N.0182

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXVIII | Jul. 2017 | 4,20€

Os Que Ficaram na História e os Que Raramente São Lembrados

CELESTE GOUVEIA E NATÁLIA BEBIANO

Lembranças de Luís de Albuquerque: conversa com Onésimo Teotónio de Almeida

NATÁLIA BEBIANO

CONVERSA COM António Mega Ferreira e Francisco Domingues

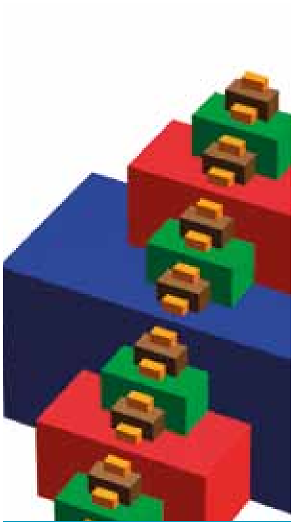
GONÇALO MORAIS

7.ª OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA CPLP

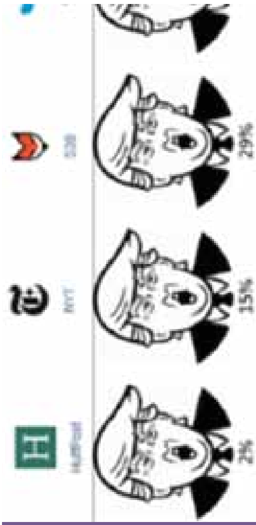
www.fc.up.pt/olimpcplp2017/

Portugal - PORTO
23 a 30 julho 2017
Universidade do Porto

ÍNDICE

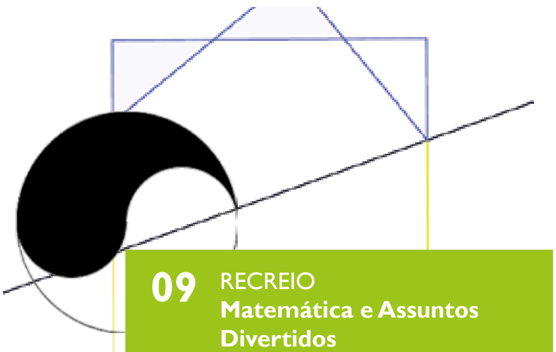


03 ATRACTOR
O Triângulo de Sierpinski e as Torres de Hanói

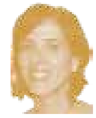


35 PT-MATHS-IN
O Admirável Mundo Novo do Big Data

40 CONVERSA COM...
António Mega Ferreira e Francisco Domingues



09 RECREIO
Matemática e Assuntos Divertidos



SÍLVIA BARBEIRO
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

UM VERDADEIRO ESPÍRITO CIENTÍFICO

Neste número da *Gazeta de Matemática* lembramos Luís de Albuquerque no centenário do seu nascimento.

Homem de Ciências e Letras, o Professor Luís de Albuquerque é talvez mais conhecido como historiador do que como matemático. Em paralelo com o ensino e a investigação em matemática, dedicou-se à História dos Descobrimentos sobre a qual possui uma vastíssima obra com grande reconhecimento nacional e internacional.

O reconhecimento do seu alto espírito científico é bem evidente e não são poucos os que elogiam a sua personalidade excecional. Ao longo dos anos, colegas, discípulos e amigos têm vindo a dedicar-lhe textos de homenagem. São exemplo disso a coletânea em dois volumes *A Abertura do Mundo: estudos de história dos descobrimentos europeus em homenagem a Luís de Albuquerque*, editada em 1986 e 1987, pela Editorial Presença; o volume *Estudos de Matemática, Homenagem ao Professor Doutor Luís de Albuquerque*, publicado pelo Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, em 1994; e o livro *Luís de Albuquerque Historiador e Matemático, Homenagem de Amizade a um Homem de Ciência*, Edições Chaves Ferreira, editado em 1998. Neste número da *Gazeta* ele é a figura central de três artigos nos quais se desvendam, mais do que obras, traços da sua personalidade e do seu carisma. Quem era esse *homem seríssimo que não se levava demasiado a sério*?

Luís de Albuquerque colaborou ativamente na *Gazeta de Matemática* como redator e como co- diretor da secção de matemáticas superiores. Deixo aqui a lembrança dos textos que este homem notável publicou na nossa revista: *Conceito de potência de conjuntos*, n.º 15, maio de 1943, *O ensino da Matemática na Reforma Pombalina*, n.º 34, novembro de 1947, *O método da introdução de um plano vertical em perspectiva*, n.º 34, novembro de 1947, *Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional*, n.os 66-67, março-junho de 1957 e n.os 68-69, setembro-dezembro de 1957, *Notas sobre os fundamentos do Cálculo das Probabilidades*, n.os 74-75, março-junho de 1959.

Termino com um apelo à leitura. A presente edição da *Gazeta de Matemática* não se esgota na homenagem à memória de Luís de Albuquerque. Além dos colaboradores habituais, contamos com o contributo generoso de muitos outros colegas. Podemos afirmar, com orgulho, que a nossa revista continua a despertar a curiosidade e a promover o verdadeiro espírito científico.

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E AS TORRES DE HANÓI

Vamos descrever alguns modelos do jogo das Torres de Hanói que permitem uma visão geométrica da solução ótima do jogo e da forma como essa solução se relaciona com o conjunto de todas as posições possíveis dos discos e o de todos os movimentos permitidos pelas regras do jogo.

Comecemos por recordar que neste jogo há um tabuleiro com três hastes e discos empilhados numa delas, nunca devendo estar um disco sobre outro mais pequeno. Em cada jogada, move-se um disco de cima de uma haste para outra. O objetivo é o de mudar todos os discos para uma dada haste no mínimo de jogadas. A propósito, veja-se [1] e [2].

Uma ideia muito simples que ocorre, ao querermos associar a uma distribuição dos três discos pelas hastes um ponto que a caracterize, é a seguinte: escolher no triângulo da base do jogo com vértices nos centros dessas hastes, a projeção, no tabuleiro, do baricentro das massas (dessa distribuição). Claro que os pontos concretos assim obtidos vão depender em geral das razões entre as massas dos diferentes discos, exceto quando todos os discos estão numa mesma haste, caso em que o baricentro será sempre o ponto do tabuleiro no centro dessa haste. E estes casos extremos, em que todos os discos estão empilhados numa haste, são interessantes, pois tanto a posição inicial como a final do jogo estão nessas condições.

A figura 1 representa uma fase do jogo no qual se pretende levar quatro discos inicialmente na haste de baixo para a haste da direita. Quanto à figura 2, mostra os baricentros dos discos, correspondentes às diferentes fases desse jogo completo. A curva poligonal, começando no vértice inferior do triângulo, que é o baricentro da torre inicial de discos, e terminando no vértice da direita, baricentro da torre de chegada, foi desenhada unindo por

Figura 1.

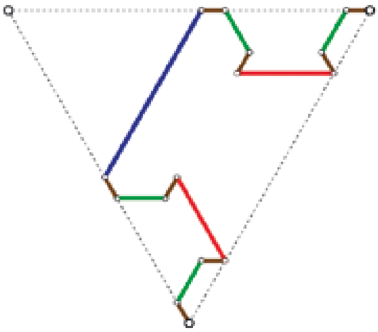


Figura 2.

segmentos de reta os baricentros obtidos após cada jogada, cada um com a cor do disco que foi movido nessa jogada. Não espanta que o segmento maior seja o azul, dado que o disco azul é o de maior massa e, portanto, aquele que, quando é movido, provoca uma maior alteração do centro de massa (baricentro). Um aspeto interessante da figura 2 é os 15 segmentos da figura só representarem três direções diferentes. Isto resulta de que: i) num sistema (finito) de massas, quando uma delas se desloca numa dada direção, o baricentro também se vai deslocar na mesma direção; ii) no caso presente, o movimento de um disco realiza-se sempre entre um par de hastes; iii) sendo três o número de hastes, também é três o número de pares de hastes. Como exercício, o leitor poderá querer descobrir qual o ponto na figura 2 que corresponde à posição dos discos representada na figura 1.

Feita esta apresentação do que se pretende, vamos agora ver alguns cuidados que é necessário ter para o modelo realmente funcionar como queremos. Será que o modelo é bom? Sem algumas cautelas na escolha das massas dos discos, a resposta é negativa e, ao contrário do que possa parecer, não se trata de uma apreciação subjetiva. Para que o modelo que foi sugerido funcione adequadamente, o mínimo que teremos de exigir é que, a partir do conhecimento do baricentro, possamos saber qual a distribuição dos discos pelas hastes, que ele representa. Por outras palavras: quando associamos a cada distribuição de massas pelas hastes o respetivo baricentro, queremos que a função assim definida seja injetiva. Vejamos um exemplo muito simples: suponhamos que temos apenas três discos, de massas, respetivamente, 1, 2 e 3[1]. Se o disco maior estiver na haste de baixo e os outros dois na da direita, como na figura 3, o baricentro será exatamente o ponto médio do lado correspondente do triângulo, porque as massas nos dois extremos são as mesmas (3 e $2+1$). Mas, então, se trocarmos a posição do disco maior com a posição dos outros dois, como na figura 4, o baricentro obtido será o mesmo. Logo, para aquelas escolhas de massas, o conhecimento do baricentro não permite saber sempre qual a distribuição real dos discos pelas hastes.

Como poderemos escolher as massas, de forma a estarmos certos de obter uma boa representação, no sentido de que duas distribuições diferentes dos discos pelas três hastes nunca levem ao mesmo baricentro no triângulo? No caso das massas que puseram problemas, bastaria ter escolhido a massa maior ligeiramente superior à soma

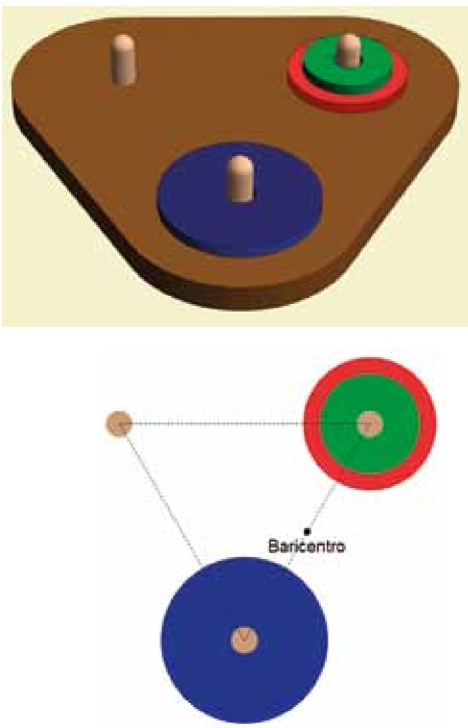


Figura 3.

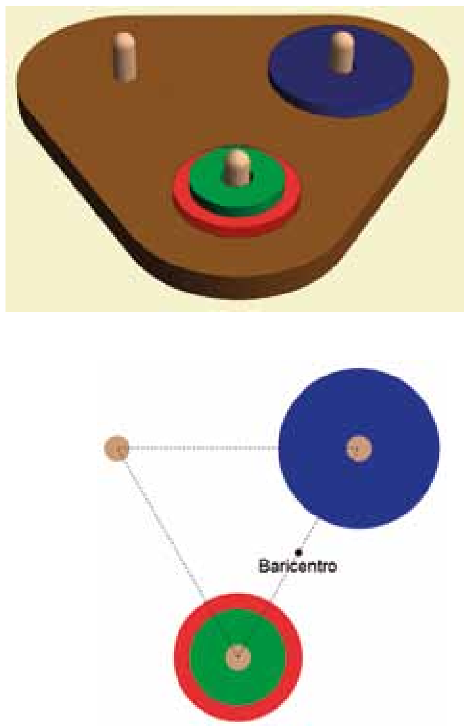


Figura 4.

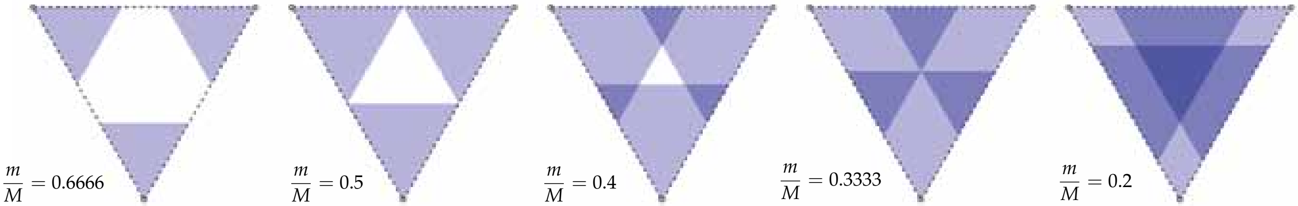


Figura 5.

das outras duas para o modelo passar a ser "bom" no sentido atrás referido. Mais geralmente, para uma distribuição de n discos com massa total M, se o maior, de massa m, estiver numa haste, podemos afirmar[2] que o baricentro estará no triângulo homotético, com centro de homotetia nessa haste e razão de homotetia $^{(M-m)}/_{M}$, do triângulo inicial de vértices nas três hastes (ver figura 5 para vários valores de $^{m}/_{M}$). Para estarmos certos de que a posição do baricentro das massas determina a haste em que está o maior disco, bastará[3] que os três triângulos homotéticos correspondentes às três hastes não se intersetem. Ora isto sucede se e só se $^{(M-m)}/_{M} < {}^{1}/_{2}$, o que equivale a $^{m}/_{M} > {}^{1}/_{2}$ ou $m > (M-m)$, por outras palavras, se e só se o disco maior tiver massa superior à soma das massas dos discos mais pequenos do que ele. Esta condição, satisfeita na figura 5 apenas para o primeiro caso, é suficiente para garantir que, dadas duas distribuições de massas pelas hastes, em que o disco maior não esteja na mesma haste, elas conduzam necessariamente a baricentros diferentes. Mas isto não exclui que os baricentros possam coincidir para duas distribuições que só difiram nas massas de discos mais pequenos. Uma extensão do raciocínio anterior permite, no entanto, garantir que, se a massa de cada disco for maior do que a soma das massas dos discos mais pequenos do que ele, então a representação por baricentros é boa no sentido acima descrito: uma tal representação por pontos no plano caracteriza completamente a distribuição dos discos pelas hastes (e até as razões entre as diferentes massas).

Vejamos então o que se passa num exemplo concreto satisfazendo esta condição: tomemos n discos com massas $m_i = {}^{1}/_{2^i}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. A soma das massas dos discos todos é $M_n = 1 - {}^{1}/_{2^n}$ e, para cada $i < n$, a soma das massas dos discos de índices maiores do que i, i.e., de massas menores do que a do de índice i, é $(1 - {}^{1}/_{2^n}) - (1 - {}^{1}/_{2^i}) = ({}^{1}/_{2^i}) \cdot (1 - {}^{1}/_{2^{(n-i)}}) < {}^{1}/_{2^i} = m_i$. Portanto, estas massas dão origem a um bom modelo de baricentros, uma vez que a massa de cada disco é maior do que a soma das massas dos discos mais pequenos. A figura 6 mostra três diagramas, obtidos para tabuleiros com três, quatro e cinco discos, respetivamente. Todas as posições possíveis dos discos estão representadas pelos baricentros (das massas nas três hastes) e todas as jogadas também, pelos segmentos correspondentes aos movimentos permitidos dos discos, segmentos esses com a cor do disco movido e unindo o baricentro antes do movimento, ao baricentro depois do movimento. Em cada diagrama, os segmentos mais grossos correspondem à solução ótima, aquela que envolve menor número de movimentos para levar todos os discos da haste inferior para a da direita. Essa linha grossa dá uma indicação clara sobre quais os discos a mover e em que direção; por exemplo, olhando para o diagrama da esquerda, correspondente a três discos, vê-se que há que começar por deslocar o disco verde da haste de baixo para a da direita, depois o vermelho da de baixo para a da esquerda, novamente o verde da da direita para a da esquerda, o azul da de baixo para

[1] Neste contexto as unidades não interessam, porque só são relevantes as razões entre as massas dos discos.

[2] Bastará observar que um tal baricentro tem como coordenada baricêntrica relativamente ao vértice da haste que contém o maior disco, precisamente o número $^{m}/_{M}$. O leitor não familiar com geometria afim poderá provar diretamente a afirmação em $\mathbb{R}^2$. Poderá começar por verificar que, se a, b, c são três números reais de soma 1 e A, B, C três pontos não colineares do plano, e se para um ponto O qualquer do plano, v_O designar a soma dos vetores $a \cdot (A - O)$, $b \cdot (B - O)$ e $c \cdot (C - O)$, o ponto G, definido por $G = O + v_O$ não depende da escolha de O. Os números a,b,c dizem-se as coordenadas baricêntricas de G relativas a A, B e C. Os pontos do triângulo A,B,C (incluindo o interior) são os que têm todas as coordenadas baricêntricas maiores ou iguais a zero. Um vértice do triângulo tem a respectiva coordenada baricêntrica 1 e as restantes nulas. E a coordenada a é nula se e só se o ponto G estiver no lado oposto a A. Para um valor de a tal que $0 < a < 1$, os pontos que o têm como primeira coordenada baricêntrica são precisamente os do segmento paralelo a BC de extremos em AB e AC e tal que a seja a razão das distâncias a BC desse segmento e do ponto A. Analogamente para B, b e C, c.

[3] Note-se que não estamos a afirmar que esta condição é necessária.

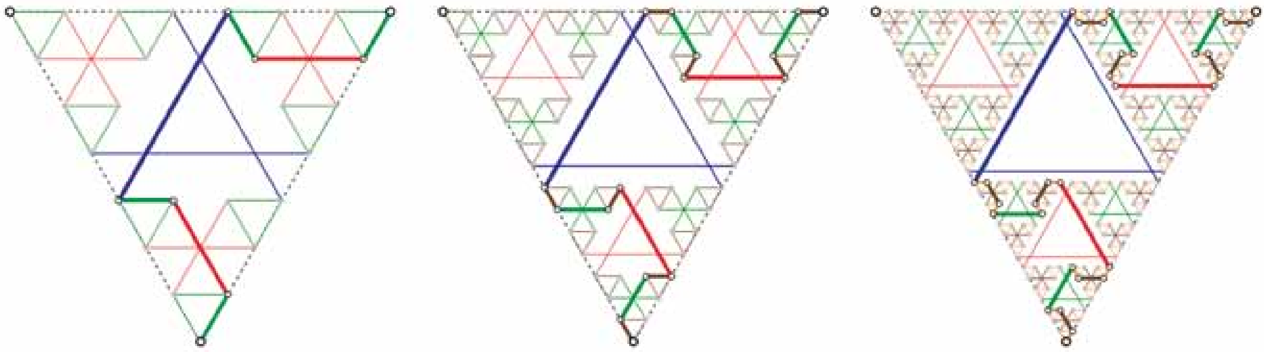


Figura 6.

Figura 7.

a da direita, etc. Como exercício, o leitor poderá procurar no diagrama do meio o caminho mais curto para levar os quatro discos da haste esquerda para a direita.

Em cada diagrama da figura 6, a parte da curva grossa antes do segmento azul tem exatamente a mesma forma que a parte após esse segmento e, em particular, o número de jogadas antes desse movimento do disco azul é o mesmo que o das jogadas posteriores. Tal tem a ver com o facto de que no jogo, como é sabido, quando chega a ocasião de deslocar o disco maior, está-se exatamente a meio do jogo: antes, mudaram-se os discos mais pequenos para a haste da esquerda e, em seguida, por uma sucessão análoga de movimentos, mudam-se esses mesmos discos dessa haste para a direita. Se, para um n, $f(n)$ designar o número mínimo de jogadas para o transporte dos discos, será, pois $f(n) = 2f(n-1)+1$.

Claro que este comportamento se manifesta em qualquer modelo isomorfo (ver [1] para o caso do Jogo das Lâmpadas).

Designando por 0, 1, 2, respetivamente, as hastes de baixo, da direita e da esquerda, vamos representar por $i\,j$ o movimento do disco de cima da haste i para a haste j, em que i, j são dois daqueles três números. Por exemplo, a solução do jogo, trivial no caso de existir um só disco, só terá um movimento e é representada por 01. No jogo com dois discos, a solução será $02\ \ 01\ \ 21$, em que o disco mais pequeno vai para a haste vazia (2), depois move-se o disco grande para a haste 1 e, finalmente, o disco pequeno da haste 2 para a 1. Para maior clareza, escreveremos $i\,j$ na cor do disco movido e usaremos tamanhos relativos de letras correspondendo aos tamanhos relativos dos discos movidos. Baseados nesta ideia, definimos uma função f que a um par $i\,j$ num certo tamanho (e cor) faz corresponder um terno de pares $ik\ ij\ kj$, tendo ik e kj uma cor contígua à usada para ij e sendo k o número de $\{0,1,2\}$ diferente de i e de j; e outra função g que, em cada lista de pares assim obtidos, substitui cada um dos pares $m\,n$ da cor correspondente ao disco mais pequeno presente na lista pelo seu transformado por f. Partindo de um só disco, temos **01** como solução do jogo. Aplicando g, temos **02 01 21** e, aplicando g novamente, ou seja, substituindo cada par vermelho pela respetiva imagem por f, temos **01 02 12 01 20 21 01**. O segundo iterado de g aplicado a esta lista dá a lista representada na figura 7, que, para maior clareza, tem algumas linhas a envolver as diversas fases.

