

N. 0179

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXVII | Jul. 2016 | 4,20€

Quase-Cristais e Números Metálicos

FÁTIMA VINAGRE

CONVERSA COM
João Pedro Nunes
GONÇALO MORAIS

Antiderivação: Uma Ponte
Entre a Matemática e a Economia
BEITES, P. D., LOBO, F. J. E SERÓDIO, R.

Sociedade Portuguesa de Matemática

ENCONTRO NACIONAL

2016

11, 12 e 13 de julho
Barreiro

SESSÕES PLENÁRIAS

School Mathematics Education in the U.S. and the Common Core Standards

Hung-Hsi Wu, University of California, Berkeley

A Bicicleta que Calcula Áreas e as Minhas Reflexões Sobre Divulgação

Rogério Martins, FCT - Univ. Nova de Lisboa

Fermat e o Número Mínimo de Pontos Fixos de um Fluxo Periódico

Leonor Godinho, Instituto Superior Técnico - UL

Problemas Matemáticos da Era da Revolução de Dados

Afonso Bandeira, Massachusetts Institute of Technology (MIT)

Algoritmos em Complexos Simpliciais Finitos

Pedro Silva, Universidade do Porto

Mais Informações

<http://enspm16.spm.pt>

enspm2016@spm.pt



Curso Acreditado para Professores dos Ensinos Básico e Secundário (15 horas / 0,6 créditos)

Centro de Formação da SPM

Comissão Científica

Jorge Buescu (Pres.), Universidade de Lisboa

Adérito Araújo, Universidade de Coimbra

Carlos Braumann, Universidade de Évora

Isabel Labouriau, Universidade do Porto

Luís Castro, Universidade de Aveiro

Miguel Abreu, Instituto Superior Técnico - UL

Comissão Organizadora

Telma Guerra Santos (Pres.), ESTB-IPS

Anabela Marques, ESTB-IPS

Dina Salvador, ESTS-IPS

Clara Carlos, ESTB-IPS

Mariana Dias, ESTS-IPS

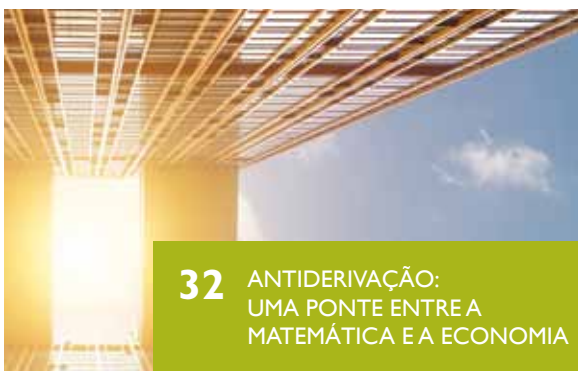
Otilia Dias, ESTB-IPS

Raquel Barreira, ESTB-IPS

Vanda Silva, ESTS-IPS

Apoios:





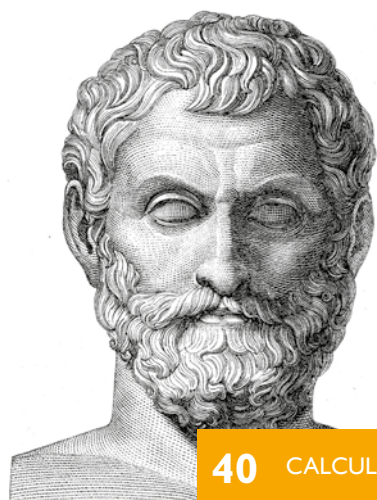
32 ANTIDERIVAÇÃO:
UMA PONTE ENTRE A
MATEMÁTICA E A ECONOMIA



29 PERGUNTAS
SIMPLES,
RESPOSTAS
SURPREENDENTES
**Os Computadores
Aprendem a Jogar
Go**



09 CANTO
DÉLFICO
Canto de
Aniversário



40 CALCULADORA DE TALES

- 02 EDITORIAL** | Adérito Araújo
- 03 ATRACTOR**
Reciclando o Erro
- 07 RECREIO** | Jorge Nuno Silva
Metagrobologist Extraordinaire
- 09 CANTO DÉLFICO** | Jorge Neves
Canto de Aniversário
- 11 NA LINHA DE FRENTE** | Fabio Chalub
Os *Quanta* de Wallis
artigo de capa
- 14 QUASE-CRISTAIS E NÚMEROS METÁLICOS**
Fátima Vinagre
- 26 APANHADOS NA REDE** | José Carlos Santos
O Espaço-tempo
- 29 PERGUNTAS SIMPLES, RESPOSTAS
SURPREENDENTES** | Manuel Silva e Pedro J. Freitas
Os Computadores Aprendem a Jogar Go
- 32 ANTIDERIVAÇÃO: UMA PONTE ENTRE
A MATEMÁTICA E A ECONOMIA**
Beites, P. D., Lobo, F. J. e Serôdio, R.
- 40 CALCULADORA DE TALES**
Luís Bernardino e Juan Carlos Sánchez Rodríguez
- 44 CONVERSA COM...** | Gonçalo Morais
João Pedro Nunes
- 50 MATEMÁTICA E LITERATURA** | Nuno Camarinho
Que Ano é Hoje?
- 51 NOTÍCIAS**
- 54 BARTOON** | Luis Afonso
- 55 CARTAS DA DIREÇÃO** | Fernando P. Costa
Em Jeito de Balanço



ADÉRITO ARAÚJO
Universidade
de Coimbra
alma@mat.uc.pt

A MATEMÁTICA E AS SUAS APLICAÇÕES

A matemática mantém, desde sempre, uma relação simbiótica com outras ciências. Neste número da *Gazeta de Matemática* damos conta de algumas particularidades desse fascinante relacionamento.

São muitos os resultados matemáticos que foram obtidos apenas pela sua elegância e beleza, ou motivados pela abstração, que evidenciaram, mais tarde, ser a ferramenta ideal para descrever situações reais. Podem ser encontrados exemplos na aplicação das curvas elípticas à criptografia, no uso da geometria na física teórica, ou na relevância da análise harmónica no processamento de imagem, dos grupos finitos na construção de códigos para a correção de erros, da análise estocástica na modelação de sistemas financeiros, etc.

O artigo de Fátima Vinagre, que faz capa desta edição da *Gazeta de Matemática*, mostra como um conceito matemático aparentemente distante de qualquer aplicabilidade prática pode ser útil na explicação da existência de certas simetrias de rotação consideradas, até há poucos anos, impossíveis em cristalografia. A autora começa por descrever as propriedades mais relevantes dos chamados números metálicos para, posteriormente, nos dar a conhecer a sua relação com os quase-cristais, cuja descoberta valeu a atribuição do Prémio Nobel da Química, de 2011, e o Prémio Wolf da Física, em 1999, ao israelita Dan Shechtman, do Instituto Technion, em Haifa.

A conversa que Gonçalo Morais manteve com João Pedro Nunes, professor no ISCTE - Instituto Universitário de Lisboa, mostra-nos, por outro lado, como motivações endógenas à matemática podem

conduzir a novos e importantes desafios para a disciplina. A atual crise financeira contribuiu para que matemáticos e economistas estreitassem colaborações no sentido de encontrar novas teorias que permitam descrever a complexa dinâmica da economia. Na entrevista que publicamos neste número da revista, os intervenientes conduzem-nos numa viagem ao universo da matemática financeira, revelando a economia como terreno fértil para o florescimento de sofisticados modelos matemáticos, adaptados à necessidade de lidar com grandes quantidades de dados e diversas fontes de informação.

Damos também destaque ao artigo “Antiderivação: Uma Ponte Entre a Matemática e a Economia”, onde se relata um projeto desenvolvido com alunos do ensino secundário no âmbito da iniciativa Academia Júnior de Ciências, promovida pela Universidade da Beira Interior. Os seus autores apresentam-nos uma interessante experiência pedagógica onde o enfoque, mais uma vez, reside na íntima relação entre a matemática e as suas aplicações.

Citando John von Neumann, “o facto mais característico acerca da matemática é a sua relação peculiar com as ciências que interpretam as experiências a um nível superior ao meramente descritivo”. Este número da *Gazeta* corrobora esta afirmação.

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor; relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atorator.pt.
Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atorator@atorator.pt.

RECICLANDO O ERRO

Se cancelarmos o algarismo 6 que é comum ao numerador e ao denominador da fração $\frac{64}{16}$, obtemos $\frac{4}{1} = 4$, e de facto $\frac{64}{16} = 4$. Analogamente, $\frac{48}{48} = 2$ e $\frac{65}{22} = \frac{5}{2}$. Contudo, em geral, este é um procedimento incorreto. Para que frações é válido?

Começamos pelas frações com dois algarismos no numerador e no denominador. Evitando casos triviais (como $\frac{50}{20}$) e juntando depois as frações recíprocas, bastará dar atenção às frações $\frac{ca}{bf}$ em que a, b e c são distintos dois a dois e $a, b, c \in \{1, \dots, 9\}$. A igualdade

$$\frac{ca}{bf} = \frac{a}{b}$$

é equivalente a $10bc = (9b + c)a$ e daqui concluímos que, além de casos triviais, as frações na base 10 deste tipo que permitem o cancelamento são $\frac{95}{19}$, $\frac{98}{49}$, $\frac{64}{16}$ e $\frac{65}{26}$, e as correspondentes recíprocas $\frac{19}{95}$, $\frac{49}{98}$, $\frac{16}{64}$ e $\frac{26}{65}$.

Este problema pode colocar-se em qualquer outra base $\beta \geq 2$ que não a decimal, sendo agora os algarismos a, b, c de $\{1, \dots, \beta - 1\}$. O Atractor programou uma rotina para determinar as frações canceláveis não triviais para bases entre 2 e 100. Da análise da lista de frações assim obtida pudemos conjecturar alguns resultados gerais sobre estas frações. Em [1] pode ler-se uma versão mais completa deste texto em que se demonstram as propriedades que enunciaremos de seguida.

Suponhamos que a base β é um número primo. O cancelamento na fração $\frac{ca}{bf}$ é válido se e só se $\beta(c - a)b = a(c - b)$. Como $c = a$ se e só se $a = b = c$, e, sendo $c \neq a$, o primo β não divide nem a nem $c - b$, concluímos que, quando a base é um primo, não há frações canceláveis não triviais nessa base. Pelo contrário, quando β é um natural composto há sempre frações canceláveis

β	$\beta - 1$	d	$\mathcal{F}(\beta)$	Recíprocas
4	3	2	$\frac{32}{13}$	$\frac{13}{32}$
6	5	2, 3	$\frac{54}{25}, \frac{53}{15}$	$\frac{25}{54}, \frac{15}{53}$
8	7	2, 4	$\frac{76}{37}, \frac{74}{17}$	$\frac{37}{76}, \frac{17}{74}$
9	8	3	$\frac{86}{28}, \frac{43}{14}$	$\frac{28}{86}, \frac{14}{43}$
10	9	2, 5	$\frac{98}{49}, \frac{95}{19}, \frac{64}{16}, \frac{65}{26}$	$\frac{49}{98}, \frac{19}{95}, \frac{16}{64}, \frac{26}{65}$
12	11	2, 3	$\frac{11}{5}, \frac{10}{11}, \frac{11}{3}, \frac{9}{11}$	$\frac{5}{11}, \frac{11}{10}, \frac{3}{11}, \frac{11}{9}$
		4, 6	$\frac{11}{2}, \frac{8}{11}, \frac{11}{6}, \frac{11}{11}$	$\frac{2}{11}, \frac{11}{8}, \frac{6}{11}, \frac{11}{11}$
14	13	2, 7	$\frac{13}{6}, \frac{12}{13}, \frac{13}{7}, \frac{13}{13}$	$\frac{6}{13}, \frac{13}{12}, \frac{7}{13}, \frac{13}{13}$
15	14	3, 5	$\frac{14}{4}, \frac{12}{14}, \frac{14}{2}, \frac{10}{14}, \frac{7}{2}, \frac{6}{7}$	$\frac{4}{14}, \frac{14}{12}, \frac{2}{14}, \frac{14}{10}, \frac{2}{7}, \frac{7}{6}$
			$\frac{7}{1}, \frac{5}{12}, \frac{12}{10}, \frac{12}{9}, \frac{1}{7}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}$	$\frac{1}{7}, \frac{12}{5}, \frac{10}{12}, \frac{9}{2}, \frac{7}{3}, \frac{12}{10}, \frac{12}{9}$

Figura 1. Tabela.

não triviais, e o seu número depende essencialmente da quantidade de divisores próprios de β e do facto de $\beta - 1$ ser ou não primo. São vários os processos que permitem criar frações canceláveis não triviais, mas temos também um algoritmo, que descreveremos, para obter todas elas em qualquer base. A tabela da figura 1 mostra alguns exemplos, designando-se por $\mathcal{F}(\beta)$ o conjunto de todas as frações canceláveis não triviais na base β sem contar com as recíprocas.

Fixemos um natural composto β . Para cada divisor $1 < d < \beta$ de β , é imediato verificar que é cancelável e não trivial a fração $\frac{ca}{bf}$ com $a = \beta - d$, $b = \beta/d - 1$ e

$c = \beta - 1$. Por exemplo, se $\beta = 4$, então $d = 2$, criando-se com este processo a fração ${}^3 2/13$. Se $\beta = 9$, então $d = 3$, e obtemos a fração cancelável ${}^8 6/28$. Quando $\beta = 16$, o divisor d pode ser 2, 4 ou 8, e encontramos

$$\frac{15}{7} \frac{14}{15'} \frac{15}{3} \frac{12}{15} e \frac{15}{1} \frac{8}{15}$$

Podemos acrescentar que, se β é composto e $\beta - 1$ é primo, as frações canceláveis $\frac{ca}{b\ell}$ assim criadas a partir dos divisores próprios de β são as únicas canceláveis não triviais nessa base (além das suas recíprocas).

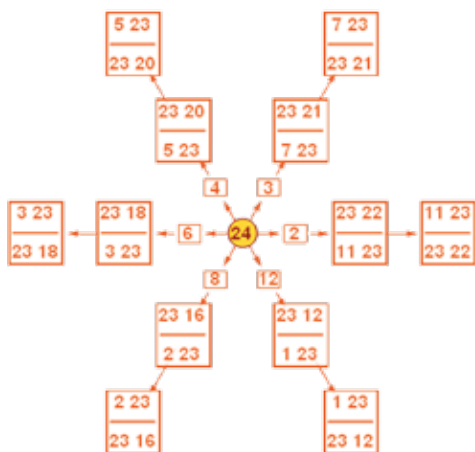


Figura 2. Frações canceláveis não triviais na base 24.

E, portanto, para estes valores de β , sabemos exatamente quantas frações canceláveis existem nessa base, e quais são. O grafo da figura 2 mostra todas essas frações para a base 24.

Consideremos agora uma base β que seja um natural composto tal que $\beta - 1$ também é composto. Neste caso, há outras frações canceláveis além das obtidas pelo processo descrito anteriormente, como indica o gráfico de barras da figura 3, que reúne, para alguns valores de β , o número total $\mathcal{N}(\beta)$ de frações não triviais canceláveis na base β e as suas recíprocas. Repare-se, por exemplo, que $\beta = 21$ tem apenas dois divisores próprios mas $\mathcal{N}(21) = 20$; e que $\beta = 49$ só tem um divisor próprio e também se tem $\mathcal{N}(49) = 20$.

Efetivamente, se β e $\beta - 1$ são compostos, para que uma fração $\frac{ca}{b\ell}$ seja cancelável não trivial têm de existir um primo p , divisor comum de $\beta - 1$ e de c , e naturais $1 \leq m \leq \frac{\beta-1}{p}$ e $1 \leq \ell < c$ tais que $\frac{ca}{a+\beta\ell}$ é um número natural, e

$$a = c - \ell, b = \frac{ca}{a + \beta\ell} \text{ e } c = pm.$$

Esta escrita de a, b, c a partir dos dados p, m, ℓ não é, em geral, única (por exemplo, se $\beta = 15$, então o divisor primo $p = 7$ de 14, $m = 2$ e $\ell = 2$ constroem a fração cancelável $\frac{14}{4} \frac{12}{14}$, que também é obtida com o divisor primo $p = 2$ de 14, $m = 7$ e $\ell = 2$). E, sempre que o quociente $\frac{ca}{a+\beta\ell}$ é um natural, este algoritmo produz uma fração cancelável não

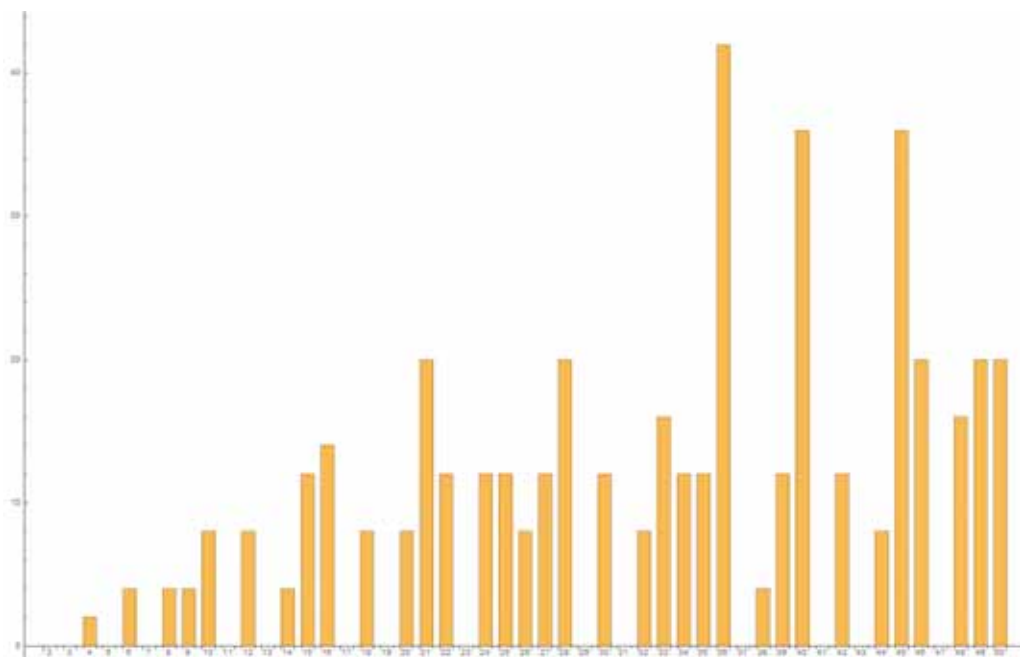


Figura 3. $\mathcal{N}(\beta)$ para as bases $\beta = 2, 3, \dots, 50$.

trivial na base β . As figuras 4, 5, 6 e 7 indicam todas as frações canceláveis não triviais nas bases $\beta = 9, 15, 16$ e 25. Foram obtidas com o algoritmo anterior e de cada figura constam também os respectivos valores de p, m e l .

A figura 8 representa numa escala logarítmica, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio e a partir do raio horizontal da esquerda, as frações canceláveis não triviais (amarelo), as canceláveis triviais (laranja), as suscetíveis de cancelamento mas não canceláveis, e as não suscetíveis de cancelamento (azul)¹. Os dados estão indicados para bases de 2 a 50, por ordem crescente do raio.

Terminado o estudo de frações com dois algarismos, podemos explorar as frações com três algarismos de uma base β fixada e suscetíveis de cancelamento. Há agora mais possibilidades a considerar, seja no número de

algarismos a cancelar, seja na posição deles no numerador e no denominador da fração. Para simplificar a abordagem e excluir os casos triviais, restringimo-nos a frações $\frac{xyz}{rst}$, $\frac{tzy}{rst}$ e $\frac{xzy}{rst}$. Da lista de frações não triviais canceláveis nas bases $\beta = 2, 3, \dots, 12$ que o Atractor construiu (e a que pode aceder em [1]), pudemos conjecturar, e depois provar, algumas propriedades sobre estas frações em qualquer base, de que a lista seguinte é uma amostra.

Há apenas uma fração cancelável não trivial em base $\beta = 2$, nomeadamente $\frac{1\phi 0}{11\phi}$. Ao contrário do que acontece com frações de dois algarismos (em que, se uma fração não trivial é cancelável numa base, então não o é noutra base), existe uma fração não trivial com três algarismos

¹ Dizemos de uma fração que é suscetível de cancelamento se tiver (pelo menos) um algarismo comum ao numerador e ao denominador.

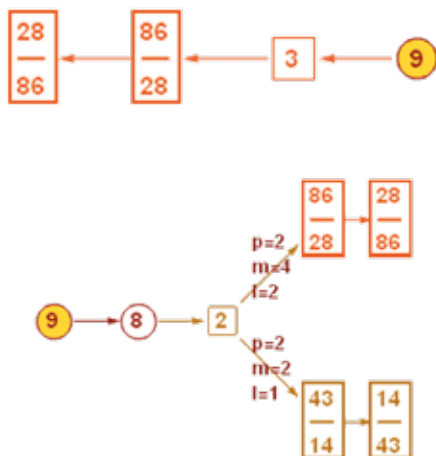


Figura 4. Frações canceláveis não triviais na base 9.

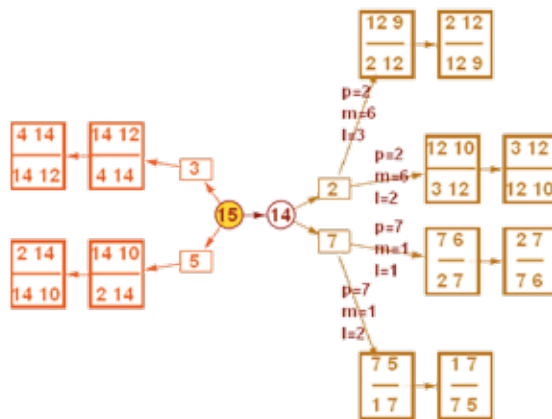


Figura 5. Frações canceláveis não triviais na base 15.

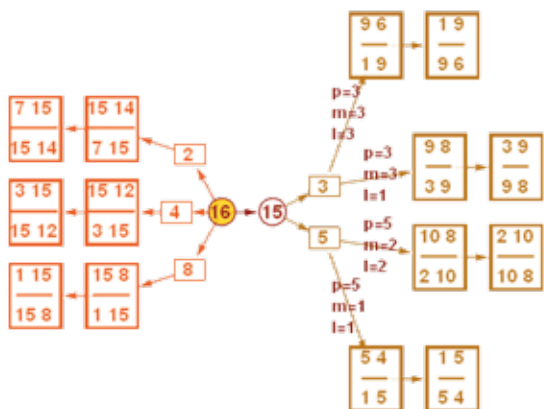


Figura 6. Frações canceláveis não triviais na base 16.

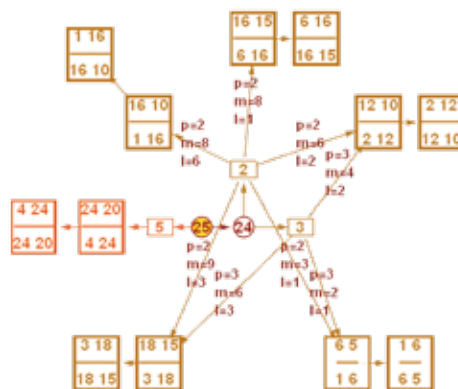


Figura 7. Frações canceláveis não triviais na base 25.

que é cancelável em todas as bases $\beta \geq 3$: $\frac{220}{121}$. Para qualquer base $\beta \geq 4$, são canceláveis as frações $\frac{330}{132}$, $\frac{330}{231}$ e

$$\frac{3 \cancel{\beta-1} \beta-2}{1 \beta-1 \cancel{\beta-1}}$$

e, se $\beta \geq 4$ é par, é sempre cancelável a fração

$$\frac{\cancel{\beta/2} 1 2}{\beta/2+1 \cancel{\beta/2}+1}$$

Para todo o natural ímpar $\beta \geq 5$, a fração

$$\frac{\cancel{2} 3 0}{1 \cancel{2} \frac{\beta+3}{2}}$$

é cancelável na base β . Para todo o $\beta \geq n$, são canceláveis na base β as frações

$$\frac{n \cancel{1} n-1 0}{1 n \cancel{1} n-2'} \quad \frac{n \cancel{1} n-1 0}{2 n \cancel{1} n-3'}$$

$$\frac{n \cancel{1} n-1 0}{3 n \cancel{1} n-4'} \quad \dots \quad \frac{n \cancel{1} n-1 0}{n-2 n \cancel{1} 1'}$$

Se β é primo, não existem frações $\frac{xyz}{rst}$ na base β que sejam não triviais e canceláveis.

O leitor é convidado a explorar todo o material interativo que o Atrator produziu a propósito deste tema e a considerar o desafio de obter uma descrição completa das frações canceláveis não triviais com três algarismos.

