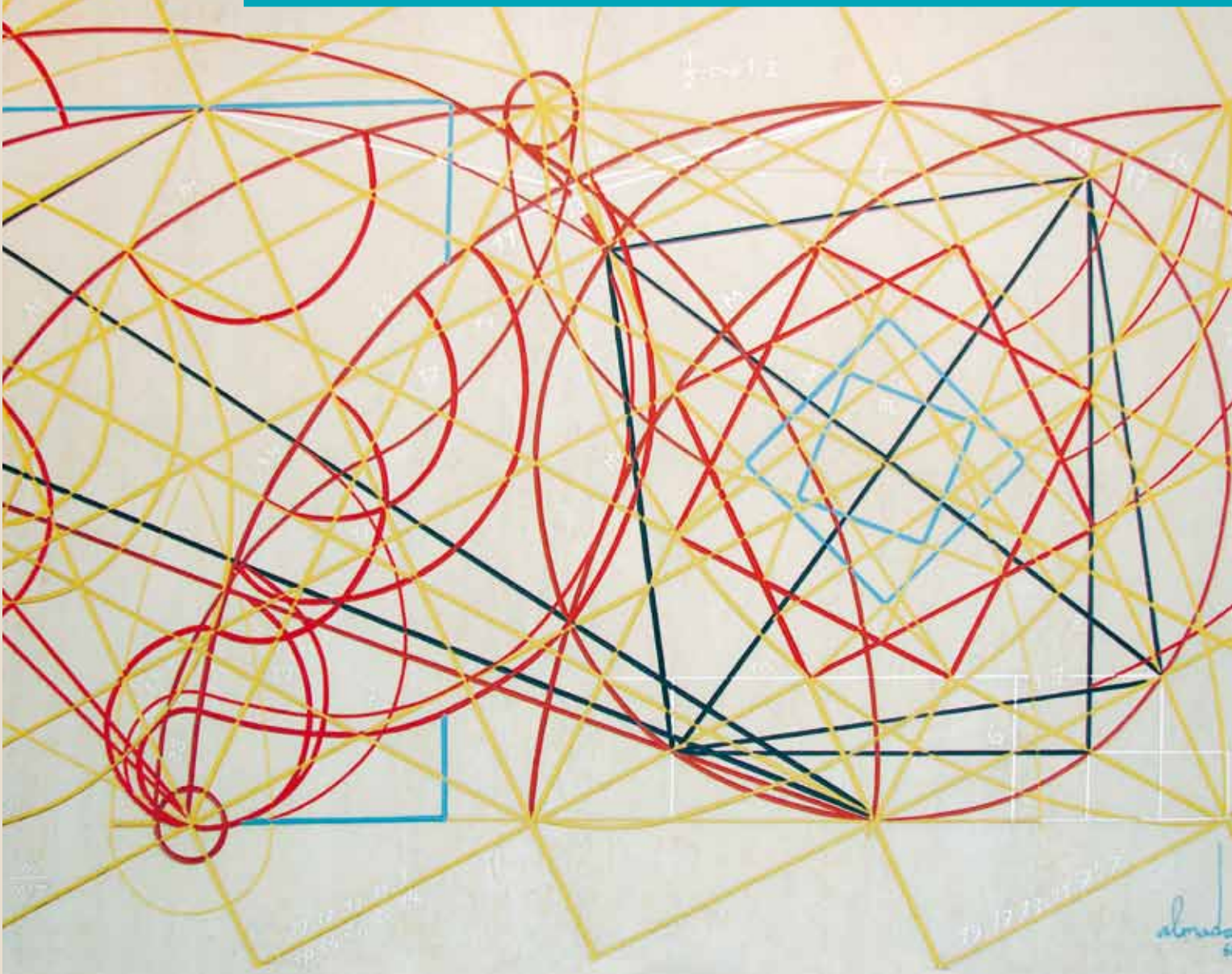


N. 0178

# M Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXVII | Mar. 2016 | 4,20€



**O Ponto da Bauhütte,  
Ontem e Hoje**

**PEDRO J. FREITAS E INEZ WIJNHORST**

**A Teoria de *Dessins d'Enfants*  
de Grothendieck**

**GARETH A. JONES**

# Gazeta de atematica

## TABELA DE PUBLICIDADE 2016

### CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1900

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

### CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

### CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

[imprensa@spm.pt](mailto:imprensa@spm.pt)

### ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)



Margem de corte: 4 mm

### LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

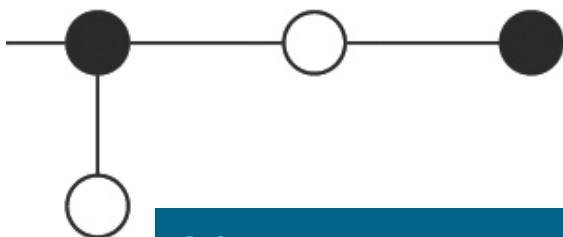
Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

					
	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.



**34** A TEORIA DE *DESSINS D'ENFANTS* DE GROTHENDIECK



**28** CONHECIMENTOS DE MATEMÁTICA DOS ESTUDANTES À ENTRADA DO ENSINO SUPERIOR



**15** NA LINHA DE FRENTE  
Razão Áurea na Idade da Pedra



**44** CONVERSA COM...  
Charles Johnson

**02** EDITORIAL | Adérito Araújo

*artigo de capa*

**03** ATRATOR  
Luz e Cor

**12** RECREIO | Jorge Nuno Silva  
Gafanhotos Lineares

**15** NA LINHA DE FRENTE | Fabio Chalub  
Razão Áurea na Idade da Pedra

*artigo de capa*

**18** O PONTO DA BAUHÜTTE, ONTEM E HOJE  
Pedro J. Freitas e Inez Wijnhorst

**24** APANHADOS NA REDE | Óscar Felgueiras  
Probabilidades Enganadoras

**28** CONHECIMENTOS DE MATEMÁTICA DOS ESTUDANTES À ENTRADA DO ENSINO SUPERIOR  
Helena Monteiro, Maria João Afonso e Marília Pires

**34** A TEORIA DE *DESSINS D'ENFANTS* DE GROTHENDIECK  
Gareth A. Jones

**39** PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS SURPREENDENTES | Manuel Silva e Pedro J. Freitas  
Coberturas Distintas dos Inteiros

**42** BARTOON | Luis Afonso

**44** CONVERSA COM... | Gonçalo Morais  
Charles Johnson

**48** MATEMÁTICA E LITERATURA | Nuno Camarinho  
Definir a Matemática

**49** NOTÍCIAS

**56** CARTAS DA DIREÇÃO | Jorge Buescu  
O Encontro Nacional da SPM 2016



ADÉRITO ARAÚJO  
Universidade  
de Coimbra  
alma@mat.uc.pt

## UM IMPORTANTE ACERVO

Fruto de um apoio da Fundação Calouste Gulbenkian para a recuperação de acervos documentais, podemos anunciar, com orgulho, que todos os números da *Gazeta de Matemática* se encontram agora disponíveis em versão digital.

O acervo da *Gazeta de Matemática* representa um testemunho importante sobre o modo como a matemática foi produzida em Portugal a partir da segunda metade do século XX. Começando por se assumir como o “jornal dos concorrentes ao exame de aptidão e dos estudantes de matemática das escolas superiores”, a *Gazeta* alargou rapidamente o seu âmbito, passando também a constituir-se como um fórum eclético de reflexão sobre vários temas relacionados com a disciplina. Este acervo é, por isso mesmo, uma preciosa fonte de informação para todos aqueles que se interessam pela matemática.

Para se apreciar condignamente a riqueza dos conteúdos agora disponíveis na página *gazeta.spm.pt*, atente-se à diversidade temática dos artigos publicados. A título exemplificativo, destaco o número 50, dedicado à comemoração do centenário do nascimento de Francisco Gomes Teixeira. É um número interessantíssimo, escrito em seis línguas: português, inglês, francês, espanhol, italiano e alemão. Nele podemos encontrar contribuições tão diversas como as de Edmund Taylor Whittaker, com um artigo no qual mostra como um resultado de Gomes Teixeira pode ser usado para o cálculo de uma raiz de uma equação algébrica de qualquer grau; de Jacques Hadamard, com uma reflexão sobre equações de derivadas parciais e funções de variáveis reais; ou da ilustre pedagoga Emma Castelnuovo, que lança a discussão sobre como pode ser ensinado o conceito de fração. Mas são também de

destacar, entre outras, as contribuições dos portugueses António Gião, primeiro português a publicar na revista *Nature*, com um extenso artigo sobre alguns problemas de física teórica; Ruy Luís Gomes, com uma “exposição simples e atualizada” do conceito de integral de Riemann-Stieltjes num “espaço localmente compacto”; ou do, à época, aluno de matemática na Universidade do Porto, Fernando Soares David, com o artigo “Sobre a comutabilidade de operadores com espectros contínuos”, com o qual se tornou o primeiro vencedor do Prémio Nacional Gomes Teixeira.

Foi sempre preocupação dos editores da revista o equilíbrio entre artigos de cariz mais científico com os de teor pedagógico, ou com os que se debruçam sobre questões relacionadas com a história ou aplicações da matemática. Gerações de matemáticos e pedagogos contribuíram para enriquecer este acervo que hoje constitui um motivo de orgulho para a comunidade científica nacional.

Termino com um agradecimento muito especial à Fundação Calouste Gulbenkian, por ter criado as condições financeiras que permitiram avançar com este projeto. A minha gratidão vai também para toda a equipa da Sociedade Portuguesa de Matemática, em que destaco Sílvia Dias, assistente editorial da *Gazeta*, que, com o seu enorme empenho e o seu constante entusiasmo, tornou possível a concretização deste arquivo digital.

## LUZ E COR

O que é que acontece a um raio de luz branca quando encontra uma gota de água no ar?

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o *Atractor*, este é um espaço da responsabilidade do *Atractor*; relacionado com conteúdos interativos do seu site [www.tractor.pt](http://www.tractor.pt).

Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para [tractor@tractor.pt](mailto:tractor@tractor.pt)

No anterior número da *Gazeta* [1] foram abordadas algumas propriedades básicas dos trajetos dos raios luminosos que atravessam meios percorridos pela luz com velocidades diferentes, por exemplo o ar e a água (ou o vidro). Analisámos situações particularmente simples, com raios situados num plano, e em que havia apenas dois meios, sendo a linha de separação uma reta. Foi também referido que o percurso do raio luminoso minimiza (localmente) o tempo gasto e isso permite encontrar uma analogia com uma situação qualitativamente do mesmo tipo: a de um nadador-salvador a socorrer um banhista em apuros... E concluímos que a razão entre os "afastamentos" dos raios de chegada e de partida, relativamente à normal no ponto de mudança do meio, é igual à razão entre as velocidades nos dois meios (figura 1). No caso da luz, essa razão é designada por índice de refração de um meio relativamente ao outro.

Na primeira parte do presente texto consideraremos algumas situações análogas às já discutidas no anterior, mas em que ou há mais do que uma mudança de meios durante o percurso ou há uma separação de meios que é feita através de uma linha curva (não necessariamente uma reta), ou ocorrem ambas estas condições.

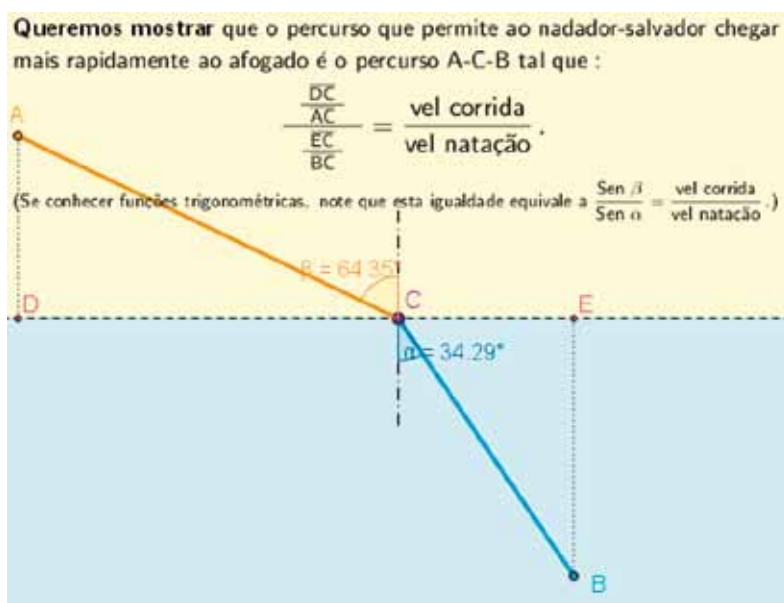


Figura 1

Na segunda parte, será explicado com algum detalhe o fenómeno do arco-íris, depois de ser analisado com minúcia o que acontece a um raio de luz branca quando encontra uma gota de água no ar.

Começemos por ver brevemente alguns exemplos de tópicos que poderiam hipoteticamente ser incluídos num curso de pós-graduação para nadadores salvadores... (cf [2])

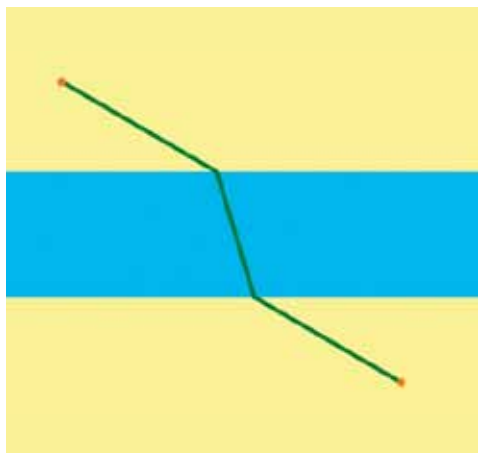


Figura 2

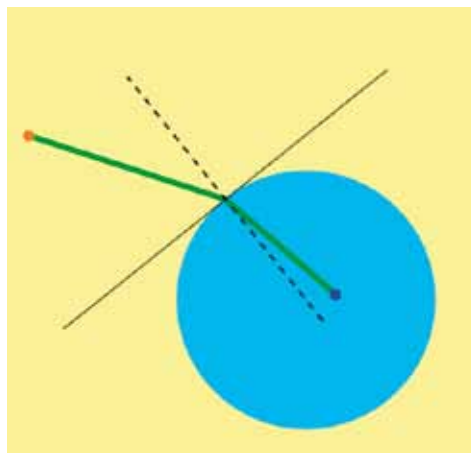


Figura 3

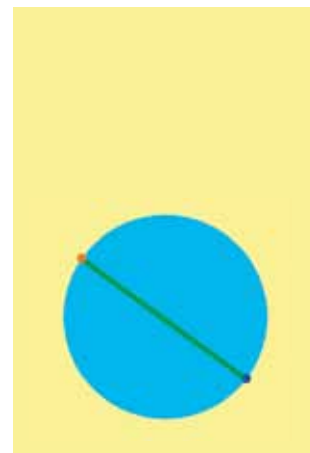


Figura 4

1. Se a praia for fluvial e a assistência só for prestada a partir de uma das margens, poderá ser útil o nadador-salvador conhecer o melhor caminho a seguir para socorrer um banhista, que, na outra margem, se sinta indisposto após um banho... A figura 2 é obtida a partir de uma aplicação interativa que trata este caso (supondo o rio com margens retilíneas paralelas e sem qualquer corrente naquele momento) e que o leitor pode utilizar a partir de [3]. Em particular, pode verificar que nadadores que nadem, proporcionalmente à velocidade de corrida, de modo mais veloz do que outros deverão seguir percursos diferentes. Este exemplo concreto tem por análogo, no caso da luz, o dos percursos dos raios luminosos que atravessam uma lâmina de faces paralelas.
2. Se a praia estiver situada junto a um grande lago circular, somos confrontados pela primeira vez com uma mudança de meios de forma não retilínea. Quando a curva de separação dos meios (neste caso, uma circunferência) tem uma tangente em cada ponto (portanto, também uma normal), podemos aplicar a condição anteriormente encontrada<sup>1</sup>, mas expressa relativamente a estas normais, agora com direção variável (ver figura 3)<sup>2</sup>.
3. Imaginando agora um enorme lago, com uma espécie de cunha entrando pela terra (ver figura 5), se a praia estiver numa das margens dessa cunha, como tratar o problema análogo ao primeiro da lista, nesta nova

situação? Este problema corresponde ao estudo do prisma. A figura 6 mostra o desvio total do raio incidente, obtido por acumulação dos desvios parciais correspondentes às duas refrações sofridas; quanto ao gráfico indicado, desse desvio em função do ângulo de incidência, mostra claramente a existência de um desvio mínimo, que corresponde à posição do segmento intermédio perpendicular à bissetriz do ângulo do prisma. A figura 7 ilustra o que se passa com um raio de luz branca, composta pela justaposição de raios de várias cores elementares (com índices de refração diferentes), ao atravessar o prisma, provocando a "separação" dessas diversas cores<sup>3</sup>.

4. Finalmente, generalizando o exemplo tratado em 2., consideremos o lago delimitado por dois arcos de circunferência de raios não necessariamente iguais, e com os mesmos extremos (ver figura 8). Neste exemplo, estamos particularmente interessados em observar diversos raios partindo de um ponto, atravessando a região indicada e, eventualmente, intersetando-se após essa travessia<sup>4</sup>.

### ARCO-ÍRIS

Nesta segunda parte, vamos tentar perceber como, por vezes, em alguns dias em que se vê simultaneamente sol e chuva (ou, pelo menos, alguma zona com nebulosidade), surge um arco-íris de aspeto deslumbrante! Há uma ideia genérica sobre a razão para a formação de um arco-íris, que está mais ou menos presente em pessoas que tenham algumas noções básicas sobre os fenómenos de refração e



Figura 5

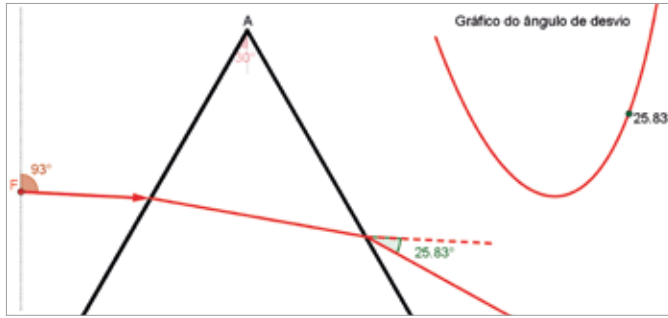


Figura 6

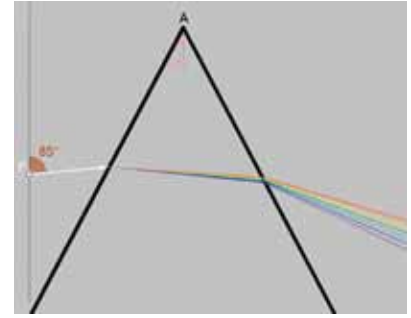


Figura 7

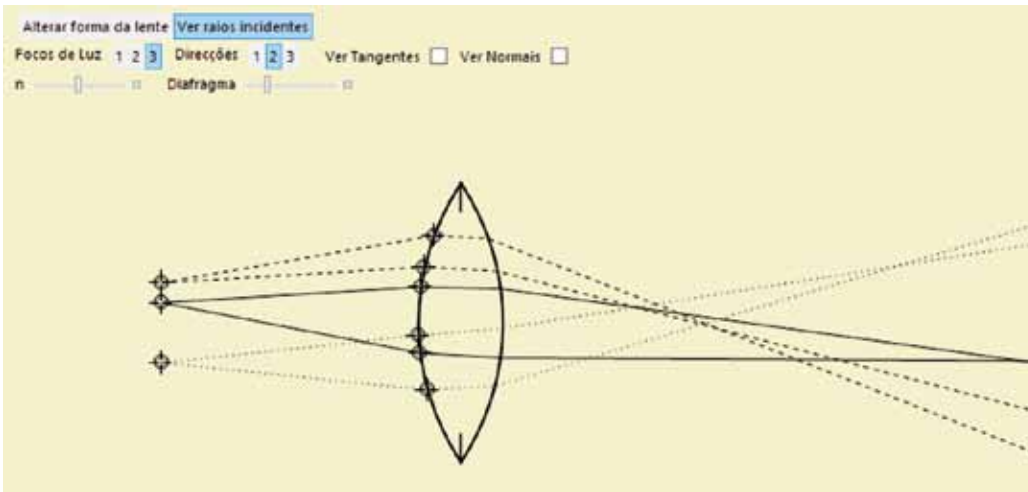


Figura 8

que, no mínimo, dominem as noções que foram evocadas na primeira parte deste texto e no texto do número anterior [1]. Essa ideia exprime-se por algo do tipo: as gotas de água existentes na atmosfera<sup>5</sup> provocam uma dispersão da luz solar branca em raios de diversas cores, de uma forma análoga à que se observa no caso do prisma, o terceiro exemplo tratado na primeira parte do presente texto. E é isso que está na base do fenómeno observado. Mas suponhamos que alguém quer conhecer mais detalhes, por exemplo: qual a razão pela qual as cores estão naquela disposição tão regular (e bela) e não noutra, por que razão os raios dos arcos de circunferência são aqueles e não outros e ainda por que razão, muitas das vezes, por fora do arco-íris forte aparece um outro, sempre exterior ao primeiro, de luzes menos intensas e com a ordem inversa das cores, relativamente à ordem das cores do mais forte.

Dado que, indubitavelmente, o arco-íris tem, de alguma forma, a ver com o efeito das gotas sobre os raios do sol que nelas incidem, é esse efeito que temos de começar por analisar em pormenor.

<sup>1</sup> A condição é a da igualdade entre a razão das velocidades nos dois meios e a razão entre os senos dos ângulos entre os dois raios e a normal no ponto. É importante lembrar que estamos à procura de pontos que minimizem o tempo relativamente a outros percursos suficientemente próximos do considerado. Isso não garante que minimizem o tempo relativamente a todos os percursos possíveis. Por exemplo, suponhamos (figura 4) que o nadador está num ponto da circunferência-margem e pretende socorrer alguém no extremo diametralmente oposto. Se seguir em linha reta, o percurso é mais rápido do que todos os que lhe estejam "suficientemente próximos". Mas basta que a razão entre a sua velocidade de corrida e de natação seja maior do que 1,5708, para haver percursos mais rápidos (porquê?).

<sup>2</sup> A figura é obtida a partir de uma aplicação interativa que o leitor pode utilizar a partir de [3].

<sup>3</sup> Para tornar mais clara a separação das cores na figura, foram considerados índices de refração um pouco mais elevados.

<sup>4</sup> Em [3] poderão ser modificados os raios e o tamanho dos arcos, bem como o tamanho de um diafragma que veda a passagem a raios muito descentrados; a observação dos efeitos dessas manipulações permite uma melhor compreensão deste modelo rudimentar de uma objetiva de uma máquina fotográfica.

<sup>5</sup> Quer sejam as gotas de água da chuva, quer sejam as gotas (em geral, bem mais pequenas) formando nuvens ou nebulosidade.

A figura 9 representa<sup>6</sup> um corte por um plano, de uma gota de água, com um raio incidente e os percursos dos raios em que aquele raio incidente se vai desdobrando. Por ser um caso mais simples, inicialmente consideraremos o raio incidente horizontal, vindo da esquerda e com uma cor correspondente a uma dada frequência e a um dado índice de refração. O raio, ao incidir na gota num ponto  $P_1$ , emite dois raios, um  $C_1$ , de reflexão para o exterior, e outro obtido por refração, dentro da gota, unindo  $P_1$  a outro ponto  $P_2$ . Chegado aí, uma parte do raio refrata-se, desta vez para o exterior num raio  $C_2$  de origem  $P_2$  e outra reflete-se em  $P_2$  na tangente ao bordo da gota, até encontrar o ponto  $P_3$  e aí novamente se subdividir num raio refratado para o exterior  $C_3$  e noutro refletido  $P_3P_4$ , que se refrata num  $C_4$  para o exterior. Claro que em cada uma destas subdivisões de um raio num refletido e noutro refratado, há uma perda de intensidade para cada um dos resultantes. É, pois, natural começar por observar a possível contribuição dos quatro primeiros raios emergentes desta gota –  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – para qualquer fenómeno luminoso relevante observável no céu. Ora, esses quatro raios dependem, todos, do ponto de impacto do raio incidente na gota (o ponto  $P_1$ ), que pode ser parametrizado pela ordenada de  $P_1$ , variável entre  $-r$  e  $r$ , designando  $r$  o raio da gota. Para saber de que direções é vista a gota, e como é vista, interessa estudar várias questões.

