forcing*, um jovem matemático dos Estados Unidos, chamado Paul Cohen (1934-2007), demonstrou um importante resultado envolvendo os axiomas de Zermelo-Fraenkel, o axioma de escolha e a hipótese do contínuo: *A hipótese do contínuo não pode ser provada a partir dos mesmos axiomas de Zermelo-Fraenkel mais o axioma de escolha, eles são independentes.*

Em suma, a hipótese do contínuo não contradiz a teoria dos conjuntos baseada nos axiomas de Zermelo-Fraenkel mais o axioma de escolha, mas somente com base nestes axiomas ela não pode ser provada, eles são insuficientes, ou independentes.

Desde a sua primeira crise, Cantor passou períodos de idas e vindas ao sanatório de Halle, com internamentos cada vez mais duradouros, até à sua morte, em 1918, sozinho e tomado pela loucura.

Justo não seria este texto se deixasse de mencionar que houve também matemáticos de primeira grandeza que entraram em defesa de Cantor. O já citado Mittag-Lefler foi um deles, mas, sobretudo, David Hilbert (1862-1943), um dos mais importantes matemáticos de todos os tempos, que também entrou abertamente em defesa das ideias de Cantor. Para se ter uma ideia da importância de Hilbert, foi ele quem deu uma nova fundamentação à matemática no século XX, tendo trabalhado de forma significativa em quase todas as áreas da matemática: há a "Teoria dos Números de Hilbert", as "Equações Diferenciais" e as "Equações Integrais de Hilbert", os "Espaços de Hilbert", a "Geometria de Hilbert" e etc., além de ter resolvido, antes de Einstein, as equações da Teoria da Relatividade Geral. Foi ele também quem praticamente "pautou" a pesquisa matemática do século passado, quando, em 1900, no Congresso Mundial de Matemática, em Paris, apresentou uma conferência que continha os famosos 23 problemas, cuja soluções foram objeto de desejo da maioria esmagadora dos matemáticos espalhados pelo mundo. O primeiro problema desta lista foi justamente a hipótese do contínuo. Para ilustrar a importância do que Cantor tinha feito, Hilbert disse a célebre e memorável frase: "Ninguém poderá tirar-nos do paraíso em que Cantor nos colocou."

REFERÊNCIAS

[1] Dauben, J. W. *Georg Cantor - His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton University Press, Princeton, 1990.

[2] Halmos, P. R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos.* Tradução de Lázaro Coutinho. Editora Ciência Moderna, Coleção Clássicos da Matemática, Rio de Janeiro, 2001.

[3] Lin, S-Y. T.; Lin, Y-F. *Set Theory: An Intuitive Approach.* Houghton, Mifflin Co., Boston, 1974.

SOBRE O AUTOR

Thiago Augusto S. Dourado é formado em Matemática Pura pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, um estado do centro brasileiro onde se localiza o Pantanal. Atualmente integra o corpo académico da Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF. As suas principais áreas de interesse são a álgebra e a teoria dos números, devido à influência de seu preceptor e amigo, o mundialmente conhecido Paulo Ribenboim, mas tem um enorme apreço pela filosofia e pela história da matemática, como fica claro no presente artigo.

BARTOON

Luis Afonso

Publicado originalmente no jornal Público, em 04/10/2015. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Adérito Araújo Universidade de Coimbra

EDITORES:
Daniel Pinto Universidade de Coimbra
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:
António Machiavelo Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Arsélio Martins** Escola Secundária José Estevão, Aveiro • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Joana Latas** HBD - Tourism Investments, Departamento de Educação, São Tomé e Príncipe • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Marcelo Viana** IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Sílvia Dias SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

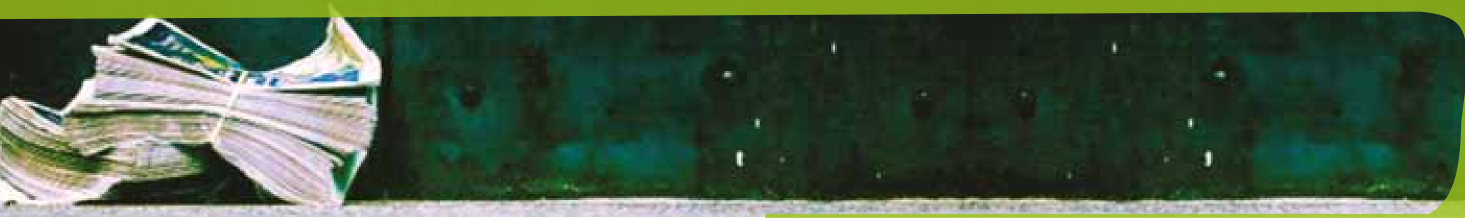
IMPRESSÃO:
Dossier – Comunicação e imagem