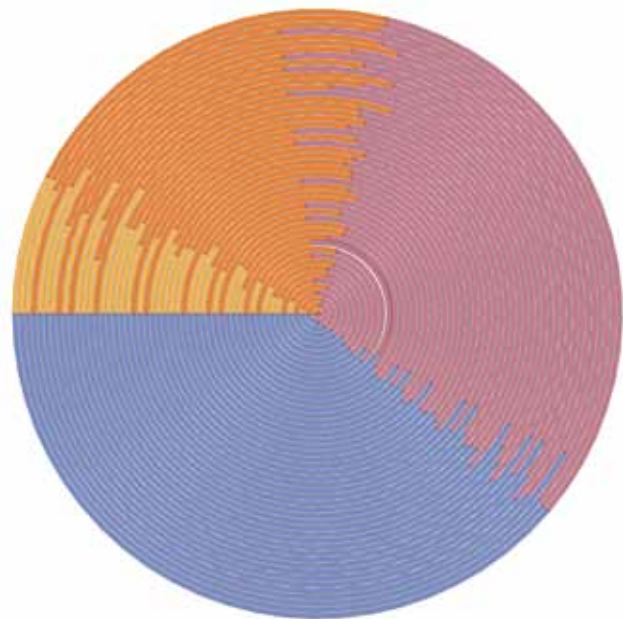


Figura 8. Percentagem de frações canceláveis não triviais.

REFERÊNCIAS

- [1] <http://www.atractor.pt/mat/reciclandoerro>



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt



JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa

jnsilva@cal.berkeley.edu

METAGROBLOGIST EXTRAORDINAIRE

David Singmaster acaba de publicar um livro de problemas! O título, bem apropriado, é *Problems for Metagrobologists* (World Scientific 2016). Quem segue o mundo da matemática recreativa não se admirará com o termo escolhido, os outros terão de ler a introdução deste belo livro. Singmaster presenteia-nos com uma coleção de problemas diversos, que cobrem áreas da Aritmética à Astronomia, passando pela Combinatória.

Selecionámos algumas questões propostas por David Singmaster para os nossos leitores.

1. Neste problema, cuja autoria Davis atribui a Nob Yoshigahara, cada letra $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ representa um dígito positivo diferente. Que valores tem cada uma delas de forma a valer a seguinte igualdade?

$$\frac{A}{BC} + \frac{D}{EF} + \frac{G}{HI} = 1$$

(BC, EF, HI são números que se escrevem com dois dígitos).

2. O inspetor Lestrade entra na sala de jantar. O corpo jaz no chão. Quatro pessoas manifestam-se.

Ágata: Eu sei quem a matou.

Bravo: Eu matei-a.

Carla: O Bravo matou-a.

Dário: Não foi o Bravo nem a Carla.

Há que determinar quem é responsável pelo crime em duas hipóteses diferentes: a) Todos mentem; b) Só uma pessoa mente.



3. É fácil fazer um quadrado com quatro fósforos. Também não é difícil fazer dois quadrados com sete fósforos. E fazer dois quadrados com seis fósforos? (Os quadrados devem ter o mesmo tamanho, os fósforos, que não dobram nem partem, também não se cruzam.)

Relembremos a questão do número anterior.

Num segmento de reta marcam-se, igualmente espaçados, os pontos $0, 1, \dots, n$. À extremidade esquerda corresponde o 0 , à direita corresponde o n .

Um gafanhoto, colocado na origem, dá saltos sucessivos de comprimentos $1, 2, \dots, n$. Pode fazê-lo para a esquerda ou para a direita, sem sair do segmento.

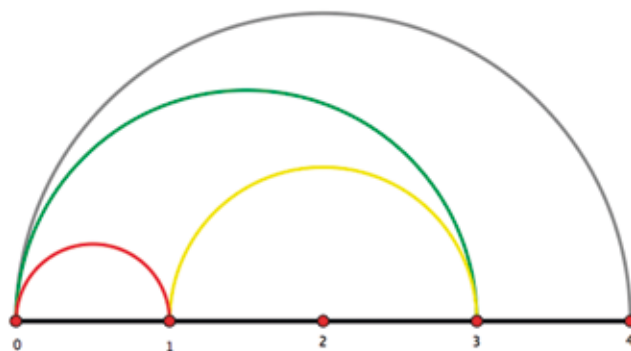
Se ao n -ésimo salto alcançar a extremidade direita, o segmento de comprimento n diz-se vitorioso.

Para $n = 1$ a questão é trivial.

A figura ao lado mostra como o segmento de comprimento 4 se mostra vitorioso (o primeiro, o segundo e o quarto saltos são para a direita, o terceiro é para a esquerda). Para que valores de n é o segmento correspondente vitorioso?

Os primeiros valores de n são 1, 4, 9, 13, 16, 20, 21, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 36.

Estes são os primeiros termos da sucessão A141000 da *On-line Encyclopedia of Integer Sequences* (<https://oeis.org/>). Moscovich contou com a colaboração de Dick Hess para determinar a expressão geral dos comprimentos vitoriosos.



III FEIRA DA MATEMÁTICA

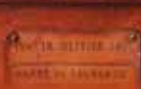
NO MUSEU NACIONAL DE HISTÓRIA NATURAL E DA CIÊNCIA
DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

21 | 22 OUTUBRO 2016

SEXTA-FEIRA ESPECIAL ESCOLAS
SÁBADO PÚBLICO GERAL

FEIRADAMATEMATICA@GMAIL.COM

EXPOSIÇÕES
SESSÕES PRÁTICAS
JOGOS E DESAFIOS
DEMONSTRAÇÕES
CIRCO MATEMÁTICO
PALESTRAS
CONCURSOS





JORGE NEVES
Universidade de
Coimbra
neves@mat.uc.pt

CANTO DE ANIVERSÁRIO

"Gostas de pensar? Interessas-te pela matemática? Queremos convidar-te a enriquecer os teus conhecimentos em temas de matemática elementar."

– primeira carta aos estudantes, Projeto Delfos.

Diz a lenda que Δελφοί, situado numa encosta do monte Parnaso, é o umbigo da deusa grega da criação. Aí se encontram as ruínas de um fabuloso santuário dedicado a Apolo, que remonta ao séc. VI a.C. São desse tempo os Jogos Píticos, que decorriam de quatro em quatro anos no estádio e no teatro ao cimo do santuário, com as suas competições de poesia, música, teatro e dança, e cuja importância só era superada pelos Olímpicos. No interior do templo, ao centro do santuário, divinava o oráculo mais famoso e influente do mundo helénico. No sétimo dia de cada um dos nove meses de residência de Apolo, a sacerdotisa Pítia respondia às súplicas dos visitantes. Em redor do templo de Apolo, ergueram-se dezenas de edifícios dotados de estátuas em mármore e bronze. O atual complexo arqueológico testemunha a enorme influência política e religiosa do santuário nas sociedades da antiguidade clássica. E, no entanto, para um grupo de jovens portugueses, *Delfos* não significa nada disto.



Em 2001, Alexander Kovačec, Amílcar Branquinho e Eduardo Marques de Sá, professores do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, decidem dar corpo ao projeto Delfos, uma escola de matemática para jovens. Na mira tinham a elevação do desempenho das equipas portuguesas nas competições internacionais de matemática. No dia 5 de dezembro de 2016, o Delfos faz 15 anos.

Nos primeiros três anos de vida, as atividades do projeto Delfos acompanharam de perto o calendário das olimpíadas de matemática. Os encontros na Universidade de Coimbra visaram um pequeno núcleo de meia dúzia de estudantes indicados pela Sociedade Portuguesa de Matemática para formar as equipas olímpicas. Todavia, a convicção de que o treino para as olimpíadas não poderia cingir-se apenas aos meses de abril a julho levou os membros do projeto a estender as atividades à totalidade do ano letivo. Aparecem assim em 2004, mensalmente e durante todo o ano letivo, os Estágios Delfos. Nos anos seguintes, o elenco das atividades dos estágios diversificou-se, refletindo uma opção também pela formação matemática geral dos estudantes. Além das aulas e sessões de problemas, iniciam-se palestras de divulgação, as Lições e os Oráculos, e inicia-se a Liga, a competição matemática em equipa do Delfos. Criou-se também o Fórum, pioneiro entre os fóruns de matemática elementar da Internet lusófona, que é hoje um local de convívio e discussão matemática com mais de 600 utilizadores.



A vinda à Universidade de Coimbra é para os estudantes um momento de grande fruição. Eles vêm ao encontro de jovens apaixonados pela matemática. A forma como vivem essa paixão durante os estágios é isenta de preconceitos, não é anormal nem é exótica. O Love Delfos, atual logótipo do projeto criado por Eduardo Marques de Sá em 2012, sintetiza esta ideia.

Nestes 15 anos, o conjunto de alunos que frequentam ou frequentaram o Delfos ganhou personalidade. Uma das primeiras manifestações da identidade do grupo dá-se em 2006. Foi na final das Olimpíadas Portuguesas de Matemática desse ano que se ouviu pela primeira vez: "O Delfos é Fixe!". Os estudantes tinham-se apropriado do *slogan* para cativar outros jovens. O grupo ganhou consciência própria.

Ser délfico é fazer parte de um grupo de jovens de todo o País que se apoiam uns aos outros, fortalecendo ligações e evoluindo em conjunto. No fórum e nos estágios correm alianças; estudantes que partilham o que sabem e, juntos, aprendem mais matemática. Os délficos têm a sua memó-



ria e a sua história, conhecem os seus antepassados. A atual geração é guardião de um saber coletivo que tem o dever de emular e ampliar. Os délficos são a alma do Delfos.

Os frutos do trabalho iniciado em 2001 só surgiram alguns anos mais tarde. No âmbito da melhoria do desempenho das equipas olímpicas, o gráfico acima, que ilustra a evolução das classificações obtidas por estudantes portugueses nas Olimpíadas Internacionais de Matemática, fala por si.

Em 2001 era fácil pensar que um projeto com a natureza do Delfos levado a cabo por três professores universitários teria os seus dias contados. Quinze anos depois, o Delfos cresceu e amadureceu. Hoje, ele envolve muitos docentes do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, investigadores visitantes e, numa tendência crescente, ex-délficos, que vêm colaborar na docência e partilhar a grande experiência que adquiriram. O futuro do projeto Delfos, no ano em que faz 15 anos, deseja-se brilhante.



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas, bibliotecas ou instituições similares*.

Mais Informações em www.spm.pt/exposicoes

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.



FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

OS QUANTA DE WALLIS

A constante matemática mais conhecida é π , a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, em qualquer círculo. Muitos esforços foram feitos na História humana para encontrar o seu valor, ou, pelo menos, uma boa aproximação. Mesmo hoje em dia, há competições para ver quem o calcula com mais precisão em menos tempo. Há quem goste de exibir a sua memória, dizendo de cor mais e mais de seus dígitos. Uma antiga forma de o calcular, obtida pela primeira vez no séc. XVII, foi recentemente redescoberta nos confins do infinitamente pequeno: no mundo quântico.

A primeira constante matemática a que nós somos apresentados é $\pi \approx 3,1415926536\dots$ (diz-se "pi"). Lembro-me até de uma pequena frase que me foi ensinada, de forma a melhor memorizar a sua expansão decimal: *nós e todo o mundo decoramos pi usando letra por número*. Ao substituir cada palavra pelo seu número de letras, encontramos a expansão decimal do nobre número. π é a razão entre a circunferência e o diâmetro de qualquer círculo. Durante anos, a sua própria existência intrigava-me. Afinal, porque é que este resultado não depende do círculo em questão? Nada melhor do que fazer uma experiência, própria para salas de aulas com crianças a serem apresentadas ao conceito pela primeira vez. Com um compasso desenha-se uma circunferência; um pedaço de corda serve para a medir. Com uma régua, temos o diâmetro. Dividimos uma pela outra e... dá tudo errado! Encontrávamos desde 2 e pouquinho até 4 e qualquer coisa. Dificilmente alguém se convenciu de que este número fazia sentido. Ao fazer a média sobre várias experiências realizados na sala de aula, a resposta *estranhamente* aproximava-se do valor esperado, mas isto é assunto para outra crónica...

A ideia de que a razão circunferência/diâmetro não depende do raio do círculo em questão é, como diria Fernando Pessoa, algo que "primeiro estranha-se, depois entranha-se". E isto necessariamente ocorre, pois π é tão presente na Natureza que questioná-lo implica pôr em dúvidas quase todo o conhecimento científico. Em problemas onde mesmo o olho mais bem treinado não vê uma circunferência, encontramos o omnipresente $3,14159\dots$

O francês George Buffon foi, aparentemente, uma das primeiras pessoas a conceber uma experiência de contagem simples capaz de expressar uma aproximação de π . Nesta experiência atiram-se agulhas de tamanho fixo sobre um piso de riscas paralelas, cujo espaçamento é constante e igual ao do comprimento das agulhas. Conta-se a quantidade de agulhas que caem sobre duas riscas distintas, e, ao dividir pela quantidade total de agulhas, encontramos $2/\pi$. Uma grande vantagem sobre o método direto anterior é que este não envolve medições, sempre imprecisas, mas contagens, muito mais fáceis de fazer. Veja a figura 1.

Cem anos antes, no entanto, um outro matemático,

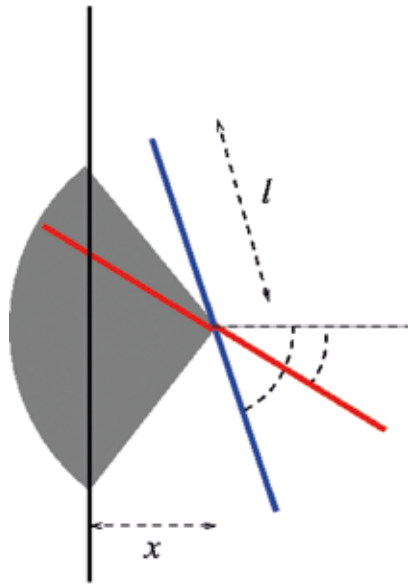


Figura 1. O centro de uma agulha de tamanho $2l$ caiu no solo a uma distância $x \in [0, l]$ da risca mais próxima, num piso com riscas paralelas espaçadas de $2l$. O ângulo da agulha com a direção das listas é dado por $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. A agulha será contabilizada na experiência de Buffon se $\theta \in [-\arccos \frac{x}{l}, \arccos \frac{x}{l}]$, que corresponde à região escura. Portanto, uma agulha que caiu no ponto x tem probabilidade $\frac{2 \arccos \frac{x}{l}}{\pi}$ de ser contabilizada. Considerando todos os valores de x e que $\int_0^1 \arccos x dx = 1$, encontramos o resultado desejado.

Jonh Wallis, criptógrafo real inglês, também se ocupava de formas mais práticas de calcular π , já ciente da dificuldade de medir linhas curvas. Encontrou uma expressão para π que pode ser calculada por aproximações sucessivas:

$$\pi = 2 \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \dots$$

$$\dots \times \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n+2}{2n+1} \times \frac{2n+2}{2n+3} \times \dots$$

A demonstração apresentada por Wallis era baseada nas recém descobertas técnicas de cálculo integral; um leitor moderno pode refazê-la usando sucessivas integrações por partes da função $I(n) = \int_0^\pi \sin^n x dx$. Veja a figura 2.

É esta a fórmula encontrada numa recente investigação, feita pelos físicos americanos Tamar Friedman e C. R. Hagen [1]. Ao estudar o espectro do átomo de hidrogênio, o objeto de estudo central da física atômica, encontraram a curiosa expressão do inglês, aumentando ainda mais a omnipresença do π em todos os ramos do conhecimento. Apesar de haver muitas demonstrações da fórmula de Wallis, esta é a primeira baseada em física quântica e atômica.

A equação básica da mecânica quântica é a equação de Schrödinger, uma equação das derivadas parciais envolvendo o tempo e as variáveis espaciais. O conjunto dos valores próprios da parte espacial da equação é o



Figura 2. Imagem do livro *Arithmetica Infinitorum* por John Wallis (Oxford, 1655). No texto à esquerda, o símbolo \square refere-se a $4/\pi$. Fonte: <http://www.eurekaalert.org/multimedia/pub/102980.php>, digitalizado pela Google.

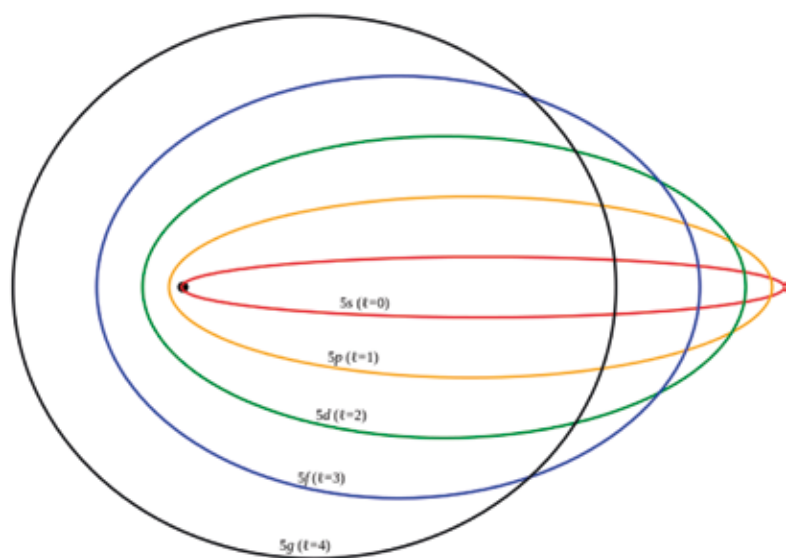


Figura3. Modelo semi-clássico do átomo de Hidrogénio, conhecido como "modelo de Bohr-Sommerfeld". Dado um mesmo valor de energia (indicado pelo número quântico principal, no caso $n = 5$), quanto maior o valor do momento angular, medido por ℓ , mais aproximadamente circular é a órbita. **Fonte:** Wikimedia Commons, <https://en.wikipedia.org/wiki/Bohr%20model>.

que um matemático chama de *espectro*. Um físico prefere pensar nos mesmos números como os diferentes níveis de energia permitidos aos eletrões em órbita do núcleo.

A equação de Schrödinger do átomo de hidrogénio pode ser resolvida de forma exata, utilizando os chamados *polinómios de Laguerre*. No entanto, a ideia que surgiu da união de um físico de partículas com uma física de altas energias foi diferente. Em vez de utilizar a solução exata, optaram por aproximar o polinómio de Laguerre pelo seu termo dominante. Acontece que esta aproximação será tão melhor quanto maior for o momento angular ℓ do átomo de hidrogénio. Isto decorre do facto de que para momentos angulares altos, as órbitas do eletrão ao redor do núcleo são aproximadamente circulares. Veja a figura 3.

Desta forma, a razão entre o valor aproximado obtido nesta nova investigação e o valor exato há muito

conhecido aproxima-se de 1 quando ℓ tende a infinito. Daí se segue que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{(\ell + 1)^2}{\left(\ell + \frac{3}{2}\right)^2} \left[\frac{\Gamma(\ell + 1)}{\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right)} \right]^2 = 1.$$

Na equação acima, foi utilizada a função Γ (diz-se "gama"), uma generalização dos fatoriais para números não naturais. Utilizando as propriedades desta função, encontramos a relação de Wallis. Nada mal para um inglês que presenciou o nascimento da física clássica poder ver o seu nome associado à mecânica quântica!

BIBLIOGRAFIA

[1] Tamar Friedmann e C. R. Hagen. "Quantum mechanical derivation of the Wallis formula for π ". *Journal of Mathematical Physics* 56, 112101 (2015)



QUASE-CRISTAIS E NÚMEROS METÁLICOS

FÁTIMA VINAGRE

ESCOLA SECUNDÁRIA DA AZAMBUJA

mfatimavinagre@gmail.com

Os quase-cristais apresentam simetrias de rotação impossíveis em cristalografia que estão associadas aos números metálicos. Os seus átomos distam uns dos outros de modo diferente, embora permitam gerar padrões regulares não repetitivos. Com vista   apresenta o de algumas aplica es dos números metálicos em estruturas dos quase-cristais, evidenciam-se previamente alguns resultados inerentes aos números metálicos e estabelece-se sinteticamente uma classifica o dos grupos cristalográficos tridimensionais, seguida de uma caracteriza o das estruturas dos quase-cristais.

INTRODU O

A família de números metálicos é formada pelas raízes positivas de equa es quadráticas da forma $x^2 - px - 1 = 0$, onde $p, q \in \mathbb{N}$. Um dos seus elementos mais importantes é o número de ouro, ϕ , mas cont m outros seus parentes de reconhecido valor, como   o caso dos números de prata, bronze, cobre, níquel e platina, entre outros. Podendo ser escritos através de fra es contínuas e estreitamente relacionados com as sucessões generalizadas de Fibonacci, estão na base dos quase-cristais.

Os quase-cristais apresentam a existência de simetrias de rota o de ordem 5, 8, 10 ou 12, que estão associadas aos números metálicos, consideradas, até às últimas três décadas, impossíveis em cristalografia, porque conduzem a distâncias desiguais entre os átomos, apesar de gerarem um padrão regular, não repetitivo, violando o que estava estabelecido nos padrões cristalinos que se repetem até ao infinito iguais a si próprios.

NÚMEROS METÁLICOS

Em 1995, a argentina Vera W. Spinadel (nascida em 1929) definiu os números metálicos como sendo o conjunto dos números que resultam das raízes positivas de equa es da forma $x^2 - px - 1 = 0$, onde $p, q \in \mathbb{N}$.

Como, para todo o $p, q \in \mathbb{N}$, $p^2 + 4q > 0$ a equa o tem sempre duas raízes reais $x = (p \pm \sqrt{p^2 + 4q})/2$. Além disso, como $p, q \in \mathbb{N}$, $p^2 + 4q > p^2$, tem-se que $x = (p - \sqrt{p^2 + 4q})/2$ é a raiz negativa da equa o e $x = (p + \sqrt{p^2 + 4q})/2$ a raiz positiva. Assim, podemos afirmar que para qualquer $p, q \in \mathbb{N}$, $x^2 - px - q = 0$ tem uma única raiz positiva, ou seja, dá origem a um único número metálico $x = (p + \sqrt{p^2 + 4q})/2$. Represente-se esse número metálico por $\sigma_{p,q}$ e o conjunto formado por todos esses números metálicos por M , isto é,

$$M = \left\{ \sigma_{p,q} : \sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, p, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Alguns dos elementos de M têm nomes de metais, entre os quais se encontram o mais famoso de todos eles, o número de ouro, ϕ , que é obtido quando $p = 1$ e $q = 1$, ou seja, $\phi = \sigma_{1,1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, e os outros seus parentes, têm também conhecidos, como   o caso dos números de prata, de bronze, de cobre, de níquel e de platina, sendo estes obtidos quando se concretizam e da seguinte forma, respetivamente:

$$p=2 \text{ e } q=1, p=3 \text{ e } q=1, p=1 \text{ e } q=2, p=1 \text{ e } q=3 \text{ e } p=2 \text{ e } q=2.$$

Os seus valores exatos e aproximados a 8 c.d. podem ser vistos na Tabela 1.

Tabela 1.

p	q	Símbolo	Nome Número	Valor exato	Valor aproximado (com 8 c.d.)
1	1	$\phi = \sigma_{1,1}$	Número de ouro	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	1,61803399
2	1	$\sigma_{Ag} = \sigma_{2,1}$	Número de prata	$1 + \sqrt{2}$	2,41421356
3	1	$\sigma_{Br} = \sigma_{3,1}$	Número de bronze	$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$	3,30277564
1	2	$\sigma_{Cu} = \sigma_{1,2}$	Número de cobre	2	2
1	3	$\sigma_{Ni} = \sigma_{1,3}$	Número de níquel	$\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$	2,30277564
2	2	$\sigma_{Pt} = \sigma_{2,2}$	Número de platina	$1 + \sqrt{3}$	2,73205081

Analisando mais atentamente a tabela anterior, pode observar-se que existem números metálicos que são números naturais. Vejamos de seguida quando tal acontece.

Decorre da definição de número metálico que $\sigma_{p,q}$ é natural, se $p^2 + 4q$ for um quadrado perfeito e $p + \sqrt{p^2 + 4q}$ for um múltiplo de 2. Fixando o valor de p e variando o valor de q na expressão $p + \sqrt{p^2 + 4q}$, determina-se para cada valor fixo de p , o termo geral, q_n , com $n \in \mathbb{N}$ da sequência dos valores de q para os quais $p^2 + 4q$ é um quadrado perfeito e $p + \sqrt{p^2 + 4q}$ um múltiplo de 2. Terá de ser

$$\sigma_{p,q_n} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q_n}}{2} = \frac{p + \sqrt{(p + 2n)^2}}{2},$$

ou seja, $q_n = n(n + p)$. Podemos, então, afirmar que todo o número metálico natural é superior a 1 e pode ser escrito na forma $\sigma_{p,n(n+p)} = p + n$, com $n, p \in \mathbb{N}$.