Primeiro que tudo, devemos determinar quais as direções varridas por cada um dos quatro raios emergentes, quando o parâmetro do ponto de impacto percorre o seu intervalo de variação. E também interessa saber se há, nestes "arcos de direção", e para alguma das quatro categorias contempladas, zonas em que se concentrem com maior intensidade os raios emergentes da gota, dando assim azo a direções com uma maior intensidade luminosa. Além disso, se tudo o que até aqui foi feito para um raio de uma cor simples, correspondente a uma frequência específica, com um índice de refração bem definido, for repetido para outra cor simples, que relação há entre os anteriores arcos das direções e os dos novos raios emergentes? Obtidas as conclusões relativas a estas questões, haverá que as aplicar à situação real que nos interessa: a de um raio solar, que é uma mistura de raios de diversas cores, com índices de refração diferentes uns dos outros.

A figura 10 mostra pontos em circunferências-horizonte representando direções dos raios emergentes da gota. Para os raios refletidos  $C_1$ , nada depende da cor e há uma repartição de direções pela circunferência-horizonte, com uma rarefação maior do lado direito, junto ao eixo de

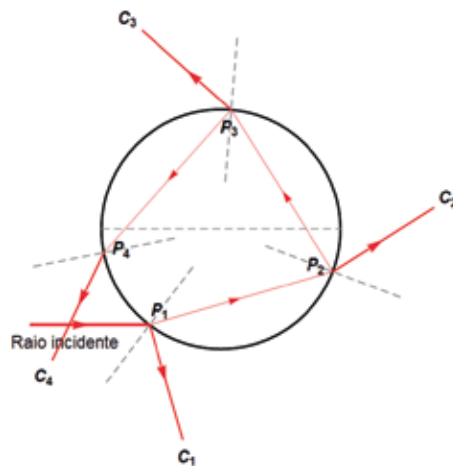


Figura 9

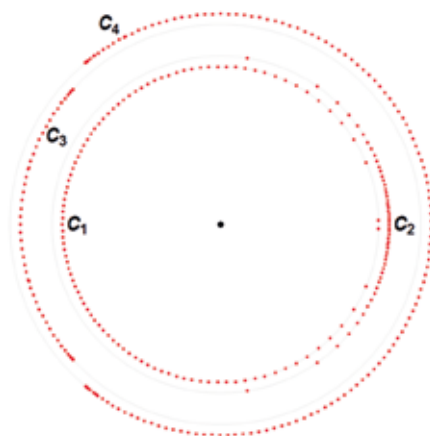


Figura 10

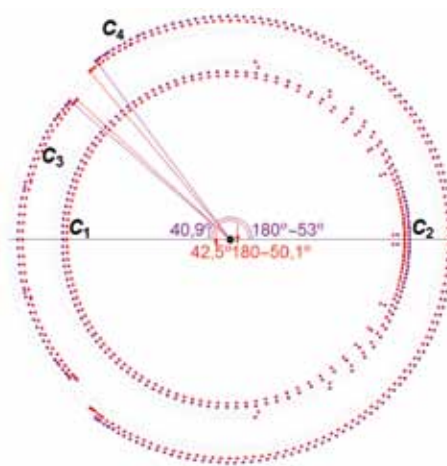


Figura 11



simetria horizontal da gota, o que é natural, porque essa região corresponde a reflexões rasantes pela parte de cima e pela parte de baixo da gota. Quanto aos primeiros raios refratados ( $C_2$ ), dirigem-se para a direita, sobretudo mais próximos do referido eixo, portanto, não muito afastados da direção dos raios incidentes na gota. Restam as direções dos raios  $C_3$  e  $C_4$ , representadas por pontos situados em dois arcos, respetivamente, na parte esquerda com uma semi-amplitude de cerca de  $42,5^\circ$  e na parte direita com uma semi-amplitude de  $129,9^\circ$ . Ficam ainda a sobrar dois pequenos arcos para a esquerda, entre as semi-amplitudes de  $42,5^\circ$  e  $50,1^\circ (=180-129,9^\circ)$ , representando direções que não são obtidas por nenhuns raios de classes  $C_3$  ou  $C_4$ . As conclusões e os valores indicados referem-se ao vermelho. O que se altera para o violeta (ver figura 11) é que, às direções dos raios de classes  $C_3$  ou  $C_4$  correspondem arcos com semi-amplitudes, respetivamente de  $40,9^\circ$  e  $127^\circ$  e, para as restantes cores, passar-se-á algo intermédio entre o indicado para o vermelho e para o violeta (ver figura

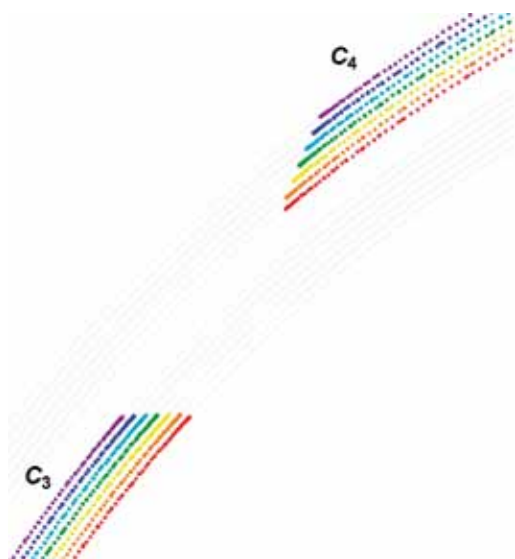


Figura 12

12 com uma ampliação da zona próxima das direções extremas para o vermelho). Em particular, os pequenos arcos entre os extremos vermelhos das direções de  $C_3$  e de  $C_4$ , para cima e para baixo do eixo horizontal, representam direções que não são obtidas para nenhum raio de classe  $C_3$  ou  $C_4$ , seja qual for a cor.

Da lista de questões atrás enunciada, falta analisar duas: i) haverá zonas em que se concentrem com maior intensidade os raios emergentes da gota e, a existirem, dependerão da cor? ii) como aplicar as conclusões à situação real que nos interessa: a dos raios solares, que são uma mistura de raios de diversas cores?

Começando por i), uma observação atenta da figura 12 parece sugerir que, para cada uma das cores, há uma concentração maior de raios  $C_3$  e  $C_4$  nas extremidades dos arcos de direções. Analisemos as variações das direções dos raios refratados (de classes  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ ) em função do ponto de impacto na gota, para vermos se se nota algo que confirme esta observação. A figura 13 mostra, para dois feixes de raios incidentes, um na zona intermédia e outro junto a uma das direções extremas, os trajetos dos raios  $C_3$  na gota, as direções finais, as zonas correspondentes no gráfico da função que a cada parâmetro de impacto associa a direção do raio  $C_3$  e um zoom junto a uma das direções extremas. Na figura 14 estão reunidos só os três gráficos em função do fator de impacto, para  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  em vermelho. O primeiro, relativo a  $C_2$ , representa uma função crescente, não havendo nenhum ângulo (ordenada no gráfico) com uma concentração muito mais elevada de direções de raios emergentes. O declive maior, junto aos dois extremos do domínio da função, corresponde à maior rarefação de raios nas direções correspondentes. Mas em cada um dos outros

<sup>6</sup> Esta imagem e todas as seguintes, excetuando as fotografias, provêm de aplicações interativas que o leitor é vivamente aconselhado a manipular em [4].

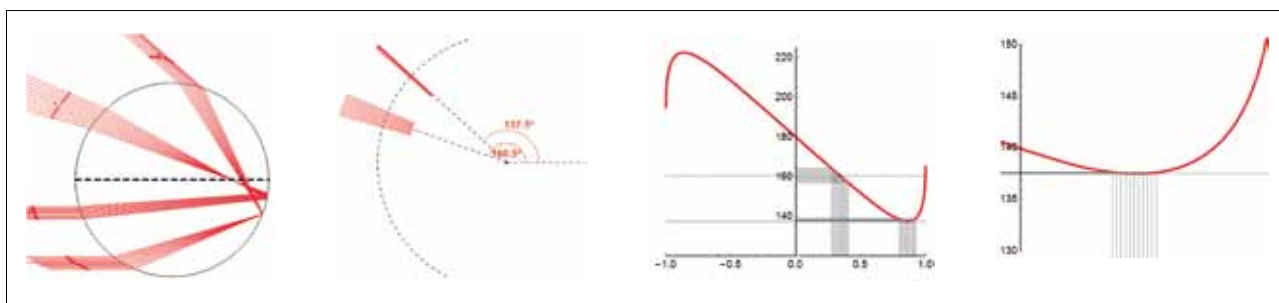


Figura 13

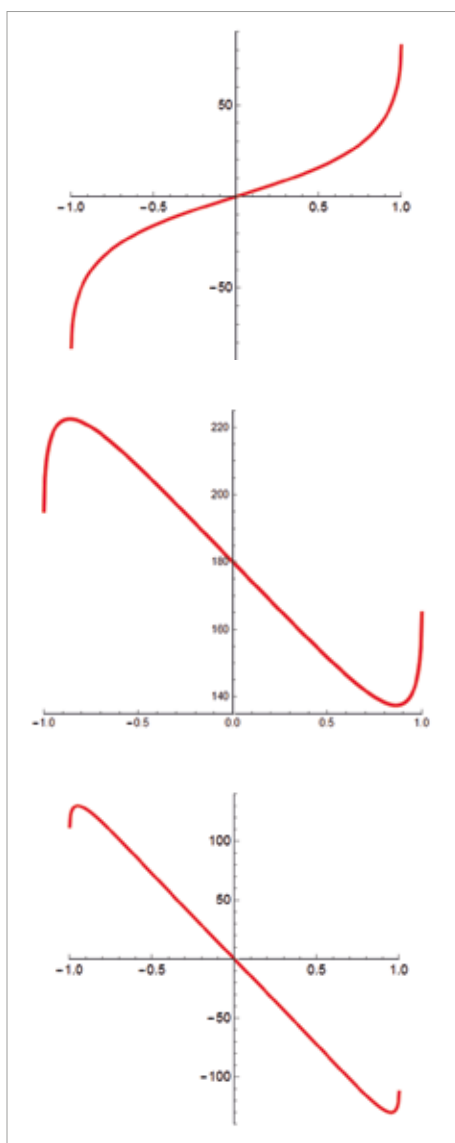


Figura 14

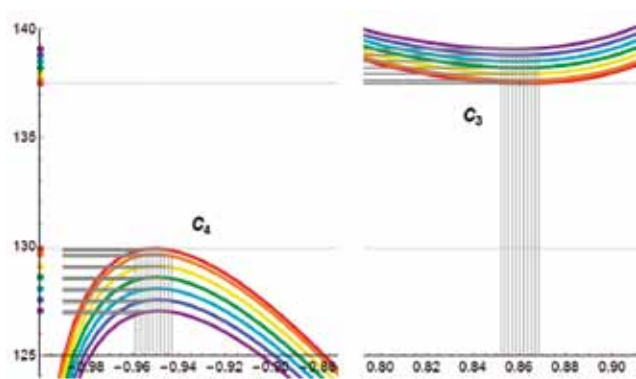


Figura 15

casos ( $C_3$  e  $C_4$ ), há um máximo e um mínimo (absolutos) da respectiva função, em pontos interiores ao domínio, e isso leva a que em toda uma vizinhança de cada um dos respectivos pontos de impacto, todos os raios emergentes saiam com direções muito próximas umas das outras (respectivamente do máximo e do mínimo), isso provocando uma zona (vermelha) excepcionalmente brilhante, precisamente nos extremos dos arcos representativos das direções (para  $C_3$  e  $C_4$ ). Algo análogo acontece para as outras cores, sendo os valores dos ângulos (máximos e mínimos) diferentes para as diversas cores, como se pode observar na figura 15. Este pormenor faz com que, ao aplicarmos o que acabamos de referir à situação concreta que nos interessa, de um raio solar – constituído por uma mistura de raios de diversas cores – tenhamos zonas de brilho (de diferentes cores), que não se sobrepõem<sup>7</sup>. Como fica claro da análise da figura 15, os ângulos das direções "brilhantes" para as outras cores estão compreendidos entre os do vermelho e os do violeta (entre  $137,5^\circ$  e  $139,1^\circ$  para  $C_3$  e entre  $127^\circ$  e  $129,9^\circ$  para  $C_4$ ). Na faixa horizontal entre o vermelho de  $C_3$  ( $137,5^\circ$ ) e o vermelho de  $C_4$  ( $129,9^\circ$ ) não há nenhum raio (de classe  $C_3$  ou  $C_4$ ) de nenhuma cor emergindo nessa direcção. Quanto às outras direcções, o que sucede genericamente é que, para cada raio emergente de uma dada cor, há um outro raio emergente de outra cor, com a mesma direcção, proveniente de outro ponto de impacto. O balanço global, para os raios emitidos pela gota nessas outras direcções, é, pois, o de uma luz branca sem zonas de particular brilho<sup>8</sup>.

Até aqui, temos trabalhado no plano, com um corte da gota e os raios do sol no plano, horizontais, vindos da esquerda. Esta representação foi suficiente para proceder ao estudo de todos os aspetos essenciais, relacionados com o que acontece aos raios incidentes na gota. A passagem deste modelo para um tridimensional, de uma gota esférica no espaço, não oferece nenhuma dificuldade. Basta imaginar o que se obtém do modelo plano, rodando no espaço, em torno da reta horizontal passando pelo centro da gota. Por razões de simetria, todas as construções feitas no plano conduzem a construções válidas no espaço. As figuras 16 e 17 representam alguns dos aspetos atrás considerados, mas agora vistos para o modelo tridimensional. A primeira mostra os percursos de alguns raios incidindo em diversos pontos da superfície da gota, num par de visão estereoscópica para os leitores que não necessitam de prismas. A outra mostra na superfície esférica do horizonte, centrada na gota e parcialmente aberta, os pontos correspondentes às direcções dos raios de classe  $C_3$  e  $C_4$ , com os pontos luminosos das cores correspondentes a "cada

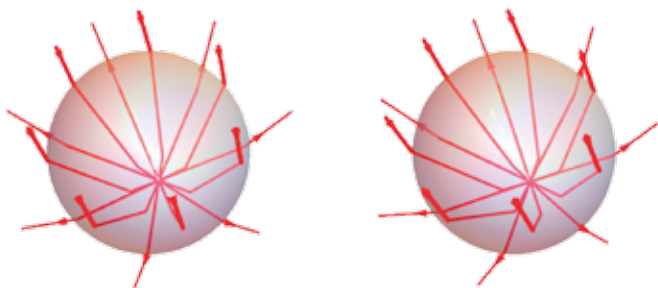


Figura 16

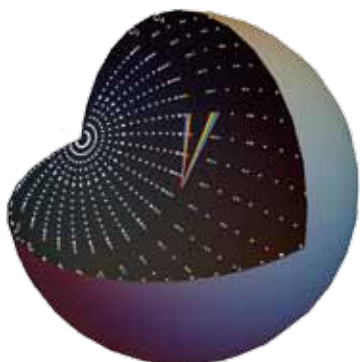


Figura 17

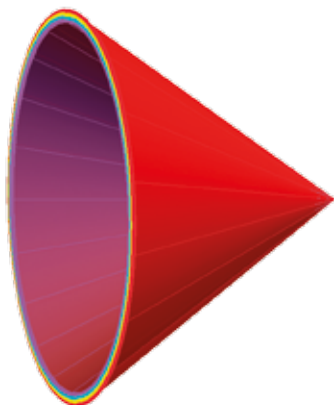


Figura 18

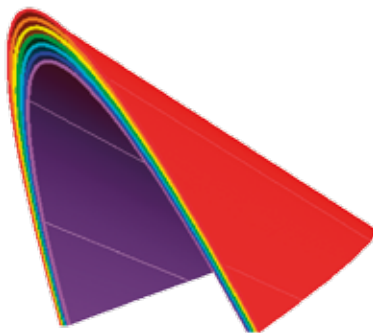


Figura 19

direção brilhante", pondo em evidência a zona escura entre as duas regiões.

Será agora útil dar uma resposta à seguinte questão: de que pontos é que esta gota é vista e como é que é vista de cada um deles?

Pelas razões de simetria atrás referidas, as soluções obtêm-se das do caso do plano, aplicando todas as rotações referidas. Por exemplo, para a cor vermelha havia duas direções brilhantes para os raios  $C_3$  às quais vai agora corresponder no espaço uma superfície cônica de vértice no centro da gota e mesma semiabertura ( $42,5^\circ$ ), de revolução em torno da reta unindo o centro da gota ao centro do sol. É para observadores situados numa tal superfície cônica, e só para esses, que os raios  $C_3$  emitidos daquela gota são vistos com a cor vermelha brilhante. De modo análogo para os raios  $C_3$  de outras cores, agora em superfícies cônicas *dentro* da vermelha, como mostram as figuras 18 e 19, esta última com uma ampliação de uma parte da anterior, apenas representando sete cores e omitindo todas as intermédias, para maior clareza. Para os raios  $C_4$ , funciona algo de análogo, mas agora com cones exteriores aos primeiros e repetindo as cores, mas por ordem invertida. A figura 20 dá uma ideia de conjunto e a figura 21 mostra um detalhe.

A seguinte pergunta surge naturalmente: se fixarmos um desses observadores situados naquela superfície cônica e que vê a tal gota de vermelho brilhante, onde se encontrarão todas as (outras) gotas (iluminadas pelo sol) que são vistas em vermelho nas mesmas condições, por esse observador em particular? A condição é a de que o ângulo de vértice no centro de cada uma dessas gotas, entre a direção do sol e a direção do observador, seja  $42,5^\circ$ , mas esse ângulo é precisamente igual ao ângulo de vértice no observador, entre a semirecta (variável) unindo o observador a cada uma dessas gotas e a semirecta (fixa) partindo do sol em direção ao observador... Portanto, o observador, de costas voltadas para o sol, vê como vermelhas todas as gotas iluminadas pelo sol que estejam no cone centrado no observador, tendo como eixo uma reta com a direção dos raios solares e como semiabertura o ângulo de  $42,5^\circ$ . Na figura 22 está representado um tal cone

<sup>7</sup> São estas que vão estar na origem do arco-íris ( $C_3$ ) e do arco-íris secundário ( $C_4$ ), como veremos.

<sup>8</sup> Por razões de simplicidade, não temos em conta outros fenómenos luminosos ligados ao arco-íris, cuja explicação requer considerações (de natureza ondulatória) mais sofisticadas do que os fenómenos de refração que aqui apresentámos. O leitor interessado pode consultar [6], que é também uma boa referência para este texto do Atractor:

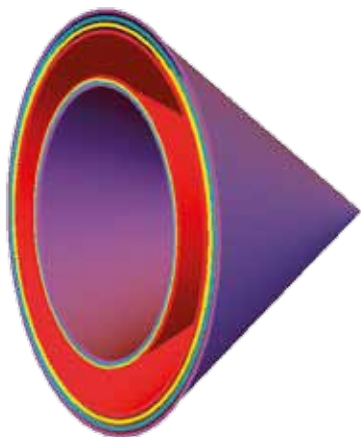


Figura 20

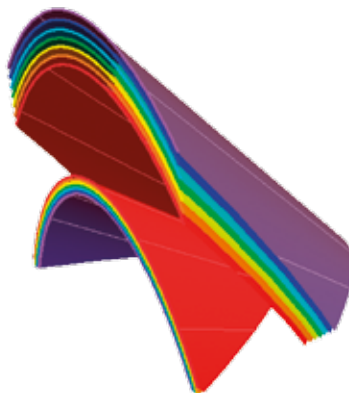


Figura 21

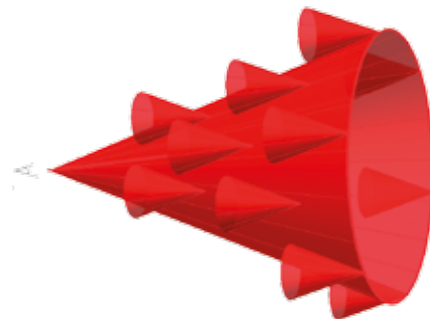


Figura 22

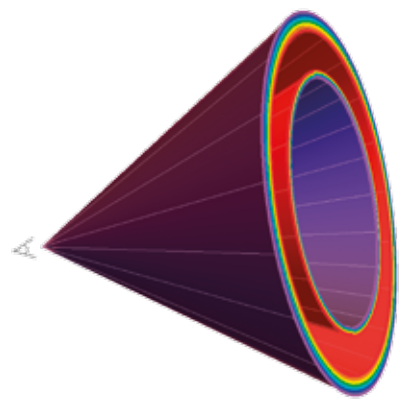


Figura 23

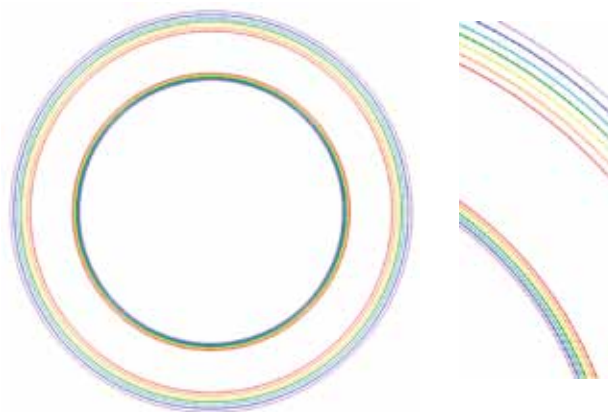


Figura 24

de observador de gotas vistas como vermelhas e vários cones de vértices em gotas vistas como vermelhas, todos eles tangentes ao grande. O que foi feito para o vermelho pode ser repetido para raios  $C_3$  de outras cores, obtendo-se assim vários cones de menores aberturas e outras cores, dentro do vermelho que começamos por considerar. E conclusões análogas podem ser expressas a partir do que foi visto, agora para as direções dos raios de classe  $C_4$ , conduzindo a cones de maior abertura, com o mesmo eixo dos anteriores, sendo desta vez o vermelho o de menor semi-abertura ( $50,1^\circ$ ) entre todos os  $C_4$ . O conjunto desses cones, todos tendo como eixo a reta que une o sol ao observador, está representado na figura 23, mostrando a figura 24: i) a distribuição de algumas das cores que o observador deveria ver, nas melhores condições: um conjunto de

círculos coloridos concêntricos (com centro na sombra do observador, produzida pelo sol); e ii) uma ampliação de uma parte. Sugere-se a comparação daqueles círculos com uma fotografia aérea existente em [5]. De Terra, é possível ver arcos-íris quase inteiros a partir de cimos de montanhas, mas, em geral, temos de nos contentar com partes do arco superior, com a concavidade virada para baixo (ver figuras 25 e 26). A razão reside no facto de os raios das superfícies cónicas anteriores virados para baixo atingirem a superfície terrestre antes de encontrarem gotas iluminadas pelo sol.

Dito isto, terminamos com uma foto (figura 27)<sup>9</sup> algo perturbadora por aparentemente contradizer as conclusões e as fundamentações apresentadas! Ela mostra um pequeno arco colorido, que relativamente ao observador é visível quase na vertical e do lado do sol, além disso tendo a



Figura 25



Figura 26



Figura 27



Figura 28

concavidade virada para cima – tudo ao contrário do que acima se diz! Para encontrar a explicação deste fenómeno, é útil observar com atenção uma fotografia do sol em contraluz direto, tirada na mesma ocasião (figura 28). Não há praticamente qualquer aragem, a superfície da água está espelhada e nota-se claramente o reflexo forte do sol na água. É essa luz refletida e não a luz direta do sol a causadora do fenómeno fotografado e, assim sendo, é fácil verificar que tudo está de acordo com a adaptação das considerações anteriores a esta situação especial!

## REFERÊNCIAS

- [1] [www.atractor.pt/mat/luz1](http://www.atractor.pt/mat/luz1)
- [2] [www.atractor.pt/mat/luz2](http://www.atractor.pt/mat/luz2)
- [3] [www.atractor.pt/mat/luz2/praiasdiversas.html](http://www.atractor.pt/mat/luz2/praiasdiversas.html)
- [4] [www.atractor.pt/mat/luz2/arcoiris.html](http://www.atractor.pt/mat/luz2/arcoiris.html)
- [5] [apod.nasa.gov/apod/ap140930.html](http://apod.nasa.gov/apod/ap140930.html) Fotografia aérea de arco-íris circular
- [6] Nussenzweig, H. Moysés. "The Theory of the Rainbow". *Scientific American*, Vol. 236-No.4 (1977-April), 116-127

<sup>9</sup> Foi tirada na ria de Aveiro, junto ao Torrão do Lameiro, em 26 de outubro de 2014.