As funções f e g podem ser utilizadas para construir a lista de movimentos da solução ótima para qualquer número de discos, de uma forma inteiramente automática, sem nenhum recurso explícito ao jogo, aos discos e às regras.

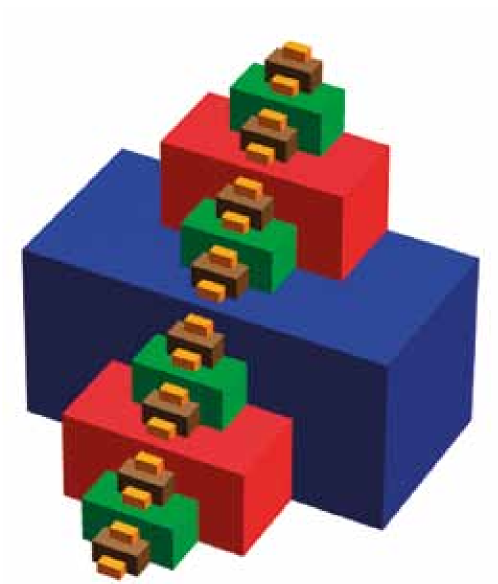


Figura 8.

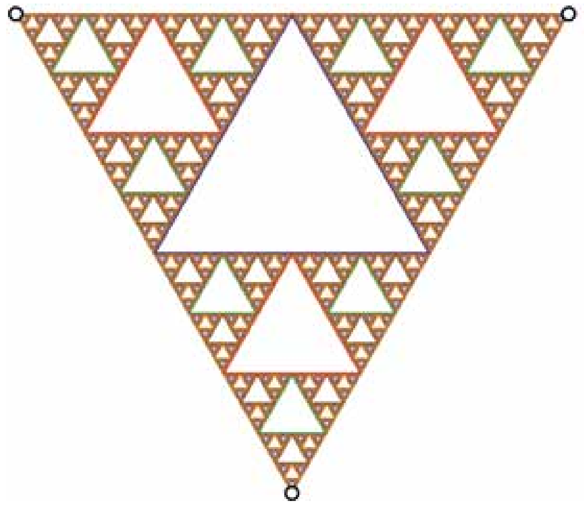


Figura 9.

A figura 8 mostra um modelo da solução ótima, obtido tomando paralelepípedos de tamanhos e cores correspondentes às massas dos discos, em números iguais aos dos sucessivos movimentos desses discos e dispostos como a figura 8 indica, no caso de cinco discos. Haverá, pois, um azul, dois vermelhos, quatro verdes, oito castanhos e 16 amarelos. Ao percorrer a "escadaria", vamos encontrando sucessivamente as cores e os tamanhos dos discos a mover. E fica claro como se construiria o modelo para seis discos a partir deste modelo de cinco discos, juntando 32 paralelepípedos mais pequenos. Na reunião da sucessão de sólidos assim obtidos, a menos da cor, ao ampliar a "escadaria" verifica-se uma autossemelhança. Este modelo e o da figura 7 são sugestivos, mas "descrevem" apenas uma solução ótima do jogo das Torres de Hanói. Uma vantagem do modelo dos baricentros, atrás considerado, é que ele descreve também o conjunto de todas as posições possíveis dos n discos e de todos os movimentos permitidos, independentemente de aparecerem ou não no percurso ótimo, e isso permite ver como o tal percurso ótimo se situa nesse conjunto mais vasto. Por exemplo, consideremos a seguinte questão: dados n discos, ao levá-los no número mínimo de movimentos da haste 0 para a haste 1, e da haste 0 para a haste 2 (ou de 1 para 2), será que durante esses dois percursos se passa, em alguma fase intermédia, por uma mesma distribuição de discos pelas hastes? A tradução da questão para o modelo dos baricentros é fácil: duas linhas poligonais de comprimento minimal unindo dois pares diferentes de vértices podem passar por um mesmo baricentro do modelo (interior ao triângulo)? A observação atenta da figura 6 ajuda a ter uma interpretação geométrica do que está em causa.

No modelo concreto dos baricentros de todas as posições possíveis, que definimos acima, há também um fenómeno de autossemelhança e um conjunto limite, mas a sua definição requer algum cuidado que não era necessário no caso do modelo da figura 8, porque nele, quando o número de discos aumenta, não se muda a parte já existente, apenas se acrescentam novos paralelepípedos mais pequenos, ao passo que no modelo dos baricentros, exceptuando os vértices do triângulo grande, todos os baricentros vão sempre mudando. Isto tem a ver com o facto de a massa total dos discos ser variável e inferior a 1, o que faz com que, por exemplo na figura 6, a coordenada baricêntrica (constante) referente à haste esquerda, de todos os pontos do segmento azul mais grosso seja $(1/2)/(7/8) = 4/7$ no caso do diagrama da esquerda, $(1/2)/(15/16) = 8/15$ no do centro e $(1/2)/(31/32) = 16/31$ no da direita. Essa coordenada é sempre maior do que $1/2$, como vimos que deveria ser para termos um bom modelo e tende para $1/2$ quando o número n de discos tende para infinito. E algo de análogo se passa para os restantes segmentos. Não admira, pois, que o triângulo de Sierpinski tenha alguma relação com o limite daqueles diagramas, como sugere, já para $n = 9$, o diagrama representado na figura 9, incluindo os bari-

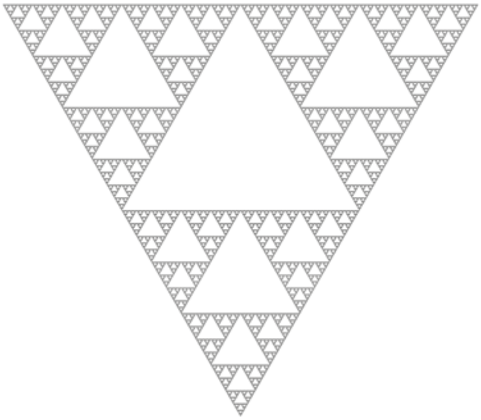


Figura 10.

centros e os segmentos correspondentes aos movimentos dos discos. A figura 10 representa todos os baricentros, sem movimentos, para $n = 10$.

É, no entanto, possível construir um modelo concreto de baricentros, análogo ao introduzido acima, mas com outras massas, de tal forma que a massa total seja sempre 1 e, portanto, as coordenadas baricêntricas dos segmentos correspondentes à quase totalidade dos discos (todos menos o último) permaneçam constantes à medida que acrescentamos um disco: para n discos, basta escolher como massa do disco maior $2/3$, depois cada disco tem massa igual a um terço da do anterior, exceto o mais pequeno, que tem metade da massa do anterior. Por exemplo, para $n = 3$ teremos massas $2/3$, $2/9$, $1/9$, para $n = 4$ será $2/3$, $2/9$, $2/27$, $1/27$ e $2/3$, $2/9$, $2/27$, $2/81$, $1/81$ para $n = 5$. Os novos diagramas para n entre 3 e 5 (análogos aos da figura 6, mas agora para estas novas distribuições de massas) estão representados na figura 11. A passagem de um diagrama (n) ao seguinte ($n + 1$) corresponde agora à substituição de cada pequeno triângulo com a cor do disco mais pequeno por três segmentos dessa cor, com três novos triângulos com a cor do disco ainda mais pequeno, como está representado na figura 12, referente à passagem da primeira imagem da figura 11 para a segunda.

Em [3] há um CDF que permite deformar o modelo de baricentros com fator $1/2$ no modelo com fator $1/3$.

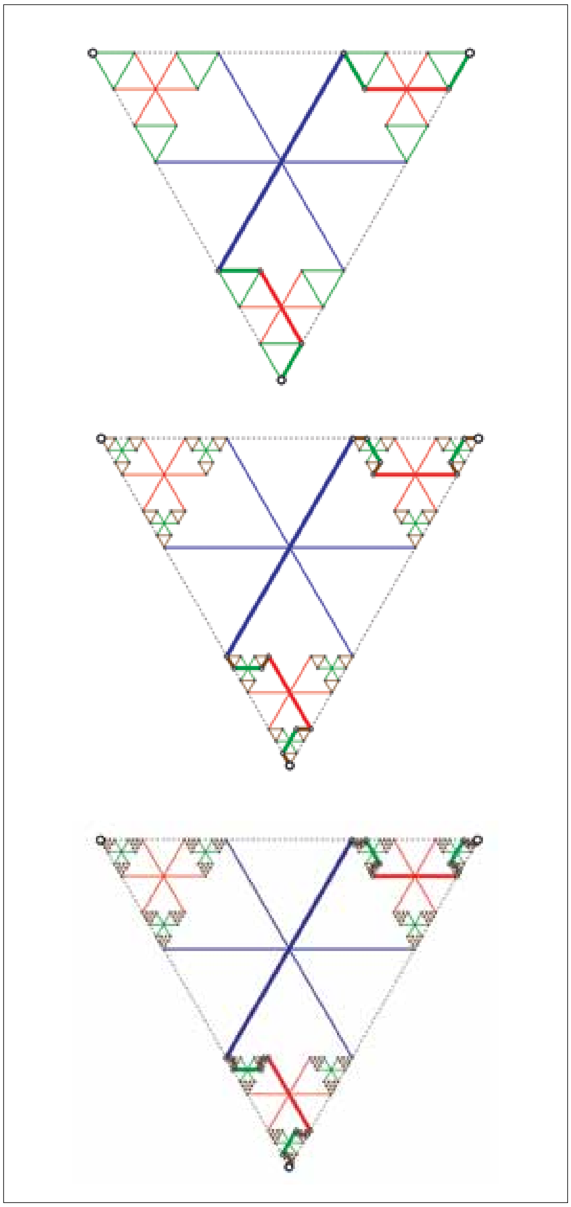


Figura 11.

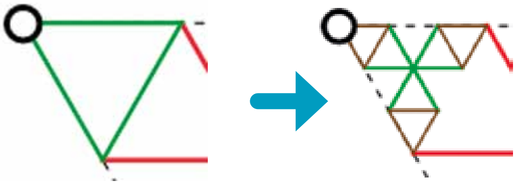


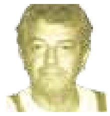
Figura 12.

REFERÊNCIAS

[1] "Jogos Isomorfos", *Gazeta de Matemática* n.º 169, março 2013, *http://www.atractor.pt/publicacoes/395.pdf*

[2] "Jogos Isomorfos", *http://www.atractor.pt/mat/JogosIsomorfos*

[3] Jogos Isomorfos II, *http://www.atractor.pt/mat/SierpHanoi*



Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

MATEMÁTICA E ASSUNTOS DIVERTIDOS

No ano passado, a Princeton UP, em parceria como o MOMATH (National Museum of Mathematics, em Nova Iorque), publicou o livro *The Mathematics of Various Entertaining Subjects*, prefaciado pelo recentemente desaparecido Raymond Smullyan. Os editores, J. Beineke e J. Rosenhouse, coligiram trabalhos saídos do encontro MOVES, que o museu organizou em 2013. Trata-se de uma contribuição importante para o campo da matemática recreativa.

Os artigos coligidos nesta obra abordam temas, de facto, divertidos e muito interessantes, e estas páginas são margem estreita para lhes fazer justiça.

Desde o ubíquo Fibonacci até aos jogos (SET, Poker sem coração, Jogos do Galo em contexto geométrico bizarro), passando pelos *puzzles* e problemas clássicos, este livro tem pérolas para todos os gostos!

Anany Levitin exibe, no seu texto, vários quebra-cabeças imediatos com conteúdo matemático, de que adaptámos alguns exemplos.

> O Mágico pede a um voluntário que escolha secretamente dois números inteiros positivos, a e b, e que com eles forme uma sucessão de Fibonacci: $F_1 = a,\ F_2 = b,\ F_3 = F_1 + F_2 = a + b,\ F_4 = F_3 + F_2$, etc. No passo seguinte, o Voluntário deve calcular, em segredo, a soma dos dez primeiros termos desta sucessão. O Mágico pede o valor de um F_i particular e adivinha essa soma. Como é isto possível?

Há sempre algo sobre triângulos para descobrir:

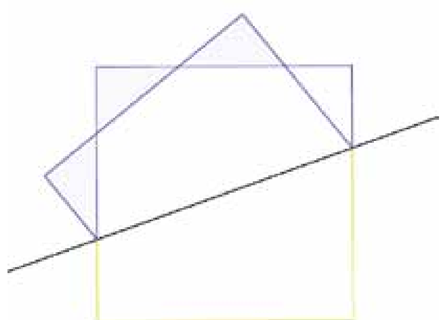
> Pretende-se dividir um triângulo equilátero em duas partes de áreas iguais com a linha de comprimento mínimo. Que linha é essa?

Outro problema sobre bissecções:

> Bissecte cada uma das partes – negra e branca – do símbolo *Yin e Yang* ilustrado, com uma só linha reta.

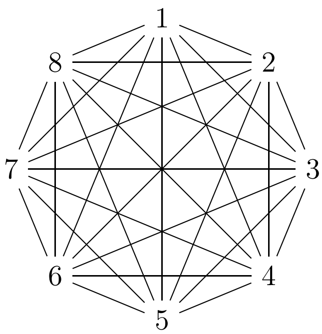
Para terminar, um origami:

> Dobre um quadrado ao longo de uma reta que passe pelo seu centro. Para que reta é que a área da sobreposição é mínima?



O artigo de Jennifer Beineke e Lowell Beineke, *Some ABCs of graphs and games*, relembra, entre outros, um passe de magia de Jeremiah Farrell, em que nos baseámos para propor o efeito seguinte.

O Ajudante pede ao Voluntário que escolha uma das cartas na mesa, do Ás ao 8 de Espadas, como ilustrado.



O Voluntário deve seguir, com um dedo, linhas da figura à sua escolha, sucessivamente quantos segmentos quiser, a partir da sua escolha inicial, até atingir uma carta final. Neste momento deve escolher qual das duas cartas – a primeira ou a última do seu trajeto (a outra será a carta-mistério) – vai comunicar ao Mágico, que está de costas. O Ajudante também anuncia uma carta e o Mágico diz se é essa, ou não, a carta-mistério. No caso de não ser, o Mágico identifica a carta-mistério corretamente.

Um exemplo: o Voluntário escolhe o terno e viaja: terno-sena-ás-duque-quina-ás. Comunica ao Mágico: "Ás". O Ajudante propõe "Duque" e o Mágico corrige: "A carta-mistério é o terno".

Como é isto possível?

Sobre a questão do número anterior:

Para determinar a mais pesada, há que efetuar 15 pesagens (estilo "eliminatórias da Taça de Portugal de futebol"): de oito pesagens passam oito pepitas à fase seguinte, de quatro pesagens passam quatro, de duas pesagens passam duas e a pesagem final. A segunda mais pesada só pode ter sido vencida numa comparação com a mais pesada. Como esta participou em quatro pesagens, há que comparar entre si as quatro pepitas derrotadas pela vencedora, para o que bastam mais três pesagens. O total é então de 18 pesagens.

Amílcar Branquinho
Universidade de Coimbra
ajplb@mat.uc.pt

UMA HISTÓRIA INTERMINÁVEL...

Caro Leitor, os discursos, as relações pessoais, as funções oscilantes, as aulas, os anúncios... tudo isto e muito mais se deteriora pelo corrosivo efeito da monotonia! Não nos enganemos, também no estudo da matemática há momentos em que tudo parece igual, e em que se necessita de um sopro de inspiração.

Contar é uma atividade básica que esteve presente desde os alvores da humanidade, fazendo parte dos temas de estudo de uma área da matemática, rica em questões complexas de enunciado simples, a Combinatória. Esta é inseparável da própria noção de número natural e está estreitamente ligada à Teoria de Números. Já a Teoria Analítica dos Números, depois de 150 anos de história (bastante mais, se considerarmos as contribuições de L. Euler), pode considerar-se um ente estranho. Se os números naturais ou os inteiros formam um conjunto discreto, podemos perguntar-nos:

Porquê a análise com números?

O termo análise procede de uma palavra grega que, entre outras coisas, significa decomposição. Mais do que o significado comummente aceite em matemática, relacionado com derivadas e integrais, vamos aqui concentrar-nos no seu sentido etimológico.

Naturalmente, esta questão não tem uma resposta fácil e compreendê-la requer um certo nível de conhecimento matemático. Além de que os matemáticos têm, em geral, um problema com a divulgação: não sabem mentir!

De facto, a matemática moderna está firme e bem assente no rigor. Mas esta virtude, por vezes, torna-se excessiva quando nos separamos do âmbito da investigação ou de um público constituído por colegas.

Aqui, temos como propósito ilustrar alguns aspetos da Análise, mostrando com exemplos e eliminando o fardo dos pontos mais técnicos, como as médias de funções, *à la mode de Newton*, fazem parte da maravilhosa aventura do Cálculo.

INTEGRAL *VERSUS* MÉDIA.

Em qualquer curso introdutório de Cálculo pode encontrar-se que o integral é uma área, e durante algumas aulas ensinam-se somas inferiores e superiores *à Riemann*... para depois, não sem algum trabalho, demonstrar que

$$\int_0^1 t = \frac{1}{2}\,.$$

Este resultado é natural! A área do triângulo é dada por $b \times a/2 = 1 \times 1/2$. Posteriormente, e já munidos do super teorema fundamental do Cálculo, deduzimos que

$$\int_0^x t^k = \frac{x^{k+1}}{k+1}\,,\ k \in \mathbb{R}^+\,. \tag{1}$$

A partir daqui, as somas de Riemann como que se esvaecem do Cálculo.

Haverá alguma justificação natural para a identidade (1)?

O que se segue é uma tentativa de explicar este resultado usando Teoria de Probabilidades (cf. J. Bernoulli, "Ars Conjectandi" e H. Dörrie, "100 Great Problems of Elementary Mathematics", pág. 40-44):

Dados sequencialmente três números x,y,z em [0,1], qual é a probabilidade de que o primeiro seja o maior?

Da simetria do problema concluímos que será $1/3$.

E, se conhecermos x, qual é a probabilidade de que y (respetivamente, z) seja menor do que x?

Deverá ser x, pois, a probabilidade de que um número em [0,1] esteja em $[0,1/2[$ é $1/2$, de que pertença a $[0,1/3[$ é $1/3$ e de que esteja em $[0, x[$ é x. Assim, podemos concluir que a resposta à questão inicial é dada por x^2. Somando (integrando) entre todos os possíveis valores de x deduzimos que

$$\int_0^1 t^2 = \frac{1}{3} \quad \text{e também} \quad \int_0^x t^2 = \frac{x^3}{3}$$

(para a última identidade basta considerar uma mudança de escala). Iterando o processo, e considerando $k+1$ números em vez dos três anteriores, obtemos (1), como uma primeira versão da lei dos grandes números.

Quando k não é um inteiro positivo... Começamos por definir o operador valor médio de f em $[0, x[$, como

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathfrak{M}}} f = \lim_{n\to\infty} \mu(n)\,, \quad \mu(n) = \frac{f(\delta) + \cdots + f(n\delta)}{n}\,,$$

com $\delta = x/n$. Note-se que, se f é integrável em $[0, x[$,

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathfrak{M}}} f = \frac{1}{x}\int_0^x f\,. \tag{2}$$

Assim, tomando $f(t) = t^k$, temos

$$\mu(n) = x^k\left(1^k + \cdots + n^k\right)/n^{k+1}\,.$$

Por exemplo, para $k = 1$, $\mu(n)$ é facilmente determinado. Para tal, basta aplicar a famosa ideia de um jovem C.F. Gauss:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ n & + & n-1 & + & \cdots & + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) \end{array}$$

logo, $\mu(n) = x\,(1 + \cdots + n)/n^2 = x\,(n+1)/(2n)$ pelo que, $\overset{x}{\underset{0}{\mathfrak{M}}}\, t = x/2\,.$

Vejamos como proceder, em geral, para estimar $s(n) = 1^k + \cdots + n^k$. Como consequência da desigualdade de Cauchy (cf. *Gazeta de Matemática*, 168, pág. 9) temos que

$$x^\nu < 1 + \nu\,(x-1)\,,\ x > 0\,,\ 0 < \nu < 1\,;$$

e tomando $\nu = 1/\kappa$ e $1 + \nu\,(x-1) = y$ obtemos

$$y^\kappa > 1 + \kappa\,(y-1)\,,\ y > 0\,,\ \kappa > 1\,. \tag{3}$$

Assim, substituindo, em (3), y sucessivamente por $\vartheta/V > 1$ e por V/ϑ, obtemos

$$\mu\, V^{\kappa-1} < \frac{\vartheta^\kappa - V^\kappa}{\vartheta - V} < \kappa\,\vartheta^{\kappa-1}\,, \tag{4}$$

pelo que tomando sucessivamente $(\vartheta, V) = (j, j-1)$, $j = 1, \ldots, n$, $\kappa = k+1$ e somando,

$$\begin{array}{c} 0 < 1^{k+1} < (k+1)\,1^k \\ (k+1)\,1^k < 2^{k+1} - 1^{k+1} < (k+1)\,2^k \\ \vdots \\ (k+1)\,(n-1)^k < n^{k+1} - (n-1)^{k+1} < (k+1)\,n^k \\ \hline (k+1)\,(s(n) - n^k) < n^{k+1} < (k+1)\,s(n) \end{array}$$

pelo que

$$\frac{1}{k+1} < \frac{s(n)}{n^{k+1}} < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ k > 0\,.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \quad \text{logo} \quad \overset{x}{\underset{0}{\mathfrak{M}}}\, t^k = \frac{x^k}{k+1}\,, \tag{5}$$

e, tendo em atenção (2), obtemos (1).