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



SPM COMEMORA **75 ANOS** COM **CONFERÊNCIA INTERNACIONAL**

Integrada nas celebrações dos 75 anos da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), a conferência internacional "As Ciências Matemáticas e as Ditaduras no Século XX - A Europa Ocidental, Portugal e as suas Conexões Atlânticas" realizar-se-á na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, entre 10 e 12 de dezembro. Este encontro pretende ser um ponto de reflexão sobre o desenvolvimento e a prática da matemática em regimes ditatoriais de algum modo relevantes para Portugal, atendendo à situação histórica particular do País nas décadas de 1930 e de 1940. Participarão, como tal, neste encontro internacional investigadores das ditaduras vigentes em Espanha, em Itália e na Alemanha, abordando-se ainda o caso francês durante a ocupação nazi (1940-1944). Pela importância que assumiram na emigração dos matemáticos portugueses no pós-Segunda Guerra Mundial, serão também analisados os casos do Brasil e da Argentina. As inscrições para esta conferência podem ser efetuadas na página oficial do evento, em *http://matematicaeditaduras.*

LIVRO DE PROBLEMAS DE ***ALMADA NEGREIROS*** LANÇADO EM **DEZEMBRO**

Expressão máxima das construções geométricas na obra de Almada Negreiros, o painel "Começar" (exposto no átrio da Fundação Calouste Gulbenkian) é fruto de várias décadas de estudos geométricos. No *Livro de Problemas de Almada Negreiros*, Pedro J. Freitas e Simão Palmeirim Costa descodificam alguns dos elementos matemáticos presentes nas obras de Almada, ajudando a compreender a sua motivação para os incluir no seu trabalho. Este é o 14.º título da coleção Leituras em Matemática, e será lançado no mês de dezembro no âmbito das comemorações dos 75 anos da SPM.

MATEMÁTICO PORTUGUÊS **NUNO FREITAS PREMIADO** EM **ESPANHA**

O matemático português Nuno Freitas, de 31 anos, foi galardoado com o prémio José Luis Rubio de Francia (11.ª edição), concedido pela Real Sociedad Matemática Española (RSME), tendo obtido também, em consequência desta distinção, a recém-criada bolsa RSME-Fundação BBVA, no valor de 35 mil euros, e que será afeta a um projeto de investigação por um período de três anos. Nuno Freitas, atualmente investigador visitante da Universidade de Barcelona, iniciou o seu percurso académico em Portugal, no Instituto Superior Técnico, onde fez a licenciatura e o mestrado em Matemática Aplicada e Computação. Obteve posteriormente uma bolsa de doutoramento da Fundação para a Ciência e a Tecnologia através da qual se especializou, na Universidade de Barcelona, em teoria de números, mais concretamente no método modular para resolver equações diofantinas. Dando continuidade a este trabalho, alcançou os resultados que acabariam por ser premiados pela RSME: a demonstração de que curvas elípticas sobre corpos quadráticos reais são modulares (trabalho conjunto com Bao Le Hung e Samir Siksek) e do teorema de Fermat assintótico para 5/6 dos corpos quadráticos reais (trabalho conjunto com Samir Siksek). Nuno Freitas participou ainda em programas de pós-doutoramento na Universidade de Bayreuth e no Instituto Max Planck, em Bona, ambos na Alemanha. Em fevereiro do próximo ano, rumará a Vancouver (Canadá), para integrar a University of British Columbia durante dois anos.