JORGE NUNO SILVA  
Universidade  
de Lisboa[jnsilva@cal.berkeley.edu](mailto:jnsilva@cal.berkeley.edu)

## GAFANHOTOS LINEARES

Ivan Moscovich publicou, recentemente, um livro ambicioso, *Puzzle Universe: The History of Math in 315 Puzzles* (Firefly Books 2015). Esta obra, ricamente ilustrada, é uma apologia da matemática recreativa por parte do seu entusiástico autor. Cito da introdução: “Jogos e quebra-cabeças tornam-nos mais inventivos, mais criativos, mais artísticos e até mais humanos”.

Após um capítulo dedicado a considerações gerais sobre os brinquedos (*playthings*) em que o livro se foca, Ivan Moscovich faz uma viagem, por ordem cronológica, aos mais famosos problemas e quebra-cabeças da história da matemática. Da Antiguidade temos os problemas de geometria e aritmética dos gregos, os jogos dos egípcios e dos babilônios, entre outros. Todos são pontos de partida para versões atualizadas das questões, para variantes e relações com outras matérias. A viagem termina na matemática dos nossos dias, nunca evitando abordar, de forma estimulante e lúdica, os temas mais sofisticados.

Desta forma, sistemática e rigorosa no percurso cronológico, mas com riqueza nas extensões que os tópicos sugerem ao autor, nasce um livro invulgar, um contributo relevante para a promoção da rainha das ciências.

Escolhemos para partilhar com os nossos leitores um *puzzle* da autoria do próprio Ivan Moscovich: Gafanhotos lineares.

Num segmento de reta marcam-se, igualmente espaçados, os pontos  $0, 1, \dots, n$ . À extremidade esquerda corresponde o  $0$ , à direita corresponde o  $n$ .

Um gafanhoto, colocado na origem, dá saltos sucessivos de comprimentos  $1, 2, \dots, n$ . Pode fazê-lo para a es-

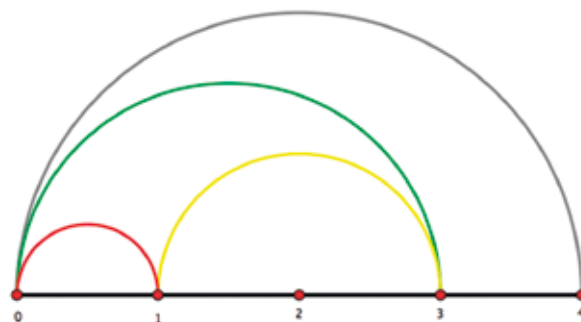


Figura 1

querda ou para a direita, sem sair do segmento.

Se ao  $n$ -ésimo salto alcançar a extremidade direita, o segmento de comprimento  $n$  diz-se vitorioso.

Para  $n = 1$  a questão é trivial.

A figura 1 mostra como o segmento de comprimento 4 se mostra vitorioso (o primeiro, segundo e quarto saltos são para a direita, o terceiro é para a esquerda).

A questão que deixo é a seguinte: para que valores de  $n$  é o segmento correspondente vitorioso?

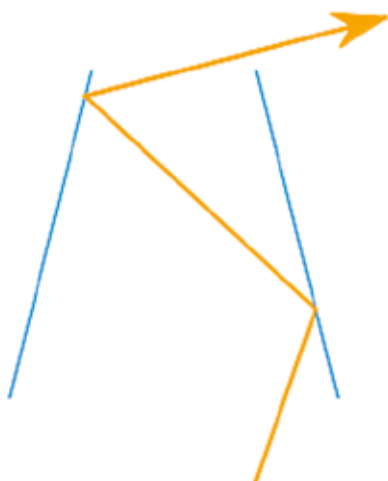


Figura 2

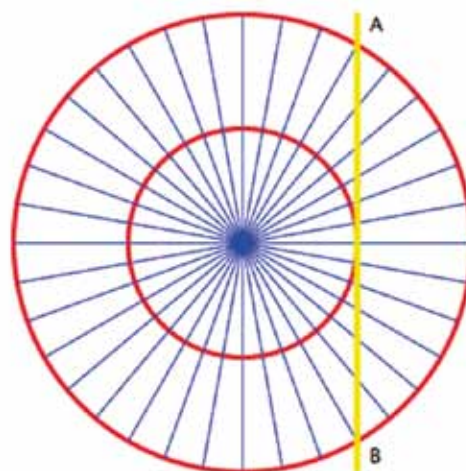


Figura 3

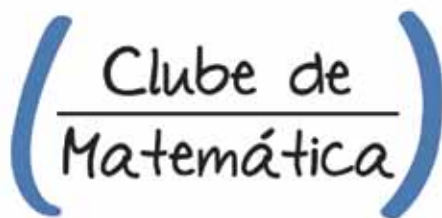
Relembremos a questão do número anterior.

Se os segmentos fazem, quando prolongados, um ângulo de  $1^\circ$ , a abertura inferior mede 2 cm e a superior 1 cm, qual é o maior número de reflexões que um raio de luz pode efetuar, entrando pela base e saindo pelo topo?

Este belo problema, que apareceu nas páginas de *50 Mathematical Puzzles and Problems*, Key Curriculum Press 2001, resolve-se com facilidade se utilizarmos um procedimento semelhante ao utilizado com espelhos paralelos,

isto é, prolongamos o raio de luz e refletimos os espelhos. Neste caso, a reflexão dos espelhos dá origem a uma coroa circular, entre as circunferências de raio 1 e 2, com espelhos espaçados a  $1^\circ$  (na figura 3, o espaçamento é de  $10^\circ$ ).

Usando coordenadas, podemos deduzir que o ângulo ao centro definido por A e B é  $120^\circ$ , concluindo que o número pretendido é 120.



SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

### VISITE O CLUBE DE MATEMÁTICA

DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

- ✓ ARTIGOS DE OPINIÃO
- ✓ ENTREVISTAS
- ✓ PROBLEMAS
- ✓ HISTÓRIAS
- ✓ PASSATEMPOS
- ✓ PRÉMIOS

TUDO ISTO E MUITO MAIS EM [WWW.CLUBE.SPM.PT](http://WWW.CLUBE.SPM.PT)

# TARDES DE MATEMÁTICA

---

Livraria Almedina Atrium Saldanha

---

## **Epidemias e vacinas onde anda a matemática?!**

6 ABRIL | 18h30

Oradora: **Paula Rodrigues**

*Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa*

---

## **Matemáticas impuras**

27 ABRIL | 18h30

Orador: **José Paulo Viana**

*Associação de Professores de Matemática*

---

## **A calçada portuguesa das ruas de Lisboa num baralho de cartas**

25 MAIO | 18h30

Oradora: **Alda Carvalho**

*Instituto Superior de Engenharia de Lisboa*





FABIO CHALUB  
Universidade  
Nova de Lisboa  
chalub@fct.unl.pt

## RAZÃO ÁUREA NA IDADE DA PEDRA

O mundo mudou muito no último milhão de anos. Mas algumas coisas ficam. Uma nova investigação mostra como a percepção de beleza associada à razão áurea – e muito explorada pelos grandes mestres da arte – é antiga. Mesmo na Idade da Pedra, construíam-se utensílios em que as medidas lembram (de forma muito vaga...) a Mona Lisa!

Como é que se explica a um adolescente de hoje em dia como era a vida antes do telemóvel? Parece-lhes que estamos a descrever a Pré-História. No entanto, esta é uma tecnologia recente, que só se tornou popular nos últimos 20 ou 30 anos. E como é que era o mundo há 500 anos, antes da cadeira de rodas? Ou há 2000 anos, quando não se podia usar sabão? Ou mesmo antes do prego, com já quase quatro mil anos? Bom, pelo menos nesta época já existia o vinho...

Vamos recuar ainda mais, a um mundo que nos seria totalmente irreconhecível: a Idade da Pedra. A grande inovação tecnológica desta época é o biface: uma pedra lascada em dupla face e de forma oval. Uma simples pedra dura longamente afiada já existia e era utilizada por um dos nossos antepassados, o *homo habilis*. No entanto, o novo utensílio tinha uma grande vantagem: podia ser facilmente utilizado não apenas para cortes grosseiros, mas para atividades mais finas, como separar a carne do osso. Não fomos nós, humanos, a inventar, e sim alguma das nossas espécies antepassadas, mas foi uma criação de tamanha qualidade que o seu uso durou cerca de um milhão de anos e chegou até à época dos neandertais, que foram nossos contemporâneos. O *homo sapiens*, com a sua superior capacidade intelectual, foi capaz de inventar objetos melhores, a partir do polimento das pedras.

Esta tecnologia é conhecida como *Acheuliana*, em honra do pequeno vilarejo francês onde foram encontradas pela primeira vez. Um ponto que chama a aten-

ção dos estudiosos é que o tipo de corte utilizado nas pedras parece demonstrar não apenas a importância da sua utilização, mas também um bom nível de senso estético (através do abuso de simetrias na sua construção, algumas sem uma função evidente). É nesta época que surgem as primeiras expressões artísticas, como, por exemplo, a decoração destes mesmos machados de mão. Portanto, não é absurdo imaginar que um objeto que é essencialmente idêntico, fabricado em diversos pontos do globo tão longínquos como a África do Sul e França durante um período de tempo que nos é quase inimaginável e que foi submetido a diversos usos tenha no seu fabrico uma demonstração da perícia dos primeiros artesãos. Esta habilidade é frequentemente demonstrada na elaboração de instrumentos que além de úteis e funcionais são belos de se exibir – esteticamente apelativos, como diríamos hoje.

E onde é que entra a matemática nisto tudo? Sempre que discorremos sobre o sentido humano de beleza, encontramos o número  $\Phi$  (diz-se "fí"), a chamada proporção (ou razão) áurea (ou dourada):

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.62.$$

Encontramos  $\Phi$  em lugares tão diversos, em obras criadas por artistas que certamente o conheciam e sabiam explorar os sentimentos humanos como os renascentistas, mas também em obras de artistas sem clara consciência da importância do  $\Phi$ , mas com grande capacida-

de de criar beleza no seu trabalho. Veja a figura 1.

O número  $\Phi$  surge de figuras geométricas simples que mantêm as suas proporções quando alteradas. Considere um retângulo, de lados  $a$  (menor) e  $b$  (maior). Suponha que ao retirar um comprimento igual ao lado menor do lado maior, encontremos um novo retângulo com as mesmas proporções:

$$\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b}.$$

Chamando  $\Phi = \frac{b}{a}$  à razão entre o maior e o menor lados, temos que

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}.$$

A única solução positiva desta equação é dada pela razão áurea. Mas há muitas outras figuras geométricas relacionadas, desde o triângulo dourado, um triângulo isóceles com um ângulo de  $\frac{\pi}{5}$ , ou  $36^\circ$ , até a figura cheia de misticismo do pentagrama. Veja a figura 2.

O interessante é encontrar a razão áurea (e, conjuntamente, o ângulo de  $\frac{\pi}{5}$ ) sistematicamente nos objetos Acheulianos. É disto que trata a investigação publicada em [1], feita pelo investigador irlandês, educado em Inglaterra e há muito radicado no Brasil Alan Cannell. Com acesso a um largo conjunto de bifaces encontrados no sul de Inglaterra (em Boxgrove) e preservadas no Museu Britânico, foi capaz de identificar várias figuras geométricas presentes no conjunto original de bifaces. Evidentemente, um material tão antigo não está perfeitamente preservado e alguns resultados envolvem um certo nível de extrapolação, como é sempre necessário na investigação de ponta. No entanto, como pode ver-se na figura 3, o resultado final mostra que de alguma forma  $\Phi$  é um dos elementos centrais, certamente inconsciente, no espírito do artesão. O artigo também faz um tratamento estatístico da amostra de Boxgrove, mostrando que as conclusões obtidas não são resultado da escolha da amostra.

Há uma pergunta natural: porquê  $\Phi$ ? O que é que há de tão especial neste número? Pense numa época em que não havia réguas. De facto, nem mesmo escalas de medidas haviam sido inventadas. Como saber de quanto material nós precisamos para construir seja o que for? As pedras chegam até nós, mas é natural supor que tam-

bém trabalhassem em materiais que não se tenham fossilizado. Suponha um círculo de raio 1, e, portanto, de área  $\pi$ . Considere, agora, um círculo de raio  $\Phi$ . A área adicional é dada por  $\pi\Phi^2 - \pi = \pi(\Phi^2 - 1) = \pi\Phi$ . Portanto, ao multiplicar a dimensão linear (raio) por  $\Phi$ , a área (e, portanto, o material, já que estamos a falar de estruturas bidimensionais) é multiplicada pelo mesmo fator. Isto acontece apenas com o número áureo, permitindo um maior planeamento dos insumos necessários na vovó das oficinas.

As relações entre  $\Phi$  e regras de crescimento são omnipresentes na Natureza. Basta uma simples busca na internet para vermos como este número mágico está presente em caracóis, ananases e flores. Acredita-se que isto decorra exatamente pela forma mais estável de aumentar de tamanho por superposição de novas camadas sobre as antigas.

De alguma forma, este conceito de beleza está tão entranhado na nossa natureza, que ao solicitar a um paleoantropólogo moderno que construísse um biface à moda antiga, o resultado – de forma inconsciente, garante – foi uma oval na forma da elipse dourada. Num tom mais especulativo, o autor termina por considerar se o facto de termos cinco dedos nos dá alguma preferência por objetos de cinco pontas, e das estrelas para a razão áurea é uma simples conta!

## BIBLIOGRAFIA

[1] Alan Cannell. "Pattern recognition of universal mathematical constants in Acheulean biface formats." *Journal of Lithic Studies* (2015) vol. 2, nr. 1, p. 17-44.

## Errata

No último número saiu cortada a referência utilizada no artigo "Que nome para o bebé?". Fica aqui a referência completa:

Paolo Barucca, Jacopo Rocchi, Enzo Marinari, Giorgio Parisi and Federico Ricci-Tersenghi. "Cross-correlations of American baby names." *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 112 (26) 7943-7947.



Figura 1: "Doni Tondo" (também conhecida por "Sagrada Família"), de Miguel Ângelo (c. 1507), com uma estrela de cinco pontas sobreposta, mostrando o destaque dado à Virgem Maria. **Fonte: Wikimedia Commons.** Um uso inconsciente da espiral dourada em fotografia da autoria de Hani Amir e gentilmente cedida pelo autor. Ver em <http://hani-amir.com/> e <http://ehentha.tumblr.com/>.

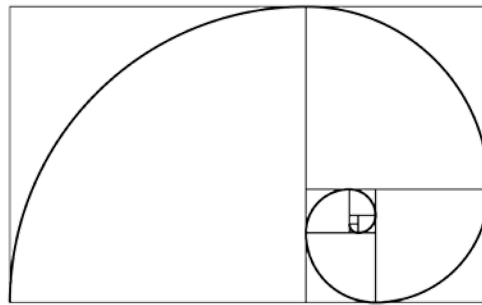


Figura 2: À direita, uma estrela de cinco pontas. Os segmentos coloridos têm os seus comprimentos relativos na proporção áurea. Cada um dos ângulos internos nas pontas mede  $36^\circ$ . À esquerda, construção do número  $\phi$  através da remoção sequencial de lados, formando uma hierarquia de retângulos semelhantes. Conjuntamente, vem aquilo a que se chama espiral dourada. **Fonte: Wikimedia Commons.**

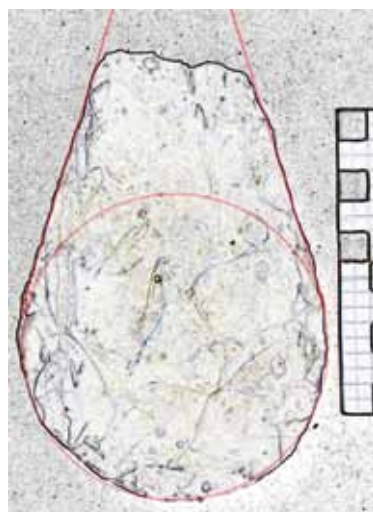
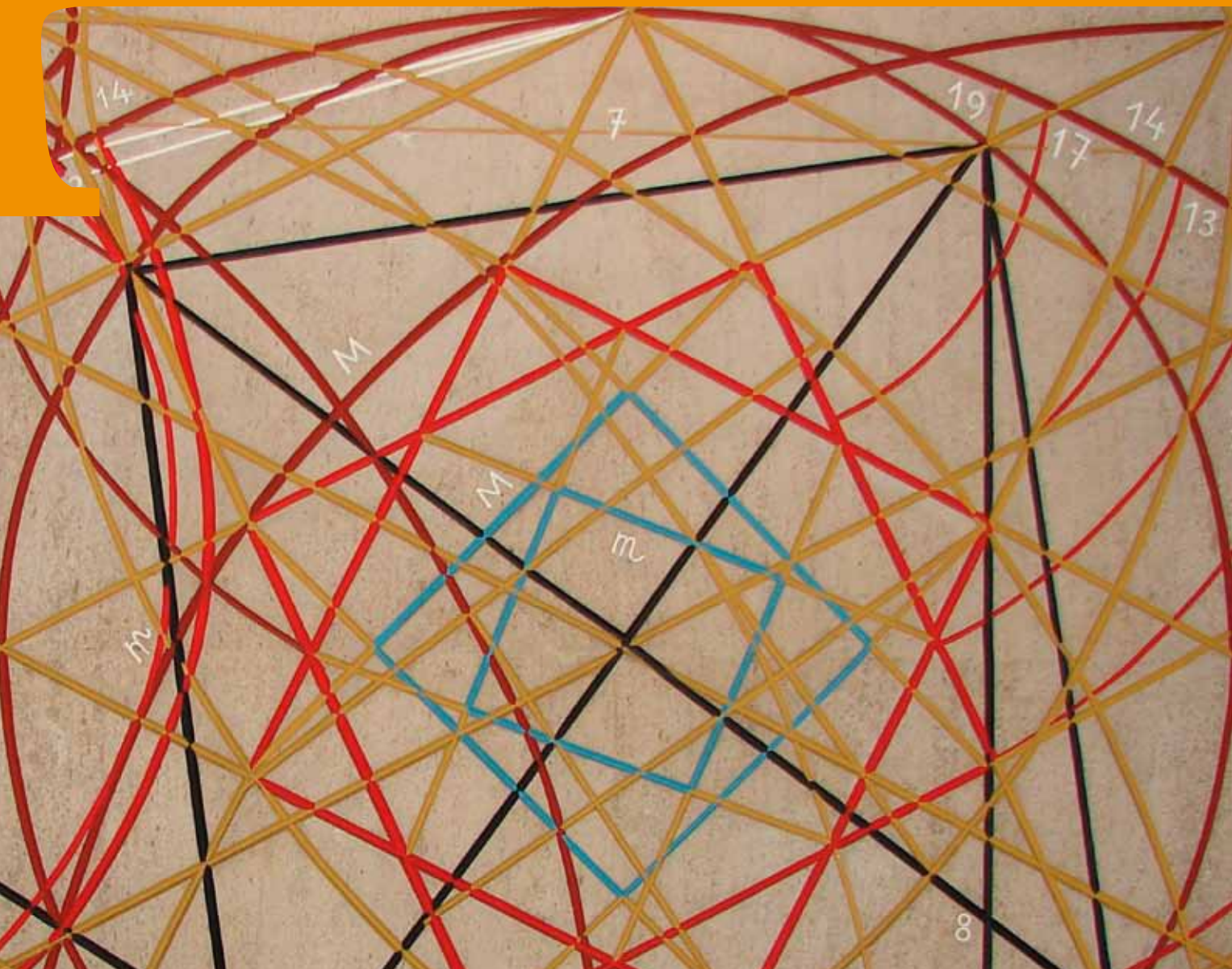


Figura 3: Dois exemplos de bifaces em que a razão áurea aparece. À esquerda, um biface com o formato longo em secção da elipse dourada; à direita, um instrumento com uma ponta de  $36^\circ$ . Figuras gentilmente cedidas por Alan Cannell (Transcraft Consultants, Curitiba, Brasil).



## O PONTO DA BAUHÜTTE, ONTEM E HOJE

PEDRO J FREITAS<sup>a</sup> E INEZ WIJNHORST<sup>b</sup>

<sup>a</sup>UNIVERSIDADE DE LISBOA E <sup>b</sup>ESAD, FRESS

<sup>a</sup>[pjfreitas@fc.ul.pt](mailto:pjfreitas@fc.ul.pt) e <sup>b</sup>[inezw@sapo.pt](mailto:inezw@sapo.pt)

## ALMADA NEGREIROS E LIMA DE FREITAS

O livro *Le Nombre d'Or*, de Matila Ghyka, faz uma recolha de vários elementos geométricos usados na chamada geometria sagrada, isto é, na geometria usada nas construções de igrejas, catedrais e outros espaços de cariz religioso ou espiritual. Nesse livro é citada uma quadra que terá a sua origem numa associação medieval de construtores de catedrais, a Bauhütte. A quadra, transmitida pelo arquiteto Ernest Mössel, é a seguinte:

*Um ponto que está no círculo*

*E se põe no quadrado e no triângulo.*

*Conheces o ponto? Tudo vai bem.*

*Não o conheces? Tudo está perdido.*

Como se vê, a quadra faz referência a este ponto, sem o descrever. Seria uma construção geométrica ou algo com um significado mais simbólico e espiritual? Claramente, a quadra parece ter intenção de guardar o segredo, provavelmente só acessível aos membros da companhia de construtores.

Almada Negreiros, que estudou a geometria ligada à arte durante décadas, tinha o livro de Ghyka na sua biblioteca. Ao encontrar a quadra, encarou-a como um desafio: como se construiria este ponto? Como encontrar o círculo, o quadrado e o triângulo? A sua solução, fixada em 1957, numa pintura abstrata, e em 1969, em pedra, no painel *Começar*, foi a da figura 1.

Apresentamos na figura 2 um esquema da construção. É a linha descendente dourada que determina um ponto na circunferência, a partir do qual se determinam o quadrado e o triângulo, que é reto, com um cateto hori-



Figura 1: Ponto da Bauhütte no painel *Começar*.

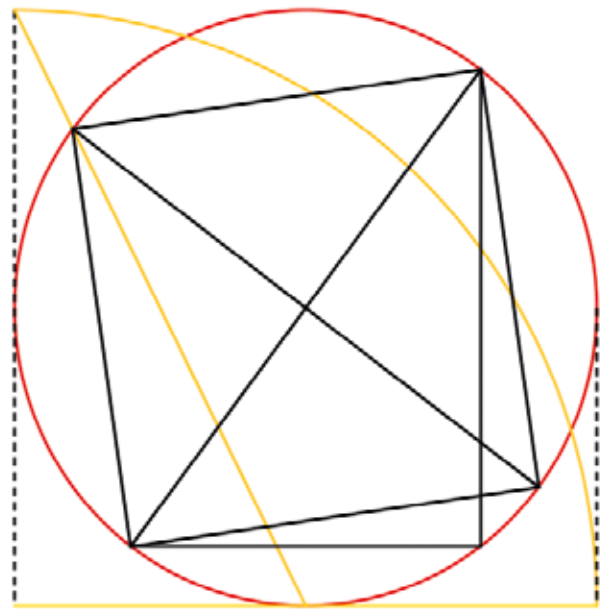


Figura 2: Esquema da construção do Ponto da Bauhütte.

**O** Ponto da Bauhütte tem maravilhado várias pessoas ao longo dos tempos. Entre nós, demarcam-se dois artistas: Almada Negreiros e Lima de Freitas, que desenvolveram construções geométricas sobre esta ideia. E o seu fascínio não termina: ainda hoje há novidades à volta deste ponto.

zontal e outro vertical.

O que é notável nesta construção é que este triângulo tem proporções 3-4-5. Este era um triângulo já conhecido dos egípcios, que o usavam para determinar ângulos retos, com o auxílio de uma corda com nós (fig. 3) a que Almada faz referência nos frescos do Edifício das Matemáticas na Universidade de Coimbra (executados no mesmo ano que o painel *Começar*).

A figura 4 apresenta um desenho do próprio Almada, do qual se pode deduzir facilmente uma demonstração de que o triângulo obtido no painel *Começar* tem estas proporções. Nesta grelha de dez quadrículas, o ponto de interseção da linha descendente (que não está marcada aqui) com a circunferência é um ponto da grelha – o ponto tem coordenadas  $(-4,3)$ .<sup>1</sup> Ora, a linha descendente em questão tem declive  $-2$ , começando no ponto de coordenadas  $(-5,5)$ , e a circunferência tem raio de 5 quadrículas; assim, ambas passam neste ponto. Portanto, todos os lados do triângulo estão contidos em linhas da quadrícula e, para saber os seus comprimentos, basta contar quadrículas — medem 6, 8 e 10, o que dá a proporção 3-4-5, como indicado.

