GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

Êste número beneficiou dum donativo concedido pela Sociedade Portuguesa de Matemática

ANO V **N.º 18** JANEIRO-1944

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 6$50

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

Editor e Proprietário	Administrador	Tesoureiro
J. da Silva Paulo	*Orlando M. Rodrigues*	*J. de Oliveira Campos*

REDACÇÃO

Redactor principal
Manuel Zaluar

RESPONSÁVEIS DE SECÇÕES:

PEDAGOGIA	Bento J. Caraça
ASTRONOMIA	Manuel Peres Júnior
ESTATÍSTICA MATEMÁTICA	W. L. Stevens
TEMAS DE ESTUDO	Hugo B. Ribeiro
MATEMÁTICAS ELEMENTARES	António A. Lopes, J. Calado, J. J. Rodrigues dos Santos, J. da Silva Paulo
MATEMÁTICAS SUPERIORES	A. Pereira Gomes, L. G. Albuquerque
PROBLEMAS	A. Ferreira de Macedo, M. Alenquer

OUTROS COMPONENTES:

EM LISBOA	A. Monteiro, F. Carvalho Araújo, G. Lami, J. Remy Freire, Luís Passos, R. Quaresma Rosa.
PORTO	A. Almeida Costa, J. Rios de Sousa, L. Neves Real, Ruy Luís Gomes
CAMBRIDGE	J. Delgado d'Oliveira
MADRID	Sixto Rios Garcia
ROMA	J. Ribeiro de Albuquerque, J. Sebastião e Silva, V. Barroso
ZÜRICH	A. Sá da Costa, Hugo B. Ribeiro, Maria do Pilar Ribeiro

COOPERADORES: A. S. Gonçalves, Altino Branco, Álvaro Santos, A. M. de Carvalho, G. d'Oliveira Campos, J. A. Barreira, J. Marujo Lopes

Correspondência para Manuel Zaluar — Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa

Composição e impressão: Sociedade Industrial de Tipografia, Limitada — Rua Almirante Pessanha, 3 e 5 (ao Carmo) - Lisboa

ANO V-N.º 18 GAZETA DE MATEMATICA JANEIRO-1944

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

HOMENAGEM AO PROFESSOR REY PASTOR

Os discipulos e colegas do matemático espanhol, Prof. J. Rey Pastor, decidiram comemorar os vinte e cinco anos de ensino na Argentina dêste ilustre professor e organizar a publicação em volume dos seus trabalhos de investigação cientifica. A «Gazeta de Matemática», pretendendo associar-se à homenagem tão justamente prestada, ao distinto matemático e pedagogo, publica neste número um artigo sôbre a influência de Rey Pastor no desenvolvimento e ressurgimento das matemáticas espanholas, de que é autor um dos seus discipulos, o nosso colaborador em Madrid Prof. Sixto Rios.

O nome de Rey Pastor e sua obra são, de há muito, conhecidos e apreciados em Portugal; muito o admiramos e estimamos. Rey Pastor tem manifestado, também freqüentemente, aprêço e simpatia pelos raros matemáticos portugueses. Recordemos a êste propósito a publicação duma interessante biografia do Prof. F. Gomes Teixeira no primeiro volume da Revista da Sociedade Matemática Espanhola (Ano I, n.º 3) e a especial atenção que dedica na sua obra «Los Matemáticos Españoles del siglo XVI»[1] à produção portuguesa representada, nesta época de esplendor da cultura ibérica, pelos dois matemáticos Álvaro Tomás e Pedro Nunes. Lembremo-nos ainda de que Rey Pastor foi o primeiro secretário e é, actualmente, o presidente da Associação Luso-Espanhola para o Progresso das Ciências.

Que o exemplo dêste cientista e da sua incansável perseverança na formação de novos investigadores e continuadores da obra por êle realizada, sejam incentivos para nós e para o progresso das ciências matemáticas!

Rey Pastor na época dos seus primeiros triunfos cientificos

[1] *Junta de Investigaciones Histórico-Bibliográficas--Monografia n.º 1—Madrid, 1934.*

Influencia de Rey Pastor en la Matemática Española

por ***Sixto Ríos*** *(professor da Universidade de Madrid)*

Valorar la influencia del gran matemático español, Rey Pastor, en la evolución de nuestra cultura matemática exige, como cuestión previa, bosquejar el estado de dicha cultura en el momento de la aparicion de este sol de la matemática española.

El estado de la Matemática en España, en 1911, cuando Rey Pastor, que contaba a la sazón 23 años, explica por primeira vez un curso de Análisis matemático como Catedrático de la Universidad de Oviedo, puede resumirse en la frase: «Hoy nuestro retraso en Geometría es solamente de medio siglo, y en Análisis poco mayor».

Son las palabras con que termina el brillante discurso inaugural del curso de 1912-13, pronunciado por el maestro en la Universidad de Oviedo [1]. Detallando un poco más podemos decir que en las Universidades españolas el nivel matemático de aquella época lo representaban Cauchy en Análisis y Staudt en Geometría [2], cuando ya los nombres de Riemann, Weierstrass, Poincaré, Lebesgue, Baire, Hilbert, etc., son familiares en la enseñanza matemática europea.

Se han pasado 30 años y hoy puede afirmarse que en España existe una cultura matemática moderna y, para juzgar de la contribución de Rey Pastor a este hecho singular en la historia de la cultura matemática, basta señalar que Rey Pastor ha explicado, por primera vez, en España y Argentina cursos sobre Topologia, Funciones en espacios abstractos, Algebra moderna, Representación conforme, Series divergentes, Series de Dirichlet, Fundamentos de la Geometría, Geometría proyectiva superior, etc. Muchos de estos cursos, recogidos por discípulos y colegas del gran maestro, han sido publicados y constituyen exposiciones magistrales en que son de admirar, tanto el estilo conciso y claro, como la originalidad y el rigor extraordinarios.

En sus obras matemáticas y en sus escritos de carácter general el idioma castellano alcanza matices de perfección extraordinaria, que nos hacen considerarle como auténtico clásico en la literatura española. En nuestra opinión, entre las cosas que España debe a su eminente hijo Rey Pastor, es la primera un puesto en la Academia de la Lengua.

Mayor, si cabe, es la brillantez del maestro en la explicación oral, en la que su entusiasmo se transmite desde las primeras palabras al auditorio. Es corriente que cuando un alumno sale de una lección esté muy conforme si ha entendido lo que se le ha explicado. Pues bien, recuerdo que siempre los alumnos de Rey Pastor teminábamos la clase sabiendo la lección que habíamos escuchado al gran maestro. De tal modo son claras y admirables sus lecciones orales. He aquí porque los españoles, al sumarnos al homenaje al maestro, lo hacemos de todo corazón, pero deseamos, al mismo tiempo, que sus permanencias entre nosotros sean más prolongadas, pues si bien su labor en América ha de tener una trascendencia histórica mayor que si Rey hubiera permanecido todo ese tiempo en España, nosotros añoramos constantemente el contacto directo con el maestro insuperable: sus lecciones, sus problemas, su entusiasmo contagioso, su vitalidad optimista, sus cualidades excepcionales de forjador de escuela, a la vez que de gran matemático. Pero ningún español que tenga un sentido claro de lo que es patriotismo dejará de reconocer que la obra de Rey Pastor adquiere, por su permanecia en Hispano-América, una dimensión histórica incomparablemente mayor, que nos compensa a los españoles de nuestras añoranzas.

En su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias de Madrid, pronunciado en 1914, dice Rey Pastor: «Avergonzado cada vez que de labios extranjeros oigo exclamaciones de estupor al conocer nuestra organización universitaria, nuestro original procedimiento de provisión de Cátedras y la índole de las cuestiones matemáticas en que todavía nos ocupamos, propúseme contagiar a otras conciencias mi indignación y comunicarles mis entusiasmos».

Pues bien, pocas veces podrá citarse en la historia el caso de un hombre que en el breve plazo de un cuarto de siglo haya podido ver realizada una ilusión que a él mismo pudo parecerle utópica en aquela fecha [3].

En época próxima a la de la lectura de su discurso

---

(1) Los matemáticos españoles del siglo XVI.

(2) Nos referimos a la tónica general de la enseñanza universitaria, lo que no excluye la existencia de algún Profesor totalmente destacado en este marco típico. Permítasenos indicar, siquiera sea de paso, que el Profesor Terradas, cuya influencia en el desarrolo de la Matemática española es también extraordinaria, explicó, en 1908, un curso de Ecuaciones integrales.

(3) En el mismo discurso se lee: «Y en alas de mi optimismo llegué a soñar que también la Matemática viva, actualmente en elaboración por artífices eminentes, que no es preciso citar, llegaría a interesar a algunos de nuestros jóvenes, no inferiores en inteligencia y aplicación a los de aquellas otras naciones».

académico, Rey Pastor fundó en Madrid la Revista Matemática Hispano Americana y el Seminario Matemático, y en él, rodeado de selectos discipulos y colaboradores, puede decirse que se incia un nuevo periodo de la Matemática española. Al cabo de algunos años las contribuciones de Rey Pastor y su escuela son estimadas en Europa y aparecen publicadas en las más importantes revistas: «Acta Mathematica», «Mathematische Annalen», «Ergebnisse del Coloquio de Viena», «Abhandlungen de Hamburgo», «Rendiconti di Palermo», «Memorias de la Academia de Italia», 'Mathematische Zeitschrift', 'Duke Mathematical', etc.

Expuesto esto, resulta superfluo reseñar una vez más todos los elogios que matemáticos extranjeros han hecho repetidas veces del maestro.

No es nuestra finalidad, ya que ello requería un espacio muy superior al que nos hemos señalado, hacer un análisis de las obras y trabajos de Rey Pastor. Una reseña de los mismos puede leerse en la interesante monografía de Loria «Le matematiche in Spagna e in Argentina», publicada en la Revista de la Unión Matemática Argentina (1938). Refiriendose a la producción matemática española, dice Loria en dicho artículo: «En ella el puesto de honor corresponde por derecho a Rey Pastor, cuya maravillosa producción científica abarca todos los campos de la Matemática; se encuentran, en efecto, trabajos relativos a las siguientes ramas: Aritmética elemental y teoría de números, Algebra clásica y moderna, Análisis algebraico e infinitesimal, Teoría de series e integrales, Teoría general de funciones y funciones especiales, Cálculo de diferencias finitas, Representación conforme, Teoría de conjuntos, Geometría del triangulo, Geometría proyectiva, Geometria no euclídea, Topología, Probabilidades, Espacios abstractos, Física matemática, Filosofía e Historia».

La influencia de Rey Pastor en el desarrollo de la Matemática en Hispano América es aun mayor, si cabe, que en España. Sus cursos de la Universidad, de la Facultad de Ingeniería, la fundación de Seminarios de Investigación, de revistas (Boletín del Seminario Matemático argentino, Revista de la Unión Matemática Argentina, etc.), la pléyade de discípulos y sus notables publicaciones que tan alto han puesto el nombre de España en Hispano-América, evidencian que nunca con mayor oportunidad y motivos se habrá hecho un homenaje como el que ahora recibe de sus colegas y discípulos el gran matemático español.

Una nueva demostracion de los teoremas de Legendre y Lexell

por ***José Gallego Diaz*** *(professor da Universidade de Madrid)*

La demostracion clásica del teorema de Legendre, relativo a los triángulos esféricos cuyos lados son muy pequeños con relacion a la esfera, exige, como es bien sabido, cálculos artificiosos y largos. Nos proponemos aquí dar una demostracion geométrica, sencilla, mediante la proyeccion estereográfica, que creemos no está desprovista de interés didáctico. Tiene, además, la ventaja de hacer patente el valor del exceso de un triángulo esférico cualquiera, pudiéndose, pues, determinar con sencillez su área. Finalmente, damos otra aplicacion del método, demostrando, de manera inmediata, el teorema de Lexell.

Sea el triángulo esférico ABC (fig. 1) y $OB'C'$ su proyeccion estereográfica sobre el plano del ecuador. Sean $B't$ y $C't$ las tangentes en B' y C' al arco $B'C'$ proyeccion estereográfica del BC. Se cumple: $O\widehat{B'}t=\hat{B}$, $O\widehat{C'}t=\hat{C}$. Llamando x al ángulo $C B't=B'C't$, resulta, en el triángulo rectilineo $OB'C'$: $B-x+C-x+A=\pi$, $2x=A+B+C-\pi=2E$ luego $x=E$; es decir que el ángulo que forma la cuerda $B'C'$ con la tangente en uno cualquiera de los extremos es igual al semi-exceso esférico del triángulo ABC. Haciendo: $O\widehat{B'}C'=\hat{B}_1$, $O\widehat{C'}B'=\hat{C}_1$, $B'\widehat{O}C'=\hat{A}_1$ podemos escribir: $\hat{B}=\hat{B}_1+\hat{E}$, $\hat{C}=\hat{C}_1+\hat{E}$,

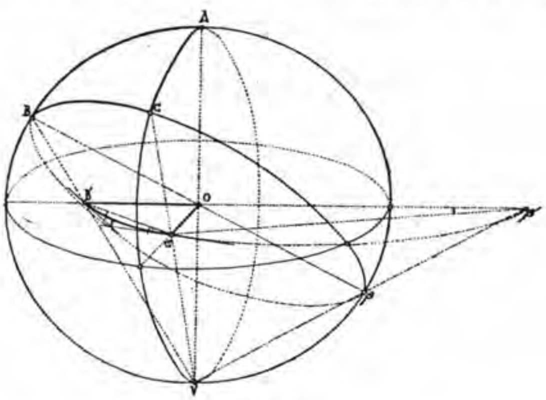

Fig. 1

$\hat{A}=\hat{A}_1$ y, si efectuamos una permutacion circular o, lo que es análogo, proyectásemos estereográficamente desde los puntos diametralmente opuestos a los B y C, resultaria, con notacion semejante: $\hat{B}=\hat{B}_2$, $\hat{C}=\hat{C}_2+\hat{E}$, $\hat{A}=\hat{A}_2+\hat{E}$; $\hat{C}=\hat{C}_3$, $\hat{B}=\hat{B}_3+\hat{E}$, $\hat{A}=\hat{A}_3+\hat{E}$, es decir: $3\hat{A}=\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3+2\hat{E}$, $3\hat{B}=\hat{B}_1+\hat{B}_2+\hat{B}_3+2\hat{E}$, $3\hat{C}=\hat{C}_1+\hat{C}_2+\hat{C}_3+2\hat{E}$. Pero $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ son los ángulos del triángulo cuyos lados valen $B'C'=\dfrac{R \operatorname{sen} a/2}{\cos b/2 \cdot \cos c/2}$, $OB'=R\cdot \operatorname{tg} c/2$, $OC'=R\cdot \operatorname{tg} b/2$ segun fórmulas conocidas de Trigonometria, siendo a, b, c los lados del triángulo esférico ABC; luego, si a, b, c, son muy pequeños con relación a R, podemos tomar como equivalentes a sus arcos las lineas trigonométricas seno y tangente, con lo cual, en el limite, los lados del triángulo se podrán reemplazar por: $Ra/2$, $Rb/2$, $Rc/2$; los ángulos: A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3; tenderán, respectivamente, a los ángulos del triángulo cuyos lados son $Ra/2$, $Rb/2$, $Rc/2$ o a los de su semejante cuyos lados valgan: Ra, Rb, Rc, y si a estos ángulos los llamamos, respectivamente: α', β', γ', resultará $A=\alpha'+2E/3$, $B=\beta'+2E/3$, $C=\gamma'+2E/3$; que era lo que queriamos demonstrar.

Para la demostracion del teorema de Lexell, observemos en la fig. 1 que si es β' la proyección estereográfica de β y siendo β el punto diametralmente opuesto al B, el angulo $B'\beta'C'$ es igual al $B'C't$ y por tanto igual a E.

Ahora, sean A y B dos puntos de la esfera (fig. 2) y llamemos α y β a los diametralmente opuestos a ellos. Sea M un punto genérico del circulo menor de diâmetro $\alpha\beta$ y cuyo plano es perpendicular a AOB. El triángulo esférico ABM se proyecta estereográficamente en el mixtilineo $OB'M'$. La proyeccion

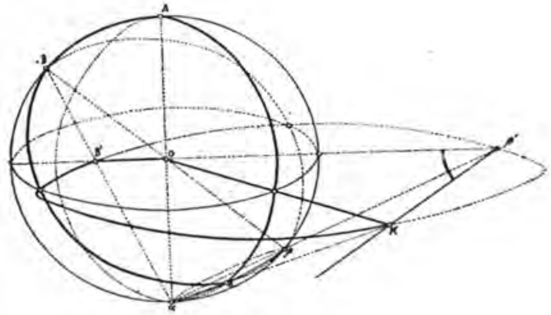

Fig. 2

estereográfica del circulo menor $\alpha M\beta$ será la recta $\beta' M'$ y la constancia del ángulo $O\beta' M'$ — cuando M describe el circulo menor considerado — nos prueba que el área del triángulo esférico ABM es constante. Y, reciprocamente, dado el lado AB; si el triangulo ABM ha de ser de área constante, el ángulo $O\beta' M'=E$ debe ser fijo y para ello, el lugar geométrico de M debe ser un circulo menor que pase por α y β.

A IDÉIA DE DIMENSÃO

por **Benno Eckmann**

(Encarregado de curso na Faculdade de Ciências e na Escola de Engenharia da Universidade de Lausanne e *privat dozent* na Escola Politécnica Federal de Zürich)

Lição inaugural proferida em 1943, Fevereiro, 5 e publicada na *Revue de Théologie et de Philosophie*, n.º 127, Abril-Junho de 1943

(Continuação do número anterior)

5. Tudo isto não nos impede, naturalmente, a nós matemáticos, de fa ar do espaço a quatro dimensões ou mais, considerado ùnicamente como sistema lógico, e de examinar as suas propriedades. Conserva-se a mesma linguagem geométrica e fala-se de pontos, de rectas, de planos, de ângulos, etc., se bem que, em geral, estas coisas não possam ser postas em correspondência com os objectos do espaço real! Todavia, esta construção é muito importante e eficaz pelas razões seguintes:

Permite ao matemático a tradução em linguagem geométrica de factos e problemas analíticos ou algébricos, o que simplifica, por vezes grandemente, a resolução e sugere métodos e resultados; quasi se pode dizer que, ao praticar esta geometria, se alcança uma certa intuição do espaço a n dimensões — não sei se é a grande analogia com o espaço a três dimensões (que, naturalmente, pode também enganar-nos!) ou, muito simplesmente, o hábito de pensar nestas coisas.

Mais importante ainda é a aplicação seguinte: quer no mundo da experiência e da intuição, quer na física, quer ainda nos diferentes ramos das matemáticas, há objectos e fenómenos relativamente aos quais é vantajoso tomar o espaço a n dimensões como *esquema*, no sentido de que êles podem descrever-se por n números reais variando independentemente, como as coordenadas no espaço a n dimensões. Êste diz-se então, *um contínuo a* n *dimensões ou a* n *graus de liberdade*.

Encontram-se exemplos disso em todos os domínios da ciência:

a) *Uma curva é um contínuo a uma dimensão;* é possível *numerar* os seus pontos com um número variável, isto é, pelo comprimento do arco da curva a partir de um certo ponto fixo. Por outras palavras, pode fazer-se corresponder aos pontos da curva os pontos de uma recta (espaço a uma dimensão!) de modo tal que a dois pontos distintos correspondem dois pontos distintos e que a dois pontos vizinhos correspondem dois pontos vizinhos. Neste caso a correspondência diz-se biunívoca (isto é, unívoca nos dois sentidos e contínua.

b) Outro exemplo: *o tempo* é um contínuo a uma dimensão, pois fixam-se os instantes por *um* número.

c) *Uma porção de superfície*, por exemplo de uma esfera, é um contínuo a duas dimensões, cujos pontos podem ser descritos por dois números. as duas coordenadas duma carta topográfica da superfície (por exemplo, a longitude e a latitude).

d) *Os movimentos no plano* (por exemplo, de um segmento) constituem um contínuo a três dimensões: qualquer movimento é dado por duas translacções independentes e por uma rotação. Diz-se que um corpo possui, para os movimentos no plano, três graus de liberdade e podem representar-se êsses movimentos por três números, portanto, pelos pontos de um espaço a três dimensões.

e) Anàlogamente, *os movimentos de um corpo no espaço* têm seis graus de liberdade: três translacções independentes e uma rotação que é dada por três números. Os movimentos no espaço, dados por seis números, podem, portanto, representar-se por pontos do espaço a seis dimensões. (Se se fixa um ponto de um corpo em movimento, êste tem apenas três graus de liberdade, os da rotação. Se se fixam dois pontos, fica só um grau de liberdade, o da rotação em tôrno da recta definida pelos dois pontos.)