OURO, PRATA E BRONZE PARA **PORTUGAL** NAS **OLIMPÍADAS IBERO-AMERICANAS** DE MATEMÁTICA

Ouro, prata e bronze: foram estas as medalhas que a equipa que representou Portugal em Porto Rico, nas Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática (OIAM), trouxe para casa. Francisco Andrade alcançou um resultado brilhante, com pontuação máxima, conquistando uma medalha de ouro, à semelhança do que havia conseguido no ano passado nas Honduras. Já a prata foi conquistada por Nuno Santos. O bronze coube a Alberto Pacheco, que ficou a um ponto apenas da prata, e a David Andrade, também a escassos dois pontos do nível seguinte da classificação. Realizada entre 6 e 14 de novembro, na cidade porto-riquenha de Mayagüez, esta foi uma edição especial, em que se comemoraram os 30 anos das OIAM. Ao mesmo tempo, Portugal assinala os 25 anos da sua primeira participação nesta competição. Com o resultado notável obtido em 2015, Portugal tem agora no seu histórico de participações nas OIAM seis medalhas de ouro, todas elas alcançadas nos últimos oito anos. Desde 2001 que a preparação destes alunos é assegurada pelo Projeto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. As Olimpíadas são organizadas pela Sociedade Portuguesa de Matemática, com o apoio do Ministério da Educação e Ciência, da Ciência Viva, do Novo Banco, da Fundação Calouste Gulbenkian, da Pathena e da ASA.

ANDRÉ NEVES DISTINGUIDO POR **RESOLVER PROBLEMA EM ABERTO** HÁ MAIS DE **50 ANOS**

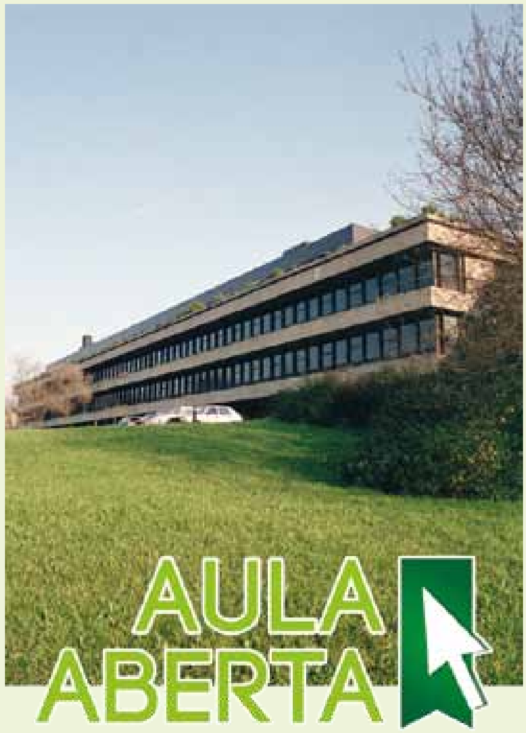
Atribuído pela American Mathematical Society, o Oswald Veblen Prize é um dos mais importantes prémios no campo da topologia e da geometria. Os matemáticos André Neves (Imperial College London), português, e Fernando Codá Marques (Princeton University), oriundo do Brasil, foram os investigadores distinguidos na edição de 2016 pelo seu trabalho notável no âmbito dos problemas variacionais na geometria diferencial, incluindo a prova da conjetura de Willmore, problema em aberto desde 1965, e resolvido pelos investigadores em 2012. Este enorme avanço científico, em que a topologia teve um papel central, permitiu deslindar a questão de como a energia de Willmore se comporta em diferentes superfícies geométricas. Além do interesse teórico desta conjetura, esta descoberta é também relevante para a biologia, no estudo do comportamento das membranas celulares. Esta não é a primeira vez que o trabalho de André Neves é distinguido. Em 2011, foi o primeiro matemático português a receber uma Starting Grant, do Conselho Europeu de Investigação (ERC –European Research Council), no valor de um milhão e 100 mil euros, para investigação em análise geométrica.