Lima de Freitas não ficou satisfeito com esta construção, pois parecia-lhe que o triângulo mencionado na quadra devia ser equilátero. Apresentou então, no livro *Almada e o Número*, outra construção, em que, para além da circunferência, do quadrado e do triângulo, o ponto gera também um pentágono (ainda que seja apenas uma aproximação do pentágono regular). A figura 5 descreve a construção, os três polígonos estão marcados com linha mais grossa.

Nesta construção, começa por se criar um retângulo do lado esquerdo, com uma diagonal descendente, a partir da qual se traçam várias linhas que dão origem aos polígonos. Esse retângulo tem como base um motivo conhecido, a *vesica piscis* (bexiga de peixe), uma figura formada por dois arcos de circunferência, e que aqui determina a posição dos lados superior e inferior do retângulo e dois dos vértices do triângulo.

### DESENVOLVIMENTOS RECENTES

A segunda autora deste artigo, que faz trabalho artístico com base geométrica, desenvolveu mais algumas propostas de construções para o Ponto da Bauhütte (segundo Almada), que apresentamos aqui.

Desenhámos na figura 6 todas as linhas que definem os pontos da Bauhütte (por interseção com a circunferência), obtendo o que se chama a *polarização do quadrado*. Nessa grelha de linhas encontramos outro triângulo 3-4-5,

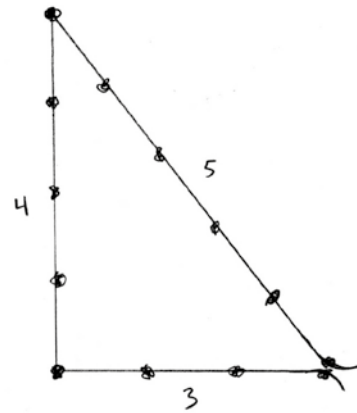


Figura 3: A corda com nós.

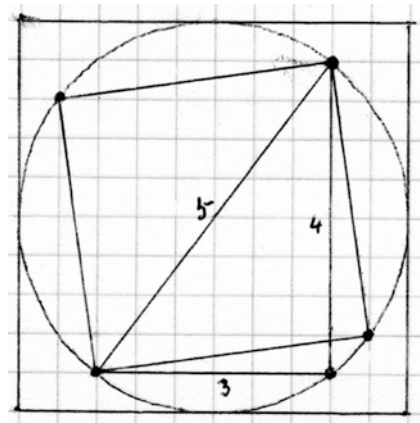


Figura 4: O Ponto da Bauhütte sobre quadrícula.

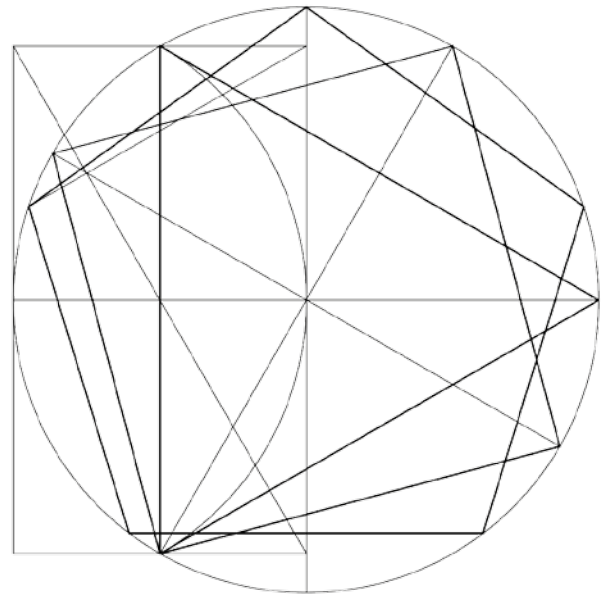


Figura 5: O Ponto da Bauhütte segundo Lima de Freitas.

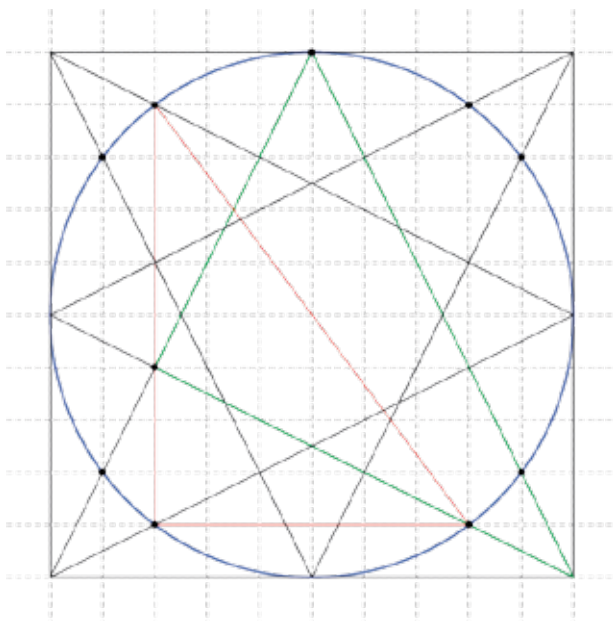


Figura 6: Mais um triângulo 3-4-5.

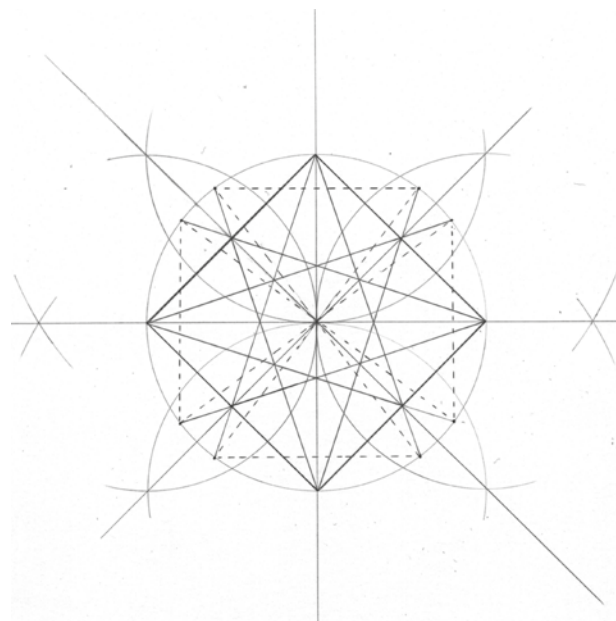


Figura 7: Os pontos da Bauhütte por Inez Wijnhorst.

assinalado a verde.

Já sabemos que o triângulo a vermelho tem proporções 3-4-5. Para verificar que o mesmo acontece com o triângulo verde, basta medir os comprimentos dos seus lados. Depois de verificar que todos os vértices deste triângulo estão sobre pontos da quadrícula, vemos que qualquer dos lados é diagonal de um retângulo, da quadrícula, de proporções 2:1 (isto é, formados por dois quadrados). Portanto, pelo teorema de Pitágoras, medem  $\sqrt{5}$  vezes o lado menor dos respetivos retângulos. Observando que estes lados menores medem precisamente 3, 4 e 5, temos o resultado.

Na figura 7 apresentamos uma construção alternativa para os pontos da Bauhütte, desta vez sem o quadrado circunscrito à circunferência.

O protocolo da construção é o seguinte. Divide-se uma circunferência em quatro partes iguais, marcando diâmetros na vertical e na horizontal. Inscreve-se um quadrado com vértices nos extremos destes diâmetros e determinam-se os pontos médios dos lados deste quadrado. Por estes fazem-se passar linhas com origem nos extremos dos dois diâmetros originais, verticais e horizontais. Estas linhas determinam então, por interseção com a circunferência, os pontos da Bauhütte.

Para verificar que os pontos são os mesmos, apre-

sentamos as duas construções sobrepostas na figura 8.

Os pontos da Bauhütte representados têm coordenadas (3,4) e (4,3) e o ponto médio do segmento azul tem coordenadas (2.5, 2.5). Os segmentos vermelhos têm declives 1/3 e 3, considerando-os dirigidos pelos pontos da Bauhütte e pelos pontos de coordenadas (-5,0) e (0,-5), respetivamente. Usando agora proporções, podemos verificar que o ponto médio do segmento azul pertence de facto a ambos os segmentos, justificando assim a construção.

Se desenharmos as semirretas com origem no centro da circunferência, passando pelos pontos da Bauhütte, como na figura 9, determinamos estes pontos em qualquer circunferência concêntrica à primeira. Além disso, a sua interseção com os lados do quadrado (a negro) permite-nos desenhar outras circunferências igualmente interessantes, todas com o mesmo raio, aqui marcadas a vermelho e uma ao centro a azul. Usando novamente proporções, e as coordenadas dos pontos da Bauhütte, é simples verificar que o raio destas circunferências é 5/4.

<sup>1</sup> Sempre que apresentarmos um referencial sobre uma quadrícula com uma circunferência, o centro do referencial será o centro da circunferência e o lado da quadrícula será a unidade de comprimento.

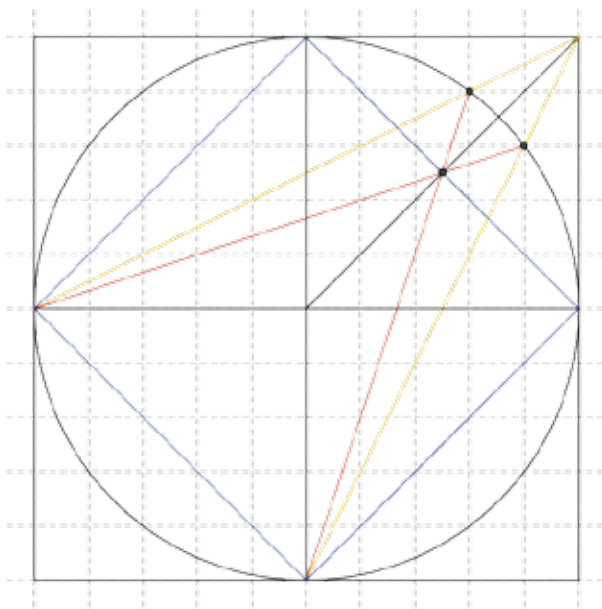


Figura 8: Os dois métodos comparados.

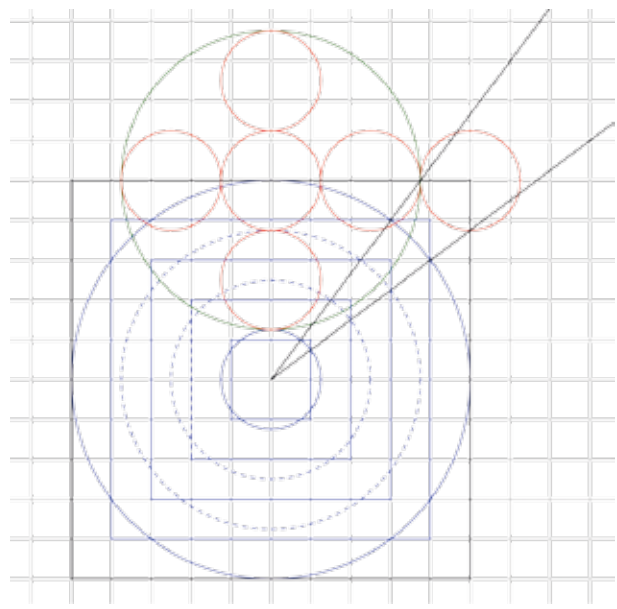


Figura 9: Semirretas dos pontos da Bauhütte.

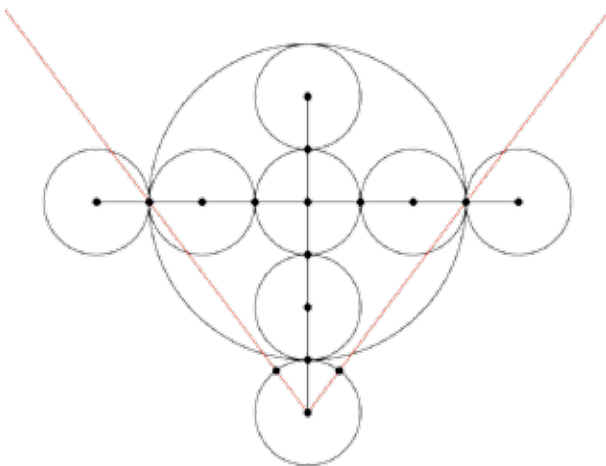


Figura 10: Oito circunferências em cruz.

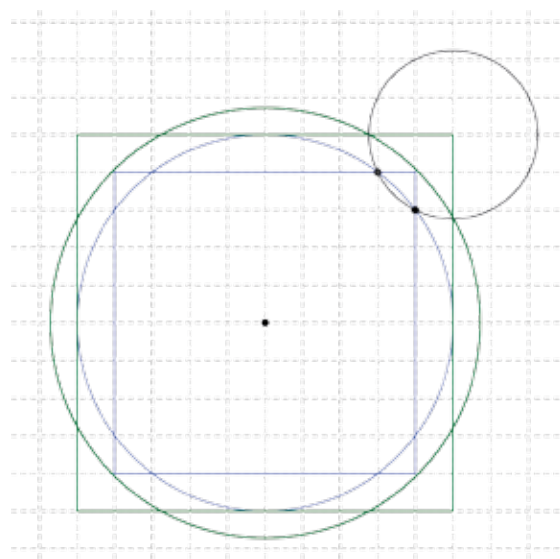


Figura 11: Aproximações das quadraturas.

Vemos que, considerando a pequena circunferência ao centro, as semirretas passam justamente nos pontos de interseção desta com o quadrado de lado 2. Ou seja: nos quatro conjuntos azuis concêntricos circunferência/quadrado, em que os raios das circunferências são múltiplos do raio das circunferências vermelhas, a interseção dá os pontos da Bauhütte.

Esta constatação permite encontrar uma nova cons-

trução para estes pontos, baseada apenas no desenho repetido, nos eixos verticais e horizontais, de uma circunferência com um diâmetro fixo. A figura 10 ilustra este processo.

Os pontos marcados na circunferência em baixo são os pontos da Bauhütte. Note-se que os raios das circunferências pequenas marcam as medidas 3 e 4 nos catetos do triângulo, com hipotenusa contida na semirreta



a vermelho, recuperando assim o triângulo 3-4-5. As circunferências nos extremos do segmento horizontal permitem marcar o quadrado inicial, com uma grelha de dez unidades de lado: os centros das circunferências são os vértices deste quadrado.

## APROXIMAÇÕES

Dois pontos da Bauhütte consecutivos (como os da figura 8) determinam um ângulo de  $16,26^\circ$ , que é uma boa aproximação da 22.<sup>a</sup> parte da circunferência,  $16,36^\circ$ , com erro de 0.6%. Já Almada Negreiros tinha notado este facto. Além disso, o outro ângulo definido por estes pontos na circunferência, cerca de  $343,74^\circ$ , dá uma muito boa aproximação de seis radianos, que correspondem a  $343,77^\circ$  — o erro é de 0.009%!

Os pontos da Bauhütte fornecem também uma aproximação de quadraturas do círculo, veja-se a figura 11.

Para uma quadratura em termos de perímetros, consideremos as figuras a azul, o quadrado e a circunferência, que se interseam nos pontos da Bauhütte. Tomando como unidade o lado da quadrícula, o perímetro do quadrado é 32 e o perímetro da circunferência é 31.42, o que representa um erro de 1.8%.

Com estes pontos podemos determinar também uma quadratura aproximada em termos de áreas, ilustrada pelas figuras a verde (a circunferência a preto é auxiliar: passa nos pontos da Bauhütte e determina um ponto de passagem da circunferência a verde). A circunferência tem área aproximada de 102.54, o quadrado tem área 100, o que corresponde a um erro de 2.5%.

Finalmente, a construção da figura 12, baseada numa pavimentação do plano com quadrados e triângulos (que são os dois polígonos referidos na quadra), dá uma boa aproximação dos pontos da Bauhütte. O ângulo entre o ponto exato e o ponto determinado por esta construção, tendo como referência o centro da circunferência, é  $0,66^\circ$ . Os pontos, que estão todos sobre a mesma circunferência (dada a simetria da construção), estão marcados a verde e a vermelho na figura, o centro da circunferência seria o ponto central, a azul.

Terminamos com a figura 13, que é um registo artístico dos elementos envolvidos na construção destes pontos aproximados.

## SOBRE OS AUTORES

**Pedro J. Freitas** é Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Para além do trabalho de regência de cadeiras e investigação em matemática, fundamentalmente em áreas de álgebra, dedica-se também a assuntos de divulgação e de interação entre matemática e arte — em particular, colabora há alguns anos no estudo da obra geométrica de Almada Negreiros, no âmbito do projeto Modernismo Online.

**Inez Wijnhorst** é licenciada em Pintura pela Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa (1996). Desenvolve a seu trabalho nas disciplinas de Gravura, Desenho, Pintura e Geometria. Foi distinguida com vários prémios dos quais se destacam: Bronze Award no Print Art Triennale em Osaka, Japão (1997) e o Prémio Amadeo de Souza-Cardoso em Amarante, Portugal (1999).

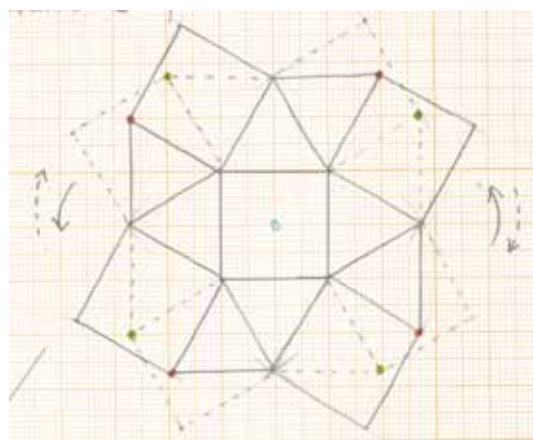


Figura 12: Construção aproximada para os pontos da Bauhütte.

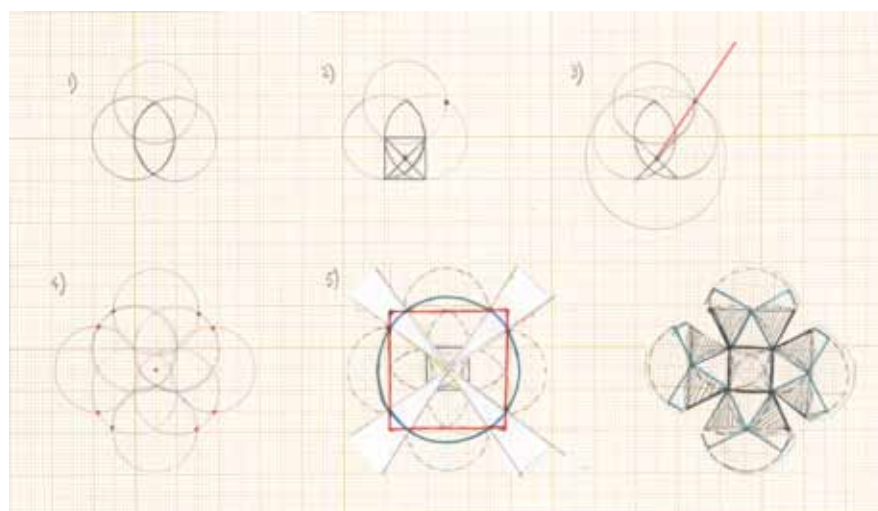


Figura 13: Evoluções da construção aproximada dos pontos da Bauhütte.



ÓSCAR FELGUEIRAS  
Universidade  
do Porto  
olfelgue@fc.up.pt

## PROBABILIDADES ENGANADORAS

Laplace definiu probabilidade como sendo o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos totais. Embora este conceito de probabilidade seja intuitivo e natural, por vezes pode transmitir uma ideia enganadora e veremos dois casos em que isso acontece.

As probabilidades são hoje em dia amplamente utilizadas e relativamente familiares à comunidade em geral. Convém por isso que haja um certo cuidado na interpretação que se pode fazer de determinada probabilidade, não só quanto ao que ela quer dizer, mas também quanto àquilo que não quer dizer.

### 1. PARADOXO DE SIMPSON

Imaginemos que o leitor tem de decidir entre recorrer ao Hospital A ou ao Hospital B, e que tem ao seu dispor a informação da seguinte tabela:

	Pacientes	Mortes	Tx. Mortalidade
Hospital A	1000	200	$200/1000=20\%$
Hospital B	1000	100	$100/1000=10\%$

Tendo por base o conhecimento de que a taxa de mortalidade no Hospital B (10%) é inferior à do Hospital A (20%), é natural que esteja mais inclinado a optar pelo Hospital B dado que a probabilidade de um paciente sobreviver no Hospital B é maior do que no Hospital A. No entanto, suponha que estão também disponíveis os registos da condição dos pacientes à entrada em cada um dos hospitais e respetivas estatísticas. Considere a seguinte tabela relativamente aos pacientes classificados em *estado estável* ou em *estado crítico*:

		Pacientes	Mortes	Tx. Mortalidade
Estado Estável	Hosp. A	600	12	$12/600=2\%$
	Hosp. B	900	36	$36/900=4\%$
Estado Crítico	Hosp. A	400	188	$188/400=47\%$
	Hosp. B	100	64	$64/100=64\%$

Note que a tabela inicial consiste simplesmente na soma dos dados apresentados nesta segunda. Seria esta informação discriminada o suficiente para mudar de ideias quanto ao hospital a escolher?

A novidade que aqui surge é o facto de o Hospital A ter uma taxa de mortalidade mais baixa tanto nos pacientes estáveis como nos críticos. Por outro lado, a taxa de mortalidade total mais baixa continua a ser a do Hospital B. O problema é que a taxa de mortalidade total é enganadora por ter na sua formação grupos de pacientes com características heterogéneas e em diferentes proporções. Os pacientes em estado crítico recorrem mais ao Hospital A (400 contra 100 no Hospital B) e os que estão estáveis recorrem mais ao Hospital B (900 contra 600 no Hospital A). Isto leva a suspeitar de que o estado dos pacientes está a pesar na distribuição pelos dois hospitais. Assim, o estado dos pacientes é um fator de confundimento que deve ser tido em conta numa análise criteriosa da taxa de mortalidade. A taxa de mortalidade total mais alta no Hospital A acaba por

ser um reflexo da maior proporção de pacientes críticos para pacientes estáveis nesse hospital e não uma consequência do insucesso no tratamento dos pacientes.

O fenómeno exibido neste exemplo foi identificado por Edward Simpson em 1951<sup>1</sup>, e batizado em 1972 por Colin Blyth<sup>2</sup> como paradoxo de Simpson. Ele reflete uma propriedade relativamente elementar de números que satisfazam simultaneamente as seguintes condições:

$$\frac{a}{A} < \frac{b}{B}, \frac{c}{C} < \frac{d}{D}, \frac{a+c}{A+C} > \frac{b+d}{B+D}.$$

Mais exemplos e detalhes podem ser encontrados a partir da página de Internet do projeto ALEA<sup>3</sup>. Para uma visualização interativa recomendamos o projeto *Visualizing Urban Data* da UC Berkeley<sup>4</sup>, assim como um *applet* em GeoGebra criado por Alexander Bogomolny<sup>5</sup>.

## 2. SEQUÊNCIAS DE FACES E COROAS

No lançamento ao ar de uma moeda equilibrada supomos que as probabilidades de sair face (F) ou coroa (C) são iguais. Fixem-se duas sequências finitas de faces e coroas. Lança-se sucessivamente a moeda até que saia uma das sequências fixadas. Tomando por exemplo as sequências FF e CF, qual delas terá mais probabilidade de ocorrer primeiro?

Não é difícil ver que a única maneira de FF ocorrer antes de CF é sair FF logo nos primeiros dois lançamentos, acontecimento que tem probabilidade 1/4 de acontecer. Isto porque a partir do momento em que saísse C, automaticamente iria ser CF a sair primeiro. Logo, a probabilidade de CF sair antes de FF é a complementar,  $1 - 1/4 = 3/4$ . O quociente entre estas duas probabilidades designa-se por *odds*. Neste caso concreto, diz-se que CF *bate* FF com *odds* 3/1 por este valor ser maior do que 1.