Os físicos têm bem presente a muito particular importância do número dêstes graus de liberdade, por exemplo, na teoria do calor específico.

f) Para fixar o lugar e o tempo de um ponto que se desloca, ou de uma observação, necessitamos de quatro números: o contínuo *espaço-tempo* é a quatro dimensões, podemos representá-lo pelos pontos do espaço a quatro dimensões o que é de uma grande importância na teoria da relatividade.

g) *O estado de uma molécula* em movimento pode ser dado por seis números: as três coordenadas do lugar e as três componentes da sua velocidade. Na teoria cinética dos gases, o estado de um gaz constituído por N moléculas será dado, então, por $6N$ números e os diversos estados do gaz podem ser representados pelos pontos do espaço a $6N$ dimensões, digamos 10^{24} dimensões [1]. Poderá parecer exquisito, mas é muito prático na teoria estatística das moléculas.

Não quero referir-me aos numerosos exemplos que o matemático encontra na geometria algébrica e na análise.

6. Em resumo:

À pregunta: Porque se diz que o nosso espaço tem três dimensões?, responder-se-à: Porque tem por esquema o espaço geométrico a três dimensões ou coordenadas.

E, à pregunta: ¿Qual é a razão pela qual êste ou aquêle contínuo tem n dimensões ou n graus de liberdade?, responder-se-à: Porque pode ser descrito por n números, variando independentemente, como as n coordenadas no espaço a n dimensões, por outras palavras: porque os elementos dêsse contínuo podem ser representados pelos pontos dêste espaço, ou *postos em correspondência com os pontos dêste espaço a* n *dimensões*.

Tudo isto parece muito simples e é bem o que durante muito tempo foi aceite como definição da dimensão, sem precisar muito o que se entende por esta *correspondência* (talvez pensando, sôbretudo, em correspondências dadas por fórmulas simples). Mas, é neste momento que se erguem graves *dificuldades*, de carácter matemático, isto é, intervindo na construção lógica e que devem ser vencidas antes que a definição de dimensão seja justificada.

7. Eis as dificuldades:

Se se consegue a descrição de um contínuo por, digamos, dois números, ¿não se poderá fazê-la também por três (ou quatro, ou um) — naturalmente, procedendo de uma maneira inteiramente diferente? ¿Haverá, em suma, diferença entre os espaços a diversas dimensões, por exemplo, entre o de duas e o de três? ¿Não poderá estabelecer-se uma *correspondência* entre os pontos dêstes dois espaços que permitisse a substituição, pura e simples, de um pelo outro, sôbretudo para a descrição de um contínuo?

Vejam: A noção de dimensão que se afigura tão simples e que é tão importante para numerosas aplicações, parece não possuir um sentido!

Responder-me-ão: O que pode descrever-se com dois números, variando independentemente, não o pode ser com três, visto que no plano não ha tantos pontos como no espaço!

Ora, isto não é verdade num certo sentido (muito embora, se se considera um plano imerso no espaço, haja pontos fora do plano!). Com efeito, dois factos extremamente surpreendentes, descobertos nos fins do século XIX, o puzeram bem em evidência.

Primeiramente, a escola de *Cantor* encontrou corres-

---

[1] Observar-se-à que 10^{24} não é um múltiplo de 6. Note-se que, se em $6N$ se substitui N pelo número de *Avogadro* tem-se $6N \simeq 10^{24}$. (N. do T.)

pondências entre dois espaços a diferentes dimensões (por exemplo, entre o plano e o espaço, ou recta e espaço a quatro dimensões, etc.), correspondências que são biunívocas, isto é, que a dois pontos diferentes fazem corresponder dois pontos diferentes. Poderia dizer-se que, dêste modo, os dois espaços contêm *o mesmo número de pontos*, e poderia, com efeito, substituir-se um dos espaços pelo outro!

E, ¿agora? ¿Será necessário, por isso, abandonar a idéia de dimensão como a formulámos? Não. Porque esta correspondência de *Cantor*, embora seja biunívoca, *não é contínua*, isto é, que a pontos vizinhos correspondem pontos afastados no outro espaço, ou no contínuo que se pretende descrever e cuja conexão será assim completamente destruida! Mas, para definir a dimensão, não se encararam, seguramente, tais correspondências; elas devem excluir-se.

O segundo facto é a célebre *curva de Peano*. É uma curva no sentido de que é um conjunto de pontos percorridos por um ponto que se desloca no plano: é possível numerar êstes pontos por intermédio do tempo, portanto, de *um* número, isto é, é possível pô-los em correspondência com os pontos de uma recta. Ora, esta curva de *Peano* possui a propriedade de preencher completamente um quadrado, portanto, um contínuo a duas dimensões e estabelece, assim, uma correspondência entre recta e plano. Desta vez a correspondência é contínua — mas, *não é biunívoca*, visto que há pontos do quadrado que são percorridos várias vezes, e por isso ela deve também excluir-se.

8. Se êstes resultados vos parecem um pouco estranhos, não esqueçais que se trata de espaços geométricos abstractos; não se trata, portanto, da intuição, mas da construção lógica que, embora inspirada no real, ultrapassa — mesmo na sua base axiomática! — as possibilidades da nossa intuição e experiência. E, como esta construção está na base da idéia de dimensão, expressa na definição, vê-se agora o que é necessário para *salvar* esta idéia de dimensão: é necessário demonstrar a impossibilidade do estabelecimento, entre dois espaços de diferentes dimensões, de uma correspondência que seja, ao mesmo tempo, biunívoca e contínua. Por outras palavras: que é impossível construir uma imagem biunívoca e contínua do espaço a n dimensões num espaço de número inferior de dimensões, por exemplo, de um plano numa recta.

Isto pode demonstrar-se. Desta vez a intuição não nos engana. A primeira demonstração foi dada em 1911 por *Brouwer* [2]; em 1913, êle próprio deu uma outra, mais profunda do que a primeira, precisando as ideias enunciadas em 1912 por *Poincaré* na sua célebre memória: *Pourquoi l'espace a trois dimensions* [2]. As investigações de *Brouwer* e a importância dos seus resultados permaneceram ignorados durante vários anos. Em 1922, as mesmas ideias foram retomadas, independentemente, por *Menger* e *Urysohn* [2] e muito aprofundadas. É então que uma bela teoria surge com a colaboração de um grande número de matemáticos. Pode dizer-se que o ponto final dêste desenvolvimento, embora muitos problemas aguardem resolução, é o livro de *Hurewicz* e *Wallmann*, *Dimension Theory*, publicado em 1941, em Princeton [2].

9. Um dos principais resultados de tôdas estas investigações, — mas não o único! — é, portanto, que a antiga definição comum de dimensão, tal como a formulámos, subsiste, tem sentido. ¿Qual é no fundo, o significado dêste facto? ¿A que ordem de ideias pertence?

O ponto essencial, vimo-lo nós, reside nas correspondências ou imagens biunívocas e contínuas. Consideremos, por exemplo, uma circunferência e uma circunferência mal desenhada, isto é, uma deformação da primeira. Esta é, sem dúvida, uma imagem biunívoca e contínua da circunferência. Constata-se que quási tôdas as propriedades geométricas se perderam, comprimento, ângulos, direcções, a curva já não tem centro, etc. Contudo, há qualquer coisa que subsiste: a curva é sempre um contínuo a uma dimensão e é fechada (não aberta). Estas propriedades que não se modificaram são de uma ordem diferente da das que se consideram em geometria ordinária, dir-se-à de uma ordem mais elementar. A disciplina que de tais propriedades se ocupa chama-se *analysis situs* ou *topologia*.

Por exemplo, não há diferença topológica entre uma esfera e um ovo, ou um elipsoide, ou ainda uma superfície fechada dêste género, o que já não sucede entre uma esfera e um toro. E, afirma-se uma propriedade topológica ao dizer que duas curvas fechadas num espaço estão enlaçadas ou não. O célebre teorema de *Euler* relativo aos poliedros (a soma dos vértices e das faces menos a soma das arestas é igual a dois) é de carácter topológico; visto que é sòmente necessário que o poliedro tenha a conexão, o género de uma esfera; a forma, os ângulos, os lados das faces não desempenham papel algum neste caso.

E, o sentido do teorema de *Brouwer*, que era necessário para salvar a idéia de dimensão (que afirma a impossibilidade de alterar o número de dimensões por uma simples deformação) — é que *a dimensão de um espaço é uma propriedade topológica*, embora tenha sido definido por intermédio das coordenadas, portanto, atravez de elementos não topológicos, a saber ângulos, comprimentos, rectas, etc.

Pode dizer-se — os exemplos mostraram bem — que

---

[2] Veja-se a nota bibliográfica final.

as propriedades topológicas são sugeridas pelas experiência e pela intuïção puramente geométricas, ao passo que, na geometria ordinária, se recorre a noções aritméticas e analíticas de uma outra ordem. Por outras palavras: Para chegar à geometria ordinária, é necessário restringir o domínio das correspondências consideradas até aqui; por exemplo, se se considera, em vez das deformações biunívocas e contínuas, sòmente os movimentos no espaço, então, os comprimentos e os ângulos, etc., permanecem invariantes, e estas são as coisas de que se ocupa a geometria elementar métrica. Assim, os diferentes pontos de vista geométricos são caracterisados pelas correspondências admitidas; o caso mais geral é o da topologia; o caso mais restricto, o da geometria métrica, e há casos intermédios.

10. Constatou-se, então, que a idéia de dimensão é de carácter topológico; deve, portanto, procurar-se uma definição que o ponha em evidência, isto é, uma definição utilizando apenas noções topológicas.

Para isso, deixemo-nos inspirar muito simplesmente pelo espaço real. Nos *Elementos de Euclides* encontra-se a idéia seguinte: A extremidade de uma curva é um ponto, o bôrdo de uma superfície é uma curva, a fronteira de um corpo é uma superfície. Na memória já citada, *Poincaré* propõe que se caracterize a dimensão por tais propriedades ou por propriedades muito vizinhas. A definição de *Menger* e *Urysohn*, admitida hoje como a melhor, quási não difere disso.

Considera-se um ponto do contínuo em questão e uma vizinhança completa dêsse ponto; tenta-se extrair a vizinhança do contínuo. Para isso é forçoso cortar ou rasgar o contínuo em certos pontos que se chamam pontos *da fronteira da vizinhança.*

Se se trata de um contínuo a *uma* dimensão — consideremos uma curva ou um fio de ferro — basta cortá-lo em alguns pontos isolados (que não constituem êles próprios contínuo algum).

Se se trata de um contínuo a *duas* dimensões — consideremos uma superfície — não basta cortá-la em alguns pontos isolados, deve-se cortá-la segundo uma curva (portanto, um contínuo a uma dimensão).

Se se trata de um contínuo a *três* dimensões — consideremos o espaço — nem pontos isolados, nem curvas bastam; a fronteira de uma vizinhança (por exemplo, de uma bola sólida) é constituída por uma superfície (portanto, um contínuo a duas dimensões) — e assim por diante.

Dir-se-á, portanto, que *um contínuo é a* n *dimensões quando os pontos da fronteira de uma vizinhança constituem um contínuo a* n—1 *dimensões.*

Pode demonstrar-se, então, que o espaço abstracto a *n* coordenadas goza precisamente desta propriedade; isto mostra que a antiga e a nova definições são equivalentes. Mas, a nova não utiliza, nem comprimentos, nem ângulos, nem rectas, sòmente vizinhanças que são de carácter puramente topológico (a sua forma não desempenha qualquer papel!). É talvez o melhor método para pôr em evidência o facto de que a dimensão, o número de graus de liberdade, exprime uma propriedade topológica de um contínuo.

11. Poderia ainda falar-vos de outros métodos que permitem a caracterização da dimensão de uma maneira topológica, por exemplo, o proposto por *Lebesgue* utilizando a noção de cobertura; êle foi muito importante para o desenvolvimento da teoria. Poderia também dirigir a vossa atenção para os espaços a um número infinito de dimensões, ou para os espaços (abstractos) mais gerais ainda do que os dados por intermédio de coordenadas; são os *espaços topológicos,* nos quais se não tem quási senão uma única noção geométrica, a de vizinhança; mas, como vimos, estas vizinhanças permitem-nos falar da dimensão e obteve-se mesmo o resultado interessante de que, em princípio, todos estes espaços generalizados são partes dos espaços dados por intermédio de coordenadas. Poderia falar-vos ainda dos problemas não resolvidos, das aplicações à algebra e à análise — mas, isso conduzir-me-ia muito longe e é tempo de concluir.

12. Todos constataram, decerto, que todos os métodos geométricos são caracterizados por uma colaboração muito particular entre a intuïção, a experiência e a abstracção, na qual se distingue sempre estrictamente entre o real e a teoria que pode ser o seu esquema. É, de resto, típico no trabalho matemático e mesmo nas ciências, sôbretudo na física teórica.

Nem sempre assim foi. Tempo houve em que se pensou que o espaço geométrico e o espaço real, que uma teoria e o seu objecto, eram a mesma coisa. E, no fundo, digamos de um modo não oficial, talvez se pense o mesmo ainda hoje.

Se se foi forçado a abandonar esta idéia, se se diz sem ambiguidade que tudo o que uma teoria enuncia não se refere à realidade, mas apenas ao seu esquema abstracto — ¿ não é isto fazer da necessidade virtude? ¿ Não é a inteligência assim mais modesta do que quereria sê-lo?

Talvez se deva formular a coisa de um modo um pouco diferente. Pois o que se chama realidade não pode, afinal, ser visto e descrito senão através de um certo esquema abstracto. Sem a idéia pre-existente de um contínuo, tôda a experiência seria impossível, reduzir-se-ia a sensações isoladas sem relações. Conceitos simples, considerados como pertencentes à experiência e à intuïção — como o da dimensão — já supõem, afinal, uma teoria abstracta. Freqüentemente, mesmo as matemáticas, com as suas construções e formalismos abstractos, permitiram a concepção de novas idéias intuitivas e o descobrimento de novos factos experimentais; a história das ciências dá-nos disso numerosos exemplos.

Permitir-me-ão, portanto, que eu veja nas matemáticas não só um instrumento muito útil para as ciências e a técnica não só a linguagem que nos permite relacionar os fenómenos, formular leis e deduzir conseqüências, mas muito mais: *Vejo nelas a expressão da nossa maneira de pensar.* E, se o matemático, como um geógrafo que se não contenta com o conhecimento da geografia da sua aldeia natal, parece afastar se cada vez mais dos esquemas correntes e ousa passar de uma abstracção e generalização a outra, não se afasta mais do real por isso; pelo contrário, cria novas possibilidades de pensar, de encarar e compreender o nosso mundo.

NOTA BIBLIOGRÁFICA

Não indicámos as memórias e livros que tratam dos problemas matemáticos abordados nesta conferência. Encontram-se citados nas duas obras seguintes consagradas à teoria da dimensão:

K. Menger, *Dimensionstheorie* (Leipzig, 1928).

W. Hurewicz e **H. Wallmann**, *Dimension Theory* (Princeton, 1941),

Consulte-se também a obra de **P. Alexandroff** e **H. Hopf**, *Topologie I* (Berlin, 1935), da qual vários capítulos são dedicados à noção de dimensão.

Estes problemas são tratados de uma maneira mais geral em:

H. Poincaré, *Dernières pensées* (Paris, 1913), o capítulo intitulado *Porquoi l'espace a trois dimensions*, p. 57-97;

Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften (Leipzig und Wien, 1933), cinco conferências, das quais, em particular, as seguintes:

H. Hahn, *Die Krise der Anschauung*, p. 42-64.

G. Nœbeling, *Die vierte Dimension und der krumme Raum*, p. 66-92.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

PEDAGOGIA

ACÊRCA DO ENSINO DA MATEMÁTICA NOS LICEUS

por **José Cardoso Guerra**

Há realmente qualquer coisa de muito grave no ensino da matemática elementar, e por isso não nos causou surprêsa alguma o artigo do professor Bento Caraça.

Deve acrescentar-se ainda que os alunos que prestam provas de exame de aptidão, fazem parte de um reduzido número que conseguiu saltar as barreiras do sexto e sétimo anos, onde a percentagem de reprovados chega a ser pavorosa!

No ano passado, por exemplo, na época de Julho, num liceu em que prestavam provas cêrca de 241 examinandos, só 41 conseguiram aprovação, o que corresponde a uma percentagem de reprovações de 83%! Num outro houve uma percentagem de 79% e em muitos outros os resultados foram semelhantes.

Isto no 2.º ciclo e só em Matemática. Os examinadores tiveram ocasião de observar o elevado grau de ignorância que os alunos revelam através dos pontos. Os disparates são tantos e tão variados que nem vale a pena exemplificá-los.

Verdade seja que a percentagem de reprovações nos alunos internos dos liceus é de uma maneira geral bastante inferior à percentagem final, o que se explica muito fàcilmente. O aluno do liceu vai geralmente a exame se der provas de bom aproveitamento, para o que tem de estudar com relativo cuidado, mas se por qualquer motivo fraqueja e resolve não se maçar, passa para o ensino particular em qualquer altura até ao final do 2.º periodo escolar e então vai de certeza a exame puramente *à sorte*, depois de ter comprado tôdas as colecções de exercícios do mercado, porque tem confiança cega nos receituários da última hora, que uns malfadados professores se vêem na necessidade de lhes ministrar. Muitos dêstes alunos realmente freqüentam o liceu como quem freqüenta um parque de diversões.

De uma maneira geral a maioria dos alunos do ensino particular não estuda convenientemente, porque sabe que vai a exame, facto êste que se transforma em causa final.

O professor pode querer reprová-lo mas o pai exige o exame porque paga...

E não convém analisar profundamente qual é finalmente o moral do professor, o do pai do aluno e sobretudo o do próprio aluno. A projecção dêste estado de coisas na educação em geral, é fácil de calcular.

Uma outra causa que a nosso ver influi no grande número de reprovações, comparadamente ao que era aqui há uns anos atrás, é da maneira como são feitos os exames. Aqui melhorou-se muito. Os alunos são colocados todos em igualdade de circunstâncias, o que sob o ponto de vista da justiça é óptimo.

Apenas não nos parece bem a extensão dos pontos que continua a ser demasiada e a preocupação de muitas preguntas relativamente miúdas, que por vezes não chegam a dar a ideia das verdadeiras possibilidades matemáticas, digamos assim, do examinando. Em matemática liceal, desde que a prova escrita seja bem feita, não se justificam duas provas independentes sôbre o mesmo assunto e muito menos uma prova oral.

A existência de pontos-modêlos estabelecendo normas rígidas para a manufactura dos pontos, foi um autêntico desastre para o ensino. O ponto deu aparentemente ao aluno a ideia da desnecessidade do conhecimento da demonstração, interessando-lhe apenas a simples aplicação de regras e de fórmulas.

Daí resulta um conhecimento demasiado superficial dos assuntos e a ilusão de que se está apto, depois de se terem resolvido superficialmente centenas de exercícios semelhantes aos do ponto modêlo.

Depois do inevitável fracasso vêm as habituais imprecações contra a prova escrita, geradora de nervosismos mais ou menos hereditários e a amargura da inexistência de uma prova oral em que o aluno mostraria os seus grandes conhecimentos...

O enfado evidenciado pelos estudantes perante tudo que lhes pareça demonstração e a resistência ao estudo da mesma, constituem motivo de surda luta que o professor tem que manter hàbilmente, se não quere concorrer demasiado para o despovoamento dos liceus, facto grave que se tem acentuado de ano para ano.