Note-se que (ver Tabela 2), para cada número metálico natural m existem $m - 1$ números metálicos naturais iguais a m sendo estes $\sigma_{1,m(m-1)}$, $\sigma_{2,m(m-2)}$, $\sigma_{3,m(m-3)}$, $\sigma_{4,m(m-4)}$, ..., $\sigma_{m-1,m}$. Se para todo o número metálico natural m retirarmos os $m - 1$ números metálicos naturais iguais a si próprio, é possível formar um subconjunto de M , com os números metálicos naturais distintos, sendo este o conjunto

$$\left\{ \sigma_{p,n(n+p)} : \sigma_{p,n(n+p)} = p + 1, p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Verifique-se de seguida se existem números metálicos $\sigma_{p,q}$ que sejam racionais não naturais. Note-se que se $p^2 + 4q$ não for um quadrado perfeito, a sua raiz quadrada é um número irracional (deixa-se a prova a cuidado do leitor) e, como tal, $\sigma_{p,q}$ também é. No caso de $p^2 + 4q$ ser um quadrado perfeito, o número metálico só poderia ser racional não natural caso $p + \sqrt{p^2 + 4q_n}$ fosse ímpar. Mas tal situação nunca ocorre, pois, para que isso acontecesse, a paridade de p e $\sqrt{p^2 + 4q}$ teria de ser distinta. De facto,

se p for ímpar, $p^2 + 4q$ também é ímpar, o mesmo acontecendo com a sua raiz quadrada. Pode então concluir-se que todo o número metálico é um número irracional ou um natural superior a 1.

Vejamos agora a relação entre números metálicos e frações contínuas periódicas. É conhecido que todo o número real pode ser representado por uma fração contínua. De facto, considerando $[x]$ como sendo o único inteiro tal que $[x] \leq x < [x] + 1$ e definindo recursivamente, $\alpha_0 = x$, $a_n = [\alpha_n]$ e, se $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$, $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que x pode ser representado do seguinte modo: se, para algum n , $\alpha_n = a_n$, então

$$x = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

caso contrário,

$$x = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Quando para $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_{n+k} = a_n$, a fração contínua diz-se periódica e representa-se por $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \overline{a_n, \dots, a_{n+k-1}}]$. Repare-se que

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} \Leftrightarrow \alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}.$$

Considere-se $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ um número metálico e $\frac{p_n}{q_n}$, com $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, primos entre si, a n -ésima reduzida ou convergente da fração contínua de x , isto é,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n], \quad n \geq 0.$$

Tabela 2.

p	$(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$\{\sigma_{p,q_n} : p, n \in \mathbb{N} \wedge q_n = n(n + p)\}$
1	2, 6, 12, 20, 30, ...	$\{\sigma_{1,2}, \sigma_{1,6}, \sigma_{1,12}, \sigma_{1,20}, \sigma_{1,30}, \dots\} = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$
2	3, 8, 15, 24, ...	$\{\sigma_{2,3}, \sigma_{2,8}, \sigma_{2,15}, \sigma_{2,24}, \dots\} = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$
3	4, 10, 18, ...	$\{\sigma_{3,4}, \sigma_{3,10}, \sigma_{3,18}, \dots\} = \{4, 5, 6, \dots\}$
\vdots	\vdots	\vdots
k	$k + 1, 4 + 2k, 9 + 3k, 16 + 4k, \dots$	$\{\sigma_{k,k+1}, \sigma_{k,4+2k}, \sigma_{k,9+3k}, \sigma_{k,16+4k}, \dots\} = \{k + 1, k + 2, k + 3, k + 4, \dots\}$
\vdots	\vdots	\vdots

Em [5] demonstra-se ainda que x é o limite das convergentes $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}$.

A título de exemplo, vejamos como se representam os números de ouro e de níquel segundo frações contínuas periódicas e, de seguida, vejamos como é que estes se relacionam com as sucessões generalizadas de Fibonacci secundárias (adiante designadas apenas por sucessões generalizadas de Fibonacci).

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}} = \dots = [1; 1, 1, \dots] = [\overline{1}] \\ \sigma_{Ni} &= \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = \frac{1 + \sqrt{13} + 3 - 3}{2} = 2 + \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \\ &= 2 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{13} - 3}} = 2 + \frac{1}{\frac{2(3 + \sqrt{13})}{4}} \\ &= 2 + \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} = 2 + \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{13} + 3 - 3}{2}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{13} - 3}{2}} \\ &= 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{13} + 3}}} = \dots = [2; \overline{3}] \end{aligned}$$

É sobejamente conhecido que o número de ouro está intimamente relacionado com a sucessão de Fibonacci (secundária), mas Vera Spinadel provou (em [1], [6] e [7]) que todos os números metálicos são limites de sucessões formadas pelos quocientes de termos consecutivos de sucessões generalizadas de Fibonacci¹, isto é, são limites de sucessões tais que cada termo é igual a uma combinação linear de escalares naturais dos dois últimos termos que o antecedem, sendo os dois primeiros iguais a a e b , respetivamente, ou seja, sucessões $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfazem $G_1 = a$, $G_2 = b$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $G_{n+2} = pG_{n+1} + qG_n$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Mais concretamente, demonstrou que para todo

$$n \in \mathbb{N}, \sigma_{p,q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} \text{ com } p, q \in \mathbb{N}.$$

Quando tomamos $a = b = p = q = 1$, a sucessão designa-se, usualmente, por sucessão de Fibonacci. Se $a = b = q = 1$ e $p = 2$ designamo-la por sucessão de Pell.

Repare-se que todos os termos de uma sucessão generalizada de Fibonacci satisfazem para $p, q \in \mathbb{N}$,

$$G_{n+2} = pG_{n+1} + qG_n \Leftrightarrow \frac{G_{n+2}}{G_{n+1}} = p + \frac{q}{\frac{G_{n+1}}{G_n}}.$$

Pelo que, se considerarmos uma nova sucessão formada pelos quocientes de termos consecutivos da sucessão de Fibonacci, $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots$, esta converge para o número de ouro, uma vez que é formada por quocientes de números primos entre si que satisfazem,

$$\begin{aligned} \frac{G_{n+2}}{G_{n+1}} &= \frac{G_{n+1} + G_n}{G_{n+1}} = 1 + \frac{G_n}{G_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{G_{n+1}}{G_n}} = 1 + \frac{1}{\frac{G_n + G_{n-1}}{G_n}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{G_{n-1}}{G_n}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{G_n}{G_{n-1}}}} = \dots = [1; 1, \dots] \end{aligned}$$

e, como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_{n+2}}{G_{n+1}}$ existe e é igual a um número real x , aplicando limites em ambos os membros da equação, vem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_{n+2}}{G_{n+1}} = [\overline{1}] \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_{n+2}}{G_{n+1}} = \phi.$$

De modo semelhante, se considerarmos a sucessão dos quocientes dos termos consecutivos da sucessão de Pell, esta converge para o número de prata.

A convergência para outros números metálicos acontece quando consideramos sucessões de quocientes dos termos consecutivos de outras sucessões generalizadas de Fibonacci.

Curiosamente, as sucessões generalizadas de Fibonacci que estão baseadas nos elementos desta família satisfazem propriedades aditivas e são progressões geométricas.

Efetivamente, se construirmos progressões geométricas de razão igual a um número metálico $\sigma_{p,q}$ da forma

$$\dots, \frac{1}{\sigma_{p,q}^2}, \frac{1}{\sigma_{p,q}}, 1, \sigma_{p,q}, \sigma_{p,q}^2, \sigma_{p,q}^3, \dots,$$

estas progressões também são sucessões generalizadas de Fibonacci que satisfazem para todo o $n \in \mathbb{N}$, $G_{n+2} = pG_{n+1} + qG_n$.

Considere-se, por exemplo, a progressão geométrica $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$1, \sigma_{p,q}, \sigma_{p,q}^2, \sigma_{p,q}^3, \dots$$

¹Quando cada termo é uma combinação linear dos três últimos termos que o antecedem, designa-se sucessão generalizada de Fibonacci ternária.

Verifica-se, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} pG_{n+1} + qG_n &= p\sigma_{p,q}^n + q\sigma_{p,q}^{n-1} = p\sigma_{p,q}^n + q\frac{\sigma_{p,q}^n}{\sigma_{p,q}} \\ &= \sigma_{p,q}^n \left(p + \frac{q}{\sigma_{p,q}} \right) = \sigma_{p,q}^{n-1} (p\sigma_{p,q} + q) \\ &= \sigma_{p,q}^{n-1} \sigma_{p,q}^2 = \sigma_{p,q}^{n+1} = G_{n+2}. \end{aligned}$$

Esta característica faz com que os números metálicos estejam diretamente relacionados com vários sistemas de proporções utilizados em desenho e construções que vão desde a civilização romana até à atualidade ([3], [4] e [7]).

QUASE-CRISTAIS

A existência de quase-cristais apenas foi aceite convincentemente pela comunidade científica em 2011, com a atribuição do Prémio Nobel da Química ao israelita Daniel Shechtman, do Instituto Technion, em Haifa, Israel, cuja descoberta foi de tal modo importante que implicou a reformulação do conceito de cristal.

Os quase-cristais apresentam a existência de simetrias de rotação de ordem 5, 8, 10 ou 12, consideradas, até então, impossíveis em cristalografia, porque conduziriam a distâncias desiguais entre os átomos, gerando um padrão regular, mas não repetitivo, violando o que estava estabelecido, que padrões cristalinos se repetem até ao infinito iguais a si próprios.

Tais simetrias encontram-se associadas aos números metálicos ([1] e [5]).

A designação de quase-cristais deve-se ao facto de ser um sólido com um espectro de difração essencialmente discreto, como os cristais, mas com uma estrutura aperiódica.

De todas as substâncias naturais no estado sólido, a matéria cristalina é a mais comum. Esta substância reflete a existência de uma estrutura reticular, onde um dado ponto ou nó tem os seus homólogos distribuídos por meio de translações formando os vértices de um poliedro que se repete infinitamente nas três direções do espaço euclidiano, de modo a preencher o espaço cristalino, constituindo uma rede tridimensional ([8]).

Em meados do século XIX, A. Bravais estudou as diferentes maneiras de se arranjar pontos geométricos de forma periódica no espaço tridimensional, dando origem ao que hoje se conhece como redes de Bravais. Estas consistem num conjunto infinito de pontos com arranjo e orientação que parecem exatamente os mesmos quando vistos de qualquer ponto da rede, ou seja, todos os pontos cujas posições R têm a forma $R = n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3$,

onde v_1, v_2 e v_3 são vetores² não coplanares e n_1, n_2 e n_3 são inteiros.

Como consequência desta definição, diz-se que cada vetor da rede, R , está associado a uma simetria de translação, \mathcal{T}_R que transforma a rede nela mesma.

Contudo, as redes de Bravais podem ter outras simetrias, mais concretamente, simetrias pontuais, isto é, simetrias que deixam, pelo menos, um ponto da rede invariante.

Em [3], prova-se que toda e qualquer simetria que transforma a rede nela mesma e deixa fixo apenas um ponto do espaço euclidiano apenas pode ser resultante de rotações³ com eixos que passam por esse ponto ou reflexões rotatórias⁴ em que o eixo de rotação e o plano de reflexão passam ambos pelo ponto.

Os cristais, do ponto de vista matemático, encontram-se classificados em classes de cristais ou holoédricas⁵ que assentam em redes de Bravais. Estas classes são grupos que se caracterizam pelo facto de existir em cada um deles, pelo menos, um cristal cujo holoédrio⁶ está nesse grupo, sendo conhecidas por classes tricíclica, monocíclica, ortorrômbica, tetragonal, hexagonal, trigonal (ou romboédrica) e cúbica, devendo-se os seus nomes às designações usuais dos cristais.

Em termos físicos, os cristais são conjuntos de átomos que formam sólidos ordenados, nos quais as unidades de repetição estão arranjadas de forma periódica numa rede de Bravais subjacente. Quanto à estrutura cristalina, esta é definida por uma rede de Bravais e um conjunto de posições de um ou mais tipos de átomos, pelo que nos permite ter mais informação do que apenas aquela que a rede de Bravais nos dá, uma vez que acresce a informação sobre as posições ocupadas por cada átomo.

Cada uma das sete classes de cristais é formada pelos cristais mais simples⁷ que se designam por cristais primitivos, os quais têm como relações para os comprimentos dos seus geradores e para as amplitudes dos ângulos entre os seus geradores aqueles que se encontram na Tabela 3 ([3]).

Existem ainda mais sete cristais não primitivos que têm por base três relações baseadas nos geradores dos cristais primitivos, isto é, que têm por base três relações entre os geradores dos reticulados primitivos.

Assim, considerando e $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, e \mathcal{T}_3 os geradores de um cristal e que cada célula primitiva⁸ é uma célula unitária⁹ obtêm-se mais sete novos cristais não primitivos, designados de:

(1) Corpo-centrado se, nas classes ortorrômbica, tetrago-

Tabela 3.

Classes de cristais	Holoédro	Relações para os comprimentos de geradores	Relações para os ângulos entre geradores
tricíclica	$\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_1 I_x$	a, b, c distintos	α, β, γ distintos
monocíclica	$\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_2 I_x$	a, b, c distintos	$\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$
ortorrômbica	$\mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_2 I_x$	a, b, c distintos	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
tetragonal	$\mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_4 I_x$	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
hexagonal	$\mathcal{D}_6 \cup \mathcal{D}_6 I_x$	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$
trigonal	$\mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_3 I_x$	$a = b = c$	$90^\circ \neq \alpha = \beta = \gamma < 120^\circ$
cúbica	$\mathcal{O} \cup \mathcal{O} I_x$	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

nal e cúbica, o cristal é gerado pelos vetores associados às translações: \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 e $\frac{1}{2}(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_3)$.

- (2) Face-centrado se, nas classes cúbica e ortorrômbica, o cristal é gerado pelos vetores associados às translações: $\frac{1}{2}(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_3)$, $\frac{1}{2}(\mathcal{T}_3\mathcal{T}_1)$ e $\frac{1}{2}(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$.
- (3) Base-centrado se, nas classes monocíclica e ortorrômbica, o cristal é gerado pelos vetores associados às translações: \mathcal{T}_2 , \mathcal{T}_3 e $\frac{1}{2}(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$.

Tais cristais, que se ilustram na figura 1, na página seguinte, são conhecidos por reticulados de Bravais.

A partir das sete classes de cristais, estabelece-se uma classificação dos reticulados tridimensionais de forma a determinar-se o maior subgrupo de isometrias de \mathbb{R}^3 , munido com a operação de composição que deixa invariante um reticulado que tem um ponto fixo.

Tal classificação conduz-nos à existência de 32 grupos, os quais são designados por grupos cristalográficos pontuais, que nos permitem, então, classificar os grupos de reticulados tridimensionais.

Os grupos cristalográficos pontuais são gerados por rotações de ordem 2, 3, 4 e 6 e simetrias de reflexão rotatória em que a parte rotacional tem ordem 1, 2, 3, 4 ou 6 (encontra-se demonstrado em [3]).

Quando se entra em linha de conta com as translações, estes grupos cristalográficos pontuais dão origem a 230 grupos cristalográficos tridimensionais (ou 219 grupos caso se considere apenas o grupo de isometrias que preservam a orientação), nos quais se enquadra qualquer cristal.

Na realidade, nem todos os sólidos apresentam a periodicidade patente nas redes de Bravais. Uma consequência desta periodicidade é a propriedade de ordem de lon-

go alcance, isto é, conhecendo-se a posição de um átomo da rede, podemos determinar com exatidão a posição de um outro átomo qualquer, mesmo que este esteja bastante distante do primeiro. Alguns sólidos não possuem esta propriedade e, portanto, são designados de desordenados. Há ainda materiais que exibem um certo tipo de ordem de longo alcance, mas não são periódicos, os quais designamos de quase-cristais.

Acabámos de ver que nos cristais quer as rotações quer as partes rotacionais das reflexões rotatórias têm ordem 1, 2, 3, 4 ou 6, pelo que os ângulos de rotação têm amplitude

$$\left(\frac{360^\circ}{n}\right), \text{ com } n = 1, 2, 3, 4 \text{ ou } 6.$$

Simetrias de rotação segundo ângulos, como por exemplo, de 72° são, então, incompatíveis com a periodicidade cristalina, uma vez que não é possível preencher o espaço euclidiano com os sólidos platónicos dodecaé-

² Designados de vetores primitivos da rede.

³ Isometrias que preservam a orientação, isto é, isometrias diretas.

⁴ Uma reflexão rotatória é uma isometria indireta (isto é, que não preserva a orientação) que consiste no produto de uma rotação em torno de uma reta (eixo de rotação) por uma reflexão num plano perpendicular a essa reta. Um caso particular de uma reflexão rotatória é uma inversão num ponto.

⁵ Designadas em cristalografia por sistemas cristalinos.

⁶ Define-se holoédro de um reticulado como um subconjunto de isometrias do espaço euclidiano que torna invariante o reticulado.

⁷ Correspondem aos sete reticulados primitivos.

⁸ Uma célula primitiva de grupo reticular tridimensional é um poliedro com grupo de isometrias no grupo holoedral.

⁹ As arestas do poliedro têm comprimento 1.

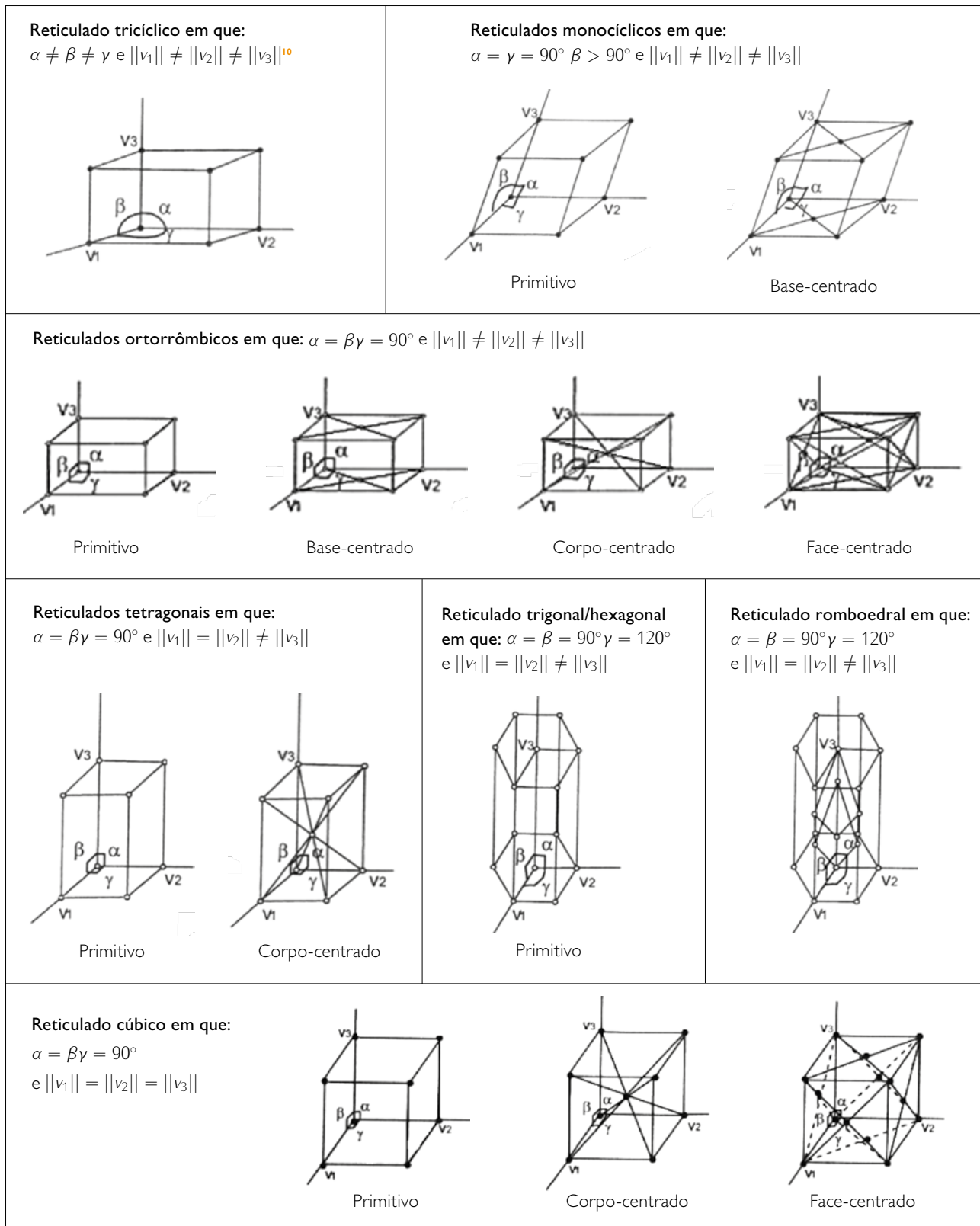


Figura 1¹¹. Os 14 reticulados de Bravais.

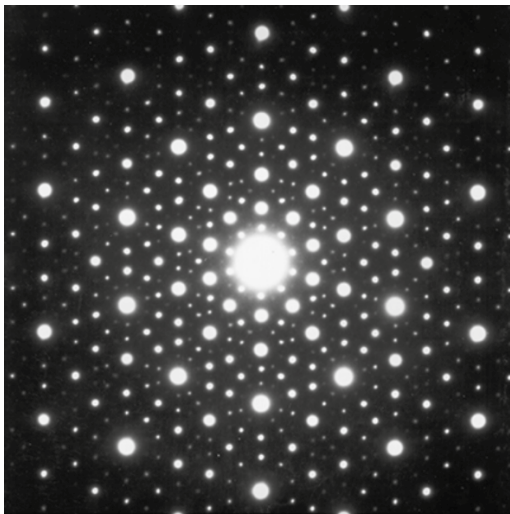


Figura 2.¹² Padrão¹³ de difração do elétron que mostra a simetria de ordem 5 obtida a partir do sólido quase-cristal Al-Cu-Fe.

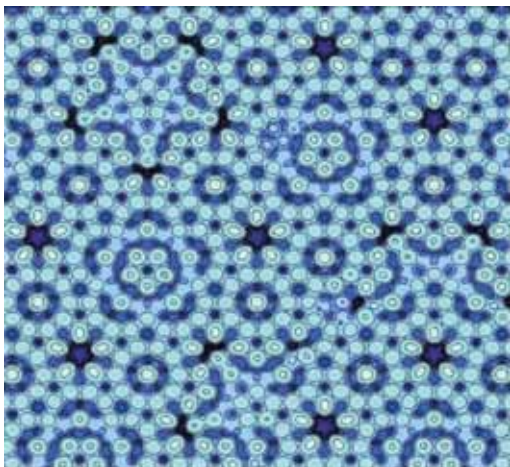


Figura 3.¹⁴ Modelo atômico de um quase-cristal Ag-Al.

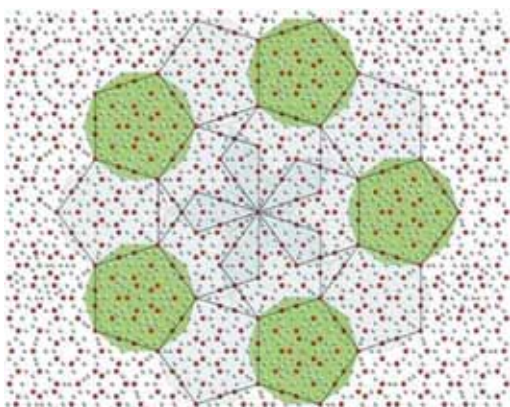


Figura 4.¹⁵ Secção do quase-cristal formado pela liga Al-Ni-Co.

dricos ou icosaédricos, pois estes apresentam simetrias de rotação de 72° , ou seja, simetrias de rotação de ordem 5.

A descoberta de Schechtman, Blech, Gratias e Cahn (em [10] e [11]), em 1984, surpreendeu toda a comunidade quando demonstraram, por difração de elétrons, que certas ligas de alumínio (Al) e manganês (Mn), quando rapidamente resfriadas a partir do estado líquido, formavam sólidos que combinavam simetrias de rotação de ordem 5 no espectro de difração com a ordem orientacional de longo alcance, significando que as diversas unidades que compõem o sólido estavam todas orientadas da mesma forma.

Schechtman e os seus colaboradores tinham acabado de demonstrar a existência de simetrias de ordem 5 em materiais que aparentemente tinham algumas propriedades do sistema cristalino, como a ordem orientacional de longo alcance, mas que não tinham outras, tais como a periodicidade.

Observe-se a figura 2 que exemplifica o tipo de padrão de difração encontrado por Schechtman e os seus colaboradores.

Seria de esperar que pudesse estar envolvido o número de ouro, já que este está intimamente ligado à geometria pentagonal e, de facto, os esquemas de difração que foram efetuados por Schechtman continham representações de planos que formavam ângulos com a horizontal igual ao número de ouro, ϕ .

Desde então, têm vindo a ser descobertos outros materiais, com base em outros números metálicos, que contêm outras simetrias proibidas em cristalografia, como são exemplos os números de prata σ_{Ag} e de Sutil, ϕ^3 , que estão relacionados com as simetrias octogonais, de ordem 8, e com as simetrias dodecagonais, de ordem 12, respetivamente.

Os quase-cristais são substâncias que se configuram com esquemas de difração que evidenciam simetrias de rotação de ordem 5, 8, 10 ou 12.

¹⁰ $\|v_i\|$ representa o comprimento do vetor v_i com $i = 1, 2$ e 3.

¹¹ Referenciada em [3]

¹² <http://www.scienceinschool.org/pt/2012/issue24/crystals> (Consultado em 20/05/2016)

¹³ Este padrão convenceu os cientistas da existência de quase-cristais.