Podemos também definir o tempo médio de espera de uma sequência,  $E(\cdot)$ , como uma função que associa a cada sequência finita o número de lançamentos esperados até que ela saia. Assim, se quisermos determinar um caso elementar,  $E(F)$ , podemos começar por observar que

$$E(F) = 1 + \frac{1}{2}E(F|F) + \frac{1}{2}E(F|C)$$

onde  $E(F|F)$  e  $E(F|C)$  denotam o número de lançamentos esperados para que saia F, a partir do momento em que tenha saído F e C, respetivamente. Claro que

$E(F|F) = 0$  e  $E(F|C) = E(F)$ , pelo que

$$E(F) = 1 + \frac{1}{2}E(F),$$

daí resultando que

$$E(F) = 2.$$

É óbvio também que  $E(C) = 2$ . Estamos agora em condições de calcular  $E(CF)$  e  $E(FF)$ . Assim,

$$\begin{aligned} E(CF) &= 1 + \frac{1}{2}E(CF|F) + \frac{1}{2}E(CF|C) \\ &= 1 + \frac{1}{2}E(CF) + \frac{1}{2}E(F), \end{aligned}$$

e consequentemente  $E(CF) = 4$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} E(FF) &= 1 + \frac{1}{2}E(FF|F) + \frac{1}{2}E(FF|C) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}E(FF|C)) + \frac{1}{2}E(FF) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3}{4}E(FF), \end{aligned}$$

o que implica que  $E(FF) = 6$ . Observando que  $E(CF) = 4 < 6 = E(FF)$  e que CF *bate* FF com *odds* 3/1, poderia parecer possível estabelecer uma associação entre haver um menor número de lançamentos esperados até sair CF e o facto de CF *bater* FF. Algo que seria um engano, como veremos de seguida.

Não é preciso procurar muito para se encontrar um contraexemplo. Tomando FF e FC, tem-se que  $E(FC) = 4 < 6 = E(FF)$ . No entanto, nenhuma destas sequências *bate* a outra. Basta notar de que cada vez que sai um F existe uma probabilidade igual de se completar uma das sequências FF ou FC.

Analisando sequências de tamanho 3, dá-se um caso bastante inesperado. Verifica-se que FCC *bate* FCC (*odds* 2/1), FCC *bate* CCF (*odds* 3/1), CCF *bate* CFF (*odds* 2/1) e CFF *bate* FCC (*odds* 3/1). Isto mostra a não transitividade da relação de uma sequência *bater* outra.

<sup>1</sup> Simpson, E. "The interpretation of interaction in contingency tables". *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*. 13, 238–241, 1951.

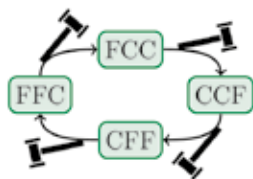
<sup>2</sup> Blyth, C. "On Simpson's paradox and the sure-thing principle". *Journal of the American Statistical Association*. 67, 364–366, 1972.

<sup>3</sup> <http://www.alea.pt/html/statofic/html/dossier/doc/ActivAlea02.pdf>

<sup>4</sup> <http://vudlab.com/simpsons/>

<sup>5</sup> <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Algebra/SimpsonParadox.shtml>

Saliente-se que todas estas quatro sequências têm um número esperado de lançamentos igual a 8.



Considerando sequências de tamanho 4, verifica-se que CFCF bate FCFF com *odds* 9/5 ainda que  $E(\text{CFCF}) = 20 > 18 = E(\text{FCFF})$ . Isto significa que apesar de esperarmos que CFCF ocorra em média depois de FCFF, na verdade CFCF tem maior probabilidade de ocorrer antes de FCFF!

Em particular, suponha-se que o Carlos e a Francisca apostam um contra o outro na sequência que acreditam que vai sair primeiro ao lançarem consecutivamente uma moeda: o Carlos aposta em CFCF e a Francisca em FCFF. Como CFCF bate FCFF com *odds* 9/5, então o Carlos tem probabilidade 9/14 de ganhar.

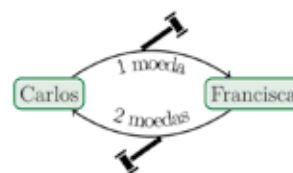
Por outro lado, imaginemos que a Francisca, talvez por perceber que parte em desvantagem, propõe uma subtil alteração de regras: continuarem ambos a apostar nas mesmas sequências, mas jogando com duas moedas. Ou seja, cada um dos jogadores lança a sua própria moeda e observa o número de lançamentos que tem de fazer até sair a sua sequência escolhida. Se houver empate o jogo reinicia-se.

Nesta nova forma de jogar, a Francisca vai poder beneficiar de estar a apostar numa sequência que tem menor tempo médio de espera e de haver independência entre a saída das duas sequências. As probabilidades de vitória para cada jogador podem ser calculadas usando, por exemplo, cadeias de Markov.

A tabela apresentada de seguida contém o resumo das probabilidades dos diferentes resultados caso os jogadores decidam jogar com base na sequência das respetivas moedas ou com base na sequência de uma só moeda.

Chega-se assim à conclusão de que a alteração de regras torna a Francisca a mais provável vencedora do jogo.

	Carlos	Francisca	Empate
1 moeda	$\frac{9}{14}$ (64.29%)	$\frac{5}{14}$ (35.71%)	0 (0%)
2 moedas	$\frac{4187}{9228}$ (45.37%)	$\frac{78293}{152345}$ (51.39%)	$\frac{251362}{7769319}$ (3.24%)



A abordagem sobre sequências de moedas aqui feita tem como fio condutor o artigo de 1974 de Martin Gardner<sup>6</sup>, mais tarde incluído em livro<sup>7</sup>. Ela baseia-se num jogo chamado Penney-Ante proposto por Walter Penney<sup>8</sup> em 1969. Para uma breve introdução a estas e outras questões relacionadas com probabilidades, recomendando a TED Talk de Peter Donnelly<sup>9</sup>. Para uma exploração mais detalhada do assunto, ver os artigos de Raymond Robertson<sup>10</sup> e de Yutaka Nishiyama<sup>11</sup>. Este último apresenta uma explicação particularmente acessível de como calcular *odds* de uma sequência bater outra.

<sup>6</sup> Gardner, M. "Mathematical games", *Scientific American*, 231(4), 120-125, 1974.

<sup>7</sup> Gardner, M. *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, New York: W. H. Freeman, 64-66, 1988.

<sup>8</sup> Penney, W. "Problem 95. Penney-Ante". *J. Recr. Math.* 2, 241, 1969.

<sup>9</sup> <http://www.youtube.com/watch?v=kLmzxmRcUTo>

<sup>10</sup> Nickerson, R. "Penney Ante: Counterintuitive Probabilities in Coin Tossing". *The UMAP Journal.* 28(4).

<sup>11</sup> Y. Nishiyama. "Pattern matching probabilities and paradoxes as a new variation on Penney's coin game". *Int'l Jnl of Pure and Applied Math.* 59(3) 357-366, 2010 disponível em <http://www.ijpam.eu/contents/2010-59-3/110/110.pdf>



Visite o site da  
Gazeta de Matemática.

[www.gazeta.spm.pt](http://www.gazeta.spm.pt)

Para aceder à área reservada a assinantes, solicite o seu código de subscrição através do e-mail [gazeta@spm.pt](mailto:gazeta@spm.pt)



## CONHECIMENTOS DE MATEMÁTICA DOS ESTUDANTES À ENTRADA DO ENSINO SUPERIOR

HELENA MONTEIRO<sup>a</sup>, MARIA JOÃO AFONSO<sup>b</sup>, MARÍLIA PIRES<sup>c</sup>

ESTA – INSTITUTO POLITÉCNICO DE TOMAR<sup>a</sup>, FP – UNIVERSIDADE DE LISBOA<sup>b</sup>, FCT – UNIVERSIDADE DO ALGARVE<sup>c</sup>

helena.monteiro@ipt.pt<sup>a</sup>, mjafonso@psicologia.ulisboa.pt<sup>b</sup>, mpires@ualg.pt<sup>c</sup>

O diagnóstico eficaz das lacunas e das dificuldades dos estudantes é indispensável ao estabelecimento de uma base sólida para recomendar e delinear soluções que visem a melhoria efetiva das práticas de ensino, nomeadamente nas unidades curriculares de matemática do ensino superior. Para o concretizar, é necessário desenvolver estudos com fundamentação científica, que requerem a utilização de testes standardizados de conhecimentos.

## RESUMO

Neste artigo caracteriza-se o PMAT, um teste standardizado de conhecimentos de matemática, descreve-se o processo da sua construção e apresenta-se alguns resultados obtidos com a sua versão mais recente, quer da análise do teste como instrumento de medida quer das respostas dadas aos itens que o compõem.

## I. INTRODUÇÃO

As dificuldades sentidas pelos estudantes no primeiro ano do ensino superior são de natureza diversa. Algumas prendem-se com a aprendizagem das matérias das unidades curriculares de matemática. Alunos do 1.º ano de engenharia, em 2011, numa entrevista acerca da Álgebra Linear e do Cálculo que tinham frequentado no 1.º semestre, apontaram como causas das dificuldades que experimentaram nestas unidades curriculares a rapidez com que foi dada a muita matéria teórica, o grande aumento do nível de exigência do secundário para o superior e, entre outras, a falta de bases que traziam do secundário. Os estudantes que indicaram este motivo tiveram uma clas-

sificação de, pelo menos, 12 valores no exame nacional de Matemática A. Terão, de facto, conhecimentos e competências suficientes para aprender a matemática que lhes é proposta no ensino superior? Se não, é o superior que exige demasiado ou é o secundário que não prepara bem os alunos para prosseguirem estudos em cursos de engenharia?

## 2. CARACTERIZAÇÃO E CONSTRUÇÃO DO PMAT

No âmbito do desenvolvimento de um projeto para avaliar o desempenho em matemática na transição para o ensino superior científico e tecnológico em Portugal, a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) reuniu uma equipa de docentes e investigadores das áreas de matemática e de psicologia. Entre outros objetivos, a SPM pretendia criar e desenvolver empiricamente um teste que avaliasse, nos estudantes do 1.º ano do ensino superior, os conhecimentos de matemática necessários para o sucesso nas unidades curriculares de matemática dos cursos de ciências e tecnologia. Desejava, também, poder comparar os resultados de aplicações sucessivas do teste, nomeadamente as pontuações totais e as respostas certas, erradas ou omissas dadas a cada item, com o objetivo de avaliar o progresso educativo. Para o efeito, professores de matemática dos ensinos secundário e superior, orientados por um especialista em psicometria, desenvolveram um teste de modo sistemático, de acordo com procedimentos científicos, e estudaram as suas propriedades metrológicas em amostras da população alvo – construíram um teste standardizado, designado por PMAT.

O processo de construção dos itens do PMAT foi condicionado pelas características que a equipa, com base na revisão de literatura psicométrica e na sua experiência docente, decidiu conferir ao teste:

### RELATIVAMENTE AOS ITENS

**Formato:** Escolha múltipla, com três alternativas de resposta – uma certa e duas erradas (os distratores);

**Pontuação:** 1 ponto por uma resposta certa; 0 pontos por uma resposta errada ou omissa;

**Áreas de conteúdo:** Análise, Álgebra, Geometria, Probabilidades e Estatística e Lógica e Teoria de Conjuntos, representadas por 35%, 30%, 15%, 15% e 5% dos itens, respetivamente;

**Níveis de complexidade** (inspirados na clássica Taxonomia de Bloom, 1956): Baixo (conhecimento, compreensão), Médio (aplicação, análise) e Elevado (síntese, avaliação), satisfeitos por, respetivamente, 35%, 50% e 15% dos itens.

## RELATIVAMENTE À APLICAÇÃO

**Destinatários:** Estudantes do 1.º ano/1.ª inscrição no ensino superior de ciências e tecnologia;

**Forma:** Papel-e-lápis, aplicação coletiva, sem calculadora e sem formulário; folha de respostas destinada a leitura ótica;

**Data:** Primeira semana de aulas;

**Duração:** 2 horas;

**Dados identificativos recolhidos** (na folha de respostas): n.º de BI ou de CC, género, data de nascimento e tipo de exame nacional de matemática que realizou.

A última versão do PMAT, o PMAT-03, tem 32 itens. Estes foram construídos de acordo com as diretrizes propostas por Haladyna, Downing e Rodriguez (2002) e organizados no caderno de teste da seguinte forma: dispostos por ordem crescente de nível de complexidade, em cada nível agrupam-se por área de conteúdo e, dentro de cada área, apresentam-se por ordem crescente de dificuldade (aferida na penúltima versão).

O PMAT-03 foi aplicado no quarto ensaio experimental do PMAT e é o produto de um processo de análise de resultados, revisão e melhoria progressiva dos testes utilizados nos ensaios experimentais anteriores, precedidos por um estudo piloto, efetuado no 12.º ano com o PMAT-12. Ao todo, o PMAT contou com a colaboração de 7910 estudantes de 13 instituições de ensino: 269 alunos do 12.º ano de oito escolas secundárias no estudo piloto, em maio de 2009; 1549 estudantes de um instituto politécnico e duas universidades no primeiro ensaio experimental, em setembro de 2009; 2031 estudantes no segundo, 2088 no terceiro e 1951 no quarto ensaios, que decorreram em setembro de 2010, de 2011 e de 2012, respetivamente, na primeira semana de aulas de três universidades. O PMAT-01, utilizado no segundo ensaio experimental, voltou a ser aplicado no início do segundo semestre, do mesmo ano letivo, a 71 estudantes que já o tinham resolvido em setembro. O estudo comparativo do teste e do reteste após treino de competências permitiu analisar o efeito, nos conhecimentos de matemática dos participantes, da formação que lhes foi proporcionada pelas unidades curriculares do primeiro semestre, ou seja, o efeito das variáveis treino de competências e aprendizagem de conteúdos, novos ou já abordados no secundário. Este estudo também constituiu uma fonte de validação do PMAT.

Na análise do PMAT-03, que se designará por PMAT, tal como nos testes anteriores, apenas foram consideradas as respostas dos estudantes de cursos superiores de ciências e tecnologia que se candidataram com o exame

nacional de Matemática A. Neste caso, de 1879 indivíduos. Os resultados do teste foram estudados com base na Teoria Clássica dos Testes (TCT) e na Teoria da Resposta ao Item (TRI) – Modelo de Rasch. As técnicas de análise da TCT foram aplicadas com o programa SPSS, versão 20 (IBM Corp., 2011) e as da TRI, com o programa Winsteps (Linacre, 2012).

## 3. RESULTADOS DO PMAT

A amostra observada é constituída por 1236 alunos de cursos de engenharia da universidade A, por 127 estudantes de economia ou gestão da universidade B e por 516 alunos de cursos de engenharia e ciências exatas da universidade C<sup>1</sup>. A nota de candidatura dos alunos das universidades A e B foi de 12 ou mais valores (na escala de 0 a 20) com, pelo menos, 10 valores no exame nacional de Matemática A. Os participantes da universidade C podem ter sido admitidos com 9,5 no exame e na nota de candidatura. Nesta, a média do ensino secundário teve um peso de 50%, tal como na universidade A, enquanto na B foi de 60%.

Dos 1879 participantes, 67% são do género masculino e 85% completaram os 18 anos de idade no ano de aplicação do PMAT (3% fizeram os 17 anos, 10% os 19 e 2% mais de 19 anos).

Na Tabela 1 encontram-se resultados do total das respostas dadas pelos participantes a 31 itens do PMAT (um item do caderno de teste entregue a alguns estudantes tinha uma gralha, pelo que foi excluído da análise da amostra total).

Tabela 1. Respostas certas, erradas e omissas.

Respostas ao PMAT (31 itens; 1879 participantes)				
Respostas	Min.-Max.	Mediana	Média	D. Pad.
<b>Certas</b> (Pontuações)	2-31	17	16,72	5,06
<b>Erradas</b>	0-29	14	13,71	4,95
<b>Omissas</b>	0-22	0	0,57	1,95

A qualidade de um teste depende das características métricas dos itens que o compõem, em particular, dos índices de dificuldade e de discriminação. O primeiro refere-se à proporção de respostas certas dadas ao item, o segundo à correlação entre a pontuação no item e no teste. Os índices de dificuldade dos itens do PMAT variam entre 0,24 e 0,79, com média igual a 0,54, daí considerar-se que o teste é equilibrado quanto ao nível de dificuldade. Um quarto dos itens tem discriminação inferior ao valor aceitável (0,20), mas a heterogeneidade das áreas de conteúdo



pode ser parte da explicação de não haver fortes indicadores da diferença de sucesso, nesses itens, entre os alunos com as melhores e as piores pontuações no teste.

Os estudantes foram agrupados por gênero e por universidade para ser possível efetuar um estudo comparativo de subamostras. A análise da variável *gênero* revelou alguma superioridade das pontuações obtidas pelos estudantes do gênero masculino, confirmada por testes de hipóteses. Embora a diferença não seja significativa, o número de respostas omissas dos rapazes é superior ao das raparigas (talvez elas tenham tido mais tendência, do que os rapazes, para arriscar a dar uma resposta errada). No que respeita à variável *universidade*, verificaram-se diferenças, estatisticamente significativas, entre o número de respostas certas dadas pelos participantes das três instituições, sendo maior na universidade A e menor na C, o que é coerente com o nível das notas de candidatura a estas universidades.

Tabela 2. Respostas certas por subamostras.

Respostas Certas (31 itens; 1879 participantes)					
Subamostras		Min.-Max.	Mediana	Média	D. Pad.
Gênero	M	2-31	17	17,15	5,20
	F	5-30	15	15,82	4,63
Univers.	A	5-31	18	18,1	4,84
	B	8-29	16	16,1	4,44
	C	2-28	13	13,6	4,27

A análise das características métricas dos itens, baseada nos padrões de resposta dos estudantes, permitiu identificar os itens com nível de dificuldade significativamente diferente em cada uma das subamostras. Ao todo, identificaram-se sete itens relativos à universidade e dois itens relativos ao gênero. Estes últimos mostram que as raparigas tiveram mais facilidade do que os rapazes em derivar uma função num ponto (o que pode atribuir-se a uma maior capacidade de memorização e de utilização de procedimentos automatizados), enquanto para eles foi mais fácil responder ao item que solicita o estudo de uma função irracional que envolve a exponencial (um possível indicador de que o raciocínio dedutivo dos rapazes está mais desenvolvido). Esta análise ocorreu depois de se confirmar o ajustamento dos dados do PMAT ao modelo de Rasch, um modelo que permite prever a probabilidade de sucesso de um indivíduo ao responder a um item, em função do seu nível de competência e da dificuldade do

item. A ideia primordial da TRI é a utilização de um modelo desta natureza (Wu & Adams, 2007), o qual permite estimar o nível do conhecimento dos estudantes a partir das características dos itens, não da comparação dos seus resultados no teste com os dos outros indivíduos, como acontece na TCT (Pasquali & Primi, 2003). Outra grande diferença entre estas teorias é que, ao contrário da TCT, a TRI admite colocar itens e indivíduos na mesma escala (Urbina, 2004). Relativamente a 1211 participantes no PMAT que responderam aos 32 itens do teste, obteve-se a seguinte representação conjunta na escala *logit*.

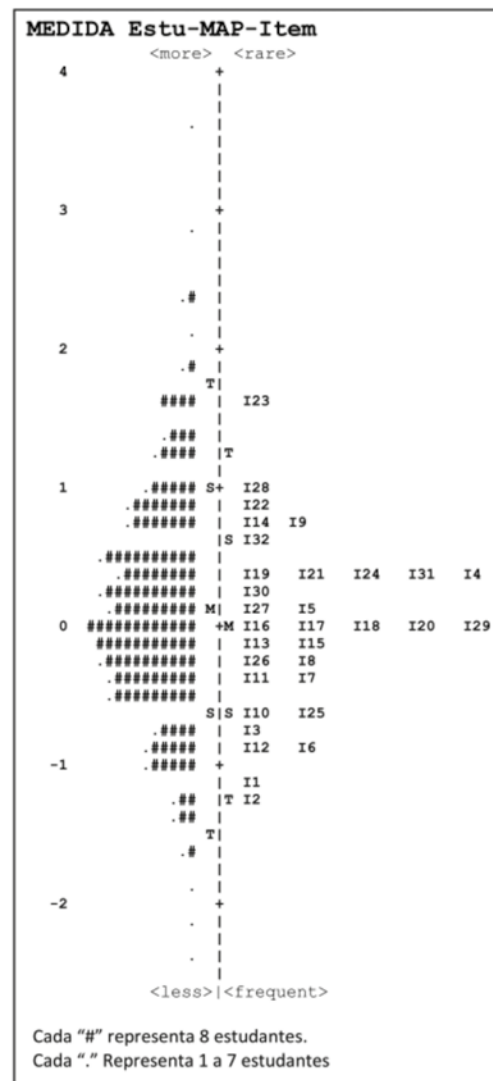


Gráfico 1: Medição conjunta de estudantes e itens.

<sup>1</sup> Por não se dispor de autorização prévia por parte das universidades envolvidas neste estudo, estas não são identificadas.

Nesta representação, os valores absolutos das medidas dos itens (nível de dificuldade) e das medidas dos estudantes (nível de competência) são distâncias em relação à origem, medidas sobre a reta real, sendo esta o ponto que corresponde ao item com nível de dificuldade médio e ao indivíduo que tem uma probabilidade de acertar igual a 0,5. No Gráfico 1 observa-se, por exemplo, que o item mais fácil é o I2 e o mais difícil é o I23; há mais estudantes a errar do que a acertar o item I4; um estudante com 1 *logit* de competência tem tanta probabilidade de sucesso como de insucesso no item I28 e é pouco provável que identifique a resposta certa do item I23.

O modelo de Rasch também estima que, em qualquer item do PMAT, o número de respostas certas dadas ao acaso não é relevante.

O estudo metrológico do PMAT sugeriu um suficiente a elevado grau de confiança nas inferências feitas a partir dos seus resultados, através de indicadores relativos à adequação do teste aos objetivos da avaliação e à precisão das medidas que proporciona.

No que respeita à análise das respostas dadas aos itens, destacam-se os seguintes resultados:

No item com mais respostas certas (I2, nível de complexidade baixo), 79% dos participantes identificaram a alternativa de resposta que tem uma expressão equivalente à soma algébrica de um número irracional com uma fração irracional, dada no enunciado. A escolha de um dos seus distratores por 14% dos alunos sugere que eles sabiam reduzir frações ao mesmo denominador e adicionar os numeradores, mas utilizaram propriedades operatórias das equações em expressões algébricas.

O item I4, também de álgebra e nível de complexidade baixo, registou um nível de dificuldade acima da média. As alternativas de resposta erradas denunciam que 36% dos estudantes sabiam que  $\cos x$  é uma função positiva em  $[0, \pi/2[$ , mas “esqueceram-se” de que um número superior a 1 não pertence ao seu contradomínio.

O PMAT tem cinco itens cuja resposta certa não foi a mais escolhida. São os itens mais difíceis, acertados por menos de 39% dos estudantes. O mais difícil tem um distrator que foi selecionado por 59% dos indivíduos. Daí que se coloque a hipótese de que 1109 participantes no PMAT não tinham noção do valor numérico da exponencial natural de um número negativo.

#### 4. CONCLUSÃO

Com base nos resultados obtidos<sup>2</sup>, considera-se que o PMAT é um teste estandardizado, adequado para medir

o nível e o tipo de conhecimentos de matemática dos estudantes à entrada do ensino superior de ciências e tecnologia. Sendo um instrumento de avaliação objetiva, o PMAT pode ser utilizado para estimar o efeito da aplicação de medidas educativas.

O desempenho dos participantes, que se refletiu no acerto de 53,9% dos itens do teste, em média, variou as áreas de conteúdo – o melhor desempenho registou-se nos itens de probabilidades e estatística, seguindo-se, por ordem decrescente, as áreas de geometria, álgebra, análise e lógica, sendo a última representada por um único item.

As respostas (certas e erradas) aos itens com nível de dificuldade acima da média apontam défices de aprendizagem dos estudantes em temas como: técnicas de contagem (I28); geometria analítica (I27); operações algébricas com logaritmos (I5) e com números complexos (I18); limites de funções (I21); função exponencial (I23); cálculo diferencial (I24, I31); lógica (I14). Além de conhecimentos, os itens citados requerem espírito crítico e flexibilidade do pensamento mais desenvolvidos do que o manifestado pelos participantes, assim como uma maior capacidade de recuperar informação memorizada, de interpretar conceitos e propriedades, de aplicar conhecimentos em domínios diversos e de planear estratégias de resolução de problemas. Esta identificação de lacunas de aprendizagem dos alunos mostra que o PMAT é um tipo de teste fundamental para adaptar as primeiras aulas de matemática do ensino superior às reais dificuldades dos estudantes.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bloom, B.S. (Ed.) (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of education goals. Handbook I, cognitive domain*. New York; Toronto: Longmans, Green.
- Haladyna, T., Downing, S., & Rodriguez, M. (2002). A Review of Multiple-Choice Item-Writing Guidelines for Classroom Assessment. *Applied Measurement in Education*, 15(3), pp. 309-334.
- IBM Corp. (2011). *IBM SPSS Statistics for Windows (Version 20.0) [Computer Software]*. Armonk, NY: IBM Corp.
- Linacre, J. M. (2012). *Winsteps® (Version 3.74.0) [Computer Software]*. Beaverton, Oregon: Winsteps. com.
- Pasquali, L., & Primi, R. (2003). Fundamentos da Teoria da Resposta ao Item – TRI. *Avaliação Psicológica*, pp. 99-110.