UM LIMITE NOTÁVEL

No tratado *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, I. Newton apresenta um estudo sobre a representação em série de potências das funções exponencial, seno, cosseno, logaritmo, binomial... Nesse estudo assume particular importância a média de cada uma das funções indicadas. O que pretendemos fazer é discutir as ideias principais deste estudo, ilustrando-o para a função exponencial.

Comecemos por estabelecer uma desigualdade análoga à anteriormente deduzida para a função potência (4), agora para a função exponencial,

$$e^V < \frac{e^\vartheta - e^V}{\vartheta - V} < e^\vartheta\,,\ \ \vartheta > V\,. \tag{6}$$

De facto, a função exponencial satisfaz a seguinte desigualdade:

$$e^u > 1 + u\,,\ \ u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,. \tag{7}$$

Tome-se agora $\vartheta = V + \varphi > V$, faça-se em (7) $u = \varphi$ (respetivamente, $u = -\varphi$), e, multiplique-se cada uma das expressões por e^V (respetivamente, e^ϑ), obtendo-se $e^\vartheta > e^V + \varphi\, e^V$ (respetivamente, $e^V > e^\vartheta - \varphi\, e^\vartheta$), de onde se conclui (6).

Agora, tendo em atenção (6), concluímos que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{e^x - e^\alpha}{x - \alpha} = e^\alpha\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

UMA REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL.

Por definição, a média da função exponencial em $[0, x[$ é o limite quando $n \to \infty$ de

$$\mu(n) = \frac{e^\delta + e^{2\delta} + \cdots + e^{n\delta}}{n}\,,\quad \delta = \frac{x}{n}\,;$$

tomando sucessivamente $(\vartheta, V) = (j\,\delta, (j-1)\,\delta)$, $j = 1, \ldots, n$ em (6), i.e.

$$\begin{gathered} \delta < e^\delta - 1 < \delta\, e^\delta \\ \delta\, e^\delta < e^{2\delta} - e^\delta < \delta\, e^{2\delta} \\ \vdots \\ \delta\, e^{(n-1)\delta} < e^{n\delta} - e^{(n-1)\delta} < \delta\, e^{n\delta} \end{gathered}$$

somando, efetuando pequenas simplificações, temos

$$\frac{e^x-1}{x} < \mu(n) < \frac{e^x-1}{x} + \frac{e^x-1}{n}\,,\ x > 0\,,$$

$$\frac{e^x-1}{x} + \frac{e^x-1}{n} < \mu(n) < \frac{e^x-1}{x}\,,\ x < 0\,,$$

pelo que

$$\mathop{\mathfrak{M}}_0^x e^t = \frac{e^x-1}{x}\,,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

A média herda do integral propriedades importantes como a linearidade, a monotonia e um teorema do valor médio:

Sejam f, g funções positivas e integráveis em [0, x[; então

$$(\inf f) \mathop{\mathfrak{M}}_0^x g \le \mathop{\mathfrak{M}}_0^x (f\,g) \le (\sup f) \mathop{\mathfrak{M}}_0^x g\,.$$

Assim, de (7) obtemos, aplicando o operador média a ambos os membros, e tendo em atenção que conhecemos já a média das funções x^k, cf. (5),

$$\frac{e^x-1}{x} > 1 + \frac{x}{2}\,,\quad \text{i.e.}\quad e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}\,.$$

De $e^{-x} > 1 - x$, i.e. $e^x < 1 + x\,e^x$, com $x > 0$, obtemos, aplicando o operador média a ambos os membros, e tendo em atenção o teorema do valor médio, anteriormente estabelecido,

$$\frac{e^x-1}{x} < 1 + \frac{x}{2}\,e^x\,,\quad \text{ou}\quad e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!}\,e^x\,.$$

Acabámos de provar que, para todo o $x > 0$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!}\,e^x\,.$$

O caso $x < 0$ é um pouco mais simples. De facto, de (7) obtemos, aplicando o operador média,

$$\frac{e^x-1}{x} > 1 + \frac{x}{2}\,,\ x < 0\,,\quad \text{i.e.}\quad e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!}\,;$$

aplicando uma vez mais o operador média,

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\,,\ x < 0\,.$$

Assim, para todo o $x < 0$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!}\,.$$

Iterando o processo anterior, obtemos que o *erro* cometido quando representamos a função exponencial na forma

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,,$$

é inferior a

$$\left(e^x - 1\right)\frac{x^n}{n!}\,, x > 0 \quad \text{e a} \quad \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,,\ x < 0\,.$$

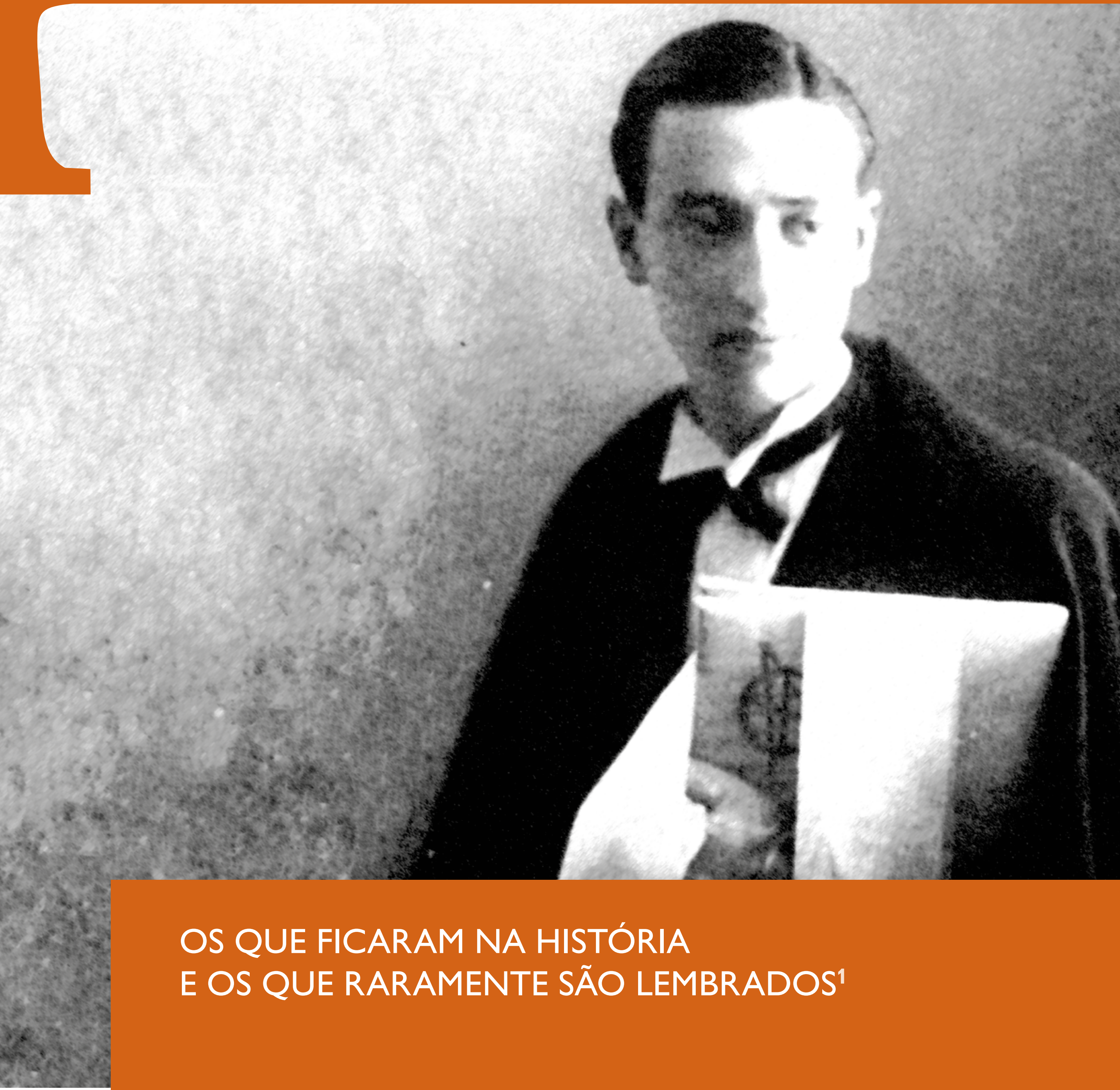
Ora, $\left(|x|^n/n!\right)$ é uma sucessão com limite zero, considerando x em intervalos fechados, I, de $\mathbb{R}$. De facto, se $x = 0$, é evidente; e para todo $0 \neq x \in I$,

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\,n!} \times \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

logo $\left(|x|^n/n!\right)$ é majorada por uma progressão geométrica de razão em]0,1[. Assim,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\,,$$

é a representação em série de potências da função exponencial, que é absoluta e uniformemente convergente sobre intervalos fechados, I, de $\mathbb{R}$.



OS QUE FICARAM NA HISTÓRIA E OS QUE RARAMENTE SÃO LEMBRADOS[1]

Celeste Gouveia e Natália Bebiano

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

mcag@mat.uc.pt e bebiano@mat.uc.pt

Luís Guilherme Furtado Mendonça Castilho de Albuquerque nasceu em Lisboa a 6 de março de 1917. Iniciou o ensino secundário em Coimbra, nos liceus Júlio Henriques e José Falcão, tendo vindo a completá-lo no Colégio Militar de Lisboa, em 1934. Ingressou na Universidade de Coimbra e posteriormente transitou para a Universidade de Lisboa, onde se licenciou em Matemática (1939) e em Engenharia Geográfica (1940). Regressou a Coimbra, onde iniciou a carreira académica como assistente da Faculdade de Ciências (1941). Completou o doutoramento em 1959 e em 1966 foi nomeado Professor Catedrático. Jubilou-se em 1987.

Luís de Albuquerque foi nosso Professor pela primeira vez no ano de 1970-71, na disciplina de Cálculo Infinitesimal I, logo após ter regressado de uma comissão de serviço na Universidade de Lourenço Marques. Esta disciplina era lecionada para o 2.º ano das licenciaturas em Matemática, Física e Química, bem como para todas as licenciaturas em Engenharia. Com elevada taxa de reprovação, constituía uma das "barreiras" mais difíceis de ultrapassar para todos aqueles alunos. O programa, muito extenso, focava assuntos de elevada complexidade dentro da Análise em $\mathbb{R}^n$, nomeadamente, o estudo de funções, diferenciabilidade, integrabilidade, resolução de equações e de sistemas de equações diferenciais e Transformada de Laplace [2].

O rigor da teoria era o possível ao nível em que era ministrado, tendo em conta a diversidade de alunos e a sua preparação de base. Assim, pré-requisitos de topologia, teoria da medida, geometria diferencial, entre outros, eram abordados de forma algum modo superficial, mas cumprindo a sua finalidade de contextualização e fundamentação científica.

Mais tarde, reencontrámos o Professor Luís de Albuquerque na disciplina de Teoria da Aproximação, sendo esta apenas para alunos do 4.º ano da licenciatura em Matemática Pura. Infelizmente, não cumpriu todo o plano curricular, devido a um acidente vascular cerebral que o deixou temporariamente afastado do ensino. Foi substituído pelo Professor Andrew Fraser, que seguiu escrupulosamente o programa delineado pelo Professor Luís de Albuquerque, incluindo tópicos como a aproximação linear em espaços normados e em espaços de Hilbert, bases completas, equações de Parseval-Liapunov e teoria de projetores. Alguns destes temas haviam sido objeto de publicações, como *Teoria da Aproximação Funcional* e *Nota sobre a resolução de algumas equações operacionais*, respetivamente nos Volumes 4.º e 6.º das *Publicações do Centro de Matemática – Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra.*

Já no 5.º ano da licenciatura, o Professor Luís de Albuquerque foi nosso orientador na disciplina de Seminário. Foi uma experiência altamente gratificante, pelo cariz inovador na forma como se relacionava com os estudantes. Habituados a um distanciamento reverente, encantaram-nos o modo afável e a abertura com que recebia os alunos no seu gabinete para discussão e consequente esclarecimento de dúvidas, fomentando o espírito crítico e a reflexão sobre temas diversos, complementando o tradicional estudo livresco com a leitura de artigos científicos, muitos dos quais publicados por matemáticos conceituados em revistas internacionais. A título individual, reconhecemos este momento como um marco na nossa carreira, pois foi o Professor Luís de Albuquerque que nos abriu horizontes no campo da pesquisa científica, essencialmente na área da Teoria das Matrizes, tendo sido ele o fundador do primeiro grupo de investigação nesta área, não só na Universidade de Coimbra como também a nível nacional.

Em 1962, Luís de Albuquerque publicou *Matrizes de elementos não negativos. Matrizes estocásticas*, um dos primeiros trabalhos monográficos sobre o tema no mundo científico. Na Introdução, o autor evidencia a importância da aplicação daquela teoria no esclarecimento de certas questões em trabalhos desenvolvidos por Perron, Frobenius, Krein, Gantmacher, Markov, Househölder e Ostrowski, entre outros, nos domínios da Física Matemática e do

Recordamos Luís de Albuquerque no centenário do seu nascimento, um professor insigne que muito nos ensinou e que permanece uma referência.

[1] L. Albuquerque - *Navegadores Viajantes e Aventureiros Portugueses*

Cálculo das Probabilidades. Esta monografia (cuja revisão é atribuída ao Professor Joaquim Dionísio) começou a ser elaborada logo após a regência na Faculdade de Ciências de um novo curso de Cálculo das Probabilidades (baseado em Teoria da Medida), durante um estágio que efetuou na Universidade de Göttingen (1959-60) como bolseiro do Instituto de Alta Cultura. Naquela universidade seguiu os seminários de *Processos Estocásticos e Séries Temporais* dirigidos pelo Professor Konrad Jacobs, mas, apesar de afim da temática aí abordada, o seu trabalho teve início e foi desenvolvido independentemente desses seminários. O nosso conhecimento detalhado do seu conteúdo teve lugar na disciplina de Teoria das Matrizes do 5.º ano da licenciatura (a cargo da Dra. Célia Santos). Evidenciamos o facto de o assunto da referida monografia ser ainda de grande atualidade no que concerne a aplicações na Teoria das Probabilidades, Investigação Operacional, Biologia e Ciências Sociais, como o demonstram os livros de Bapat e Raghavan [7], e de Shmuel Friedland [8].

Outros traços de Luís de Albuquerque pontuaram o nosso percurso académico. A título de exemplo, referimos o livro de Geometria Descritiva e Projetiva [4] de sua autoria, referência base para a disciplina do 1.º ano com o mesmo nome, a sebenta de Matemáticas Gerais [3] coligida segundo apontamentos das suas aulas, bem como outras publicações na forma de artigo [5-6], algumas delas utilizadas na disciplina de Seminário e na elaboração da Tese de Licenciatura.

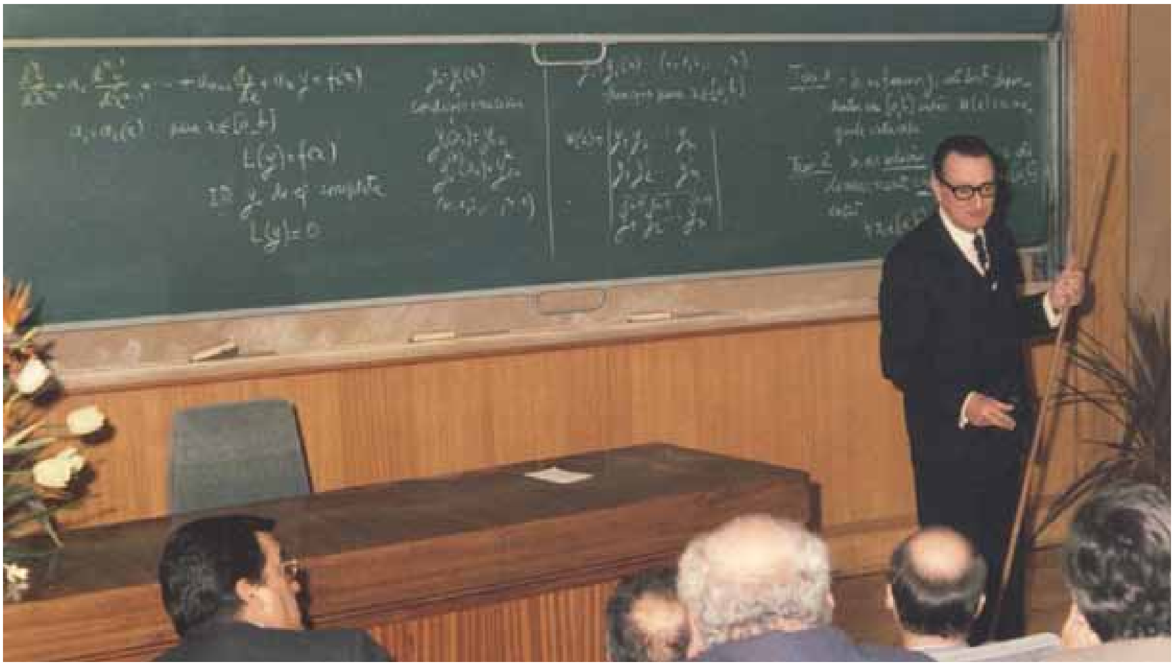
Possuidor de uma personalidade invulgar eivada de cultura e de valores, imprimiu nos seus alunos uma respeitabilidade e uma admiração que lhes ficou na memória. Assim, por altura da comemoração do centésimo aniversário do seu nascimento, não podíamos negar-nos a transmitir aos leitores da *Gazeta de Matemática*, revista da qual foi Redator e Co-diretor da secção de Matemáticas Superiores, o privilégio que sentimos por termos sido suas alunas, e também por com ele termos percebido a importância que um professor deve ter no desenvolvimento do aluno como indivíduo, enquanto ser pensante inserido numa sociedade que se quer culta, livre e tolerante.

Apesar de caírem fora do âmbito deste testemunho de cariz pessoal, existem aspetos da vida de Luís de Albuquerque que não podemos deixar de mencionar. A sua ação não se limitou à Universidade de Coimbra e muitos dos seus pares lhe têm atribuído mérito pela sua contribuição na abertura ao exterior desta Universidade. Cooperou com a Universidade de Cabo Verde, tendo tido um papel relevante na criação da Escola Superior de Formação de Professores (1979). Em Moçambique foi nomeado Professor Catedrático da Universidade de Lourenço Marques (1968-70) e, lá como cá, a sua reputação de académico e de cidadão granjeou-lhe confiança e estima entre colegas e alunos [9].

Personalidade de múltiplos interesses, a par com a Matemática, dedicou-se à História da Cartografia e da Náutica, sobre a qual possui uma vasta obra reconhecida nacional e internacionalmente. Neste âmbito, referimos a cooperação com outras universidades que lhe mereceu a nomeação *Doutor Honoris Causa* em História pela Universidade de Lisboa (1983) e o convite para diretor de estudos da *École des Hautes Études en Sciences Sociales da Sorbonne* (1986).

Também a Literatura e as Artes faziam parte da sua intervenção cultural, como o demonstram os artigos publicados na revista *Vértice* e em múltiplos jornais, como o *Comércio do Porto* e o *Jornal de Letras, Artes e Ideias*, a sua eleição para a Comissão Consultiva da "XVII Exposição Europeia de Arte, Ciência e Cultura", que teve lugar em Lisboa no ano de 1983, a sua nomeação para Curador da Exposição "Portugal-Brasil. A Era dos Descobrimentos Atlânticos", na The New York Public Library (1990), e ainda as condecorações atribuídas pelo poder político de *Grande-Oficial da Ordem do Infante D. Henrique* (1987) e *Grã-Cruz da Ordem Militar de Sant'Iago da Espada* (1993).

No meio académico, era-lhe reconhecido grande prestígio e ocupou cargos como Secretário-Geral da Universi-



dade de Coimbra (1966-68;1970-72), Diretor da Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra (1978-87), Presidente do Conselho Diretivo da Faculdade de Ciências (1974-76), vice-reitor (1978-1982) e, durante vários anos, Diretor da Classe de Ciências do Instituto de Coimbra.

Estudante num regime totalitário, defendeu desde então princípios de justiça e de liberdade, reconhecidos no meio estudantil, tendo mesmo sido eleito para Presidente da Associação Académica em 1946, cargo que não pôde ocupar por ser já licenciado, e pela sociedade civil que o escolheu para Governador Civil de Coimbra (1974-76), logo após a revolução do "25 de Abril".

Com este pouco do que se ofereceria dizer, esperamos ter contribuído para informar alguns, reavivar memórias de outros e assim assinalar a celebração do centésimo aniversário do seu nascimento.

A finalizar, como complemento do nosso testemunho, incluímos alguns depoimentos que pedimos a Professores do DMUC que tiveram um contacto mais estreito com Luís de Albuquerque.