Um dos objectivos dêste sistema de pontos é o de limitar tanto quanto possível a influência pessoal do classificador. Porém, isso é muito difícil e como se sabe, basta por vezes um décimo de valor para um aluno reprovar.

Ora vejamos um pequeno exemplo: Numa certa pregunta de geometria do 1.º ciclo do ano transacto, tivemos ocasião de observar a variedade de pontuação atribuída à mesma resposta, desde zero até seis pontos e provàvelmente deve ter havido quem desse sete ou mesmo oito pontos, máximo atribuído.

E êstes casos não são, infelizmente, muito raros. Parece-nos que as provas deveriam ser classificadas independentemente por, pelo menos, dois professores e comparados os resultados. Evitar-se-iam possíveis enganos dada a grande acumulação de serviço e uniformizar-se-iam mais os critérios da classificação.

Depois das classificações afixadas, o aluno pode recorrer, o que é justo. Por vezes há realmente enganos. Quando o examinador do recurso reconhece que o aluno tem razão, êste ganha a questão, mas para isso teve que pagar, o que é injusto. O ideal seria que todos os alunos pudessem analisar as suas provas depois de classificadas. Quem quizesse recorreria, mas os casos anormais seriam tratados devidamente.

SÔBRE OS EXAMES DE APTIDÃO

por ***W. L. Stevens***

Numa discussão dos resultados dos exames de aptidão, no n.º 17 da «Gazeta de Matemática», num artigo intitulado «Algumas reflexões sôbre os exames de aptidão», o Sr. Prof. Dr. Bento Caraça apresenta alguns dados sôbre o número de aprovações e reprovações nos referidos exames dos candidatos vindos do liceu e do ensino técnico médio.

Dêstes dados conclui o autor que, duma maneira geral, as percentagens de reprovações são superiores nos candidatos vindos do ensino técnico do que naquêles que vêm do Liceu.

A questão pode, no entanto, ser encarada de maneira um tanto diferente.

Com efeito os dados referentes às duas épocas de exame, depois de convenientemente agrupados, são os seguintes:

	Aprovações	Reprovações	Sub-totais
Liceus....	92	51	143
Ens. Téc...	28	24	52
Sub-totais.	120	75	195

Se a aprovação do candidato não dependesse da natureza da escola freqüentada (liceu ou escola técnica) os números esperados correspondentes às quatro entradas desta tabela de contingência seriam:

	Aprovações	Reprovações	Sub-totais
Liceus. . . .	88,00	55,00	143
Ens.Téc. . .	32,00	20,00	52
Sub-totais.	120,00	75,00	195

Êstes números foram calculados de acôrdo com a hipótese anterior, isto é, na suposição de que a percentagem de aprovações é a mesma para os dois grupos de candidatos.

A variância de qualquer das entradas na tabela dada é aproximadamente igual ao recíproco da soma dos recíprocos dos valores esperados:

$$\frac{1}{V}=\frac{1}{88}+\frac{1}{55}+\frac{1}{32}+\frac{1}{20}=0{,}1108$$

$$V=9{,}003 \quad \text{Desvio padrão}=\sqrt{V}=3{,}00$$

O desvio observado é $92-88{,}00=4{,}00$ mas para julgar da sua significância é conveniente, por uma questão de rigor, aplicar a correcção de Yates, o que dá para o referido desvio o valor final 3,50. A razão entre êste e o seu desvio padrão é, portanto $\frac{3{,}50}{3{,}00}=1{,}17$

Ora uma tabela de áreas da curva normal mostra que êste desvio corresponde a um nível de significância de $P=24\,\%$. Isto é, mesmo que os dois grupos de estudantes fôssem amostras casuais da mesma população seria de esperar, aproximadamente, uma vez em cada quatro, um desvio da proporcionalidade calculada, tão grande ou maior que o revelado pelos dados.

Não há portanto razão para suspeitar que as escolas técnicas sejam menos eficientes do que os liceus no ensino das matemáticas visto os dados não fornecerem evidência que justifique tal conclusão.

ESTATÍSTICA MATEMÁTICA

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LAS MÉDIAS DE UNA SERIE ESTADISTICA

por **O. Fernández Baños** (professor da Universidade de Madrid)
e **Jimenez Montoya** (licenciado em Ciências)

Es sabido que según la definicion corriente, se llama valor medio de una serie estadistica cuantitativa a todo valor intermedio entre el menor y el mayor de ella, no siendo todos iguales; y, por consiguiente, es obvio que toda serie estadistica cuantitativa de términos no todos iguales admite infinitas medias.

Muchas son las fórmulas ideadas para expresar valores medios de una serie estadistica de números reales; y segun la definicion genérica dicha se presenta naturalmente el problema de hallar una expresion general que represente todas las medias posibles en funcion de un parámetro real, que sea de cálculo sencillo y que, a ser posible, contenga como casos particulares a las usadas habitualmente.

La cuestion queda resuelta mediante la llamada media general:

$$f(m)=\sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^m}{n}}=M_m \qquad (1)$$

siendo m un número real, n un número entero y positivo y X_i números positivos reales; condicion esta última que no restringe el valor práctico de la fórmula porque basta un simple cambio de origen en la serie primitiva dada.

La fórmula (1) cumple las condiciones siguientes:

a) el limite de $f(m)$ cuando m decrece indefinidamente es el más pequeño de la serie y cuando crece indefinidamente tiene como limite al mayor de la misma.

En efecto, ordenando los X_i en orden creciente, tendremos:

$$X_i=\alpha_i X_n\,;\ \alpha_i<1 \qquad i=1,2,\cdots n-1$$

$$X_i=\beta_i X_1\,;\ \beta_i>1 \qquad i=2,3,\cdots n$$

$$\log f(m)=\frac{1}{m}\log\left[X_n^m\frac{\alpha_1^m+\alpha_2^m+\cdots+\alpha_{n-1}^m+1}{n}\right]=$$

$$=\log X_n+\frac{1}{m}\log\left[\frac{\alpha_1^m+\alpha_2^m+\cdots+\alpha_{n-1}^m+1}{n}\right]$$

$$\log f(m)=\frac{1}{m}\log\left[X_1^m\frac{1+\beta_2^m+\beta_3^m+\cdots+\beta_n^m}{n}\right]=$$

$$=\log X_1+\frac{1}{m}\log\left[\frac{1+\beta_2^m+\beta_3^m+\cdots+\beta_n^m}{n}\right]$$

$$\lim_{m\to\infty}\log f(m)=\log X_n\,;\quad \lim_{m\to\infty} f(m)=X_n$$

$$\lim_{m\to-\infty}\log f(m)=\log X_1\,;\quad \lim_{m\to-\infty} f(m)=X_1$$

b) Dando valores enteros a m se obtienen las medias mas usuales en Estadistica. En efecto:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \text{la media armónica} = M_{-1} \\ f(1) &= \text{» » aritmética} = M_1 \\ f(2) &= \text{» » cuadrática} = M_2 \\ f(3) &= \text{» » cúbica} = M_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

y el limite de $f(m)$ cuando $m \to 0$ es la media geométrica.

Como para $m=0$ la funcion toma la forma no definida $\sqrt[0]{1}$ aplicaremos el procedimento ordinario de hallar su limite y tendremos segun la regla de l'Hopital

$$\lim_{m\to 0} \log f(m) = \lim_{m\to 0} \frac{1}{m} \log\left[\frac{X_1^m + \cdots + X_n^m}{n}\right] = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{m\to 0} \log f(m) = \lim_{m\to 0} \frac{X_1^m \log X_1 + \cdots + X_n^m \log X_n}{X_1^m + \cdots + X_n^m} = \frac{\sum_1^n \log X_i}{n}, \tag{2}$$

de donde:

$$\lim_{m\to 0} f(m) = \sqrt[n]{X_1^m X_2^m \cdots X_n^m} = M_0 = \text{media geométrica.}$$

c) La $f(m)$ además de ser continua en todo el campo real sin otra singularidad que la dicha del punto cero — lo cual es elemental en Matemáticas — es funcion creciente; y por consiguiente esta propriedad en unión de las dos anteriores permite afirmar que a cada valor de m finito corresponde un valor medio de la serie estadistica dicha y reciprocamente a cada valor medio de esta un valor de m.

Para esto basta demostrar que la derivada de $f(m)$ es positiva. En efecto:

$$y = \log f(m) = \frac{1}{m}\left[\log\left(X_1^m + X_2^m + \cdots + X_n^m\right) - \log n\right]$$

$$\frac{dy}{dm} = \frac{1}{m^2}\left[m \frac{X_1^m \log X_1 + \cdots + X_n^m \log X_n}{X_1^m + X_2^m + \cdots + X_n^m} - \log \frac{X_1^m + \cdots + X_n^m}{n}\right] \tag{4}$$

que es positiva, porque:

$$m \frac{X_1^m \log X_1 + \cdots + X_n^m \log X_n}{X_1^m + \cdots + X_n^m} = \frac{\log\left[(X_1^m)^{X_1^m} (X_2^m)^{X_2^m} \ldots (X_n^m)^{X_n^m}\right]}{X_1^m + X_2^m + \cdots + X_n^m} > \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^m$$

o sea:

$$\frac{\log\left[(X_1^m)^{X_1^m} (X_2^m)^{X_2^m} \ldots (X_n^m)^{X_n^m}\right]}{\log\left[\frac{X_1^m + X_2^m + \cdots + X_n^m}{n}\right]^{X_1^m + X_2^m + \cdots + X_n^m}} > 1$$

o sea:

$$\frac{(X_1^m)^{X_1^m} (X_2^m)^{X_2^m} \ldots (X_n^m)^{X_n^m}}{\left[\sum_{i=1}^n \frac{X_i^m}{n}\right]^{X_1^m} \left[\sum_{i=1}^n \frac{X_i^m}{n}\right]^{X_2^m} \cdots \left[\sum_{i=1}^n \frac{X^m}{n}\right]^{X_m^m}} > 1$$

lo cual reduce la cuestion a demostrar que la expresion $a_1^{\alpha_1}\ a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} = Z$ sometida a la condicion de que: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \varphi$ toma su valor máximo cuando: $a_i = \alpha_i \quad i = 1, 2, \cdots n$. Para demostrarlo aplicamos el método de Lagrange a las primeras derivadas respecto a las a_i y tendremos:

$$\frac{d}{da_i} \log Z - \lambda \frac{d\varphi}{da_i} = \frac{\alpha_i}{a_i} - \lambda = 0 \text{ para } i = 1, 2, \cdots n; \text{ o sea:}$$

$$\frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_2}{a_2} = \cdots = \frac{\alpha_n}{a_n} = \lambda = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 1.$$

Finalmente, para comprobar que a tales valores corresponde un máximo y no un minimo de la funcion Z tomemos la forma cuadrática formada por las segundas derivadas y veremos que es negativa porque:

$$\frac{d^2}{da_i^2} \log Z = -\frac{\alpha_i}{a_i^2} \quad \text{para } i = 1, 2, \cdots n$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a_r \partial a_s} \log Z = 0 \quad \text{para } r \neq s$$

recordando que las α_i y sus iguales las a_i son, por hipótesis, números mayores que cero en nuestro caso.

La curva representativa de la funcion $y = f(m)$ tiene como asintotas las rectas paralelas al eje de de abscisas m a las distancias X_1 y X_n entre las cuales se conserva y crece con un punto de inflexion correspondiente al valor de la media geométrica.

Es obvio que no dependiendo de m el valor de la mediana de la serie — la qual es convencional cuando el número de términos es par — no existe un valor fijo de m para el qual siempre corresponda en $f(m)$ la mediana de la serie; aunque siempre se verifica que, dada la serie estadistica de termos positivos no todos iguales hay un número real m para el cual $f(m)$ toma el valor de la mediana por la forma dicha de la curva.

A las formas particulares de la funcion $f(m)$ cuando m toma valores enteros corresponden propiedades caracteristicas de cada una que las hacen útiles o perjudiciales para ciertos fines, tales como son, verbi gratia, la construccion de números indices.

La propiedad práctica mas importante de la $f(m)$ — aparte la de tomar todos los valores entre el menor y el mayor de la serie — es que estabelece una ordenacion sencilla de magnitud entre todas las medias de la cual resulta que siempre es menor la media armónica que la geométrica, ésta menor que la aritmética, ésta menor que la cuadrática, etc.

Es obvio que, conteniendo $f(m)$ todos los valores medios de la serie si se hace alguna clasificacion entre todas las medias utilizando alguna propriedad caracteristica de la clasificacion no es posible que tal propiedad pertenezca a $f(m)$ en general. Así sucede, por ej. a la clasificacion en erráticas y fijas (Furlan V. «Sur une formule generale de la moyenne», «Metron» marzo 1928) siendo estas las que cumplen la propiedad de que la media de la serie total no altere al substituir un número de terminos de la serie por su media parcial respectiva. Esta propiedad es evidentemente cumplida por la media aritmética y no por la mediana y al analizar la $f(m)$ tendremos que si ha de cumplirse tal propiedad, se verificará: $\left[\dfrac{X_1^m+\cdots+X_n^m}{n}\right]^{\frac{1}{m}}=$

$$=\left[k\left(\frac{X_1^m+\cdots+X_k^m}{k}\right)^{\frac{1}{m}}+X_{k+1}^m+\cdots+X_n^m\right]^{\frac{1}{m}}$$ siendo $k<n$ lo cual solo se verifica cuando m toma los valares 0 y 1 lo cual valora las medias geométrica e aritmética en orden al estudio de la variabilidad de las series estadisticas.

Para encontrar multitud de relaciones entre las diversas medias consideremos la funcion:

$$Q(m)=\frac{\sum_1^n X_i^m}{\sum_1^n X_i^{m-1}}=\frac{M_m^m}{M_{m-1}^{m-1}} \qquad (6)$$

para $m>0$, y

$$Q(-m)=\frac{\sum_1^n X_i^{-m}}{\sum_1^n X_i^{-m-1}}=\frac{M_{-m}^{-m}}{M_{-m-1}^{-m-1}}=\frac{M_{-m}^{-m}}{M_{-(m+1)}^{-(m+1)}} \qquad (7)$$

para $m<0$

$$Q(1)=f(1)=M_1,\ Q(0)=f(-1)=M_{-1},\ f_{(m)}^m=M_m^m \qquad (8)$$

tenemos que la funcion M_m^m es continua en todo el campo real con limites cero e infinito al variar m de menos a mas infinito cuando las X_i son mayores que la unidad o con los mismos limites invertidos cuando las X_i son menores que la unidad en el supuesto de ser todas positivas por lo cual no cumple la condicion básica de valor medio de una serie estadistica excepto cuando m se conserva dentro del rango en que tal funcion toma valores entre el menor y el mayor de la serie.

De las anteriores relaciones resulta inmediatament

$$M_m^m=Q(m)\,M_{m-1}^{m-1}=Q(m)\,Q(m-1)\,M_{m-2}^{m-2}$$
$$=Q(m)\,Q(m-1)\cdots Q(2)\,M \quad \text{para } m \text{ positivo} \quad ($$

$$M_{-(m+1)}^{-(m+1)}=\frac{1}{Q(-m)}M_{-m}^{-m}=\frac{1}{Q(-m)\,Q(-m+1)}M_{-m+1}^{-m+1}$$
$$=\frac{1}{Q(-m)\,Q(-m+1)\cdots Q(-1)\,M_{-1}}$$

o sea:

$$M_{-m}^{-m}=\frac{1}{Q(-m+1)\,Q(-m+2)\cdots Q(-1)\,M_{-1}} \qquad (10$$

para m negativo.

Estas fórmulas permiten escribir un número indefinido de relaciones entre las diversas medias tales como:

$$M_2^2=M_1\,Q(2) \qquad (11)$$

$$M_3^3=M_1\,Q(2)\,Q(3) \qquad (12)$$

$$M_{-2}^2=Q(-1)\,M_{-1} \qquad (13)$$

que nos dicen, respectivamente, que la media cuadrática es media geométrica entre la aritmética y la antiarmónica; la media cúbica es media geométrica entre la aritmética, la antiarmónica y la $Q(3)$ que no recibe nombre especial; la media $f(-2)$ es media geométrica entre la armónica y la $Q(-1)$, etc., etc.

La forma sencilla de la funcion $Q(m)$ permite compararlas fácilmente entre si, cuando m toma valores enteros consecutivos, para ver cuanto es una mayor que su consecutiva. En efecto:

$$\frac{Q(m)}{Q(m-1)}=\frac{\sum_1^n X_i^m\sum_1^n X_i^{m-2}}{\left|\sum_1^n X_i^{m-1}\right|^2}=$$

$$=\frac{\sum_1^n X_i^{2(m-1)}+\underset{h\neq k}{S}X_h^m X_k^{m-2}}{n^2\left|\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^{m-1}\right|^2}=$$

$$=\frac{\left[\sum_1^n X_i^{m-1}\right]^2+\underset{h\neq k}{S}(X_h-X_k)^2X_h^{m-2}X_k^{m-2}}{n^2\left[\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^{m-1}\right]^2}=$$

$$=1+\frac{\underset{h\neq k}{S}(X_h-X_k)^2X_h^{m-2}X_k^{m-2}}{n^2M_{m-1}^{2(m-1)}}$$

que puede verse en Mortara, «Lezioni di Statistica Metodologica» pg 108.

TEMAS DE ESTUDO

A NOÇÃO DE GRUPO TOPOLÓGICO — CORRECÇÃO IMPORTANTE

por ***Hugo Ribeiro***

(Bolseiro do Instituto para a Alta Cultura)

Acabamos de reler o nosso artigo da «Gazeta» n.º 17, de Novembro de 1943, sôbre a noção de grupo topológico e notar que a nossa preocupação de pôr em relevo uma propriedade dos grupos topológicos que aí indicámos e cujo interêsse se estende a outros capítulos da Matemática, aparentemente distantes daquêle, nos levou a formular erradamente a condição de continuïdade normalmente imposta ao produto de elementos dum grupo topológico. A propriedade em questão é a de que se deve ter $\overline{X}\cdot\overline{Y}\subset\overline{X\cdot Y}$, quaisquer que sejam os complexos X e Y do grupo. Esta propriedade é de facto, como indicámos, válida em qualquer grupo topológico e equivalente à continuïdade da operação de produto relativamente a cada uma das variáveis factores, que nós exigimos na definição apresentada. *Porém não é simplesmente esta espécie de continuïdade a que intervem no conceito do grupo topológico,* mas mais: $x\cdot y$ *deve ser uma função contínua no* espaço produto *do espaço* T_1 (que os elementos do grupo devem constituir) *por si mesmo* (espaço cujos elementos são os pares ordenados $<x, y>$ de elementos de G, sendo uma vizinhança de um par, $<x, y>$, o conjunto de pares ordenados cujos antecedentes são os elementos de uma vizinhança de x e cujos conseqüentes são os elementos de uma vizinhança de y: pense-se, por exemplo, na topologia do plano como um tal produto das de duas rectas). E é trivial que a continuïdade de uma função de duas variáveis é coisa distinta da continuïdade dessa função relativamente a cada uma das variáveis. Também para o produto $x\cdot y$ num grupo topológico a continuïdade relativamente a cada um dos factores é implicada pela *continuïdade do produto* $x\cdot y$, mas não a implica: O exemplo do grupo aditivo dos números complexos com uma topologia que difere da ordinária porque, dada uma recta fixa, no plano, se excluíram das vizinhanças ordinárias de cada número complexo α os pontos distintos de α pertencentes à paralela àquela recta, pelo afixo de α, mostra, com simplicidade, êsse facto; com efeito, os números complexos constituem, assim, relativamente à adição, um grupo, a topologia verifica tôdas as condições dos espaços T_1, tem-se $\overline{X^{-1}}=\overline{X}^{-1}$ e $\overline{X}\cdot\overline{Y}\subset\overline{X\cdot Y}$ mas a continuïdade exigida aos grupos topológicos não se dá.