¹⁴ <https://pt.wikipedia.org/wiki/Quase-cristal> (Consultado em 20/05/2016)

¹⁵ <http://quimicaeshow2.blogspot.pt/2011/10/quasicristais-premio-nobel-de-quimica.html> (Consultado em 20/5/2016)

NÚMEROS METÁLICOS NOS QUASE-CRISTAIS

Algumas versões unidimensionais dos quase-cristais, embora não apresentem simetrias de rotação, ilustram a possibilidade de um sistema ter um certo tipo de ordem, apesar de ser aperiódico.

Vários protótipos unidimensionais de quase-cristais são modelados através de sucessões definidas por recorrência, em que cada um dos seus termos são cadeias formadas pelos símbolos¹⁶ ou átomos A e B e cuja justaposição destes segue a seguinte recorrência:

$$S_1 = B, S_2 = A \text{ e para todo natural } n > 2, S_{n+1} = S_n^p S_{n-1}^q, \text{ com } p, q \in \mathbb{N} \text{ e}$$

em que S_n^p representa p repetições adjacentes a S_n e S_{n-1}^q representa q repetições adjacentes a S_{n-1} .

Observe-se que a sucessão $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é periódica, uma vez que não existe uma ordem k , para todo $n \geq 1$, que satisfaça $S_{n+k} = S_n$. No entanto, existe uma certa ordem na forma como estão justapostos os A 's e os B 's, uma vez que decorrem da aplicação da expressão do termo geral da sucessão.

Pensando no comprimento de cada cadeia S_i , com $i \in \mathbb{N}$, que consiste no número natural que designa a quantidade de símbolos que a compõem e representando-o por $|S_i|$, constrói-se uma nova sucessão $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de comprimentos das cadeias S_i da seguinte forma:

$$F_1 = |S_1| = 1, F_2 = |S_2| = 1 \text{ e para todo natural } n > 2, F_{n+1} = |S_{n+1}| = |S_n^p S_{n-1}^q|,$$

com p e q naturais e em que S_n^p representa p repetições adjacentes a S_n e S_{n-1}^q representa q repetições adjacentes a S_{n-1} .

Repare-se que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão generalizada de Fibonacci, em que os dois primeiros termos são 1 e para todo $n > 2$ satisfaz

$$F_{n+1} = |S_n^p S_{n-1}^q| = |S_n^p| + |S_{n-1}^q| \\ = p|S_n| + q|S_{n-1}| = pF_n + qF_{n-1}.$$

Portanto, tendo em conta que todos os números metálicos são limites de sucessões formadas pelos quocientes de termos consecutivos de sucessões generalizadas de Fibonacci (conforme foi visto na secção 2) estão reunidas as condições para podermos afirmar que a sucessão dos quocientes de termos consecutivos de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para o número metálico $\sigma_{p,q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$ ou seja, que os quocientes de comprimentos consecutivos das cadeias geradas por dois átomos num destes protótipos de quase-cristal unidimensional tendem para o número metálico $\sigma_{p,q}$.

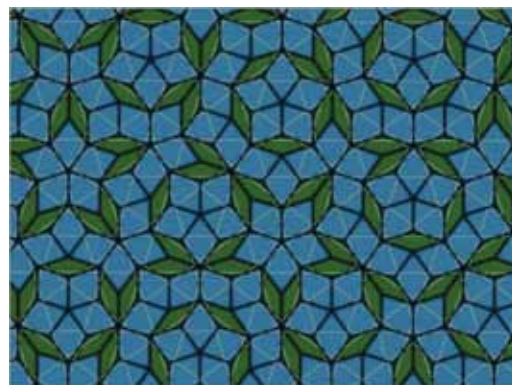


Figura 5.¹⁸ A telha de Penrose.

A nível bidimensional, existem vários exemplos de quase-cristais.

A existência destes na arquitetura islâmica é frequente e alguns deles remontam ao séc. XV, mas somente a partir de 1974, com o matemático e físico inglês Roger Penrose é que se começou a ter consciência da sua existência através do estudo por ele efetuado aos arranjos geométricos de quase-cristais e à forma de pavimentar o plano com estruturas quase-periódicas, utilizando, por exemplo, a telha¹⁷ representada na figura 5 para ilustrar a sua teoria.

A telha de Penrose permite, a partir de um conjunto limitado de figuras geométricas de base, designadas de ladrilhos¹⁹, gerar padrões não repetitivos que permitem cobrir com pentágonos, decágonos, etc., e sem distorção, superfícies tão extensas quanto se deseje²⁰. A telha de Penrose apresenta um padrão que além de aparecer em algumas decorações de edifícios islâmicos, permite estabelecer uma relação com as telhas de *girih*, nome em árabe dado aos padrões dos ladrilhos formados por figuras geométricas que misturam pentágonos, decágonos e outras e que cobrem os muros das mesquitas e dos palácios medievais do mundo islâmico.

Peter Lu e Paul Steinhardt, em [9], ilustram outros padrões encontrados na arquitetura islâmica e exemplificam como o processo de Penrose pode ser utilizado na construção de outro ladrilho, ver figura 6, ou até mesmo, como poderia, por exemplo, ter sido usado nas telhas *girih* do santuário Darb-i Imam em Isfahan, no Irão, cuja construção data do séc. XV, ver figura 7.

Vejam de seguida o processo de construção de uma telha de Penrose e a sua relação com as telhas *girih*.

Na figura 6, os polígonos A e B (que se encontram à esquerda nas figuras 6A e 6B) formam os ladrilhos iniciais de Penrose. Estes são decorados com linhas vermelhas

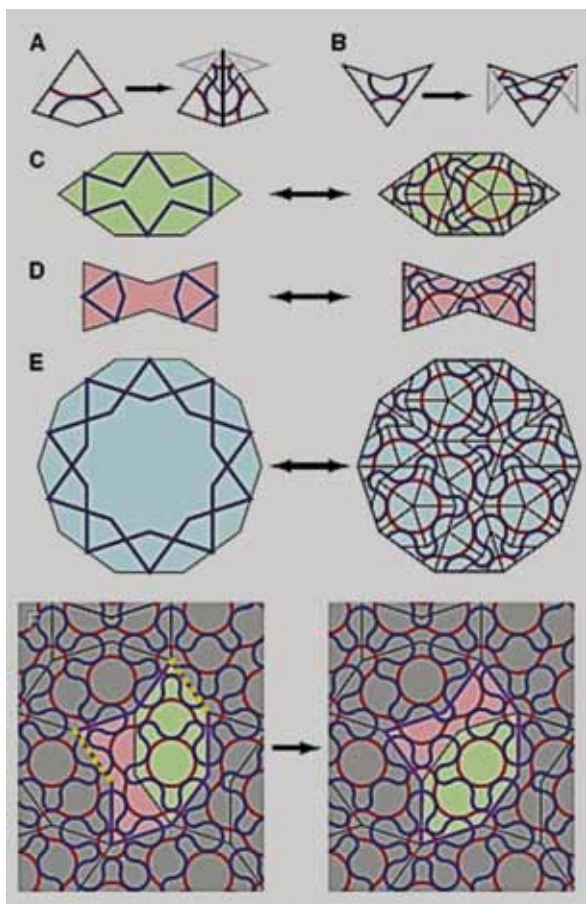


Figura 6. ²¹ Processo de construção de uma telha de Penrose

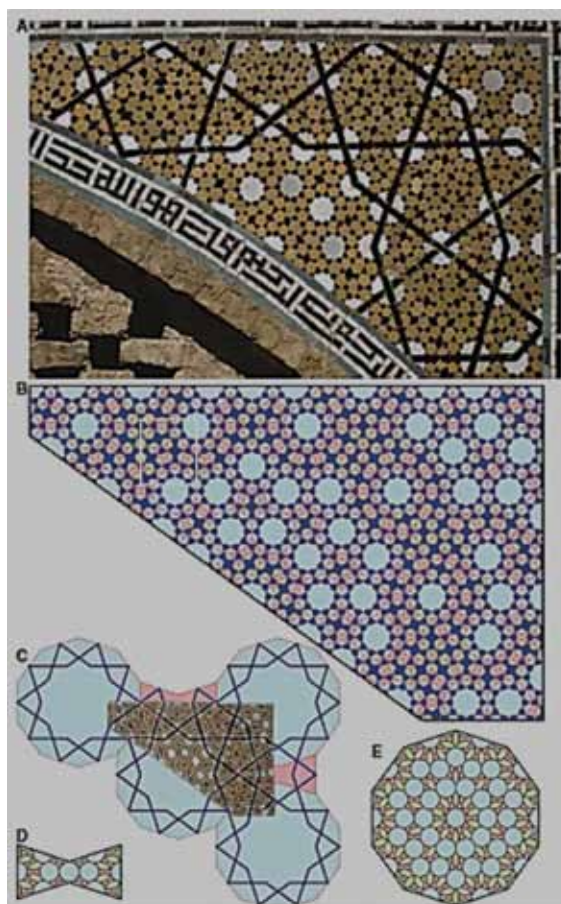


Figura 7. ²¹ Relação entre as telhas girih e as de Penrose.

e azuis, de modo a que quando se procede à união dos ladrilhos pelas suas arestas, estas linhas continuem sem interrupções, formando uma telha de Penrose, isto é, dispõem-se de maneira a existirem simetrias pentagonais e em que os ladrilhos A e B se repetem com frequências cuja razão entre elas é o número de ouro.

O processo de construção usado foi o seguinte:

Dado um conjunto finito de telhas, cada telha pode ser subdividida de acordo com as “regras de inflação” (isto é, através da sucessão $[S_n]_{n \in \mathbb{N}}$ definida anteriormente), em ladrilhos A e B de menores dimensões (indicados à direita das setas nas figuras 6A e 6B), que se juntam para formar uma telha com mais ladrilhos.

Com vista a estabelecer uma relação entre as telhas de girih e as de Penrose, nomeadamente, de se poder pavimentar as telhas de girih à custa das telhas de Penrose, constroem-se as telhas ilustradas nas figuras 6C, 6D e 6E, que formam telhas com os ladrilhos iniciais de Penrose.

Por fim, confrontando as figuras 6F e 7, observa-se que

¹⁶ Representações gráficas, indivisíveis, utilizadas na construção de cadeias.

¹⁷ Define-se como telha o conjunto de ladrilhos unidos entre si que formam a cobertura da superfície.

¹⁸ <http://coachcaldeira.blogspot.pt/2011/11/0/uma-analogia-superficial.html> (Consultado em 20/05/2016)

¹⁹ Um ladrilho consiste numa das formas possíveis de formar uma telha numa pavimentação.

²⁰ Se S é o conjunto de telhas numa pavimentação, um conjunto R de formas é designado por um conjunto de ladrilhos se nenhuma de duas formas que pertencem a R são congruentes entre si e toda a telha em S é congruente para uma das formas em R . É possível escolher muitos conjuntos distintos de ladrilhos para uma telha, pois trasladando ou rodando qualquer um dos ladrilhos, produz-se um outro conjunto válido de ladrilhos. Contudo, todo o conjunto de ladrilhos tem a mesma cardinalidade, pelo que o número de ladrilhos está bem definido.

²¹ Referenciada em [9].

é possível pavimentar a região da telha de *girih*, do santuário de Darb-i Imam, que se encontra delimitada pelo retângulo (a preto) na figura 7, com os ladrilhos perfeitos de Penrose.

Mais, esta subdivisão de autossimilaridade de ladrilhos grandes em pequenos ladrilhos pode ser expressa em termos de uma matriz de transformação em que os valores próprios positivos são os números metálicos. Basta termos em conta que a família dos números metálicos pode ser definida como o conjunto de valores próprios positivos de uma equação matricial

$$\begin{bmatrix} G_{n+2} \\ G_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{bmatrix},$$

uma vez que se considerarmos a transformação linear $Y = AX$, em que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} G_{n+2} \\ G_{n+1} \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{bmatrix},$$

e $X \neq 0$, um vetor é um vetor próprio da matriz A , se $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$ e os valores próprios da matriz A são as raízes do seu polinómio característico, ou seja, os valores próprios da matriz de transformação A são os números metálicos $\sigma_{p,q}$ e os seus conjugados $\overline{\sigma_{p,q}}$ porque

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} p - \lambda & q \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - p\lambda - q = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \vee \lambda = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \sigma_{p,q} \vee \lambda = \overline{\sigma_{p,q}}. \end{aligned}$$

Observe-se que para quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$, $\sigma_{p,q} > 0$ e $\overline{\sigma_{p,q}} \leq 0$.

Quanto aos vetores próprios de A , estes são

$$\begin{bmatrix} \sigma_{p,q} G_{n+1} \\ \sigma_{p,q} G_n \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \overline{\sigma_{p,q}} G_{n+1} \\ \overline{\sigma_{p,q}} G_n \end{bmatrix}$$

e como resultam de dois valores próprios distintos, eles são linearmente independentes e, portanto, formam uma base no espaço vetorial bidimensional.

Pelo processo de construção exposto, fica claro que a metodologia utilizada por Penrose permite pavimentar o plano, usando ladrilhos em que os seus motivos são construídos através de regras próprias e por subdivisões autossimilantes.

Mas as telhas de Penrose permitem ainda inferir que numa estrutura quase-periódica é possível preencher o espaço, em casos onde o eixo de simetria tenha multiplicidade 5 (ou 7), usando para tal estruturas icosaédricas.

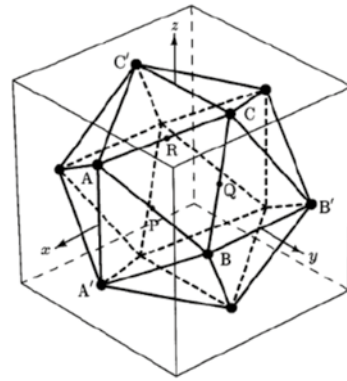


Figura 8: Ilustração de um quase-cristal com estrutura icosaédrica. Contém 12 vértices, 20 faces e 30 arestas. Os eixos de multiplicidade 5 passam pelos vértices, os eixos de multiplicidade 3 passam nos centros das faces e os eixos de multiplicidade 2 passam pelos pontos médios das arestas.

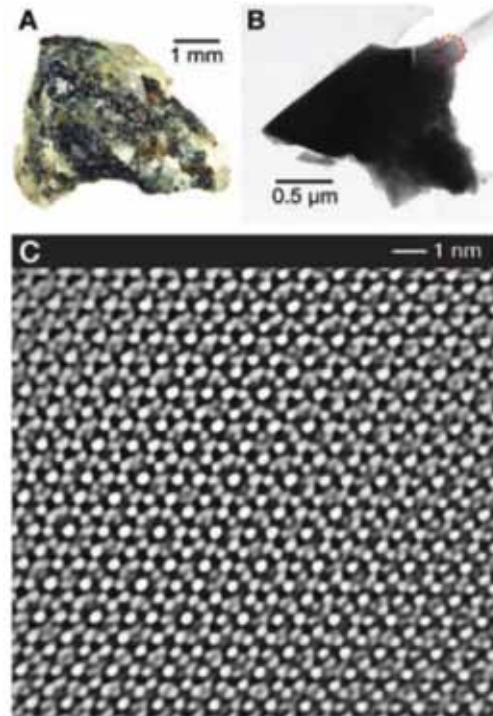


Figura 9:²² (A) Amostra original contendo Khatyrkite. A parte escura contém principalmente Khatyrkite (CuAl_2) e cupalites (CuAl) e também estruturas granulares como a mostrada na parte (B) com composição $\text{Al}_{63}\text{Cu}_{24}\text{Fe}_{13}$. Os padrões de difração foram obtidos da região destacada pelo círculo vermelho. (C) Imagem do padrão no espaço real mostrando a ordem quase-periódica com simetrias de ordem 5 obtida por Microscopia Eletrónica de transmissão de alta resolução (HRTEM).

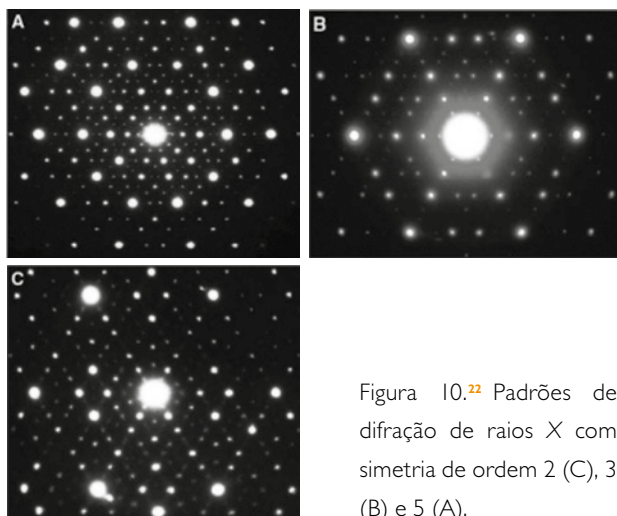


Figura 10.²² Padrões de difração de raios X com simetria de ordem 2 (C), 3 (B) e 5 (A).

Shechtman e os seus colaboradores foram os primeiros a estudar um quase-cristal tridimensional. Eles verificaram que quando se inclinava o sólido em ângulos apropriados, este apresentava simetria icosaédrica (ver figura 8).

No entanto, tais simetrias não foram fáceis de encontrar em sólidos existentes na natureza. Só em 2009 é que foram encontrados pela primeira vez, por Luca Bindi e seus colaboradores ([12]), quase-cristais tridimensionais na natureza, os minerais de Khatyrkite, provenientes das montanhas de Koryak, no nordeste da península Kamchatka, na Rússia, e que se encontravam para estudo no Museo di Storia Naturale da Università degli Studi di Firenze, datando do período triássico (200 milhões de anos atrás).

Após um estudo exaustivo, descobriram que os minerais de Khatyrkite apresentam simetrias rotacionais de ordem 2, 3 e 5, conforme pode observar-se nas figuras 9 e 10, e portanto, são quase-cristais.

Tendo em conta as simetrias de ordem 5 e tudo o que já foi visto neste artigo, os números metálicos estão aqui, novamente, subjacentes a esta estrutura.

REFERÊNCIAS

- [1] Vera W. de Spinadel, *From the Golden Mean to Chaos*, Nueva Librería, 1998.
- [2] J. Kappraff, *Musical proportions at the basis of systems of architectural proportion both ancient and modern*, NEXUS - Architecture and Mathematics. Ed.: Kim Williams, 1996.
- [3] F. Vinagre, *Grupos Cristalográficos Tridimensionais*, Universidade de Aveiro, 2004.

[4] Vera W. de Spinadel, *The Metallic Means and design*. In *NEXUS II- Architecture and Mathematics*. Ed.: Kim Williams, 1998.

[5] C. G. Moreira, *Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas*, IMPA, 1.º Colóquio da Região Sudeste, 2011.

[6] Vera W. de Spinadel, *La familia de números metálicos*. Cuadernos del CIMBAGE n.º 6, 2003.

[7] Vera W. de Spinadel, *Number Theory and Art*, ISAMA, BRIDGES, 2003.

[8] A.M. Carvalho, *Cristalografia e Minerologia*. Universidade Aberta. Lisboa, 1997.

[9] Peter J. Lu and Paul J. Steinhardt, *Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture*, *Science* 315, 1106, 2007.

[10] L. Levin and P. J. Steinhardt, *Quasicrystals: A New Class of Ordered Structures*, *Phys. Rev. Lett.* 53, 1984.

[11] D. Schechtman, I. Blech, D. Gratias and J. W. Cahn, *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and no Translational Symmetry*, *Phys. Rev. Lett.* 53, 1984.

[12] L. Bindi, P. J. Steinhardt, Nan Yao e P.J. Lu, *Natural Quasicrystals*, *Science* 324, 1306, 2009.

SOBRE A AUTORA

Fátima Vinagre é professora de Matemática na Escola Secundária da Azambuja, licenciada em Matemática - Ramo Educacional, pela FCT-UNL, e mestre em Matemática - Grupos Cristalográficos Tridimensionais, pela Universidade de Aveiro. Exerceu funções de professora auxiliar de Álgebra Linear e Geometria Analítica e Análise Matemática I na FCT-UNL, foi responsável pela coordenação de Cursos de Especialização Tecnológica, presidente de um Conselho Técnico-Pedagógico, orientadora de estágios - profissionalização em serviço, avaliadora de pessoal docente e não docente, subdiretora e vice-presidente da Escola Secundária de Montejunco, entre outras funções.

²² Referenciada em [L. Bindi, P.J. Steinhardt, Nan Yao e P.J. Lu, *Natural Quasicrystals*, *Science* 324, 1306, 2009].



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

O ESPAÇO-TEMPO

Quem criou o conceito de espaço-tempo? Ao contrário do que normalmente se julga, não foi Einstein.

INTRODUÇÃO

Há 100 anos, em 1916, Einstein publicou o seu artigo de síntese relativo à Relatividade Geral, *Bases de uma Teoria da Relatividade Generalizada*, alguns meses após ter chegado às respetivas equações de campo.



Figura 1: Albert Einstein (c.1905).

Quem fala em Relatividade fala em espaço-tempo e quem já esteve exposto à Teoria da Relatividade já ouviu dizer que, no âmbito dessa teoria, não se podem separar o espaço e o tempo e que cada evento deve ser descrito recorrendo a quatro coordenadas: três coordenadas espaciais e uma temporal. Sendo assim, é natural que se pense que o conceito de espaço-tempo se deve a Einstein.

É mesmo uma ideia que se encontra muito espalhada. Por exemplo, em <http://www.space.com/17661-theory-general-relativity.html> é afirmado que Einstein «descobriu que o espaço e o tempo estão entrelaçados numa única entidade chamada espaço-tempo». Em <http://mundoes-tranho.abril.com.br/materia/o-que-e-a-teoria-da-relatividade> pode ler-se que “Em 1905, o genial físico alemão Albert Einstein afirmou que tempo e espaço são relativos e estão profundamente entrelaçados”. Existe mesmo um livro (veja-se [1]) sobre Relatividade que tem por título *Einstein's Space Time*.

I. HERMANN MINKOWSKI



Figura 2: Hermann Minkowski.

No entanto, o criador da ideia de que o espaço e o tempo não devem ser vistos separadamente mas, pelo contrário, são duas componentes inseparáveis de uma única entidade chamada espaço-tempo não foi Einstein, mas sim Hermann Minkowski (1864–1909). A ênfase que ele colocou na importância desta fusão é visível nas palavras que proferiu, em 1908, no início de uma palestra feita na 80.^a Assembleia Alemã de Cientistas e Médicos:

“ Cavalheiros! Os conceitos de espaço e tempo que gostaria de desenvolver perante vós erguem-se do solo da Física experimental. Aí reside a sua força. As suas tendências são radicais. Doravante, o espaço só por si e o tempo só por si irão mergulhar totalmente na sombra e somente uma espécie de união entre os dois continuará a ser real. ”

Vejamos quem foi Hermann Minkowski e que relação há entre ele e Einstein; para mais detalhes, veja -se [2].

Tanto Minkowski como Einstein eram judeus alemães e filhos de homens de negócios, embora Minkowski tenha nascido em Kaunas (na altura, chamava-se Alexotas e fazia parte de Império Russo), mas no seio de uma família alemã. Foi colega de Hilbert enquanto se licenciava em Matemática na Universidade de Königsberg (a atual Kaliningrado, que era então uma cidade alemã) e foi professor de Matemática no Instituto Politécnico de Zurique de 1896 a 1902, tendo tido aí Einstein como aluno em nove cadeiras.

E que impressão é que Einstein provocou em Minkowski? O mínimo que se pode dizer é que não foi boa. Einstein gostava das aulas de Minkowski, mas não as frequentava, em grande parte por preferir passar o seu tempo a fazer experiências de Física e também por ter a possibilidade de estudar a matéria a partir dos excelentes apontamentos do seu colega e amigo Marcel Grossmann. Naturalmente, isto não era o tipo de coisas que provocassem boa impressão em Minkowski, o qual descreveu mais tarde Einstein como um “cão preguiçoso”.

2. O NASCIMENTO DA RELATIVIDADE

Einstein formulou a Teoria da Relatividade Restrita em 1905. O artigo original de Einstein não tem qualquer ideia geométrica e não faz qualquer referência explícita à necessidade de se juntarem o tempo e o espaço numa só entidade. Quando Minkowski ouviu falar destes trabalhos de Einstein, ficou muito surpreendido por se tratar do mesmo Einstein que fora seu aluno poucos anos antes. No entanto, escreveu-lhe uma carta, em 1907, na qual dizia:

“ Estive recentemente em Zurique e tive o prazer de ouvir falar em diversos locais do grande interesse despertado pelos seus sucessos científicos. ”

A partir dessa altura, Minkowski dedicou-se à Teoria da Relatividade, mas abordando-a de um ponto de vista matematicamente sofisticado, o que não foi do agrado de Einstein e que o levou a publicar dois artigos, juntamente com Jakob Laub (outro antigo aluno de Minkowski), a expor como era possível explicar os resultados de Minkowski com matemática clássica. Por esta altura Einstein afirmou: “Agora que os matemáticos se ocupam da Teoria da Relatividade, nem eu a percebo.”