“Quando entrei para a universidade (outubro de 1957), decidi que memorizaria a minha entrada na primeira aula. Assim fiz e ainda hoje parece que tenho gravada a imagem na retina. Entrei na Sala Gomes Teixeira e, sobre o estrado, em pé, junto à enorme mesa e com o ponteiro na mão estava o muito famoso Doutor Manuel Esparteiro. Professor inesquecível que contribuiu imenso para a minha formação matemática. Havia outro professor muito falado, e sobre quem eu já muito ouvira, de nome Luís de Albuquerque, que gozava da fama de conviver muito de perto com os alunos e de ser muito tu cá tu lá com os estudantes, ao contrário do que era costume nessa época. Foi com muita curiosidade que me dirigi para a primeira aula com ele num local designado por “os Desenhos”, junto à Sé Nova, onde pontificava um funcionário também muito conhecido e grande amigo de Luís Albuquerque, que era tratado por Senhor Manuel dos Desenhos. Lembro-me perfeitamente do primeiro avistamento que tive do Dr. (ainda não era Doutor) Albuquerque. A primeira impressão foi negativa: não gostei da cara dele, vinha com ar carrancudo. Em breve compreendi que me enganara. Era como diziam, e as aulas de Desenho Rigoroso eram muitas vezes uma oportunidade para conversas que não se limitavam ao âmbito da cadeira, estabelecendo-se um relacionamento que era raríssimo na época. Albuquerque era um professor fora do comum. As aulas de Desenho Rigoroso proporcionaram-me o início de uma longa amizade com o Professor. Em outubro de 1958, fiz um exame oral com o Doutor Esparteiro e fui recompensado com uma nota elevada. Percebeu-se que eu tinha alguma habilidade (e, sobretudo, gosto) para a matemática. O Doutor Albuquerque entusiasmou-me e estimulou-me sempre no decurso das minhas andanças científicas. Troquei com ele variada correspondência durante o tempo em que prestei serviço militar e enquanto estive em Moçambique e em Inglaterra. Finalmente ele foi decisivo na escolha do assunto da minha tese de doutoramento, à qual dediquei muitos anos de investigação. Pode dizer-se que o Doutor Albuquerque está na origem da atividade em Álgebra Linear e assuntos afins que teve lugar em Portugal nas últimas décadas embora muitos o desconheçam. E termino notando que a matéria em que verdadeiramente o Doutor Albuquerque se notabilizou e em que granjeou um lugar muito importante na cultura do nosso país foi a História dos Descobrimentos. A sua obra neste campo é vastíssima.”

Graciano Neves de Oliveira
Professor Catedrádico aposentado
da Universidade de Coimbra

“Vou falar das competências pessoais, cívicas, relacionais e humanas do Doutor Luís de Albuquerque e não do seu trabalho como matemático e historiador. O Doutor Albuquerque era muito querido dos seus estudantes. Cito apenas duas instâncias de que há fotografias. Uma, aquando do seu doutoramento, em 1959, em que os estudantes o passearam em ombros. Outra, em fevereiro de 1970, quando o ministro Veiga Simão se deslocou à Universidade de Lourenço Marques e na varanda do Aeroporto havia uma faixa propondo “Luís Albuquerque para reitor”. Em Coimbra, renovou o ensino das disciplinas de Matemática dos dois primeiros anos, comuns a quase todos os estudantes da Faculdade de Ciências. Os cursos de Matemáticas Gerais (1962) e de Cáculo Infinitesimal (1963) são extensos, rigorosos e bem concebidos. O Doutor Luís de Albuquerque era generoso, leal , disponível e aberto. Em múltiplas ocasiões, tenho manifestado o respeito que me merecia.”

José Lourenço Vitória
Professor Catedrádico aposentado
da Universidade de Coimbra.

"Recordo o Professor Luís de Albuquerque num tempo completamente diferente do atual. Não havia horas de gabinete para os professores atenderem os alunos – pois nem sequer havia gabinetes, exceto um na Biblioteca Matemática destinado ao diretor da mesma. Mas o Professor Albuquerque recebia-nos, a nós seus alunos, em casa dele! Simpatia, sim! É verdade que ele também tinha trato político, que naquele tempo não era bom revelar; mas após a instauração da democracia ele não hesitou em se apresentar como homem político!
Quanto à sua atividade universitária, foi um grande impulsionador da investigação em Álgebra Linear em Portugal, não propriamente por *papers* que tivesse escrito, mas sim pelo apoio dado aos jovens assistentes que foram pioneiros na investigação e que receberam bolsas para serem supervisionados em universidades estrangeiras na preparação dos respetivos doutoramentos. *Papers* muito importantes terá Luís de Albuquerque escrito, sim, mas na área da História dos Descobrimentos, envolvendo, claro está, a tecnologia científica dessa época. Recordo-o com simpatia pessoal e reconhecendo que, como docente, ele gostava de entusiasmar os jovens e de conviver com os seus estudantes, atitude que, na época, era ainda extremamente rara!

J. M. S. Simões Pereira
Professor Jubilado da Universidade de Coimbra.

Agradecimento: A F.J. Craveiro de Carvalho, pela leitura do rascunho do artigo.

REFERÊNCIAS

[1] L. M. Albuquerque, *Análise Infinitesimal I*, Lições coligidas por A. ST. Aubyn, M. dos Anjos Saraiva, M. Ivone Madalhas, Coimbra, Livraria Almedina, 1966.

[2] *Cálculo Infinitesimal*, Lições do curso de 1963-1964, coligidas por Joaquim Namorado, Coimbra, Livraria Almedina.

[3] *Matemáticas Gerais*, Lições do curso de 1962-1963, coligidas por João Miranda, Coimbra, Livraria Almedina.

[4] *Elementos de Geometria Projectiva e Geometria Descritiva*, Coimbra, Livraria Almedina, 1969.

[5] *Filtros e redes*, Coimbra, Universidade de Coimbra - Instituto de Matemática da Faculdade de Ciências, 1971.

[6] *Sobre a Teoria da Aproximação Funcional*, Coimbra, Instituto de Alta Cultura, 1958.

[7] R. B. Bapat, T. E. S. Raghavan, *Nonnegative Matrices and Applications*, Cambridge University Press, 2009.

[8] S. Friedland, *Matrices: Algebra, Analysis and Applications*, World Scientific Publishing Co., 2015.

[9] C.L. Pereira, L. Gonzalez, *História da AAM- Associação Académica de Moçambique* (1964-1975).

SOBRE AS AUTORAS

Celeste Gouveia e Natália Bebiano são Professora Associada com Agregação e Professora Catedrática do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, onde desenvolveram toda a carreira académica.

Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

ISTO AINDA VAI INTERESSAR-TE

A alternativa a não envelhecer é morrer cedo. Mas porque é que envelhecemos? Porque é que não poderíamos ser todos imortais? Mostraremos como pode a matemática ajudar a entender uma das mais antigas questões da Humanidade.

Hereford é uma pacata cidade inglesa, banhada pelo rio Wye e próxima da fronteira do País de Gales. Em novembro de 2015, no entanto, uma série de acontecimentos desencadeou uma longa história que chocou a pequena comunidade.

Tudo começou com a polícia local encontrando um senhor idoso, com forte sotaque norte-americano, mas que não sabia onde estava. Balbuciava apenas algumas palavras, entre as quais – soube-se depois – o seu próprio nome. Iniciou-se uma busca nas casas de acolhimento próximas, hospitais, bases de dados de pessoas desaparecidas, e nada.

Finalmente, em janeiro de 2017, um programa da BBC permitiu que fosse identificado: era originário da Califórnia, nos EUA, e estava na Europa a turismo.

A sua família abandonou-o no fim do giro, pouco antes de embarcar de volta a Los Angeles; antes de o deixar numa paragem de autocarro comprou-lhe roupas novas. Os sinais de demência – para ser mais preciso, de Alzheimer – já eram visíveis. O filho tinha longa história de negligenciar o cuidado dos pais e resolveu, simplesmente, viajar para outro país e abandoná-lo [1, 2].

Esta história é profundamente triste, mas não é o lado humano – certamente o mais importante – que nos interessará aqui (veja a figura 1). Há, e sempre há, muito de matemática a falar a partir desta história.

A doença de Alzheimer afeta uma parcela não muito grande da população mundial, mas apresenta um for-

Figura 1. *Ubasute*, ou senicídio, o triste hábito de abandonar idosos à sua própria sorte, retratado pelo artista japonês do século XIX Tsukioka Yoshitoshi numa gravura da série "As 100 Faces da Lua". **Fonte: Wikimedia Commons.** Um acontecimento que ocorria não apenas no Japão antigo mas também em muitas tribos nómadas pelo mundo. Hoje em dia, este triste hábito recebe o nome de *granny dumping* (despejar o avô).

te aumento em função da idade. Pouco se sabe sobre as suas causas, mas um trabalho recente traz suspeitas de que esta é causada pelo prião [3], colocando seriamente a possibilidade de ser transmissível e contagiosa (apesar de isto nunca ter sido detetado) a partir de contacto direto com tecidos contaminados. Este é o caso da doença (muito rara) de Creutzfeldt-Jakob, cuja manifestação mais conhecida, chamada *Kuru*, é devida ao hábito, aparentemente extinto, de comer cérebros de cadáveres em populações na Papua Nova Guiné.

O prião é uma proteína com uma estranha propriedade: a da autorreplicação. Ou seja, mesmo na ausênica de ácidos nucleicos (como aqueles que formam a molécula de ADN), é capaz de, em certas condições, produzir cópias de si mesmo. Estas cópias podem aglutinar-se formando placas que acabam por destruir o tecido nervoso. Desta forma, as suas manifestações patológicas são sempre associadas a doenças neurológicas progressivas. Provavelmente, o exemplo mais famoso é o da "doença das vacas loucas". O ponto interessante é que um dos primeiros a propor a existência de proteínas replicantes, e que leva boa parte da fama da sua descoberta, é um matemático. John Stanley Griffith, ao estudar o *scrapie* (ou paraplexia enzoótica dos ovinos), uma doença neurodegenerativa fatal em ruminantes, percebeu que a ausência de material nuclear verificada pelo químicos deixava poucas opções em aberto. Uma delas é a possiblidade de haver uma proteína com duas formas possíveis que, ao adotar a forma β (beta), aberrante, e entrar em contacto com a forma α (alfa), normal, produzia uma nova forma β. Esta hipótese seria capaz de reproduzir o padrão de aglomerados proteicos vistos diretamente nos tecidos mortos. Foram necessários mais 20 anos até que Stanley B. Prusiner conseguiu isolar um prião e mostrar, sem sombra de dúvidas, que a "doença da vaca louca" se devia à sua presença, o que acabou por lhe valer o Prémio Nobel de Fisiologia e Medicina em 1997.

Apesar de isto explicar algo muito importante sobre certas doenças, apenas roça uma questão central: porque é que envelhecemos? Porque é que o tempo é tão cruel connosco?

Estamos tão acostumaos às analogias mecânicas para o funcionamento das partes do corpo que por vezes esta pergunta é desvalorizada. Neste tipo de raciocínio, um joelho desgasta-se como um amortecedor de carros, o olho perde a sua acuidade como uma lente velha, falta-nos energia como numa bateria gasta. Apesar de apelativas, essas analogias são falsas. É só olhar para a Natureza

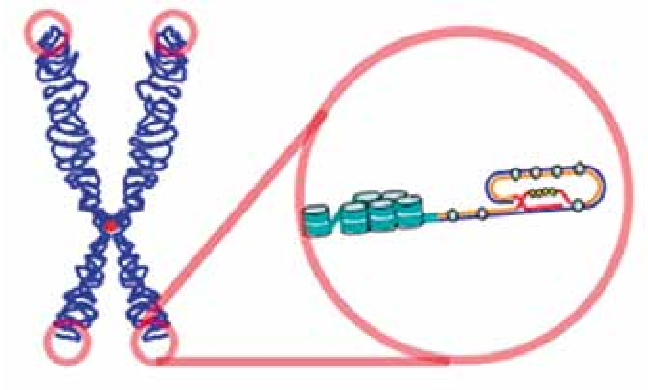


Figura 2. Uma molécula de ADN com os telómeros na sua extremidade. A cada divisão celular uma parte é perdida. Quando acaba, a célula não consegue mais reproduzir-se. Fonte: Wikimedia Commons.

que vemos exemplos muito difíceis de enquadrar neste raciocínio: estrelas-do-mar que têm um dos braços retirados são capazes de fazer nascer um novo; a cauda de uma salamandra regenera-se após ser arrancada. Mesmo uma simples bactéria é, na prática, imortal: reproduz-se, dividindo-se em duas partes iguais. Se nós nos reproduzíssemos de forma assexuada, veríamos cópias de D. Afonso Henrique a vaguear pelas ruas, até que um infortúnio (um terramoto?) as matasse todas.

Portanto, temos de pensar com mais cuidado sobre a razão por que envelhecemos.

O primeiro ponto é entender que existe um limite no número de vezes que uma célula humana se reproduz, chamado limite de Hayflick. Nas extremidades de uma célula normal existe uma estrutura chamada "telómero", que é parcialmente perdida de cada vez que a célula se divide. Após cerca de 60 divisões, este *stock* termina e a célula encontra-se impedida de gerar novas cópias. Veja a figura 2. Há uma razão para isto: células que se reproduzem sem limites formam tumores; desta forma, este limite existe para prevenir o cancro. A iniciação do cancro começa, em geral, por a célula desenvolver a capacidade de recomposição dos telómeros e desta forma se dividir sem limites. Mas para tecidos constantemente expostos a agressões externas, como a pele ou as mucosas digestivas, a capacidade de regeneração é importantíssima – não é por acaso que aí ocorrem os tipos mais comuns da doença, como os melanomas.

Entendido o envelhecimento a nível celular, temos de passar ainda para o indivíduo, composto por milhares de milhões destes blocos. A nossa compreensão da razão última do envelhecimento vem dos trabalhos do biólogo britânico Peter Medawar, num importante artigo que envolve alguma matemática, compatível com o primeiro ano de licenciatura [4]. A ideia, em linguagem moderna é a seguinte: suponha que existe uma idade máxima para os seres vivos (por exemplo, um milhão de anos – pode, realmente, ser qualquer valor, desde que finito). Então, o número de descendentes que ainda se espera gerar será uma função decrescente da idade. Assim, qualquer coisa que afete a nossa vida no início terá uma maior capacidade de nos impedir de deixar descendentes. Uma doença que se manifesta na infância poderá impedir-nos de ter filhos; aquilo que só começa a aparecer na terceira idade será irrelevante no tamanho da descendência. Desta forma, a seleção natural será muito mais rápida a eliminar doenças – ou mesmo outras manifestações negativas – da juventude do que aquelas que só se manifestam em períodos pós-reprodutivos. O resultado é aquilo a que chamamos de envelhecimento.

De facto, se nós tivermos uma quantidade finita de energia para dividir pelas nossas diversas fases etárias, faz mais sentido concentrar os nossos esforços (particularmente aqueles necessários à procura de parceiros) na juventude, em que a nossa expectativa de gerar descendentes é maior, e em que teremos mais tempo para os ajudar a chegarem às suas próprias fases reprodutivas. Não é difícil modelar este problema com o uso de matrizes (ditas "de Leslie"), mas isto será assunto para outra conversa.

No entanto, o envelhecimento não está associado a uma falha pontual. É um processo sistémico, em que tudo vem mais ou menos junto. Para isto, vale uma pequena analogia mecânica, contada pelo zoólogo Nicholas Humphrey. Um dia, o pioneiro da indústria automobilística, Henry Ford, solicitou que os seus funcionários percorressem oficinas de desmanche pela cidade e recolhessem peças em bom estado. Quando voltaram, havia uma que se destacava: o pino do eixo estava como novo, mesmo em carros com avançado desgaste. Ford percebeu imediatamente que isto significava que se estava a gastar em excesso nesta peça e baixou as especificações de sua produção; veja a figura 3. A prudência financeira indica que todas as partes devem decair em simultâneo. Se isto vale para automóveis, mais ainda para as partes do corpo (apesar de, evidentemente, não ser estritamente verdade sempre – o sistema reprodutor feminino sendo o principal contra-exemplo).

Figura 3. Um pino do eixo de um Ford T - o modelo mais clássico da centenária fábrica norte-americana. O seu bom estado, enquanto o resto do carro já apresenta um avançado desgaste, é um exemplo de desperdício de recursos, algo que a evolução tenta ao máximo evitar. Fonte: Wikimedia Commons.

A matemática pode fazer muito pela melhoria da qualidade de vida. Entender os processos naturais que se seguem no futuro próximo e o que fazer para tornar esta fase da vida mais confortável é um dos tópicos mais importantes de investigação em matemática e não só.

Para terminar: atualmente, a personagem inicial desta história está num lar de acolhimento em Los Angeles, pago, em parte pelo Estado, em parte por sua pensão de veterano da Força Aérea. A família não o visita.

REFERÊNCIAS

[1] "Brits spent months trying to identify a lost Alzheimer's patient. The answer broke their hearts". *Washington Post*, 3/2/2017.

[2] M. Goedert. "Faces of wife and son who dumped American dementia victim in Britain: We revealed how they were exposed, not by the police or the FBI but by a charity worker from Manchester". *Daily Mail*, 31/1/2017.

[3] "Alzheimer's and Parkinson's diseases: The prion concept in relation to assembled Aβ, tau, and α-synuclein", *Science* 07 Aug 2015:Vol. 349, Issue 6248, *DOI: 10.1126/science.1255555.*

[4] P. Medawar. "An unsolved problem of biology". An Inaugural Lecture Delivered at University College, London, 6 December, 1951.

Óscar Felgueiras
Universidade
do Porto
olfelgue@fc.up.pt

AMAR PELOS DOIS

Este ano, pela primeira vez, Portugal venceu o Festival da Eurovisão da Canção graças à música "Amar pelos Dois" de Salvador Sobral, a qual obteve um total de 758 pontos. Até que ponto é que esta votação poderá comparar-se com a de vencedores anteriores?

O Festival Eurovisão existe desde 1956 e conta com a participação portuguesa desde 1964. Devido à sua grande popularidade, é possível encontrar-se na Internet várias análises comparativas entre os resultados da votação de canções vencedoras de diferentes anos. Uma destas[1] exibe um *ranking* comparativo de todos os vencedores desde 1975 com a percentagem de votos obtidos relativamente ao máximo possível. Na tabela 1, apresentam-se os primeiros 10.

A prestação de Portugal em 2017 surge num honroso 8.º lugar. No entanto, esta posição é bastante distorcida devido ao facto de ser estabelecida uma comparação envolvendo sistemas de votação significativamente diferentes. Basta dizer que se o resultado final da votação deste ano tivesse sido calculado com base nas regras em vigor em 2015, então Portugal teria obtido 417 pontos num máximo de 492, o que lhe daria uma percentagem de 84,76%! Isto colocaria a canção de Portugal em 2017 na liderança destacada deste *ranking*.

Para se perceber um pouco melhor a influência do sistema de votação na ordenação final das canções, observe-se o que aconteceu em 2016. A cantora Jamala venceu pela Ucrânia, mas a Austrália teria vencido caso estivesse em vigor o sistema de votação de 2015[2]. E, na verdade, a Rússia teria ganhado se estivesse em vigor o sistema de 2008. Confuso? Vamos então analisar as diferenças no cálculo das pontuações que permitem que situações destas ocorram.

Tabela 1.

Ano	País	Participantes	Pontuação	Percentagem
1976	Reino Unido	18	164	80,39
1982	Alemanha	18	161	78,92
1997	Reino Unido	25	227	78,82
2009	Noruega	42	387	78,66
1994	Irlanda	25	226	78,47
2015	Suécia	40	365	77,99
1986	Bélgica	20	176	77,19
2017	Portugal	42	758	77,03
2012	Suécia	42	372	75,61
2001	Estónia	23	198	75,00

O sistema de votação do Festival da Eurovisão tem sofrido diversas alterações ao longo dos anos. Só até 1974, existiram nove sistemas diferentes e em 1975 foi adotado, pela primeira vez, o famoso sistema de 12 pontos, em que o júri de cada país atribui pontuações 12, 10, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 às dez melhores prestações dos outros países. Esta é a razão pela qual o *ranking* da tabela 1 não inclui vencedores anteriores a 1975.

Só a título de curiosidade, em 1974 os ABBA venceram pela Suécia, obtendo 24 vo-

Tabela 2.

Sistema 2009			Sistema 2013			Sistema 2016		
Ano	País	Perc.	Ano	País	Perc.	Ano	País	Perc.
2017	Por.	83,94	2017	Por.	84,76	2017	Por.	77,03
2009	Nor.	78,66	2105	Sué.	77,99	2009	Nor.	70,12
2015	Sué.	78,42	2014	Áus.	67,13	2015	Sué.	68,59
2012	Sué.	75,61	2013	Din.	61,62	2012	Sué.	64,94
2014	Áus.	68,52	2016	Ucr.	56,71	2014	Áus.	62,38

tos de um total de 17 participantes. Na altura, cada país tinha um júri composto por dez membros e cada um atribuía um ponto a uma canção. Teoricamente, o vencedor poderia obter um máximo de 160 pontos, só que isso implicaria que o conjunto de todos os outros países obtivessem apenas os dez votos atribuídos pelo país vencedor. Não admira então que a percentagem obtida pela Suécia, 24/160=15%, seja de uma ordem de grandeza incomparável com as constantes no ranking. É, assim, extremamente complicado estabelecer uma comparação entre este sistema de voto e o de 12 pontos, pelo que nem tentaremos fazê-lo.