Devemos, pois, acrescentar, (para a definição de grupo topológico) às condições que impuzemos no nosso artigo, uma nova que poderá exprimir-se assim: quaisquer que sejam os elementos x *e* y *e o complexo* Z *tais que* $x\cdot y\notin\overline{Z}$ *há complexos* X *e* Y *com* $x\notin\overline{X}$, $y\notin\overline{Y}$ e $(1-\overline{X})\cdot(1-\overline{Y})\subset 1-\overline{Z}$. ($1-\overline{X}$, $1-\overline{Y}$, $1-\overline{Z}$ representam os complementares dos conjuntos $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, respectivamente). A condição $\overline{X}\cdot\overline{Y}\subset\overline{X\cdot Y}$ torna-se então supérflua. Mas tôdas as questões postas subsistem.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA (J. I. M.)

COLÓQUIOS DE ANÁLISE GERAL

Por iniciativa da Junta de Investigação Matemática, realizam-se todos os sábados, às 16 horas, a partir do dia 15 de Janeiro no Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto uma série de colóquios de Análise Geral que terão por objectivo divulgar entre os estudiosos portugueses as correntes principais do pensamento matemático moderno.

Êste ano os colóquios serão divididos nas cinco secções:

I — *Álgebra Moderna* — sob a direcção do Prof. Dr. A. Almeida Costa.

II — *Teoria das Estruturas* — sob a direcção do Prof. Dr. A. Monteiro.

III — *Topologia Geral* — sob a direcção do Prof. Dr. A. Monteiro.

IV — *Teoria Geral da Medida* — sob a direcção do Prof. Dr. Ruy Luís Gomes.

V — *Teoria Geral da Integração* — sob a direcção do Prof. Dr. Ruy Luís Gomes.

Em cada sessão, que durará cêrca de 1 hora e 30 minutos realizar-se-ão 3 colóquios.

1.ª Sessão

1) Álgebra Moderna: *Grupos*—por José Morgado.

2) Topologia Geral: *Espaços de Sierpinski*—por Dr.ª Maria Odette Botelho.

3) Teoria Geral da Medida: *Introdução*—por Dr. Laureano de Barros.

No próximo número da «Gazeta» serão indicados os programas de trabalho de cada uma das secções.

Já foram publicados:

«Cadernos de Análise Geral» n.os 1 e 2 cujos tít são respectivamente:

Topologia Geral — 1 — Espaços de Sierpinski António Aniceto Monteiro; Teoria gera da Medida — Introdução por Laureano Barros.

Para condições de assinatura da colecção vide an cios na capa dêste número.

ADESÕES À JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Desde que foi anunciada a criação da J. I. M., no último número da «Gazeta de Matemática», foram comunicadas as adesões de: Prof. Sarmento de Beires; Prof. Bento Caraça; dos seguintes trabalhadores do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto: Prof. Almeida Costa, Drs. Luís Neves Real, A. Pereira Gomes, Laureano M. de Barros, José Gaspar Teixeira, Mar Odette Botelho, Maria Helena Costa Ferreira, En Bernardino de Barros Machado e José Morgad Nuno Fidelino de Figueiredo Cotter; Fernando Nev Ferrão; Dr. José D. da Silva Paulo; Prof. Manu Zaluar Nunes.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

ASSEMBLEIA GERAL — CURSOS A REALIZAR

No dia 14 de Janeiro de 1944 reüniu-se no Anfiteatro de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa a Assembleia Geral da S. P. M. Foram lidos e aprovados o relatório da Direcção e as contas relativas ao período de 30 de Abril a Dezembro de 1943. Para o cargo vago de Secretário Geral da Sociedade foi eleito o Dr. Carlos Fernandes de Carvalho e para o lugar de 1.º secretário o Dr. J. Xavier de Brito.

Pela Direcção da Sociedade foram propostos e aprovados os seguintes votos:

1.º — de agradecimento à Faculdade de Ciências pelas facilidades concedidas.

3.º — de louvor à «Gazeta de Matemática» e à «Portugaliae Mathematica» pela forma como tais revistas têm contribuído para o desenvolvimento do gôsto pela Matemática em Portugal.

3.º — de agradecimento à Imprensa, com especial menção da «Gazeta de Matemática», pela atenção com que seguiu a actividade da Sociedade.

Do relatório destacamos:

a) a decisão da Direcção de publicar o Boletim d S. P. M. nos primeiros meses de 1944 para o que est já constituida a respectiva Comissão de Redacção;

b) a narração dos esforços feitos pela Direcção da Sociedade para levar a bom caminho a criação da «Biblioteca Ibero-Americana de Matemática» junto da «Sociedade Matemática Espanhola» de quem se encontrou a melhor boa vontade para o empreendimento.

c) a concessão de um donativo de 500$00 feito pela S. P. M. à «Gazeta de Matemática».

Na última reünião da Direcção, em 21 de Janeiro de 1944, foi resolvido intensificar a actividade da Sociedade tendo-se já tomado, entre outras resoluções, a de efectivar um pequeno curso sôbre *Diferenças finitas* de que se encarregou o Secretário Geral da Sociedade, Dr. Carlos A. F. Carvalho. Oportunamente serão notificadas outras manifestações de actividade da S. P. M.

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PÔRTO

SEMINÁRIO DE FÍSICA TEÓRICA

Desde Outubro passado é o Seminário de Física Teórica anexo ao C. E. M. da Faculdade de Ciências do Pôrto dirigido superiormente pelo Prof. A. Proca, que com as palavras seguintes estabeleceu as normas e métodos de trabalho adoptados, definindo com clareza a orientação da actividade do Seminário:

«O objectivo dêste seminário é duplo:

1.º — Estudar as memórias e obras recentes de Física Teórica Moderna, de maneira a fornecer uma base de partida para a elaboração de trabalhos originais.

2.º — Desenvolver não sòmente entre os estudantes mas também num público especializado, tão numeroso quanto possível, o gôsto pelas investigações físicas, de modo a criar um clima favorável e um meio propício às descobertas no domínio mencionado.

Para atingir êste duplo objectivo sem que, ao mesmo tempo, se dispersassem esforços, decidiu-se agrupar êste ano os trabalhos do Seminário à volta de um assunto central, suficientemente vasto para oferecer interêsse geral, mas preciso bastante para evitar tôda a dispersão.

O assunto escolhido foi um dos que dominam actualmente as investigações de Física Teórica, a saber: o *Estudo teórico geral das partículas elementares.*

Foi estabelecido um programa, dividindo êste estudo em sessões cada uma das quais comporta a análise duma memória, dum grupo de memórias ou mais geralmente duma questão, permitindo examinar sucessivamente os diversos aspectos do problema geral. Êsse programa prevê tanto a análise de memórias de natureza teórica, como conferências de conjunto sôbre os resultados de ordem experimental destinados a precisar as bases físicas dos fenómenos de que se estuda a teoria.

As memórias inscritas no programa devem ser estudadas e expostas no seminário, tanto quanto possível pelos próprios alunos; essas exposições devem ser seguidas duma discussão ou de observações críticas, que permitem situar a questão no quadro dos conhecimentos já adquiridos e apreciar as suas relações com outros problemas, exercício duma importância capital para todos os que se dedicam ao trabalho de investigação».

O Prof. A. Proca iniciou as sessões de trabalho com uma lição subordinada ao tema: I—*Les particules élémentaires: position du problème, méthodes d'attaque, principes fondamentaux des mécaniques nouvelles*; a que se seguiram outras lições do mesmo professor com o tema seguinte: II—*Rappel des notions fondamentales de mécanique ondulatoire: théorie générale, opérateurs, matrices, grandeurs observables, probabilités.*

Enquadrada no programa acima traçado, efectuou o Assistente Carlos Braga uma comunicação sob o título: I—*As partículas elementares do ponto de vista experimental,* em que foram referidos os dados experimentais mais recentes sôbre o assunto.

Dando a sua valiosa colaboração à actividade do Seminário, o Prof. R. Sarmento de Beires fêz um conjunto de quatro notáveis lições sôbre os temas seguintes: I—*Equações de Lagrange, princípio de Hamilton e princípio da menor acção.* II—*Teoria de Hamilton — Jacobi.* III—*Equações de Maxwell, propagação das ondas.* IV—*Trem de rodas, velocidade de grupo; onda associada a um corpúsculo;* destinadas a completar os conhecimentos de mecânica clássica de uma parte do auditório, indispensáveis ao desenvolvimento ulterior dos trabalhos.

Em trabalho dedicado mais especialmente aos colaboradores do Seminário, o Prof. A. Proca analisou as duas memórias originais seguintes: I—de Belifante: *On the spin angular momentum of mesons.* II—de Iskraut: *Bemerkungen zum Energie—Impuls—Tensor der Feldtheorien der Materie.*

A. P. G.

CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA APLICADOS À ECONOMIA

No Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, iniciou-se em 20 de Janeiro de 1944 um curso intitulado «Complementos de Análise» organizado por êste Centro. As três primeiras lições são proferidas pelo Prof. Bento Caraça nos últimos dias de Janeiro e versarão os seguintes temas: *Funções* Γ e β. *Sistemas ortogonais.* Em Março, em dias a fixar, serão tratados ainda os seguintes assuntos: *Polinómios de Legendre; Polinómios de Hermite; Derivação e integração numérica; Interpolação.* Estes temas serão expostos pelos assistentes do Instituto Drs. Alfredo Miranda, João Remy Freire e Orlando Morbey Rodrigues.

CONCURSO PARA ACTUÁRIO DO INSTITUTO NACIONAL DE TRABALHO

Do «Diário do Govêrno», 3.ª série, n.º 20, de 25 de Janeiro de 1944, julgamos curioso transcrever, para levar ao conhecimento dos nossos leitores, a parte relativa ao programa das provas a efectuar.

«O concurso constará das seguintes provas escritas:

a) Duas provas de resolução de problemas envolvendo conhecimentos das matérias seguintes:

Noções gerais sôbre: análise combinatória, convergência de séries, derivação e diferenciação das funções de variável real, integração (integração como operação inversa da diferenciação, integração das funções racionais, mudança de variável, integração por partes, aplicação ao cálculo de áreas planas, integração por séries) e equações diferenciais (generalidades, equações de 1.ª ordem e do 1.º grau—diferencial exacta, separação de variáveis, equação homogénea, equação linear —).

Fórmula de Moivre na teoria dos números complexos. Relação entre a função exponencial e as funções circulares. Fórmula dos acréscimos finitos. Desenvolvimentos em série de Taylor e Maclaurin. Uso das derivadas no estudo da variação de uma função de uma variável real. O integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Diferenças de uma função. Notação simbólica, os símbolos Δ e E. Notação factorial. Diferenças de um polinómio. Fórmula de interpolação de Newton e sua extensão às diferenças divididas. Fórmula de interpolação de Lagrange. Subdivisão de intervalos.

Somação. A função $U_x\,V_x$; somação por partes. O operador Σ e a sua relação com o operador Δ. Determinação da soma de séries.

Operador $D \equiv \frac{d}{dx}$ e operador Δ. Aplicações simples a derivação numérica.

Fórmula de Euler-Maclaurin. Aplicacões simpl integração numérica.

Probabilidade. Probabilidades totais. Probabili des compostas. Esperança matemática. Provas re tidas. Probabilidades geométricas. A lei da probab dade de Gauss.

b) Uma prova elementar sôbre os princípios ger do sistema português de previdência social.

As provas indicadas na alínea *a)* poderão ter duração de duas horas e meia cada uma e a menc nada na alínea *b)* a duração de uma hora.

O concurso é válido por um ano».

ANTOLOGIA

CIÊNCIA E TÉCNICA

Passagem da alocução de Paul Langevin proferida na Sorbonne em 18 de Maio de 1939 no jubileu científico de Élie Cartan

Há quatro ou cinco anos, um engenheiro americano, Gabriel Kron, resumia uma série de artigos destinados aos técnicos numa memória intitulada «Dinâmica não riemanniana das máquinas electricas rotativas». Aí mostrou o autor que as novas geometrias permitem realizar ao electrotécnico o equivalente do que Lagrange conseguiu com a mecânica analítica. Afirma que o problema da rede eléctrica mais geral, isto é, dum conjunto de máquinas eléctricas rotativas associadas dum modo qualquer, se reduz ao problema do movimento duma partícula num espaço não riemanniano a um número de dimensões igual ao número de graus de liberdade do sistema, com conexão afim disimétrica, isto é, com torsão, sendo a partícula submetida a uma fôrça não conservativa determinada pela sua posição e a uma resistência de atrito proporcional à sua velocidade.

O intuito desta memória é o de mostrar aos engenheiros electrotécnicos que existe um novo e poder ramo das matemáticas admiràvelmente adaptado verificação das teorias respeitantes aos inúmeros tip de máquinas rotativas.

O emprêgo dêste novo método permite, nos cálcul práticos, uma economia de tempo considerável relação aos processos actuais.

Além disso, e em contrapartida, as máquinas eléct cas parece fornecerem uma representação muito ma concreta das geometrias não riemannianas do que teoria do campo unitário na Relatividade Genera zada. O leitor da memória de Kron constatará co êste está familiarizado com a maioria das noçõ novas, mas que em logar de lhes dar os nomes de te sor métrico ou de símbolo de Christoffel, as conhe já sob os nomes de indutância ou de fôrça electr -motriz induzida.

Tradução de M. ZALUAR

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1943)

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

Ponto n.º 1

I

1556 — Forme a equação biquadrada de que são raízes os números que constituem uma solução inteira e positiva da equação $5x+3y=11$. R: *Uma solução inteira da equação proposta é:* $x_1=1$, $y_1=2$ *e as soluções gerais* $x=1+3m$ $y=2-5m$ *o que mostra ser* x_1, y_1 *a única soluçã inteira e positiva. A biquadrada terá então po raízes* $1, -1, 2$ *e* -2 *e será* $x^4-5x^2+4=0$ *visto a raízes da resolvente serem* 1 *e* 4.

1557 — Indique as condições a que devem satis fazer os coeficientes da equação $ax^2+bx+c=$ para que as suas raízes sejam reais e o valor d uma delas seja inverso do da outra. R: $b^2-4ac>0$ *e* $c=a$, *ou seja* $b^2-4a^2>0$ *com* $c=a$.

1558 — Defina radicais semelhantes. Efectue a operação $\sqrt{810}-\sqrt{250}+\sqrt{40}$. R: $\sqrt{810}-\sqrt{250}+\sqrt{40}=9\sqrt{10}-5\sqrt{10}+2\sqrt{10}=6\sqrt{10}$.

II

1559 — Determine, por logaritmos, a área de um triângulo isósceles inscrito num círculo de 5 metros de raio, sabendo que é de $24^\circ 15'$ a medida do ângulo oposto à base. R: *A metade do lado da base do triângulo é dada pela expressão:* $5 \operatorname{sen} 24^\circ 15'$, *visto o ângulo ao centro cujos lados passam pelas extremidades da base, medir* 49°. *A altura do triângulo é* $5+5\cos 24^\circ 15'=5\,(1+\cos 24^\circ 15')=10\cos^2 12^\circ 7' 30''$ *e a área terá por medida* $A=5\cdot 10\cdot \operatorname{sen} 24^\circ 15' \cos^2 12^\circ 7' 30''$ *donde* $\log A=1+\log 5+\log \operatorname{sen} 24^\circ 15'+2\log\cos 12^\circ 7' 30''=1+0{,}69897+\bar{1}{,}61354+\bar{1}{,}98040=1{,}29291$ *e* $A=19{,}63\ m^2$.

1560 — Determine, sem recorrer às tábuas, o valor de $\sec 960^\circ$. R: $\sec 960^\circ=1:\cos 960^\circ=1:\cos 240^\circ=-1:\cos 60^\circ=-1:1/2=-2$.

III

1561 — Desenhe um paralelogramo e uma sua diagonal; por um ponto desta tire paralelas aos lados do paralelogramo. Formam-se assim quatro novos paralelogramos, dois dos quais não são atravessados pela diagonal traçada; demonstre que êstes são equivalentes. R: *Seja* [ABCD] *o paralelogramo e* CB *uma das suas diagonais. Seja* E *um ponto dessa diagonal e* C'D' *uma paralela ao lado* CD *e* A'B' *uma paralela ao lado* AC *passando ambas pelo ponto* E. *Consideremos na figura os paralelogramos* [AC'EB'] *e* [A'ED'D], *cuja equivalência queremos demonstrar. Os triângulos* [ABC] *e* [BCD] *são iguais assim como* Δ[C'EC] $=\Delta$[CEA'] *e* Δ[BED'] $=\Delta$[BB'E]. *Ora* Ar.[A'ED'D] = Ar.[BCD] − Ar.[BD'E] − Ar.[EA'C] *e* Ar.[AB'EC] = Ar.[ABC] − Ar.[B'BE] − Ar.[C'EC] *donde resulta* Ar.[A'ED'D] = Ar.[AB'EC'].

1562 — *a)* Considere um triângulo escaleno. ¿Poderão não ser agudos os ângulos internos adjacentes ao seu lado maior? Justifique a resposta. R: *Não; porque ao lado maior opõe-se o ângulo maior e se um só que fôsse dos ângulos adjacentes a êsse lado fôsse recto ou obtuso, como o ângulo oposto ao lado maior seria maior que êste, a soma dos ângulos do triângulo seria maior que* 180°.

b) Defina o ângulo e distância de duas rectas não complanas.

IV

1563 — Demonstre que a soma de duas fracções irredutíveis cujos denominadores sejam números primos entre si é uma fracção irredutível. R: *Sejam* a/p *e* b/q *as duas fracções em que* $(p,q)=1$; $(a,p)=1$ *e* $(b,q)=1$. *A soma das duas fracções é* $\dfrac{aq+bp}{pq}$; *ora para que esta fracção não fôsse irredutível era necessário que os seus termos admitissem um divisor comum diferente de* 1. *Êsse divisor dividindo* pq *teria que dividir ou* p *ou* q. *Se dividisse* p *como divide* aq+bp *dividiria* aq *e como não divide* q *dividiria* a *o que é impossível visto que* $(a,p)=1$. *Se dividisse* q, *dividindo* aq+bp *dividiria* bp *e não dividindo* p *dividiria* b *o que é também impossível pois* $(b,q)=1$. *Então não existe divisor comum ao numerador e denominador e a fracção é irredutível.*

Soluções dos n.os 1556 a 1563 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras 29 de Julho de 1943. — Ponto n.º 1.

ARITMÉTICA

1564 — Definições, propriedades e determinação do m. d. c e m. m. c. Determine os números de quatro algarismos que são múltiplos comuns de 24, 72 e 150. R: *Os múltiplos comuns de* 24, 72 *e* 150 *com quatro algarismos são os múltiplos do* m. m. c. (24, 72, 150) = 1800 *compreendidos entre* 1000 *e* 10000 *que são* 1800, 3600, 5400, 7200 *e* 9000.

ÁLGEBRA

1565 — ¿Existem valores reais de x para os quais a soma $1+1/x+1/x^2$ seja negativa? Porquê? R: *Para a soma* $1+1/x+1/x^2=(x^2+x+1)/x^2$ *ser negativa, deve ter-se* $x^2+x+1<0$, *para* x *real qualquer, por ser* $x^2>0$. *Ora esta inequação é impossível visto que os zeros do trinómio, primeiro membro, são* $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}$, *números complexos, e, como sabemos, nesta hipótese, para* x *real qualquer, será* $x^2+x+1>0$. *Não há pois valores reais de* x *que tornem negativa a soma em questão.*

CÁLCULO NUMÉRICO

1566 — Calcule a área de um triângulo equilátero cujo lado é igual a 273,47 metros. R: *É fácil ver que, num triângulo equilátero de lado* a, *é* $\sqrt{3}\cdot a^2/4$ *a sua área. No nosso caso teremos:* $S=1/4\cdot(273{,}47)^2\cdot\sqrt{3}$ *e portanto, aplicando logaritmos,* $\log S=2\log 273{,}47+1/2\cdot\log 3+\operatorname{colog} 4=4{,}873824+0{,}23856+\bar{1}{,}39794=4{,}510324$, *donde* $S=32458{,}769\ m^2$.