Urbina, S. (2004). *Essentials of Psychological Testing*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Wu, M., & Adams, R. (2007). *Applying the Rasch model to psycho-social measurement: A practical approach*. Educational Measurement Solutions, Melbourne.

#### SOBRE AS AUTORAS

**Helena Monteiro** é Professora Coordenadora da Unidade Departamental de Matemática e Física do Instituto Politécnico de Tomar. É licenciada em Matemática (ramo Educacional) pela Universidade de Coimbra, mestre em Matemática (área de Álgebra) pela Universidade de Lisboa e doutoranda em Matemática na Universidade do Algarve.

**Maria João Afonso** é Professora Auxiliar na Faculdade de Psicologia da Universidade de Lisboa, onde exerce docência e investigação nas áreas de Psicometria, Avaliação Psicológica e Métodos Quantitativos de investigação. É doutorada em Psicologia Diferencial, na área da Psicologia da Inteligência, pela Universidade de Lisboa, tendo obtido os graus de Mestre e de Licenciada na área de Psicologia Vocacional e Orientação da Carreira.

**Marília Pires** é Professora Associada no Departamento de Matemática da Universidade do Algarve. Doutorada em Investigação Operacional pela Universidade do Algarve e licenciada em Matemática Aplicada pela Universidade do Porto. Ultimamente tem-se dedicado a problemas ligados ao ensino e ao insucesso escolar.

Sociedade Portuguesa de Matemática

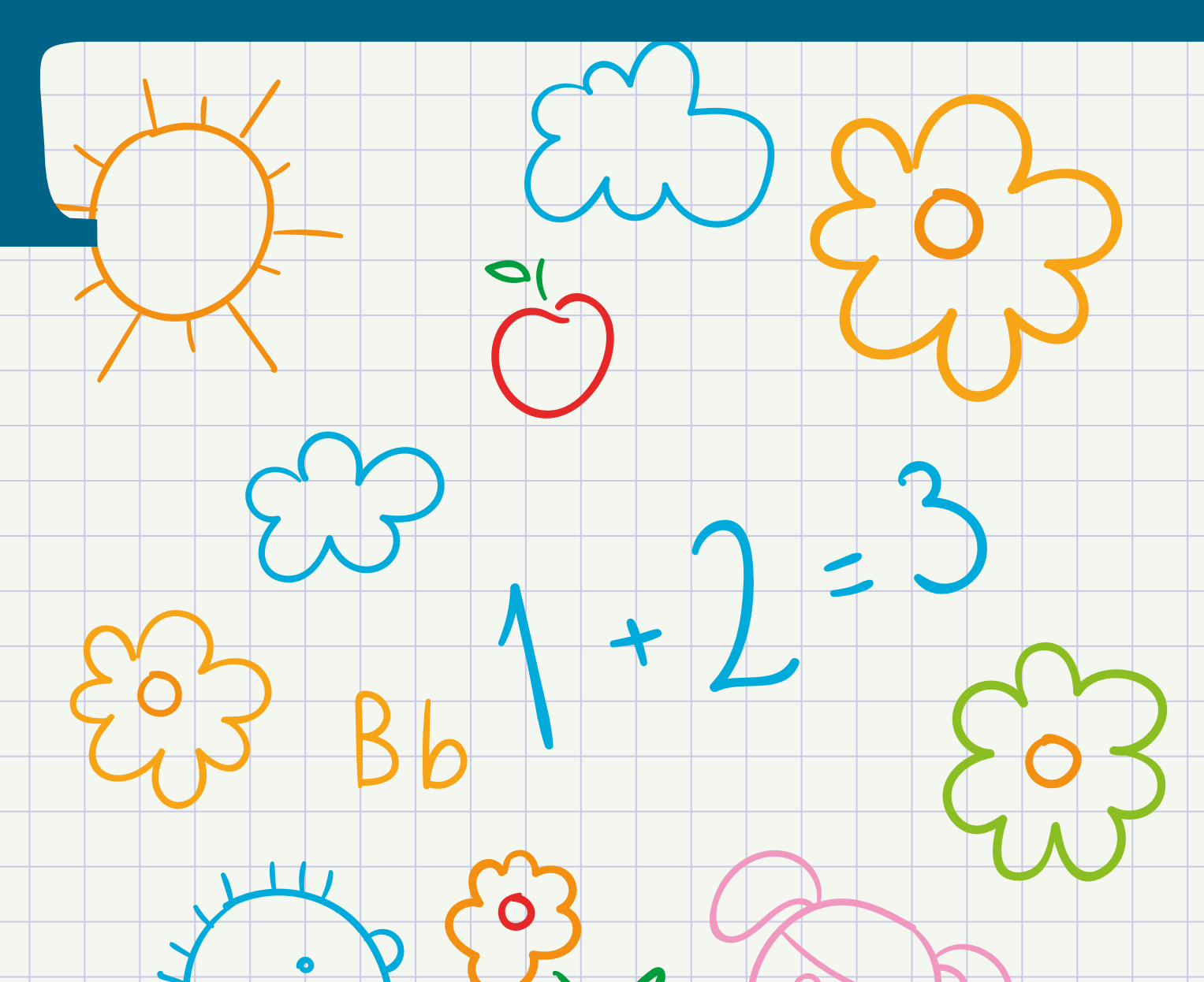
# ENCONTRO NACIONAL

2016

## INSCRIÇÕES ABERTAS

Escola Superior de Tecnologia do Barreiro  
Instituto Politécnico de Setúbal,  
11, 12 e 13 de julho

<sup>2</sup> No âmbito do projeto da SPM mencionado, foi apresentada uma tese de doutoramento com o título "Conhecimentos de Matemática dos Estudantes à Entrada do Ensino Superior de Ciências e Tecnologias: contributo para a definição de um perfil de exigências", ainda não defendida, na qual poderão ser encontrados resultados mais pormenorizados do que os que aqui se referem.



## A TEORIA DE *DESSINS D'ENFANTS* DE GROTHENDIECK

GARETH A. JONES

SCHOOL OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF SOUTHAMPTON

G.A.Jones@maths.soton.ac.uk

**G**areth Jones é professor jubilado da Universidade de Southampton, onde ainda desenvolve o seu trabalho de investigação. Atualmente, prepara um livro sobre *dessins d'enfants*. A convite da *Gazeta de Matemática*, Gareth Jones escreveu um pequeno artigo aflorando as ideias-chave dessa teoria.

Alexander Grothendieck, que faleceu há cerca de um ano, foi um gigante da matemática do séc. XX. Grande parte do seu trabalho, em geometria algébrica e noutras áreas, era altamente abstrata, mas no final da sua carreira matemática (que ocorreu efetivamente em meados dos anos 1980, quando se afastou da carreira académica e, em boa verdade, de grande parte da vida social), esboçou uma teoria [3], a que chamou *dessins d'enfants* (desenhos de crianças), em que objetos muito simples e concretos, nomeadamente grafos em superfícies, fornecem uma ligação explícita e surpreendente entre superfícies de Riemann compactas, entendidas como curvas algébricas complexas, e a teoria de Galois de corpos numéricos algébricos. Durante as últimas três décadas, os matemáticos têm-se mantido ocupados completando os detalhes das ideias de Grothendieck, demonstrando as suas conjecturas e estendendo a sua teoria em várias direções. Este artigo pretende apenas aflorar os aspetos mais elementares. Para outras abordagens, consulte [1, 4, 5, 6].

Um *mapa* é um mergulho de um grafo  $\mathcal{G}$  (que assumimos ser conexo e finito, quando nada for dito em contrário), sem cruzamentos, numa superfície  $\mathcal{S}$  (conexa, orientada e habitualmente compacta), em que cada face (componente conexa de  $\mathcal{S} \setminus \mathcal{G}$ ) é homeomorfa a um disco. Um *mapa bipartido*  $\mathcal{B}$  é um mapa em que o grafo  $\mathcal{G}$  é bipartido, ou seja, os vértices podem ser coloridos

a preto e branco, de modo que cada aresta una sempre dois vértices de cores diferentes.

Usando uma ideia que remonta a Hamilton (1856), mas que foi pela primeira vez desenvolvida detalhadamente por Cori em 1975, esse mapa  $\mathcal{B}$  pode ser descrito por um par de permutações do seu conjunto  $E$  de arestas:  $x$  e  $y$  respeitam a orientação de  $\mathcal{S}$  para rotar as arestas em torno dos seus vértices adjacentes pretos e brancos (atenção: estes, normalmente, não são automorfismos de  $\mathcal{B}$ , uma vez que não preservam adjacências.) Os vértices pretos e brancos correspondem, respetivamente, aos ciclos de  $x$  e  $y$ , com valências iguais ao comprimento dos ciclos. De igual modo, as faces correspondem aos ciclos  $z := (xy)^{-1}$ , sendo a valência das faces duas vezes o

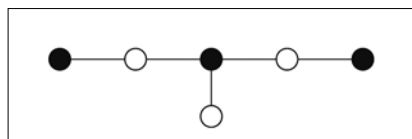


Figura 1: Um mapa bipartido com grupo de monodromia  $A_5$ .

comprimento dos ciclos. Como  $\mathcal{G}$  é conexo, o grupo de permutação  $G$  gerado por  $x$  e  $y$ , chamado *grupo de monodromia* de  $\mathcal{B}$ , atua transitivamente em  $E$ . Por exemplo, na figura 1, entendida como um mapa na esfera,  $x$  é um ciclo de comprimento 3 (com dois pontos fixos),  $y$  é uma dupla transposição (com um ponto fixo),  $z$  é um ciclo de comprimento 5, e  $G$  é o grupo alterno  $A_5$ .

Qualquer mapa  $\mathcal{M}$  que não seja bipartido pode ser convertido num mapa bipartido  $\mathcal{B}$ , colocando um vértice branco no ponto médio de cada aresta, de modo a que as arestas de  $\mathcal{B}$  correspondam às arestas dirigidas de  $\mathcal{M}$ . Portanto,  $\mathcal{M}$  também tem um grupo de monodromia, nomeadamente o de  $\mathcal{B}$ .

Coberturas e isomorfismos de mapas bipartidos  $\mathcal{B}$  correspondem a epimorfismos e isomorfismos dos grupos correspondentes  $G$ , preservando os pares geradores. Em particular, o grupo de automorfismos  $A = \text{Aut } \mathcal{B}$  de  $\mathcal{B}$ , que preserva a orientação e as cores dos vértices, é o centralizador de  $G$  no grupo simétrico, ou seja, o grupo de todas as permutações de  $E$  que comutam com  $G$ . Na figura 1,  $A$  é o grupo identidade, mas se  $\mathcal{B}$  for um cubo, então  $G$  e  $A$  são isomorfos a  $A_4$ , e atuam regularmente em cada caso.

Os mapas bipartidos com mais simetrias são os ma-

pas regulares, aqueles (como o cubo) em que  $A$  atua transitivamente nas arestas. Neste caso,  $A$  e  $G$  podem ser identificados com as representações regulares à esquerda e à direita do mesmo grupo, sendo portanto isomorfos (embora habitualmente distintos como grupos de permutação). Todo o mapa bipartido  $\mathcal{B}$  é o quociente de um mapa regular  $\tilde{\mathcal{B}}$  por um subgrupo  $H \leq \text{Aut } \tilde{\mathcal{B}}$ . Existe um único destes mapas  $\tilde{\mathcal{B}}$  que é a *cobertura regular mínima* de  $\mathcal{B}$ . Por exemplo, se  $\mathcal{B}$  for o mapa da figura 1, então  $\tilde{\mathcal{B}}$  é o dodecaedro, tornado bipartido como acima indicado, com grupo de automorfismos  $\text{Aut } \tilde{\mathcal{B}} \cong A_5$  e  $H \cong A_4$ .

As permutações  $x$  e  $y$  determinam  $\mathcal{B}$  a menos de isomorfismo. Na verdade, elas fazem mais do que isso: impõem em  $\mathcal{S}$  a estrutura de uma superfície de Riemann, com coordenadas locais complexas. O Teorema da Existência de Riemann afirma que se  $x_1, \dots, x_k$  forem permutações geradoras de um grupo transitivo de grau  $n$ , com  $x_1 \dots x_k = 1$ , e  $p_1, \dots, p_k$  forem pontos distintos da esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , então existe uma superfície de Riemann  $\mathcal{S}$  com uma cobertura de  $n$  folhas  $\beta: \mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , ramificada nos pontos  $p_i$ , com permutações de monodromia  $x_i$  (estas são as permutações das folhas dadas pelo levantamento de pequenos caminhos fechados em redor dos pontos  $p_i$  de  $\hat{\mathbb{C}}$  para  $\mathcal{S}$ .) Se tomarmos  $x_i = x, y$  e  $z$ , com  $p_i = 0, 1$  e  $\infty$ , então o mapa bipartido trivial  $\mathcal{B}$  em  $\hat{\mathbb{C}}$ , com um vértice preto em 0, um vértice branco em 1 e uma aresta ao longo do intervalo unitário, é levantado, via  $\beta$ , para um mapa bipartido  $\mathcal{B}' = \beta^{-1}(\mathcal{B}) \cong \mathcal{B}$  numa superfície de Riemann homeomorfa a  $\mathcal{S}$ .

Existe um forma alternativa de obter, partindo de  $\mathcal{B}$ , a estrutura da superfície de Riemann em  $\mathcal{S}$ . O mapa bipartido universal  $\mathcal{B}_\infty$  é um mapa no semiplano superior  $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ , com vértices pretos e brancos nos pontos  $a/b \in \mathbb{Q}$  (na forma reduzida) com  $b$  ímpar e  $a$  respeti-

vamente par ou ímpar. Entre os vértices  $a/b$  e  $c/d$  existe uma aresta (uma geodésica hiperbólica) se e só se  $ad - bc = \pm 1$ .

O grupo de automorfismos  $\text{Aut } \mathcal{B}_\infty$  é um grupo livre  $F_2$  de dimensão 2, gerado pelas transformações de Möbius

$$X: t \mapsto \frac{t}{-2t+1} \quad \text{e} \quad Y: t \mapsto \frac{t-2}{2t-3}$$

fixando o vértice preto em 0, o vértice branco em 1 e rotando ciclicamente as suas arestas adjacentes (este é o subgrupo principal de congruência  $\Gamma(2)$  de nível 2 no grupo modular  $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , o núcleo da redução de  $\Gamma \text{ mod } (2)$ .)

O epimorfismo  $\theta: F_2 \rightarrow G$ ,  $X \mapsto x, Y \mapsto y$  determina uma ação transitiva de  $F_2$  em  $E$ , portanto, seja  $M$  o subgrupo de  $F_2$  que fixa uma aresta de  $\mathcal{B}$  (único a menos de conjugação). Então  $\mathcal{B}_\infty/M$  é um mapa bipartido isomorfo a  $\mathcal{B}$ , numa superfície de Riemann (com estrutura complexa herdada de  $\mathbb{H}$ ) homeomorfa a  $\mathcal{S}$ .

Que superfícies de Riemann  $\mathcal{S}$  são formadas desta maneira? Claramente, nem todas: a teoria de Teichmüller diz-nos que existe um número não numerável de superfícies de Riemann compactas de género  $g \geq 1$  (quando  $g = 0$  só existe a esfera de Riemann), mutuamente não isomorfas, enquanto existe apenas um número numerável de pares  $x, y$  de permutações de conjuntos finitos.

Para responder a esta questão precisamos de mudar o nosso ponto de vista acerca das superfícies de Riemann compactas. Desde Riemann que sabemos que estas são equivalentes a curvas algébricas complexas projetivas, ou seja, subvariedades de dimensão 1 de espaços complexos projetivos definidos por conjuntos finitos de equações polinomiais. Podemos assim perguntar--nos que superfícies de Riemann estão definidas sobre os vá-

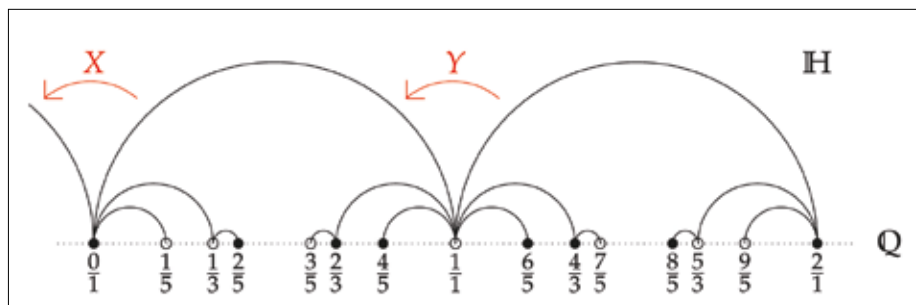


Figura 2: Parte do mapa bipartido universal  $\mathcal{B}_\infty$ .

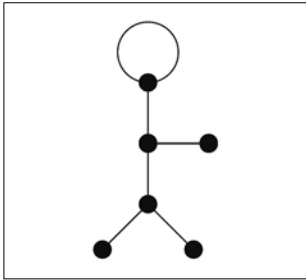


Figura 3: Um mapa  $\mathcal{M}$  com grupo de monodromia  $M_{12}$ .

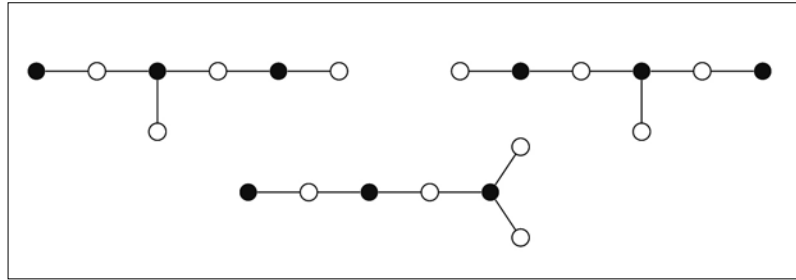


Figura 4: Uma órbita de  $G$  em árvores planas.

rios subcorpos de  $\mathbb{C}$ , no sentido em que os polinómios podem ser escolhidos de modo que os seus coeficientes pertençam a esse corpo. O Teorema de Belyĭ (originalmente um lema na Teoria Inversa de Galois, a tentativa de encontrar, para cada grupo finito  $G$ , uma extensão finita de  $\mathbb{Q}$  cujo grupo de Galois seja  $G$ ) mostra que uma superfície de Riemann  $S$  está definida sobre o corpo  $\overline{\mathbb{Q}}$  dos números algébricos se e só se existir uma função meromorfa não constante  $\beta : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  ramificada, no máximo, em três pontos. Pela tripla transitividade do grupo de automorfismos  $PGL_2(\mathbb{C})$  de  $\hat{\mathbb{C}}$ , podemos tomar esses pontos como sendo os pontos  $0, 1$  e  $\infty$ , e, conseqüentemente, como Grothendieck observou, estas superfícies de Riemann  $S$  são precisamente aquelas obtidas a partir de mapas bipartidos! Chamamos *função de Belyĭ* a  $\beta$ , e *par de Belyĭ* a  $(S, \beta)$ .

Por exemplo, se transformarmos o mapa esférico  $\mathcal{M}$  da figura 3 num mapa bipartido  $\mathcal{B}$ , como anteriormente, então a cobertura regular mínima  $\tilde{\mathcal{B}}$  de  $\mathcal{B}$  é um mapa bipartido de género 3601 com grupo de automorfismos isomorfo ao grupo de Mathieu  $M_{12}$ , um grupo esporádico simples, 5-transitivo, de grau 12 e ordem 95040, descoberto por Mathieu em 1861. A curva algébrica correspondente está definida sobre o corpo numérico  $\mathbb{Q}(\sqrt{-11}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ . Impressionado pelo modo como desenhos simples e infantis, como o homem de fósforos da figura 3, podem codificar estruturas matemáticas tão sofisticadas, Grothendieck decidiu chamar-lhes *dessins d'enfants*.

O grupo absoluto de Galois  $G$  é o grupo de Galois da extensão  $\overline{\mathbb{Q}} \supset \mathbb{Q}$ , ou seja, o grupo de automorfismos do corpo  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Trata-se de um grupo bastante complicado

(não é numerável, por exemplo), mas também muito importante: o grupo de Galois de cada corpo numérico algébrico aparece como um quociente de  $G$ , portanto, num certo sentido, este grupo codifica toda a teoria de Galois de corpos numéricos algébricos. Existem muitos problemas abertos relacionados com este grupo.

Há uma ação natural de  $G$  nos pares de Belyĭ (atuando nos coeficientes das funções polinomiais e racionais que os definem) que induz uma ação nos *dessins* correspondentes  $\mathcal{B}$ . Ainda que os elementos de  $G$  (excluindo a identidade e a conjugação complexa) atuem de forma altamente descontínua, eles preservam muitas das propriedades dos *dessins*, tais como o número e a valência dos vértices pretos e brancos, a valência das faces, o género e o grupo de automorfismos (que preservam a orientação). Por exemplo, os três *dessins* esféricos na figura 4 formam uma órbita de  $G$ , definida sobre o corpo de decomposição do polinómio  $25t^3 - 12t^2 - 24t - 16$  e permutada por  $G$  como o seu grupo de Galois  $S_3$ .

Apesar da invariância dos parâmetros, pode mostrar-se que a ação de  $G$  é fiel nas classes de isomorfismo dos *dessins*, mesmo quando restrita a 'pequenas' classes de *dessins*, tais como árvores planas, permitindo que possamos 'ver' toda a teoria de Galois de corpos numéricos finitos através destes objetos muito simples. Talvez o desenvolvimento recente mais entusiasmante tenha sido a prova, por Gabino González-Diez e Anfrei Jaikin-Zapirain [2], da conjectura (de longa data) de que  $G$  atua fielmente em *dessins* regulares, assim concluindo que estes objetos, mais complexos mas mais simétricos, oferecem também uma contribuição valiosa para compreender o importante grupo  $G$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] E. Girondo and G. González-Diez, *Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d'Enfants*, London Math. Soc. Student Texts 79, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [2] G. González-Diez and A. Jaikin-Zapirain, "The absolute Galois group acts faithfully on regular dessins and on Beauville surfaces", *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 111 (2015), 775–796.
- [3] A. Grothendieck, "Esquisse d'un Programme", in *Geometric Galois Actions 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*, pp.5–84, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 242, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [4] G. A. Jones, "Bipartite graph embeddings", *Riemann surfaces and Galois groups*, *Discrete Math.* 338 (2015), 1801–1813.
- [5] G. A. Jones and D. Singerman, "Belyi Functions, Hypermaps and Galois Groups", *Bull. Lond. Math. Soc.* 28 (1996) 561–590.
- [6] S. K. Lando and A. K. Zvonkin, *Graphs on Surfaces and their Applications*, *Encyclopaedia Math. Sci.* 141, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

### SOBRE O AUTOR

**Gareth Jones** doutorou-se pela Universidade de Oxford e trabalha, desde 1971, no Departamento de Matemática da Universidade de Southampton, no sul de Inglaterra. É autor de cerca de uma centena de artigos de investigação (quase todos em Teoria de Grupos e suas aplicações) e coautor de três livros.

SIC  
RÁDIO  
SIC  
RÁDIO  
SIC  
RÁDIO

isto é

TEMPORADA  
08  
MATEMÁTICA

Fundação  
Vodafone  
Portugal





## COBERTURAS DISTINTAS DOS INTEIROS

Será que existem coberturas dos números inteiros por congruências distintas em que as progressões aritméticas não se intersejam e que sejam também exatas? Será que existem coberturas por congruências distintas com módulo mínimo arbitrariamente grande? Vamos tentar responder a estas questões.