NOVA CASA PARA **BIBLIOTECA** DE **PERMUTAS** DA ***PORTUGALIÆ MATHEMATICA***

O dia 11 de novembro foi marcado pela assinatura do protocolo entre a SPM e a Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL), que regula as relações entre estas duas instituições relativamente à *Portugaliae Mathematica* e à sua biblioteca de permutas. Este acordo, sucessor de vários acordos celebrados entre a SPM e os centros de investigação matemática sediados na FCUL, permite continuar a manter acessível a toda a comunidade científica um acervo bibliográfico com mais de uma centena de títulos periódicos de matemática, nos quais se inclui a própria *Portugaliae*. Esta revista, que surgiu em 1937 impulsionada por António Aniceto Monteiro, assumiu-se desde o início como um importante instrumento para a investigação matemática em Portugal. Nas últimas décadas assistiu-se a um notável e bem sucedido esforço, desenvolvido pelas diversas comissões editoriais, para a recuperação da *Portugaliae Mathematica* enquanto veículo internacional de investigação matemática. O protocolo foi assinado no final da sessão de homenagem ao Professor João Paulo de Carvalho Dias, professor jubilado da FCUL, antigo editor-chefe da *Portugaliae* e um dos responsáveis pela sua renovação, a quem a revista dedicou um número duplo do volume do corrente ano.

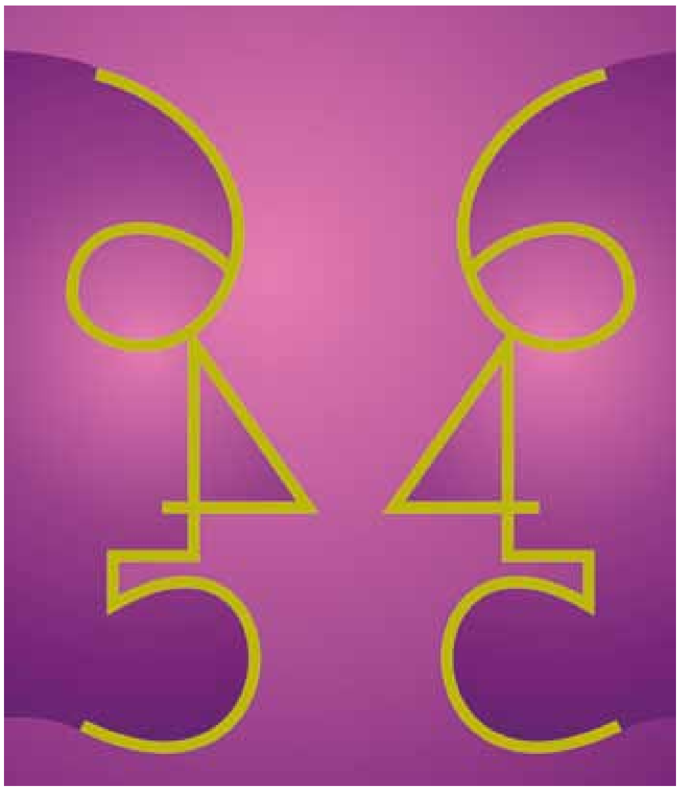
AULA ABERTA PROMOVE ***WORKSHOP*** PARA **PROFESSORES E DIRETORES** ESCOLARES

Houve lotação esgotada no *workshop* Aula Aberta: Boas Práticas, realizado no passado dia 28 de novembro, na Fundação Calouste Gulbenkian (FCG). Dirigido, em particular, a professores do 3.º ciclo e do ensino secundário, este evento desenvolveu-se em torno da Aula Aberta, um projeto conjunto da SPM e da FCG, focado na partilha de informação sobre boas práticas no ensino e na organização e na gestão escolares. No *workshop* estiveram presentes os dinamizadores da Aula Aberta e representantes de escolas participantes, que deram o seu testemunho sobre o seu envolvimento nesta iniciativa. Através da Aula Aberta algumas escolas de referência do País tornaram acessíveis a qualquer professor ou profissional de ensino as suas práticas educativas, implementadas nas disciplinas de Matemática e Português. Em *http://aulaaberta.pt* é possível consultar testes, fichas de trabalho e material didático e assistir, em regime aberto, a aulas gravadas em vídeo nas escolas participantes neste projeto, que compreende os 10.º, 11.º e 12.º anos.