Geometria Plana

1567 — *a)* Semelhança de polígonos; definições, propriedades e relações numéricas mais importantes. *b)* São dadas duas circunferências de raios r e R, tangentes exteriormente. Calcule o perímetro e a área do quadrilátero determinado pelos dois centros e os dois pontos de tangência correspondentes a uma tangente exterior comum. R: *Se chamarmos* O *e* O' *os centros das circunferências de raios respectivamente* R *e* r, *tangentes exteriormente,* A *e* B *os pontos de tangência correspondentes a uma tangente exterior comum, respectivamente sôbre as circunferências* O *e* O', *teremos, no quadrilátero* $[ABO'O]$, *que é fácil ver ser um trapézio rectângulo:* $\overline{OO'}=R+r$, $\overline{OA}=R$, $\overline{O'B}=r$ *e* $\overline{AB}^2=(R+r)^2-(R-r)^2=4rR \rightarrow \overline{AB}=2\sqrt{rR}$. *Virá portanto:*

a) — *perímetro de* $[ABO'O]=2\,[R+r+\sqrt{rR}]$.

b) — *área de* $[ABO'O]=(R+r)\sqrt{rR}$.

Geometria no Espaço

1568 — Calcule o volume e a área do sólido gerado pela rotação, em tôrno da hipotenusa, de um triângulo rectângulo de catetos $2a$ e $3a$. R: *O sólido gerado é constituido por dois cones de revolução de geratrizes* $3a$ *e* $2a$, *de base comum, cujo raio é a altura, referente à hipotenusa, do triângulo dado, e de alturas* m *e* n, *sendo* m *e* n *os segmentos determinados sôbre a hipotenusa do triângulo pela sua altura referente a esta;* $m+n=\sqrt{9a^2+4a^2}=a\sqrt{13}$. *O raio da base dos cones em questão, determina-se fàcilmente atendendo à relação* $R\cdot a\sqrt{13}=3a\cdot 2a \rightarrow R=6a/\sqrt{13}$ *(num triângulo rectângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura referente a esta). Teremos portanto:*

1) — *área* $S=\pi R(g+g')$, *com* $g=3a$ *e* $g'=2a$, $\rightarrow S=11\sqrt{13}\,a^2\pi/13$;

2) — *volume* $V=\pi R^2 m+\pi R^2 n=\pi R^2(m+n)=12\cdot\sqrt{13}\,a^3\pi/13$.

Trigonometria

1569 — Exprima a soma $S=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}3\alpha$ em função de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$. R: $S=\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}2\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha=\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha=\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+3\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,[1+2\cos\alpha]$.

Soluções dos n.os 1564 a 1569 de O. Morbey Rodrigues.

Instituto Superior Técnico — 30 de Julho de 1943.

1570 - Três ciclistas fazem o mesmo percurso. A velocidade do primeiro é superior à do segundo em 5 km. à hora. O terceiro, depois de acompanhar o primeiro durante 30 km., toma a velocidade do segundo, chegando à meta 18 minutos antes dêle, mas 42 minutos depois do primeiro. Calcule a velocidade de cada ciclista e o número de quilómetros do percurso. R: *Designemos por* v km/h *a velocidade do primeiro ciclista e por* e km. *o percurso. O tempo* t_1 *por êle dispendido no percurso de* e km. *será* $t_1=e/v$ *(referiremos todos os tempos à unidade hora). A velocidade do segundo ciclista é, portanto, de* $(v-5)$ km/h *e o tempo por êle dispendido no percurso será pois,* $t_2=e/(v-5)$. *O terceiro ciclista percorreu* e km. *no tempo* t_3 *igual à soma dos tempos gastos em percorrer* 30 km. *à velocidade* v km/h *e* $(e-30)$ km. *à velocidade* $(v-5)$ km/h; *isto é:*

$$t_3=\frac{30}{v}+\frac{e-30}{v-5}\cdot \quad \textit{Sabemos ser} \quad \begin{cases} t_3=t_2-0{,}3 \\ t_3=t_1+0{,}8 \end{cases}.$$

Estamos em face dum sistema de duas equações a duas incógnitas, que resolvido dará:

$$\begin{cases} e=110\text{ km} \\ v=\ 25\text{ km/h}. \end{cases}$$

É fácil calcular as velocidades dos outros dois ciclistas.

1571 — É dado um triângulo equilátero de lado a. Forme outro triângulo cujos vértices sejam os pontos médios dos lados dêste triângulo. Proceda em relação ao triângulo obtido como procedeu com o triângulo dado e assim sucessivamente. Exprima em função de a o limite da soma dos perímetros das circunferências circunscritas aos triângulos. R: *Tendo em atenção o teorema que nos diz, que é paralelo à base e igual a* $1/2$ *desta, o segmento de recta que tem por extremos os pontos médios dos outros dois lados dum triângulo qualquer, é fácil ver que os lados dos triângulos equiláteros que se vão formando pelo processo de construção indicado, têm respectivamente por medida* $a, a/2, a/2^2, a/2^3, \cdots a/2^{n-1}, \cdots$. *Sabendo que o lado* l *dum triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio* R *é* $l=R\sqrt{3} \rightarrow R=l\sqrt{3}/3$, *é fácil concluir que os perimetros das circunferências circunscritas àqueles triângulos, são respectivamente:*

$$\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\pi a\sqrt{3}}{2\cdot 3},\ \frac{2\pi a\sqrt{3}}{2^2\cdot 3},\ \cdots\ \frac{2\pi a\sqrt{3}}{2^{n-1}\cdot 3},\ \cdots.$$

O limite da sua soma, é o limite da soma de n *termos duma progressão geométrica de 1.º termo* $2\pi a\sqrt{3}/3$ *e cuja razão é* $1/2$. *Teremos pois que calcular*

$$L=\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right)=\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1-1/2^n}{1-1/2}=\frac{4\pi a\sqrt{3}}{3}.$$

1572 — Verifique a identidade $\cos(2B-C)=$ $=(3a^2-4b^2)\cdot b/a^3$ sendo B e C ângulos de um triângulo rectângulo em A, e b, c e a os lados opostos a êsses ângulos. R: *Como* $B=\pi/2-C$, *teremos* (1) $\cos(2B-C)=\cos(\pi-3C)=-\cos 3C=$ $=\cos C(3-4\cos^2 C)$. *No triângulo rectângulo em questão, sabemos que se verifica a relação* $b=a\cos C \rightarrow \cos C=b/a$ *que substituido no 2.º membro de* (1) *conduzirá a* $\cos(2B-C)=b/a\cdot$ $\cdot(3-4b^2/a^2)=b/a^3\cdot(3a^2-4b^2)$ c. q. v.

1573 — É dado um triângulo isósceles $[ABC]$ de base $\overline{AB}=2a$. Exprima a distância entre os centros das circunferências inscrita e circunscrita ao triângulo em função da base e do ângulo oposto. Verifique a partir da relação obtida que o triângulo é equiângulo se os dois centros coïncidirem. R: *Designemos por* O *e* O', *respectivamente, os centros das circunferências circunscrita e inscrita ao triângulo dado e por* $\overline{CH}$ *a altura relativa à base* $\overline{AB}$. *É sôbre a recta* CH *que se encontram, evidentemente,* O *e* O'; *escolhendo sôbre ela um sentido positivo, e considerando segmentos orientados, teremos em qualquer caso, isto é, para qualquer valor de* $\widehat{C}$, *a relação:* $\overline{OO'}=\overline{OH}-\overline{O'H}$. *Desenhando uma figura deduz-se fàcilmente que:* $\overline{OH}=a\operatorname{cotg} C$ *e* $\overline{O'H}=a\operatorname{tg}(\pi/4-C/4)$ *e, portanto,* $\overline{OO'}=a[\operatorname{cotg} C-\operatorname{tg}(\pi/4-C/4)]$. *O caso de coïncidência dos centros* $\overline{OO'}=0$ *corresponde aos valores de* $\widehat{C}(0<C<2\pi)$, *raizes da equação*. $\operatorname{cotg} C-\operatorname{tg}(\pi/4-C/4)=0$, *que é fácil de ver ser verificada para* $C=\pi/3$, *caso do triângulo equilátero.*

1574 — Num círculo de centro C e raio R trace dois raios CA e CM que formem entre si um ângulo dado α. Calcule, em função de R e de α, o volume do sólido gerado pelo triângulo $[CAM]$ quando faz uma rotação completa em tôrno da tangente à circunferência no ponto A. R: *O volume gerado* V *é a diferença dos volumes* V_1 *e* V_2, *respectivamente dos dois sólidos seguintes:*

1) — Tronco de cone de revolução, *de raios das bases* R *e* $\overline{MP}$, *de geratriz* R *e de altura* $\overline{AP}$ *em que* P *é o pé da perpendicular baixada de* M *sôbre a tangente à circunferência no ponto* A.

2) — Cone de revolução, *de geratriz* $\overline{AM}$, *altura* $\overline{AP}$ *e raio da base* $\overline{MP}$.

Vê-se fàcilmente que $\overline{AM}=2R\cdot\operatorname{sen}\alpha/2$, $\overline{MP}=\overline{AM}\cdot$ $\cdot\operatorname{sen}\alpha/2=2R\cdot\operatorname{sen}^2\alpha/2$, $\overline{AP}=\overline{AM}\cdot\cos\alpha/2=R\operatorname{sen}\alpha$. *Tendo em atenção às expressões dos volumes dum tronco de cone de revolução e dum cone circular recto, respectivamente:* $V'=\pi h(r^2+r_1^2+rr_1)/3$ (h *altura,* r *e* r_1 *raios das bases*), $V''=\pi r^2 h/3$ (r *raio da base e* h *altura*) *teremos, no nosso caso:*
$V_1=\pi/3\cdot R\operatorname{sen}\alpha\cdot(R^2+4R^2\cdot\operatorname{sen}^4\alpha/2+2R^2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha/2)$,
$V_2=\pi/3\cdot R\operatorname{sen}\alpha\cdot 4R\cdot\operatorname{sen}^4\alpha/2$,
$V=V_1-V_2=\pi R^3/3\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot(1+2\operatorname{sen}^2\alpha/2)$.

1575 — Sôbre as três arestas de um triedro tri-rectângulo de vértice V marque respectivamente os comprimentos $\overline{VA}=3a$, $\overline{VB}=\overline{VC}=3a\sqrt{2}$. Determine a distância do vértice V ao plano do triângulo $[ABC]$. R: *A distância* $\overline{VH}$ *do vértice* V *ao plano do triângulo* [ABC] *não é mais do que a altura relativa à hipotenusa dum triângulo* [VAD] *rectângulo em* V, *de catetos* $\overline{VA}=3a$ *e* $\overline{VD}$ (*altura do triângulo* [BVC] *rectângulo em* V *e isósceles*) *e hipotenusa* $\overline{AD}$ (*altura do triângulo* [ABC]). *É facil ver que se tem* $\overline{VD}=3a$, $\overline{AD}=$ $=3a\sqrt{2}$ *e que portanto* $3a\cdot 3a=\overline{VH}\cdot 3a\sqrt{2}\rightarrow\overline{VH}=$ $=3a\sqrt{2}/2$.

Soluções dos n.os 1570 a 1575 de Orlando M. Rodrigues.

CORRECÇÃO

Problema **1524**, pág. 22, do n.º 17, onde se lê *diâmetro* deve ler-se *raio*. A ser o *diâmetro* e não o *raio* igual a 13,17 m deveria ter-se $l_7=13{,}17\operatorname{sen}25°43'51''=$ $=5{,}714$ m.

J. S. Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência e finais

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.º exame de freqüência, 1943-44.** — Ponto n.º 4.

I

1576 — Para que valores de x converge a série $\frac{2x}{x-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^3+\cdots$? R: *A série dos módulos converge para os valores de* x *tais que* $\frac{2|x|}{|x-1|}<1$, i. e., *para os valores de* x *cujas imagens são os pontos do interior da circunferência com centro na imagem de* $-1/3$ *e raio* $2/3$; *para êsses valores a série dada converge absolutamente. Para os pontos da circunferência a série dos módulos é a série harmónica* *e a convergência nunca é absoluta. Para* $x=1/3$ *a série converge; para* $x=-1$ *a série diverge.*

1577 — Primitivar

$$(2x)^2 \log x + \frac{1}{\sqrt{4k^2 - x^2}} + \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos x}{\cos 2x - 1}.$$

R: *Primitive-se o 1.º termo por partes pondo* $v' = x^2$; *obter-se-à* $4/3 \cdot x^3 (\log x - 1/3)$. *O 2.º têrmo é a derivada de* $\operatorname{arc\,sen} x/2k$. *No 3.º têrmo, considere-se que* $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ *e* $\cos 2x - 1 = -2 \operatorname{sen}^2 x$; *decomponha-se: os têrmos obtidos serão as derivadas de* $-\log |\operatorname{sen} x|$ e $\dfrac{1}{2 \operatorname{sen} x}$.

578 — Calcule o valor da derivada da função $y = \log e^{\log e^{\operatorname{arc\,sen} 1/x}}$ para $x=2$. R: *Será* $y = \operatorname{arc\,sen} 1/x = \operatorname{arc\,cosec} x$ *e portanto*

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad e \quad y'(2) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

II

1579 — Sendo A_1 e A_2 as secções que definem $\sqrt{5}$ quais são as que definem $3^{-\sqrt{5}}$? R: *Consideremos todos os racionais* c_1, *tais que para algum número* a_2 *de* A_2, *se tenha* $c_1 < 3^{-a_2}$. *Êsses números constituem uma secção inferior* C_1, *da totalidade dos números racionais.* $3^{-\sqrt{5}}$ *é por definição o número definido pela secção* C_1. *A secção* C_2, *contígua de* C_1, *é a outra que também define o número e é constituída pelos números racionais* c_2 *tais que para algum número* a_1 *de* A_1 *se tenha* $c_2 < 3^{-a_1}$.

1580 — Diga quais são para o conjunto $1 + (-1)^n + (-1)^n/n$ os números l, L, λ, Λ e os seus pontos de acumulação. R: $l = -1$, $L = 5/2$, $\lambda = 0$ *e* $\Lambda = 2$; 0 *e* 2 *são os únicos pontos de acumulação.*

1581 — Mostre que a sucessão $1+1/3$, $1+1/3+1/9$, $1+1/3+1/9+1/27$, $\cdots$ é convergente e indique o seu limite. R: *Admitindo que* $u_n = 1 + 1/3 + 1/9 + \cdots + 1/3^n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2 \cdot 3^n}$ *tem-se* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3/2$ *e a sucessão é convergente.*

1582 — Determine os complexos cujos afixos são os outros dois vértices do quadrado de que são dois vértices opostos os afixos de $2-i$ e $2+3i$. R: *São* i *e* $4+i$.

1583 — Escreva na forma trigonométrica o número cujas raízes quárticas têm por afixos os vértices do quadrado inscrito na circunferência de centro na origem e raio 2, tal que o afixo situado no 1.º quadrante tem por argumento $\pi/6$.
R: $2^4 (\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)$.

1584 — Indique a razão pela qual a série alterna $5/4 - 7/6 + 9/8 + \cdots$ é divergente, embora seja $|u_{n+1}| < |u_n|$. R: *Porque* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

1585 — Por que motivo é $x > \log(1 + x^n/n!)$? R: *Para* $x > 0$ $e^x = 1 + \cdots + x^n/n! + \cdots > 1 + x^n/n!$ *e portanto* $x > \log(1 + x^n/n!)$.

1586 — Como é constituída a sucessão $u_n \to a$, caso a não seja ponto de acumulação de (u_n)? R: *Todos os têrmos a partir dessa certa ordem são iguais a* a.

1587 — O cóciente de duas funções $f(x)$ e $\varphi(x)$, contínuas no ponto $x=a$, é também contínua nesse ponto? Justifique a resposta. R: *É se* $\varphi(a) \neq 0$; *não é se* $\varphi(a) = 0$. *Neste caso a função toma para* $x=0$ *um valor infinito ou indeterminado. Neste último caso pode restabelecer-se a continuïdade pondo que o valor da função para* $x=0$ *é* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

1588 — Como diferem duas funções cujas derivadas diferem por uma expressão da forma $e^x + ax$? R: *A sua diferença é uma função* $e^x + ax^2/2 + b$ *em que* b *é uma constante.*

III

1589 — Verifique se a função

$$f(x) \begin{cases} = \operatorname{sen} x/x & \text{para } x \neq 0 \\ = 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$ é contínua no ponto $x=0$.

R: *É, porque* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

1590 — A partir da relação entre a derivada duma função e a da sua inversa, deduza a expressão da derivada da função inversa da tangente hiperbólica.

R: *De* $y = \operatorname{Arg\,tg\,th} x$ *tem-se, invertendo* $x = \operatorname{th} y = \dfrac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y}$

donde $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y}$ *e* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

1591 — Justifique a convergência absoluta da série $1 - 1/2^3 + 1/3^3 - \cdots$ e conclua, daí, justificando também, a natureza da série $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$ para os vários valores de x. R: *Considerando a série* $\sum u_n$ *dos módulos da 1.ª e pondo* $\dfrac{1}{1+\alpha} = \dfrac{n^3}{(n+1)^3} = \dfrac{u_{n+1}}{n_n}$ *tem-se* $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha = 3$ *e a série converge. Visto que* $\dfrac{|\operatorname{sen} nx|}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^3}$ *a 2.ª série também é absolutamente convergente, qualquer que seja* x, *finito.*

Soluções dos n.ºs 1576 a 1591 de G. Ramos de Castro.

F. C. L. — Álgebra Superior — **Pontos do 1.º exame de freqüência, 1943.** — Ponto n.º 3.

I

1592 — Primitivar

$$\frac{2x-3}{(x-2)^2+1}+x^2 \operatorname{arc\,tg} x^3+x\frac{\cos x^2}{\operatorname{sen} x^2}.$$

1593 — Derivar $y=2e^{\operatorname{arc\,sen} x \cdot \log|\operatorname{tg} x|}$.

1594 — Com uma das combinações

$$\begin{cases} y=\log\left|\sqrt{u+1}\times\cos\pi u\right| \\ u=\operatorname{sen}(x+\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2\operatorname{arc\,sen}(u+1) \\ u=x^2+1 \end{cases}$$

componha uma função e calcule o valor da 1.ª derivada para $x=0$.

II

1595 — Por que motivo dois números irracionais correspondem entre si outros números irracionais?

1596 — Se (x) tem elementos em $\left(r-\frac{1}{n},\ r+\frac{1}{n}\right)$ — por maior que seja o número natural n e qualquer que seja o número racional r em (a,b) — quais são os pontos de acumulação de (x) neste intervalo (a,b)?

1597 — Substituindo-se x pelo número irracional $\frac{1}{A}$ no polinómio de coeficientes inteiros ax^2+bx+c, obtém-se como resultado certo número inteiro d. Nesta hipótese, por que operações algébricas se pode calcular A partindo de números inteiros.

1598 — Que relação há entre os limites máximos dos conjuntos $\sqrt[n]{\sigma_n}$ e $\sqrt[n]{n\alpha_n}$? $(\alpha_n>0)$.

1599 — Quando a série $\sum u_n$ é simplesmente convergente, de que natureza é $\sum(-1)^n u_n$? Porquê?

1600 — Como se dispõem no plano os pontos em que a série $\sum\frac{n}{(z-a)^n}$ é convergente?

1601 — Por que razão é $e^x>\frac{x^n}{n^n}$? $(x>0)$

1602 — Calcule as raízes n do número $i^{\frac{1}{2}n}$.

1603 — De que natureza é a sucessão dos valores de $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ quando x tende para zero ao longo da sucessão $u_n=\dfrac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$?

1604 — Conhece alguma função contínua no intervalo $(0,1)$ cujos valores nêsse intervalo possam exceder $\frac{1}{\varepsilon}$ por menor que seja ε?

III

1605 — Provar que, tendo $f(x)$ derivada (finita ou infinita) no ponto $x=a$, também $f(x)+\lambda x$ (λ constante) tem derivada nêsse ponto.