O ponto de vista de Minkowski não só era sofisticado como também era geométrico. Com efeito, não só Minkowski recorreu à geometria não-euclidiana para estudar a Relatividade, como introduziu os chamados diagramas de Minkowski, como o da figura 3, para a explicar melhor. E embora estes diagramas se tenham tornado uma ferramenta pedagógica central no ensino da Relatividade, no livro [3], inteiramente dedicado à divulgação da Relatividade baseada na geometria, o nome de Minkowski nem sequer surge!¹

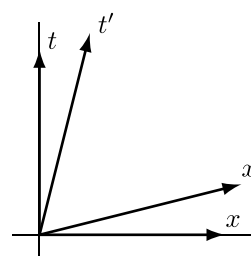


Figura 3: Diagrama de Minkowski.

Pela mesma altura, Minkowski passou a ter como assistente Max Born, que se tornaria amigo pessoal de Einstein e que viria a receber o Prémio Nobel da Física em 1954. Born também estava muito interessado na Teoria da Relatividade (foi, aliás, por isso mesmo que Minkowski quis tê-lo como assistente), o que foi importante para a divulgação das ideias de Minkowski. Com efeito, Minkowski morreu inesperadamente em 1909, com apenas 44 anos, e, no ano seguinte, Born publicou um artigo com as últimas ideias que Minkowski estava a desenvolver.

¹ Pode ser vista em <https://www.khanacademy.org/science/physics/special-relativity/a/minkowski-spacetime-2016-01-18T22:56:14.718Z> uma série de vídeos didáticos sobre o espaço-tempo e os diagramas de Minkowski.

3. APÓS MINKOWSKI

Lentamente, Einstein foi-se apercebendo de que a abordagem de Minkowski, contrariamente à sua impressão inicial de que consistia unicamente numa “erudição supérflua”, era fundamental para poder incorporar a Gravidade na Teoria da Relatividade. Por exemplo, em 1912 escreveu que supor que o espaço é plano “contém hipóteses físicas que poderão acabar por se revelar incorretas”. Com efeito, à medida que se ia aproximando da Teoria Geral da Relatividade, Einstein foi tomando consciência de que quer a abordagem geométrica da Relatividade quer a fusão do espaço com o tempo eram fundamentais.

No seu artigo de 1916 mencionado no início deste texto, Einstein escreveu que “a generalização da Teoria da Relatividade foi consideravelmente facilitada por Minkowski, um matemático que foi o primeiro a aperceber-se da equivalência formal entre as coordenadas espaciais e a coordenada temporal e que empregou isto na construção da teoria” e viria a escrever mais tarde que, sem ela, “a Teoria Geral da Relatividade [...] talvez não tivesse passado da infância”.

Einstein não foi o único físico de renome a aperceber-se da importância da contribuição de Minkowski. Em 1955, no decorrer de uma conferência comemorativa dos 50 anos da Teoria da Relatividade, Max Born afirmou:

“ [A] Teoria da Relatividade restrita não foi, afinal, uma descoberta de um só homem. A contribuição de Einstein foi a pedra angular de um arco que Lorentz, Poincaré e outros construíram e que viria a suportar a estrutura erigida por Minkowski. ”

REFERÊNCIAS

- [1] Gabriel Ferraro, *Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity*, Springer-Verlag, 2007.
- [2] José Carlos Santos, “Minkowski, Geometria e Relatividade”, *Revista Brasileira de História da Matemática* 9, n.º 18, 2009, pp. 115–131.
- [3] Jacob T. Schwartz, *Relativity in illustrations*, Dover, 1989.



 **Centro de Formação**

 **spm**
Sociedade Portuguesa de Matemática

O Centro de Formação da Sociedade Portuguesa de Matemática continua a contribuir para um contínuo aprofundar de conhecimentos nas diversas áreas da Matemática.

Oferta de ações para 2016/2017 brevemente disponível!

www.formacao.spm.pt

OS COMPUTADORES APRENDEM A JOGAR GO

Estarão os computadores a um passo de se tornarem semelhantes aos humanos, já que são melhores em cálculos complexos, e se está a conseguir começar a programar algo como a “intuição”?



PEDRO J. FREITAS
Universidade
de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt



MANUEL SILVA
Universidade
Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

Em maio de 1997, a máquina *Deep Blue* ganhou um *match* de xadrez contra o campeão em título, Garry Kasparov. Foi a primeira vez na história que uma máquina conseguiu ganhar ao melhor humano neste jogo. O esforço de pôr máquinas a jogar xadrez já tinha quase um século, mas até então havia a crença de que o xadrez teria algo de intrinsecamente humano, que não poderia ser replicável por uma máquina. A verdade é que o *Deep Blue* tinha na sua memória uma notável biblioteca de partidas jogadas por humanos, tendo portanto, beneficiado dessa experiência.

Desde então, a história das máquinas que jogam xadrez tem sido muito bem-sucedida – mais máquinas e mais *software* foram desenvolvidos, mantendo-se sempre ao nível dos melhores jogadores humanos. O êxito do *Deep Blue* não foi apenas uma situação esporádica.

Há outro jogo de estratégia, mais complicado até do que o xadrez, que é menos conhecido no ocidente, mas muito popular no oriente. Trata-se do go. Este jogo tem um tabuleiro com 19 linhas horizontais e outras tantas verticais, e joga-se com pedras achatadas, pretas para um jogador e brancas para o outro. Uma jogada consiste simplesmente em colocar uma pedra numa das interseções do tabuleiro, por forma a isolar grupos de pedras do adversário. Estas pedras, uma vez colocadas, não se movimentam, mas podem ser capturadas pelo jogador adversário. Veja-se o tabuleiro na figura 1.

Tal como o xadrez, este jogo possui um sistema



Figura 1. Tabuleiro de Go (Wikipedia).

ranking de jogadores, aqui semelhante aos das artes marciais: os jogadores não profissionais são ordenados do 30.º *kyu* (principliante) ao 1.º *kyu*, depois do 1.º ao 7.º *dan* amador, e finalmente os profissionais vão do 1.º ao 9.º *dan* profissional.

Ao contrário do que tinha acontecido com o xadrez, parecia muito difícil um computador ganhar ao campeão do mundo em título no jogo do go. Em 1997, chegou a dizer-se que demoraria mais de 100 anos. Isto geralmente é atribuído à conjugação de alguns fatores, que aqui enumeramos.

Primeiramente, o tamanho do tabuleiro leva a que a análise de casos seja muito mais difícil do que no xadrez. Por exemplo, no go há $19 \times 19 = 361$ possibilidades para a primeira jogada, e 360 para a segunda, enquanto no xadrez há apenas 20 possibilidades quer para a primeira quer para a segunda jogada (dois movimentos para cada um dos oito peões mais dois movimentos para cada cavalo). Aliás, estima-se que o número de jogos de go exceda o número de átomos no universo.

O *Deep Blue* usava um algoritmo de força bruta para determinar a melhor jogada, isto é, conseguia analisar todos os jogos possíveis até 12 jogadas mais à frente, algo impossível para um humano. Dada a dimensão do tabuleiro e a variedade possível de jogadas, uma análise semelhante para o go é impossível mesmo para um computador.

Em segundo lugar, para ir “podando” esta árvore de possibilidades, é necessária uma função que avalie a posição obtida. No xadrez, consegue-se uma primeira avaliação fazendo, por exemplo, contagem de peças. No go, isto é muito mais difícil, o jogo é muito dramático e uma posição vantajosa para um jogador pode converter-se facilmente noutra, que é vantajosa para o outro.

Como dissemos, durante muitos anos, as máquinas não conseguiam passar do nível amador no jogo do go. Foi apenas em 2009 que uma máquina conseguiu ganhar a um profissional do go, embora com nove pedras de *handicap* (o que consiste em começar com nove pedras de avanço, o maior *handicap* que habitualmente se dá no jogo do go). Diga-se, porém, que ao desenvolver a matemática necessária para programar um computador para jogar go, vários conceitos interessantes foram desenvolvidos. Talvez o mais famoso destes seja o dos números surreais, inventados por John Conway e batizados por Donald Knuth, que escreveu um livro sobre o assunto com este mesmo título, *Números Surreais*, editado entre nós pela Gradiva. Este conjunto de números contém os números reais, e é obtido generalizando a construção por cortes de Dedekind.

Em todo o caso, aquilo que parecia diferente no go era uma noção de intuição humana. Os jogadores profissionais falavam de tabuleiros com “bom aspeto”, sem que se conseguisse definir de uma forma explícita o que isto queria dizer. O que o programa AlphaGo, da companhia DeepMind (da Google), tentou fazer foi... dotar os computadores de uma intuição semelhante.

Como foi isto feito? Usando um algoritmo de Monte-Carlo para pesquisa em árvores (entendendo-se cada

ramo da árvore como uma sucessão de jogadas), que simula, a partir de uma posição, vários desenvolvimentos possíveis, classificando depois cada jogada de acordo com o resultado final dos jogos simulados. A inovação na implementação deste algoritmo consistiu no uso de duas redes neuronais, a *policy network*, encarregue de sugerir jogadas, e a *value network*, encarregue de as avaliar.

Tal como no xadrez, a *policy network* analisou cerca de 30 milhões de movimentos de 150 000 jogos entre bons jogadores humanos, mas desta vez tentando encontrar padrões e perceber como jogava um humano perante determinada situação. Após uma primeira aproximação, a rede passou então a jogar contra si mesma, ou antes, contra a sua versão anterior, melhorando ainda mais a sua capacidade de prever uma boa jogada. Isto resultou num programa que, mesmo sem uma avaliação de posições, conseguia já derrotar vários programas que jogavam go.

Entra então aqui a *value network*, que permite avaliar se uma dada posição é boa ou não. Esta rede foi mais uma vez treinada através de repetidos jogos entre as redes, armazenando a informação sobre se uma dada posição é ou não vantajosa. A diferença em relação ao xadrez é substancial: foi através de um treino com partidas repetidas que este conhecimento foi adquirido.

Finalmente, ao jogar um jogo com um adversário humano, o AlphaGo tenta reproduzir os desenvolvimentos possíveis do tabuleiro, usando as duas redes para escolher jogadas e analisar as posições resultantes destas jogadas. O algoritmo é descrito no artigo [1].

A eficácia deste algoritmo foi notável. Em novembro de 2015, o AlphaGo ganhou a Fan Hui (figura 2), francês, nascido na China, campeão europeu de go, de 2.º dan profissional, num *match* de cinco jogos, por um decisivo 5-0.



Figura2. Fan Hui (foto: Google).



Figura 3. Lee Sedol iniciando o jogo 3 (foto: Google).

Pouco tempo depois, em março de 2016, o AlphaGo desafiou o campeão coreano Lee Sedol (figura 3), de 9.º dan profissional, considerado o melhor jogador do mundo no início do século XXI. Apesar de todas as expectativas apontarem para uma vitória humana, Lee Sedol perdeu num *match* de cinco jogos por 4-1, tendo ganho o 4.º jogo.

Anotamos alguns comentários sobre o sucedido. Ao fim do 3.º jogo, que deu a vitória ao AlphaGo, Demis Hassabis, o chefe da DeepMind, publicou um *tweet* dizendo “AlphaGo WINS!!!! We landed it on the moon”. Lee Sedol considerou a sua vitória no 4.º jogo como algo “tão valioso que não o trocaria por nada neste mundo”, enquanto Fan Hui descreveu uma jogada do AlphaGo no 2.º jogo do seguinte modo: “Não é uma jogada humana. Nunca vi um humano jogar assim. Tão belo. Tão belo”.

O que nos leva à questão mais profunda: estarão os computadores a um passo de se tornarem semelhantes aos humanos, já que são melhores em cálculos complexos, e se está a conseguir começar a programar algo como a “intuição”? Acrescente-se que, apesar da palavra “intuição” poder referir-se a várias coisas, o mesmo tipo de algoritmo de aprendizagem já foi aplicado a questões artísticas, ensinando um computador a reproduzir a imagem de uma dada fotografia no estilo de um pintor conhecido, como por exemplo Van Gogh ou Picasso. O programa chama-se Deep Style, e podem ver-se alguns exemplos na página [4].

Asseguramos que os autores desta coluna são ambos humanos. Chegará, porém, brevemente o tempo em que teremos programas de computador a contribuir com artigos para a Gazeta de Matemática?

REFERÊNCIAS

- [1] Demis Hassabis *et al.*, “Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search”, *Nature* 529, 484–489 (28 de janeiro de 2016).
- [2] Donald Knuth, *Números Surreais*, Gradiva.
- [3] <http://googleresearch.blogspot.pt/2016/01/alphago-mastering-ancient-game-of-go.html>
- [4] <http://www.deepstylegenerator.com>

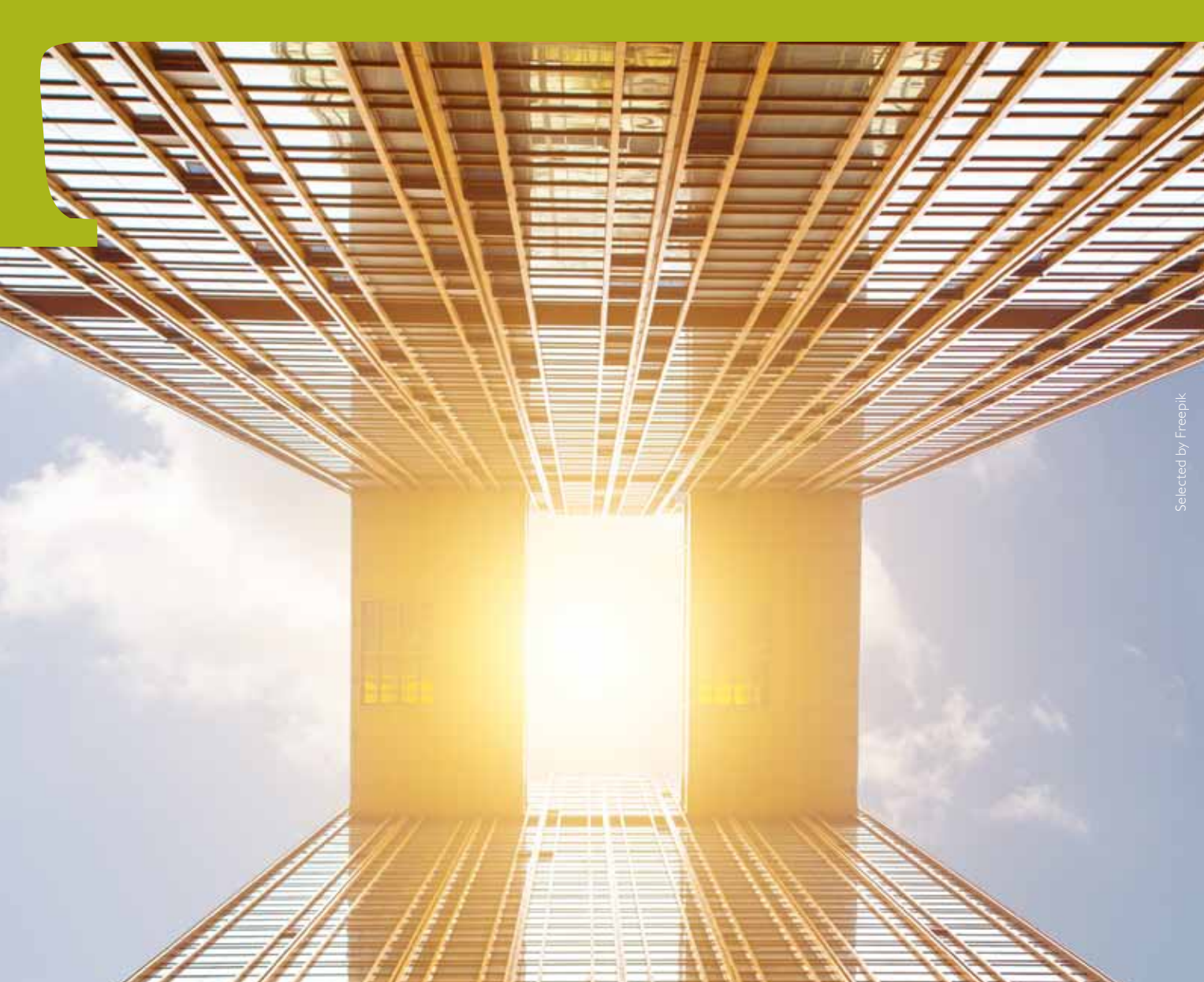
As várias páginas foram consultadas em março de 2016.



VISITE O CLUBE DE MATEMÁTICA
DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

- ✓ ARTIGOS DE OPINIÃO
- ✓ ENTREVISTAS
- ✓ PROBLEMAS
- ✓ HISTÓRIAS
- ✓ PASSATEMPOS
- ✓ PRÉMIOS

TUDO ISTO E MUITO MAIS EM WWW.CLUBE.SPM.PT



Selected by Freepik

ANTIDERIVAÇÃO: UMA PONTE ENTRE A MATEMÁTICA E A ECONOMIA

BEITES, P. D.^a, LOBO, F. J.^b, SERÓDIO, R.^c

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR^{a, b, c}

pbeites@ubi.pt^a, fernando_j_lobo_m@hotmail.com^b, rserodio@ubi.pt^c

A data de 10/12/2014 assinalou a abertura da Academia Júnior de Ciências da Universidade da Beira Interior aos melhores alunos de ciências das escolas secundárias da região. De entre as sessões integrantes do ano letivo 2014/2015, norteadas pela física, pela matemática e pela química, uma foi dedicada à antiderivação. Apresentamos os materiais nesta utilizados, porventura úteis para a implementação do novo programa de matemática para o ensino secundário, e considerações associadas.

Na Academia Júnior de Ciências (AJC) da Universidade da Beira Interior (UBI), o fio condutor da sessão intitulada “Antiderivando” foi dado pela interligação matemática de dois conceitos económicos: custo total e custo marginal. O título poderia ter sido “Primitivando”, mas adotámos a terminologia de algumas referências, nomeadamente [8], num claro apelo conjunto à já conhecida noção de derivada e a um caminho contrário ao da derivação.

No que se segue, começamos por passar em revista os referidos conceitos económicos, sem esquecer, como não poderia deixar de ser, as suas conexões com a matemática. Como a sessão foi dinamizada de uma forma próxima à aprendizagem pelos pares, dedicamos uma secção a este método de ensino-aprendizagem. Terminamos com um relato comentado da sessão em que se destacam os materiais que edificaram a ponte entre a matemática e a economia.

I. CUSTO TOTAL E CUSTO MARGINAL

Uma organização que produz bens/ produtos ou serviços com o propósito de os vender é designada por empresa, [4]. Esta, para o concretizar, tem de transformar fatores de

produção (*inputs*, tais como matéria-prima, equipamento, capital, horas de trabalho, etc.) num produto (*output*)¹. Em microeconomia, a relação entre as quantidades de *inputs* e de *output* exprime-se através da chamada função de produção dessa empresa. Subjacentes a esta função encontram-se as curvas de custos, que são as representações gráficas de funções de custo.

Conhecida a função de produção de uma empresa, no sentido da maximização dos lucros desta, esse conhecimento pode ser convertido em informação sobre a relação entre a quantidade de *output* e o custo. Para isso é necessário saber quanto é que a empresa paga pelos seus fatores de produção, custo que pode ser fixo, não dependendo da quantidade de *output* produzido, ou variável, dependendo da quantidade de *output* produzido.

No contexto da produção de um bem por uma empresa, a soma das duas expressões analíticas que traduzem o custo fixo (*CF*) e o custo variável (*CV*), respetivamente, define a função custo total (*CT*):

$$CT = CF + CV.$$

Denotando o número de unidades do produto por q , $CT(q)$ representa o custo total de produzir q unidades do produto com $CT(q) = CF + CV(q)$.

No segundo membro da igualdade destacada, a primeira parcela é, por vezes, em contexto empresarial, denominada por custo geral. Em detrimento desta, as designações mais utilizadas são a já mencionada de custo fixo ou a de custo de estrutura, esta por traduzir o custo de ter toda a estrutura produtiva da empresa montada, independentemente de haver ou não produção.

Dois medidas úteis de custo de produção que podem obter-se a partir do custo total são designadas por custo marginal e por custo médio. Elas servem, por um lado, para a empresa decidir quanto vai produzir para maximizar lucros e, por outro lado, para estudar a curva da oferta de mercado. No que se segue, limitamo-nos a considerar o custo marginal, mas mais detalhes sobre a aplicação da análise marginal podem ser consultados em [4].

Para os economistas, o custo marginal (CM_g) associado à produção de um bem é a mudança no custo total gerada pela produção de mais uma unidade do bem. Esta definição traduz o facto de a função custo marginal ser a deri-

¹Daqui em diante e por uma questão de simplificação, assumimos apenas empresas de tipo industrial, isto é, em que os *outputs* são produtos acabados, deixando-se de fora os serviços, dada a maior complexidade de conceitos potencialmente envolvidos e que não seriam aqui relevantes. No mesmo sentido, pensamos no *output* como sendo um só produto.

vada da função custo total só de uma forma aproximada. Concretamente, a mesma indica que se olhe para a razão²

$$CM_g = \frac{\Delta CT}{\Delta q} \text{ quando } \Delta q = 1,$$

embora na definição formal de custo marginal, como se refere em [7], se tenha

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta CT}{\Delta q}.$$

Matematicamente, $CM_g(q+1)$, o custo marginal que representa o custo exato de produzir a $(q+1)$ -ésima unidade do produto, pode ser aproximado por $CT'(q)$. De facto,

$$CT'(q) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{CT(q+\Delta q) - CT(q)}{\Delta q}$$

e

$$CT'(q) \approx \frac{CT(q+\Delta q) - CT(q)}{\Delta q},$$

pelo que $CT'(q) \approx CT(q+1) - CT(q)$ se $\Delta q = 1$, ou seja, $CT'(q) \approx CM_g(q+1)$.

Como se refere em [4], o cálculo do custo marginal é mais simples se os dados relativos ao custo total estiverem disponíveis em incrementos de uma unidade de *output*. É claro que, neste caso, se está a pensar na definição dos economistas, que pode ser expressa por ΔCT . Formalmente, a função custo marginal pode obter-se derivando a função custo total e, sabendo o custo fixo, a função custo total pode obter-se primitivando a função custo marginal.

Assim, formalmente, na perspetiva da análise marginal, é habitual escrever CT' em vez de CM_g .

2. APRENDIZAGEM PELOS PARES

No final da década de 1970, uma série de conversas mantidas entre David Hestenes (físico da Universidade do Arizona) e um dos seus colegas que lecionava Introdução à Física despoletou, anos mais tarde, a criação de um método de ensino-aprendizagem. Este, aqui designado por aprendizagem pelos pares, foi chamado de *Peer Instruction* por Eric Mazur (físico da Universidade de Harvard), [3].

O colega de Hestenes queixava-se da baixa média das classificações dos seus alunos, o que sucedia ano após ano. A partir das referidas conversas, Hestenes conjecturou que tal se devia ao tipo de questões que avaliavam os alunos, as quais não se reduziam a mero cálculo e careciam da compreensão dos conceitos envolvidos. Por outras palavras, eram questões conceptuais.

Para testar a sua conjectura, em conjunto com o seu aluno de pós-graduação Ibrahim Halloun, Hestenes criou um teste de questões conceptuais de física, designado por *For-*

ce Concept Inventory (FCI), e realizou vários estudos. Destes extraiu a conclusão, no mínimo surpreendente, que os alunos não aprendem nada, ou quase nada, nas aulas (tradicionais) de unidades curriculares de introdução à física para cursos que não são de física.

Mazur leu os estudos e achou que a conclusão não se aplicaria ao seu contexto. Além de se considerar um bom professor, os seus alunos tinham boas classificações em testes mais complicados do que o FCI. Ainda assim, implementou-o e ficou chocado, não só com os resultados mas também com as perguntas dos alunos, estas sobre se deveriam responder de acordo com o que ele tinha ensinado ou com o que eles pensavam sobre o assunto.

Os alunos também ficaram chocados com os resultados obtidos no FCI e, para passarem em revista todas as questões, pediram uma sessão de contacto extra a Mazur. Como Mazur conta em [6], uma das questões analisadas era a de saber se, numa colisão de um camião pesado com um carro ligeiro, a intensidade da força exercida pelo camião sobre o carro era maior, menor ou igual à intensidade da força exercida pelo carro sobre o camião.

Quanto à citada questão, Mazur justificou a igualdade invocando a 3.^a Lei de Newton ou Lei da Ação-Reação. Mas houve alunos que nem compreendiam nem conseguiam articular as suas dúvidas, mesmo depois de mais uma explicação. Tendo em conta que cerca de metade dos alunos tinha respondido corretamente à questão no FCI, Mazur disse-lhes para discutirem o assunto entre eles. Gerou-se o caos, mas a discussão resultou!

A resposta para o sucesso é simples: muitas vezes os alunos entendem-se melhor falando entre eles do que ouvindo o professor. De facto, os alunos que aprenderam recentemente um conceito ainda se lembram das dificuldades, mas o professor aprendeu-o há tanto tempo, sendo para ele tão óbvio, que já não compreende como é que alguém não o entende. Nas palavras do psicólogo Steven Pinker, citado por Mazur em [6], é a “maldição do conhecimento”.

Mazur, que tinha questionado a própria prática e a forma como chegava aos alunos, encontrou a solução de uma forma absolutamente inesperada. Na década de 1990 criou a aprendizagem pelos pares. Este método de ensino-aprendizagem é centrado no aluno, visando desenvolver a sua autonomia. Pretende ainda a substituição da mera transferência do conhecimento pela assimilação do mesmo e, indissociavelmente, a aprendizagem conceptual ativa.