A partir de 1975, o sistema de votação manteve-se essencialmente igual até 1996, à parte de um ajuste no critério de desempate em 1989. Em 1997, é introduzido pela primeira vez o televoto, o qual foi usado por cinco dos 17 participantes da altura em vez dum júri. No ano seguinte, o televoto passou a ser a regra e só em casos excecionais era admitida a sua não utilização. Assim foi até 2008, com uma exceção entre 2001 e 2002, em que os países poderiam optar entre televoto ou uma combinação de 50% júri e 50% televoto.

Em 2009, houve um regresso ao voto determinado pelo júri e foi implementado pela primeira vez um sistema que combina a votação de júri e televoto de forma generalizada. Esta combinação teve até agora as três formas seguintes de ser obtida:

▶2009: Cada país atribuía uma pontuação de júri e televoto no sistema de 12 pontos, as quais eram somadas e novamente convertidas no sistema de 12 pontos. Em caso de empate, o televoto tomava precedência;

▶2013: Cada país estabelecia uma ordenação de todas as canções por um júri e por televoto. Era tomada a média das duas ordenações e feita a conversão no sistema de 12 pontos. Em caso de empate, o televoto tomava precedência;

▶2016: Cada país atribui uma pontuação de júri e uma de televoto, independentes, no sistema de 12 pontos.

Para uma explicação detalhada dos diferentes sistemas de votação, consultar as páginas indicadas[3,4].

A partir das votações detalhadas disponíveis publicamente, é possível fazer a conversão das votações entre estes três sistemas de combinação de votos. A única conversão que não é possível é a do sistema de 2009 para o de 2013, devido ao facto de não terem sido divulgadas listas ordenadas completas relativas às classificações do júri e do televoto. Além disso, em 2013 também não foram comunicadas ao público essas ordenações. Tendo isso em conta, apresentamos na tabela 2 o *top* 5 das canções vencedoras entre 2009 e 2017 para cada um destes três sistemas em termos de percentagem obtida relativa ao máximo possível, ressalvando as exceções mencionadas.

Note-se que as ordenações do *top* 5 nos sistemas de 2009 e 2016 coincidem e que relativamente ao sistema de 2013 estão presentes os únicos cinco anos comparáveis. Em todos estes sistemas é notório o facto de a votação de Portugal em 2017 estar destacadamente à frente dos outros vencedores. Por aqui já se percebe melhor o quão distorcido está o *ranking* da tabela 1, onde Portugal em 2017 surgia atrás da Noruega em 2009 e da Suécia em 2015.

Continuando o exercício de tentar comparar o comparável, apresentamos na tabela 3 o *top* 5 obtido nos sistemas de júri (1975) e de televoto (1998).

De modo a elaborar estas duas últimas ordenações, existem algumas exceções que foram tidas em conta e que importa assinalar.

Como primeira nota, a votação da Dinamarca em 2013 foi excluída devido à ausência de informação detalhada.

---

[1] *http://www.eurovisioon.ee/eng/winning_percentage.php*

[2] *http://eurovisionworld.com/?esc=old-voting-system-australia-woul -have-won--eurovision-2016*

[3] *http://eurovisionworld.com/?esc=voting-systems-in-eurovision-history*

[4] *http://en.wikipedia.org/wiki/Voting_at_the_Eurovision_Song_Contest*

Tabela 3.

Júri			Televoto		
Ano	País	Perc.	Ano	País	Perc.
1976	R.U.	80,39	2017	Por.	77,44
2015	Sué.	79,50	2009	Nor.	76,83
1982	Ale.	78,92	2012	Sué.	75,43
1994	Irl.	78,47	2001	Est.	75,00
2017	Por.	77,64	2014	Áus.	72,92

Relativamente ao voto do júri, não foram considerados os anos entre 1998 e 2008 por a votação ter sido essencialmente estabelecida por televoto. Além disso, foram descartadas das votações atribuídas por alguns países que se conhece publicamente terem sido feitas por meio de televoto. Nomeadamente, em 1997 foram apenas consideradas as 13 votações que o Reino Unido recebeu do júri (daí a diferença relativamente ao *ranking* da tabela 1) e em 2015 foram desconsideradas duas votações que a Suécia recebeu.

Quanto ao *top* 5 do sistema de televoto, consideram-se os anos entre 1998 e 2017 com a referida exceção de 2013. Foi observada a regra dominante nos anos em que o sistema esteve em vigor, de que na ausência do televoto poderia ser usado o voto do júri em substituição. Isto justifica que tenha sido incluída a Estónia em 2001, apesar de o sistema ser ligeiramente diferente. Por outro lado, não foi incluída a votação do Reino Unido em 1997 por, em rigor, só ter recebido quatro pontuações em sistema de televoto. Como última nota, refira-se também o ter sido assumido que Portugal em 2017 obtém 12 pontos de São Marino, apesar de nos resultados oficiais aparecerem sete pontos. A razão para isso deve-se ao facto de haver uma nova regra implementada em 2016 de que na ausência de um resultado de televoto de um dado país, ele é substituído por uma ponderação de resultados de televoto de um conjunto de outros países previamente determinados. Dado que São Marino não tem uma rede telefónica independente de Itália, não é tecnicamente possível haver uma votação do público. Ao longo do tempo em que o sistema de votação por televoto era aplicado, num caso destes era simplesmente tida em conta a votação do júri, o que aqui foi feito.

Na página da Eurovisionworld encontram-se todas as votações realizadas desde o início do Festival da Eurovisão[5]. A página oficial do Festival também tem bastante informação, ainda que por vezes não tão organizada[6].

Em jeito de conclusão, a partir da análise efetuada vemos vários obstáculos para que seja feita uma comparação justa entre canções. Tomando como exemplo o caso de 2016, a Ucrânia venceu apesar de não ter sido a mais votada nem pelo júri nem pelo público. A Rússia ganhou o televoto e a Austrália o voto do júri. Mesmo com a combinação dos dois votos, a Austrália ganharia nos sistemas de 2009 e 2013.

Quanto à canção "Amar pelos Dois", ela foi uma vencedora unânime. Pode não ter tido a melhor votação de sempre do júri, mas é certamente a que melhor combina as preferências do júri e do público. É caso para dizer que foi, de facto, amada pelos dois.

[5] *http://eurovisionworld.com*

[6] *http://eurovision.tv/history/full-split-results*

Coleção de selos dos CTT
"Vultos da História e da Cultura"

LEMBRANÇAS DE LUÍS DE ALBUQUERQUE

Natália Bebiano
Universidade de Coimbra
bebiano@mat.uc.pt

Conversa sobre Luís de Albuquerque com Onésimo Teotónio de Almeida, conduzida por Natália Bebiano.

Onésimo Teotónio de Almeida é Professor Catedrático de Estudos Portugueses e Brasileiros na Brown University, Providence, EUA. Tem obra relevante como escritor, filósofo e académico e é figura incontornável da cultura portuguesa.

O impacto do papel de Portugal nesse processo da revolução científica é ainda hoje complicado de discernir. Não tenho dúvidas de que se desenvolveu uma mentalidade empírica, e digamos mesmo científica, em Portugal, entre um punhado de cérebros que geriam os conhecimentos científicos e supervisionavam a construção naval e a criação de instrumentos cada vez mais adequados às necessidades manifestadas pelos marinheiros nas suas viagens.

Privou com Luís de Albuquerque? Onde e quando?

Conheci o Professor Luís de Albuquerque através da bióloga Maria de Sousa. Num colóquio na Universidade da Flórida em Gainsville, em 1980, eu tinha apresentado uma comunicação sobre a ciência em Portugal no tempo dos Descobrimentos, e tinha dado uma cópia a Maria de Sousa. Ela falou desse texto a Luís de Albuquerque, que o leu e subsequentemente me convidou a apresentá-lo no congresso sobre a ciência em Portugal por ele organizado na Academia das Ciências, em 1985. Esse congresso teve duas partes. A primeira cobriu os séculos XVI a XIX. A segunda realizou-se em 1989 e cobriu o século XX. Participei também nesta última. As atas foram publicadas pela Academia das Ciências em dois volumes: História e Desenvolvimento da Ciência em Portugal (Sécs. XVI-XIX), em 1987, e (Séc. XX), em 1992.

Nesses anos, encontrámo-nos várias vezes. O Prof. Albuquerque era de uma extraordinária simpatia e insistia sempre comigo para que o procurasse aquando das minhas passagens por Lisboa. Eu ia ter com ele à Academia e íamos almoçar a um modestíssimo restaurante, onde, por sinal, se comia muito bem. Lembro-me ainda do preço por refeição: 15 escudos.

Luís de Albuquerque pelava-se por uma boa piada e eu levava-lhe muitas dos EUA. Ele apreciava deveras a novidade desse humor. Gostava particularmente de anedotas e piadas que tivessem a ver com as ciências e a matemática. Lembro-me de três que lhe contei em momentos diferentes, das descontraídas gargalhadas que lhe provocaram, e de, tempos depois, ele me dizer que as usava quando tinha de fazer palestras aqui e ali.

A de que ele mais gostava era uma que corria na altura em que tinha havido vários incidentes de bombas em aviões (e esta tenho a certeza de lhe ter enviado dos EUA num postal ilustrado, o *e-mail* desse tempo):

Um homem muito receoso de andar de avião por causa dessa epidemia das bombas, foi ter com um especialista em estatística e perguntou:

— Qual é hoje a probabilidade de um avião voar com uma bomba lá dentro?

— Não é muito elevada, mas está longe de ser despicienda.

— E qual é a probabilidade de irem duas bombas num avião?

— Ah, bom. Aí é mínima. Tende para zero.

Dali por diante, o homem passou a viajar sempre com uma bomba na mala.

Outra que lhe contei, e ele repetia:

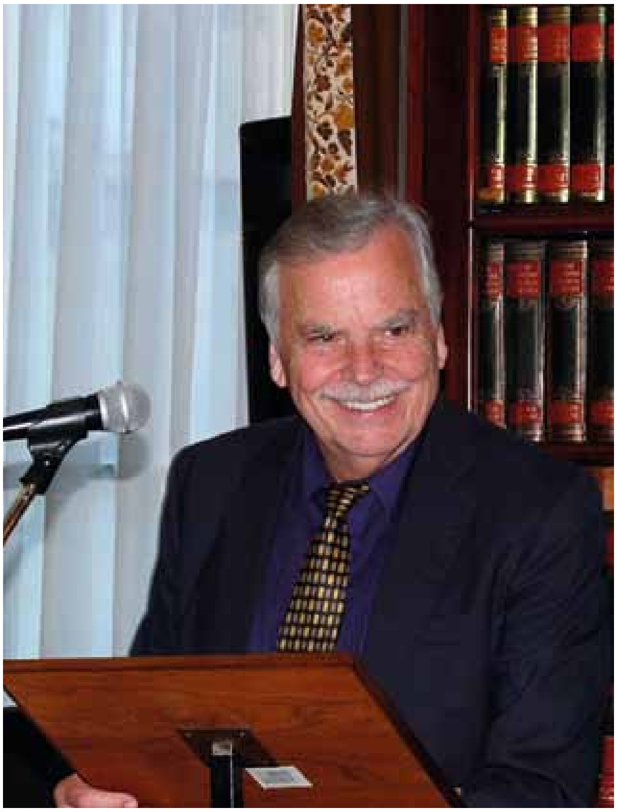
Um homem leu a seguinte notícia: Estudos recentes demonstram que 80% dos acidentes ocorrem num raio de 20 km de sua casa.

O homem não hesitou. Mudou-se de imediato para uma cidade que ficava a 100 km.

Só mais esta que o fez rir imenso e que ele também gostava de recontar:

Um matemático divorciado e com um filho à sua conta foi consultar um psicólogo pois estava convencido de a criança ser autista. O psicólogo quis fazer testes e achou o garoto normalíssimo. Ao reunir-se de novo com o pai para lhe transmitir os resultados, o matemático insistiu na incapacidade de conseguir fazer o filho falar.

O psicólogo perguntou-lhe então se ele, por exemplo, lhe contava histórias ao deitar. O matemático admitiu que nunca o fizera. Era um homem de números e não de palavras. O psicólogo convenceu-o a experimentar, mas ele reagiu: "Não sei estórias, muito menos de crianças".



Onésimo Teotónio de Almeida

O psicólogo admoestou-o. Que isso não era razão. Ele poderia muito bem comprar livros e decorar umas quantas.

O matemático aceitou experimentar. Adquiriu livros e, certa manhã, ao deixar o filho na escola, prometeu que, à noite ao deitar, lhe contaria estórias.

Dito e feito. Em casa à noite, o miúdo correu para a cama e esperou pelo pai. Quando ele chegou, começou então a primeira estória:

- Era uma vez três porquinhos. Vamos chamar-lhes P1, P2 e P3…

Havia muitas estórias com que nos divertíamos, por causa de uma outra, essa autêntica, a da Pedra de Dighton.

Quer contar algumas?

É um caso que merecia ser contado, mas ocuparia muito espaço. Em tempos, estive para escrever um livro sobre ele. É por causa da existência, num rio em Massachusetts, de uma famosa pedra onde há inscrições nas quais há quem veja provas da chegada dos portugueses, antes de Colombo, ao continente americano. Um já falecido médico português emigrado para os EUA, Manuel Luciano da Silva, tornou-se fanático defensor dessa tese. Luís de Albuquerque opôs-se-lhe e M. L. da Silva atirou-se ferozmente a ele, como aliás fez a mim. Mas L. de Albuquerque era o Presidente da Comissão Científica da Comissão Nacional para as Comemorações dos Descobrimentos (CNPCD) e conversámos várias vezes sobre o assunto, porque o médico queria erguer um monumento a Miguel Côrte-Real, o suposto descobridor da América, e L. A. embargou-o, já que era a CNPCD que iria financiá-lo. Acabou-se por, numa situação de compromisso, se optar por um monumento abstrato aos navegadores portugueses, que foi depois inaugurado em Newport, Rhode Island. O médico-historiador (seria melhor dizer "estoriador") ficou furioso e não perdoou nem a Luís de Albuquerque nem a mim. Após a morte de L. A., ele publicou um ataque verrinoso, chamando-lhe ladrão e declarando-o no Inferno. Não é necessário ser-se pessoa de muito bom senso para se ler aquilo e pasmar. A carta está publicada no *Portuguese Times*, de New Bedford, Massachusetts. O diretor telefonou-me a perguntar se eu achava correto publicá-la. Respondi-lhe que, se ele o não fizesse, o estoriador iria acusá-lo de censura. Se a publicasse, quem ficaria mal seria o próprio autor da carta. E se Luís de Albuquerque a lesse, ter-se-ia divertido à grande, pois tinha calibre e humor para reagir desse modo à tolice exacerbada.

Passando a outro assunto: que influência tivemos nós, portugueses, na gestação da revolução científica que se desenvolveria subsequentemente às Descobertas?

O impacto do papel de Portugal nesse processo da revolução científica é ainda hoje complicado de discernir. Não tenho dúvidas de que se desenvolveu uma mentalidade empírica, e digamos mesmo científica, em Portugal, entre um punhado de cérebros que geriam os conhecimentos científicos e supervisionavam a construção naval e a criação de instrumentos cada vez mais adequados às necessidades manifestadas pelos marinheiros nas suas viagens. Essa mentalidade surgiu e ganhou terreno num pequeno mas importante núcleo de homens ligados às viagens transatlânticas. Temos dados, embora insuficientes, sobre muito do impacto no desenvolvimento da mentalidade científica que conduziu à primeira revolução científica. É preciso aprofundarmos o que sabemos sobre a transmissão desses conhecimentos e avanços ocorridos em Portugal. Aos poucos, isso tem vindo a acontecer, no entanto é importante obter mais dados concretos.

Em que medida o nosso papel, enquanto motores de conhecimento novo, é reconhecido internacionalmente? Ou a literatura científica, de certo modo, ignora-nos?

Quase ninguém sabe dele. Nos últimos tempos têm surgido algumas vozes a chamarem a atenção para o que ocorreu em Portugal nesse domínio da ciência mas, excetuados uns poucos casos, o desconhecimento é quase total. Lembro nomes como Reyer Hooykaas e W. G. L. Randles, Ursula Lamb, Patricia Seed, Wilcomb Washburn, quase todos falecidos. Mas as grandes narrativas da história da ciência não mencionam o contributo português. Continuam a surgir livros sobre os primórdios da ciência moderna que não refletem a menor consciência do que se passou em Portugal nem do carácter cientificamente inovador que constitui a nossa expansão transoceânica. Vou lendo e anotando falhas. Precisavam de umas instruçõezinhas que até poderiam ser dadas por alunos meus do primeiro ano que leram em tradução autores portugueses do século XVI no contexto europeu da época e ficaram bastante impressionados.

Luís de Albuquerque é um vulto maior da ciência náutica dos sécs. XV e XVI? Em que é que foi realmente inovador?

Sim, sem dúvida. Foi inovador porque chamou a atenção para o facto de ser impossível um empreendimento como o das viagens portuguesas ter ocorrido sem haver um núcleo de cérebros com preocupações científicas a orquestrarem-no. Luís de Albuquerque tinha um verdadeiro espírito científico e cedo começou a interessar-se pela história das matemáticas em Portugal. Pôs-se a ler os documentos portugueses do tempo dos Descobrimentos e apercebeu-se da sua enorme riqueza, bem como da inovação que eles constituíram ao tempo do seu aparecimento. Os historiadores portugueses seus contemporâneos não tinham preparação na área das ciências, daí negligenciarem a dimensão científica e matemática dos Descobrimentos e se interessarem mais pela sua dimensão político-económica. A exceção terá sido J. S. Silva Dias, que em *A Política Cultural da Época de D. João III* deu muita atenção ao surgimento da nova mentalidade científica.

A divulgação da sua obra nesta área, por enquanto só publicada em português, contribuiria para o firmar mais na cena internacional? Ou até para eventualmente modificar a historiografia tradicional que tão pouca importância nos concede?

Estou convencido de que sim. A sua obra é vasta e está muito dispersa. Claro que alguma é de mera divulgação, mas há uma quantidade substancial que merecia ser recolhida e republicada. Francisco Contente Domingues, que foi seu discípulo, fez uma recolha da bibliografia no livro *Luís de Albuquerque Historiador e Matemático* (1998), e ela é extensíssima. Esse livro é hoje uma raridade. Deveria ser reeditado e divulgado em profusão.

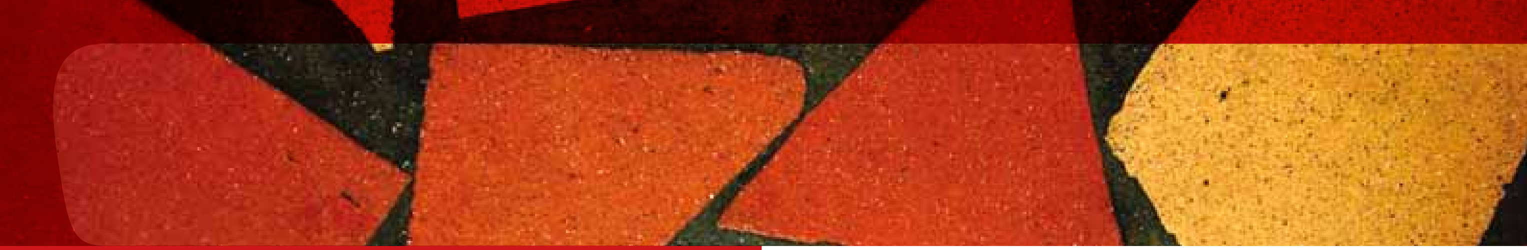
Dos seus escritos em português, recomendaria a tradução de algum como imprescindível?

Ter-se-ia de fazer uma seleção criteriosa, que incluiria sem dúvida o livro *Introdução à História dos Descobrimentos Portugueses*. Mas há muito mais. Alguns estudos foram já publicados em inglês, todavia editados apenas em Portugal e, por isso, com circulação restrita. Outros trabalhos são demasiado técnicos para conseguirem a atenção de uma editora estrangeira. Haveria que se pensar esse projeto em termos de uma edição destinada a leitores na área da história da ciência. Creio mesmo que um projecto dessa natureza teria de envolver uma equipa. E não duvido de que não seria difícil encontrar hoje editoras anglo-americanas interessadas. Eu próprio co-dirijo uma série lusófona numa editora inglesa e apostaria na edição de um volume desses. Mas pode-se – e deve-se, acho – ir muito mais longe.

Os autores escrevem segundo o antigo acordo, mas aceitam as linhas editoriais da revista.

SOBRE A AUTORA

Natália Bebiano é Professora Catedrática do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.



CONJUNTOS AGUDOS

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

O problema que trazemos hoje tem uma formulação muito simples em dimensão 2: quantos pontos podemos pôr no plano, por forma a garantir que os segmentos determinados por estes pontos apenas definam ângulos agudos? E no espaço tridimensional?