PEDRO J. FREITAS  
Universidade  
de Lisboa  
[pedro@ptmat.fc.ul.pt](mailto:pedro@ptmat.fc.ul.pt)



MANUEL SILVA  
Universidade  
Nova de Lisboa  
[mnas@fct.unl.pt](mailto:mnas@fct.unl.pt)

### ORIGEM DO PROBLEMA

Em 1849, Polignac conjecturou erradamente que todos os números ímpares  $n \geq 3$  podiam ser escritos na forma  $n = 2^k + p$ , com  $p$  primo e  $k$  inteiro positivo, i.e., soma de uma potência de 2 e um número primo. 127 e 959 são dois exemplos de números ímpares que não podem ser escritos na forma anterior. Em 1934, Romanoff mostrou que os números naturais da forma  $2^k + p$  têm densidade positiva. Dizemos que um conjunto infinito  $A \subset \mathbb{N}$  tem densidade positiva se o número de elementos de  $A$  no intervalo  $[1, N]$  é, pelo menos,  $cN$ , para uma certa constante  $0 < c < 1$ . Numa carta a Erdős, no mesmo ano, colocou ainda a seguinte questão: será que existem infinitos números ímpares que não podem ser escritos na forma  $2^k + p$ ? Em 1950, Erdős encontrou uma progressão aritmética de números ímpares nenhum dos quais é soma de uma potência de 2 e um número primo. Na resolução deste problema, Erdős introduziu o conceito de cobertura por congruências, que iremos descrever a seguir.

Começamos pelo conceito, bem conhecido, de congruência ou resto. Dois números inteiros,  $a$  e  $b$ , dizem-se congruentes módulo um inteiro positivo  $m$  se deixam o mesmo resto na divisão por  $m$ . Usando a notação introduzida por Gauss, escrevemos  $a \equiv b \pmod{m}$ . Por exemplo,  $11 \equiv 20 \pmod{3}$ , porque deixam ambos resto 2 quando divididos por 3. O conjunto de inteiros numa dada classe de congruência forma uma progressão aritmética. Por exemplo, os inteiros positivos  $n$  que satisfa-

zem  $n \equiv 2 \pmod{5}$  são os seguintes: 2, 7, 12,  $\dots$ , ou seja, uma progressão aritmética de razão 5.

Vamos agora tentar obter coberturas dos inteiros como união de progressões aritméticas ou classes de congruência. Se usarmos o mesmo módulo, a tarefa não é difícil... Sabemos que resto da divisão de um número inteiro por 3 pode ser 0, 1 ou 2. Logo, o sistema de congruências:  $\{0 \pmod{3}, 1 \pmod{3}, 2 \pmod{3}\}$  é certamente uma cobertura dos inteiros. Todo o inteiro satisfaz, pelo menos, uma das condições anteriores.

E se exigirmos que as razões das progressões aritméticas, ou módulos das congruências, sejam distintas, será que existem coberturas dos inteiros neste caso? Sim, de facto, existem. O exemplo mais simples de cobertura por congruências distintas é o seguinte:

$$\{0 \pmod{2}, 0 \pmod{3}, 1 \pmod{4}, 5 \pmod{6}, 7 \pmod{12}\}.$$

O mínimo múltiplo comum dos módulos das congruências envolvidas é 12. Deste modo, para verificar que todo o número inteiro satisfaz, pelo menos, uma destas congruências, basta ver que tal acontece para os inteiros  $1 \leq n \leq 12$ . Deixamos esta tarefa ao leitor mais desconfiado.

### COBERTURAS EXATAS

No exemplo anterior, de cobertura por congruências distintas, algumas das progressões aritméticas intersejam-se, i.e., certos números inteiros satisfazem simultaneamente duas, ou mais, congruências: 6 satisfaz as duas primeiras congruências, porque é múltiplo de 2 e 3. Va-

mos designar por *cobertura exata* uma cobertura dos inteiros em que as progressões aritméticas não se intersejam. O primeiro exemplo de cobertura  $\{0, 1, 3 \pmod{3}\}$  tem esta propriedade. Apetece perguntar se isto é evitável, ou seja, será que existem coberturas por congruências distintas dos números inteiros em que as progressões aritméticas não se intersejam e que sejam também exatas? Sem dúvida, uma boa pergunta, colocada oportunamente por Erdős. Na verdade, não existem coberturas por congruências que sejam simultaneamente distintas e exatas. A prova deste facto é demasiado bela para não ser partilhada.

**Teorema 1.** (Mirsky e Newman) *Se os números naturais podem ser obtidos como união de um número finito (pelo menos, duas) de progressões aritméticas, então, duas dessas progressões aritméticas têm a mesma razão.*

A cada conjunto de números naturais podemos associar uma função geradora, que não é mais do que uma série de potências, em que os expoentes coincidem com os elementos do conjunto de partida. Deste modo, a cada uma das progressões aritméticas  $\{a + nb : n \in \mathbb{N}\}$  corresponde a função geradora:

$$z^a + z^{a+b} + z^{a+2b} + \dots = \frac{z^a}{1 - z^b}.$$

Suponhamos que os inteiros positivos resultam de uma certa união disjunta de  $k$  progressões aritméticas:  $\{a_i + nb_i\}, i = 1, 2, \dots, k$ , cujas razões  $b_1, b_2, \dots, b_k$  são todas distintas. Uma vez que a função geradora dos números naturais é simplesmente

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z},$$

obtemos a seguintes igualdade:

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{z^{a_1}}{1 - z^{b_1}} + \frac{z^{a_2}}{1 - z^{b_2}} + \dots + \frac{z^{a_k}}{1 - z^{b_k}}.$$

Podemos supor que  $z$  é um número complexo com  $|z| < 1$ , para garantir a convergência das séries de potências, e que  $b_k$  é maior do que  $b_i$ , sempre que  $i < k$ . Agora um pouco de magia. Fazemos tender a variável complexa  $z$  para  $\epsilon = e^{2\pi i/b_k}$ . Observamos que  $\epsilon^{b_k} = 1$  mas  $\epsilon \neq 1$  e  $\epsilon^{b_i} \neq 1, 1 \leq i < k$ . A função do lado esquerdo tende para um valor finito. Além disso, todas as parcelas do lado direito tendem para um valor finito, exceto a última, que tende para infinito, logo, a função do lado direito tende para infinito, o que é uma contradição! Observe-se que a não existência de uma cobertura exata distinta para os números naturais implica facilmente a não existência de tal cobertura para os números inteiros.

## CONJETURA DO MÓDULO MÍNIMO

Vamos agora descrever um problema, que Erdős gostava de designar como um dos seus problemas preferidos. Erdős atribuiu um valor monetário de 1000 dólares para a resolução desta conjectura. Este é um dos valores mais altos na classificação de Erdős.

Na cobertura por congruências distintas apresentada anteriormente, podemos observar que a classe de congruência com módulo menor é 2.

Será possível obter uma cobertura com as mesmas características (congruências distintas) em que o módulo mínimo seja 3? Também neste caso é possível. O seguinte exemplo é de Erdős:  $0 \pmod{3}, 0 \pmod{4}, 0 \pmod{5}, 1 \pmod{6}, 1 \pmod{8}, 2 \pmod{10}, 11 \pmod{12}, 1 \pmod{15}, 14 \pmod{20}, 5 \pmod{24}, 8 \pmod{30}, 6 \pmod{40}, 58 \pmod{60}, 26 \pmod{120}$ .

Será ainda verdade que exista uma cobertura por congruências distintas, cujo módulo mínimo seja 4? A resposta volta a ser positiva. Pace Nielsen (2009) encontrou uma cobertura por congruências distintas, cujo módulo mínimo é 40. Erdős conjecturou que deveriam existir coberturas dos inteiros por congruências distintas com módulo mínimo arbitrariamente grande.

**Conjectura.** (Erdős 1950) *Para qualquer  $N > 1$ , existe uma cobertura por congruências distintas,*

$$\{a_i \pmod{m_i}\}, 1 \leq i \leq k,$$

*tal que  $m_i > N$  para  $1 \leq i \leq k$ .*

Será que o módulo mínimo pode, de facto, ser tão grande como se queira? O matemático Bob Hough demonstrou recentemente que esta conjectura é, na verdade, falsa. O seu resultado estabelece mesmo um majorante uniforme para o valor do módulo mínimo.

**Teorema 2.** (Hough 2015) *O módulo mínimo numa cobertura dos inteiros por congruências distintas não excede  $10^{16}$ .*

A demonstração envolve dois ingredientes essenciais. Para obter um majorante explícito do módulo mínimo, foi utilizada uma estimativa relacionada com a distribuição dos números primos. O segundo ingrediente, algo inesperado, é o uso do famoso Lema Local de Lovász, considerado um dos resultados mais importantes no âmbito do método probabilístico desenvolvido por Erdős. Numa resolução de um problema matemático interessante, especialmente em Combinatória, o mais provável é que o método usado na demonstração seja totalmente inesperado.

Ainda existem diversos problemas por resolver sobre coberturas dos inteiros por congruências. Terminamos

com dois problemas abertos e um desafio simples.

**Conjetura** (Erdős e Selfridge). *Não existem coberturas por congruências distintas dos números inteiros com todos os módulos ímpares.*

**Conjetura** (Schinzel). *Dada uma cobertura por congruências dos números inteiros  $a_i \pmod{n_i}$  com  $1 \leq i \leq r$ , existe sempre  $i \neq j$  tal que  $n_i | n_j$ .*

A conjetura de Schinzel resulta, de modo nada evidente, da conjetura dos módulos ímpares. Deixamos um desafio ao leitor: construir uma cobertura por congruências distintas dos números inteiros com todos os módulos pares. Pode tentar modificar um dos exemplos de coberturas distintas dado neste texto.

## REFERÊNCIAS

- [1] P. Erdős, "On integers of the form  $2^k + p$  and some related problems", *Summa Brasil. Math.* 2 (1950), 113–123.
- [2] Bob Hough. "Solution of the minimum modulus problem for covering systems", *Annals of Math* 181, n. 1 (2015): 361-382.



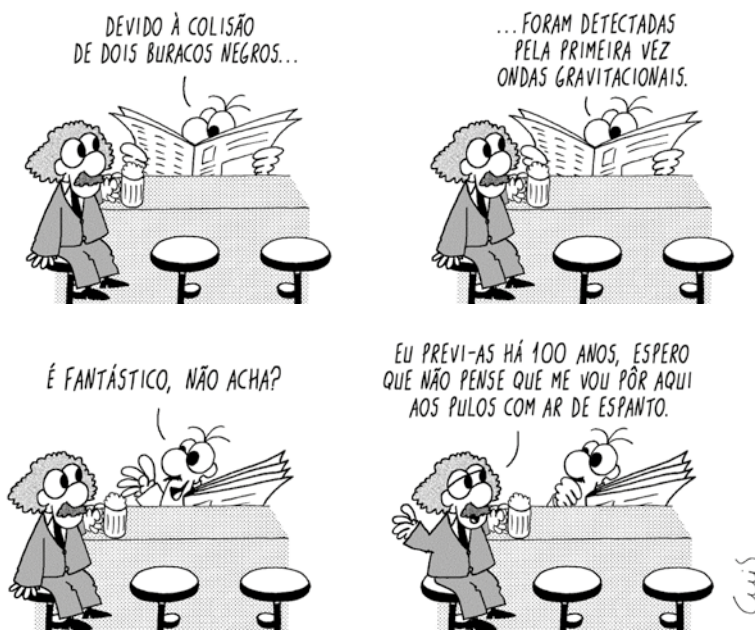
LOJA  
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em [www.spm.pt](http://www.spm.pt)



## BARTOON

LUIS AFONSO



Publicado originalmente no jornal Público, em 12/02/2016. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

### FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

**Adérito Araújo** Universidade de Coimbra

EDITORES:

**Daniel Pinto** Universidade de Coimbra

**Sílvia Barbeiro** Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:

**António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M<sup>a</sup> Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Arsélio Martins** Escola Secundária José Estevão, Aveiro • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Joana Latas** HBD - Tourism Investments, Departamento de Educação, São Tomé e Príncipe • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Marcelo Viana** IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

**Sílvia Dias** SPM

REVISÃO:

**Margarida Robalo**

DESIGN:

**Ana Pedro**

IMPRESSÃO:

**Dossier – Comunicação e imagem**

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

**Alojamento Vivo**

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

**Sílvia Dias** SPM

PROPRIEDADE:

**Sociedade Portuguesa de Matemática**

Av. República 45, 3<sup>o</sup> Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

TIRAGEM **1250 Exemplares**

ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

Sociedade Portuguesa de Matemática

# ENCONTRO NACIONAL

2016

**INSCRIÇÕES ABERTAS**

Escola Superior de Tecnologia do Barreiro  
Instituto Politécnico de Setúbal,  
**11, 12 e 13 de julho**



## GONÇALO MORAIS CONVERSA COM CHARLES JOHNSON

O Professor Charles Johnson, da Universidade William and Mary, é uma das personagens centrais do moderno desenvolvimento da álgebra linear. Licenciou-se em Matemática e Economia em 1969 pela Northwestern University e doutorou-se em Matemática em 1979 no Caltech sob orientação de Olga Tausky-Todd. Os seus livros de álgebra linear tornaram-se centrais para os alunos de doutoramento de diversas áreas. Pessoa amável, com enorme capacidade de comunicação, escritor prolífico... Esta entrevista é um resumo possível da longa conversa que tivemos.



GONÇALO MORAIS  
Instituto Superior  
Engenharia, Lisboa  
[gmorais@adm.isel.pt](mailto:gmorais@adm.isel.pt)

**GONÇALO** Poderia dizer-me em que momento ou situação a matemática passou a ser a sua área privilegiada de investigação?

**JOHNSON** Bem, a verdade é que sempre fui melhor aluno a matemática do que às outras disciplinas. Desde cedo consegui apreciar a sua beleza intrínseca. Foi quando terminei a minha licenciatura e tinha de decidir o que ia fazer na vida. Eu tinha pensado em ir para Direito devido ao facto de ter um tio que era advogado e que tinha muita influência em mim. O facto é que achei que gostava mais de matemática e acabei por ir fazer o doutoramento nesta área. Foi um excelente período da minha vida.

**GONÇALO** No Caltech...

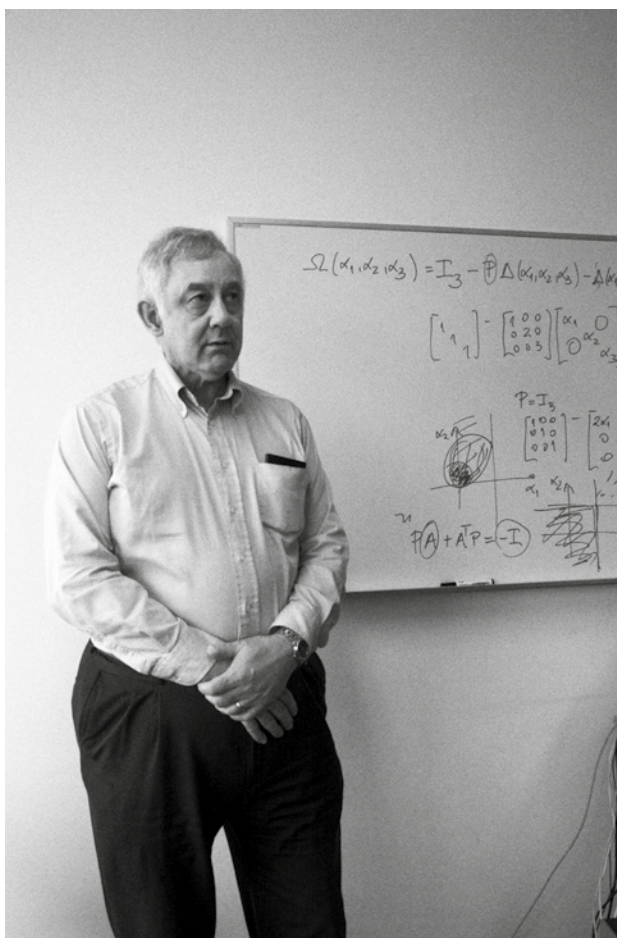
**JOHNSON** Precisamente! O Caltech tinha uma grande vantagem em relação às outras escolas: tinha um programa com poucas pessoas e, mal cheguei, senti-me imediatamente tratado como um colega, como um igual.

Vim sozinho de carro desde o Midwest de carro sozinho, uma viagem enorme, cheguei a Pasadena, procurei o Caltech, depois o edifício do Departamento de Matemática e quando cheguei ao gabinete que me tinham atribuído, vi o meu nome na porta. Tudo era muito acolhedor e, durante muitos anos, este foi o maior gabinete que tive. Tudo o que nos cercava era extraordinário.

**GONÇALO** Estamos a falar de um período, final dos anos sessenta e início dos anos setenta do século passado, em que o Caltech dispunha de um conjunto notável de professores. Feynman estava lá...

**JOHNSON** Sim! Estava lá o Feynman, no Departamento de Física... Naquela altura o Caltech dispunha do melhor Departamento de Física do mundo. Neste momento as coisas são diferentes, pois houve um esforço enorme em criar um excelente Departamento de Biologia...

**GONÇALO** Havia uma comunicação transversal entre os vários departamentos?



**JOHNSON** Havia alguma, mas as coisas na matemática, acabavam por estar mais ou menos isoladas do resto. Havia um programa de Matemática Aplicada. Durante algum tempo, eu fui assistente do Joe Keller, que estava no Departamento de Matemática Aplicada, mas na maior parte do tempo não havia muita interação. Havia um livro muito bom sobre álgebra linear escrito por um professor de Matemática Aplicada chamado Joe Franklin, mas acabei por ficar com uma orientadora do meu departamento, Olga Taussky-Todd. Antes de começar o doutoramento, tive conhecimento de um concurso de matemática em que tínhamos de escrever um artigo. Eu escrevi sobre matrizes definidas positivas e esse artigo acabou por ser vencedor e foi publicado na *The American Mathematical Monthly*. Um dos elementos do júri desse concurso era precisamente a Olga Taussky-Todd.

**GONÇALO** Esse foi o início do seu interesse por Teoria das Matrizes?

**JOHNSON** Eu tinha feito alguns cursos em otimização e em econometria. As matrizes definidas positivas desempenham um papel importante em ambas as áreas e essa ligação fez despertar em mim um interesse no assunto que perdura até hoje.

**GONÇALO** Quando estava a fazer a pesquisa necessária para realizar esta entrevista, um dos pontos mais curiosos que encontrei foi o seu interesse também por economia...

**JOHNSON** Na verdade, a Teoria do Equilíbrio Geral e a estabilidade dos vários equilíbrios assentam em propriedades algébricas de certas matrizes que vêm diretamente das equações diferenciais. Uma destas propriedades é a chamada D-estabilidade. Basicamente, uma matriz é D-estável se o produto desta por uma qualquer matriz diagonal com entradas positivas for estável. Isto vem do facto de querermos ter estabilidade independentemente das taxas de ajustamento dos diferentes mercados. Esta propriedade de uma matriz é difícil de caracterizar. Havia outro tipo de problemas que vinham da economia em que eu estava igualmente interessado. Isto devia-se em grande medida ao facto de o programa de doutoramento do Caltech impor que desenvolvêssemos trabalho não só na nossa área de especialização mas também numa outra área à nossa escolha. Era um género de minimestrado numa outra área e eu acabei por escolher economia. Isto representou uma vantagem enorme quando estava a procurar trabalho depois de terminar o doutoramento, numa altura em que era difícil encontrar trabalho. O meu primeiro trabalho foi precisamente uma posição conjunta de professor de Matemática e Economia na Universidade de Maryland. Acabei por desenvolver durante esses anos (1974-84) investigação em matemática e em teoria económica. É uma área extremamente interessante.

**GONÇALO** É uma área em que existe uma quantidade enorme de questões por resolver. Parece que se ambiciona ainda um formalismo termodinâmico para a economia...

**JOHNSON** Sim, existe uma enorme quantidade de pessoas que se dedica precisamente a isso, a tentar estabelecer relações entre o comportamento individual ao nível da microeconomia e o comportamento agregado em macroeconomia. Não sei em que medida as respostas são satisfatórias, mas muitas pessoas pensam neste tipo de problemas.

GONÇALO Olhando agora mais especificamente para a sua área de eleição, álgebra linear, percebemos que ela é central em matemática. Quando entrevistei o Professor Gilbert Strang, uma das coisas mais decisivas que ele me disse foi que no final de qualquer problema está um sistema de equações lineares.

JOHNSON [risos] Haverá com certeza quem discorde dessa posição, mas certamente que entender as soluções que se obtêm do sistema linear ajuda a compreender o que pode obter-se da solução não-linear.

GONÇALO Sente-se no meio de um mundo onde consegue comunicar com muitas pessoas de outras áreas à sua volta?

JOHNSON De certa maneira, sim... Em primeiro lugar, parece ser evidente que em todas as áreas da matemática as matrizes desempenham sempre algum papel, muitas vezes de uma forma interessante que nos permite resolver muitos problemas. O mesmo se passa com áreas fora da matemática que a usam como ferramenta de análise. Em virtude disto, eu tenho tido uma apreciação positiva do meu trabalho por um conjunto muito heterogêneo de pessoas, sentindo-me muito confortável ao falar com pessoas fora da minha área. Isso dá-me uma perspetiva mais global do assunto em que habitualmente trabalho.

GONÇALO Uma das mudanças fundamentais desde a altura em que fez o seu doutoramento foi a proliferação dos computadores...

JOHNSON Muitas coisas mudaram desde a altura em que fiz o meu doutoramento [risos]. Bem, eles já existiam nessa altura ...

GONÇALO Certamente, mas hoje, quando ensinamos álgebra linear, sentimos de uma forma bastante perceptível que existe um salto enorme entre resolver os sistemas que habitualmente resolvemos no quadro, com poucas equações e poucas incógnitas, e os sistemas que não podemos de forma alguma resolver desta maneira com milhares de equações e milhares de incógnitas. Ao mesmo tempo temos problemas em engenharia cujas matrizes são mal condicionadas, enfim, uma miríade de problemas novos que podem ser resolvidos com o auxílio de um computador. No entanto, esta constatação requer uma abordagem diferente da forma como ensinamos habitualmente estes

assuntos. Acha que esta abordagem deveria fazer parte do currículo dos alunos?

JOHNSON Quando encontramos os alunos pela primeira vez nas licenciaturas e ensinamos álgebra linear, temos de lhes ensinar muitas coisas. Eu digo-lhes que as ideias contidas naquilo que estou a ensinar-lhes não são muito diferentes umas das outras, mas eles, na maior parte das vezes, parecem não acreditar [risos]. Mas, de qualquer forma, temos de lhes ensinar muitas coisas. Quando tenho hipótese, mostro-lhes de que maneira as coisas que aprenderam podem ser aplicadas na prática, quais os cuidados que temos de ter, os problemas novos que aparecem, etc. Eu imagino que muitas pessoas dediquem o final das disciplinas para tratar, por exemplo, os problemas associados aos sistemas muito grandes numa espécie de projeto, mas tenho para mim que o melhor que podemos fazer é estabelecer os fundamentos de uma forma sólida.

GONÇALO Mas há um movimento que pretende mudar a forma como se ensina análise matemática...

JOHNSON Havia. Esse movimento essencialmente desapareceu. Eu raramente ensino uma disciplina de cálculo, mas tive contacto com o tipo de abordagem e os materiais que eles desenvolveram. A verdade é que basicamente o movimento morreu e todos voltaram a fazer o que sempre tinham feito. Não sei o que isto significa, mas é a história do movimento. Em álgebra linear tivemos um movimento parecido que seguiu o que aconteceu em análise e do qual fui parte integrante. Hoje, quando olhamos para os livros de álgebra linear mais recentes, vemos que esse movimento teve um impacto significativo. O livro do David Lay é um excelente exemplo disso. Este tipo de fenómeno, de impacto, eu não consigo vislumbrar em análise. Obviamente que haverá sempre um efeito que perdura, mas não com a força que permita modificar a tendência geral.

GONÇALO Acha que existe um género de equilíbrio cultural estável que nos puxa para o que era feito anteriormente?

JOHNSON Não sei mesmo. Eu não sou certamente um grande adepto dos antigos livros que eram usados para ensinar análise matemática. Havia um certo consenso de que não se podia ensinar análise matemática a toda a gente de um ponto de vista teórico, com montes de δ's



e  $\epsilon$ 's, e tentava-se encontrar um meio-termo para fazer as coisas...

**GONÇALO** Mas esse meio-termo é aquilo que parece mais bem conseguido no movimento de reforma...

**JOHNSON** Os livros são, de facto, muito bons... Para mim, o desaparecimento do movimento de reforma continua a ser algo por explicar.