FAZER DA **MATEMÁTICA** UM **CONTO**

Pelo quarto ano consecutivo, a Delegação Regional do Sul e Ilhas da SPM quer incentivar os alunos do 1.º ao 12.º ano de escolaridade a usar a matemática de forma criativa, desafiando-os a escrever e a ilustrar um conto que envolva conteúdos matemáticos. Os participantes podem concorrer a uma de oito categorias e de acordo com os ciclos de ensino em que estão integrados, na modalidade individual ou em equipa. Segundo os organizadores, o concurso "Um Conto que Contas" foi criado com o intuito de fomentar hábitos de leitura e de escrita entre os alunos, de desenvolver a sua capacidade de expressão e de comunicação, ao mesmo tempo que se estimula a sua imaginação, além de promover a articulação entre diversas áreas do saber. Os trabalhos desenvolvidos neste âmbito deverão ser submetidos a concurso pelo professor responsável até ao dia 10 de fevereiro. Todos os detalhes deverão ser consultados na página do concurso, em *http://www.spmsul.uevora.pt/concurso.htm.*



JÁ **ARRANCARAM** AS **34.AS OLIMPÍADAS PORTUGUESAS** DE MATEMÁTICA

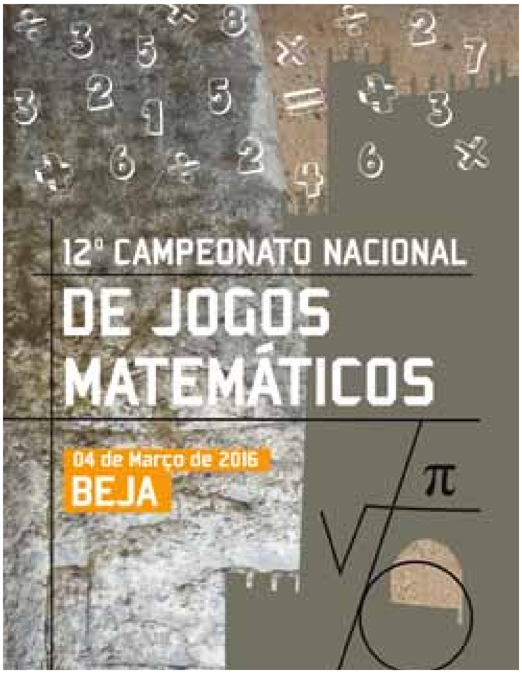
Milhares de alunos de mais de 800 escolas participaram, no dia 11 de novembro, na primeira eliminatória das Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM). As provas foram realizadas por estudantes dos 6.º e 7.º anos (Categoria Júnior), 8.º e 9.º anos (Categoria A) e 10.º, 11.º e 12.º anos (Categoria B). No mesmo dia realizou-se a prova única das Pré-Olimpíadas (5.º ano). No dia 13 de janeiro, na segunda eliminatória desta competição, serão apurados, a nível regional, os 90 finalistas das OPM que disputarão a Final Nacional, entre os dias 17 e 20 de março, na Escola Secundária Luís Freitas Branco, em Paço de Arcos. Para os mais novos, alunos dos 3.º e 4.º anos, a prova única das Mini-Olimpíadas tem data marcada para o dia 27 de janeiro. Até 20 de janeiro as escolas poderão efetuar a sua inscrição nesta categoria, em *http://mopm.mat.uc.pt/MOPM.*

GAZETA DE MATEMÁTICA ONLINE DESDE O **PRIMEIRO NÚMERO**

O novo ano trará aos leitores da *Gazeta de Matemática* e a todos os apaixonados pela matemática a possibilidade de acederem a todos os conteúdos desta revista desde a sua primeira edição. A digitalização de todo o acervo existente da *Gazeta*, que está agora na sua reta final, foi executada pela SPM na sequência de um apoio concedido pela Fundação Calouste Gulbenkian, para recuperação, tratamento e organização de acervos documentais. A *Gazeta de Matemática* foi criada em 1939, com o objetivo de chegar a todos aqueles que se interessassem pela matemática, mantendo-se, desde a sua reativação, em 2000, até à atualidade, como o principal elo de ligação entre a SPM e a comunidade matemática nacional.