Previamente a uma aula com aprendizagem pelos pares, os alunos devem estudar um tópico, indicado pelo professor, e resolver um trabalho de casa associado. Este,

a entregar antes dessa aula, é formado por três questões: as duas primeiras abordam aspetos, preferencialmente difíceis, do estudo; a terceira visa a escrita das dúvidas e dificuldades emergentes do estudo, obtendo-se pistas para a planificação.

Na aula, tipicamente, há eventos de votação. Cada evento começa com a proposta de uma questão conceptual de escolha múltipla. Os alunos dispõem de cerca de dois minutos para a lerem, pensarem e decidirem individualmente qual a opção correta. Depois votam, por exemplo com cartões coloridos ou com um sistema eletrónico de resposta pessoal, e o professor decide o próximo passo com base na percentagem (c) não divulgada de respostas corretas.

Quando $35\% \leq c \leq 70\%$, os alunos dispõem de entre dois a quatro minutos para discutirem as suas respostas com os seus pares, ou seja, os outros alunos. Entretanto, o professor circula pela sala de aula, ouvindo e promovendo discussões frutíferas como agente mediador. Segue-se uma segunda votação, em que c geralmente aumenta, e, por fim, a explicação da opção correta ou pelo professor ou por um aluno voluntário.

Destaque-se que o objetivo do debate é os alunos discutirem entre si as possíveis respostas corretas. Geralmente, é mais fácil um aluno que saiba a resposta correta convencer outro que não saiba do que ao contrário. Além disso, segundo Maher em [5], “quando os alunos tentam convencer os outros de que as suas respostas estão corretas, eles podem reorganizar e reformular as suas representações de modo a tornar os argumentos convincentes.”

Se $c > 70\%$, então passa-se diretamente para a explicação da opção correta, uma vez que a discussão não seria frutífera, por grande parte dos alunos ter respondido corretamente. Se $c < 35\%$, então revisita-se o conceito, pois tal pode indicar que apenas alguns alunos o compreendem. Mais detalhes podem ser consultados em [1] e referências aí citadas.

3. ANTIDERIVANDO NA AJC

Começamos a sessão “Antiderivando” com uma introdução aos custos de produção, nomeadamente com a noção de custo total e suas componentes (custo fixo e custo variável). Utilizamos uma situação modelada simples, que consistiu na produção de mesas em que, assim que se iniciasse a produção, os custos fixo e variável unitário (por cada mesa) eram, respetivamente, 100 e 10 unidades monetárias (u.m.). Salientamos que supusemos que $CT(0) = 0$, pois assumimos que seria uma nova linha de produção de uma empresa, pelo que não existiria qual-

quer custo fixo associado antes de se iniciar a produção.

Com a participação dos alunos, construímos uma tabela, correspondente às seis primeiras linhas e às quatro primeiras colunas da Tabela 1, até chegarmos ao modelo matemático do custo total dado pela função definida por

$$CT(q) = \begin{cases} 0, & q = 0 \\ 100 + 10q, & q > 0 \end{cases}$$

onde q é o número de unidades do produto e $CV(q) = CV_u \times q$, em que CV_u denota o custo variável unitário.

Procurámos que os alunos compreendessem que o custo marginal, seguindo a definição dos economistas, consistia no incremento provocado no custo total com a produção de mais uma mesa. Novamente com a participação dos alunos, acrescentámos a quinta coluna na Tabela 1, onde

$$CM_g(q) = CT(q) - CT(q - 1)$$

representa o custo marginal de produzir a q -ésima unidade do produto (mesa).

Por forma a salientar que o custo marginal nem sempre é igual ao custo variável unitário, supusemos que, para produzir uma sexta unidade, teria de se adquirir uma nova máquina e contratar mais um funcionário. Assumimos ainda que tal se traduziria num aumento dos custos fixos para 200 u.m., tendo os alunos concluído que a produção da sexta unidade teria um custo marginal de 110 u.m. como surge na Tabela 1.

q	CF	CV_u	CT	CM_g
1	100	10	$100+1 \times 10 = 110$	$110-000=110$
2	100	10	$100+2 \times 10 = 120$	$120-110=10$
3	100	10	$100+3 \times 10 = 130$	$130-120=10$
4	100	10	$100+4 \times 10 = 140$	$140-130=10$
5	100	10	$100+5 \times 10 = 150$	$150-145=10$
6	200	10	260	110
7	200	10	270	10
8	200	10	280	10
9	200	10	290	10
10	200	10	300	10

Tabela 1. Custo total e custo marginal em função de q .

² Como usualmente, a letra grega maiúscula delta (Δ) significa “variação/mudança em”.

Para finalizar a introdução aos custos de produção, foram colocadas as seguintes perguntas aos alunos.

► Se, no mercado, conseguir comprar este mesmo produto por 75 u.m.:

Se não estiver a produzir, deverei iniciar a produção por uma unidade?

E se já estiver a produzir duas unidades, deverei produzir uma 3.^a unidade?

E se já estiver a produzir quatro unidades, deverei produzir uma 5.^a unidade?

Estando já a produzir cinco unidades, se num determinado momento tiver uma encomenda de mais uma unidade, então como devo satisfazê-la?

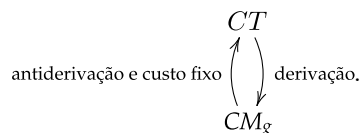
► E se forem mais duas unidades? Como deverei satisfazer esta encomenda adicional de mais duas unidades?

A resposta à primeira foi unanimemente negativa, dado que no mercado conseguiríamos comprar essa unidade mais barata (75 u.m.) do que nos custaria produzi-la ($CT(1) = 110$ u.m.). Quanto às segunda e terceira perguntas, as respostas foram unanimemente afirmativas após algumas discussões, pois, apesar de $CT(3) = 130$ u.m. e $CT(5) = 150$ u.m., estando já a produzir, $CM_g(3)$ e $CM_g(5)$ seriam inferiores ao custo de mercado de cada uma dessas unidades.

Relativamente à quarta questão, os alunos concluíram que a empresa deveria adquirir a sexta unidade no mercado. De facto, nas u.m. adequadas, $225 = CT(5) + 75 < CT(6) = 260$. Na quinta questão, agora com a encomenda de duas unidades adicionais, a conclusão dos presentes foi no sentido de a empresa aumentar a sua capacidade produtiva de modo a poder satisfazer internamente a totalidade da encomenda. De facto, $CT(7) = 270 < 300 = CT(5) + 2 \times 75$.

Em face das respostas dadas pelos alunos, verificámos que os mesmos compreenderam plenamente o conceito de custo marginal e a sua aplicabilidade na vida empresarial.

De seguida, no sentido descrito na Secção 1, salientámos as duas definições de custo marginal. No que se refere à definição formal, deduzimos a ligação $CM_g(q + 1) \approx CT'(q)$ e resumimo-la esquematicamente



Notámos que, na situação modelada, a ligação só faz sentido para $q > 0$. De facto, CT não é diferenciável em $q = 0$ por CT não ser contínua em $q = 0$.

Com base em [7], avançámos com a proposta de encontrar a expressão analítica de uma função de custo total, sabendo a expressão analítica da função de custo marginal e o custo fixo.

A função que permite calcular o custo marginal de determinado produto é dada por

$$CT'(q) = 3q^2 - 30q + 120.$$

Se a empresa tiver um custo fixo de 100 u.m. para este produto, qual a função de custo total do produto?

Como os alunos estavam a frequentar o 12.^o ano com o Programa de Matemática A anterior a [2], não conheciam o conceito de antiderivada nem o termo frequente de primitiva. Sendo o mesmo necessário para conseguirmos andar ao contrário da operação de derivação, daí o prefixo anti como referimos aos alunos na primeira designação, propusemos algumas tarefas preparatórias. Estas foram guiadas pelos princípios da aprendizagem pelos pares.

A primeira proposta consistiu na questão conceptual 1 (QC1) subsequente, adaptada de uma chamada *good question* em [9]. Os resultados da primeira votação constam da Tabela 2, não tendo havido segunda votação pelos mesmos. Nesta tabela apresentamos ainda os resultados em duas unidades curriculares de dois cursos (CI e CII), com turnos TP1 e TP2, lecionadas por Beites e Seródio na UBI em 2014/2015.

Opção	AJC	TPI do CI	TP2 do CI	TPI do CII	TP2 do CII
A	10%	25%	4%	4%	0%
B	90%	75%	96%	96%	100%

Tabela 2. Dados da primeira votação relativos à QC1.

QC1 – Verdadeiro ou falso?

Se f e g são duas funções reais de variável real tais que $f'(x) = g'(x)$, então $f(x) = g(x)$.

- (A) Verdadeiro
- (B) Falso

Após mencionarmos a opção correta, um aluno voluntário explicou porquê. Especificamente, disse que as funções r e s , reais de variável real dadas pelas expressões analíticas $r(x) = x^2 + 5$ e $s(x) = x^2 + \sqrt{2}$, têm a mesma derivada definida por $2x$, mas $r(x) \neq s(x)$. A fundamentação dos restantes alunos que votaram na opção B foi, a menos de funções escolhidas, essencialmente a mesma.

Passámos para a proposta de leitura individual da definição de antiderivada, acompanhada da questão associada subsequente. Esta variação na aprendizagem pelos pares, estudo na sessão “Antiderivando” em vez de ser prévio como trabalho de casa, prendeu-se com o facto de não termos uma sessão antecessora. Observámos que todos os alunos escreveram exemplos, mas alguns escreveram ainda $x^2 + K$, com K constante, e $(x^2 + K)' = 2x + 0 = 2x$, como verificação.

Sejam f e F duas funções reais de variável real definidas num intervalo I ($f, F : I \rightarrow \mathbb{R}$). Diz-se que F é uma antiderivada (ou primitiva) de f no intervalo I se, para qualquer $x \in I$, $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$, isto é, $F'(x) = f(x)$.

Elabore uma lista de antiderivadas da função real de variável real definida por $2x$.

Por uma questão de completude, apresentamos a versão integral do trabalho de casa implementado por Beites, na UBI, em 2014/2015.

TPC 13/10/2014: estudo da página 353 da referência “Cálculo” de Stewart e respostas, escritas à mão, às três questões subsequentes.

Entrega do TPC 13/10/2014: no início da próxima aula.

1. O que é uma antiderivada de uma função real de variável real?
2. Elabore uma lista de antiderivadas da função real de variável real definida por $2x$.
3. O que achou difícil ou confuso na leitura? Se nada foi difícil ou confuso, então diga o que lhe pareceu mais interessante. Por favor, seja o mais específico possível.

De modo a deduzir algumas regras de primitivação imediata, propusemos a tarefa seguinte, que foi resolvida a pares.

Preencha a tabela subsequente onde f e g são funções reais de variável real (f.r.v.r.) primitiváveis, num intervalo I , e $k \in \mathbb{R}$.

f.r.v.r. definida por	família de antiderivadas/primitivas
x^0	
x^1	
x^2	
x^3	
x^n com $n \in \mathbb{N}_0$	
$kf(x)$	
$f(x) + g(x)$	

A partir de alguns casos particulares de potências de x , para os quais fomos pedindo as verificações correspondentes, os alunos conjecturaram que a família de antiderivadas de x^n , com $n \in \mathbb{N}_0$, seria $(x^{n+1})/(n+1) + C$ com C constante. Para esta conjectura foi pedida uma demonstração, o que poucos alunos já tinham feito antes desta solicitação:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' + C' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} + 0 = x^n.$$

Aproveitámos para introduzir a notação de Leibniz para antiderivada com

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

mas alertando que se trata da escrita simplificada do conjunto de todas as primitivas de x^n com $n \in \mathbb{N}_0$, ou seja, de

$$\int x^n dx = \left\{ \frac{x^{n+1}}{n+1} + C : C \in \mathbb{R} \right\}.$$

A dedução da linearidade da primitivação gerou mais dificuldades, talvez pela falta de exemplos que poderiam, como anteriormente, conduzir a uma conjectura. Após a sugestão de denotar por $F(x)$ e por $G(x)$, respetivamente, antiderivadas de f e de g , muitos dos alunos escreveram $kF(x) + C$ e $F(x) + G(x) + K$. Neste último caso, alguns escreveram $K_1 + K_2$ em vez de K , mas rapidamente se deram conta de que podiam escrever uma só constante.



Figura 1. Representação gráfica da função de custo marginal dada.

Discutimos depois os motivos, salientando que não se tratava de mostrar igualdades entre funções, mas antes igualdades entre famílias de funções. De facto,

$$\int f(x) + g(x) dx$$

é a família de funções dadas por expressões da forma $H(x) + C$, com C constante e H primitiva de $f + g$, e

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx$$

é a família de funções definidas por expressões da forma $F(x) + G(x) + K$, com K constante e F, G primitivas, respetivamente, de f, g .

Como H e $F + G$ são funções diferenciáveis num intervalo com $H' = f + g = F' + G' = (F + G)'$, então H e $F + G$ diferem por uma constante. Portanto,

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Considerações análogas conduziram a $kF' = (kF)'$, onde $k \in \mathbb{R}$, pelo que

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

De seguida, voltámos à proposta de encontrar a função de custo total pretendida. Todos os alunos, a pares, chegaram à expressão analítica da família de antiderivadas, $q^3 - 15q^2 + 120q + C$, mas só dois escreveram a resolução formal

$$\begin{aligned} \int 3q^2 - 30q + 120 dq &= 3 \int q^2 dq - 30 \int q dq + 120 \int 1 dq \\ &= 3 \times \frac{q^3}{3} - 30 \times \frac{q^2}{2} + 120q + C. \end{aligned}$$

Os outros trataram a tarefa com tentativas e depois verificaram com a derivada. Alguns tiveram dúvidas quanto à constante, mas, quando lhes perguntámos sobre o que dizia o enunciado, recordaram o significado de custo



Figura 2. Representação gráfica da função de custo total determinada.

fixo e chegaram à resposta $q^3 - 15q^2 + 120q + 100$ com $CT(0) = 100$.

Depois exibimos o gráfico da função CT' dada e pedimos o ponto ótimo de produção, isto é, o ponto em que a produção desta empresa apresenta o menor custo marginal. Por observação gráfica, os alunos indicaram (5, 45) e discutimos a interpretação destas coordenadas. Referimos que, analiticamente, o mesmo pode ser obtido resolvendo um problema de otimização livre de CT' , em que 5 e 45 são, respetivamente, minimizante e mínimo absoluto de CT' .

A representação gráfica da função CT determinada permitiu visualizar a coincidência da abcissa do ponto de inflexão desta com a abcissa do ponto ótimo de produção, este identificado com o gráfico de CT' . Aproveitámos ainda CT para chamar a atenção dos alunos para a eventual diferença entre o domínio de uma função real de variável real e o subconjunto deste com os elementos apropriados a um certo contexto.

Uma sugestão que nos parece interessante, e que certamente colocaremos em prática na próxima edição da AJC, consiste em pedir aos alunos que determinem o custo exato da quinta unidade do produto. Pela definição dos economistas, tem-se

$$\begin{aligned} CM_g(5) &= \frac{CT(5) - CT(4)}{5 - 4} \\ &= \frac{CT(4 + 1) - CT(4)}{(4 + 1) - 4} = 46 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

e, pela definição formal, vem

$$\begin{aligned} CM_g(5) &\approx CT'(4) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{CT(4 + \Delta q) - CT(4)}{\Delta q} \\ &= 3 \times 4^2 - 30 \times 4 + 120 = 48. \end{aligned}$$

Como não houve tempo para colocar a questão conceptual 2 (QC2) subsequente, adaptada de uma *good question* em [9], bem como realizar o(s) evento(s) de votação correspondente(s), propusemos aos alunos que enviassem as suas respostas acompanhadas de resolução fundamentada por correio eletrónico. Nas duas respostas recebidas, os alunos indicaram, fundamentadamente, a opção correta (A) e mostraram a compreensão da noção de antiderivada.

QC2 – Verdadeiro ou falso?

Se f e g são duas funções reais de variável real tais que $\int f(x) dx = \int g(x) dx$, então $f(x) = g(x)$.

(A) Verdadeiro

(B) Falso

Como seriam as respostas dos seus alunos em cada questão conceptual QC_i? E qual seria a percentagem de respostas corretas c_{QC_i} na primeira votação dos seus alunos na QC_i? Se decidir implementá-las com aprendizagem pelos pares, então ficaremos a torcer para que a condição $35\% \leq c_{QC_i} \leq 70\%$ seja satisfeita. Neste caso, fazemos votos de uma boa discussão!

REFERÊNCIAS

- [1] Beites, P. D., Romano, A. (2014) “Nestas aulas é melhor falar do que estar calado!”, *Educação e Matemática*, (129), 13-16.
- [2] Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F., Timóteo, M. C. (2014) *Programa e Metas Curriculares - Matemática A - Ensino Secundário*, Ministério da Educação e Ciência.
- [3] Fiolhais, C., Pessoa, C. (2003) Entrevista com Eric Mazur: “Ensinar é apenas ajudar a aprender”, *Gazeta de Física*, 26 (1), 18-22.
- [4] Krugman, P., Wells, R. (2013) *Microeconomics*, Worth.

[5] Maher, C. A., Powell, A. B., Uptegrove, E. B. (2010) *Combinatorics and reasoning*, Springer.

[6] Mazur, E. (2014) *Peer Instruction for active learning*, <https://www.youtube.com/watch?v=Z9orbxoRofI>

[7] Pires, C. (2001) *Cálculo para Economistas*, McGraw-Hill.

[8] Stewart, J. (2006) *Cálculo*, Thomson.

[9] Terrell, M. (s. d.) *Webpage of Maria Terrell*, <http://www.math.cornell.edu/~maria>

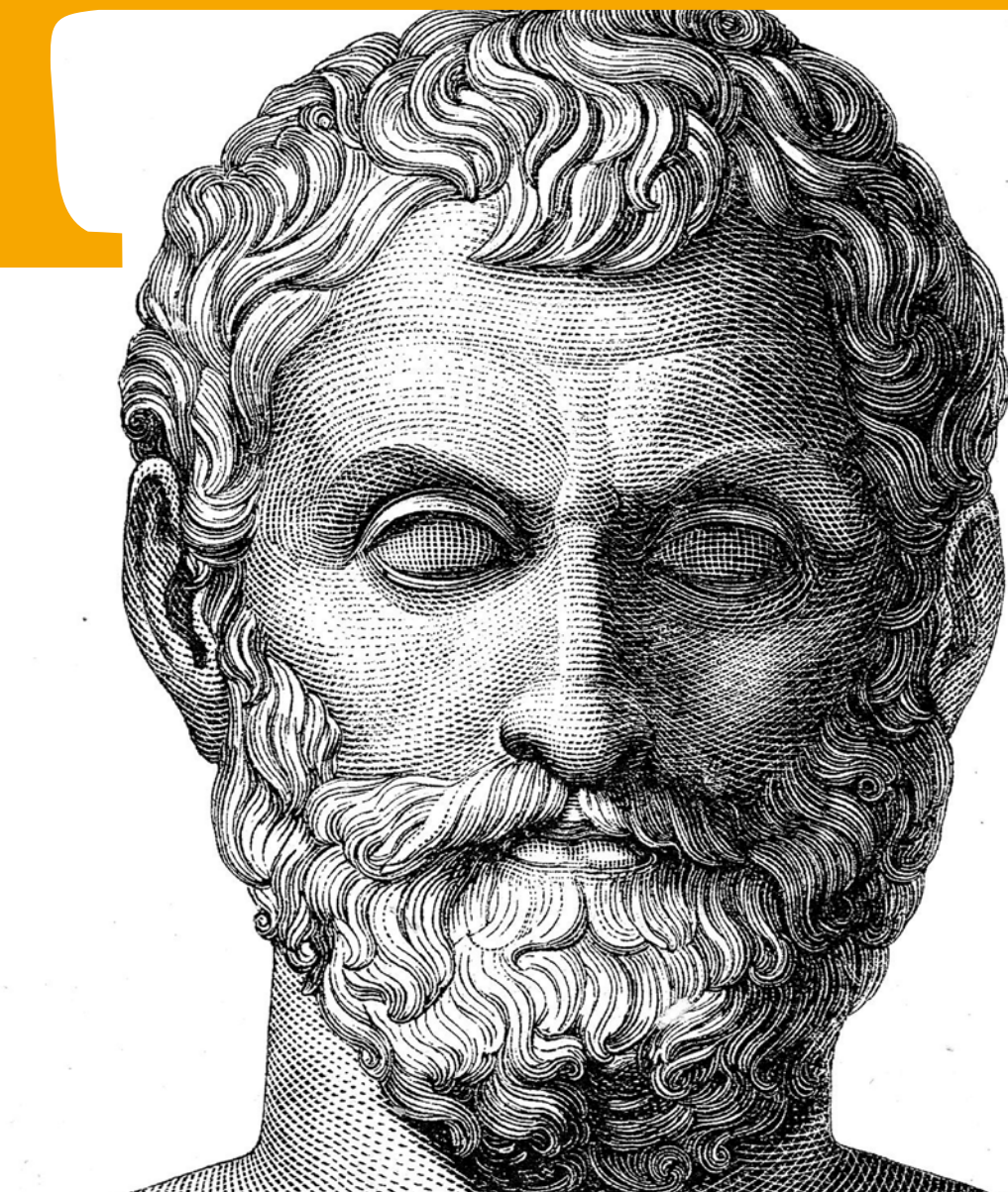
Os autores Beites e Seródio agradecem o apoio do Governo Português através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projeto PEst-OE/MAT/UI0212/2014 do CMA-UBI.

SOBRE OS AUTORES

Patrícia Damas Beites é Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior. Os seus principais interesses prendem-se com tópicos de Álgebra e de Didática da Matemática.

Fernando J. Lobo Marques é licenciado e doutorando em Gestão pela Universidade da Beira Interior. Docente de Gestão, nas áreas da Fiscalidade, Contabilidade e Matemática Financeira, sempre manteve um gosto especial pela Matemática, em particular pela Álgebra.

Rogério Seródio é licenciado em Física pela Universidade de Lisboa e é mestre e doutor em Matemática pela Universidade da Beira Interior. Desde 2006 é Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior. Os seus principais interesses prendem-se com tópicos de Álgebra, de Combinatória e de Educação Matemática.



CALCULADORA DE TALES

LUÍS BERNARDINO¹ E JUAN CARLOS SÁNCHEZ RODRIGUEZ²

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DRA. LAURA AYRES¹ E UNIVERSIDADE DO ALGARVE/ IST-UL²

bernluis@gmail.com¹ e jsanchez@ualg.pt²

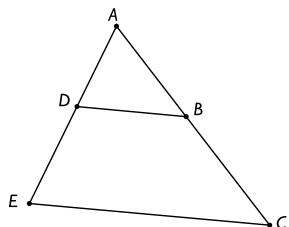
Sobre a importância da obra de Tales de Mileto, gostaríamos de referir o livro [3], onde o autor afirma: “O trabalho de sistematização em geometria iniciado por Tales é continuado nos séculos posteriores, nomeadamente pelos pitagóricos”.

O novo Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico, introduzido em 2013, confere ao Teorema de Tales um papel fundamental do currículo, promovendo estrutura e coesão.

Neste texto consideraremos o enunciado do Teorema de Tales incluído, por exemplo, no livro [4].

TEOREMA DE TALES

Se cortamos os lados dum ângulo (ou os seus prolongamentos) por um feixe de paralelas, os triângulos formados terão os lados proporcionais.



$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{EC}$$

Este teorema assume um papel central no estudo da Matemática no 3.º ciclo. De facto, de acordo com o documento Programa e Metas Curriculares – Matemática, En-

Enquanto docentes que olham para a geometria com um especial carinho, pretendemos, neste artigo, abordar algumas das aplicações de um teorema, batizado com o nome de um dos pais da geometria, na Antiga Grécia: o Teorema de Tales.

sino Básico [1], “o Teorema de Pitágoras (...) é visto, nesta abordagem, como consequência do Teorema de Tales” e este “...permite ainda tratar com rigor os critérios de semelhança de triângulos, que estão na base de numerosas demonstrações geométricas propostas” [1].

O Teorema de Tales vai ser, ainda, importante ao nível do Ensino Secundário, em numerosas situações. A título de exemplo, o Programa e Metas Curriculares – Matemática A, cuja implementação começou em 2015, defende a importância de se “reconhecer, utilizando argumentos geométricos baseados no Teorema de Tales (...) as coordenadas do ponto médio do segmento de reta [AB]” [2]. Verifica-se também que o seu “corolário”, o Teorema de Pitágoras, é essencial para o estudo da distância entre dois pontos e, conseqüentemente, para a introdução da Geometria Analítica.

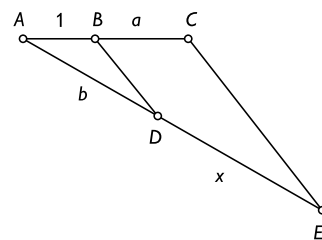
Além de medir a altura de pirâmides, o Teorema de Tales pode também servir para fazer cálculos. Nesta pequena nota apresentamos uma “calculadora de Tales”, que opera valores numéricos que são entendidos como a medida de comprimento de segmentos de reta. Assim, fixando uma unidade do plano e partindo de segmentos de reta de medidas de comprimento respetivamente iguais a a e b , vamos apresentar, recorrendo ao Teorema de Tales, a construção de segmentos de reta com medida de comprimento igual ao produto de a por b , ao quociente entre a e b , ao quadrado de a e à raiz quadrada de a . Não apresentaremos a construção da soma e da diferença de a e b por as considerarmos óbvias e, como tal, pouco interessantes.