Há um campo da geometria cujos problemas têm um encanto especial, a geometria combinatória. Isto porque os problemas são, em geral, fáceis de perceber, podendo ser vistos como *puzzles*, mas têm por vezes soluções bastante sofisticadas. Por exemplo, se o leitor tiver moedas no bolso, todas iguais, pode tentar descobrir qual o maior número de moedas que se podem dispor sobre uma mesa (mesmo que nem todas estejam em contacto com a mesa), de modo, a que cada moeda toque em todas as restantes. Ou pensar no mesmo problema para cigarros. Em ambos os casos, a formalização do problema é feita com cilindros (colocando restrições adequadas à razão entre o raio da base e a altura). Com algum esforço, é possível encontrar disposições com cinco moedas e com sete cigarros, mas não é fácil provar que estes são os números máximos para tais arranjos. Menos ainda, classificar todas as soluções. Ambos estes problemas foram divulgados por Martin Gardner, na sua coluna regular do *Scientific American*.

O problema de hoje pode ser motivado pela posição dos vértices de um cubo. Se considerarmos os vários ângulos formados por três destes vértices, verificamos que são sempre retos ou agudos. No entanto, se juntarmos mais um ponto (dentro ou fora do cubo), já não conseguiremos evitar que três pontos formem um ângulo obtuso. Ou seja: conseguimos um conjunto de oito pontos em $\mathbb{R}^3$ que não formam nenhum ângulo obtuso, mas aparentemente já não conseguiremos o mesmo com nove pontos...

Nos anos 50, Erdős generalizou esta conjetura para qualquer dimensão: se tivermos mais de 2^d pontos em $\mathbb{R}^d$, então há três deles que definem um ângulo obtuso. Pensando que o cubo de $\mathbb{R}^d$ tem exatamente 2^d vértices, podemos reformular a conjetura dizendo que o número máximo de pontos de $\mathbb{R}^d$ que não definem nenhum ângulo obtuso é 2^d (em particular, é exponencial em d).

Este resultado foi provado em 1962 por Danzer e Grünbaum, em [1]. O artigo lança então uma nova pergunta: o que é que acontece se quisermos excluir também ângulos retos? Isto é, qual o número máximo de pontos de $\mathbb{R}^d$ com a propriedade de que qualquer ângulo definido por esses pontos seja agudo? Visto que este será o tema do nosso artigo presente, vamos chamar a um conjunto com estas características um conjunto agudo, e denotaremos por $f(d)$ o número máximo de elementos de um conjunto agudo.

Para $d = 2$ é simples de ver que este número máximo é 3, isto é $f(2) = 3$, pois é simples encontrar triângulos só com ângulos agudos. Mas a soma dos ângulos de qualquer quadrilátero convexo é 360º, de modo que os ângulos não podem ser todos agudos (se o quadrilátero definido pelos pontos não for convexo, a justificação é igualmente simples). Para $d = 3$, poderíamos pensar que, tal como no caso $d = 2$, bastaria tirar um vértice ao cubo e rearranjar os restantes, mas na verdade isto não funciona: temos $f(3) = 5$ (o resultado foi conseguido ainda nos anos 60). Provou-se então que $2d-1 \leq f(d)$, e conjeturou-se haveria igualdade, isto é, este seria o valor máximo de elementos de um conjunto agudo. A exclusão de ângulos retos diminuiria o valor de $f(d)$ de exponencial para linear.

No entanto, em 1983, Erdős e Füredi provaram que esta conjetura estava errada, encontrando um conjunto agudo em $\mathbb{R}^d$ com uma cardinalidade exponencial em d, a saber, maior do que $0.5 \cdot 1.15^d$. Para tal, usaram o método probabilístico. A demonstração consistiu em escolher de forma aleatória mas criteriosa um número de vértices do cubo de $\mathbb{R}^d$ superior a $0.5 \cdot 1.15^d$, que se prova formar um conjunto agudo. Para mais detalhes, veja-se [2]. O resultado foi melhorado por Harangi em [3]: $f(d) \geq c \cdot 1.2^d$.

Como se sabe, este método probabilístico (muito usado por Erdős) é muito elegante, mas não é construtivo. Ora, recentemente, houve novidades acerca deste problema: um jovem aluno de secundário, na Rússia, D. Zakharov, forneceu uma maravilhosa demonstração construtiva para conjuntos agudos em $\mathbb{R}^d$. O artigo tem duas páginas, e pode encontrar-se no arXiv (ver [4]). O minorante encontrado neste artigo é $f(d) \geq 2 \cdot 2^{\frac{d}{2}}$, ou seja, $2 \cdot 1.41^d$.

O artigo estabelece a seguinte relação de recorrência:

$$f(d+2) \geq 2f(d), \text{ para } d \geq 4. \tag{1}$$

Daqui é simples concluir a minoração indicada, sabendo que $f(4) \geq 8 = 2 \cdot 2^2$ e $f(5) \geq 12 > 2 \cdot 2^{2.5}$.

Para estabelecer a relação (1), toma-se um conjunto agudo $X \subset \mathbb{R}^d$, com $f(d)$ pontos, e consideram-se os produtos internos dos vetores definidos pelos pontos de X. Com isso constrói-se um conjunto agudo em $\mathbb{R}^{d+2}$ com $2f(d)$ pontos.

Mais detalhadamente, se s for o mínimo desses produtos internos, temos $s > 0$ por o conjunto ser agudo. Toma-se, então, $r < \sqrt{s}/2$ e, para cada ponto $x \in A$, define-se um ponto $\phi(x)$ na circunferência de centro 0 e raio r em $\mathbb{R}^2$, com a única restrição de todos estes pontos $\pm\phi(x)$ na circunferência serem distintos. Seja então

$$Y = \{(x, \pm\phi(x)) : x \in X\}.$$

Prova-se, então, que este é um conjunto agudo em $\mathbb{R}^{d+2}$, com $2f(d)$ pontos.

Esta história do problema é muito encorajadora: não só o primeiro minorante, obtido não construtivamente, foi descrito por um processo muito elegante, como esta construção final se revelou inesperadamente simples, acessível até a um aluno de primeiro ano de um curso de matemática. Terminamos relembrando uma afirmação de Hardy: "There is no permanent place in the world for ugly mathematics".

REFERÊNCIAS

[1] L. Danzer, B. Grünbaum, "Uber zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V.L. Klee", *Math. Zeitschrift* 79 (1962), 95-99.

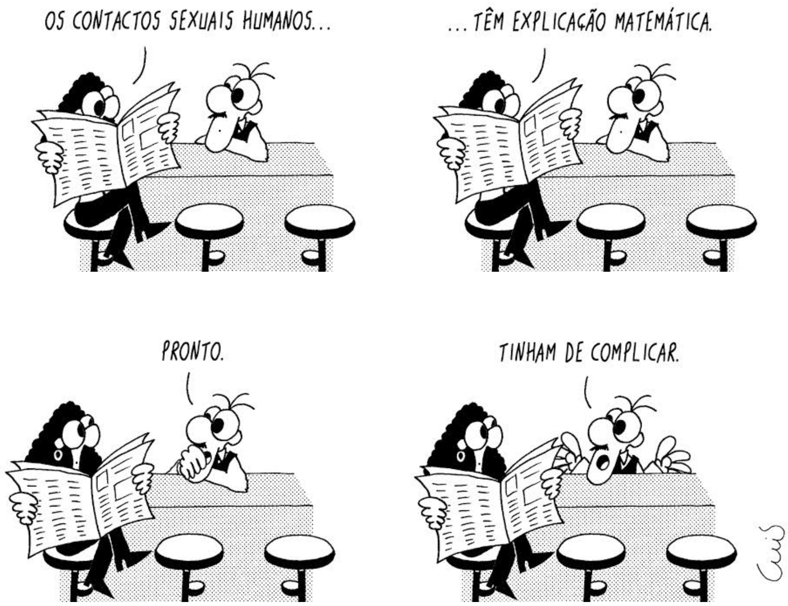
[2] P. Erdős, Z. Füredi, "The greatest angle among n points in the d-dimensional Euclidean space", *Ann. Discrete Math.* 17 (1983), 275-283.

[3] V. Harangi, "Acute sets in Euclidean spaces", *SIAM J. Discrete Math.*, 25(3), 1212-1229.

[4] D. Zakharov, *Acute sets*, arXiv:1705.01171v1.

BARTOON

Luis Afonso



Publicado originalmente no jornal Público, em 15/06/2017. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:
Ana Cristina Moreira Freitas Universidade do Porto
Daniel Pinto Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **Humberto Bortolossi** Universidade Federal Fluminense, Brasil • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Peregrino Costa** Universidade de S. Tomé e Príncipe, São Tomé e Príncipe • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTES EDITORIAIS:
Ana Isabel Figueiredo SPM • **Sílvia Dias** SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
Fid'algo – Print Graphic Design

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Sílvia Dias SPM

PROPRIEDADE:
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

B A

COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos.
Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS 2017:

Sócio Efetivo: **40 euros**

Sócio Estudante: **20 euros**
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante
comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais
Escolar: **80 euros**
Académico: **400 euros**
Corporativo: **600 euros**

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785
E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt

Paula Amaral
Universidade Nova de Lisboa
pt-maths-in@spm.pt

O ADMIRÁVEL MUNDO NOVO DO BIG DATA

"Big Data research is bound to become more widespread, and this will require more awareness on the part of data scientists, policymakers and a wider public about its contexts and often unintended consequences."
Ralph Schroeder

O parágrafo em destaque neste artigo lança um repto interessante que vai exigir uma reflexão profunda por parte dos cientistas na atual revolução digital, no admirável mundo novo do Big Data. É em torno de um problema muito mediático, o da análise de dados das redes sociais, que iremos focar-nos neste artigo, procurando resumir algumas das ideias apresentadas por Stefano Iacus, professor de Estatística e diretor do Laboratório de "Data Science", da Universidade de Milão, na conferência de apresentação da PT-MATHS-IN, que decorreu no ISEP – Porto, no dia 2 de junho. Aliando à sua atividade científica uma experiência empresarial, como cofundador da Spin-off, "Voices of the Blog", este orador apresentou parte do trabalho desenvolvido nos últimos anos sobre o tema da análise de textos das redes sociais para a previsão de resultados eleitorais. O parágrafo introdutório da página do "Voices of the Blog" (*http://www.voices-int.com*) é muito sintomático daquilo que o Big Data representa nas ciências sociais: "Quando milhões de pessoas se tornam utilizadores de plataformas da web e os seus debates e afirmações são transformados em dados, integrá-los e interpretá-los é o desafio – Big Data – que o mundo enfrenta hoje na política, na economia e na sociedade." Este é também o objeto de estudo de uma área que é designada por "Sentiment Analysis", também referida por alguns autores como "Opinion Mining" e "Emotion AI". No que se segue, adotaremos a designação de Análise de Sentimento e Opinião (ASO).

A ANÁLISE DE SENTIMENTO E OPINIÃO

A ASO consiste na análise automática de textos para determinar a polaridades das opiniões de uma determinada população de utilizadores, relativamente a um determinado assunto. São exemplo as intenções de voto, a satisfação relativa a produtos comerciais ou o sentimento associado a uma questão moral ou ética. Os textos podem ser obtidos, por exemplo, nas redes sociais como o Twitter, o Instagram e o Facebook. A massificação do uso da Internet e, por consequência, das redes sociais, disponibilizou um volume de informação impensável há umas décadas. No sítio "Internet live stats" (*http://www.internetlivestats.com*) podemos obter uma ideia concreta do volume de utilização da Internet atualizada em tempo real, como a figura 1 sugere.

Este volume de informação representa um manan-

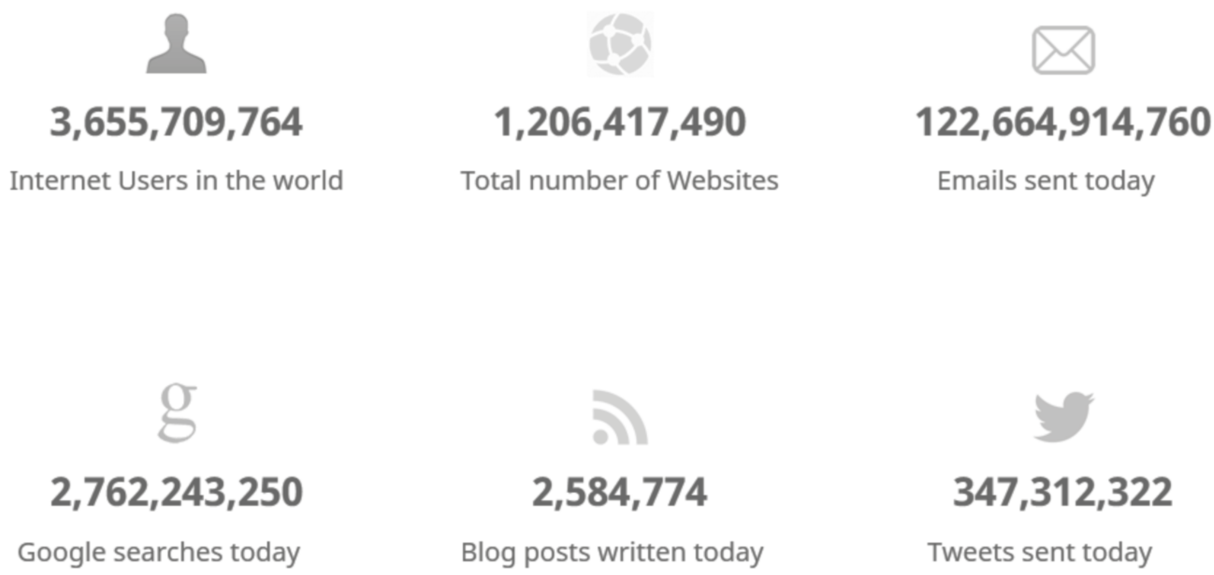


Figura 1. Cenário relativo à utilização da Internet no dia 12 de junho às 12h.

cial de oportunidades a serem exploradas em variados domínios da ciência, da economia, da sociedade, e da política, entre outros. Para empresas e governos, o conhecimento atual (*Nowcasting*) das opiniões dos clientes/cidadãos permite a tomada de decisões eficazes de acordo com aquilo que são os seus objetivos. A ASO constitui um recurso alternativo às sondagens ou aos dispendiosos e morosos sensos. O papel da matemática, mais concretamente da estatística, a par da inteligência artificial, assume destaque neste domínio da gestão da informação.

A ASO tem por base, tal como foi referido, a análise de um conjunto de N textos, $T = T_1, T_2, \ldots, T_N$ e nesses textos são conferidas as ocorrências de L expressões (*stems*), de um corpo de palavras ou sequência de palavras, $S = s_1, s_2, \ldots., s_L$, consideradas relevantes na identificação das possíveis polaridades das opiniões. Essa escolha é por si só complexa e não prescinde de um envolvimento humano direto. Esses termos devem permitir identificar a polaridade do texto (a favor ou contra) ou a sua classificação num conjunto mais alargado de M categorias ou classes, $\mathcal{D} = D_0, D_1, \ldots, D_M$, por exemplo: a favor, indeciso, neutro ou contra. Uma categoria adicional deve ser sempre considerada para cobrir as situações em que não é possível classificar a polaridade do texto. Essa categoria (D_0) é considerada ruído e surge, por exemplo, quando se trata de um texto incompleto, ou quando a opinião expressa é irrelevante ou se encontra fora do contexto. Acontece precisamente que no rastreio de textos de redes sociais esta característica é a predominante.

Depois de definido este corpo de expressões, e com base no mesmo, pretende-se classificar o maior número possível de textos de acordo com a polaridade/sentimento que expressam. Esta tarefa só poderá, como é óbvio, ser realizada por um classificador automático. Um exemplo muito simples e genérico de um classificador, no caso de duas classes D_1 e D_2 linearmente separáveis, consiste na determinação de um hiperplano $g(x) = w^T x + b$, tal que

$$\begin{cases} g(x) > 0, \, x \in D_1 \\ g(x) < 0, \, x \in D_2 \end{cases},$$

onde x é um vetor que caracteriza um determinado objeto. No caso em que os objetos são textos, a cada texto j, $j = 1, \ldots, N$, encontra-se associado um vetor de características (*features*) $x^j \in 0, 1^L$, tal que:

$$x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se o texto } j \text{ contiver o termo } s_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad i = 1, \ldots, L.$$

Deste modo, o corpo dos textos é mapeado numa matriz 0/1 de dimensão NxL.

Como não é possível neste artigo elaborar em detalhe a construção do classificador, refira-se apenas que, no caso presente, um pequeno subconjunto dos N textos, selecionado aleatoriamente, denominado por conjunto de treino, é analisado e classificado (com supervisão humana) de acordo com a sua categoria $D_i \in \mathcal{D}$ (entre as M consideradas). Com esses textos previamente classificados, é desenvolvido um modelo de classificação automática que será depois testado com outro subconjunto de textos, denominado conjunto de teste. Esse classificador poderá ser desenvolvido utilizando redes neuronais, SVM (*support vetor machine*) ou inferência Bayseana e, uma vez adotado, servirá para classificar automaticamente milhões de outros textos.

Na prática, M é geralmente menor do que 10, correspondendo às categorias/classes distintas de opiniões, L (dimensão do corpo de palavras) é da ordem das centenas, enquanto N pode corresponder a milhões de textos. Como tal, a dimensão do espaço dos vetores das características é da ordem $K = 2^L$, pelo que a primeira simplificação consiste em considerar apenas um subconjunto $\underline{S}$ de S dos vetores efetivamente observados no conjunto de treino, permitindo assim uma redução considerável para $\underline{K} = \#\underline{S}$.

O objetivo final da análise consiste em estimar a distribuição de probabilidade das categorias de opiniões/sentimentos, $P(D)$, $D \in \mathcal{D}$, a partir da distribuição empírica das opiniões/sentimentos dos N textos. Matricialmente,

$$P(D) = P(D \mid \underline{S})\, P(\underline{S}) \,, \tag{1}$$

onde $P(S)$ representa a distribuição dos vetores de características em S. No entanto esta metodologia tem, na opinião de Stefano Iacus, falhas que explicam alguns insucessos em previsões baseadas na análise de textos das redes sociais.

PORQUE FALHA A APREDIZAGEM AUTOMÁTICA NAS REDES SOCIAIS?

Relativamente à equação (1), o facto de o conjunto dos textos de treino ser muito menor do que o total dos N textos, de as categorias D_i para $i \neq 0$, serem expressas para um pequeno subconjunto de vetores S_j de S e de D_0 ser a categoria mais frequente, tem como consequência que as probabilidade condicionadas em (1) assumem valores muito próximos de zero e, pelo contrário, a categoria D_0 é sobrestimada quando a agregação do conjunto de treino e teste for efetuado, pois muitas categorias serão enviesadamente estimadas como sendo D_0. Assim, uma alternativa consiste em determinar $P(D)$ através de,

$$P(\underline{S} \mid D)\, P(D) = P(\underline{S}), \tag{2}$$

obtendo-se, pela inversa generalizada de $P(S \mid D)$,

$$P(D) = [P(\underline{S}|D)^T P(\underline{S}|D)]^{-1} P(\underline{S}|D)^T P(\underline{S}), \tag{3}$$

Esta ideia é muito simples do ponto de vista matemático, mas permite desenvolver uma estratégia muito mais eficiente em ASO, como parecem atestar os resultados que foram reportados pelos colaboradores do "Voices of the Blog", tendo obtido diversos sucessos em previsões, por exemplo, de resultados eleitorais (eleições 2016 EUA; ver figura 2) e referendos (BREXIT).

Figura 2. Comparação da previsão do *Voices of the Blog* com outras fontes.

Por fim, corroborando as palavras de G. King, "The best technology is human-empowered and computer-assisted", Stefano Iacus defende que "na maioria, os métodos não supervisionados em ASO falham por serem classificadas como neutrais afirmações que em 90% dos casos não o são, ou ainda como positivas quando são negativas. A dificuldade de uma análise automática lidar com a ironia, o sarcasmo, metáforas, ambiguidades e trocadilhos exige uma técnica que combine a supervisão humana com a automática. Por exemplo, a frase – Este filme tem *boas premissas*, um *bom enredo*, um *elenco excecional*, atores de *primeira classe*, o ator principal *dá o seu melhor*. Ainda assim é *péssimo* – contêm cinco expressões positivas contra uma negativa, levando a que, numa análise automática, pudesse ser classificada erradamente como uma opinião positiva. Assim sendo, enquanto que ontologias e NLP (*Natural Language Processing*) são adequadas em casos nos quais não existe grande subjetividade, como documentos oficiais, decisões de tribunais, e artigos científicos, é de desencorajar a sua aplicação exclusiva na análise de textos de redes sociais.