1606 — Quando os afixos dos valores $X^{1/3}$ e os de $Y^{1/3}$ são vértices dum hexágono regular, que relação liga X e Y?

1607 — Sabe achar ràpidamente a derivada de ordem n de $\frac{x}{x^2-1}$?

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.º exame de freqüência, 1943-44.** — Ponto n.º 5.

I

1608 — Primitivar

$$y=\frac{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}{1-\cos 2x}-\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}+\frac{\log x^3}{x^2}.$$

1609 — Calcule o valor da derivada da função $y=[1-(e^x)^x]^{\operatorname{arc\,cos} x}$ para $x=0$.

1610 — Com alguma das combinações

$$\begin{cases} y=\operatorname{arc\,sec}(\log 1/u) \\ u=1/x \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\log(\operatorname{arc\,tg} e^u) \\ u^2=1+\operatorname{tg}^2(x^2-1) \end{cases}$$

componha uma função de função e calcule o valor da sua 1.ª derivada para $x=1$.

II

1611 — Se a soma e o produto dos números irracionais A e B são conjuntamente racionais que operações algébricas é necessário executar partindo de números inteiros para obter A e B? Porquê?

1612 — Se u_n não tende para limite algum, mas $\frac{1}{u_n^2+1}$ tende para um certo limite que valor tem êste limite?

1613 — Tendo-se $0<u_n-a<\delta$ a partir de certa ordem $n(\delta)$, a partir de que ordem se tem $u_n^2-a^2<\delta$?

1614 — Qual a natureza da série $\sum\left(e^{\frac{1}{n+1}}-1\right)$?

1615 — Quais são os valores de $i^{\sqrt{2}}$?

1616 — Qual o valor exacto do módulo da soma de dois números imaginários de módulos 2 e 3 cujos argumentos diferem por $\pi/4$?

1617 — Sendo $\sum u_n$ simplesmente convergente, que se sabe da sucessão $|S_n|$?

1618 — Como se enuncia o teorema de Weierstrass para as funções contínuas?

1619 — Seja $f(x)$ uma função contínua e diferente de zero no ponto $x=0$, e seja λ_n o limite inferior dos valores de $\frac{1}{f(x)}$ no intervalo $(-1/n, 1/n)$. Tende λ_n para algum limite? Porquê?

1620 — Aplicando-se a fórmula de Taylor ao polinómio $f(z)$ no ponto $z=i$, que forma toma êsse polinómio?

III

1621 — Tomando-se os n primeiros têrmos da série $1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdots$ obtém-se S com êrro inferior a $1/2n$ e superior a $\frac{1}{2(n+1)}$. Porquê?

1622 — Qual o menor valor (inteiro) de α quando a série $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}-\sqrt{n}}$ é convergente?

1623 — Supondo $f'(z)$ diferente de zero no ponto a, provar que existe um círculo de centro neste ponto dentro do qual $f(z)$ só toma o valor $f(a)$ quando $z=a$.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de freqüência, 1943.** — Ponto n.º 1.

I

1624 — Calcular, com êrro inferior a 10^{-3}, o valor de $sh\,z$ para $z=1$. R: *Tem-se* $\mathrm{sh}\,1=1+1/3!+1/5!+\cdots$. *Pondo* $k=u_{p+1}/u_p=(2p-1)!\,(2p+1)!=1/2p\,(2p+1)$ *reconhece-se que o critério de d'Alembert permite concluir da convergência da série. Seguindo o método indicado na* Gazeta de Matemática *n.º 11, p. 5, tem-se*

$L(p)=\frac{1}{(2p+1)!-(2p-1)!}$. *Reconhece-se que tomando 3 têrmos o êrro sistemático é inferior a* $0{,}0002$ *e portanto que calculando* $1/6$ *e* $1/120$ *até aos décimos-milésimos* $\mathrm{sh}\,1$ *vem calculado a menos de* $0{,}0004<0{,}001$. *Será* $\mathrm{sh}\,1=1+0{,}1667+0{,}0083=1{,}1750$.

1625 — Primitivar

$$\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{2x+3}}+\frac{1}{\operatorname{sen}(2x+1)}+\operatorname{sen}x\operatorname{ch}x.$$

R: *O 1.º têrmo é a derivada de* $e^{\sqrt{2x+3}}$. *Para o 2.º têrmo, recorde-se que* $\mathrm{P}\operatorname{cosec}u\cdot u'=\log|\operatorname{tg}u/2|$. *Para o 3.º, primitive-se por partes* $(\mathrm{P}uv'=uv-\mathrm{P}u'v)$ *pondo* $v'=\operatorname{ch}x$, *uma vez para obter esta identidade, outra para calcular* $\mathrm{P}u'v$. *Obtém-se finalmente*

$e^{\sqrt{2x+3}}+1/2\log\operatorname{tg}|x+1/2|+1/2(\operatorname{sen}x\operatorname{ch}x-\cos x\operatorname{sh}x)$.

1626 — Calcular para $x=\pi$ a segunda derivada da primitiva pedida no problema anterior. R: *A 2.ª derivada da primitiva duma função* $y(x)$ *é a 1.ª derivada dessa função. Neste caso*

$y'(x)=(1/x-1/2x^{3/2})\,e^{\sqrt{2x+3}}-2\cot(2x+1)\operatorname{cosec}(2x+1)+$ $+\cos x\operatorname{ch}x+\operatorname{sen}x\operatorname{sh}x$ *donde* $y'(\pi)$.

II

1627 — Como se distingue na representação decimal um número racional dum número irracional? R: *A dízima dum racional é periódica, a dum irracional não.*

1628 — Qual o limite de uma sucessão decrescente limitada?

1629 — Módulo e argumento principal de $\frac{1+i}{1-i}$. R: 1 *e* $\pi/2$.

1630 — Quando é real o produto de dois imaginários? R: *Quando um é o produto do conjugado do outro por um número real, como se conclui procurando as relações entre* a, b, x *e* y *para que* $(a+bi)\,(x+iy)$ *tenha nulo o coeficiente de* i.

1631 — Definindo-se e^x como limite duma potência de expoente n, qual a base dessa potência? R: $e^z=\lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$.

1632 — De que natureza é a série formada pelos cubos dos termos duma série alternada simplesmente convergente? R: *A série é alternada e como do* $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ *vem* $\lim_{n\to\infty}u_n^3=0$, *convergente. Pode ser simples ou absolutamente convergente como se infere nos casos correspondentes a* $u_n=(-1)^n/n^{1/3}$ *e* $u_n=(-1)^n/n$.

1633 — Para que valores de x converge $\sum nx^{2n}$?

R: *Pondo* $u_n=|nx^{2n}|$ *tem-se* $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n}|x|^2$. *A série é absolutamente convergente para* $|x|<1$, *divergente para* $|x|>1$. *Para* $x=|1|$ *a serie dos módulos diverge e portanto a série dada só pode convergir simplesmente; para* $x=+1$, *por exemplo, diverge.*

1634 — Que se quere significar ao dizer que $f(z)$ tende para A ao tender z para a? R: *Que* $f(z)$ *e definida para os valores pelos quais* z *tende para* a *e que os valores que assume constituem uma sucessão convergente de limite* A.

1635 — Que valor tem no ponto $x=0$ a 4.ª derivada de $y=x^5\cos x+x^3$? R: *A 4.ª derivada de* x^3 *e nula; a de* $x^5\cos x$ *é um polinómio do 5.º grau em* x *sem termo independente cujos coeficientes são finitos para* $x=0$ *e que portanto também se anula para* $x=0$.

1636 — Em que teorema se fundamenta o método de primitivação por substituïção? R: *No teorema da derivação duma função de função.*

III

1637 — Pode aplicar-se o teorema do limite da soma ao cálculo do limite de $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}$ ($n-3$ parcelas)? R: *O limite da soma* $n-3/2n$ *é* $1/2$ *e a soma dos limites das parcelas* 0.

1638 — Exprimir $\operatorname{sh} 2x$ em $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$.

R: $\operatorname{sh} 2x = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \dfrac{(e^x-e^x)\,(e^x+e^x)}{2} = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

1639 — Com alguma das combinações

$$\begin{cases} y = x \text{ arc sen } u \\ u = \dfrac{1}{\sec^2 \dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \text{arc sen } u \\ u = 2e^{x^2} \end{cases}$$

compor uma função de função e achar-se a derivada para $x=0$. R: *Na 2.ª,* $u \geq 2$ *e a função* $y(u)$ *não é definida no conjunto dos valores da função* $u(x)$. *Na 1.ª já o é. Aplicando o teorema da derivação duma função de função obtem-se ao cabo* $y'(0) = \text{arc sen} \cos^2 1$.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **1.º exame de freqüência, 1942-43.** — Ponto n.º 3.

I

1640 — Derivar
$$y = 1/x^2 - (\operatorname{sen} x^2+1)^{-3/2} + \text{arc sec} \log 3^{1+x^2}.$$

1641 — Primitivar
$$y = \frac{x}{x-\sqrt{1+x^2}} - \frac{x+4}{(x+1)^2+4} + \cos^4 x.$$

1642 — Calcular, com êrro inferior a $\dfrac{1}{10^3}$ a soma da série $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2^2+1} + \dfrac{\sqrt{3}}{3^2+1} + \cdots + \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} + \cdots$.

II

1643 — Quando o número positivo a não é cubo de algum número racional, que se entende por $\sqrt[3]{a}$?

1644 — Que são o limite superior L e o limite mínimo λ de um conjunto (x)?

1645 — Que valores têm l, L, λ e Λ no conjunto dos têrmos de uma sucessão crescente formada por números do intervalo $(0,1)$?

1646 — Que módulo e argumento principal têm o quadrado de $\dfrac{1}{(2-i)^3}$?

1647 — Se o segmento que une os afixos de z e z' é paralelo ao eixo dos yy, de que natureza é a diferença $z-z'$?

1648 — Pode uma série convergente conter uma infinidade de têrmos superiores aos têrmos correspondentes de uma série divergente de números positivos?

1649 — Se numa série de têrmos positivos S_{2n} tende para um limite, de que natureza é a série? Porquê?

1650 — Para que valores de x converge a soma das séries $\sum n^3 x^n$ e $\sum \dfrac{1}{n^3} x^n$?

1651 — Se $f(x)$ cresce com x no intervalo (a,b), que valores têm os limites l e L no conjunto dos valores de $f(x)$?

1652 — Que expressão tem a derivada de ordem n de um polinómio inteiro em x, de grau n.

III

1653 — Quando $u_n \to a$ e $\dfrac{u_n}{v_n} \to b$, que pode concluir-se da sucessão v_n?

1654 — Cinco pontos eqüidistantes sôbre a circunferência $|z|=3$ são sempre afixos das raízes quintas de um número? Porquê?

1655 — Averiguar se a série $1 + \alpha + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + \cdots$ é convergente. (α é real, não inteiro).

F. C. P. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de Freqüência — Fevereiro de 1943.**

1656 — Considere-se o plano π, determinado de modo a conter o ponto $(1,2,1)$ como pé da perpendicular baixada da origem sôbre êle. Determinar seguidamente a equação dum novo plano que contenha o ponto de cota 2 do eixo $0z$ e que intercepte π segundo uma recta paralela ao plano $x0z$, de modo que os pontos desta recta se encontrem à distância 1 do último plano. R: Equação do plano π: *Êste plano contém o ponto* $P(1,2,1)$ *e é perpendicular à recta* $x-1=(y-2)/2=z-1$ *definida pelos pontos* P *e* $0(0,0,0)$. *A sua equação é, portanto,* $x+2y+z=6$. Equação do plano α: *Seja* $Ax+By+Cz=1$ *a equação do plano* α *(segundo plano do enunciado). Como contém o ponto* $A(0,0,2)$, *tem-se* $2C=1$, *ou* $C=1/2$. *A sua intersecção com o plano* π *é a recta* r) $\begin{cases} x+2y+z=6 \\ Ax+By+Cz=1 \end{cases}$ *ou seja* $(x-a)/p=(y-b)/q=z/1$ *com*

$$a=(2-6B)/(2A-B)\,;\quad b=(6A-1)/(2A-B)$$
$$p=(B-2C)/(2A-B) \;\; e \;\; q=(C-A)/(2A-B).$$

Como a recta r *tem de ser paralela ao plano* $x0z$ $(y=0)$, *tem-se* $(C-A)/(2A-B)=0$ *ou* $A=C=1/2$. *Por outro lado, a recta* r *está à distância* 1 *do plano* $x0z$. *Portanto* $(6A-1)/(2A-B)=1$ *ou seja* $4A+B=1$ *e* $B=-1$. *A equação do plano é, pois,* $x-2y+z=2$.

1657 — Determinar as equações da circunferência definida como se segue: *a)* Passa pelo ponto $(2,3,1/2)$ da recta $x=t+2$, $y=2t+3$, $z=t+1/2$; *b)* encontra-se no plano definido por aquela e pela recta $1-x=\dfrac{2y+1}{2}=$

$= -\frac{z}{2}$; *c)* tem como centro a intersecção das duas rectas. R: *Determinemos, em primeiro lugar, as coordenadas do centro da circunferência. Como diz o enunciado, é o ponto de intersecção das rectas* r) $x-2=(y-3)/2=z-1/2$ *(visto que* $t=x-2$, $t=(y-3)/2$ *e* $t=z-1$ 2*)* *e* s) $(x-1)/-1=y+1$ $2=z/-2$. *Portanto, é o ponto comum aos três planos* $2x-y=1$; $2x-2z=3$ *e* $2x-z=2$. *Quere dizer* $C(1/2, 0, -1)$. *A circunferência dada será definida pela equação da esfera de centro no ponto* C *e que passa pelo ponto* $A(2, 3, 1/2)$ *e pela equação do plano das rectas* r *e* s. Raio da esfera $r^2=(2-1/2)^2+3^2+(1/2+1)^2=27/2$. Equação da esfera $(x-1/2)^2+y^2+(z+1)^2=27/2$. Equação do plano. *A equação dos planos que contêm a recta* r *é:* $2x-y-1+k(2x-2z-3)=0$, *ou seja* $(2k+2)x-y-2kz-(1+3k)=0$. *Para que êste plano seja paralelo à direcção definida pela recta* s *é preciso que:* $-(2k+2)-1+4k=0$, *donde* $k=3/2$. *A equação do plano é, portanto,* $10x-2y-6z=11$. *Finalmente, a circunferência fica definida pelo sistema:*

$$\begin{cases} (x-1/2)^2+y^2+(z+1)^2=27/2 \\ 10x-2y-6z=11. \end{cases}$$

1658 — Determinar (em geometria plana): *a)* a equação da parábola cujo vértice tem, em relação ao sistema de eixos fixado, as coordenadas $(2, 1)$, cuja directriz é paralela a Oy e cujo parâmetro p tem o valor 2. *b)* determinar as coordenadas do foco e a equação da directriz. R: *Como a directriz da parábola é paralela ao eixo* Oy, *o seu eixo é a recta* $y=1$. *Mudando a origem dos eixos para o ponto* $M(0, 1)$, *a equação da parábola é* $y'^2=4x'$ *visto que se tem* $p=2$). *No sistema de eixos dado será, portanto,* $y^2-2y=4x-1$.

1659 — Determinar a equação da superfície cónica que tem como directriz a elipse $\left|\begin{array}{l} \frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1 \\ z=0 \end{array}\right.$ e cujo vértice é o ponto que divide ao meio o segmento de comprimento 6, que une o ponto $(0, 4, 4)$ com um ponto da parte positiva do eixo $0x$. R: Determinação das coordenadas do vértice: *Seja* $P(m, 0, 0)$ *o ponto da parte positiva do eixo* 0x *a que refere o problema. Tem-se* $\sqrt{m^2+16+16}=36$ *e, portanto,* $m=2$. *O vértice é o ponto médio do segmento definido pelos pontos* $P(2,0,0)$ *e* $M(0,4,4)$. *Quere dizer* $V(1,2,2)$. Determinação da equação da superfície cónica: *A equação obtem-se eliminando o parâmetro* k *entre as equações*

$$(1+kx)^2/4+(2+ky)^2+(2+kz)^2/9=1 \quad e \quad 2+kz=0.$$

Portanto: $4x^2+16y^2+13z^2-4xz-16yz=0$.

1660 — Sendo dado o sistema linear $2x+y+z=0$, $x+ky+z=0$, $4x-y+3z=0$, fazer a sua discussão, supondo k arbitrário. Determinar k de modo que o sistema admita soluções diferentes da solução nula e escrever a expressão geral daquelas.

Soluções dos n.os 1656 a 1659 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira **— I.º exame de freqüência. 17 de Fevereiro de 1943.**

1661 — Estudar a igualdade

$$(i^2)^{1/n}=(i^{1/n})^2 \qquad (i^2=-1).$$

R: *É sabido que a igualdade* $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$ *só é válida sem restrições no campo complexo se* p *e* q *forem primos entre si. Logo, se* n *fôr impar, a igualdade dada é válida sem restrições, isto é, os dois radicais que nela figuram têm o mesmo número* n *de determinações que são respectivamente iguais. Se* n *fôr par* $n=2m$, *o radical que figura no primeiro membro tem* $n=2m$ *determinações de módulos iguais à unidade e de argumentos* $(\pi+2k\pi)/2m$ $(k=0, 1, 2, \cdots 2m-1)$ *entre as quais se encontram as* $n/2=m$ *determinações do radical do segundo membro. Com efeito, estas são também de módulo unitário e os seus argumentos são*

$$(\pi+4k'\pi)/2m \quad (k'=0, 1, 2 \cdots m-1).$$

1662 — Determinar um polinómio de grau não superior a 4 que tome os mesmos valores que a função $y(x)=\frac{x+1}{x-1}$ para $x=-4, -2, 0, 2, 4$.

1663 — Num círculo dado inscreve-se um hexágono, neste um círculo, neste um novo hexágono e assim sucessivamente até se construirem n hexágonos e n circulos. Sejam $A_1 A_2 \cdots A_n$, $A'_1 A'_2 \cdots A'_n$, respectivamente as áreas dos círculos e as dos hexágonos construídos. Calcular o cociente

$$\frac{A_1+A_2+\cdot\cdot+A_n}{A'_1+A'_2+\cdots+A'_n}. \quad R: \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Soluções dos n.os 1661 e 1663 de A. Sá da Costa.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira **— I.º exame de freqüência extraordinário, 25 de Fevereiro de 1943.**

1664 — Resolver a equação $(ax-b)^n=(a-bx)^n$. Considerar, em particular, o caso $n=4$.

1665 — Resolver o sistema $\left|\begin{array}{l} x+y+z-3t=0 \\ x-y+z-t-2u=0 \\ x-y-z+t-2u=0 \\ x+y-z-t=0 \end{array}\right.$ e determinar aquelas soluções em que duas e só duas incógnitas tomam o valor zero. ¿ Existe alguma solução própria em que mais de duas incógnitas tomem o valor zero?