Em tudo o que segue, dados $a, b > 0$, supomos que se encontra fixado um plano e uma respetiva unidade, assim como segmentos de reta de medidas de comprimento respetivamente iguais a a e a .

PRODUTO

De seguida, mostraremos uma construção geométrica que permite obter um segmento de reta com medida de comprimento igual ao produto de a por b . A ideia subjacente assenta na utilização do Teorema de Tales.

Começamos por construir um segmento [AC] com medida de comprimento igual a $a + 1$. Seguidamente, constrói-se um segmento de reta [AD], com comprimento b . Sendo B o ponto de [AC], tal que



[AB] tem uma unidade de comprimento, traça-se a reta BD e a reta r que lhe é paralela e que passa por C . Finalmente, seja E a interseção de r com AD .

Sendo x a medida de comprimento do segmento de reta [DE], então é possível afirmar que

$$x = ab.$$

De facto, pelo Teorema de Tales:

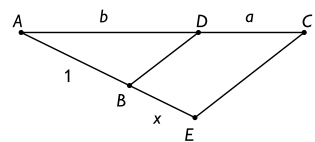
$$\frac{x + b}{b} = \frac{a + 1}{1},$$

e portanto $ab + b = x + b$, ou seja, x é igual ao produto de a por b .

Obviamente, para construir um segmento de reta com comprimento igual ao quadrado de a basta, na construção anterior, fazer b igual a a .

QUOCIENTE

De maneira semelhante, é possível utilizar o Teorema de Tales para construir um segmento de reta com medida de comprimento igual ao quociente de a por b . Seja [AC] um



segmento, com medida de comprimento igual à soma de a com b . Seguidamente, constrói-se um segmento de reta [AB],

com uma unidade de comprimento. Sendo D o ponto do segmento de reta [AC], tal que [AD] tem medida de comprimento b , traça-se a reta BD e a reta r que lhe é paralela e que passa por C . Finalmente, seja E a interseção das retas r e AB .

Então, sendo x o comprimento do segmento de reta [BE], e tendo em conta que as retas BD e CE são paralelas, podemos concluir que

$$\frac{x + 1}{1} = \frac{a + b}{b}.$$

Logo, x é igual ao quociente de a e b :

$$x = \frac{a}{b}.$$

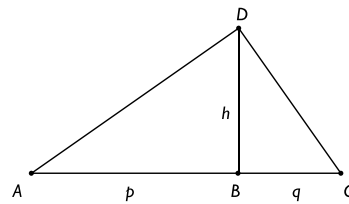
RAIZ QUADRADA

Antes de apresentar a construção de um segmento de reta com medida de comprimento igual à raiz quadrada de a , gostaríamos de chamar a atenção para um conhecido resultado matemático que deriva da semelhança de triângulos. Este resultado é frequentemente referido como teorema da altura.

Seja [ACD] um triângulo retângulo em D e h o comprimento da respetiva altura, cujo pé é o ponto B .

Se p e q são os comprimentos, respetivamente dos segmentos [AB] e [BC], então

$$h^2 = pq.$$



Nas condições do formulado teorema da altura, é um facto bem conhecido que os triângulos retângulos [ABD] e [BCD] são semelhantes. Logo, é

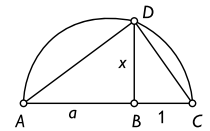
possível estabelecer a seguinte relação entre os comprimentos dos seus catetos:

$$\frac{p}{h} = \frac{h}{q},$$

donde resulta a igualdade desejada.

A construção que de seguida será descrita também assenta noutro conhecido resultado geométrico. Se o segmento [AC] é o diâmetro de uma circunferência, então qualquer triângulo inscrito na semicircunferência AC é rectângulo.

Para construirmos um segmento de reta com medida de comprimento igual à raiz quadrada de a , começamos por construir um segmento de reta [AC], com medida de comprimento igual a $a + 1$. Seguidamente, constrói-se uma semicircunferência com diâmetro [AC]. Sendo B o ponto do segmento de reta [AC], tal que a seja a medida do comprimento de [AB], traça-se a reta r , perpendicular a AC e que passa por B . Finalmente, o ponto D resulta da interseção da reta r com a semicircunferência.



Sendo x a medida de comprimento do segmento de reta [BD], $x = \sqrt{a}$.

O triângulo [ACD] é retângulo, logo a afirmação é uma consequência do teorema da altura.

Gostaríamos ainda de assinalar que esta construção pode ser realizada com recurso à régua e compasso. O próprio Descartes a inclui no seu livro [6], onde também inclui a construção de segmentos de reta com medida de comprimento igual ao produto de a por b e ao quociente e entre a e b . Também pensamos ser necessário frisar que as ideias acima referidas surgem como propostas no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico, para a demonstração do Teorema de Pitágoras [1].

RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Sem perda de generalidade, iremos considerar as equações de segundo grau com a forma:

$$x^2 - ax + b = 0, \text{ com } (a^2 \geq 4b). \quad (1)$$

É bem conhecido o facto de que esta equação tem soluções reais se e só se $a^2 - 4b \geq 0$. Nesse caso, as soluções de (1) podem ser obtidas com recurso às operações de cálculo do

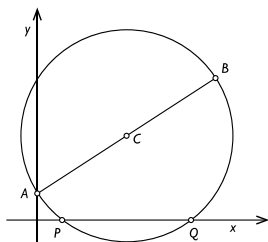
produto, do quociente e da raiz quadrada.

Isto é, utilizando as ideias acima descritas, podemos construir com régua e compasso segmentos cujas medidas coincidem com o valor numérico das soluções da equação (1). Não obstante, gostaríamos de apresentar outra construção legada pelos gregos que também permite determinar geometricamente as raízes de uma equação do segundo grau acima referida.

Para simplificar a exposição, vamos considerar o plano munido de um referencial cartesiano e começamos por construir a circunferência de diâmetro AB , tal que

$$A = (0, 1) \text{ e } B = (a, b).$$

O próximo passo será mostrar que, se P e Q são os pontos interseção (quando existem) da circunferência com o eixo das abcissas, então as abcissas desses pontos são as raízes da equação (1).



Sendo C o centro da circunferência de diâmetro AB é possível afirmar que as coordenadas cartesianas do ponto C são:

$$C \left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2} \right)$$

e o raio da circunferência coincide com a metade do comprimento do segmento $[AB]$, ou seja

$$r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Assim, a equação que define a circunferência será

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Obviamente, para que a circunferência intersekte o eixo das abcissas, o seu raio não pode ser inferior à ordenada de C :

$$r \geq \frac{b+1}{2}.$$

Logo,

$$\frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4} \geq \frac{(b+1)^2}{4}$$

e, após algumas simplificações, podemos concluir que a circunferência corta o eixo das abcissas se e só se $a^2 \geq 4b$.

Finalmente podemos obter uma condição para as abcissas dos pontos P e Q , quando $a^2 \geq 4b$. Fazendo $y = 0$ na equação da circunferência:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Esta última igualdade, após simplificações, é equivalente à equação (1).

Ainda gostaríamos de frisar que foi considerado o caso em que a e b são positivos, os outros casos, com as devidas adaptações, levam a uma construção geométrica, obtida a partir da analisada, por reflexão nos eixos coordenados.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira e M.^a C. Timóteo. “Programa e Metas Curriculares – Matemática, Ensino Básico”. MEC, 2013.
- [2] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, L. Loura e M.^a C. Timóteo. “Programa e Metas Curriculares – Matemática A”. MEC, 2014.
- [3] A. J. Franco de Oliveira. *Geometria Euclidiana*. Universidade Aberta. ISBN: 972-674-155-6, 1995.
- [4] D. Pacheco de Amorim. *Compêndio de Geometria*. Biblioteca Básica de Textos Didáticos de Matemática, Vol. I, SPM, ISBN: 972-99521-3-4.
- [5] L. Bernardino. *Temas Escolhidos de Geometria do Triângulo* – Tese para obtenção do grau de mestre. Universidade do Algarve, 2008 acessível em <http://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/490/1/LBernardino-Mestrado-Matemática06-05-2008.pdf>
- [6] R. Descartes. *A Geometria*. Editorial Prometeu. Lisboa. 2001.

SOBRE OS AUTORES

Luís Bernardino é mestre em Matemática, com especialização em Matemática para o Ensino, pela Universidade do Algarve, e licenciado em Matemática, ramo de Formação Educacional, pela mesma instituição. Tem-se dedicado à resolução de problemas e à geometria euclidiana, nomeadamente à sua aplicação em contexto de sala de aula.

Juan Carlos Sánchez Rodríguez é mestre em Ciências Físico Matemáticas da Universidade de Kharkov, Ucrânia, e doutorado em Matemática, especialidade de Análise Matemática, pela Universidade do Algarve. Tem-se dedicado à investigação de algumas classes de operadores integrais singulares, a tópicos da teoria dos problemas de contorno das funções analíticas e a certos problemas de fatorização de funções matriciais. A geometria euclidiana é um tópico que lhe é muito caro, desde os tempos em que, enquanto concorrente, participava em olimpíadas matemáticas. Tem orientado várias teses de mestrado nessa área. Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, é também membro do Centro de Investigação CEAFEL - IST.



GONÇALO MORAIS CONVERSA COM **JOÃO PEDRO NUNES**

João Pedro Nunes é sinónimo de excelência. Entre os seus alunos, grupo no qual tenho o privilégio de me encontrar, as suas aulas são momentos de culto, em que somos levados de uma forma quase inconsciente através do seu tema predileto: Cálculo Estocástico e aplicações ao *pricing* e ao *hedging* de derivados financeiros, quer no Doutoramento em Finanças no ISCTE, quer no Mestrado de Matemática Financeira, programa conjunto entre o ISCTE e a Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL)¹. Tendo estes instrumentos financeiros estado no centro da grande crise dos últimos anos, o estudo dos mercados financeiros, de alguma forma desprezado pelas correntes mais ortodoxas da economia antes da crise, tornou-se parte integrante de todos os textos económicos. Por todas estas razões, tornou-se premente dar voz a uma das figuras centrais em Portugal no estudo destes temas.



GONÇALO MORAIS
Instituto Superior
Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO Bem, vamos lá começar...

JOÃO NUNES Isto vai ser complicado, porque não sei que tipo de perguntas vai fazer...

GONÇALO Bem, para ser franco, eu também não sei... Vamos ter uma conversa sem plano. Acho que são as melhores...

JOÃO NUNES OK! Vamos lá então...

GONÇALO Dado o tema atual dos seus trabalhos não deixa de ser algo surpreendente que a sua licenciatura seja em Gestão. Como é que isso aparece? Porque para uma pessoa de matemática, gestão não é bem uma ciência...

JOÃO NUNES É verdade e eu agora, por maioria de ra-

zão, posso corroborar isso. Aquilo acaba por ter pouco conteúdo epistemológico, acabando por ser mercearia exposta em linguagem erudita. A questão é: por que raio fui eu tirar uma licenciatura de cinco anos em Gestão? A verdade é que a decisão foi muito pouco consciente. Eu sempre gostei muito de matemática mas não tinha a mínima ideia do que iria escolher. Fiz uns testes psicotécnicos e apontaram para economia ou gestão. Hoje, se eu pudesse voltar atrás, provavelmente escolheria economia, porque tem um conteúdo epistemológico mais sustentado e dá melhores bases teóricas. Gestão é um assunto que um tipo faz um MBA e aprende aquilo tudo num ano. Houve também um fator mercantilista na minha decisão. Na altura, pensei sobre qual a forma mais expedita e honesta de ganhar dinheiro. Economia ou gestão apareceram naturalmente no topo das escolhas. A minha ideia era acabar a licenciatura e ir trabalhar



para uma grande empresa e ganhar dinheiro e gastar dinheiro. Depois de começar a fazer a licenciatura, comecei a perceber que aquilo de que eu gostava mesmo era das cadeiras de Matemática. Quando terminei a licenciatura, fui convidado para ficar no ISCTE como assistente, ao mesmo tempo que comecei a trabalhar num *broker*. Ao início, o meu trabalho no *broker* foi muito engraçado, mas, com o tempo, aquilo começou a tornar-se repetitivo. Percebi que o que eu gostava mesmo de seguir era uma carreira académica e, como estava nesta área, decidi ir para o ISEG estudar Economia. Fiz o mestrado em Economia Monetária e Financeira, mas percebi que ainda não era bem disso que eu gostava. Decidi então ir para Finanças, que era, dentro destas áreas, o que tinha maior conteúdo matemático.

Dentro de Finanças, aquilo que eu estava mesmo motivado para estudar eram os derivados financeiros,

pois para se perceber a montagem, o *pricing* e o *hedging*, era necessário perceber Cálculo Estocástico, assunto do qual eu percebia praticamente zero.

GONÇALO Estamos a falar de que ano?

JOÃO NUNES Estamos a falar de 1994 ou coisa parecida. Acho que é importante dizer uma coisa. A única pessoa que me deu um sentido de orientação na minha carreira nestes tempos foi o António Gomes Mota. Tive a sorte de o ter como professor aqui na disciplina de Gestão Financeira, tive a sorte de ele estar à frente do Depart-

¹ Ao longo desta entrevista irão aparecer muitos termos em inglês. Ainda que existam traduções literais dos mesmos, estas nunca são usadas no quotidiano. Para nos mantermos o mais fiéis possível a realidade, decidimos manter os termos na forma em que são habitualmente utilizados.

tamento de Finanças e foi ele que me convenceu a que prosseguisse a carreira académica. Tinha naturalmente de fazer o doutoramento e, perante todas as escolhas, parecia-me natural fazê-lo em Finanças. Fui então para Inglaterra, para Warwick, estudar Finanças. Hoje, se voltasse atrás, teria preferido ir para os Estados Unidos (EUA). No meu caso, as coisas correram bem, mas o programa era um pouco desajustado aos meus interesses, pois a parte letiva do programa era comum a todas as áreas da *Business School*. Ou seja quem fosse para Gestão, Marketing, Recursos Humanos, Economia ou Finanças tinha a mesma parte letiva, o que significava que esta não interessava a ninguém. No meu caso, as coisas correram bem porque o meu orientador vinha da Física e estruturámos, em conjunto, uma parte letiva que fez com que eu, durante dois anos, apenas tivesse disciplinas de Matemática e de Física. Acabei por passar assim dois anos muito giros em que finalmente estudei coisas que realmente me interessavam.

GONÇALO Esses tempos terão sido os melhores anos para estudar Derivados Financeiros...

JOÃO NUNES Sim, na altura não havia o estigma que existe hoje. Os mercados financeiros, nesses tempos, até eram um bocadinho endeusados. Por outro lado, no caso específico de Warwick, havia dois aspetos interessantes. Em primeiro lugar, já tinha um mestrado em Matemática Financeira. Em segundo lugar, tinha um centro de investigação chamado *Financial Options Research Center*, que permitia fazer alguma investigação aplicada. O centro era financiado por bancos da *City* e muitos dos estudantes de doutoramento neste centro entravam logo alocados a um determinado projeto. Ou seja, o produto final era essencialmente um trabalho de consultoria, mas permitia que o trabalho desenvolvido pelos alunos também tivesse uma componente relevante de investigação. Então eu acabei por ter sorte em ir para Warwick. Mas se o orientador que nós tínhamos não fosse responsável, as coisas podiam correr de uma forma trágica. A perspectiva dominante era a de que um aluno de doutoramento chegava, tinha uma folha em branco e começava a escrever a Tese de Doutoramento. Se o orientador não fosse disciplinado e bom, as coisas podiam descambar na tal forma trágica que referi. Depois voltei, publiquei os meus trabalhos e terminei o doutoramento.

A partir daí, todos os meus esforços foram para fazer investigação na área de Matemática Financeira, ou seja,

a aplicação de Análise Estocástica a *Option Pricing*, ou à Modelização Temporal de Taxa de Juro e, mais recentemente, ao Risco de Crédito.

GONÇALO E na base de tudo está a Análise Estocástica...

JOÃO NUNES Sim, na base de tudo está o chamado *Model Risk*, que representa a dinâmica do preço dos ativos. Muitas vezes a realidade está afastada deste modelo...

GONÇALO Era precisamente isso que eu queria discutir...

JOÃO NUNES Nós precisamos sempre de um padrão que nos ajude a perceber a realidade de forma a sabermos minimamente onde é que estamos e para onde é que vamos. Muitas vezes, o processo que usamos não nos indica o melhor caminho. No fundo, existe sempre uma dialética, um conflito permanente, pois, por um lado, quero um modelo o mais geral possível, com pressupostos o mais realistas possíveis, e, por outro, que do ponto de vista analítico seja minimamente tratável. Dito de outra forma, quero um modelo realista mas que me permita estudar vários instrumentos financeiros. Vou dar um exemplo. Um banco de investimento tem no seu *portfolio* uma grande variedade de activos: tem ações, ativos que dependem da evolução das taxas de juro e outros ativos que dependem do risco de crédito. Atualmente existem instrumentos financeiros que essencialmente transferem riscos associados ao crédito, como é o caso dos *Credit Default Swaps* (CDS's). Ainda há pouco tempo, as pessoas que faziam a monitorização das *equities*, ou seja, das ações, estavam desligadas das pessoas que avaliavam e monitorizavam os derivados do risco de crédito. Neste momento, já há modelos que fazem a integração das duas coisas, e isto faz sentido.

GONÇALO Mas fica um problema muito mais difícil de tratar...

JOÃO NUNES Fica mais difícil, mas a aprendizagem empírica mostra que o que acontece no mercado dos CDS's tem repercursões no mercado das opções sobre *equities*. Há uma coisa simples. Se nós pensarmos numa *put*, ou seja, uma opção de venda sobre uma ação, e numa *put* com um preço exercido e com um *strike* muito baixos, basicamente isto é um seguro de crédito, porque a *put* só me dá um *payoff* se o *spot* descer abaixo do *strike*. Isto significa que eu pago o prémio de uma *put* e fico seguro caso o

valor da ação caia por aí abaixo. Aquando da falência da Lehman Brothers, havia no mercado uma série de *put's* com o valor de dois dólares e meio², ou seja, havia a expectativa de que a cotação fosse cair abaixo desse valor.

GONÇALO Hoje os mercados são uma coisa malvista, mas, quando estudamos a história dos mercados financeiros, o aparecimento do mercado de futuros no Japão, em 1673, pretendia basicamente regular e assegurar o fornecimento de arroz. Ou seja, havia uma racionalidade por detrás disto. Hoje, a questão que muitas vezes se coloca é se terá sido a eficiência dos mercados financeiros que levou à crise que atualmente vivemos ou se terão sido fatores externos que terão levado à crise nos mercados financeiros? Porque, quando estabelecemos o paralelo natural entre a atual crise e a crise de 1929, vemos que a crise financeira de então foi o culminar de uma série de crises na agricultura, na indústria, no mercado imobiliário e, finalmente, nos mercados financeiros em todo o mundo.

JOÃO NUNES A crise atual é diferente, visto que a crise teve origem nos mercados financeiros. O problema não passa pela sofisticação dos instrumentos financeiros nem pela titularização de uma série de riscos. O problema, na minha opinião, foi a desregulamentação excessiva. Houve uma série de produtos financeiros criados sobre hipotecas feitas por bancos regionais. Estes bancos não se preocupavam minimamente com o risco de crédito dos seus clientes porque, na semana seguinte, empacotavam uma série de hipotecas e vendiam-nas a outro banco através dos chamados *Mortgage Backed Securities* ou MBS's. Este banco, por sua vez, não se preocupava muito com o produto que estava a comprar porque na, semana seguinte, empacotava esse produto financeiro com outros produtos financeiros que também tinha num novo instrumento financeiro chamado *Collateralized Debt Obligation*, ou CDO, e vendia-o a outro banco. Ora, o subjacente era sempre o mesmo: empréstimos mal concedidos. Estávamos, no fundo, a construir um castelo de cartas. O problema era a completa falta de transparência do processo essencialmente a dois níveis.

Em primeiro lugar, estamos a falar de produtos financeiros com fichas técnicas de 70 páginas completamente indecifráveis de legislação. Ou seja, lendo as fichas técnicas, era impossível compreender o funcionamento dos produtos. Em segundo lugar, e diretamente ligado à desregulamentação, a transação e a detenção



em carteira destes produtos não eram convenientemente reflectidas pelos bancos nas suas demonstrações financeiras. Quando se analisava o balanço de um banco, não se obtinha uma imagem correta da qualidade dos activos que o banco tinha em carteira nem do risco financeiro associado a esse mesmo banco. Quando a crise rebentou, criou-se uma desconfiança total no mercado interbancário, o que fez com que os mercados monetários parassem.

Pode haver sofisticação financeira mas tem de haver regulamentação. Este problema não teria existido se esses instrumentos financeiros tivessem de ser obrigatoriamente transacionados numa bolsa organizada...

GONÇALO Porque aí teriam de ser standardizados...

² Note-se que no início de setembro de 2008, a cotação das ações da Lehman Brothers estava ligeiramente acima dos dez dólares. No dia 15 de setembro de 2008, esta instituição abriu falência.

JOÃO NUNES Precisamente, pois ninguém vai comprar alguma coisa sem perceber o que é que está a comprar, a não ser que tenha a garantia de que, no dia seguinte, consegue vendê-la mais cara. Era isso que acontecia. Além disso, se isto for transacionado no mercado organizado, conseguimos saber exatamente quem comprou o quê e quem é que detém os produtos em carteira. Isto tornaria muito mais fácil perceber qual a exposição ao risco de cada entidade.

GONÇALO E hoje isso está corrigido?

JOÃO NUNES Eu acho que não. Há algumas melhorias. Por exemplo, a partir do início de 2017, todos os produtos financeiros complexos, normalmente denominados produtos estruturados, transacionados no mercado português, têm de ser acompanhados com uma ficha técnica normalizada. No entanto, continua a existir uma série de produtos estruturados que são transacionados fora de bolsa, pelo que não é de admirar que, daqui a uns anos, haja outra bolha especulativa. Além disso, existe outro problema que não foi resolvido, o problema das agências de *rating*, porque, tal como os mercados financeiros, elas são essenciais. Funcionam mal, mas são essenciais. Seria humanamente impossível ter uma estratégia de investimento com todos os títulos existentes se estes não tivessem uma notação de risco. O problema é quando essa notação é mal feita, que foi precisamente o que aconteceu na crise do *subprime*.

GONÇALO Falando agora mais sobre a Matemática Financeira e sobre o mestrado de que é responsável, podia contar-nos como é que isso apareceu?

JOÃO NUNES Eu não estive na génese do mestrado que foi uma pós-graduação no CMAF e que surgiu de uma colaboração, pelo menos, entre a FCT/UNL e a FCUL. Esse programa existiu durante um ano e depois terminou. Passados uns tempos, um colega aqui do ISCTE pôs-me em contacto com o Miguel Ramos, que na altura era presidente do Departamento de Matemática da FCUL, e com a Isabel Simão, que também trabalhava na área de Matemática Financeira, e surgiu a ideia de lançar o mestrado. Esta decisão baseou-se na experiência bem-sucedida que eles tiveram com aquela pós-graduação, tendo comprovado que existia não só interesse como mercado, e no facto de todos nós gostarmos imenso de trabalhar naquela área, pelo que o melhor de dois mun-

dos era ensinar nesse tipo de temas e porque constatámos que havia algum *deficit* de formação nessa área, quer na área do *pricing* de derivados financeiros quer na área da avaliação de riscos.

GONÇALO E é uma formação que os diferencia no mercado de trabalho...

JOÃO NUNES Não só os diferencia no mercado de trabalho como se mostra que é um assunto no qual os alunos provenientes de Matemática e de Física têm uma enorme vantagem comparativa relativamente aos alunos que vêm de Economia.

GONÇALO Quando se encontra um preço para um instrumento financeiro, encontra-se aquele que é o preço para o qual não existem oportunidades de arbitragem. Isto bate diretamente com o pressuposto de que os mercados são completos...

JOÃO NUNES Exatamente, porque caso contrário o preço não é único...

GONÇALO A pergunta natural é saber se os mercados são completos...

JOÃO NUNES Humm...

GONÇALO Empiricamente, visto que teoricamente podem ser o que nós quisermos...

JOÃO NUNES Empiricamente, eu não sei testar a hipótese dos mercados serem ou não completos. Conseguimos verificar empiricamente se são eficientes ou não, nas suas múltiplas alternativas (forma fraca, semi-fraca ou forte). O facto de os mercados não terem hipóteses de arbitragem é fácil de aceitar mas é discutível. Isto é, pode haver uma hipótese de arbitragem mas ela é rapidamente explorada e deixa de existir. Ou seja, é bastante razoável pressupor a hipótese de não-arbitragem. Aceitando isto, podemos garantir o que costuma designar-se por *Risk Neutral Measure*. A inclusão da hipótese de que os mercados são completos permite-nos mostrar que esta medida é única e, portanto, o preço de não-arbitragem é único. Não sendo completos, ao invés de ter um preço único, eu terei um intervalo de preços possíveis. Do ponto de vista matemático, o que se perde é elegância, pois tendo em conta os custos de transação se o in-

tervalo de preços for suficientemente pequeno é como se estivéssemos numa situação sem arbitragem. O mais fácil é ser agnóstico!