BIG DATA: MATHEMATICS IN INDUSTRY 4.0

Como foi já mencionado, este artigo pretende resumir algumas das ideias apresentadas por Stefano Iacus, professor de Estatística e diretor do Laboratório de "Data Science", da Universidade de Milão, na conferência "Big Data: Mathematics in Industry 4.0", promovida pela PT-MATHS-IN. O seu conteúdo lança um repto interessante que vai exigir uma reflexão profunda por parte dos cientistas nesta atual revolução digital, no admirável mundo novo do Big Data. Por essa razão a PT-MATHS-IN elegeu este tema para o seu workshop de apresentação, que decorreu no ISEP – Porto, no dia 2 de junho. Estiveram presentes mais de 130 participantes, de cerca de 35 organizações distintas, incluindo um número considerável de estudantes, estando a indústria também fortemente representada. Procurando abordar alguns dos principais aspetos do Big Data, este encontro contou com outros excelentes oradores, especialistas em áreas tão distintas como o atuariado (Gabriel Bernardino), a deteção de fraudes (João Resende) e a recolha de dados (Filipa Calvão). É de assinalar ainda a

Figura 3 – Sessão de abertura do encontro Big Data – Mathematics in Industry 4.0

visão estratégica do papel dos matemáticos na Europa do Big Data deixada pelo presidente da EU-MATHS-IN, Wil Schilders. O encontro conseguiu imprimir nos participantes uma visão muito abrangente não só do que comporta este tema tão vasto do Big Data, mas também da sua influência no modelo de sociedade do futuro.

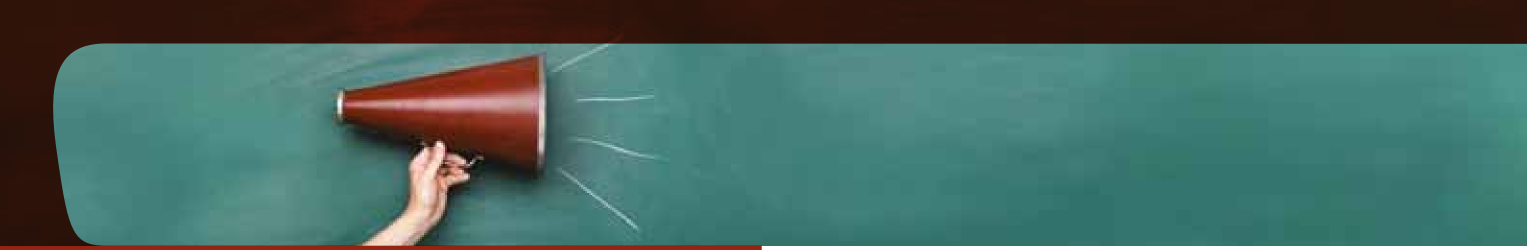
REFERÊNCIAS

[1] A. Ceron, L. Curini, S. M. Iacus, *Politics and Big Data: Nowcasting and Forecasting. Elections with Social Media*, Routeledge. (2016).

[2] D. Hopkins, G. King, "A method of automated nonparametric content analysis for social science", *American J. Pol. Sci.* 54 (1) (2010) 229–247.

[3] S.M. Iacus, "Big data or big fail? the good, the bad and the ugly and the missing role of statistics", *Electronic J. Appl. Stat. Anal*. 5 (11) (2014) 4–11.

[4] S. M. Iacus, A. Ceron, L. Curini, "A fast, scalable and accurate algorithm for sentiment analysis of social media content", *Information Sciences*, 367-368, (2016) 105-124.



Gonçalo Morais
Instituto Superior
Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

ANTÓNIO MEGA FERREIRA e FRANCISO DOMINGUES

As conversas que vamos mantendo neste espaço têm sido sempre na primeira pessoa. Procuramos encontrar quem, na nossa opinião, tenha uma obra notável ou uma visão que marque o nosso tempo, colocamos questões, recebemos respostas. Nessas respostas procuramos as marcas dessa visão ou do notável da obra. Nesta conversa nada será como antes. Não temos um entrevistado, mas dois. Embora falem na primeira pessoa, falam não sobre eles mas sobre alguém que eu nunca conheci em vida. A morte enaltece as virtudes e apaga os defeitos. Sabemos isso. Tanto eu como as pessoas com quem falámos, António Mega Ferreira, que dispensa apresentações, e Francisco Domingues, Professor Catedrático na Faculdade de Letras, especialista em História da Náutica. O tema da nossa conversa foi o tema central deste número da *Gazeta*: Luís Albuquerque. Para o futuro, fica o registo das memórias dos nossos interlocutores.

Encontrei-me com **António Mega Ferreira** na sede da Orquestra Metropolitana de Lisboa, num fugaz momento entre os seus muitos afazeres.

MEGA FERREIRA Tive contacto com o Professor Albuquerque na Comissão dos Descobrimentos. Creio que ele era presidente da Comissão Científica. Antes disso, já tinha obviamente ouvido falar dele, mas não o conhecia pessoalmente. Depois, quando passei para a Comissão de Promoção da Expo'98, o nosso contacto passou a ser mais esporádico. Apesar da curta duração do nosso contacto, este foi sempre muito cordial e amistoso. O Professor Albuquerque tinha algumas características pessoais que me são particularmente simpáticas: era divertido, gostava de viver, bebia bastante, comia muito bem e quando nos sentávamos à mesa para almoçar não falava de trabalho. Isto são vantagens decisivas para o contacto social. Era igualmente uma pessoa muito aberta e generosa.

Apesar de ele não ter pertencido à Comissão Executiva, era uma pessoa muito considerada, em particular pelo Comissário Geral, Vasco Graça Moura, que para com ele tinha uma relação muito amistosa e deferente. Lembro-me muitas vezes desse lado lúdico que ele tinha, algo epicurista talvez, para uma pessoa que já tinha tido todo o género de problemas cardíacos, continuava a usufruir dos prazeres de comer bem e beber bem.

GONÇALO Essa imagem choca com a imagem que nós temos de um Professor Catedrático desse tempo...

MEGA FERREIRA Mas o Professor Albuquerque era um senhor, um senhor no sentido antigo da palavra. Ele tinha uma capacidade notável de gozar consigo mesmo, que é próprio das pessoas superiormente inteligentes. Só quem é muito seguro de si, não só cientificamente mas também socialmente, é que pode dar-se ao luxo de gozar consigo próprio. Foi ele que me contou uma história em que entram ele e o Vitorino Magalhães Godinho. Tendo sido eu secretário de Estado do Professor Magalhães Godinho quando este foi ministro da Educação posso dizer que *se non è vero, è ben trovato.* Estavam então eles os dois num congresso científico (ou qualquer coisa do tipo), o Professor Albuquerque sobe à tribuna e faz a sua apresentação. A mesa estava a ser presidida pelo Professor Magalhães Godinho e ao lado dele era o lugar do Professor Albuquerque. Quando este volta para o seu lugar pergunta ao Professor Magalhães Godinho – "Então, que tal foi?" – ao que o outro replica – "Olhe, não esperava tanto!" O Professor Albuquerque contava isto à gargalhada, o que demonstra a capacidade que ele tinha de autoironia, digamos assim. Se tivesse de resumir, seria: era um homem seríssimo que não se levava demasiado a sério.

GONÇALO Quando li alguns dos textos historiográficos do Professor Albuquerque, um dos pontos que mais me surpreenderam foi perceber que a sua escrita era, de facto, a de um historiador e não a de um matemático que escreve História...

MEGA FERREIRA Claro que sim! E só isso pode explicar o imenso respeito que as pessoas nutriam por ele, por exemplo o Professor Magalhães Godinho. Ele vestia a pele do historiador com a enorme vantagem de ser um homem que tocava diversos instrumentos, tinha a capacidade de estabelecer relações que nem sempre estão ao alcance do historiador puro. E depois tinha esta coisa muito divertida: você estava ali com umas pessoas com um ar pesado, da História, dos Descobrimentos, sorumbáticos, e depois aparecia aquele vulto risonho que dizia umas coisas e o ar ficava leve. Quando era a sério, era mesmo a sério, com muita autoridade, muito respeitado...

GONÇALO Lembra-se de algum desses momentos mais sérios?

MEGA FERREIRA Não quero recordar... por colocar em causa outras pessoas. Digo-lhe apenas que era decisivo e certeiro, mas sempre com elegância. Repare que é das pessoas de quem guardo melhores recordações.

Francisco Domingues recebeu-me em sua casa. Durante a entrevista sentia a necessidade constante de procurar livros que fundamentassem o que dizia. Por vezes, o olhar perdia-se para longe, a voz emocionava-se. Olhava novamente para as estantes, sempre à procura de mais um livro. Não encontrando o que procurava, recompunha a voz e prosseguia.

GONÇALO Como é que chegou a Luís Albuquerque?

FRANCISCO DOMINGUES Bem, eu tenho uma licenciatura em História, que acabei em 1981. Tinha na altura algum interesse por matérias que hoje se chamam História da Ciência. Fui dar aulas para o ISCTE logo a seguir e, nesse ano, o Luís Albuquerque deu um seminário sobre História do Renascimento na Faculdade de Letras. Tudo isto coincidiu com o primeiro ano em que ele deu aulas lá. Ele já tinha dado um seminário sobre a História dos Descobrimentos no curso de mestrado da Universidade Nova durante dois anos. Curiosamente, só no último ano em que ele deu aulas é que voltou para a Universidade de Coimbra, onde lecionou na Faculdade de Letras.

É neste momento então, depois de ter terminado a licenciatura e antes de começar o mestrado, que eu começo a frequentar esse mesmo seminário na Faculdade de Letras da Universidade de Lisboa. Nessa altura, um editor lançou o repto de fazermos um Dicionário da História da Expansão Portuguesa para jovens. Por vários motivos, talvez por ser mais velho do que os meus colegas, eu fiquei uma espécie de braço direito dele. Esse dicionário que era para ser produzido num ano e para ser editado num volume com 100 artigos, demorou 12 anos, foi editado em dois volumes e com um total de 1100 artigos. Acabou por sair em 1994, já depois da morte dele, tendo eu de o acabar sozinho. Isto propiciou que, durante todos estes anos, estivéssemos muito próximos.

Eu dava aulas de História Contemporânea e não tinha muita folga na escolha das matérias que tinha de lecionar. Fui aproveitando a presença do Luís Albuquerque para continuar ligado à História dos Descobrimentos que era, de facto, a área de que eu gostava. A partir de 1983, ele começou a levar-me para os congressos de História da Náutica e foram sempre aparecendo projetos comuns, tendo inclusive editado em conjunto um ou dois livros.

Aquando da morte dele, senti necessidade de, em conjunto com outras pessoas, bem entendido, continuar o legado do Luís Albuquerque numa componente que me parece fundamental, que é a História da Náutica dentro da História das Navegações Portuguesas. Quando refiro História da Náutica, pretendo dizer história da técnica e não da arte ou da ciência, que é claramente o aspecto de maior projeção que os Descobrimentos deixam. Se virmos bem as coisas, até ao aparecimento do GPS, os marinheiros usavam a mesma técnica de navegação desde o tempo do Infante D. Henrique. A grande revolução da técnica é de facto o GPS. De resto, é tudo igual: olhar para as estrelas e, com instrumentos mais ou menos sofisticados, tentarmos perceber a nossa posição. Este, aliás, é um legado reconhecido internacionalmente. Porque temos de ser frios na análise que fazemos destas coisas. Como portugueses, temos uma visão distorcida acerca dos Descobrimentos. Para a maior parte das pessoas, os Descobrimentos resumem-se ao Colombo e o resto é tudo acessório. Chegamos a Badajoz e ninguém sabe quem é o Vasco da Gama.

GONÇALO Ou seja, a obra de Luís Albuquerque é algo que marca internacionalmente...

FRANCISCO DOMINGUES Vamos colocar as coisas de outra forma. Tirando aspectos mais locais da História, como o período do Marquês de Pombal, os únicos historiadores portugueses que têm um reconhecimento internacional são o Armando Cortesão, com o seu trabalho na História da Cartografia Náutica, e o Luís Albuquerque. Julgo que fomos bem-sucedidos na continuação deste legado, visto que, hoje, a História da Náutica tem, em Portugal, uma pujança que não tem em mais sítio nenhum. Na Faculdade de Letras, temos dois doutores em História da Náutica que é algo que eu não conheço em mais lugar nenhum da Europa. São saberes de nicho cuja preservação é essencial e para a qual o Luís Albuquerque teve um contributo fundamental.

Para dar uma ideia. Existe uma sociedade americana de historiadores chamada American Historical Association. É a maior associação de historiadores do mundo, com mais de 4000 associados. Eles, quase todos os anos, elegem um sócio honorário e ao fim de 101 anos de existência tinham elegido 75. O septuagésimo segundo foi ele, que, tirando duas ou três recenssões críticas, nunca escreveu em inglês. Digo muitas vezes aos meus alunos que nunca haverá a possibilidade de um historiador português chegar a este nível.

GONÇALO Aproveitando as palavras de Mega Ferreira...

FRANCISCO DOMINGUES Com quem nós iniciámos a realização do Dicionário dos Descobrimentos...

GONÇALO Classificou Luís Albuquerque como sendo um homem seríssimo, mas que não se levava demasiado a sério...

FRANCISCO DOMINGUES É precisamente isso. Deixe-me procurar um livro... Aqui está, Luís Filipe Thomaz, o homem que sabe mais da expansão portuguesa, sobrinho-neto do Américo Thomaz, uma pessoa com um saber enorme. Fala umas 20 línguas. Ouça o que ele escreve na dedicatória do seu livro *De Ceuta a Timor*:

> "À memória de Luís Mendonça de Albuquerque, que sendo Professor Catedrático não se reputava um deus, e reputando-se ateu foi, talvez sem saber, um exemplo para muitos de veras virtudes cristãs; em cuja morte choramos a perda de um amigo neste mundo, e este mundo a de uma rara abencerragem de espécie quiçá em extinção."

Ouça, até me emociona falar disto, ao mesmo tempo que não quero parecer exagerado. Sabe, o Luís Albuquerque era uma pessoa diferente. Lembro-me, por exemplo, que ele foi chamado à atenção por, em Coimbra, ir comer (quando não ia cozinhar) para as Repúblicas com os alunos. Quando toda a gente ia de fato e gravata para a Faculdade de Letras, ele ia em mangas de camisa, percebe? Ele era completamente diferente daquilo que se encontrava, e que ainda hoje se encontra, no mundo académico. Ao mesmo tempo, ele era uma pessoa capaz de fazer pontes e, apesar de ter sido sempre um homem de esquerda, em vários momentos apadrinhou várias candidaturas de pessoas de direita para cargos na Universidade de Coimbra. Era um homem muito diferente do habitual.

GONÇALO Deixe-me ler uma passagem do livro *Ciência e Experiência nos Descobrimentos Portugueses:*

> "Duarte Pacheco Pereira é, pois, um homem de transição. Mas o pensamento humano estava, como ele revela, em ebulição, e a linha limitadora seria ultrapassada. As obras dos grandes nomes da Antiguidade (Ptolomeu, Plínio, Dioscórides, etc.), iam ser revistas à luz da observação, da prática e da experiência que através das navegações se faziam; mau grado a atitude dos Humanistas, a ciência ia ser construída através desses meios mais férteis para o conhecimento da realidade e não pela repetição de afirmações axiomáticas que nos livros desses sábios se continham."

Esta passagem é apenas uma de muitas passagens que poderia referir. O que nela mais me fascina é a capacidade que Luís Albuquerque tem para perceber a contradição histórica, ou seja, para perceber que, dentro de um determinado momento histórico, a História está a ser escrita nesse preciso momento... E isto parece-me tão difícil...

FRANCISCO DOMINGUES É difícil para todos! Sabe, é possível para uma pessoa começar a ler uns quantos livros de História e tornar-se historiador. Mas existe uma fronteira ténue que é decisiva, essa precisamente que referia, entre ser um colecionador de factos ou pensar que a História é aquilo que eu penso e ser de facto um historiador, que é muito difícil de alcançar. Saber pensar a História é extraordinariamente difícil.

GONÇALO Não lhe parece que para conseguir fazer este percurso, uma pessoa tem necessariamente de ser um marginal dentro desta estrutura?

FRANCISCO DOMINGUES Nunca tinha visto as coisas assim, mas se calhar essa é mesmo a melhor definição. Após a morte de uma pessoa, temos sempre de ter cuidado quando nos referimos a ela. No caso do Luís Albuquerque, não. Ele era mesmo especial. Mesmo nos momentos em que era cortante, era-o a rir, com elegância. Ele era reverenciado. Tenho um exemplo para perceber que não estou a exagerar. Num congresso ao qual fomos, havia um dia que tinha um passeio ao qual não nos apetecia ir. Passei pelo quarto dele, bati à porta e, quando entro, estava um tipo que era catedrático da Sorbonne com um bloco na mão, a ouvi-lo e a tirar notas. Percebe o que quero dizer?

A figura magistral de Luís Albuquerque permanece intocada em todos os que com ele privaram. Deixo-vos com as palavras que, sobre ele, Manuel de Oliveira Pulquério escreveu:

> "A imagem que guardo deste notável professor da Universidade de Coimbra é a de um homem simples, que fez grandes coisas com a naturalidade dos espíritos superiores, que trabalham como se se limitassem a cumprir a simples obrigação de serem grandes."

Nuno Camarneiro
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

VALIDAÇÃO

O que procuramos na ciência e na literatura? O que nos faz admirar Newton e Kafka ao mesmo tempo? Somos bichos complicados, há que o reconhecer.

Já aqui falei das semelhanças entre literatura e ciência, porque há algumas: a criação de um modelo para melhor tratar a realidade, a necessidade de conhecer o "estado da arte" para depois o acrescentar, a tradução de fenómenos sensoriais numa linguagem estruturada (português, inglês, matemática…). Hoje vou falar do que as separa.

Se pensarmos nos grandes cientistas: Newton, Curie, Darwin, Einstein, há algo que têm em comum - propuseram teorias que foram verificadas experimentalmente, que ainda hoje se mantêm em grande medida e que nos ajudaram a conhecer o Universo e a manipulá-lo. Se pensarmos em alguns dos grandes escritores: Homero, Cervantes, Shakespeare, Saramago, há também algo que os une – permitiram-nos ter uma melhor perceção da realidade, pensar sobre ela e desenvolver um espírito crítico.

Então, o que é que separa os cientistas dos escritores? A razão que me parece mais óbvia é o mecanismo de verificação. Enquanto os cientistas estão sujeitos ao escrutínio do método científico, à replicação das experiências por terceiros e às objeções lógico-dedutivas, os escritores vivem num mundo mais volúvel, mais dado a modas e a questões de gosto, mais permeáveis ao mercado e aos argumentos de autoridade (críticos, escritores influentes, etc.). Um químico, um físico, um matemático propõem uma lei, uma regra ou um teorema, e estes serão testados experimentalmente, ou através de simulações, e logo entendidos como válidos ou falsos. Mas o mesmo não se aplica à literatura. Muitos foram aclamados em vida e logo esquecidos, outros seguiram o percurso inverso. Não é possível provar através de um qualquer método que Tolstoy escrevia bem. É o tempo que o decide, é a sua permanência, a relevância dos temas e a consistência das personagens que lhe granjeiam um lugar na galeria dos clássicos.

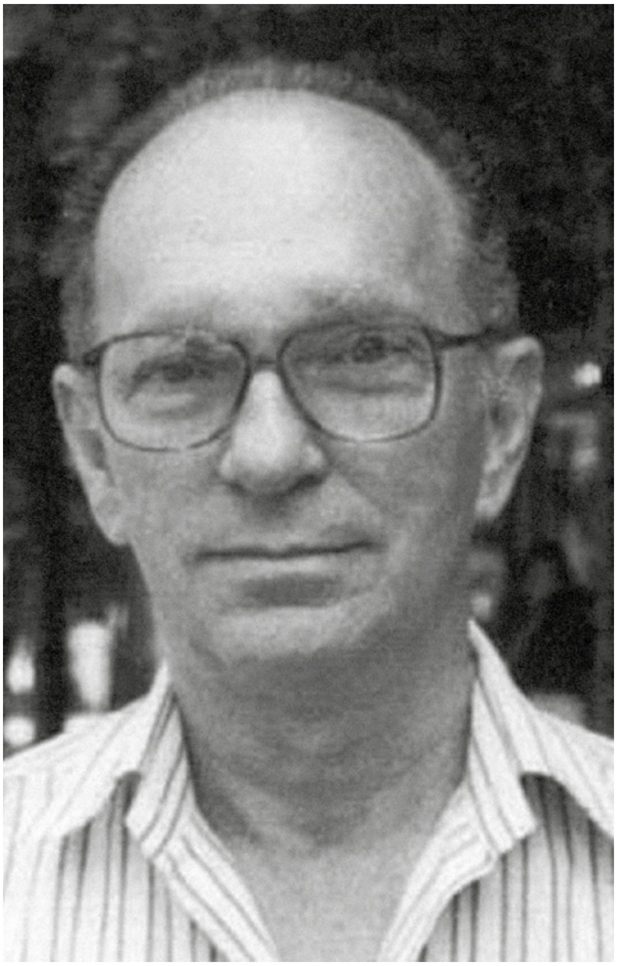
Poderíamos fazer um exercício, trocarmos os métodos de validação e julgarmos os cientistas pelo estilo e pela popularidade e os escritores pelo confronto com a realidade. Algumas teorias científicas ganhariam pela sedução: os quatro elementos, o atomismo de Demócrito, a geração espontânea (ou abiogénese). Outras seriam prontamente erradicadas: a relatividade de Einstein, a teoria quântica, mesmo Darwin, com tanta polémica e desconforto. De igual modo, muitos escritores falhariam o teste da realidade: Jonathan Swift, Kafka, Jorge Luis Borges.