INSCRIÇÕES ABERTAS PARA **CAMPEONATO NACIONAL** DE **JOGOS MATEMÁTICOS**

Desde 2004 que vários milhares de alunos têm vindo a participar no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM), que contabiliza já 12 edições. Em 2016, a cidade anfitriã da grande final nacional será Beja, que receberá centenas de estudantes de todos os níveis de ensino no dia 4 de março. Os jogos em disputa serão os habituais: *Semáforo, Cães & Gatos, Rastros, Avanço, Produto* e *Sesqui*. As escolas deverão efetuar a sua inscrição nesta competição até ao dia 8 de janeiro na página do CNJM, em *http://tinyurl.com/cnjm12-Beja*, e organizar torneiros locais de modo a apurar os participantes da final nacional (um por nível de ensino e por jogo). O CNJM12 encontra-se preparado para receber alunos com baixa visão e cegueira em todos os jogos. Este evento é organizado pela Ludus, pela SPM e pela APM, com o apoio da Ciência Viva, sendo a sua 12.ª edição organizada localmente pelo Departamento de Matemática do Instituto Politécnico de Beja e pelos Agrupamentos de Escolas n.º 1 e n.º 2 de Beja.



LAUREADOS DE RENOME **ENCONTRAM-SE** COM A **NOVA GERAÇÃO** DE CIENTISTAS NO **HEIDELBERG FORUM**

Esta é uma oportunidade única em que laureados com os prémios Abel, Fields e Turing, entre outros, e jovens cientistas com um percurso promissor nas áreas da matemática e da computação se reúnem com o intuito de impulsionar a conceção de novas ideias. Entre 18 e 23 de setembro do próximo ano, a cidade de Heidelberg, na Alemanha, será o ponto de encontro de gerações que têm como denominador comum a busca pela excelência na investigação científica. Para já, destacam-se como nomes confirmados na quarta edição do Heidelberg Laureate Forum Michael Atiyah, um dos maiores nomes da matemática contemporânea, detentor da Medalha Fields (1966) e do Prémio Abel (2004), e dois vencedores do Prémio Turing, Tony Hoare (1980) e Joseph Sifakis (2007). Os jovens investigadores (incluindo estudantes do ensino superior) interessados em participar neste fórum terão de submeter as suas candidaturas até ao dia 3 de fevereiro. Todos os detalhes sobre este processo deverão ser consultados em *http://www.heidelberg-laureate-forum.org.* O Heidelberg Laureate Forum é promovido pela Heidelberg Laureate Forum Foundation, em colaboração com a Klaus Tschira Stiftung e com o Heidelberg Institute for Theoretical Studies.

AÇÃO COST EM **MATEMÁTICA** PARA A **INDÚSTRIA**

A COST - European Cooperation in Science and Technology - é um dos mais antigos instrumentos a nível europeu para a cooperação entre investigadores, engenheiros e académicos de toda a Europa. Desde 1971 que financia redes de investigadores em todos os domínios científicos – através das Ações COST -, promovendo o desenvolvimento científico e contribuindo para o fortalecimento da Europa enquanto líder em investigação e desenvolvimento tecnológico. Recentemente foi aprovada mais uma Ação COST, intitulada "Mathematics for Industry Network (MI-NET)", com vista a facilitar a aplicação da matemática em todos os setores industriais, através da criação de parcerias a nível europeu. O projecto vai coordenar e apoiar iniciativas destinadas a investigadores, alunos e empresas, dando especial destaque à formação de investigadores em início de carreira. Pretende-se, com isso, impulsionar uma nova geração de matemáticos, capaz de desenvolver o seu trabalho em equipas multidisciplinares focadas na resolução de problemas industriais. A delegação portuguesa lidera um dos grupos de trabalho desta ação, contando com o envolvimento de representantes da academia (Adérito Araújo, da Universidade de Coimbra) e da indústria (Margarida Pina, do grupo Nors, grupo internacional a operar no setor da mobilidade e transportes, de capital 100% nacional). Mais informações sobre este projeto podem ser consultadas em *www.mi-network.org*.

Carla Martinho
Direção SPM
cmm.iscal@gmail.com

AULA ABERTA: BOAS PRÁTICAS NA SALA DE AULA E NA ESCOLA

No dia 28 de novembro realizou-se na Fundação Calouste Gulbenkian, durante a manhã, um *workshop* sobre boas práticas na sala de aula e na escola. Este *workshop*, organizado no âmbito do projeto Aula Aberta, visou, mais do que promover o projeto, dar a conhecer a forma como trabalham diariamente com as suas turmas e com os seus alunos as escolas que o integraram e que foram identificadas como escolas de sucesso no ensino de Matemática ou de Português.