GONÇALO [Risos] Isto leva-nos a outro tema que aparece ligado a este. Quando comecei a estudar estes temas, foi-me sugerido pelo Professor Dias Curto que lesse o artigo do Eugene Fama, de 1965, entretanto Prémio Nobel da Economia, que por sua vez já se baseava num trabalho anterior do Mandelbrot, em que se mostra que a volatilidade dos preços poderia, por vezes, seguir um processo não baseado na distribuição normal mas em distribuições com caudas mais pesadas. Este facto, empiricamente, leva-nos a que, na prática, a volatilidade de certos ativos em certos momentos seja virtualmente infinita. Contudo, para calcular o *pricing* de um ativo, a volatilidade é essencial...

JOÃO NUNES Sim, existem mesmo derivados sobre isso. Eu posso comprar ou vender volatilidade...

GONÇALO Assim, isto não nos leva à conclusão de que a tentativa de encontrar o preço de um ativo não é uma tarefa à partida perdida?

JOÃO NUNES Boa pergunta... Se pensarmos numa opção financeira, o parâmetro determinante para sabermos o preço é de facto a volatilidade, ou seja, o desvio padrão da taxa de rentabilidade. Se eu estiver a analisar uma opção em que a maturidade ocorre daqui a três meses, aquilo que eu estou a analisar é de facto a volatilidade para os próximos três meses. Para fazermos isto ou arranjamos uma série histórica de preços, calculamos a taxa de rentabilidade do passado e assumimos que o futuro é uma continuidade histórica do passado e temos o risco de isso não acontecer, ou tentamos arranjar uma medida que seja *forward-looking*. Isto significa, basicamente, irmos buscar uma opção com a mesma maturidade sobre o mesmo ativo e, baseado no preço dessa opção, sabermos qual o valor da volatilidade de que precisamos de forma a que o valor encontrado por um modelo, por exemplo Black-Scholes, nos permita calcular esse preço. Isto é aquilo a que se chama volatilidade implícita. Basicamente, eu estou a dizer que vou com a manada. Podemos fazer algo mais se usarmos, por exemplo, o modelo de Heston e assumirmos que a volatilidade segue, ela própria, um modelo estocástico. E você pode dizer-me que vou ter o mesmo problema de especificar mal o meu

modelo. Aqui, voltamos ao início da nossa conversa em que discutimos o *Model Risk*. Isto é interessante porque no modelo mais célebre de opções, que valeu um Prémio Nobel, que é o modelo de Black-Scholes, de 1973, a volatilidade é constante, a taxa de juro é constante e a taxa de rentabilidade do ativo subjacente não tem caudas pesadas, mas sim uma distribuição normal. No entanto, eu continuo a esforçar-me para obter modelos alternativos para avaliar os mesmos contratos, ou seja, modelos com pressupostos mais realistas. Mas isto é uma luta incessante. Além disso, quando olhamos para os modelos sobre a estrutura temporal de taxas de juro, por exemplo, o modelo de Vasicek, que se baseava num processo de Ornstein-Uhlenbeck, foi muito atacado porque previa taxas de juro negativas. Hoje vamos ao mercado e o que é que encontramos? Taxas de juro negativas!

GONÇALO Uma última pergunta. E os mercados são eficientes ou não? Ou seja, o preço de um ativo financeiro contém toda informação desse produto?

JOÃO NUNES A pergunta é difícil e pergunto: qual mercado? Se estivermos a falar de um mercado com muita liquidez, com uma quantidade enorme de *players*, com um volume de negócio gigantesco, por exemplo, o mercado cambial, eu direi que sim. Se estivermos num mercado com pouca liquidez, com baixo volume de negócios, será que este mercado segue um processo de Markov? Neste caso, direi que não. Ou seja, eu não posso responder a uma pergunta geral sobre se os mercados são eficientes ou não. Esta terá sempre de ser contextualizada para um caso bem determinado.





NUNO CAMARINHO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

QUE ANO É HOJE?

No passado dia 23 de abril celebrou-se o Dia Mundial do Livro, uma data escolhida para homenagear Cervantes e Shakespeare, que morreram há 400 anos “mais ou menos” nesse dia.

Celebram-se este ano os 400 anos da morte de William Shakespeare e também de Miguel de Cervantes, dois dos escritores mais importantes da História da Literatura e considerados os maiores dos respetivos países.

É muitas vezes referida a coincidência de terem morrido em dias sucessivos, Cervantes a 22 de abril de 1616 e Shakespeare a 23 de abril. Na verdade, não foi exatamente assim, já que nesse período Inglaterra se regia ainda pelo antigo calendário Juliano (implantado por Júlio César em 46 a.C.) enquanto em Espanha vigorava já o calendário Gregoriano, implantado pelo Papa Gregório XIII em 1582, através da bula *Inter gravissimas*. A diferença entre os dois calendários é de dez dias, pelo que a data de morte de Shakespeare seria 3 de maio no nosso calendário, 11 dias depois da do seu camarada de letras.

Estamos tão habituados à utilização de um calendário universal que pode parecer-nos bizarro que as datas variem de país para país, mas o calendário atual (o referido calendário Gregoriano) foi adotado inicialmente apenas por alguns países (entre os quais, Portugal e Espanha), a Grã-Bretanha só o adotou em 1752, o Japão em 1873, a China em 1912 e a Grécia em 1923.

Este calendário apresenta algumas vantagens em relação aos precedentes, já que se aproxima bastante do ano solar (existe uma pequena diferença de 27 segundos por

ano) e regulariza os anos bissextos, uma questão que não tinha sido completamente resolvida. O calendário Juliano é ainda utilizado por muitas igrejas ortodoxas, embora os países onde estas estão sediadas utilizem o calendário Gregoriano. Como curiosidade, a transição entre calendários obrigou a um salto de 4 para 15 de outubro de 1582, não sei se com a respetiva diminuição nos salários.

Mesmo no nosso mundo globalizado subsistem alguns calendários alternativos, por exemplo, o norte-coreano, ou calendário Juche, segundo o qual o primeiro ano coincide com o nascimento de Kim-Il-Sung, em 1912, o que faz com que estejam atualmente no ano 105; também o calendário arménio, que se iniciou no nosso ano de 552 d.C., ano em que a Igreja Arménia se separou da Igreja Católica; ou ainda o “Era Unix” ou “Unix time”, usado pelo sistema operativo homónimo e que conta os segundos transcorridos desde as 00:00:00 de 1 de janeiro de 1970.

Mas voltando a Cervantes e a Shakespeare, a verdade é que o dia 23 de abril foi escolhido para o Dia Internacional do Livro em homenagem a ambos os escritores, pode não ser exato, mas é mais do que merecido, as suas obras estão vivas e bem vivas, independentemente do calendário pelo qual nos regemos.

EQUIPA PORTUGUESA EM HONG KONG PARA OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS

Já arrancou em Hong Kong a 57.^a edição das Olimpíadas Internacionais de Matemática (OIM), uma das maiores competições científicas do mundo, em que competem centenas de participantes de mais de 100 países. A equipa que representa Portugal nas OIM rumou ao continente asiático no passado dia 5 de julho, e é composta por Alberto Pacheco, Bruno Carvalho, David Correia, Duarte Nascimento, Henrique Navas e Pedro Fernandes. Da comitiva fazem ainda parte Joana Teles (SPM/UC) e António Salgueiro (UC). As OIM decorrem até ao dia 16 de julho, altura em que serão conhecidos os resultados conquistados pelos olímpicos nacionais. Portugal participou pela primeira vez nas OIM em 1989 e, desde então, já conquistou três medalhas de ouro (em 2011, 2012 e 2013), quatro de prata, 26 de bronze e 23 menções honrosas. Em setembro outro grupo de jovens portugueses partirá, desta vez, para o Chile, para participar na 31.^a edição das Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, que se realizam entre 23 de setembro e 1 de outubro. A participação de Portugal nestas competições é organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática, e a seleção e a preparação dos alunos está a cargo do Projeto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. O Ministério da Educação, a Ciência Viva, o Novo Banco, a Fundação Calouste Gulbenkian e a Pathena apoiam a realização das Olimpíadas.

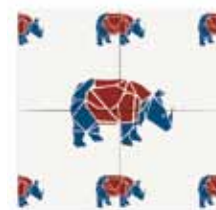


PT-MATHS-IN SERÁ PONTO DE ENCONTRO ENTRE A MATEMÁTICA E A INDÚSTRIA NACIONAL

O passado dia 20 de maio ficou marcado pela primeira assembleia geral da Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação (PT-MATHS-IN), o núcleo português da European Service Network of Mathematics for Industry and Innovation, que tem como objetivo criar sinergias entre a matemática e o setor industrial. Formada pelos principais centros de investigação em matemática do País, a PT-MATHS-IN procurará fomentar a transferência de tecnologia matemática para os contextos empresarial e industrial, com vista ao aumento da competitividade tanto dos grupos de investigação envolvidos como da indústria nacional. O seu modelo de ação vai materializar-se sob a forma de parcerias, desenvolvimento de aplicações científicas, candidaturas a projetos, dinamização de grupos de investigação transversais, formação e divulgação, entre outras iniciativas. A página oficial da PT-MATHS-IN, constituída como uma secção da Sociedade Portuguesa de Matemática, pode ser consultada em spm.pt/pt-maths-in.

LISBOA RECEBERÁ CONFERÊNCIA EUROPEIA DE BIOMATEMÁTICA EM 2018

A comunidade biomatemática nacional e internacional estará reunida em Lisboa no verão de 2018 para a 11.^a edição da European Conference on Mathematical and Theoretical Biology (ECMTB), um importante evento sobre os mais recentes desenvolvimentos da investigação nos campos da matemática e das ciências da vida e suas interseções. A conferência, organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática e pela European Society of Mathematics and Theoretical Biology, terá lugar na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. A edição que a antecede decorre entre 11 e 15 de julho de 2016, em Nottingham, Reino Unido.



LOCAL DO PRÓXIMO EUROPEAN CONGRESS OF MATHEMATICS DECIDIDO EM JULHO

Em vésperas do 7.º European Congress of Mathematics (ECM), que se realiza em Berlim entre 18 e 22 de julho, decorrerá também na capital alemã, nos dias 16 e 17, o European Mathematical Society Council Meeting. Neste encontro, que ocorre de dois em dois anos, ficará decidido o local do próximo ECM, com data marcada para 2020. O EMS Council Meeting reunirá associados da European Mathematical Society e representantes de sociedades matemáticas e de instituições científicas de toda a Europa, sendo que a SPM estará representada por Fernando P. Costa (presidente) e por Jorge Buescu (vice-presidente).

VI ENCONTRO IBÉRICO DE MATEMÁTICA RSME-SPM REALIZA-SE EM OUTUBRO

Entre 6 e 8 de outubro, a Universidade de Santiago de Compostela acolherá o VI Encontro Ibérico de Matemática, organizado em conjunto pela Sociedade Portuguesa de Matemática e pela Real Sociedad Matemática Española. As inscrições estão abertas em <http://www.usc.es/congresos/iberomat/>. Seguindo a tradição das anteriores edições, o encontro será estruturado em torno de três áreas: Álgebra e Combinatória, Equações Diferenciais Parciais Aplicadas a Fluidos e Materiais, e Informática Teórica/Ciência Computacional.



FEIRA DA MATEMÁTICA REGRESSA NO PRÓXIMO ANO LETIVO

O Museu Nacional de História Natural e da Ciência da Universidade de Lisboa (MUHNAC) voltará a receber a Feira da Matemática, que conta já três edições. Os dias 21 e 22 de outubro oferecerão, à semelhança dos anos anteriores, um sem-número de atividades matemáticas que agradarão a miúdos e a graúdos, como jogos, oficinas, palestras, demonstrações, visitas orientadas e sessões do Circo Matemático, entre outras. Como é habitual, o primeiro dia da feira será dedicado às escolas, que poderão efetuar as suas inscrições no início de setembro. No segundo dia, o público terá entrada livre no museu, onde poderá participar neste grande evento matemático, dinamizado por investigadores, professores e colaboradores de várias instituições do País. A Feira da Matemática realizou-se pela primeira vez em 2014, com o objetivo de promover e divulgar as ciências matemáticas junto da sociedade. A terceira edição é organizada conjuntamente pelo MUHNAC, pela Sociedade Portuguesa de Matemática, pela Associação de Professores de Matemática, pela Associação Ludus e pela Matemática do Planeta Terra.





**FALECEU ANTÓNIO
ST. AUBYN, ANTIGO
PRESIDENTE DA SPM**

António St. Aubyn, presidente da SPM entre 1992 e 1994, faleceu no passado mês de abril. Professor Emérito do Instituto Superior de Agronomia (Universidade de Lisboa), e Professor Catedrático desde 1979, St. Aubyn nasceu em São Nicolau, Cabo Verde, a 10 de março de 1937. Formou-se em Coimbra, tendo estado associado à criação dos Centros de Cálculo da antiga Universidade Técnica de Lisboa, no final dos anos 1970, e à fundação do Centro Internacional de Matemática (CIM), em 1990. Representou a Sociedade Portuguesa de Matemática na fundação da Sociedade Europeia de Matemática e na sua primeira direção, tendo sido também representante de Portugal na União Matemática Internacional. António St. Aubyn tinha 79 anos e deixa um registo de uma intensa atividade académica e científica nas áreas da matemática e da estatística.

**KHAN ACADEMY PORTUGAL: MAIS DE 1000 VÍDEOS
DE MATEMÁTICA DISPONÍVEIS ONLINE**

Já são mais de 1300 os vídeos que a Khan Academy Portugal disponibiliza gratuitamente com conteúdos programáticos de matemática, física, química e biologia em <http://www.fundacao.telecom.pt/Home/KhanAcademy.aspx>. Os conteúdos de matemática são certificados pela Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), que se associou a este projeto em 2013, tendo já revisto e validado mais de 1000 vídeos. A missão da Khan Academy é a de contribuir para uma educação de qualidade acessível a qualquer pessoa, em qualquer lugar e de forma gratuita, através de uma biblioteca *online* de vídeos com exemplos e soluções sobre as mais diversas disciplinas. Em Portugal, a Fundação Portugal Telecom abraçou esta iniciativa, apoiando a adaptação para português dos vídeos, originalmente em inglês, de acordo com o currículo escolar nacional, contando com a colaboração da SPM, da Sociedade Portuguesa de Física, da Sociedade Portuguesa de Química e da INOVEDUC para a certificação dos conteúdos. Estes estão acessíveis numa lógica de multiplataforma através de computador, telemóvel e *tablet*, e disponíveis nas páginas da Fundação PT e da Khan Academy, bem como através do SAPO Vídeos, do MEO Kids, da Rede de Bibliotecas Escolares e do Youtube.

**AMERICAN MATHEMATICAL
SOCIETY APOIA
OFICIALMENTE REPOSITÓRIO
ARXIV**

A American Mathematical Society (AMS) tornou-se a primeira sociedade/editora a apoiar financeiramente o arXiv, um repositório *online* de livre acesso, que permite a consulta e a publicação de artigos científicos. Neste momento, em <http://arxiv.org/> é possível consultar mais de um milhão de artigos científicos sobre física, matemática, ciências da computação, biologia quantitativa, finanças e estatística. Com este compromisso a AMS vem reconhecer a importância deste fórum para investigadores e autores de todo o mundo, juntando-se assim a um conjunto de bibliotecas e de centros de investigação que apoiam o arXiv a nível global.

DEZ ANOS DE LUDUS

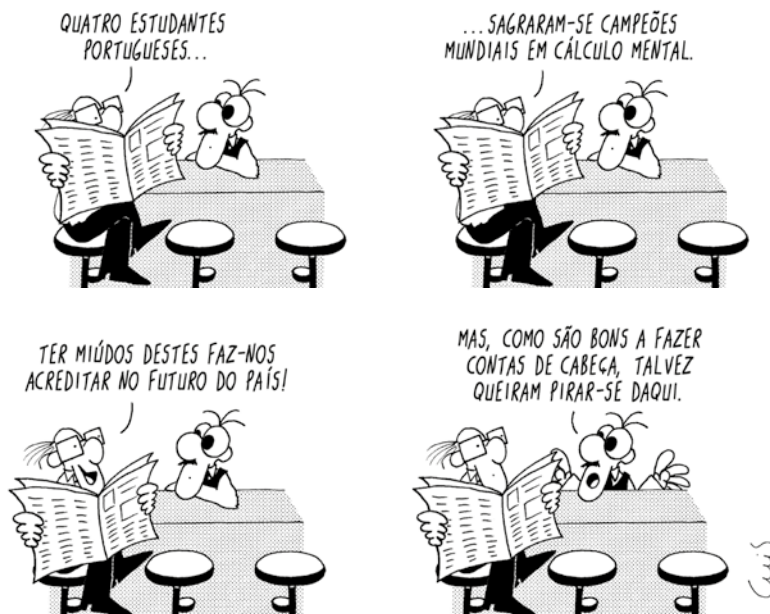
A Associação Ludus comemorou o seu décimo aniversário no dia 25 de junho, com um dia de atividades no Museu Nacional de História Natural e da Ciência da Universidade de Lisboa. Jogos, *puzzles*, origami, dança, circo e outras atividades serviram para assinalar uma década de história de promoção e de divulgação da matemática.





BARTOON

LUIS AFONSO



Publicado originalmente no jornal Público, em 17/05/2016. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Adérito Araújo Universidade de Coimbra

EDITORES:

Daniel Pinto Universidade de Coimbra

Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:

António Machiavelo Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Arsélio Martins** Escola Secundária José Estevão, Aveiro • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Joana Latas** HBD - Tourism Investments, Departamento de Educação, São Tomé e Príncipe • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Marcelo Viana** IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Sílvia Dias SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

Dossier – Comunicação e imagem

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:

Sociedade Portuguesa de Matemática

Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

TIRAGEM 1250 Exemplares

ISSN 0373-2681 • ICS 123299 • DEPÓSITO LEGAL: 159725/00

EM JEITO DE BALANÇO

O balanço pessoal de um sócio que teve a honra de ser o presidente.

Quando esta “Carta” for lida pelos sócios seus destinatários, já deverá ter sido eleita uma nova direção da SPM e eu estarei na posição algo ambígua de presidente cessante, encabeçando uma espécie de “governo de gestão” enquanto aguardo pacientemente a chegada do mês de setembro e a tomada de posse do nosso novo presidente. Nessa altura regressarei finalmente à condição de simples sócio anónimo, que foi a minha entre 1986 e 2012, ano em que fui desassossegado pelo Miguel Abreu para ser um dos seus vice-presidentes na direção de 2012/14 e, depois, por muitos colegas bem-intencionados que me convenceram de que poderia ser benéfico para a SPM ter-me como presidente em 2014/16.

Não é, naturalmente, possível ajuizar se essas convicções estavam corretas, nem mesmo recorrendo a duvidosos exercícios de história contrafactual. Mas é possível, e até desejável, fazer um balanço pessoal do que foram estes dois últimos anos à frente da SPM.

Antes de mais, foi uma enorme honra e uma ainda maior responsabilidade. Quando presidimos a uma instituição com a história, o prestígio e a visibilidade pública da SPM, ficamos imediatamente conscientes das nossas limitações e, por isso mesmo, do peso da nossa responsabilidade, pois a partir dessa altura tudo aquilo que dissermos ou escrevermos passará a ser visto como tendo sido dito ou escrito “pela SPM”! Depois, e ainda a nível da responsabilidade, vem sempre a delicada questão financeira: a SPM movimenta anualmente algumas centenas de milhares de euros (em 2015 foram quase quatro centenas de milhares) e, nos tempos que correm, é sempre um exercício de ris-

co equilibrar as contas de modo a que o balanço não seja negativo.

Mas estes dois “pesos” da presidência foram mais do que compensados por variadíssimos outros aspetos: antes de mais, por ter tido a sorte de trabalhar com uma equipa da direção e com um secretariado verdadeiramente “cinco estrelas”, por ter conhecido imensos colegas e estudantes no País, fruto das várias atividades para as quais um presidente é sempre solicitado, pelos contactos na Europa providenciados pela participação da SPM na European Mathematical Society e, naturalmente, pelo gratificante desafio que é a possibilidade de promovermos ou de colaborarmos de perto na promoção de projetos que nos entusiasmam. E destes houve imensos em que me envolvi nos últimos dois anos, alguns vinham de trás e foram concretizados neste mandato, outros começaram e acabaram neste biénio, outros ainda iniciaram-se agora e serão completados pela próxima direção. Enumerarei apenas alguns:

- ▶ A assinatura do protocolo entre a SPM e a Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa que regularizou a situação da Biblioteca de Permutas da *Portugaliae Mathematica*;
- ▶ O acolhimento, como secção da SPM, da rede portuguesa para a matemática na indústria e inovação, polo português da rede europeia EU-MATH-IN, que permitirá dinamizar a interação entre as empresas, a SPM e os Centros de Investigação aderentes e, deste modo, projetar a relevância da matemática e dos matemáticos na vida das empresas e no desenvolvimento do País;

- ▶ A realização do encontro AMS-EMS-SPM no Porto, cuja impecável organização, coordenada pelo Samuel Lopes, resultou num evento que, pela sua qualidade e pela sua dimensão, foi de extraordinária importância para a comunidade matemática portuguesa;
- ▶ Os passos iniciais para o acolhimento da 11th European Conference on Mathematical and Theoretical Biology em Lisboa, no verão de 2018, numa organização liderada por Carlos Braumann e que a SPM espera que venha a ter um importante impacto na comunidade biomatemática nacional e internacional;
- ▶ A celebração de um protocolo com a Porto Editora que resultará na criação de uma coleção de livros dedicados à formação (inicial e contínua) de professores e cujo primeiro volume, com saída prevista ainda em 2016, será a tradução portuguesa de um livro do Prof. Hung-Hsi Wu, que terá por título *Compreender os Números na Matemática Escolar*;
- ▶ A criação de um site na Internet e a publicação, ainda em 2016, na nossa coleção Biblioteca Básica de Textos Didáticos de Matemática, de um livro com estudos de Vítor Bonifácio e Helmuth Malonek sobre a *Bibliotheca do Povo e das Escolas* e de reproduções *fac-simile* dos opúsculos matemáticos dessa notável coleção de divulgação científica e cultural publicada entre 1881 e 1913;
- ▶ A criação, com a British Society for the History of Mathematics, do site na Internet “Selos de Matemática/ Math Stamps”, baseado na coleção filatélica do Prof. Robin Wilson (o site é bilingue e a versão portuguesa está a ser ultimada, devendo estar finalizada no final deste verão);
- ▶ O lançamento de uma nova série do programa televisivo “Isto é Matemática”, desta feita com financiamento da Fundação Vodafone;
- ▶ A renovação do protocolo com a Fundação PT para a certificação científico-pedagógica da versão portuguesa de mais de 500 vídeos de matemática da Khan Academy, dando assim continuidade a uma parceria que, desde 2013, já permitiu disponibilizar, até ao momento, cerca de 1000 vídeos traduzidos e adaptados ao público escolar português;

- ▶ O início da implementação de uma nova fase do “Aula Aberta”, projeto conjunto com a Fundação Calouste Gulbenkian, que pretende identificar boas práticas nas salas de aula de Português e Matemática, agora centrada nas escolas com desempenho excecional no indicador de progressão;
- ▶ O acolhimento do projeto “Memória da SPM”, coordenado por Jaime Carvalho e Silva, que obteve financiamento da Fundação Calouste Gulbenkian e que permitirá o tratamento, o estudo e a disponibilização *online* de documentação inédita sobre a fundação da SPM.

E muitos outros houve, alguns bem sucedidos, outros nem tanto...

Além destas iniciativas, há sempre as atividades regulares da Sociedade (o Centro de Formação, a Certificação de Manuais, o GEBS, as relações com outras instituições e sociedades) e os aspetos administrativos (desde os pagamentos semanais a fornecedores às tentativas de conciliação e resolução de mal-entendidos) que, não obstante o empenho, a dedicação e as incontáveis horas de trabalho neles colocadas pelos restante elementos da direção, bem como o competentíssimo apoio do secretariado, têm sempre como resultado, ao fim de dois anos, a acumulação pelo presidente de muitos milhares de *e-mails* recebidos e enviados e de inúmeras horas gastas em reuniões e telefonemas.

Pelo balanço acima é fácil perceber quão absorvente, desgastante e cansativo é o cargo de presidente da SPM. Um cargo que, não só por estas razões mas também por elas, deve ser periodicamente renovado. E esta é a razão por que vejo com algum alívio a minha substituição pelo nosso novo presidente e a sua equipa: uma direção na qual deposito as maiores expectativas e que, tenho a certeza, vai conseguir levar a SPM a ultrapassar as dificuldades e os desafios atuais, relevando ainda mais o papel da nossa Sociedade e o da matemática na sociedade portuguesa.

Quanto ao sócio efetivo 1935, cá continuarei à disposição da Sociedade para a colaboração que me acharem capaz de prestar.

Obrigado e até sempre!

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: *gazeta@spm.pt*.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2016

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