1666 — São dadas duas circunferências de raios R e r com os centros à distância d. Determinar sôbre a linha dos centros um ponto P tal que os segmentos das tangentes tiradas dêle para cada uma das circunferências sejam iguais. Calcular, nessa hipótese, as áreas dos triângulos isósceles com vértice em P e circunscritos às duas circunferências.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **I.º ex. de freq. 1942-43.**

1667 — Prove que, sendo $w=\frac{2z-i}{iz+2}$, o afixo de $w=u+iv$ descreve a circunferência de raio 1, com centro na origem dos eixos $(u^2+v^2=1)$, quando o afixo de $z=x+iy$ descreve a mesma circunferência $(x^2+y^2=1)$. R: *Tem-se, como fàcilmente se vê:* $w=\frac{2x+(2y-1)i}{2-y+ix}$. *Há que mostrar que* $|w|=1$. *Atendendo às condições impostas no problema e a que o módulo dum quociente é o quociente dos módulos do dividendo e do divisor, virá:*

$$|w|=\frac{\sqrt{4x^2+(2y-1)^2}}{\sqrt{(2-y)^2+x^2}}=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2-2y+1}}{\sqrt{4-2y+y^2+x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{5-2y}}{\sqrt{5-2y}}=1, \qquad \text{c. q. p.}$$

1668 — Trace os eixos rectangulares $\overline{Ox}$ e $\overline{Oy}$. Desenhe os quadrados de vértices $P(a,0)$, $Q(0,a)$, $R(-a,0)$, $S(0,-a)$ e $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$, $D(1,-1)$. Suponha as figuras desenhadas em cartão e que se suprimem os triângulos $[APD]$, $[DSC]$, $[CRB]$, $[BQA]$. Levantando os triângulos $[APQ]$, $[BQR]$, $[CRS]$ e $[DSP]$ em tôrno respectivamente de $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SP}$, forma-se uma pirâmide. Calcular a de modo que o volume dessa pirâmide seja máximo $(a<1)$. R: *É fácil ver que* $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{SP}=a\sqrt{2}$ *e que a altura da pirâmide é um cateto dum triângulo rectângulo, por exemplo* [VOP], *em que* V *é o vértice da pirâmide,* $\overline{VP}$ *a hipotenusa* $(\overline{VP}=\overline{AP})$ *e* $\overline{OP}$ *o outro cateto, semi-diagonal do quadrado, base da pirâmide. Como é* $OP=a$ *e* $\overline{VP}=\sqrt{(1-a)^2+1}=\sqrt{a^2-2a+2}$, *virá:* $\overline{VO}=\sqrt{a^2-2a+2-a^2}=\sqrt{2(1-a)}$. *O volume da pirâmide* [VPQRS] *será pois* $f(a)=2/3\cdot a^2\sqrt{2(1-a)}$. *Há que determinar* a *de modo que esta função real, por ser* $a<1$ *(por hipótese), seja máxima, ou, o que é o mesmo, que o seja a função* $F(a)=a^4(1-a)$. *Tem-se:* $F'(a)=4a^3-5a^4=a^3(4-5a)\to F'(a)=0\to a=0$ *(solução sem interêsse) e* $a=4/5$. *É fácil ver que* $F''(4/5)<0$ *e que portanto* $a=4/5$ *é o valor de* a *para o qual o volume em questão é máximo.*

1669 — Mostre que, se é $y=\frac{1}{\sqrt{1-2ax+x^2}}$, será $(x-a)y+(1-2ax+x^2)y'=0$. *Derivando* y *obtém-se* $y'=-(x-a)(1-2ax+x^2)^{-3/2}$ *e fàcilmente se deduz a relação proposta.*

1670 — Calcular o verdadeiro valor de $\frac{2\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\theta}{\operatorname{tg}\theta-\theta}$ para $\theta=0$. R: *A função dada, para* $\theta=0$, *apresenta uma indeterminação da forma* 0/0. *Aplicando a Regra de l'Hospital, vem:*

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{2\cos\theta-\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta-1}{\sec^2\theta-1}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\cos\theta-\cos 2\theta-1}{\operatorname{tg}^2\theta}=$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}\theta+2\operatorname{sen}2\theta}{2\operatorname{tg}\theta\sec^2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\cos^3\theta(2\cos\theta-1)=1.$$

Soluções dos n.os 1667 a 1670 de O. Morbey Rodrigues.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — **I.º exame de freqüência. Fevereiro de 1943.**

1671 — *Geometria de Monge* — São dadas duas rectas enviesadas, uma de perfil e outra frontal. Conseguir, por uma mudança de planos de projecção, que as suas projecções horizontais fiquem paralelas. R: *Considere-se o plano que contém uma das rectas e é paralelo à outra. A mudança de planos de projecção que transforma aquêle plano num plano vertical resolve o problema.*

1672 — *Geometria de Monge* — Determine o ângulo do primeiro plano bissector com um plano paralelo à L. T., dado pelos traços. R: *Mudando de plano vertical (ou horizontal) de projecção para qualquer plano de perfil, transformam-se os planos dados em planos de tôpo (ou verticais): o seu ângulo é o dos seus traços.*

1673 — *Geometria cotada* — São dados: um ponto A de 4,3 m de cota e duas rectas de declives 1 e 1/2 que o não contêm mas pertencem a um plano projectante que passa por êle. Representar a recta que contém o ponto A e define com as rectas dadas um triângulo isósceles. Escala 1 : 100. R: *Rebate-se o plano dos dados sôbre o plano de comparação.*

Soluções dos n.os 1671 a 1673 de L. G. M. Albuquerque.

CÁLCULO INFINITESIMAL - ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **Exames finais — Novembro de 1943.**

1674 — Calcular a área limitada pela curva $y=x^2/2+2/\sqrt{x}$, os eixos coordenados e uma paralela ao eixo dos yy tirada pelo ponto de ordenada mínima. R: *Para abscissa do ponto de ordenada mínima, obtém-se* $x=1$. *A área pedida será:*

$$A=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{25}{6}.$$

1675 — Calcular o comprimento do arco da curva $y=2\cos\sqrt{x}$, $z=2\operatorname{sen}\sqrt{x}$ a partir do ponto correspondente a $x=0$. R: *Será* $s=\int_0^x\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx=$
$=\sqrt{x(1+x)}-\log\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right).$

1676 — Dada a equação $2x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=x$, fazer a mudança de variável $x=\varphi(t)$ e determinar φ de modo que a transformada não contenha y'. Integrar a equação. R: *Obtém-se* $2\varphi\varphi'y''+(\varphi'^2-2\varphi\varphi'')y'+\varphi'^3y=$ $=\varphi\varphi'^3$; *donde* $\varphi'^2-2\varphi\varphi''=0$. *Esta equação leva a* $\varphi=\frac{t^2}{4a}+\frac{b}{a}t+b^2$; *fazendo, por exemplo,* $a=1/4$, $b=0$, *e substitnido na equação transformada, vem* $y''+2y=$ $=2t^2$. *Integrando esta equação, tem-se,*
$y=C_1\cdot\cos\sqrt{2}t+C_2\cdot\operatorname{sen}\sqrt{2}t+t^2-1$, *ou, finalmente,* $y=C_1\cos\sqrt{2x}+C_2\operatorname{sen}\sqrt{2x}+x-1$.

Soluções dos n.os 1674 a 1676 de A. Pereira Gomes.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **Alguns pontos dos exames de freqüência e finais do ano de 1942-1943.**

1677 — Mostre que $\operatorname{sen}x\,(1+\cos x)$ é máximo quando $x=\pi/3$. R: $y'=2\cos^2x+\cos x+1$. *Como* $x=\pi/3$ *é uma das raizes de* $y'=0$ *e* $y''(\pi/3)<0$, *é de facto* $x=\pi/3$ *a abscissa de um dos pontos de máximo.*

1678 — É dado o rectângulo $[ABCD]$ e um ponto P em BC. Prolongue AP e DC e determine o ponto de encontro Q. Que posição deve ter a recta APQ para que a soma das áreas ABP e PCQ seja mínima? R: *Fazendo* $\overline{AB}=L$, $\overline{BC}=1$, $\overline{BP}=x$ *será* $S_1=$ $=L\cdot x/2$ *e* $S_2=\frac{1}{2}\frac{L(l-x)^2}{x}$. *Logo* $S=\frac{1}{2}L\cdot\frac{2x^2-2xl+l^2}{x}$ *e* $\frac{dS}{dx}=\frac{1}{2}L\cdot\frac{2x^2+l^2}{x^2}$. *Prosseguindo obtem-se* $x=l/\sqrt{2}$ *ou, chamando* α *ao ângulo* $\widehat{PAB}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{L\sqrt{2}}$.

1679 — Determine um ponto P numa linha recta dada tal que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos que não pertençam à recta seja mínima. Supõe-se que a recta e os pontos são complanares. R: *Sejam* P_1 *e* P_2 *os pontos fixos e* r *a recta dada. Tome-se a recta para eixo das abscissas e para eixo das ordenadas a ortogonal passando por* P_1; *sejam* $P_1(0,y_1)$ *e* $P_2(x_2,y_2)$. *Representemos por* d_1 *e* d_2 *as distâncias de* P_1 *e* P_2 *ao ponto* $P(x,0)$ *a determinar. Procura-se o mínimo de* $f(x)=d_1+d_2=\sqrt{x^2+y_1^2}+\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}$.
Derivando e igualando a zero, obtem-se: $\frac{x}{\sqrt{x^2+y_1^2}}=$ $=\frac{x_2-x}{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}$ *ou* $\cos\alpha=\cos\beta$ *(fazendo* $\alpha=P_1\widehat{P}O$ *e* $\beta=\pi-P_2\widehat{P}O$), *e como* $f''(x)<0$ *trata-se, de facto, de um mínimo.*

1680 — A soma dos perímetros duma circunferência e dum quadrado é constante. Mostre que a soma das áreas das duas figuras é mínima quando o diâmetro do círculo fôr igual ao lado do quadrado. R: *Será* $P=\pi d+4l=C$ *e* $S=(C-4l)^2/4\pi=l^2$. *Derivando, igualando a zero e atendendo à primeira igualdade vem* $l=d$ *e como* $S''>0$ *trata-se de facto dum mínimo.*

1681 — Calcule $I=\int x\operatorname{sen}2x\,dx$. R: *Fazendo* $u=x$ *e* $dv=\operatorname{sen}2x\,dx$ *vem* $I=\frac{\operatorname{sen}2x-2x\cos 2x}{4}+C$.

1682 — Calcule $\int\frac{x(3-x^2)\operatorname{arc\,tg}x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$. R: *Por partes fazendo* $u=\operatorname{arc\,tg}x$ *e* $dv=\frac{x(3-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$ *obtem-se*
$$\int\frac{x(3-x^2)\operatorname{arc\,tg}x}{(1-x^2)^{3/2}}dx=\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arc\,tg}x-\operatorname{arc\,sen}x+C.$$

1683 — Calcule $\int x\,dy-y\,dx$ ao longo da elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ percorrida no sentido directo.

1684 — Qual é o carácter da série de termo geral $u_n=3^{an^2+bn}$? Será $\sqrt[n]{u_n}=3^{an+b}$. Para $a>0$ divergente; $a<0$ convergente; $a=0$ o termo geral da série é uma progressão geométrica de razão 3^b convergente para $b<0$ é divergente para $b \geq 0$.

Soluções dos n.^{os} 1677 a 1684 de F. Carvalho Araújo.

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — I.º exame de freqüência, 17 de Fevereiro de 1943.

1685 — Mostrar que, se a série dupla $S=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}$ fôr absolutamente convergente, a série simples $\sum_{\alpha=1}^{\infty} u_\alpha$, cujo termo geral é $u_\alpha=a_{\alpha 1}+a_{\alpha-1 2}+a_{\alpha-2 3}+\cdots+a_{1\alpha}$ é uma série convergente e o seu valor é S. R: *Uma série dupla absolutamente convergente pode ser substituida pela série simples constituida pelos mesmos termos, logo,*

$$S=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}=a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{13}+a_{22}+a_{31}+\cdots.$$

A série simples é absolutamente convergente e, por conseqüência, podemos substituir um número finito pela sua soma efectuada

$$S=a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{13}+a_{22}+a_{31}+\cdots=a_{11}+(a_{12}+a_{21})+$$
$$+(a_{13}+a_{22}+a_{31})+\cdots=u_1+u_2+u_3+\cdots.$$

A série $\sum_{\alpha=1}^{\infty} u_\alpha$ *é, portanto, convergente e a sua soma é* S.

1686 — Estudar a convergência do integral impróprio $I=\int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{(1-u^2)}\,\mathrm{arc\,sen}\,u}$. R: *Façamos a substituição* $u=\mathrm{sen}\,x$, *vem* $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{sen}\,x\,dx}{\sqrt{x}}$ *que é, como* I, *um integral impróprio da 1.ª espécie convergente por ser* $\lim_{x\to 0} x^\alpha \frac{\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{x}}=0$ para $\alpha=1/2$.

1687 — Estudar a dependência linear do sistema $f_1(x)=x+3$, $f_2(x)=x^2+3x+1$, $f_3(x)=x^2-x$, $f_4(x)=4x^2+2x+7$, $f_5(x)=2x^2+7x+5$. R: 1.ª resolução: *O wronskiano do sistema é identicamente nulo, pois tem duas linhas de zeros. Pela mesma razão, são nulos os complementos algébricos dos elementos de qualquer linha. Consideremos o sistema funcional constituído, por exemplo, pelas primeiras quatro funções dadas. O wronskiano dêste sistema é nulo identicamente por possuir uma linha de zeros. Os complementos algébricos dos elementos da última linha são respectivamente* 44, 22, 66, -22. *Logo as quatro funções são linearmente dependentes e os parâmetros serão, por exemplo,* 4, 2, 3, -2. *Portanto as cinco funções dadas são linearmente dependentes sendo* 4, 2, 3, -2, 0, *por exemplo, um sistema de parâmetros.* 2.ª resolução: *Se as funções dadas forem linearmente dependentes será possível determinar um sistema de cinco números* a, b, c, d, e, *não simultâneamente nulos, tais que o polinómio* $\mathrm{a}f_1(x)+\mathrm{b}f_2(x)+\mathrm{c}f_3(x)+\mathrm{d}f_4(x)+\mathrm{e}f_5(x)$ *seja identicamente nulo. Esta condição leva ao sistema homogeneo*

$$\begin{cases} b+c+4d+2e=0 \\ a+3b-c+2d+7e=0 \\ 3a+b+7d+5e=0 \end{cases} \quad \textit{donde} \quad \begin{cases} a=-2d-e \\ b=-d-2e \\ c=-3d \end{cases}$$

que fornece para quaisquer valores não simultâneamente nulos atribuídos a d *e a* e *um sistema de parâmetros da combinação linear homogénea existente entre as funções dadas. Por exemplo, para* $e=0$ *e* $d=-2$ *encontra-se o sistema a que conduziu a 1.ª resolução.*

1688 — Determinar os máximos e mínimos da função

$$F(y)=\int_0^1 \frac{(xy)^2}{\sqrt{1+y}}\,dx.$$

R: *Note-se que*

$$F(y)=\frac{y^2}{\sqrt{1+y}}\int_0^1 x^2\,dx=\frac{y^2}{3\sqrt{1+y}}$$

donde $$F'(y)=\frac{4y+3y^2}{6\,(1+y)^{3/2}}.$$

A equação $F'(y)=0$ *admite as raizes* $y=0$, $y=-4/3$, *a segunda das quais não pertence ao domínio da função* $F(y)$ *que é definida no campo real para* $y>-1$. *A primeira raiz* $y=0$ *corresponde a um mínimo para* $F(y)$ *visto que é sempre* $F(y)\geq 0$.

Soluções dos n.^{os} 1685 a 1688 de A. Sá da Costa.

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — I.º Exame de freqüência (extraordinário). 24 de Fevereiro de 1943.

1689 — Estudar o integral $f_n(x)=\int_x^{+\infty}\frac{dy}{y^2(\log y)^n}$ n inteiro e ≥ 1 e $x>1$. Relacionar $f_n(x)$ com $f_{n+1}(x)$, utilizando uma integração por partes.

1690 — Calcular o integral

$$\int_0^1 \frac{1+kx}{1-kx}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \qquad |k|<1.$$

1691 — Verificar que as equações paramétricas

$$\begin{cases} x=\log\mathrm{tg}\,\theta/2+2\cos\theta \\ y=2\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad 0<\theta<\pi/2$$

e

$$\begin{cases} x=t-2\,\mathrm{tgh}\,t \\ y=2/\cosh t \end{cases}$$

representam a mesma curva. Calcular a área limitada pela curva, pelo eixo dos xx e por duas ordenadas.

1692 — Mostrar que $f(x)=x^3 \cdot \sqrt[3]{x-1}$ e $f_1(x)=x^3 \cdot \sqrt[3]{x}$ são infinitamente grandes equivalentes quando x é infinitamente grande. Achar a parte principal da sua diferença $f(x)-f_1(x)$.

I. S. T. — Cálculo — **1.º exame de freqüência, 1942-43.**

1693 — Mostrar que as derivadas segundas $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ das funções implícitas z e u de x e de y, definidas pelo sistema $\begin{cases} x+y+z+u=0 \\ \log x+\log y+\log z+\log u=2 \end{cases}$ se tornam infinitas em qualquer ponto (x,y,z,u) no qual as duas variáveis z e u são iguais.

1694 — Sendo $\varphi_n(x)=\dfrac{\frac{d}{dx}\log(1+n^2x^2)}{\log(n+1)}$ e $f_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x)$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ será integrável termo a termo no intervalo $(0,x)$?

1695 — A que condição deve satisfazer a função $f(x)$ para que o integral $\int_x^{x+1} \log f(x)\,dx$ seja uma primitiva de $\log x$? Se fôr $f(1)=1$, qual é a expressão de $f(x)$ quando x é inteiro e positivo?

1696 — Estudar a convergência do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{sen} t)^{a-1}\cdot\cos t}{1-2\operatorname{sen} t}\,dt$.

I. S. T. — Cálculo — **1.º exame de freqüência. 1942-43.**

1697 — Mostrar que as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ da função implícita z de x e y, definida pela equação $z^3+z(mx^2+ny^2)=(m-n)^3$ são independentes de m e n no ponto $(0,0,m-n)$. Calcular, no mesmo ponto, a derivada $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1698 — Estudar a convergência do integral impróprio: $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\infty} (u+\alpha)^{-1} \operatorname{sen}[u(u+\alpha)^2]\,du$.

1699 — Estudar a dependência do sistema de funções:
$$\begin{cases} f_1(x)=4x^3-3x^2+1 \\ f_2(x)=2x^2+4 \\ f_3(x)=2x^4-7x^3-x^2+x-1 \\ f_4(x)=2x^4-5x^3-x^2+5x-1. \end{cases}$$

1700 — Estudar a convergência do produto infinito $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ sendo $u_0=u_1=u_2=0$, e, para $n>1$,
$$u_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n}};\quad u_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

F. C. P. — Análise Superior — **2.º exercicio de revisão. 1942-43.**

1701 — Integrar a equação
$$(1+x^2)\,r+4y^2\,t-4\,(1+x)\,ys+6yq=0.$$

a) Temos o sistema
$$\begin{cases} (1+x)^2\,dy+2\,(1+x)\,y\,dx=0 \\ (1+x)^2\,dp-2\,(1+x)\,y\,dq+6yq\,dx=0. \end{cases}$$
A 1.ª equação dá $y(1+x)^2=C$ e, substituindo na 2.ª, vem $dp=\frac{2C}{(1+x)^3}\,dq-\frac{6Cq}{(1+x)^4}\,dx$. Integrando: $p=\frac{2y}{1+x}q+C_1$. Portanto $p-\frac{2y}{1+x}q=f\{y(1+x)^2\}$. Integrando, temos $z=xf\{y(1+x)^2\}+\psi\{y(1+x)^2\}$.
b) Fazendo $z=(1+x)^\alpha y^\beta$ e substituindo, temos:
$$(\alpha-2\beta)(\alpha-2\beta-1)=0,\quad \alpha=2\beta,\quad \alpha=2\beta-1$$
$$z=\{(1+x)^2y\}^\beta;\quad z=\{(1+x)^2y\}^\beta(1+x).$$
A solução é: $z=xf\{y(1+x)^2\}+\psi\{y(1+x)^2\}$.

1702 — É dada a linha $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$. *a)* Por um ponto A desta linha tirar uma recta a paralela ao plano xOy que encontre o eixo dos zz. *b)* Mostrar que a recta a existe no plano osculador à linha no ponto A. *c)* Determinar as linhas assintóticas que passam pelo ponto $(2,2,1)$ da superfície lugar das rectas a. R: *a)* $z=t^3$, $y=tx$. *b) Plano osculador:* $3t^2X-3tY+Z=t^3$. *c)* $\begin{cases} 2y=x^2 \\ zx^3=y^3 \end{cases}$ *e* $\begin{cases} y=x \\ z=1. \end{cases}$

1703 — Determinar a relação que deve existir entre u e v para se obterem linhas de curvatura da superfície $x=u+v$, $y=v-u$, $z=uv$. R: *Temos:* $d\overline{M}\,|\,\overline{N}\wedge d\overline{N}=0$ *ou* $(u^2+2)^{1/2}\,dv=(v^2+2)^{1/2}\,du$. *Integrando, temos* $\sqrt{u^2+2}-u=C\{\sqrt{v^2+2}-v\}$.