O projeto Aula Aberta, promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática e pela Fundação Calouste Gulbenkian, tem como objetivo mostrar, com uma abertura sem precedentes, como decorrem as atividades educativas nas escolas participantes, para assim estimular um debate construtivo sobre boas práticas no ensino, na organização e na gestão. Para o efeito, foi construído um portal no qual se dá a conhecer o máximo possível sobre o projeto Aula Aberta.

Atendendo à diversidade dos contextos e das comunidades envolventes, é importante notar que podem os modelos educativos das escolas apresentadas no Aula Aberta não ser exatamente replicáveis noutros estabelecimentos de ensino do País. Não obstante, julgamos que algumas das práticas aí apresentadas poderão ser úteis mesmo em ambientes muito diversos.

Pensamos que será sempre benéfico ver no portal o que se faz nas diferentes escolas, cabendo a cada professor/utilizador decidir se, eventualmente, alguns dos exemplos e algum do material didático aí disponibilizado poderão ser úteis no contexto específico da sua escola e das suas turmas.

As escolas secundárias e os colégios participantes no projeto são os que apresentam consistentemente excelentes resultados nacionais nas disciplinas de Matemática ou de Português, sendo por isso convidados a "abrir as portas da escola e das suas salas de aula".

Este projeto tem o seu desenvolvimento em duas fases. Na 1.ª fase, já terminada, a forma encontrada para identificar as escolas com melhores desempenhos a Matemática ou Português foi o indicador "clássico" das médias das classificações em exame, sendo naturalmente os resultados mais expectáveis em termos de escolas e colégios identificados os conhecidos através dos *rankings*.

Na 2.ª fase, ainda em curso, o indicador utilizado para a identificação das escolas é inovador e permitiu "descobrir" um conjunto de escolas que, não tendo um lugar de destaque nos *rankings*, apresentam um grande progresso, em termos de conhecimento, dos seus alunos. Trata-se de um indicador de progressão relativa que permite comparar a progressão de um determinado aluno, entre o final do 9.º ano e o final do 12.º ano, com a progressão média de todos os alunos do País na mesma disciplina. Desta forma é possível medir quanto o aluno em causa progrediu, em comparação com a média nacional. Depois de quantificar a progressão relativa de cada aluno da escola, a Matemática e a Português, construiu-se um índice agregado associado ao conjunto de todos os alunos da escola, que serviu a esta 2.ª fase do projeto para identificar as escolas com maior progressão.

A intervenção só pode fazer-se ao nível da Matemática e do Português, pois são as disciplinas para as quais há resultados de exames nacionais no final do ensino básico e do ensino secundário.

Nesta 2.ª fase do projeto foram identificadas e convidadas a participar escolas cujo trabalho desenvolvido produziu excelentes progressos em alunos provenientes de níveis socioeconómicos diversificados. Esta diversificação é uma das mais-valias, nomeadamente no que respeita à caracterização da realidade nacional.

No *workshop* estiveram presentes escolas da 1.ª e da 2.ª fase do projeto, havendo duas mesas redondas, uma de professores, em que foram apresentadas e discutidas boas práticas na sala de aula, e outra de diretores, que incidiu nas boas práticas de organização e gestão. Estes dois momentos estiveram abertos à participação de todos os presentes, promovendo a troca de ideias e experiências, com vista à reflexão sobre as práticas de cada um.

Depois deste evento, com lotação esgotada, o projeto continuará e todos os documentos podem ser consultados no portal *http://www.aula-aberta.pt*.

Gostaríamos de poder alargar iniciativas deste género a outros ciclos de estudos, quiçá com utilização de outros indicadores, pois a identificação e a divulgação de boas práticas neste domínio são necessárias e importantes.

A implementação de boas práticas é, hoje em dia e em qualquer área, uma necessidade incontornável, sendo um importante fator de sucesso, competitividade e sustentabilidade das organizações, no geral, e das escolas, em particular.

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2015

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3º esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*

VISITE A LOJA SPM EM *WWW.SPM.PT*

NOVIDADE!

Livro de Problemas
de Almada Negreiros