**GONÇALO** Voltando à álgebra linear, quais são para si os problemas fundamentais que permanecem em aberto nesta área?

**JOHNSON** A álgebra linear tem muitas áreas próprias e de aplicação. Assim sendo, continuará a ser uma área efervescente durante muitos anos. Sem dúvida que um dos problemas em que as pessoas de topo na área trabalham é o chamado *Non-negative Inverse Eigenvalue Problem*, que consiste em saber qual o espetro de uma matriz com entradas não negativas. Isto tem-se revelado um problema extremamente difícil de resolver. Existem alguns resultados parciais para dimensões baixas, e existem algumas condições necessárias que não são, em geral, suficientes. Pessoalmente, estou de novo interessado em perceber quais são os números reais que podem ser valores próprios de uma matriz estocástica nas linhas. Este problema foi resolvido essencialmente por Karpelevich, mas existe um problema associado para matrizes que são estocásticas quer nas linhas quer nas colunas. Havia uma conjectura que foi recentemente invalidada para matrizes cinco por cinco e demonstrada para matrizes quatro por quatro. Este problema tem, por sua vez, muitos subproblemas interessantes, pelo que há muito a fazer. Por outro lado, é um problema exigente, visto que as entradas das matrizes têm de ser não negativas.

**GONÇALO** Uma última questão. O Professor escreve imenso. Existe uma necessidade pessoal de escrever?

**JOHNSON** [risos] Sim... de certa forma. É quase como ter filhos. Eu gosto imenso de matemática por causa do mistério que representa. Por outro lado, não aprecio particularmente o ato de escrever, embora me pareça que o faço bem. Para mim é a descoberta que é excitante. No entanto, uma vez resolvido o mistério, temos a obrigação de comunicar a solução à comunidade. Uma das coisas que mais me impressionam é as pessoas acharem natural que áreas



como a química e a física estejam em contínuo desenvolvimento e pensem que em matemática está tudo feito. Acho que todos temos de fazer um esforço para mostrar às pessoas que em matemática haverá sempre algo por fazer. A solução de um problema é simplesmente o início de muitos mais. Gostava que as pessoas apreciassem isso com mais vigor.

**GONÇALO** Professor, foi para mim um privilégio termos tido esta conversa.

**JOHNSON** [risos] O prazer foi meu.



NUNO CAMARNEIRO  
Universidade  
de Aveiro  
nfc@ua.pt

## DEFINIR A MATEMÁTICA

Uma pergunta para muitas respostas no centenário do matemático Paul Halmos – Afinal, o que é a matemática?

As perguntas simples são sempre as mais difíceis de responder. “O que é a matemática?”, por exemplo, façam-na aos vossos amigos e colegas. Quantos gaguejos? Quantas hesitações?

É uma ciência? Uma linguagem? Um ramo do saber? E os matemáticos, o que pensam? O que andaram a fazer a vida toda?

A minha definição preferida, mas longe de ser consensual, pertence a Henri Poincaré: “A matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes.” A busca de padrões, de leis, de algo universal que englobe todos os casos particulares. O sonho supremo de qualquer cientista.

Já o filósofo Bertrand Russell afirma: “A matemática, vistas bem as coisas, possui não só a verdade, mas a beleza suprema – uma beleza fria e austera, como a de uma escultura, que não apela a nenhuma das partes mais frágeis da nossa natureza, sem as belas armadilhas da pintura ou da música, ainda assim sublime e pura, digna da perfeição honesta que só a grande arte pode demonstrar.” Sempre o desejo de universalidade, embora, na visão de Russell, algo mais virado para a dimensão estética, como se a matemática produzisse poemas absolutos e incontestáveis, o belo para além do belo.

Paul Halmos, um matemático norte-americano de origem húngara que nasceu há 100 anos, arrisca: “A matemática é segurança. Certeza. Verdade. Sabedoria. Estrutura. Arquitetura. Olho para a matemática, a fração do conhecimento humano a que eu chamo matemática, como uma coisa, uma grande e gloriosa coisa.” E será reconfortante para todos os matemáticos acreditar que sim, que a sua disciplina é necessariamente universal, segura e certa. Por entre um mundo tão pouco fiável, tão volúvel... Podemos sempre confiar na matemática.

Será mesmo assim? Pode a nossa matemática funcionar noutras civilizações, noutras mentes, noutros planetas? Por quantos dedos contará um extraterrestre? Quantas dimensões abarcarão os seus olhos?

Eu não sei o que é a matemática. A minha formação em física levou-me a pensar que a matemática era um canivete suíço que nos ajudava nas situações mais desesperadas. O que me serve aqui? Um integral? Um sistema de equações diferenciais? Uma transformada de Fourier? Mas é mais do que isso, é muito mais do que isso.

Arrisquem a vossa própria definição, ou até uma indefinição. O que é, afinal, a matemática?

## INSCRIÇÕES ABERTAS PARA O ENCONTRO NACIONAL DA SPM



A Escola Superior de Tecnologia do Barreiro (Instituto Politécnico de Setúbal) será a anfitriã do próximo Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática (ENSPM) que se realiza nos dias 11, 12 e 13 de julho. As inscrições estão abertas em [www.enspm16.spm.pt](http://www.enspm16.spm.pt). Do programa do encontro farão parte sessões plenárias e temáticas, mesas-redondas e ainda um curso de formação para professores. Hung-Hsi Wu (University of California, Berkeley), especialista em ensino, abrirá as sessões plenárias desta edição do ENSPM com a conferência “School Mathematics Education in the U.S. and the Common Core Standards” no dia 11 de julho. Já a plenária de divulgação será conduzida por Rogério Martins (FCT - Universidade Nova de Lisboa), no dia 12, com o tema “A Bicicleta que Calcula Áreas e as Minhas Reflexões Sobre Divulgação”. Leonor Godinho (Instituto Superior Técnico) inaugurará as sessões científicas com “Fermat e o Número Mínimo de Pontos Fixos de um Fluxo Periódico”, no dia 11 de julho, seguida de Afonso Bandeira (Massachusetts Institute of Technology) com “Problemas Matemáticos da Era da Revolução de Dados”. No último dia do ENSPM, 13 de julho, Pedro Silva (Universidade do Porto) apresentará “Algoritmos em Complexos Simpliciais Finitos”. As sessões temáticas, cujos temas foram propostos pela comunidade matemática nacional, decorrerão ao longo dos três dias do encontro. Para os professores dos ensinos básico e secundário há ainda a opção de um curso de formação com a duração de 15 horas (0,6 créditos) [ver caixa]. O ENSPM realiza-se bianualmente e é dirigido a todos os matemáticos portugueses, e a todos os que têm como interesse comum a matemática, tendo em vista a troca de experiências, de conhecimentos e de ideias.

### OFERTA FORMATIVA

A ação de formação para professores ministrada no ENSPM 2016 terá a duração de 15 horas (0,6 créditos) e está dividida em dois blocos distintos que os formandos terão obrigatoriamente de frequentar. O Bloco 1, que totaliza 9 horas, consiste numa sessão plenária de ensino com debate, numa sessão plenária de divulgação com debate, em duas sessões temáticas sobre ensino e numa sessão plenária científica; o Bloco 2 é constituído por um curso de 6 horas, cuja temática os formandos poderão escolher de acordo com as quatro opções disponíveis: Curso I – Desenvolvimento de Conhecimentos de Matemática Através da Programação com Scratch; Curso II – Métodos de Geometria com o Geogebra; Curso III - Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário: Lógica e Geometria; Curso IV - Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário: Álgebra e Funções. Os cursos I e II são destinados a professores dos 1.º, 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, enquanto os cursos III e IV são destinados a professores do ensino secundário. Estes cursos têm por base os Programas e Metas Curriculares de Matemática e são ministrados por formadores acreditados.

## ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT VALE PRÉMIO ABEL 2016 A ANDREW J. WILES

O Prémio Abel 2016, uma das mais importantes distinções em matemática, foi atribuído ao investigador britânico Andrew J. Wiles (62 anos), da Universidade de Oxford, pela sua demonstração, em 1994, do Último Teorema de Fermat, um dos mais famosos problemas matemáticos de todos os tempos. A Academia Norueguesa de Ciências e Letras considerou que Wiles inaugurou “uma nova era na Teoria dos Números” com esta descoberta, que foi o culminar de décadas de estudo e de interesse pessoal que trouxeram à luz a solução para um problema com mais de três séculos de existência. O enigma remonta ao século XVII quando Pierre de Fermat, célebre matemático francês, escreve na margem do seu exemplar do livro *Aritmética*, de Diofanto (matemático grego do séc. III D.C.), um enunciado cuja “maravilhosa” demonstração diz ser demasiado longa para caber naquele pedaço de papel. Estava assim criado o problema que se transformaria num verdadeiro quebra-cabeças para inúmeros matemáticos que ao longo dos séculos tentaram demonstrar o Teorema. Andrew J. Wiles, que fez carreira académica em Cambridge, Princeton e Oxford, acabaria por encontrar a solução em 1994, validando não só o Teorema de Fermat mas também os conceitos matemáticos nele apoiados. O Comité do Prémio Abel, constituído por cinco prestigiados matemáticos, considera que poucos resultados matemáticos conseguiram aliar “uma história tão rica a uma demonstração tão dramática como as do Último Teorema de Fermat”.



### “ISTO É MATEMÁTICA” DE REGRESSO AO PEQUENO ECRÃ

O “Isto é Matemática”, apresentado por Rogério Martins e promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), regressou no início deste ano ao ecrã da SIC Notícias, da SIC Radical e da SIC Internacional, com o apoio da Fundação Vodafone Portugal, que veio assegurar a continuidade do programa. Depois do sucesso das temporadas anteriores, o programa ressurgiu agora com novos temas e muitas novidades, estreando um novo episódio todos os sábados, às 09h40, na SIC Notícias. Premiado internacionalmente pela Mostra Internacional de Ciência na TV VerCiência2013, o “Isto é Matemática” é um programa de divulgação científica, com uma produção de excelência, que apresenta tópicos da matemática de forma descontraída e divertida. O impacto da 1.<sup>a</sup> edição do programa foi muito além do obtido pela transmissão televisiva, tendo este sido, inclusive, usado nas salas de aula como material didático, não só em Portugal mas também no Brasil e em El Salvador. A sua primeira série foi ainda traduzida para inglês pela European Mathematical Society, e disponibilizada no portal *mathematics-in-europe.eu*.

## “A MATEMÁTICA E O FUTURO”

### NO MAT-OESTE 2016

A Região Oeste receberá “A Matemática e o Futuro” no dia 8 de julho, em mais uma edição do Mat-Oeste. Este encontro é promovido anualmente pelo Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria, com o intuito de promover a divulgação, a discussão, e a partilha de experiências nas mais diferentes vertentes da matemática, na Região Oeste. As inscrições para este encontro podem ser efetuadas até 3 de julho, em <http://www.matoestedmat.ipleiria.pt/>. No decorrer do Mat-Oeste realizar-se-á também a entrega de prémios da 8.ª edição do Prémio Pedro Matos, promovido anualmente pelo Instituto Politécnico de Leiria e destinado a alunos do ensino secundário.



## “MATEMÁTICA DO PLANETA TERRA”: NOVO CONCURSO

O projeto IMAGINARY, uma plataforma aberta de matemática interativa, a UNESCO, a International Mathematical Union (IMU) e a International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) lançaram um novo concurso para o enriquecimento da exposição “Matemática do Planeta Terra”. Criada em 2012 com a colaboração de público de todo o mundo, esta exposição foi inaugurada em Paris, em março de 2013, quando da abertura oficial do evento global Matemática do Planeta Terra. Para esta segunda competição as propostas deverão ser submetidas até 30 de junho de 2017, de acordo com as seguintes categorias: *softwares* interativos para exposições *online* ou físicas; apresentações explicativas sobre como realizar módulos físicos num museu; vídeos que possam ser integrados em exposições; conjuntos de imagens acompanhadas de descrições matemáticas. Além dos três primeiros prémios foi criada uma secção especial para módulos que abordem os desafios do continente africano. Mais informações sobre o concurso estão disponíveis em <https://imaginary.org/content/new-mpe-exhibits>. A Matemática do Planeta Terra é uma iniciativa de organizações matemáticas de todo o mundo, que tem como objetivo demonstrar de que forma as ciências matemáticas poderão contribuir para a resolução de problemas que afetam o planeta.

## PAÇO DE ARCOS FOI PALCO DA FINAL DAS XXXIV OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA

Foi uma autêntica maratona, aquela que 40 mil alunos de todo o País iniciaram há alguns meses, na primeira eliminatória das XXXIV Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM). O passado dia 20 de março foi dia de cortar a meta para os 90 olímpicos que, com muito treino e muita dedicação, conquistaram um lugar na final nacional das XXXIV OPM, e viveram com expectativa e entusiasmo cada minuto da cerimónia de entrega de prémios, que teve lugar na Escola Secundária Luís de Freitas Branco, em Paço de Arcos, Oeiras. Numa corrida em que o género masculino ainda domina, é de assinalar a conquista de duas medalhas (uma de prata e outra de bronze) por Inês Guimarães (Riva D’Ave) e Maria Matilde Silva (Coimbra) na categoria B, a mais exigente da competição. A cerimónia contou com a presença de Henrique Leitão, Prémio Pessoa 2014, que conquistou miúdos e graúdos com a apresentação da sua “matemática do calendário”. Os participantes foram ainda saudados pelo Secretário de Estado da Educação, João Costa, pelo presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), Fernando P. Costa, por Ana Noronha, da Ciência Viva, por Jorge Lucas, da Fundação Calouste Gulbenkian (FCG), e pelo diretor do Agrupamento de Escolas de Paço de Arcos, anfitrião desta final, João Carlos Nunes. Para muitos as Olimpíadas regressam no próximo ano letivo, mas para outros a competição ainda não terminou. No mês de julho, Portugal marcará presença nas Olimpíadas Internacionais de Matemática, que terão lugar em Hong Kong, e, em setembro, nas Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, que se realizarão no Chile. Todos os premiados das categorias A e B são candidatos aos desejados (mas limitados) lugares nas equipas que representarão Portugal nestas competições. As OPM são organizadas pela SPM em parceria com o Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, e contam com o apoio do Ministério da Educação, da Ciência Viva, da FCG, do Novo Banco e da Pathena. Esta edição foi ainda apoiada pela Escola Secundária Luís de Freitas Branco, pela Câmara Municipal de Oeiras, pela Texas Instruments, pela Moche, pela Gradiva, pela ASA e pelo jornal Público.



## WORKSHOP INTERNACIONAL DE TEORIA E ÁLGEBRA DE OPERADORES E APLICAÇÕES NO IST

O WOAT 2016 (International Workshop in Operator Theory, Operator Algebras and their Applications) realiza-se no Instituto Superior Técnico (IST) entre 5 e 8 de julho, dando continuidade a uma série de conferências realizadas no IST desde 2006. Este evento pretende estimular a comunicação entre investigadores em Teoria de Operadores e Álgebra de Operadores, incluindo ainda sessões especiais que promoverão o intercâmbio de conhecimentos sobre investigação em Teoria de Matrizes. Para estudantes e jovens investigadores serão disponibilizados alguns apoios.

## CONTAGEM DECRESCENTE PARA 7.º ECM EM BERLIM

O 7.º Congresso Europeu de Matemática realiza-se entre 18 a 22 de julho, na Technische Universität Berlin, onde, durante quatro dias, se reunirão matemáticos vindos de toda a Europa para discutir os principais desenvolvimentos na área da matemática. O Congresso Europeu de Matemática é uma iniciativa da European Mathematical Society e realiza-se de quatro em quatro anos.

## 2.º ENCONTRO IBÉRICO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA REALIZA-SE EM COIMBRA



Coimbra receberá, entre 14 e 16 de julho, o 2.º Encontro Ibérico de História da Matemática (2EIHM). O evento terá lugar no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e no seu Museu de Ciência, sendo um encontro satélite do Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática (ENSPM). Esta edição segue-se ao 1.º EIHM, que se realizou em Santiago de Compostela, em 2013, durante um Encontro Nacional da Real Sociedade Matemática Espanhola. A comissão organizadora do 2EIHM aceita propostas para comunicações até ao dia 10 de maio. Quanto às taxas de inscrição, sofrerão um agravamento a partir de 31 de maio. Todos os inscritos no Encontro Nacional da SPM estão isentos de pagamento de inscrição neste encontro, sendo obrigatória a inscrição formal.

## RIO DE JANEIRO RECEBERÁ O ICM 2018

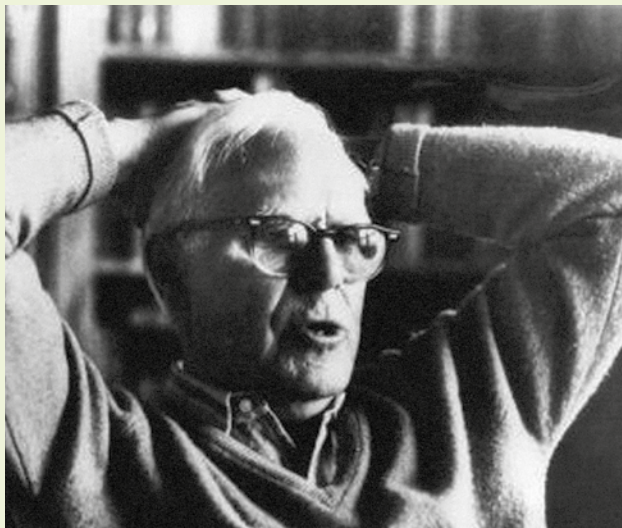
Entre 1 e 9 de agosto de 2018 a Cidade Maravilhosa será palco do ICM2018 (International Congress of Mathematicians 2018), o evento mais importante da matemática a nível mundial. Alguns dos maiores matemáticos da atualidade estarão reunidos no Rio de Janeiro para compartilhar conhecimento e participar em diversas atividades, incluindo entregas de prémios, palestras, *workshops* e atividades de divulgação para a sociedade.



### SÉRGIO MACIAS MARQUES (1928-2016)

Sérgio Macias Marques, diretor do *Jornal de Mathematica Elementar (JME)* durante mais de 20 anos, faleceu no passado mês de fevereiro. Macias Marques nasceu em Loulé em 1928, e foi, durante 40 anos, professor do ensino secundário e superior. Em 1984, reeditou a publicação *JME*, há muito extinta, quando se assinalavam os 100 anos da sua criação, mantendo-se como seu diretor honorário até ao seu desaparecimento. Licenciado em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, foi autor dos quatro volumes da *Galeria de Matemáticos do Jornal de Mathematica Elementar*, do *Dicionário Ilustrado de Matemática Elementar* e de *Rememorações Matemáticas e Alternativas*, publicado em 2013.





## MARTIN GARDNER CELEBRADO EM ATLANTA

Realizou-se, entre 30 de março e 3 de abril, em Atlanta, EUA, mais uma edição da conferência “Gathering 4 Gardner”, ocasião em que os fãs da matemática recreativa se reúnem para celebrar a obra de Martin Gardner, que popularizou esta área criativa. A “Gathering 4 Gardner” foi criada em 1993 por Thomas M. Rodgers (falecido em 2012), colecionador de *puzzles* e admirador de Gardner, com o intuito de reunir mágicos, matemáticos, céticos, filósofos, entusiastas de quebra-cabeças e público em geral. A segunda edição do evento decorreu em 1996 e desde então este tem sido realizado bianualmente, sempre em anos pares.

## PRIMEIRO CONGRESSO DA SOCIEDADE MATEMÁTICA FRANCESA

Entre 6 e 10 de junho, realizar-se-á o primeiro congresso nacional da Sociedade Matemática Francesa (SMF), organizado pela Fédération Denis Poisson Orléans-Tours. Este evento pretende expor o panorama da matemática desenvolvida em França, dos seus aspetos mais fundamentais, às suas principais aplicações. O programa do congresso consistirá em sessões plenárias, sessões paralelas com especial enfoque para matemáticos mais jovens, havendo ainda lugar para uma tarde (8 de junho) dedicada a um público menos especializado. O congresso da SMF terá lugar na Faculté des Sciences et Techniques da Université François Rabelais, em Tours.

## PORDATA KIDS CHEGA ÀS SALAS DE AULA

Depois do lançamento, em 2015, do portal Pordata Kids, um *site* com dados estatísticos destinado a crianças, a Fundação Francisco Manuel dos Santos desenvolveu agora uma nova fase do projeto com conteúdos que poderão ajudar os professores a complementar as suas aulas com informações estatísticas atualizadas e rigorosas sobre o País em diversas áreas: ambiente, ciência e tecnologia, educação, população, justiça, turismo, etc. A página disponibiliza uma série de ferramentas, como jogos didáticos e fichas de trabalho, que acompanham as metas curriculares. Mediante pedido das escolas, os materiais são fornecidos gratuitamente pela Pordata, sendo também possível fazer o *download* na página da Pordata Kids, em <http://www.pordatakids.pt/Escolas>.





# AÇÕES DE FORMAÇÃO

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

2015/2016

Visite a página do  
Centro de Formação SPM em  
[www.formacao.spm.pt](http://www.formacao.spm.pt)

**CENTRO DE FORMAÇÃO**  
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA  
CCPFC/ENT-AP-0328/11

## O ENCONTRO NACIONAL DA SPM 2016

Como acontece em todos os anos pares, em 2016 terá lugar o Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática. Este 16.º Encontro decorrerá de 11 a 13 de julho, na Escola Superior de Tecnologia do Barreiro, e terá inúmeros pontos de especial interesse.

Em primeiro lugar, o Encontro Nacional da SPM é um fórum único para a comunidade matemática portuguesa. É um ponto de encontro único onde podem cruzar-se todos os matemáticos portugueses e, independentemente da área de especialização científica, conviver e trocar experiências. Este facto, só por si, gera dinâmicas muito interessantes. Como me confidenciou um colega no último Encontro, “só pelos contactos que fiz nos *coffee breaks* tinha valido a pena participar”!

Foi colocado um cuidado especial na escolha da excelência das sessões plenárias. O leque de temas das sessões plenárias é abrangente. Assim, Pedro Silva (FCUP) falar-nos-á sobre *Algoritmos em complexos simpliciais finitos*; Afonso Bandeira (MIT) abordará o tema *Problemas matemáticos na era da revolução dos dados*; e Leonor Godinho (IST) falará sobre *Fermat e o número mínimo de pontos fixos de um fluxo periódico*. A sessão dedicada à Divulgação estará a cargo de Rogério Martins, com a sua *Bicicleta que calcula áreas* e outras reflexões. Na sessão de ensino, a SPM traz a Portugal o especialista Hung-Hsi Wu, de Berkeley, que nos dará a sua visão sobre a matemática escolar nos EUA, com ênfase no chamado *Common Core*. Vem a propósito referir que o livro de Wu “*Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*” está em fase final de tradução e edição para português, inaugurando uma colaboração editorial entre a SPM e a Porto Editora sobre matemática elementar.

Este será provavelmente o Encontro mais participado de sempre: são esperadas perto de três centenas de participantes. Uma das razões para este sucesso deve-se

em grande medida ao facto de o Encontro ter, este ano, adotado um novo modelo para a organização de Sessões Temáticas: em vez do processo *top-down*, em que a Comissão Científica começava por definir as áreas das Sessões e convidava os respetivos organizadores em função dessas escolhas, adotou-se um modelo *bottom-up*: foi realizada uma chamada à comunidade científica para propostas de Sessões Temáticas, que seguidamente foram discutidas pela Comissão Científica.

Qualquer mudança envolve um risco; neste caso, era impossível prever a reação dos matemáticos a esta chamada. Esta reação transcendeu as expectativas mais otimistas e revelou bem a vitalidade da comunidade científica: recebeu a SPM mais de três dezenas de propostas. Destas acabaram por ser selecionadas 25, com uma enorme abrangência científica, que reflete de forma muito clara a dinâmica e a vitalidade de cada uma das áreas. A lista completa de Sessões Temáticas e respetivos responsáveis encontra-se na página do Encontro, em <http://www.enspm16.spm.pt/pt>. O leitor interessado é convidado a submeter uma comunicação a uma das sessões, contactando diretamente o respetivo organizador.

Qualquer matemático é, com ou sem comunicação para apresentar, cordialmente convidado a participar neste Encontro. Este será provavelmente o maior e o mais abrangente Encontro Nacional da SPM já realizado. Será, sem dúvida, uma ocasião memorável, e o leitor não quererá certamente perder este grande fórum da matemática em Portugal.

Até julho, no Barreiro!

## POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1939, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: [gazeta@spm.pt](mailto:gazeta@spm.pt).

## ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2016

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para [imprensa@spm.pt](mailto:imprensa@spm.pt)

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

[www.spm.pt](http://www.spm.pt)

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

[www.gazeta.spm.pt](http://www.gazeta.spm.pt)

VISITE A LOJA SPM EM [WWW.SPM.PT](http://WWW.SPM.PT)

**NOVIDADE!**

Livro de Problemas  
de Almada Negreiros