O que procuramos na ciência e na literatura? O que nos faz admirar Newton e Kafka ao mesmo tempo? Somos bichos complicados, há que o reconhecer, e a verdade que encontramos em Newton não se opõe à de Kafka, de algum modo complementa-a, e por isso nos imaginamos transformados num escaravelho e, ainda assim, sujeitos à gravidade. Somos seres científicos e seres literários, albergamos as duas pulsões num mesmo corpo e num mesmo cérebro. Que alguém nos explique isto, pode ser um grande escritor ou um grande cientista.

ELON LAGES LIMA (1929-2017)

Elon Lages Lima, reconhecido matemático brasileiro, faleceu aos 87 anos, no Rio de Janeiro, no passado mês de maio. Com mais de 40 livros editados, foi um dos mais importantes autores de livros de matemática no Brasil. Em Portugal, a Sociedade Portuguesa de *Matemática editou Logaritmos* (2008) e *Matemática e Ensino* (2004), este último em parceria com a Gradiva. Por compreender a importância da divulgação da matemática e da formação de professores, Elon desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento destas áreas, nomeadamente participando no desenho da estrutura dos cursos de licenciatura, bacharelato e pós-graduação da Universidade Federal do Ceará. Concebeu e dirigiu as coleções "Projeto Euclides" e "Coleção Matemática Universitária" e foi o criador, em 1990, do Programa de Formação e Aperfeiçoamento de Professores do Ensino Médio (PAPMEM). Recebeu duas vezes o Prémio Jabuti de Ciências Exatas, da Câmara Brasileira do Livro, foi Membro Titular da Academia Brasileira de Ciências desde 1963, diretor do IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), em três períodos distintos (1969-71, 1979-80 e 1989-93), presidente da Sociedade Brasileira de Matemática (1973-75) e integrou o Conselho Nacional de Educação e o Conselho Superior da Faperj (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro). Recebeu ainda dois títulos de Professor Honoris Causa, um pela Universidade Federal do Ceará e outro pela Universidade Federal de Alagoas, a Ordem do Mérito Científico na Classe Grã-Cruz e o Prémio Anísio Teixeira. No IMPA foi discípulo de Leopoldo Nachbin e de Maurício Peixoto. Era Mestre e Doutor pela Universidade de Chicago, onde se especializou em Topologia Algébrica. Quando regressou ao Brasil, tornou-se pesquisador do IMPA. Com uma bolsa Guggenheim, esteve em Princeton e Columbia e foi influenciado pelo norte-americano Stephen Smale, vencedor da medalha Fields em 1966. Foi mentor de vários jovens matemáticos de grande destaque no Brasil, entre eles o vencedor da Medalha Fields Artur Avila e Carlos Gustavo Moreira, mais conhecido por Gugu (ambos do IMPA).

Elon Lages Lima esteve em Portugal, em 2001, para participar no Encontro Palestras Ano 2000, que teve lugar em Coimbra. Nessa época, deu uma extensa entrevista ao Professor Francisco José Craveiro de Carvalho para a *Gazeta de Matemática* n.º 140 e confessou ter lido os livros de Bento de Jesus Caraça, António Aniceto Monteiro, Ruy Luís Gomes e Alfredo Pereira Gomes. Regressou a Portugal em 2006, onde participou na 6.ª edição do Programa Gulbenkian Novos Talentos em Matemática.



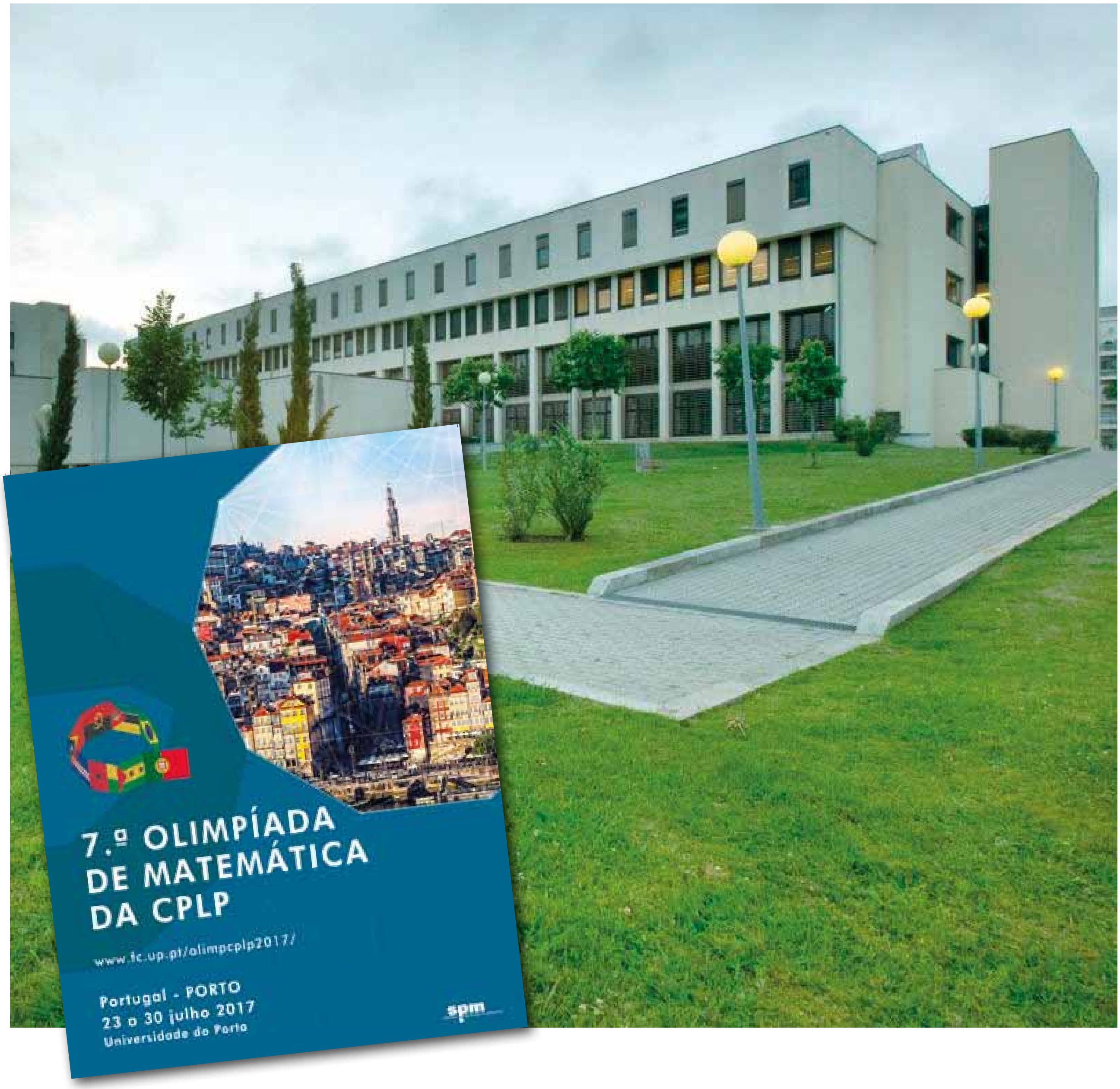
PRÉMIO ABEL 2017 ATRIBUÍDO A **YVES MEYER** POR DESENVOLVIMENTO DA **TEORIA DE WAVELETS**

A Academia das Ciências e Letras Norueguesa atribuiu o Prémio Abel 2017 ao matemático francês Yves Meyer. Na opinião do júri, Yves Meyer "foi o líder visionário no desenvolvimento moderno da Teoria de Wavelets, na interseção da matemática, da tecnologia da informação e da ciência de computação". A análise de wavelets tem sido aplicada numa ampla variedade de áreas, como compressão de dados, redução de ruído, imagens médicas, arquivo, cinema digital, deconvolução das imagens do telescópio espacial Hubble e a recente deteção de ondas gravitacionais LIGO. Yves Meyer, 77 anos, da École Normale Supérieure Paris-Saclay, inspirou uma geração de matemáticos. O seu colaborador na Teoria de Wavelets, Stéphane Mallat, chama-lhe "visionário", e afirma que o seu trabalho não pode ser rotulado de matemática pura ou aplicada, nem ciência da computação, mas simplesmente ser chamado "incrível". O matemático francês sucede ao britânico Andrew J. Wiles, vencedor do Prémio Abel em 2016, depois de já ter sido distinguido com o Prémio Salem, em 1970, e com o Prémio Gauss, em 2010. Esta distinção é atribuída anualmente, desde 2003, e confere um prémio monetário de cerca de 675 mil euros.

INSCRIÇÕES ABERTAS PARA **11.ª ECMTB**

No verão de 2018, a capital portuguesa será palco de um importante evento sobre os mais recentes desenvolvimentos da investigação nos campos da matemática e das ciências da vida e suas interseções. A 11.ª edição da European Conference on Mathematical and Theoretical Biology (ECMTB) terá lugar na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, entre 23 e 27 de julho, e reunirá centenas de participantes da comunidade biomatemática nacional e internacional. As inscrições para a conferência já se encontram abertas em *http://www.ecmtb2018.org*, a página oficial do evento. A lista de conferencistas convidados também já é conhecida: Helen Byrne (University of Oxford), Antonio DeSimone (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati), Eva Kisdi (Helsinki University), Samuel Kou (Harvard University), Mirjam Kretzschmar (University Medical Centre Utrecht), Eva Löcherbac (Université de Cergy-Pontoise), Andrea Pugliese (University of Trento), Eörs Szathmáry (Eötvös Loránd University), Kees Weijer (University of Dundee). A 11.ª ECMTB é organizada pela European Society for Mathematical and Theoretical Biology, pela European Mathematical Society e co-organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática.

ECMTB 2018 LISBON



PORTO RECEBE AS **7.AS OLIMPÍADAS** DE **MATEMÁTICA** DA **CPLP**

Em julho de 2011, Coimbra recebeu a primeira edição das Olimpíadas da CPLP (então Olimpíadas da Lusofonia). Este ano, Portugal volta a ser palco desta competição que reúne participantes da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (CPLP), desta vez na Cidade Invicta. A competição decorrerá de 23 a 30 de julho, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, e terá a mesma estrutura das Olimpíadas Internacionais de Matemática e das Olimpíadas Ibero-Americanas. No dia 24, os participantes frequentarão um curso intensivo de matemática lecionado por professores da Universidade do Porto e da Universidade de Coimbra, e as provas terão lugar nos dias 26 e 27 de julho. O tão esperado momento em que serão conhecidos os resultados acontecerá no dia 29 de julho, na sessão de encerramento. As 7.as OMCPLP são organizadas pela Sociedade Portuguesa de Matemática e pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

EQUIPA PORTUGUESA NO **RIO DE JANEIRO** PARA **OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS**

A 58.ª edição das Olimpíadas Internacionais de Matemática (OIM) já arrancou no Rio de Janeiro. Entre 12 e 23 de julho, centenas de jovens de mais de 100 países diferentes participam numa das maiores competições científicas do mundo. Duarte Nascimento, Henrique Navas, Manuel Cabral, Maria Matilde Silva, Kevin Puci e Pedro Fernandes são os talentos que representam Portugal nesta competição, acompanhados por António Salgueiro (Universidade de Coimbra) e Joana Teles (Universidade de Coimbra/SPM). No mês de setembro, outro grupo partirá para a Argentina, para as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, que se realizam em Puerto Iguazú, Misiones, de 15 a 23 de setembro A participação de Portugal nestas competições é organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática, e a seleção e a preparação dos alunos estão a cargo do Projeto Delfos, do departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. O Ministério da Educação e Ciência, a Ciência Viva, o Novo Banco, a Fundação Calouste Gulbenkian e a Pathena apoiam a realização das Olimpíadas.

LEIRIA FOI PALCO DO **EVENTO** INÉDITO **ESCOLA DE VERÃO SPM & MAT-OESTE 2017**

Nos dias 13, 14 e 15 de julho, a Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria (ESTG – IPLeiria) foi a anfitriã do evento Escola de Verão da SPM & Mat-Oeste 2017, organizado em conjunto pela Sociedade Portuguesa de Matemática e pelo Departamento de Matemática da ESTG – IPLeiria. Sob o tema "Matemática do Mar", cerca de uma centena de participantes explorou e discutiu importantes aspetos da matemática sob a perspetiva do mar. Ao longo dos três dias do evento realizaram-se diversas atividades, tais como conferências plenárias, um curso de formação para professores, minicursos, *workshops*, e mesas redondas, entre outras.

LISBOA RECEBEU **PRESIDENTES** DAS **SOCIEDADES MATEMÁTICAS** DE TODA A **EUROPA**

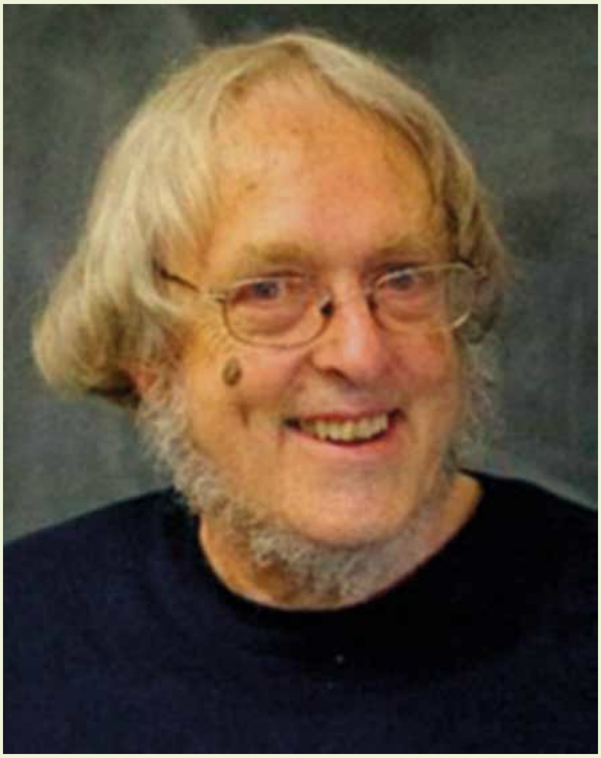
Portugal foi, pela primeira vez, o país anfitrião do Encontro de Presidentes da European Mathematical Society (EMS), um evento que teve lugar na Fundação Calouste Gulbenkian (FCG), em Lisboa, nos dias 1 e 2 de abril. Esta reunião de dois dias contou com a presença de cerca de 60 presidentes de organizações matemáticas europeias, membros da EMS. Na décima edição deste evento, que reuniu dirigentes matemáticos de toda a Europa, estiveram em discussão temas como o impacto das políticas de acesso aberto a trabalhos científicos para a comunidade matemática, bem como as principais preocupações dos matemáticos no contexto do momento político atual. Em destaque esteve também o Ano Internacional da Biomatemática, assinalado em 2018, e que terá como ponto alto a realização, em Lisboa, da 11.ª edição da European Conference on Mathematical and Theoretical Biology (ECMTB). No Encontro de Presidentes da EMS, a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) esteve representada por Jorge Buescu, presidente da Sociedade, que comentou então a propósito desta iniciativa: "A ciência de topo apenas pode fazer-se através do envolvimento ativo na comunidade científica internacional. A organização de eventos como o Presidents' Meeting coloca Portugal no mapa da matemática mundial." Esta iniciativa foi organizada pela EMS e pela SPM, com o apoio da FCG.

ICM 2018: PRÉ-INSCRIÇÕES ABERTAS A PARTIR DE **SETEMBRO**

Reconhecido como o evento mais importante da matemática mundial, o próximo International Congress of Mathematicians (ICM) realizar-se-á entre 1 e 9 de agosto de 2018, no Rio de Janeiro. As pré-inscrições para o evento estarão disponíveis a partir do próximo mês de setembro, em *http://www.icm2018.org/portal/en*. Na página oficial do congresso é também possível consultar a lista de oradores convidados e o programa geral desta iniciativa, que inclui sessões plenárias, palestras, prémios, workshops e atividades de divulgação para a sociedade. O ICM realiza-se de quatro em quatro anos, desde 1897, e terá lugar, pela primeira vez, na América do Sul.

SENIOR WHITEHEAD PRIZE: PETER CAMERON PREMIADO

Peter Cameron (University of St Andrews, Reino Unido) foi distinguido com o Senior Whitehead Prize pela London Mathematical Society (LMS), pelo seu contributo excecional nas áreas da Combinatória e da Teoria de Grupos. O painel da LMS destacou o papel da sua "imaginação inventiva" e do "encorajamento de outros" na promoção da investigação em diversos campos da matemática. Cameron tem desenvolvido alguma da sua investigação em Portugal, nomeadamente no CEMAT – Center for Computational and Stochastic Mathematics, centro de investigação do Instituto Superior Técnico, sendo também Professor Catedrático Convidado da Universidade Aberta. Mantém atualmente uma colaboração com João Araújo, da Universidade Aberta, no âmbito das ligações entre as Teorias de Grupos e de Grafos. O Senior Whitehead Prize foi criado em memória de J. H. C. Whitehead, antigo presidente da LMS. É atribuído em anos ímpares, normalmente a investigadores residentes no Reino Unido.



IV FEIRA DA MATEMÁTICA DIAS **10** E **11 DE NOVEMBRO**

O Museu Nacional de História Natural e da Ciência recebe a IV Feira da Matemática nos dias 10 e 11 de Novembro. Tal como nos anos anteriores, o primeiro dia é exclusivo para as escolas e o segundo está aberto ao público em geral. Serão dois dias repletos de atividades científicas, culturais e educativas dirigidas a todos os públicos. Exposições, sessões práticas, jogos e desafios, demonstrações, Circo Matemático, palestras e concursos são algumas das muitas atividades em que pode participar. Faça a pré-inscrição da sua escola através do e-mail geral@museus.ulisboa.pt e consulte toda a informação em *http://www.museus.ulisboa.pt/pt-pt.*

Fabio Chalub
Vice-Presidente SPM
chalub@fct.unl.pt

MAIORES LIGAÇÕES COM A SOCIEDADE

Uma SPM mais aberta à sociedade. É um compromisso da atual direção visível em várias iniciativas que se realizarão ainda este ano e também no próximo.

Caros amigos, o ano de 2018 foi declarado pela Sociedade Europeia de Matemática (EMS) o "Ano Internacional da Biologia Matemática". Uma série de eventos está planeada, um pouco por todo o continente, mas a cereja no topo do bolo ficou para nós.

Será em Lisboa, nas instalações da Faculdade de Ciências, a 11.ª Conferência Europeia de Biologia Teórica e Matemática, uma organização conjunta da SPM com a EMS e ainda a European Society for Mathematical and Theoretical Biology. Entre os dias 23 e 27 de julho, estarão connosco cerca de 500 cientistas dedicados a temas tão diversos como a modelação do cancro, a prevenção de epidemias, a visualização de imagens médicas e outros assuntos na fronteira do conhecimento, na interface entre a matemática e as ciências da vida, e de utilidade inquestionável.

Como ocorre a cada dois anos, a SPM organizará também em 2018 o seu encontro, desta vez na cidade de Bragança. Esta candidatura nasceu do desejo espontâneo dos nossos colegas bragantinos e será uma grande honra continuar a percorrer o país levando o que há de melhor na matemática portuguesa. Atempadamente todos os sócios da SPM receberão os detalhes, mas podem já começar a preparar as vossas apresentações!

Nem só de congressos se faz a SPM. Continuando com a nossa política editorial de publicar as grandes obras de relevo para os matemáticos, está a sair do prelo, em colaboração com a Porto Editora, a obra de fôlego *Compreender os Números na Matemática Escolar*, do professor da Universidade da Califórnia em Berkeley Hung-Hsi Wu. Esta obra foi inicialmente publicada pela American Mathematical Society e foi traduzida para português pelo professor da Universidade de Lisboa António Bivar.

Como os leitores atentos da *Gazeta* já devem ter notado, a SPM tem dado largos passos visando o acréscimo das suas relações com a indústria e a sociedade. Isto já foi relatado na última "Carta da Direção". Mas eu gostaria de chamar a atenção para alguns pontos novos. A SPM solicitou, depois de muitos anos, o estatuto do "Mecenato Científico", que permitirá – quando nos for concedido – que qualquer apoio financeiro à SPM seja descontado em 130% do IRS. Está de momento em análise entre o Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior e a Fundação para a Ciência e a Tecnologia, mas esperamos obtê-lo em breve.

Entretanto, criámos três categorias de sócio institucional: Académico (para universidades, centros de investigação, instituições de ensino superior), Escolar (para escolas e colégios de ensino básico e secundário) e Corporativo (para empresas, sócios industriais, fundações), adaptando-nos a uma realidade em que algumas instituições querem participar ativamente na SPM mas têm dificuldade em encontrar a forma apropriada.

Com tudo isto, esperamos para os próximos anos maiores ligações com a sociedade. Estas ligações devem refletir um mundo que reconhece na matemática um importante forma de pensar, ver o mundo e resolver os seus problemas. A SPM sempre foi e será cada vez mais parte deste mundo.

Um abraço cordial,
Fabio Chalub
(celebrando dez anos de colaboração ativa com a *Gazeta*...)

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2017

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S.Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3º esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*