Soluções dos n.os 1701 a 1703 de J. Rios de Sousa.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1704 — Num círculo de centro O, marque-se sôbre o raio $\overline{OA}$, um ponto C; encontrar sôbre a circunferência um ponto P tal que o ângulo $\widehat{OPC}$ seja máximo.

(Bach. Letras e Matemática — Poitier — Nov. 1888).

1705 — Demonstrar que se num triângulo, os três ângulos A, B, C, são respectivamente proporcionais aos números $2,3,4$, tem-se: $\cos A/2=(a+c)/2b$.

1706 — Sabendo-se que o número $13xy45z$ é divisível por 792, achar os três algarismos x, y, z.

1707 — Três operários executam em certo praso uma obra que, dividida igualmente pelos três, tomaria o mesmo tempo a um dêles, menos dois dias a outro e mais três ao terceiro. De quantos dias é o praso?

Problemas 1704 a 1707 propostos por J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1440 — Calcular o limite da soma de uma sucessão de fracções, cujos numeradores estão em progressão aritmética e os denominadores em progressão geométrica. Condição de convergência. (Aplicação numérica: $1/2+2/4+3/8+4/16+\cdots$). R: *O limite pedido é a soma* S *da série de termo geral* $u_n=\dfrac{a+r\,(n-1)}{bq^{n-1}}$ $(b\neq 0)$. *Tal série é absolutamente convergente para* $|q|>1$, *como se pode verificar pelo critério de D'Alembert. Com efeito,* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{q}$. *Para* $|q|=1$ *é visivelmente divergente. Escrevendo* $u_n=\dfrac{r}{b}\cdot\dfrac{n}{q^{n-1}}+\dfrac{a-r}{bq^{n-1}}$ *vê-se que a série pode ser considerada como a soma das duas séries de termos gerais* $\dfrac{r}{b}\cdot\dfrac{n}{q^{n-1}}$ *e* $\dfrac{a-r}{bq^{n-1}}$, *convergentes absolutamente para* $|q|>1$. *Ora, estas séries têm por valores: a segunda, soma dos termos duma* p. g. *decrescente* $S_2=\dfrac{a-r}{b\,(1-1/q)}$ *e a primeira, produto do factor finito* r/b *pelo valor da série de termo geral* $\dfrac{n}{q^{n-1}}$ $S_1=\dfrac{r}{b}\cdot\dfrac{1}{(1-1/q)^2}$. *Com efeito, para* $|x|<1$ $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$, *donde, por derivação, se obtém a série de termo geral* nx^{n-1} *cujo valor é, por conseqüência,* $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ *ou* $\dfrac{1}{(1-1/q)^2}$, *para* $|x|=\dfrac{1}{|q|}<1$. *É, pois,* $S=S_1+S_2=\dfrac{q\,[a\,(q-1)+r]}{b\,(q-1)^2}$

Aplicação numérica: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots$ *Fazendo na fórmula precedente* $a=0$ $b=1$ $r=1$ $q=2$, *acha-se* $S=2$.

Solução de Alberto Pais (de Lisboa).

1507 — Resolver o sistema de equações: $x^2+y^2-(x+y)=48$, $x+y+xy=31$. R: *Pondo* $x+y=u$ $xy=v$, *será* $x^2+y^2=u^2-2v$ *e o sistema proposto escreve-se:* $u^2-2v-u=48$ *e* $u+v=31$. *Eliminando* v, *resulta a equação* $u^2+u-110=0$, *donde* $u_1=10$ $u_2=-11$, *valores a que correspondem os de* v, $v_1=21$, $v_2=42$. *Tem-se, então, para determinar* x *e* y *os dois sistemas* $x+y=10$, $xy=21$ *e* $x+y=-11$, $xy=42$, *de que são* *resolventes as equações* $t^2-10t+21=0$ *e* t^2+11t+ $+42=0$, *respectivamente. Acha-se* $x_1=7$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=7$ *e* $x_3=-11/2+\sqrt{47}i/2$, $y_3=-11/2-$ $\sqrt{47}i/2$, $x_4=-11/2\sqrt{47}i/2$, $y_4=-11/2+\sqrt{47}i/2$.

Solução de Alberto Pais (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Angel Chain (de Gijon-Espanha), Carlos A. Gonçalves Gomes (do Pôrto), Paul Richard (de Portalegre) e T. Ferreira Rato (S. Tiago--Cabo Verde).

1508 — Sôbre as três arestas de um triedro tri-rectângulo marquem-se três comprimentos $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$ e trace-se o triângulo $[ABC]$. Determinar: 1.º — a expressão da área dêste triângulo; 2.º — a distância $\overline{OD}=d$ do ponto O ao plano ABC; 3.º — o que devem ser b e c, quando sendo dados a e d, para que o triângulo ABC tenha uma superfície dada. R: *1.º — Seja* $\overline{BC}=\alpha$, $\overline{AB}=\gamma$, $\overline{CA}=\beta$ *e* $p=(\alpha+\beta+\gamma)/2$. *Será* $\alpha=\sqrt{b^2+c^2}$, $\beta=\sqrt{a^2+c^2}$, $\gamma=\sqrt{a^2+b^2}$. *Ora, a área* S *do triângulo é dada pela expressão conhecida da Geometria elementar com o nome de fórmula de Herão:* $S=\sqrt{p(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)}$ *donde, substituindo* p, α, β *e* γ *pelos valores atraz achados e efectuando as operações e necessárias simplificações, se tira* $S=\sqrt{a^2 b^2+a^2 c^2+b^2 c^2}/2$. *2.º — O volume do tetraedro* [COAB] *é dado pela expressão*

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}ab\right)c=\frac{1}{6}abc.$$

A distância d *é a altura do tetraedro referida ao vértice* O. *Portanto* $V=Sd/3=$ $=abc/6$. *Logo* $d=\dfrac{abc}{2S}=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2 b^2+a^2 c^2+b^2 c^2}}$.

3.º — De $d=\dfrac{abc}{2S}$ *conclui-se que* $bc=2Sd/a$, *isto é,* b *e* c *são inversamente proporcionais.*

Solução resumida baseada na solução de Paul Richard (de Portalegre).

1509 — Mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+p)=\frac{n(n+1)\cdots(n+p+1)}{p+2}.$$

R: *Da identidade* $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+p+1)-$ $-\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)\cdots(i+p+1)=n(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)$ *deduz-se*

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)\cdots(i+p+1)=\sum_{i=1}^{i=n}(i-1)\,i\,(i+1)\cdots(i+p).$$

Substituindo na 1.ª identidade $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)\cdots(i+p+1)$ *por* $\sum_{i=1}^{i=n}(i-1)\,i\cdots(i+p)$ *vem* $\sum_{1}^{n} i(i+1)\cdots$ $\cdots(i+p)\,[i+p+1-(i-1)]=n(n+1)\cdots(n+p+1)$ *ou* $(p+2)\sum_{1}^{n} i(i+1)\cdots(i+p)=n(n+1)\cdots(n+p+1)$. *Dividindo por* $(p+2)$ *ambos os membros da última identidade:*

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+p)=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)}{p+2}.$$

q. e. d.

Solução de Paul Richard (de Portalegre).

Enviou também solução correcta J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

1510 — Pelo ponto médio do lado AB dum triângulo $[ABC]$ traça-se uma recta arbitrária; designando por N e P os pontos de encontro dessa recta com BC e AC respectivamente, mostrar que têm lugar as relações: $\dfrac{\overline{BN}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{NC}}{\overline{CP}}$ e $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\overline{PN}}{\overline{PC}}$.

R: *Pelos vértices do triângulo dado abaixem-se perpendiculares* ($\overline{AQ}$, $\overline{BR}$, $\overline{CS}$,) *sôbre a recta arbitária e do vértice* A, *trace-se* $\overline{AT}$ *paralela ao lado oposto* $\overline{BC}=a$; *resulta:* $[AMT]=[BMN]$ $\therefore$ $\overline{AT}=\overline{NB}$, $\overline{MT}=$ $=\overline{MN}$, $\overline{BR}=\overline{AQ}$ *donde* $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{CS}}$; $\dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}=\dfrac{\overline{CS}}{\overline{BR}}$; *multiplicando membro a membro, vem* $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{CP}}\times\dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}=1$ *donde*

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{AP}} \text{ e } \frac{\overline{PN}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{TN}}{\overline{AC}}=\frac{2\overline{MN}}{\overline{AC}} \therefore \frac{\overline{MN}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{PN}}{\overline{PC}}.$$

Solução de J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

Enviaram também soluções correctas: Alberto Pais (de Lisboa) e Paul Richard (de Portalegre).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

29 — ILIOVICI, G. ET ROBERT, P. — **Géométrie** — Librairie de L'enseignement Technique — Léon Eyrolles, Editeur — Paris, 1937. VII + 380 págs.

Esta obra que faz parte da colecção «Les mathématiques pour l'Enseignement Secondaire» destina-se aos alunos da classe de matemáticas, aos candidatos às grandes Escolas (Saint-Cyr, Institut Agronomique, etc.) e aos alunos das Escolas Normais superiores e de ensino primário.

Em França, como em Portugal, onde os programas têm sido como que um reflexo dos programas franceses, a geometria é a parte das matemáticas que no ensino secundário tem um tratamento quási definitivo. Mas ao passo que em França na classe das matemáticas são ministradas noções complementares de geometria, em Portugal, pode dizer-se, que o seu estudo termina no 2.º ciclo. O programa de métodos de geometria, que constitui a matéria do 7.º ano de ciências não é mais do que um capítulo de introdução que se encontra em qualquer F. G. M. Porque se é certo que a matéria comporta grande desenvolvimento, não é menos certo que a formação do aluno do 7.º ano o não permite, e teremos de ficar no seu ensino pelas noções gerais, pelas «receitas» que permitam ao aluno responder mais ou menos bem às *preguntinhas* das provas escritas.

Os autores da obra, reconhecendo que a geometria é a parte das matemáticas que mais contribui para a formação do raciocínio, além de que é um exemplo frisante do modo como a ciência se constitui, a partir do concreto, do qual ela guarda os vestígios na forma das proposições que permite enunciar, saindo um pouco fora do programa, dão, além dos conhecimentos suficientes para a preparação para os exames, uma idéia dos métodos cujo emprêgo se encontra em tôdas as questões de matemática. Sob êste aspecto o livro é útil especialmente aos professores do nosso ensino secundário. Além disso termina o livro por cêrca de 400 exercícios e problemas que vão da simples aplicação do curso a questões que exigem uma investigação cuidada, indicando-se, além disso, a ordem de dificuldade dos problemas. Um resumo do índice dará idéia dos assuntos tratados:

Livro I — *Transformações* — Noções preliminares; deslocamentos e simetrias; teoria dos vectores livres; homotetia e semelhança; perspectiva; potência; eixos radicais; polos e polares; inversão.

Livro II — *Cónicas* — Propriedades elementares e pontuais das cónicas; Intersecção duma cónica com uma recta; tangentes, propriedades tangenciais e focais das cónicas; elipse, hiperbole e parábola; secções planas de cones de revolução; generalidades sôbre as operações circulares do plano.

J. da Silva Paulo

30 — OTERO, E. y MATA, R. — **Problemas de Tecnica-Fisica** — Colección Científica «Koel», Madrid, 20 pesetas.

É um pequeno manual de problemas de Física e de Química-Física de nível correspondente ao dos exames de aptidão às escolas superiores e mesmo dos primeiros anos destas escolas.

Alguns problemas reduzem-se à simples aplicação de fórmulas e apresentam, por isso, um carácter pouco formativo; noutros problemas as unidades em que deveriam estar expressos os dados ou os resultados, não são indicadas ou são-no de maneira insuficiente.

Afora êstes defeitos, julgamos que será útil aos estudantes a sua consulta.

A. M. da Silva

31 — CAMPO, José Luiz F. del — **Prontuario Matemático** — Colección Científica «KOEL» — Madrid — 1.ª edição. 1941. Preço 6 Pts.

O Prontuário Matemático, com o sub-título de conjunto de tábuas muito prático, é um livrinho de formato reduzido, que cabe na algibeira do colete o que o torna bastante prático. Com 136 páginas contém tabelas de diversa naturesa como logaritmos decimais e naturais, funções trigonométricas, potências, números primos, etc. Tais tabelas são sempre úteis, em especial aos estudantes, pelo seu baixo prêço, se bem que sejam substituídas com vantagem pela máquina de calcular ou até mesmo pela régua de cálculo. Merece-nos, no entanto, alguns reparos o Prontuario. O primeiro diz respeito à duplicação desnecessária de tabelas de logaritmos das págs. 63 e 98 e das págs. 129 e 132. Esta última duplicação provém do facto de se julgarem diferentes os logaritmos naturais dos hiperbólicos. Acresce ainda usar-se a designação de logaritmos naturais para os décimais. Mais graves são os êrros que se notam na tabela da pág. 31, intervalos de tempo, que está na sua quási totalidade errada; assim, na 3.ª linha aparece 8.766 por 8.764 e 3.156 por 3.160; na 4.ª linha 169 por 168, 1.068 por 1.008 e 8.848 por 6.048; na 5.ª linha 10^{3} por 10^{4}; na 7.ª linha $4{,}167\times10^{2}$ por $4{,}166\times10^{-2}$; na 8.ª linha 10^{2} por 10^{-2}; e na 9.ª linha 15^{3} por 10^{-4} e 10^{2} por 10^{-2}. Ainda nesta tabela se emprega indistintamente o . para separar as casas decimais ou as dos milhares, o que se presta a confusões.

A reprodução por fotogravura de tabelas de confiança, como se faz nas páginas 63, 85 e 98 é de aconselhar para evitar êrros da espécie dos apontados.

J. da Silva Paulo

PUBLICAÇÕES MATEMÁTICAS RECEBIDAS POR PERMUTA

NACIONAIS:

Portugaliae Mathematica — Vol. 4 (1943), Fascículos 1 e 2 — Gaetano Fichera. *Intorno al passaggio al limite sotto il segno d'integrale* — Hugo Ribeiro· *Sur les espaces à métrique faible* — A. de Mira Fernandes. *Pseudo-extensori* — J. Vicente Gonçalves. *Sur la formule de Rodrigues* — Hugo Ribeiro. *Corrections à la note «Sur les espaces à métrique faible»* — A. de Mira Fernandes. *Funzioni continue sopra una superficie sferica* — Henry Schärf. *Ueber links-und rechtsseitige Stieltjesintegrale und deren Anwendungen.*

Publicações da Junta de Investigação Matemática — Cadernos de Análise Geral:

Caderno n.º 1 — *Topologia Geral — Espaços de Sierpinski* — por António Aniceto Monteiro.

Caderno n.º 2 — *Teoria Geral da Medida — Introdução* — por Laureano Barros.

ESTRANGEIRAS:

Argentina

Boletín Matemático — (Buenos Aires) — Revista argentina de Matemática — Ano XVI, n.os 3 a 11.

Cuba

Revista de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas — Universidad de La Habana — Vol. I, n.º 3, 1943.

Espanha

Euclides — (Madrid) — Revista mensal de Ciências Exactas, Físicas, Químicas y Naturales — Tomo III, n.os 32, 33 e 34.

Matemática Elemental — (Madrid) — Revista publicada por el Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española — 4.ª série, tomo III, n.º 47, 1943.

OUTRAS PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Agros — Boletim dos Estudantes de Agronomia — Ano XXVI, n.º 3, Maio-Junho de 1943.

Revista Polytechnica — (São Paulo) — Ano XXXIX, n.º 142.

Técnica — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.os 141 e 142.

Jean Perrin — *A comemoração em Lisboa do primeiro aniversário da sua morte* — (conferências proferidas, no Instituto Francês em Portugal, pelos Profs. Manuel Valadares e A. Celestino da Costa) — Livraria Francesa — Lisboa, 1943.

Seguros — Ano V, n.º 29.

Prontuario Matemático — Colección Científica «Koel» — Madrid, 6 ptas.

Problemas de Técnica-Física — por E. Otero y R. Mata — Coleccion Científica «Koel» — Madrid, 20 ptas.

O Plano Beveridge Criticado — Por F. Ramos da Costa — Cadernos da «Seara Nova» — Lisboa, 1943.

Publicações da Embaixada Britânica em Lisboa.

Publicações da Legação dos Estados Unidos da América do Norte.

AOS «AMIGOS DA GAZETA»

As contas sistemàticamente publicadas durante dois anos não são, parece, suficientemente esclarecedoras da situação financeira da revista. Num dos próximos números, a Administração pensa poder apresentar aos nossos leitores e assinantes um quadro tão claro quanto possível desta situação, que, neste momento, não é, infelizmente, o que seria para desejar. O número dos assinantes não tem aumentado no rítmo que esperavamos e até no início dêste ano se deu uma redução sensível (mais de uma centena!) acusada na altura da renovação da assinatura, cuja causa não sabemos, completamente, explicar.

Há, evidentemente, erros e pontos fracos que procuraremos eliminar ou reduzir. Nem tôdas as dificuldades poderão ser vencidas — sabemo-lo antecipadamente — e algumas persistirão.

Tentar-se-á uma maior propaganda da revista e, para isso, contamos, como sempre com os nossos leitores esperando estes contribuam largamente para a tornar mais conhecida.

Há, porém, também algo de agradável a assinalar. Assim, notaremos o aumento de colaboradores e a expansão crescente da revista, fora da metrópole. A «Gazeta de Matemàtica» começa a ser lida em Espanha e esperamos o seja em breve, nas repúblicas Ibero-Americanas! Até de Angola nos chega por mãos amigas o pedido de uma dezena de assinaturas!

Não queremos também, para terminar, deixar de assinalar um facto que sensibiliza bastante. O de um certo número de Amigos da Gazeta, conhecedores da crise financeira que esta atravessa, terem espontaneamente enviado o montante das assinaturas para 1944! Trata-se de alguns dos nossos colaboradores que desde o início recebiam gratuitamente os números saídos e até de alguns componentes da Redacção.

M. Z.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número extraordinário a publicar em Março dedicado às MATEMÁTICAS ELEMENTARES e EXAMES DE APTIDÃO

Conterá:

Artigos sôbre assuntos que interessam especialmente os candidatos às Escolas Superiores, pedagogia das matemáticas elementares, bibliografia, problemas com resolução completa ou com as principais fases da resolução e numerosos pontos dos exames de aptidão às Faculdades de Ciências, Letras, Institutos da Universidade Técnica e Escola Superior Colonial, acompanhados das respectivas soluções.

Êste número será enviado à cobrança a todos os nossos assinantes (6$50).

Pede-se a todos aquêles a quem não interesse êste número o favor de prevenirem a Redacção até 1 de Março, para evitar despesas e trabalho com a expedição que viriam agravar a situação financeira da revista.

AOS ASSINANTES

CONDIÇÕES DE ASSINATURA E DE AQUISIÇÃO DE NÚMEROS AVULSO

Preço de capa por cada número	6$50
Preço de assinatura anual de quatro números a publicar em Janeiro, Abril, Julho e Outubro	20$00
Preço de capa do número extraordinário a publicar em 1944	10$00
A aquisição dêste número pelos assinantes far-se-á a Esc.	6$50

NÚMEROS ATRAZADOS

O pequeno número de colecções completas, ainda existente, destina-se exclusivamente às Bibliotecas de Escolas e dalguns Estabelecimentos Oficiais sendo a sua aquisição feita ao preço de Esc. 120$00 (colecção dos 17 primeiros números). Ao público serão vendidos avulso os números ainda não esgotados (3, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17) ao preço de Esc. 6$50 cada.

A Lógica Matemática e o Ensino Médio com aplicação aos métodos da matemática
por José Sebastião e Silva — Separata dos n.os 5, 6 e 7, Esc. 5$00.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial