

N. 0183

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXVIII | Nov. 2017 | 4,20€

APANHADOS NA REDE

Trigonometria na Antiga Babilónia?

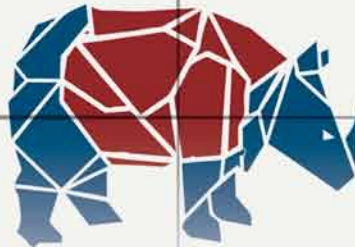
JOSÉ CARLOS SANTOS

NA LINHA DE FRENTE

A Matemática do Planeta Vulcano

FABIO CHALUB





11th European Conference on Mathematical and Theoretical Biology



ECMTB2018
LISBON

www.ecmtb2018.org

Lisbon July 23-27

Celebrating the *Year*
of *Mathematical Biology!*

PLENARY SPEAKERS:

Helen Byrne

University of Oxford, UK

Samuel Kou

Harvard University, USA

Andrea Pugliese

University of Trento, Italy

Antonio DeSimone

Scuola Internazionale Superiore
di Studi Avanzati, Italy

Mirjam Kretzschmar

UMC Utrecht, The Netherlands

Eörs Szathmáry

Eötvös Loránd University, Hungary

Eva Kisdi

University of Helsinki, Finland

Eva Löcherbach

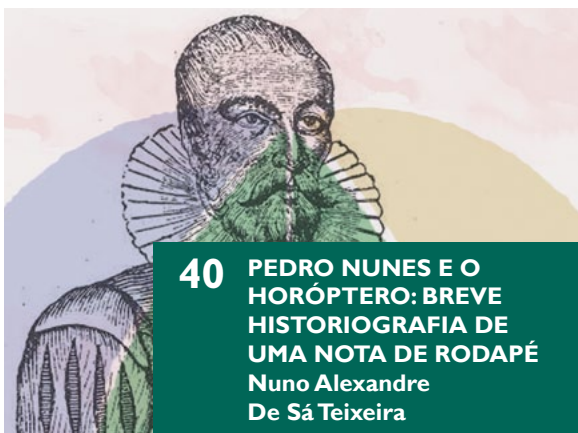
Université de Cergy-Pontoise, France

Kees Weijer

University of Dundee, UK

Supported by





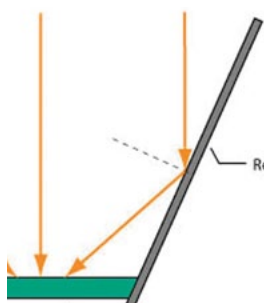
40 PEDRO NUNES E O HORÓPTERO: BREVE HISTORIOGRAFIA DE UMA NOTA DE RODAPÉ
Nuno Alexandre De Sá Teixeira



26 A VESICA PISCES E O PENTÁGONO REGULAR
José Neto



46 CONVERSA COM..
Peter Neumann



33 PT-MATHS-IN Estrutura de Espelhos em Painéis Fotovoltaicos – Configurações Ótimas Para Aumentar a Exposição Solar Durante Um Dia

- 02 EDITORIAL** | *Sílvia Barbeiro*
- 03 ATRACTOR**
Em Média
- 07 RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*
Matemática e Assuntos Divertidos II
- 09 CANTO DÉLFICO** | *Alexander Kovačec*
Sobre a Formalização de Frases em Linguagem Natural
artigo de capa
- 17 NA LINHA DE FRENTE** | *Fabio Chalub*
A Matemática do Planeta Vulcano
artigo de capa
- 21 APANHADOS NA REDE** | *José Carlos Santos*
Trigonometria na antiga Babilónia?
- 25 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 26 A VESICA PISCES E O PENTÁGONO REGULAR**
José Neto
- 31 NOVIDADES MATEMÁTICAS** | *Manuel Silva e Pedro J. Freitas*
Soma de Palíndromos
- 33 PT-MATHS-IN** | *Ana Fidalgo e Marina Ferreira*
Estrutura de Espelhos em Painéis Fotovoltaicos – Configurações Ótimas Para Aumentar a Exposição Solar Durante Um Dia
- 39 MATEMÁTICA E LITERATURA** | *Nuno Camarneiro*
Porquê?
- 40 PEDRO NUNES E O HORÓPTERO: BREVE HISTORIOGRAFIA DE UMA NOTA DE RODAPÉ**
Nuno Alexandre De Sá Teixeira
- 46 CONVERSA COM...** | *Gonçalo Morais*
Peter Neumann
- 51 NOTÍCIAS**
- 56 CARTAS DA DIREÇÃO** | *Jorge Buescu*
Verão Olímpico Para a SPM



SÍLVIA BARBEIRO
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

CAPACIDADE DE QUESTIONAR

Wir müssen wissen. Wir werden wissen. (“Nós precisamos saber. Nós iremos saber.”) são as últimas seis palavras de um discurso que o brilhante matemático David Hilbert dirigiu à *Sociedade de Cientistas e Médicos da Alemanha*, a 8 de setembro de 1930. Estas palavras, que são o epitáfio da sua lápide em Göttingen, tornaram-se uma citação famosa e inspiradora.

É atualmente um lugar-comum haver descrença em relação às notícias de jornais generalistas e até às publicações científicas. Aceitamos como dado adquirido que a imprensa não relata com rigor a atividade científica e que é sensacionalista. Apesar disso, não é raro limitarmo-nos a ficar rendidos ao ceticismo. Mas quando a curiosidade e a capacidade de pôr em causa a informação motivam o desconstruir, o desvendar, o aprofundar, para a seguir edificar, então advém a recompensa de um conhecimento mais profundo.

Nos últimos dias do mês de agosto, surgiram em muitos meios de comunicação social nacionais e estrangeiros títulos como “Placa de argila com 3700 anos é a tabela trigonométrica mais antiga e exata do mundo” ou “Babilónios, e não gregos, foram os primeiros a estudar trigonometria”. A gênese das notícias foi um artigo recentemente publicado na revista *Historia Mathematica*. Os seus autores, investigadores de uma universidade australiana, estudaram a placa Plimpton 322, que ilustra a capa deste número da *Gazeta de Matemática*. Do interesse e da incredibilidade surge a questão de José Carlos Santos: “Trigonometria na antiga Babilónia?”. Ao ler o seu artigo da coluna *Apanhados na Rede*, experimentamos a urgência de separar factos de especulações e somos guiados no traço

dessa fronteira. A Plimpton 322, que exerceu o seu fascínio como notícia de jornal, torna-se mais bela e sedutora quando a compreendemos melhor.

Neste número da *Gazeta*, Nuno Camarneiro dedica a sua coluna à capacidade humana de questionar. Escreve: “... podemos tentar, devemos tentar! Certamente daremos algum contributo para o conhecimento e para a arte, talvez até, com muito esforço e alguma sorte, consigamos um dia responder a uma pergunta.”

Reiterando a sua fé inabalável na matemática, Hilbert, no seu discurso, proclamou a convicção de que não existem problemas matemáticos irresolúveis, e que com tempo, paciência e esforço suficientes, é possível resolver qualquer problema, é possível resolver todos os problemas. Com os Teoremas da Incompletude, Kurt Gödel veio abalar esta visão otimista. Curiosamente, anunciou o primeiro dos dois teoremas um dia antes de Hilbert proferir as célebres palavras. A discussão sobre o impacto dos Teoremas da Incompletude de Gödel no Programa de Hilbert não cabe aqui e deixa-a para os especialistas. Certo é que nós, eu e o caro leitor, não podemos prescindir da capacidade de questionar e procurar respostas. Está na natureza humana. É uma força maior! É um dever! Vale a pena!

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atorator.pt.
Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atorator@atorator.pt

EM MÉDIA

Uma vez conhecidas as médias aritmética, geométrica e harmónica de uma amostra qualquer de n números reais positivos, podemos criar conceitos novos combinando-as. O que nos revelam essas médias híbridas?

Face à impossibilidade de medir com exatidão qualquer quantidade física, uma vez que as nossas observações da realidade estão sujeitas a erros, por muito cuidadosos que sejamos, resta-nos compensar esta imperfeição efetuando várias medições e determinando o valor mais provável. De acordo com Gauss, esse valor é o da média aritmética dos resultados obtidos nas sucessivas medições. Todavia, há problemas em que a média apropriada é a geométrica ou a harmónica. Por exemplo, se um comboio viaja durante um intervalo de tempo T a uma velocidade constante v_1 , e depois o mesmo período de tempo a uma velocidade constante v_2 , então a velocidade média v_m nesse percurso verifica a igualdade $v_m = (v_1 \times T + v_2 \times T) / 2T$ e, portanto, $v_m = (v_1 + v_2) / 2$, a média aritmética das duas velocidades parcelares. Contudo, se o comboio percorre uma distância D a uma velocidade constante v_1 e depois a mesma distância D a uma velocidade constante v_2 , então a velocidade média V_m do comboio numa viagem que, no tempo total $T = D/v_1 + D/v_2$ percorre a distância $2D$, verifica $2D = V_m \times T$, e daqui concluímos que $V_m = 2 / (1/v_1 + 1/v_2)$, a média harmónica das velocidades v_1 e v_2 .

Dados n números positivos x_1, x_2, \dots, x_n , a média aritmética $A = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$, a média geométrica $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ e a média harmónica $H = \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n}$ verificam

$$A \geq G \geq H, \tag{1}$$

dando-se a igualdade se e só se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Com esta propriedade prova-se facilmente que, entre todos os retângulos no plano com igual perímetro, o quadrado é o que engloba maior área; ou que a sucessão $\left((1 + 1/n)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Fixados dois números reais positivos a e b , a sua média aritmética-geométrica é obtida através da iteração de um algoritmo que calcula alternadamente a média aritmética e a geométrica, transformando (a, b) no par de sucessões

$$a_1 = \frac{a + b}{2} \quad b_1 = \sqrt{ab}$$

e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Note-se que, se $a = b$, então $a_n = a = b_n$ para todo o n . Quando $a > b$, tem-se $b < b_1$, $a_1 < a$ e, por (1), $b_1 < a_1$. Mais geralmente, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$b < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < a$$

e

$$a_{n+1} - b_{n+1} < a_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

Logo, as sucessões $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergem, e têm o mesmo limite, que pertence ao intervalo $]a, b[$ e que designaremos por $AG(a, b)$.

A convergência destas duas sucessões é rápida. De facto, uma vez que, para todo o $a > b > 0$, a sucessão

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decresce para $AG(a, b)$ e temos

$$(a_{n+1})^2 - (b_{n+1})^2 = \frac{(a_n - b_n)^2}{4},$$

se dividirmos ambos os termos desta última igualdade por

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_{n+2}$$

obtemos

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{4(a_{n+1} + b_{n+1})} = \frac{(a_n - b_n)^2}{8a_{n+2}} < \frac{(a_n - b_n)^2}{8AG(a, b)}.$$

A velocidade de convergência deste algoritmo está na base de um dos processos mais eficientes para calcular aproximações de π . Efetivamente, Gauss provou que

$$AG(\sqrt{2}, 1) = \frac{2\pi}{L} \simeq 1.198140234735\dots$$

onde $L = 4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx$ é o comprimento da lemniscata (a curva plana que em coordenadas polares se descreve pela equação $r^2 = \cos(2\theta)$). Bastam quinze termos da correspondente sucessão $(a_n)_n$ para conhecermos mais de dois bilhões de casas decimais da dízima de π . Podem ler-se mais detalhes sobre este capítulo da obra de Gauss em [2].

Na figura 1, as diferentes tonalidades da coloração do gráfico da função $AG: (a, b) \in]0, 10] \times]0, 10]$: $a > b \mapsto AG(a, b)$ indicam como varia com (a, b) a velocidade de convergência das sucessões que calculam a média

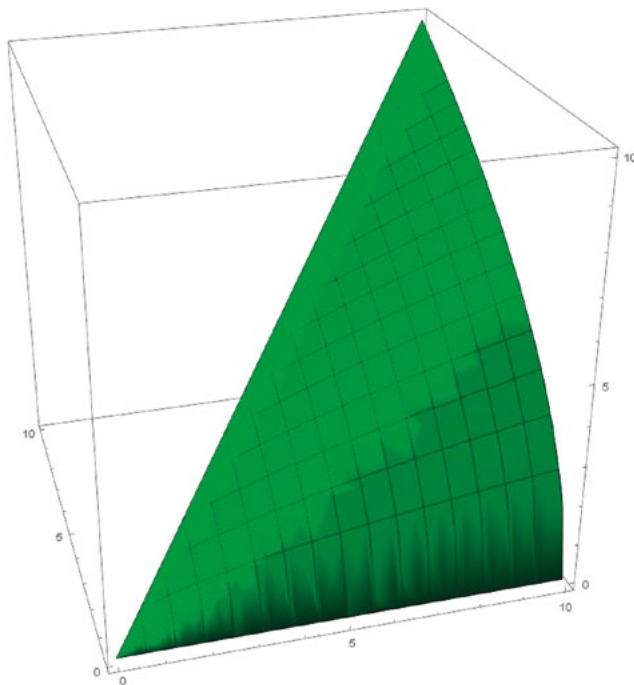


Figura 1.

aritmética-geométrica. Observe também nesta imagem o comportamento da média AG com a mudança de escala: $AG(ra, rb) = rAG(a, b)$ para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e qualquer $r > 0$.

Do mesmo modo, podemos considerar a média aritmética-harmônica, obtida calculando-se sucessivamente estas duas médias a partir de uma escolha inicial de dois números reais positivos distintos, digamos $a > b > 0$. Mais precisamente,

$$c_1 = \frac{a+b}{2} \quad d_1 = \frac{2ab}{a+b}$$

e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n+1} = \frac{c_n + d_n}{2} \quad d_{n+1} = \frac{2c_n d_n}{c_n + d_n}.$$

Repare-se que $\sqrt{c_1 d_1} = \sqrt{ab}$; além disso, como $(a+b)/2 < a$ e $a, b > 0$, tem-se

$$d_1 = \left(\frac{2}{a+b} a \right) b > b;$$

por (1), vale ainda

$$b < d_1 < \sqrt{ab} < c_1 < a.$$

Em geral, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$b < d_n < d_{n+1} < \sqrt{ab} < c_{n+1} < c_n < a$$

e

$$\sqrt{c_n d_n} = \sqrt{ab}.$$

Consequentemente,

$$c_{n+1} - d_{n+1} < c_{n+1} - d_n = \frac{c_n - d_n}{2} \quad (2)$$

e, portanto, as sucessões $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergem para o mesmo limite, que designaremos por $AH(a, b)$ e que tem de ser igual a \sqrt{ab} . A convergência é de facto mais rápida do que (2) revela, uma vez que

$$c_{n+1} - d_{n+1} = \frac{(c_n - d_n)^2}{4c_{n+1}} < \frac{(c_n - d_n)^2}{4b}.$$

Analogamente, constrói-se a média geométrica-harmônica de um par de números reais $a > b > 0$ determinando-se alternadamente estas duas médias. Ou seja:

$$e_1 = \sqrt{ab} \quad f_1 = \frac{2ab}{a+b}$$

e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$e_{n+1} = \sqrt{e_n f_n} \quad f_{n+1} = \frac{2e_n f_n}{e_n + f_n}.$$

Note-se que $e_1 = \sqrt{ab} < a$, que $f_1 = 2ab/(a+b) > b$ e que $f_1 < e_1$ por (1). Mais geralmente,

$$b < f_n < f_{n+1} < e_{n+1} < e_n < a \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$e_1 = \sqrt{ab} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}}}$$

$$f_1 = \frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}}.$$

Indutivamente, pode confirmar-se que os termos das sucessões $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, determinadas por (a, b) com $a > b > 0$, são os inversos dos termos das sucessões $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, respetivamente, para o par $(1/b, 1/a)$, sendo $1/b > 1/a > 0$. E, portanto, as sucessões $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são estritamente monótonas e convergem para

$$GH(a, b) := \frac{1}{AG(\frac{1}{b}, \frac{1}{a})}.$$

A figura 2 representa a verde, a laranja e a azul os gráficos das funções AG , AH e GH no domínio $]0, 10[\times]0, 10[$. A figura 3 contém informação sobre as sucessões descritas anteriormente e os limites $AG(a, b)$, $AH(a, b)$ e $GH(a, b)$ para alguns pontos (a, b) do segmento $\{(a, b) : a = 2, 0 < b < 2\}$. Em particular, pode averiguar nesta imagem a propriedade seguinte: como vimos, sendo $a > b > 0$, tem-se

$$b < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < a$$

e

$$GH(a, b) \in \left] \frac{2ab}{a+b}, \sqrt{ab} \right], \quad AH(a, b) = \sqrt{ab},$$

$$AG(a, b) \in \left] \sqrt{ab}, \frac{a+b}{2} \right[.$$

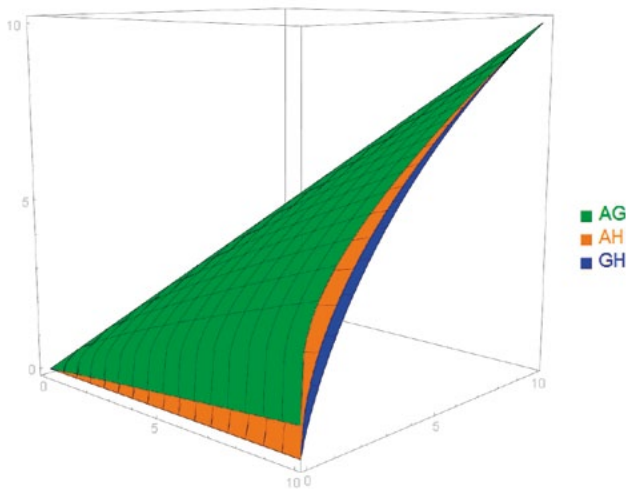


Figura 2.

Daqui resulta que

$$GH(a, b) < AH(a, b) < AG(a, b).$$

Os três procedimentos iterativos descritos anteriormente podem combinar-se numa ação aleatória conjunta das três médias AG , AH e GH . Mais precisamente, considere-mos as funções

$$\mathcal{F}_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$(a, b) \mapsto \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right)$$

$$\mathcal{F}_2 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$(a, b) \mapsto \left(\frac{a+b}{2}, \frac{2ab}{a+b} \right)$$

$$\mathcal{F}_3 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$(a, b) \mapsto \left(\sqrt{ab}, \frac{2ab}{a+b} \right)$$

e, fixado um par (a, b) , lancemos um dado que tenha três faces numeradas com 1, 2 e 3, e em que faces opostas tenham o mesmo número. Se no primeiro lançamento sair a face $i \in \{1, 2, 3\}$, determinamos $\mathcal{F}_i(a, b)$; se no segundo lançamento obtivermos a face $j \in \{1, 2, 3\}$, calculamos $\mathcal{F}_j(\mathcal{F}_i(a, b))$; se de seguida surgir a face k , compomos $\mathcal{F}_k(\mathcal{F}_j(\mathcal{F}_i(a, b)))$; e assim sucessivamente. Deste modo, obtemos uma órbita de (a, b) pelo sistema iterado de funções definido pelas aplicações \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 e \mathcal{F}_3 , associada a uma dada sequência infinita de lançamentos do dado. Formalmente, cada órbita aleatória de (a, b) é uma sucessão de termo geral

$$n \in \mathbb{N}_0 \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}_{c_n} \circ \mathcal{F}_{c_{n-1}} \circ \dots \circ \mathcal{F}_{c_1}(a, b) & \text{se } n \geq 1 \\ (a, b) & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

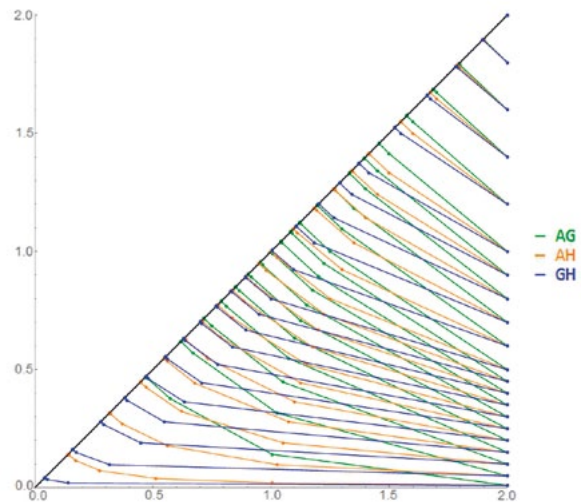


Figura 3.

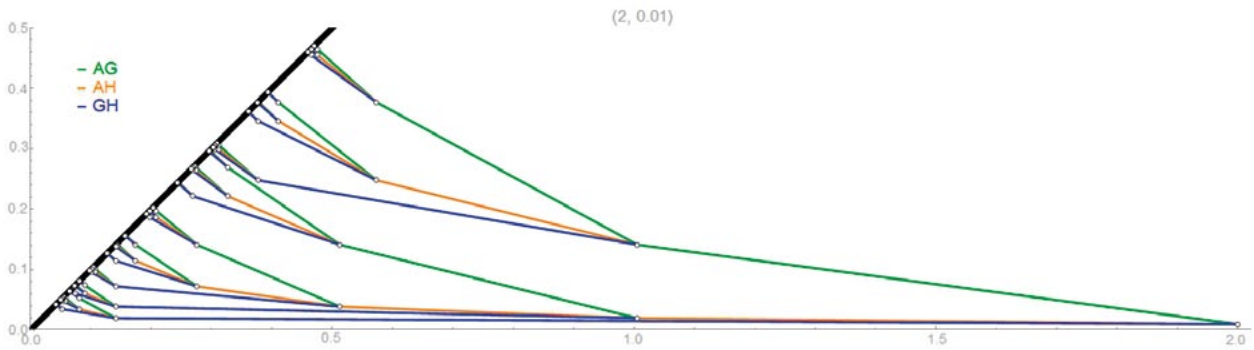


Figura 4.

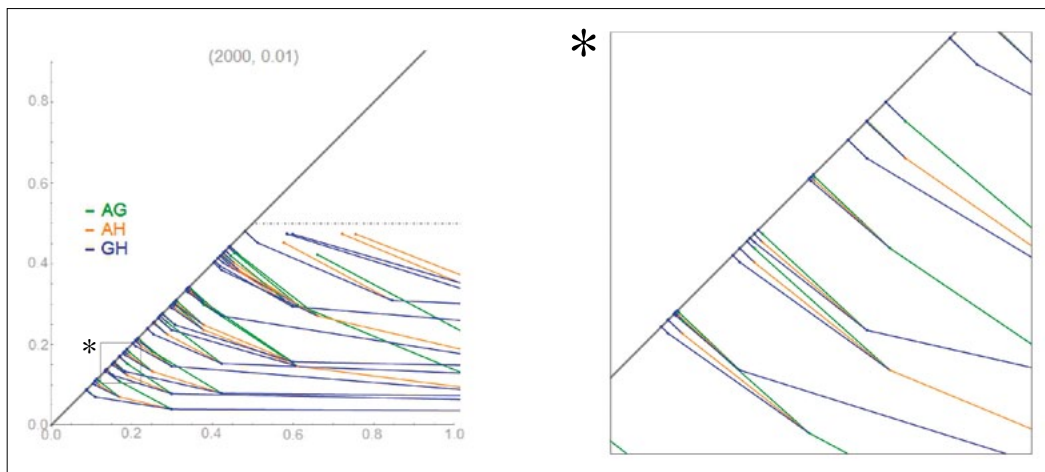


Figura 5.

onde $c_j \in \{1, 2, 3\}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ descreve os resultados dos sucessivos lançamentos do dado. A figura 4 mostra os cinco primeiros iterados (ligados por segmentos para se reconhecerem mais facilmente) de todas as órbitas aleatórias de $(2, 0.01)$.

Pela análise anterior às médias combinadas AG , AH e GH , concluímos que o sistema iterado das funções \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 e \mathcal{F}_3 tem como atrator global a diagonal $\mathcal{A} = \{(a, a) : a \in \mathbb{R}^+\}$, isto é, os pontos de acumulação de qualquer órbita aleatória estão em \mathcal{A} . Além disso, cada elemento de \mathcal{A} é fixo por esta dinâmica aleatória, por ser fixo por cada uma das três funções. Note-se ainda que, para $j \in \{1, 2, 3\}$, a matriz da aplicação derivada de \mathcal{F}_j em (a, a) é

$$D\mathcal{F}_j(a, a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e tem valores próprios $\lambda = 1$ (cujo espaço próprio é a reta de equação $y = x$) e $\mu = 0$, com espaço próprio que tem a direção da reta $y = -x$. O que implica que, próximo da

diagonal, as órbitas são fortemente atraídas para \mathcal{A} e tendem para este conjunto numa direção aproximadamente perpendicular à reta $y = x$. Atente-se a este pormenor nas figuras 3 e 4.

O Atrator produziu material interativo a propósito deste tema, acessível a partir de [1], que o leitor poderá explorar para determinar as médias combinadas de várias escolhas de (a, b) , visualizar de outros ângulos os gráficos das funções AG , AH e GH , ou identificar propriedades das órbitas aleatórias e dos seus pontos de acumulação usando a lupa que permitiu desenhar a figura 5 (que mostra os iterados aleatórios de $(2000, 0.01)$ contidos na região $\{(a, b) : 0 < a < 1 \text{ e } 0 < b < 0.5\}$ e uma ampliação perto da diagonal).

REFERÊNCIAS

[1] <http://www.atractor.pt/mat/médias>

[2] D. Cox. *The arithmetic – geometric mean of Gauss*. L'Enseignement Mathématique 30 (1984) 275-330.



JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa

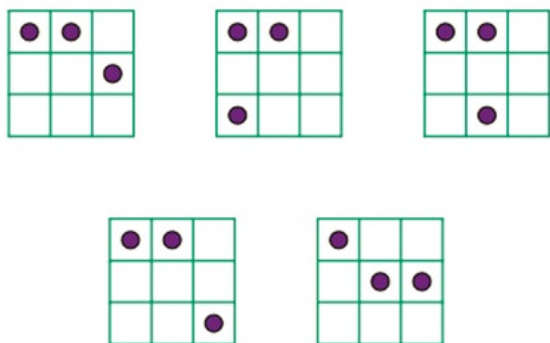
jnsilva@cal.berkeley.edu

MATEMÁTICA E ASSUNTOS DIVERTIDOS II

O tabuleiro de xadrez, e algumas suas variantes, são palco de muitas questões matemáticas interessantes. A bibliografia deste tema é extensa e atraiu mesmo campeões mundiais do nobre *jogo-ciência*. Deixaremos para texto posterior a ilustração do uso do jogo do xadrez em si como ferramenta didática na nossa disciplina (há muito e recente trabalho na área). Vamos concentrar-nos no tabuleiro vazio. Hoje propomos um problema, que pode considerar-se um clássico, que constitui um bom desafio, mesmo para dimensões reduzidas.

Dado um tabuleiro 3×3 , pretende-se colocar (3) peões em três casas distintas de forma a que as respetivas distâncias sejam todas diferentes. Assumimos que os peões se identificam com os centros das células do tabuleiro e que as distâncias são as euclidianas, medidas em linha reta.

A menos de simetrias, este problema tem cinco soluções, aqui ilustradas.



Agora, perguntamos ao leitor: e se tivermos um tabuleiro 4×4 e quatro peões para colocar? E se for 5?

Para que valores de n é que é possível colocar n peões num tabuleiro $n \times n$ gerando distâncias todas diferentes?

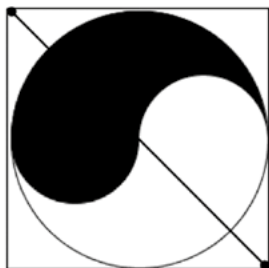
Sobre as questões do número anterior:

- ▶ A soma dos 10 primeiros termos de uma sucessão de Fibonacci (f_n) é sempre igual a $11f_7$. Assim, ao Mágico basta pedir o valor de f_7 .
- ▶ A bissecção do triângulo equilátero de lado a é discutida no capítulo x da obra de Polya *Mathematics and plausible reasoning*. A linha procurada é um arco da circunferência centrada num vértice, de raio r , em que

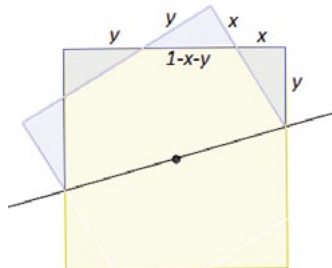
$$\frac{\pi r^2}{6} = \frac{\sqrt{3}a^2}{8},$$

(ver <https://www.cut-the-knot.org/proofs/bisect.shtml/#solution>).

- ▶ A diagonal do quadrado ilustrada bissecta as duas áreas do símbolo (ver o problema 5.14 do livro de Gardner *The colossal book of short puzzles and problems*).

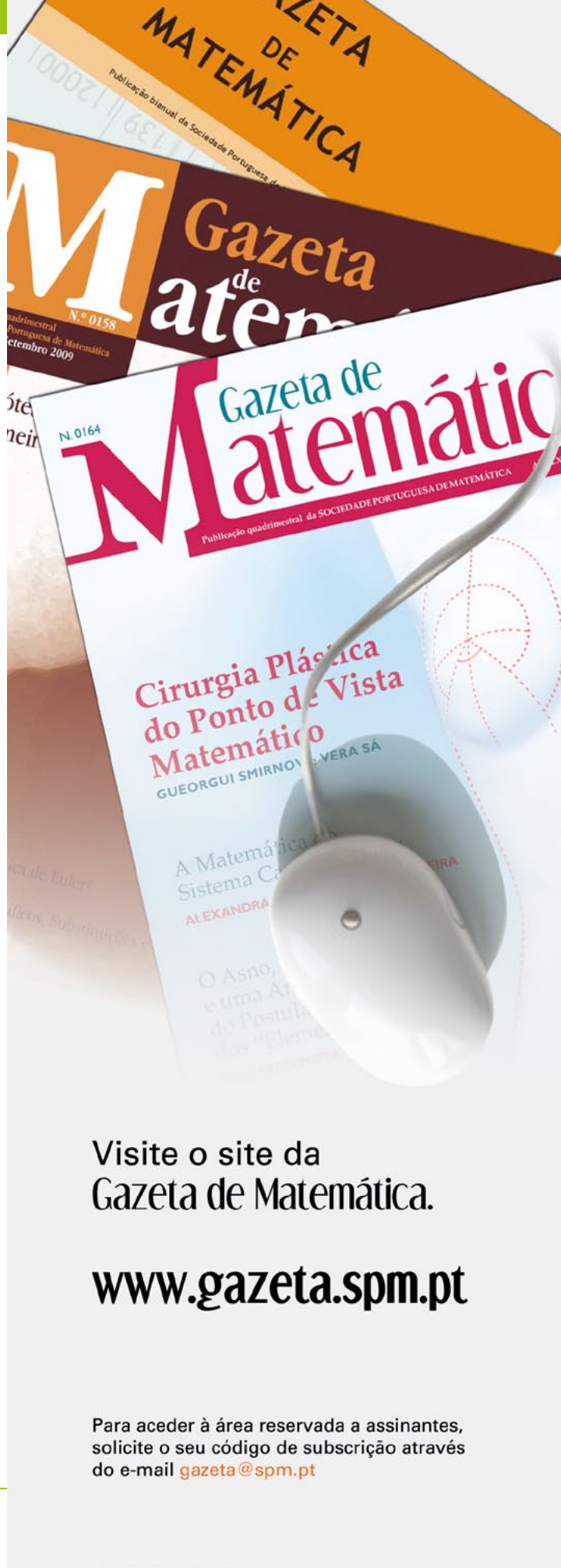


- ▶ A dobragem do quadrado ótima está ilustrada abaixo (o declive da reta que a define é de $22,5^\circ$)



(ver <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/TwoSquares.shtml/#solution>)

- ▶ Consideremos que cada aresta do grafo K_8 tem um rótulo, dado pela soma-NIM dos valores dos vértices (o 8 entende-se como sendo zero). O Ajudante, após o primeiro movimento do Voluntário, vai somando-NIM os valores das arestas percorridas. No fim, o valor que tiver (que vai ser o seu palpite), quando somado-NIM ao declarado pelo Voluntário, produz o da carta-mistério. No exemplo dado, o palpite do Voluntário é $5 \oplus 7 \oplus 3 \oplus 7 \oplus 4 = 2$. Note-se que $2 \oplus 3 = 1$, $2 \oplus 1 = 3$ e estas são as posições inicial e final do Voluntário.



Visite o site da
Gazeta de Matemática.

www.gazeta.spm.pt

Para aceder à área reservada a assinantes,
solicite o seu código de subscrição através
do e-mail gazeta@spm.pt



ALEXANDER
KOVÁČEC
Universidade de
Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

SOBRE A FORMALIZAÇÃO DE FRASES EM LINGUAGEM NATURAL

O que se pode dizer pode dizer-se de forma clara...

O currículo de Matemática A para o 10.º ano (ver [BGLOT]) prevê a Lógica como um dos tópicos. Complementamos as considerações no respetivo caderno de apoio no que diz respeito à formalização de afirmações não-matemáticas feitas em linguagem natural.

1 Consideramos a seguir conhecidas pelo leitor as tradicionais tabelas de verdade que, por uma questão de referência e completude, colocamos aqui:

A	$\neg A$
·	1
1	·

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$
·	·	·	·	1
·	1	1	·	1
1	·	1	·	·
1	1	1	1	1

Identificando 0 (o·) como 'falso' e 1 como 'verdadeiro', a primeira tabela diz que a negação de uma afirmação A , $\neg A$, é verdadeira se e só se (sse) a afirmação A for falsa, a tabela para $A \vee B$ diz que se de duas afirmações A , B se constrói a afirmação-disjunção ' A ou B ', esta é verdadeira sse pelo menos uma destas for verdadeira, a afirmação-conjunção ' A e B ', $A \wedge B$, é verdadeira sse ambas as afirmações A , B forem verdadeiras; e o único

caso em que ' A implica B ', $A \rightarrow B$, é falso é quando A é verdadeiro e B é falso. Igualmente supomos conhecida a construção de fórmulas bem formadas da Lógica Proposicional bem como a construção de tabelas de verdade de fórmulas mais complexas. Este material encontra-se, por exemplo, em [FdO], um livro que se sugere a todo o leitor português interessado em Lógica.

Os enunciados de teoremas, proposições e lemas da própria matemática são tipicamente feitos em linguagem informal. O facto de que aí não há quase nunca problemas quanto à interpretação prende-se parcialmente com a sua muito restrita 'fraseologia': não se usam locuções como ' A mas B ', ' A a não ser que B ', etc.; mas quase exclusivamente locuções cujas formalizações são consagradas pelas tabelas acima.

Ora, alguns livros de lógica e manuais escolares pedem ao leitor que formalize frases não-matemáticas feitas em linguagem natural. Assim, por exemplo, o mencionado caderno pede para formalizar a frase

'O Carlos não sai de casa quando está a chover, a não ser que tenha aulas.'

Tecemos aqui algumas considerações sobre a questão de formalizar tais frases. Existem, aliás, outros livros de lógica que, por causa das controvérsias que podem

ser provocadas por formalizações de tais frases, explicitamente evitam tocar neste assunto; veja-se e.g. [CL, p. 24]. Se o assunto fosse direto e simples para frases de complexidade ligeiramente elevada, se calhar não haveria tanta literatura sobre o assunto. Uma pesquisa Google com a procura 'Formalization of phrases in natural languages' revelou há uns anos 236.000 registos. De entre os muitos textos que abrimos não encontramos nenhum que pudesse esclarecer o leitor não-especialista em tempo limitado sobre alguns dos espinhosos assuntos deste tópico na fronteira entre filosofia e lógica matemática. Também os livros que conhecemos não se alargam muito sobre o tópico da formalização de frases naturais, se bem que peçam formalizações nos exercícios.

O ensaio [BL] parece-nos filosoficamente profundo e diz na página 2: 'Em resumo, a tarefa de conceber um procedimento efetivo que ligue linguagens naturais e a lógica de primeira ordem não está sequer perto de ser completado [...]; e até se pode duvidar se tal jamais será possível'. Parece-nos que o mesmo pode ser dito para frases naturais isentas de quantificadores como 'existe' e 'para todos'.

A nossa tarefa é modesta: vamos discutir, para várias locuções, formalizações que essas sugerem e esperamos que o leitor ache as propostas aceitáveis e que ache as discussões e os métodos que levaram a elas úteis para tratar dos seus próprios exemplos.

2.

A linguagem natural escrita não tem parênteses; e ainda menos do que na linguagem falada é claro como incluir parênteses numa formalização. Consideremos as frases

- a. vou ao parque e colecionar folhas para o meu herbário ou ver os pássaros,
- b. vou ao parque e colecionar folhas para meu o herbário ou beber uma pinga na tasca.

Com as abreviaturas $a :=$ vou ao parque, $b :=$ colecionar folhas para o meu herbário, $c :=$ ver pássaros, $c' :=$ beber uma pinga na tasca, uma fórmula natural para a primeira frase é $a \wedge (b \vee c)$, pois nos parques se encontram tanto muitas folhas como pássaros; uma formalização para a frase b será $(a \wedge b) \vee c'$. É fácil ver que estas duas formalizações não são equivalentes (têm tabelas diferentes). Não está de todo excluído que na frase b o locutor teve em mente a formalização $a \wedge (b \vee c')$, mas o destinatário não pôde contar com que no parque houvesse uma tasca... Um lindo exemplo de como podem acontecer desentendimentos...

3.

Podemos multiplicar exemplos de ambiguidades do tipo anterior: obtemos uma indicação de que frases naturais com a mesma estrutura sintática podem ter, por razões de diferentes significados (semânticas), formalizações e tabelas diferentes. E até a mesma frase pode admitir tabelas diferentes.

Além de exercícios cuja formalização é imediata através das tradicionais tabelas, encontramos em manuais de lógica exercícios com frases de estrutura ' A mas B ', ' A porque B ', ' A exclui B ', etc., onde A e B são frases em linguagem natural. O autor não conhece nenhum livro no qual sejam propostas tabelas de verdade para estas junções verbais, mas vai tentar fundamentar as propostas a seguir. Um guião aqui, e nos exemplos mais complexos abaixo, é o seguinte: dada a frase, examinem-se as quatro combinações possíveis dos valores (A, B). Dê-se o valor 1 a determinada combinação se se considerar que a frase permite esta combinação particular de valores de verdade; se não, dê-se-lhe o valor 0. Como veremos, esta escolha não será sempre unânime. Levaria a discussões infundáveis convencer de uma ou de outra escolha para obter tabelas definitivas.

Eis então uma proposta fundamentada para uma tabela para ' A mas B ':

A	mas	B
.	.	.
.	.	1
1	.	.
1	1	1

É condição necessária para esta frase ser considerada verdadeira que B seja verdadeiro. Se $A = 0$, $B = 1$, não podemos dar 1 à frase, pois ela diz também que A acontece.

Por exemplo, quem diz 'o sismo foi forte, mas os prédios resistiram' não tem razão se não tiver havido um sismo forte. Igualmente, não podemos dar valor 1 à frase 'o sismo foi forte, mas os prédios não resistiram'. Assim, uma tabela para ' A mas B ' é a tabela de $A \wedge B$. Frequentemente ouve-se a frase na forma 'não A , mas B ', expressando um contraste como em: 'A Joana não é muito trabalhadora mas é inteligente'; 'as dívidas não são baixas, mas a economia cresce'. E, de facto, consideraremos neste caso a frase verdadeira exatamente quando 'não A ' e ' B ' forem ambas verdadeiras.

A	excl.	B
.	1	.
.	1	1
1	1	.
1	.	1

Uma pessoa que diz 'A exclui B' é refutada com certeza se A e B ambas acontecerem, i.e., ambas tiverem o valor 1. A afirmação não é refutável se A não se dá. Chegamos à conclusão de que a frase diz o mesmo que A implica não B. Daí que tem entre as formalizações possíveis as seguintes equivalentes: $A \rightarrow \neg B$, $\neg A \vee \neg B$, $B \rightarrow \neg A$.

A	enq.	B
.	1	.
.	.	1
1	1?	.
1	1	1

Uma locução 'A enquanto B' diz em particular que, se B acontece, então A acontece. Isto explica as linhas 2 e 4 da tabela. Que, se B não acontecer, A não acontece, está também perfeitamente de acordo com a locução. Logo, temos o 1 na linha 1. A questão é se a frase admite que A aconteça se B não acontecer. Em frases como 'Temos luz suficiente para ler enquanto o Sol anda no céu' temos de admitir que podemos ler mesmo sem sol no céu, usando iluminação artificial. A frase interpretada desta maneira tem a tabela de $A \leftarrow B$. Mas numa frase como 'Os passarinhos voam enquanto a Terra tem atmosfera', o orador quer ser certamente interpretado como dizendo 'sse' e nós teríamos um 0 na linha 3. Neste caso, a frase tem a tabela de $A \leftrightarrow B$.

'A só se B': Será consensual que a tabela desta frase receba os valores 1 se A e B ambos acontecerem ou ambos não acontecerem; i.e., nos casos $A = B = 1$, $A = B = 0$. Mas se $A = 1$, $B = 0$, deve receber o valor 0, pois A não devia acontecer enquanto B não acontecer. Fica o caso $A = 0$, $B = 1$. Quem dá aqui o valor 0 à frase entende que se B acontecer, então A deve acontecer. A frase tem neste caso a tabela da equivalência lógica. Penso que na maior parte dos usos desta frase, a tabela da equivalência lógica $A \leftrightarrow B$ traduz o significado de 'A só se B'. Mas podemos ver exemplos em que o locutor desta frase quer dizer

provavelmente outra coisa: a atual doutrina económica mantém (sobretudo em discussões aceras) que 'a pobreza desaparece só se houver crescimento económico'.

A	só se	B
.	1	.
.	0?	1
1	0	.
1	1	1

Será que podemos estar tão seguros disto? Não será que os defensores da frase antes apenas acreditam em 'Enquanto não há crescimento económico, a pobreza não desaparece'; uma frase que se formaliza por $\neg B \rightarrow \neg A$ ou $A \rightarrow B$, i.e., 'B é necessária para A'? A ambiguidade do A só se B é uma boa razão para que na matemática se prefira a locução 'se e só se' para dizer a equivalência.

'A a não ser que B': Será consensual que, para dar valor 1 a esta frase, quando B não acontece, então A deve acontecer. Isto explica as linhas 1 e 3 da tabela. A frase também admite, ou mesmo sugere, que quando B acontece, A não acontece. Isto explica a linha 2. A questão é se a frase quer mesmo excluir A se B acontecer. Em livros e exercícios de lógica, provavelmente que sim, daí o 0 da linha 4, mas numa conversa isto é menos claro, daí o '?':

A	a nsq	B
.	.	.
.	1	1
1	1	.
1	0?	1

Um aluno pode dizer 'Eu vou chumbar, a não ser que tenha feito bem o quarto problema do teste', e expressar sérias dúvidas. Por causa destas dúvidas, se o aluno chumbar apesar de ter feito bem o quarto problema do teste, seria talvez inadequado considerar a sua auto-avaliação como falsa. Assim, a tabela para o 'a não ser que' mostrada é a de um ou exclusivo (\vee) e sua alternativa, a de um ou simples (\vee).

4.

Chegamos finalmente à tabela da implicação material $A \rightarrow B$. Ao contrário das nossas próprias tabelas, esta é

consagrada. É usada muito na ciência e, enquanto não se encontrar nenhuma séria deficiência neste contexto, não temos escolha senão a de a justificar.

A	\rightarrow	B
.	1	.
.	1	1
1	0	.
1	1	1

Rios de tinta correram sobre a justificação da coluna $A \rightarrow B$; veja-se, por exemplo, [F]. Quando exatamente é que uma frase 'se A então B ' deve ser considerada verdadeira? Assim dedicamos uma secção especial à sua tabela, que aqui repetimos.

Incontroversa é aqui a terceira linha: alguém que diz 'se A , então B ' é refutado se A acontecer, mas B não: a afirmação 'se A , então B ' é falsa se A acontecer, mas B não. Relativamente às outras linhas, vários argumentos foram avançados para as justificar. Estas linhas precisam realmente de alguma justificação, pois poucos vão sentir-se confortáveis com o facto de que as frases

'Se a Lua é feita de queijo verde, então a relva é azul';
 'Se a Lua é feita de queijo verde, então a relva é verde';
 'Se a Lua é feita de pedra, então a relva é verde',

que dizem respeito à primeira, à segunda e à quarta linhas da tabela todas têm valor 'verdadeiro'. A primeira e a segunda frases até parecem contradizer-se.

A primeira reacção a tais observações será que talvez devamos dar às frases com falso antecedente o valor 0 (falso) ou então deixar o valor indefinido; e defini-lo como verdadeiro só se puder ser estabelecido por experiência ou prova de que existe 'um nexo' entre A e B que faz com que sempre que $A = 1$, então também $B = 1$. Para já, isto tem o inconveniente de nos obrigar a definir o que 'um nexo' é. Antes de 1820, quando o físico dinamarquês J. C. Oersted a descobriu, a afirmação 'se se faz correr eletricidade num fio, então a agulha duma bússola perto do fio mexe-se' teria parecido um disparate. Assim, quem defende uma tabela em função do nexo, defende uma tabela em dependência do tempo. Esta possibilidade é para a esmagadora maioria dos matemáticos tão pouco satisfatória como deixar os valores em aberto em casos sem nexo evidente. É um pouco como dizer que nem a hipótese da existência de infinitos

primos gémeos é verdadeira nem o seu contrário; e só depois de ela ser porventura estabelecida, dar significado à frase 'existem infinitos primos gémeos'. (Diga-se de passagem que a corrente de lógica chamada Intuicionismo defende ideias deste género.)

Se queremos definir a tabela de $A \rightarrow B$ como verofuncional (i.e., dependente apenas dos valores de verdade de A e B), não temos outra possibilidade do que fazer no caso $A = 1, B = 1$, também $(A \rightarrow B) = 1$. Sentimo-nos desconfortáveis com a tabela do $A \rightarrow B$ por várias outras razões:

a. O pai que diz 'Se continuas a gritar, dou-te uma bofetada' e dá uma bofetada ao seu filho apesar de ele se já ter calado, tem do ponto de vista da tabela do condicional (' \rightarrow ') um comportamento impecável. Isto repugna-nos: um pai merecendo a designação de educador devia agir no pior dos casos segundo 'Dou-te uma bofetada se e só se continuas a gritar' (e, portanto, também falar neste sentido). Como alternativa, podia dizer 'Ou te calas ou dou-te uma bofetada'. Notem que o 'ou ... ou ...' é um ou exclusivo e devia ser sempre usado apenas neste sentido.

Outro tal exemplo é dizer 'Se está frio, visto uma camisola'. Digo isto porque (quase) sempre que está frio, visto uma camisola; mas a frase não reflete que (quase) nunca visto uma camisola se não está frio. A frase admite que ando com a camisola nos dias quentes do verão mas mais informativo seria dizer 'Visto uma camisola se e só se está frio' ou 'Ou está quente ou visto uma camisola'.

b. O modo como as definições são expressas, mesmo em matemática, também não contribui para aliviar o desconforto com a tabela da implicação. Por exemplo, define-se: 'Um triângulo diz-se equilátero se tem três lados iguais', onde na verdade devíamos dizer '... se e só se ...' no lugar do 'se'. O 'se' simples podia levantar dúvidas sobre se existem triângulos equiláteros que não têm três lados iguais. Aos estudantes de matemática diremos então que em definições um se simples deve ser entendido como um 'se e só se' ou seja um 'sse'. De facto, esta será uma das razões por que as definições são formalmente introduzidas frequentemente com a palavra 'Definição'; outras vezes por palavras destacadas. Na verdade, as definições podem ser posteriormente usadas como caracterizações. Num teorema que enuncia uma caracterização como 'Um triângulo é equilátero se e só se tiver três

triângulos iguais' já se usa o 'se e só se' corretamente.

- c. Ainda outro uso do 'se ... então ...' faz-se na frase, 'Se tens pressa, então há uma bicicleta na garagem'. A tabela desta afirmação seria simplesmente a da existência de uma bicicleta na garagem. A contraposição logicamente equivalente diz 'Se não há bicicleta na garagem, então não tens pressa'... O locutor desta frase não a entende como afirmação científica e sente que é refutado só se não houver bicicleta na garagem.

Vemos que a nossa linguagem natural está contaminada com usos, no mínimo, enganadores da construção 'se ..., então ...' – não é de admirar que nos sintamos pouco à vontade a proceder com a sua formalização segundo a consagrada tabela de verdade.

No entanto, o 'Se ..., então ...' tem o seu lugar, como a seguir veremos.

- d. Um bom argumento para manter a tabela tradicional da implicação é o uso da mesma em frases quantificadas. Por exemplo, a frase 'Se n é primo ≥ 3 , então n é ímpar', escrita como sentença lógica, adquire com a introdução da fórmula

$$P(n) := (n \text{ primo} \ \& \ n \geq 3) \rightarrow (n \equiv_2 1),$$

a forma $\forall n P(n)$. Ora, para considerar esta sentença correta devemos ter $P(n)$ correto, para todo o n , incluindo os casos $n = 6, 8, \dots$ em que tanto a premissa como a conclusão são falsas.

Note-se que uma fórmula da forma $\forall x P(x)$ sobre um universo finito de quantificação, digamos $\{1, 2, \dots, n\}$, pode ser escrita como conjunção: $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n)$ e, como tal, é verdade se cada uma das fórmulas $P(i)$ for verdadeira.

- e. Talvez a única coisa que deve realmente preocupar-nos é se pelo uso da tabela verofuncional escolhida pode introduzir-se algum erro grave num argumento científico. Um argumento é uma sucessão de afirmações ϕ_1, \dots, ϕ_k , chamadas premissas, seguida de uma afirmação ψ , dita conclusão. A questão da validade de um argumento é a questão de saber se, supondo ϕ_1, \dots, ϕ_k verdadeiros, ψ é necessariamente verdadeiro.

Ora, na prática científica, usa-se $A \rightarrow B$ para concluir B apenas se A for satisfeito: por *modus ponens*. Enquanto $A = 0$, a afirmação $A \rightarrow B$ é estéril e não será usada. A afirmação também é estéril se se souber $B = 1$ por outros meios. E se se souber A mas não se souber B , faz-se uso de $A \rightarrow B$ apenas depois de esta implica-

ção ter sido estabelecida por outros meios – usualmente, um argumento ou uma experiência científica que estabeleça um nexó lógico entre A e B que permite convencer-se de B . A frase não é usada só porque alguém a diz. Uma frase tal como 'Se a Lua é feita de pedra, então a relva é azul' não é usada em ciência enquanto não há fundamentação para ela; e 'Se a Lua é feita de pedra, então a relva é verde' é verdadeira (apesar de não fundamentada), mas isto porque já se sabia sem ela que a relva é verde. Como ferramenta de inferência, a frase é estéril.

- f. Finalmente, as tabelas alternativas que podiam eventualmente ser usadas para \rightarrow resultam num conetivo diferente. Vejamos: a tabela para \rightarrow_2 é igual à do conseqüente; a tabela da 'implicação' \rightarrow_3 é a da equivalência, a tabela do \rightarrow_4 é a da conjunção.

A	B	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow_2 B$	$A \rightarrow_3 B$	$A \rightarrow_4 B$
.	.	1	.	1	.
.	1	1	1	.	.
1
1	1	1	1	1	1

5.

Com a experiência adquirida, podemos agora tentar formalizações de frases mais complexas. Como formalizar a frase da secção 2 'O Carlos não sai de casa quando está a chover a não ser que tenha aulas'?

Se se aplicar 'quando' (como 'enquanto') e 'a não ser que' referido na secção 3, obtém-se (com abreviaturas que se entendem) a formalização direta $(c \rightarrow \neg s) \dot{\vee} t$. Se se fizer uma tabela de verdade desta fórmula, obtém-se na ordenação binária dos ternos (c, s, t) (ver abaixo) a coluna $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)^T$. Esta coluna diz-nos que a fórmula não permite nos casos $(c, s, t) = (0, *, 1)$, correspondentes às linhas 2 e 4, o valor verdadeiro. Em particular, se não chover e o Carlos tem aulas nem sair nem não sair dá o valor 1. Isto não reflete o que a frase quer dizer; pois ela admite de certeza que o Carlos sai quando não chove.

Se se substituir o $\dot{\vee}$ por um \vee simples, obtém-se a coluna $(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)^T$; portanto, a frase do orador permite todos os cenários exceto $(c, s, t) = (1, 1, 0)$. A frase exclui apenas que chova e o Carlos saia, embora

não tenha aulas. Uma fórmula mais simples do que a original para dizer isto é $\neg(c \wedge s \wedge \neg t)$ ou equivalentemente $\neg c \vee \neg s \vee t$.

A segunda das formalizações acima tem '1's adicionais nas linhas 2, 4, 6, dizendo respeito aos casos $(c, s, t) \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$. i.e., a fórmula permite que o Carlos quando tem aulas não saia, independentemente do tempo que faz. Se o locutor falar de um aluno preguiçoso, a tabela dada pode bem refletir o comportamento desse aluno e, portanto, aquilo que a frase quer dizer.

Mas esta formalização não serve para refletir o comportamento de um aluno assíduo que detesta a chuva: admite não chover, o aluno não sair, e ter aulas como eventos simultâneos.

Antes, a frase diz-nos que, apesar do seu desgosto pela chuva, se há aulas, o Carlos sai. Portanto, se não chover, tanto mais o aluno vai sair.

c	s	t	F
.	.	.	1
.	.	1	0
.	1	.	1
.	1	1	1
1	.	.	1
1	.	1	0
1	1	.	0
1	1	1	1

Mas então como é que chegamos a uma formalização que reflita o espírito da frase no caso de um aluno aplicado? Uma solução possível é: consideramos todos os oito casos de (c, s, t) possíveis e damos à fórmula a construir o valor 0 ou 1 conforme acharmos que a frase não permite ou permite o cenário (i.e. e tendo (c, s, t)) em consideração. Partindo desta tabela, construímos a fórmula pelo método da forma normal disjuntiva e subsequentes simplificações.

Já dissemos que o nosso aplicado aluno, faça chuva, faça sol, sempre sai caso tenha aulas. A fórmula deve portanto dar nas linhas onde $t = 1$, o valor 1 se $s = 1$; e 0 se s tem valor 0. Isto dá os valores de F nas linhas 2,4,6,8. Mais diz-nos o locutor que quando chove e não há aula, i.e., $c = 1, t = 0$, o Carlos não sai. Isto dá-nos os valores nas linhas 5, 7. Finalmente, o locutor não diz

nada sobre o que o Carlos faz se 'não chover' e 'não ter aulas' acontecerem em simultâneo. Ele não proíbe nem sair nem ficar em casa. Se não proibir, não pode ser refutado. Por isso, os valores das linhas 1 e 3 são 1s. A esta tabela aplicamos o algoritmo da forma normal disjuntiva; ver, por exemplo, [FdO, p.86-88]. Usemos a notação de polinómios booleanos (em vez de \wedge , multiplicação, em vez de \vee , adição, em vez de $\neg a, \bar{a}$). Para cada linha onde F tem o valor 1, constrói-se um produto (um monómio) nos literais $c, s, t, \bar{c}, \bar{s}, \bar{t}$ que assume o valor 1 apenas nesta sua linha. Depois somem-se estes monómios. Obtém-se um polinómio booleano. Simplifique-se finalmente este polinómio usando as conhecidas regras da álgebra booleana: assim obtemos

$$\bar{c}\bar{s}\bar{t} + \bar{c}s\bar{t} + \bar{c}st + c\bar{s}\bar{t} + cst = \bar{c}\bar{t} + st + c\bar{s}\bar{t} = \bar{c}\bar{t} + st + \bar{s}\bar{t}.$$

O primeiro polinómio booleano adiciona os produtos segundo a ordem das linhas com $F = 1$, depois aplicamos distributividade e a regra $\bar{s} + s = 1$ aos termos 1 e 2 da soma, e usamos de forma análoga $c + \bar{c} = 1$ para simplificar a soma dos termos 3 e 5. Finalmente use-se que $\bar{c} + c\bar{s} = \bar{c} + \bar{s}$. Esta é então, no caso de um aluno aplicado, possivelmente a formalização mais fiel ao espírito da frase. Ela difere da formalização que expressamos com o ou exclusivo apenas na linha 4, onde $(c, s, t) = (0, 1, 1)$ onde agora temos $F = 1$, (pois frisa que se não chove e há aulas, o Carlos sai), mas antes tínhamos $F = 0$.

Em alternativa à construção de um polinómio booleano podia retificar-se face à presente tabela a primeira formalização com um termo adicional, por exemplo, $((c \rightarrow \neg s) \vee t) \vee (\neg c \wedge s \wedge t)$.

7.

No âmbito da análise de conjuntos de afirmações relativamente à sua consistência interna (ausência de contradições), a formalização é importante porque, uma vez feita, concentra a mente no estritamente necessário, tal como a álgebra e a aritmética simbólicas fazem com problemas em que entram números. Segundo [Pf] os egípcios, por volta de 1600 a.C., foram quase incapazes de determinar o número que somado a um quinto de si próprio dá 21 – simplesmente porque não tiveram formalismo.

Vejamus como a lógica simbólica pode ser útil num discurso científico. O autor, há tempos, colocou o seguinte problema aos seus alunos.

Problema: Um grupo de paleoantropólogos P2 a P7, liderado pelo paleoantropólogo-mor, Pm, discute os últimos dados recolhidos sobre o *homo glacialis*:

Pm: 'Colegas: acho que concordamos que o *homo glaciarius* construiu ferramentas ou porque o volume do seu cérebro aumentou ou o seu cérebro aumentou porque construiu instrumentos.'

P2: '... Pois, mas construir instrumentos significa viver com pedras e madeira.'

P3: 'Ah, meu caro, quem vive no gelo com certeza não tem madeira disponível!'

P4: 'Certo, mas mesmo na época glacial houve duas possibilidades: ou se vive no gelo ou se vive no sul.'

P5: 'Bom, uma coisa é certa: o hominídeo encontrado usou peles grossas. Quem usa tais peles vive obviamente no gelo.'

P6: 'E, aliás, nenhum fóssil desta espécie jamais foi encontrado no sul.'

P7: 'E também sabemos que com o tempo usou chapéus cada vez maiores.'

P8: '... o que para mim equivale a que o volume do cérebro aumentou (pois com um chapéu grande num crânio pequeno teria frio).'

Pm: 'Mmm, muito certas as vossas observações. Tanto quanto vejo, chegamos à surpreendente conclusão de que o desenvolvimento cerebral é possível mesmo sem ser fomentado pela construção de instrumentos.'

Decida se a conclusão do paleoantropólogo-mor é admitida ou mesmo forçada pelas outras afirmações. □

Para resolver a questão, vamos formalizar as afirmações. Com siglas facilmente identificáveis podemos escrevê-las desta forma:

Pma:	$(cferr \leftarrow volcerau)$	\checkmark	$(cferr \rightarrow volcerau)$
P2:	$cferr$	\rightarrow	$vivpedmad$
P3:	$vivnogelo$	\rightarrow	$\neg vivpedmad$
P4:	$vivnogelo$	\checkmark	$vivnosul$
P5a:	$uspeles$		
P5b:	$uspeles$	\rightarrow	$vivnogelo$
P6:	$\neg vivnosul$		
P7:	$chapmai$		
P8:	$chapmai$	\leftrightarrow	$volcerau$
--	--		
Pmb:	$volcerau$	\wedge	$\neg cferr$

Solução: A questão da consistência destas afirmações é a questão de se todas estas as afirmações podem ter em simultâneo o valor 1. A questão da correção do ar-

gumento é a questão de se premissas $Pma, P2, \dots, P7, P8$ verdadeiras implicam a veracidade de Pmb . Supondo as premissas verdadeiras, temos por $P7$ e $P8$ $volcerau=1$ e por $P6$ $vivnosul=0$. Agora $P4$ implica $vivnogelo=1$ o que dá por 3 $vivpedmad=0$, o que força $cferr=0$ por $P2$. Com isto é claro da tabela do \checkmark que Pma tem valor 1 e também que $Pmb=1$. Esta discussão mostra que as afirmações são consistentes e que o argumento (no sentido da secção 4e) é correto. □

Conclusão:

Esperamos ter mostrado que a formalização de frases em linguagem natural de afirmações do dia-a-dia usando conectivos verofuncionais (apenas dependente dos valores de verdade dos constituintes) é muito problemática e se calhar foi uma das razões por que o sonho de G.F.W. Leibniz (1646-1716) da criação de um formalismo através do qual se pudessem resolver contenciosos políticos e filosóficos por mero cálculo não se mostrou realizável. Quem ambiciona propor uma teoria que não seja mal-interpretada mesmo pelos seus adversários não tem outra escolha senão a aplicação de uma linguagem muito precisa e técnica; certamente algo enfadonha. Muito mais com certeza foi dito sobre o lado filosófico destas questões por A. Tarski nas suas investigações sobre a noção da verdade; e K. Popper nas suas investigações sobre a lógica da descoberta científica. O tema é, aliás, entre nós discutido no livro de H. Jales Ribeiro [JR] que dedica todo o capítulo 3 a Popper. A lógica simbólica na filosofia ou no dia-a-dia tem o seu lugar certamente para explicar ou tornar os argumentos mais claros. Quem não diz coisa suficientemente clara num assunto importante pode ser obrigado, no extremo, a formalizar o que quer dizer. Depois a sua teoria pode ser testável e ser um potencialmente valioso contributo para a ciência – mas encontramos os sucessos maiores da lógica simbólica proposicional, por exemplo, na construção de circuitos lógicos (como existem nas unidades de processamento central dos computadores), na teoria da complexidade computacional (o problema SAT da satisfatoriedade de fórmulas proposicionais está intimamente ligado ao famoso problema $P = NP$), e, sim, na análise da consistência de regras muito bem definidas (e claras) de regulamentos em linguagem natural (de tipo legístico). [Pf], por exemplo, descreve o uso da lógica simbólica numa companhia de seguros. Além disto existem os já tradicionais usos intramatemáticos na teoria das demonstrações. Veja-se, por exemplo, [ER].

... e do que não podemos falar, devemos calar-nos. (Wittgenstein)

REFERÊNCIAS

[ER] R. M. Exner, M. F. Roskopf, *Logic in Elementary Mathematics*, McGraw Hill, 1959.

[F] J. S. Fulda, "Material Implication Revisited", *Amer. Math. Monthly* 96,3(Mar. 1989), 247-250.

[BL] M. Baumgartner, T. Lampert, "Adequate Formalization", *Synthese* 164, 1, 93-115, 2008. (encontrado numa procura *web* em novembro de 2014)

[CL] R. Cori, D. Lascar, *Mathematical Logic: a course with exercises*, Oxford 2000.

[JR] H. Jales Ribeiro, *Retórica, Argumentação e Filosofia*, Minerva Coimbra, 2016

[Pf] J. Pfeiffer, "Symbolic Logic", *Scientific American* 1950, reimpresso em: *Mathematics in the Modern World*, (M. Kline ed.) W. H. Freeman & Company, 1968

[BGOLT] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, L. Loura, M. C. Timóteo. *Metas Curriculares para o Ensino Secundário - Matemática A, Caderno de Apoio 10.º Ano*, Governo de Portugal, Ministério da Educação e Ciência.

[FdO] A. F. de Oliveira, *Lógica e Aritmética*, Gradiva 1996.



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt



FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

A MATEMÁTICA DO PLANETA VULCANO

O ano 2017 foi espetacular para quem gosta do espaço. A maior descoberta, até hoje, de planetas fora do sistema solar, e um eclipse total de tirar o fôlego. Contaremos hoje como a matemática ajudou a descobrir planetas – os que estavam lá e os que não estavam. Não é a história de um erro, mas de como a ciência tem a enorme capacidade de autocorreção.

Um sistema extra-solar com três planetas na chamada região habitável (onde as rochas são sólidas e a água, líquida) foi recentemente anunciado com grande fanfarra [1].

No entanto, não é desta descoberta que vamos falar, apesar de muita matemática ter sido necessária para chegarmos a este ponto. Iremos, na verdade, voltar no tempo e falar da descoberta dos planetas do nosso sistema, uma história que junta eclipses grandiosos, telescópios cada vez mais potentes, o início da fotografia, coincidências, grandes erros e muitos, muitos, cálculos. Mas, mesmo nos desacertos, não é uma história de falhas, e sim de como dentro da ciência erros ocorrem – pois é humano cometê-los – e são corrigidos. Falaremos de muitos astrónomos, mas é bom ter em mente que até o final do século XIX a astronomia teórica era vista como uma área mais próxima da matemática do que da física (como hoje).

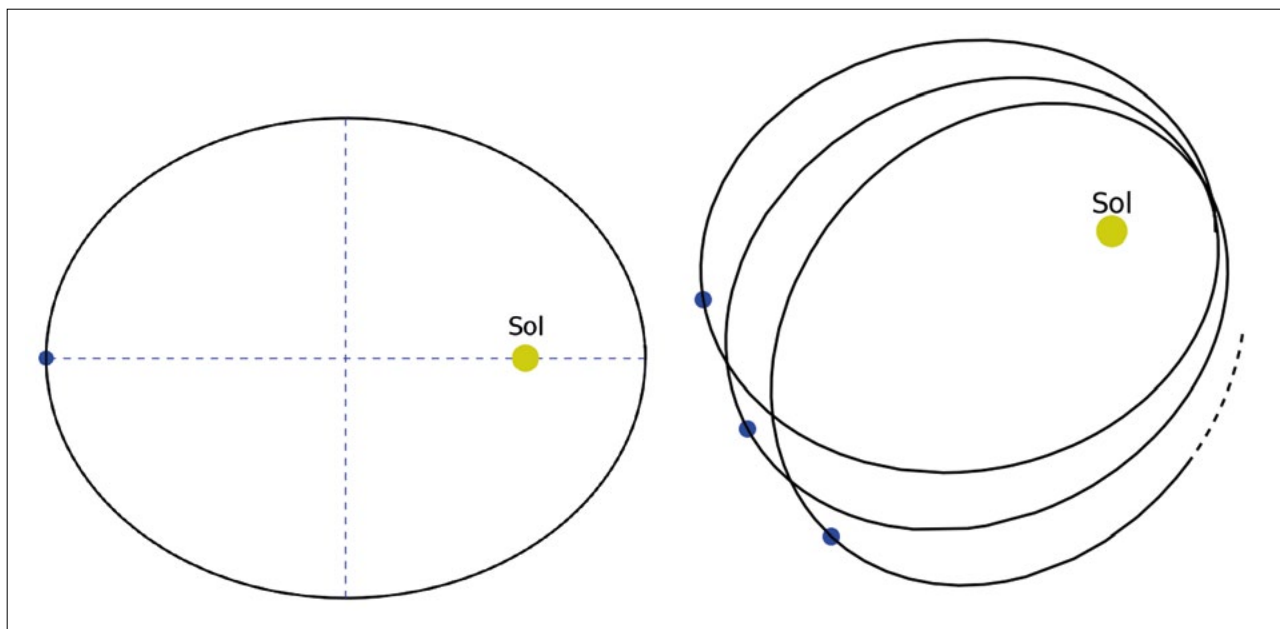
Desde que há registos históricos, são conhecidos cinco planetas: Mercúrio, Vénus, Marte, Júpiter e Saturno (a Terra só foi percebida como tal muito posteriormente; e, para ser justo, muitas culturas consideravam o Sol e a Lua planetas). A sua denominação veio do grego para *viajante*, pois eram vistos como pontos luminosos que se moviam rapidamente sobre um fundo de estrelas fixas (sem movimento relativo). Durante milénios foram construídos modelos que ao prever a posição dos planetas, tentavam explicar a nossa posição no Universo. Com o tempo, estes ficaram mais e mais intrincados, até que, no início do século XVII, o alemão Johannes Kepler mostrou, entre outras

coisas, que as órbitas dos planetas eram elipses com o Sol num dos seus focos, e a seguir Newton mostrou que as observações de Kepler poderiam ser obtidas da hipótese de que a atração gravítica é proporcional ao produto das massas e decai com o quadrado da distância.

No entanto, a órbita elíptica só pode ser obtida exatamente num universo que consista apenas do Sol e de um planeta. Num sistema complexo como aquele em que vivemos, a elipse planetária é apenas uma aproximação, e este será o facto central da nossa história, que segue em muito a referência [2]. Veja a figura 1.

Precisamos de cinco parâmetros para identificar uma elipse. Os primeiros dois parâmetros identificam o plano em que está, outros dois definem os semieixos maiores e menores e o quinto dá-nos a orientação da elipse no referido plano. Quando resolvemos as equações de Newton para a gravidade num universo com apenas dois corpos, estes cinco parâmetros são constantes, e tudo o que resta é saber a posição do planeta nesta órbita em função do tempo.

Quando incluímos um terceiro corpo de massa muito menor do que a soma dos anteriores, todos estes parâmetros deixam de ser constantes. No entanto, alteram-se de forma lenta, naquilo a que se chama de "variação secular". A medição detalhada desta variação é o que nos permite inferir características como a massa dos outros planetas do sistema solar. Pouco a pouco, ao explicar em grande detalhe cada uma destas variações seculares, a teoria de



Newton foi-se impondo. Frequentemente, os triunfos da teoria foram acompanhados pelo desenvolvimento de novas técnicas matemáticas, sobretudo o que se chama atualmente *teoria de perturbações*.

Em 1781, no entanto, algo de novo ocorreu: o alemão radicado na Grã-Bretanha William Herschel descobriu um novo planeta. Úrano foi visto quando o músico e astrónomo vasculhava o céu e viu uma *estrela* não catalogada. Movia-se ano após ano e não tinha as características de um cometa. Foi a primeira vez que isto ocorreu nos registos históricos humanos. Tão relevante que o Rei George III comentou que a vastidão recém-descoberta dos territórios no espaço compensava largamente a perda das colónias norte-americanas!

Úrano seria um excelente teste para o sistema Newtoniano (que ainda tinha céuticos). O astrónomo e matemático francês Urbain Le Verrier dedicou-se de corpo e alma ao tópico. Encontrou disparidades tão grandes entre a teoria e as observações que a explicação de tal divergência somente poderia vir de algo inesperado. Úrano não poderia ser explicado alterando a lei da gravidade sem destruir irrevogavelmente tudo o que já havia sido medido detalhadamente.

Desta forma, Le Verrier propôs a existência de um outro planeta, ainda mais distante, Neptuno. Indicou a sua posição, posteriormente confirmada por astrónomos alemães. A fama de Le Verrier foi às alturas, pois descobrira um planeta nas suas folhas de cálculo.

▲ Figura 1. À esquerda, vemos a órbita elíptica de um planeta, num universo onde existem apenas este e o Sol (suposto de massa muito maior do que o planeta, mas esta suposição não é essencial). As linhas tracejadas marcam os semieixos maior e menor e o ponto azul, o *afélio*, o ponto de maior distanciamento do Sol. À direita, vemos uma das consequências sobre a órbita de considerarmos os outros planetas: o *afélio* move-se.

A seguir, resolveu estudar um outro corpo celeste que parecia resistir à teoria. A órbita do planeta Mercúrio é dada por uma elipse que roda a uma velocidade de 575 arcos de segundo por século (ou seja, a sua órbita volta à posição original depois de cerca de 200 mil anos terrestres). No entanto, considerando os efeitos de todos os planetas do sistema solar, faltavam explicar 43 arcos de segundo por século do seu movimento. O que então imaginou Le Verrier: deveria haver mais um planeta, desconhecido, orbitando próximo ao Sol. Chamou-lhe Vulcano, calculou a sua órbita e concluiu que somente poderia ser visto num trânsito (quando passa entre a Terra e o Sol) ou durante um eclipse total.

E agora começa uma sucessão de erros.

No final de 1859, Le Verrier recebe uma carta de um médico provinciano e astrónomo amador, Edmond Modeste Lescaubault, anunciando a observação do trânsito de Vulcano. Le Verrier entra no primeiro comboio para a estação mais próxima da vila de Orgères e completa a

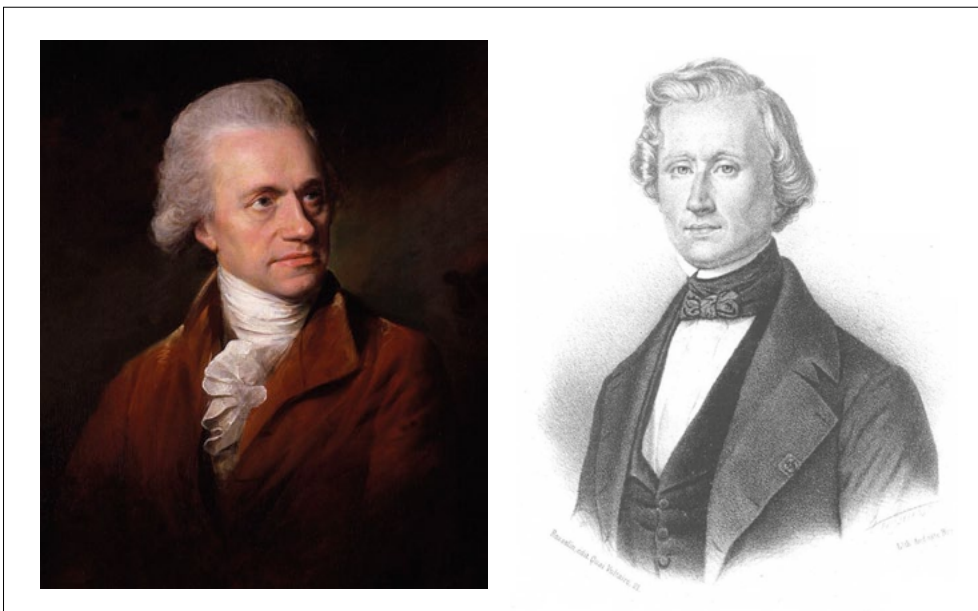


Figura 2. William Herschel (esquerda) e Urbain Le Verrier (direita), únicas pessoas a quem se atribui a descoberta de um planeta no sistema solar. (Por vezes, a descoberta de Neptuno é dividida com o alemão Le Galle, o primeiro a vê-lo, seguindo indicações de Le Verrier). Clyde Tombaugh foi removido desta lista, juntamente com o rebaixamento do planeta que descobriu, Plutão. **Fonte: Wikimedia Commons.**

viagem até a residência de Lescarbault (cerca de 20 km) a pé. Após um duro inquérito, chega à conclusão de que a observação fora realmente feita, apesar de algumas dúvidas sobre as medições realizadas – erros de boa fé de um amador, pensou Le Verrier.

Retorna a Paris e em 2 de janeiro de 1860 anuncia na Academia de Ciências que o *seu* planeta, que ninguém antes havia visto, fora descoberto. Orgulhoso de uma descoberta 100% francesa, o Imperador Napoleão III concedeu a Legião de Honra, a mais alta comenda francesa, no mesmo mês ao anteriormente obscuro médico do interior [3].

Dia 29 de julho de 1878, assim como em fins de agosto de 2017, um eclipse total varreu grande parte dos EUA. Pouco antes, em 1877, o *The New York Times* contou os detalhes da descoberta de Vulcano aos seus leitores [4], que já era conhecida pelos especialistas, como podia ser visto em [5]. Veja a figura 3.

No dia previsto, vários observatórios prepararam-se para vasculhar o céu; alguns iriam dedicar preciosos segundos à procura de Vulcano. Cavaleiros estavam a postos junto a telégrafos para que, se um astrónomo identificasse Vulcano, pudesse rapidamente comunicar as coordenadas para o próximo para fins de verificação.

As conclusões foram dúbias. Enquanto uns tinham a certeza de que lá estava, outros nada viram. A própria observação original foi posta em causa. Coincidentemente,

um experiente astrónomo estava a observar, nas Caraíbas, as manchas solares ao mesmo tempo que Lescarbault olhava para o Sol. Este relatou que não houve trânsito algum nesse dia, apenas um maior número de manchas – que somente alguém sem experiência poderia confundir com um planeta.

Com a introdução do uso de chapas fotográficas acopladas a telescópios no final do século XIX, ficou cada vez mais óbvio que Vulcano não existia. A anomalia de Mercúrio só foi finalmente explicada alguns anos mais tarde. O alemão Albert Einstein, visto na sua época tanto como físico como como matemático (hoje em dia, é visto muito mais como físico), criou a chamada Teoria Geral da Relatividade, suplantando a lei da gravidade de Newton. A explicação para o avanço da órbita de Mercúrio pode ser obtida a partir de um efeito corretivo na lei da gravidade que depende da velocidade do planeta. Sendo Mercúrio o mais rápido dos planetas, é onde a diferença entre as duas teorias mais se nota.

Assim terminamos uma história da qual normalmente só se conta o grande triunfo: Neptuno, quando apenas com a matemática se descobriu um planeta. Vulcano foi, de certa maneira, varrido para o porão da história. Mas a sua remoção também tem um profundo carácter matemático. Einstein não estava a tentar explicar a anomalia de Mercúrio, nem a provar ou negar a existência de Vulcano. Estava muito mais preocupado em exigir das

Du 23 janvier 1860.

Rapport à l'Empereur et nomination du docteur Lescarbault dans la Légion d'honneur.

Sire ,

Un progrès important a été récemment accompli dans la connaissance du système planétaire. Au mois de septembre 1859, M. Le Verrier , l'éminent directeur de l'Observatoire de Paris, apportait devant l'Académie des sciences la preuve, fondée sur des calculs certains, de l'existence, dans le voisinage du soleil, d'astres qu'on n'avait point encore reconnus. Cette démonstration donnait la clef des anomalies apparentes relevées dans les mouvements de la terre et de Mercure. Il appartenait à l'observation de définir les faits :

NATURE

469

THURSDAY, SEPTEMBER 28, 1876

THE INTRA-MERCURIAL PLANET OR PLANETS

THE question of the existence of one or more planetary bodies revolving within the orbit of Mercury is again revived by Weber's observation of a round black spot

the transits so frequent that it is in a high degree improbable the planet could have so long escaped certain detection. Some few of the observations, as just remarked, we may perhaps refer to comets in transit ; it remains to endeavour to ascertain from observations not thus explained what period or periods will best represent them, with the view to being warned of the probable times of future transits.

leis físicas uma elegância e uma simetria que somente a matemática pode proporcionar. A explicação de um dos grandes desafios intelectuais da segunda metade do século XIX veio de graça.

REFERÊNCIAS

[1] NASA Telescope Reveals Largest Batch of Earth-Size, Habitable-Zone Planets Around Single Star. Nasa press release 17-015, 22/02/2017.

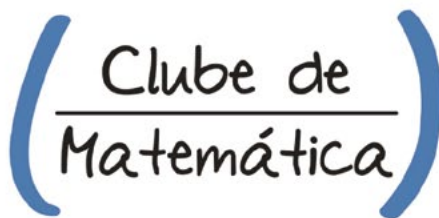
[2] Richard Baum e William Sheehan. *In Search of Planet Vulcan: The Ghost in Newton's Clockwork Universe*. Springer, 1997.

[3] *Rapport à l'Empereur et décret nommant le docteur Lescarbault chevalier de la Légion d'honneur*. http://www.persee.fr/doc/baip_1254-0714_1860_num_11_121_9290

[4] Richard Proctor. "Leverrier and the discovery of Neptune", *The New York Times*, 30 de setembro de 1877.

[5] J. R. Hind. "The intramercurial planet or planets". *Nature*, vol XIV, 469– 470, 28 de setembro de 1876.

Figura 3. Em cima: decreto de nomeação de Lescarbault para a Legião de Honra. Em baixo: Anúncio na revista *Nature* da descoberta de Vulcano, em setembro de 1876. Apesar de colocar algumas dúvidas nas diversas observações até então feitas de Vulcano, chama a atenção para o facto de que um inglês, em 1847, já havia detetado um estranho trânsito solar de um possível planeta intramercurial. Fontes: referências no texto.



SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

VISITE O CLUBE DE MATEMÁTICA

DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

- ✓ ARTIGOS DE OPINIÃO
- ✓ ENTREVISTAS
- ✓ PROBLEMAS
- ✓ HISTÓRIAS
- ✓ PASSATEMPOS
- ✓ PRÉMIOS

TUDO ISTO E MUITO MAIS EM WWW.CLUBE.SPM.PT



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

TRIGONOMETRIA NA ANTIGA BABILÓNIA?

Terá a trigonometria sido criada na antiga Babilónia, séculos antes de ser reinventada na antiga Grécia?

Não é vulgar a História da Matemática ser notícia, mas neste verão foi isso que aconteceu. Por exemplo, uma notícia do *Observador*,¹ publicada a 25 de agosto, teve por título “Desvendado enigma matemático com 3700 anos” e começava por:

“A análise de uma tabela trigonométrica com cerca de 3.700 anos leva a crer que os matemáticos da Babilónia já estudavam trigonometria muito antes dos gregos.”

Este jornal limitou-se a fazer eco do que muitos outros meios de comunicação social fizeram nos mais diversos países. Por exemplo, o *The Telegraph* publicou também uma notícia sobre este tópico.²

Na origem disto, encontra-se o artigo [2], publicado numa revista de História da Matemática chamada, muito apropriadamente, *Historia Mathematica*. Antes de descrever o artigo, convém fazer uma introdução à Matemática da Babilónia.

O período histórico que nos interessa aqui situa-se entre os anos 1830 a.C. e 1530 a.C., aproximadamente. A Matemática desenvolvida nesta época na Babilónia (ou Mesopotâmia) tem muitos aspetos fascinantes, que podem ser vistos em [3]. Para começar, há o sistema de numeração empregue. Tratava-se de um sistema de numeração posicional em base 60, cuja influência ainda se nota nos nossos dias: é por causa dele que dividimos cada grau e cada hora em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos.

Outro aspeto interessante da Matemática na Babilónia é o meio físico usado para a preservar. Os textos eram escritos em placas de barro, que depois eram cozidas. Este material é bastante resistente e centenas de placas desse tipo foram descobertas em escavações desde meados do século XIX. Aquela que é talvez a mais famosa de todas e que é também a que é a fonte de toda a recente agitação é a que se pode ver na figura 1, conhecida por Plimpton 322.

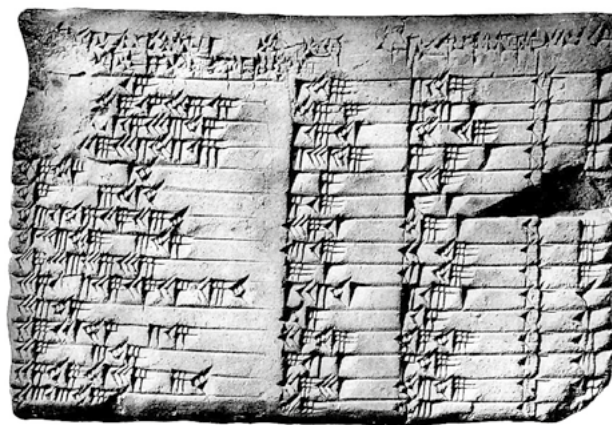


Figura 1. Placa de barro Plimpton 322.

¹<http://observador.pt/2017/08/25/desvendado-enigma-matematico-com-3-700-anos/>

²<http://www.telegraph.co.uk/science/2017/08/24/3700-year-old-babylonian-tablet-rewrites-history-maths-could/>

O seu nome tem origem em George Arthur Plimpton, um editor norte-americano que a comprou a um arqueólogo em 1922. Tem o tamanho aproximado de um postal: 127 mm de comprimento por 88 mm de largura. Além disso, tem cerca de 2 cm de espessura. Aquilo que a placa contém foi descrito no artigo [4], publicado em 1945.

E aquilo que a placa contém são 15 linhas de números (antecedidas de uma linha com nomes das colunas), distribuídos por quatro colunas. A quarta está presente unicamente para numerar as linhas (contém os números de 1 a 15, por esta ordem). O que realmente interessa são as três primeiras colunas. Começemos pela segunda e pela terceira. As três primeiras linhas destas duas colunas podem ser vistas na tabela 1.

Tabela 1. Extrato da placa Plimpton 322

119	169
3 367	4 825
4 601	6 649
...	...

E o que é que são estes números? À partida, parecem números naturais aleatórios, tirando o facto de o da direita ser sempre maior do que o da esquerda. Por esta amostra, poderia parecer que os números de cada coluna estão dispostos por ordem crescente, mas não é assim em geral, pois, por exemplo, os números da quinta linha são 65 e 97. Além disso, os números da quarta linha (12 709 e 18 541) são os maiores de todos.

Há aqui uma regra escondida, que se revela ao elevarmos o número da direita ao quadrado e lhe subtrairmos o quadrado do da esquerda:

- ▶ $169^2 - 119^2 = 14.400 = 120^2$;
- ▶ $4.825^2 - 3.367^2 = 11.943.936 = 3.456^2$;
- ▶ $6.649^2 - 4.601^2 = 23.040.000 = 4.800^2$

e assim por diante. O que se passa é que os números da segunda coluna são “catetos” e os da terceira coluna são “hipotenusas” de tripletos pitagóricos, ou seja, de tripletos (a,b,c) de números naturais tais que $a^2 + b^2 = c^2$. De facto, é mais preciso do que isto: o número da segunda coluna é sempre o cateto mais curto de um tal triplete pitagórico (como em cada um dos exemplos que vimos).

Há outra regra oculta nestes números, que se torna clara ao decompormos em fatores primos os catetos longos dos tripletos pitagóricos envolvidos. Ao fazermos isto aos três primeiros, obtemos:

$$\blacktriangleright 120 = 2^3 \times 3 \times 5;$$

$$\blacktriangleright 3.456 = 2^7 \times 3^3;$$

$$\blacktriangleright 4.800 = 2^6 \times 3 \times 5^2.$$

O leitor está a ver o que há em comum nestas decomposições? Não? Então continuemos. O cateto longo da quarta linha é

$$\sqrt{18.541^2 - 12.709^2} = 13.500 = 2^2 \times 3^3 \times 5^5.$$

Como já foi referido, há um caso no qual o cateto curto tem o valor 65 e a hipotenusa tem o valor 97; nesse caso, o cateto longo vale $72 = 2^3 \times 3^2$.

O que há em comum a todos os catetos longos é o facto de os seus fatores primos serem sempre 2, 3 ou 5. E qual é a importância disto? Acontece que, como já foi referido, na Babilónia os cálculos eram feitos em base 60 e os fatores primos de 60 são 2, 3 e 5. Resulta daí que as frações irredutíveis m/n que podem ser representadas em base 60 com somente um número finito de algarismos são precisamente aquelas para as quais n não tem nenhum fator primo além de 2, 3 e 5, da mesma maneira que, em base 10, as frações irredutíveis que podem ser representadas com somente um número finito de algarismos são aquelas para as quais n não tem nenhum fator primo além de 2 e 5.

Passemos à primeira coluna. O que esta contém é passível de ser interpretado de diversas maneiras. Uma delas é a seguinte: se estamos a falar de um triplete pitagórico (c,l,h) , onde c é o cateto curto, l é o cateto longo e h é a hipotenusa, então a primeira coluna contém o número c^2/l^2 . Outra interpretação é a seguinte: contém o número $h^2/l^2 (= 1 + c^2/l^2)$. Em qualquer dos casos, os números da coluna da esquerda estão dispostos por ordem decrescente, sendo o maior 0,9834028 e o menor 0,3871605 (na primeira das interpretações atrás mencionadas; para passar para a segunda, basta adicionar 1 a cada número).

Repare-se que os valores dos números fracionários do parágrafo anterior são somente aproximadas, *mas são exatos no sistema de numeração da Babilónia*, precisamente por se estar em cada caso a dividir por um número que não tem outros fatores primos além de 2, 3 e 5.

Antes de passarmos ao artigo que criou toda esta agitação, há um aspecto lateral que convém comentar. O texto do *Observador* atrás mencionado contém esta passagem:

“Segundo os investigadores, existem evidências de que o povo da Babilónia conhecia a famosa equação de Pitágoras (em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual

à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos), muito antes de o grego lhe ter dado o nome.”

É difícil errar tanto em tão pouco espaço. Vejamos:

► Segundo os investigadores, o que existem são provas. “Evidência” é a qualidade de ser evidente e também pode ser considerado uma noção clara ou uma certeza manifesta, o que não é o caso aqui. Naturalmente, o que houve aqui foi uma má tradução para português do termo *evidence*.

► O artigo original usa a designação tradicional para o teorema de Pitágoras e não a expressão “equação de Pitágoras”.

► Quem lê o texto do *Observador* pode ficar com a impressão de que isto (ou seja, o teorema de Pitágoras ser anterior a este) é uma descoberta nova. De facto (como os autores do artigo deixam claro), é algo que já é aceite há décadas que o chamado teorema de Pitágoras já era conhecido na antiga Babilónia, cerca de um milénio antes de Pitágoras ter sequer nascido. Este conhecimento provém do estudo de outras placas de barro da Babilónia, além da Plimpton 322.³

Os autores do artigo, Daniel Mansfield e Norman J. Wildberger, divulgaram no *YouTube* filmes relativos a este assunto. Um deles é bastante curto e só surge aí o primeiro autor.⁴ Há outros, mais longos, no canal do *YouTube* do segundo autor.⁵ Ambos são professores na Universidade de Nova Gales do Sul, na Austrália.

E o que é que eles defendem relativamente à placa Plimpton 322? Defendem uma ideia, que não é nova, segundo a qual a placa é uma tabela trigonométrica.⁶ Esta ideia já fora sugerida no texto original de Neugebauer e Sachs [4]; veja-se também [1, § 2.2], embora o autor deste texto favoreça a ideia de que a placa Plimpton 322 tem um significado aritmético e não trigonométrico.

Mansfield e Wildberger defendem que a tabela Plimpton 322 é uma tabela trigonométrica, mas de um tipo de trigonometria fundamentalmente distinto do atual. A trigonometria, tal como a conhecemos actualmente, está intimamente ligada à noção de ângulo. Wildberger e Mansfield apresentam a ideia de que a trigonometria que se manifesta nesta tabela tem origem na relação entre os comprimentos dos lados e das diagonais de retângulos. Considere-se, por exemplo, o retângulo da figura 2, o qual tem 72 unidades de comprimento, 65 unidades de largura e cuja diagonal tem 97 unidades de comprimento. Isto corresponde a uma das linhas da Plimpton 322, aquela na

qual surgem os números 65 na segunda coluna e 97 na terceira.

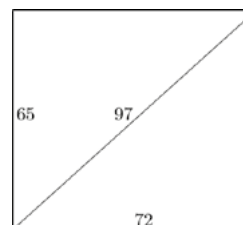


Figura 2. Retângulo com diagonal.

Não há nada de errado na ideia de que a trigonometria (ou qualquer outro ramo da matemática) tenha tido, noutra época e noutra cultura, uma abordagem radicalmente diferente da atual. Pelo contrário, é frequentemente um obstáculo tentar compreender a matemática de outra era impondo a nossa maneira de ver as coisas. No entanto, convém que se apresentem provas de que a nova interpretação está correta, e isso não é algo que os autores façam.

Outro aspecto negativo do artigo de Mansfield e Wildberger está no que têm a dizer sobre números e, mais precisamente, sobre a exatidão dos cálculos a que fazem referência.⁷ É impressionante constatar a quantidade de vezes que os autores mencionam este aspeto. Por exemplo, escrevem que, caso a interpretação deles esteja correta, a tabela Plimpton 322 é “única devido à sua natureza exata, a qual faria dela a única tabela trigonométrica do mundo *totalmente precisa*” (com o itálico no texto original). O que é que eles querem dizer com isto? O que se passa é que a tabela está construída, como já foi referido, de maneira a que todos os quocientes que surgem na primeira coluna tenham denominadores cujos únicos fatores primos sejam 2, 3 e 5, o que faz com que se possam exprimir em base 60 com somente um número finito de algarismos. Observe-se que, uma vez que para isto só interessam os fatores primos da base, o resultado seria exatamente o mesmo se trabalhássemos em base 30 e não em base 60.

³http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_Pythagoras.html

⁴<https://www.youtube.com/watch?v=i9-ZPGpIAJE>

⁵<https://www.youtube.com/user/njwildberger>

⁶<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/mathhist/plimnote.html>

⁷Algumas das observações que se seguem também foram feitas no blogue “Roots of Unity” da *Scientific American*; veja-se <https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/dont-fall-for-babylonian-trigonometry-hype/>

E se continuarmos a trabalhar em base 10? Não poderemos construir uma tabela trigonométrica análoga, na qual os catetos longos dos triângulos pitagóricos não tenham outros fatores primos além de 2 e de 5? A resposta é afirmativa; o preço a pagar, por assim dizer, é que os números com que teremos de trabalhar serão bastante maiores. Mas isso é o que acontece sempre que se passa de uma base para outra: algumas coisas ficam mais fáceis e outras ficam mais difíceis.

Além disso, o facto de trabalharmos com frações cuja expansão em base 60 só exige um número finito de algarismos também tem um preço: é que os ângulos dão saltos irregulares, ao contrário de uma tabela trigonométrica tradicional, onde se podem ver, por exemplo, os valores de $\tan 1^\circ$, $\tan 2^\circ$, $\tan 3^\circ$, e assim sucessivamente. Podemos então optar entre trabalhar somente com números que se podem exprimir com um número finito de algarismos ou trabalhar com os ângulos uniformemente espaçados. Mais uma vez, cada opção tem vantagens e desvantagens relativamente à outra, embora, com a facilidade atual de acesso a computadores que fazem cálculos com uma enorme rapidez, seja difícil que, na prática, se possa defender a primeira opção.

Por vezes, é difícil levar a sério as afirmações dos autores. Por exemplo, no vídeo curto acima mencionado onde aparece somente Daniel Mansfield é afirmado que, em base 10, só há duas frações exatas: $1/2$ e $1/5$. Isto é um disparate. Não há nada de inexato em $1/3$. O que se passa é que, contrariamente a $1/2$, por exemplo, $1/3$ não se pode exprimir, em base 10, sob a forma $0,a_1a_2a_3\dots$ usando somente um número finito de algarismos. E, com efeito, em base 60 já não há esse problema. Mas o que é perturbador aqui é a afirmação de que $1/2$ e $1/5$ são as *únicas* frações bem-comportadas (neste sentido) relativamente à base 10. Então $1/4$? Ou $1/8$? No vídeo referido, ao mencionarem as frações que podem ser escritas em base 60 com somente um número finito de algarismos, aí já são referidas $1/4$ e $1/8$. A dualidade de critério é bastante óbvia e chocante.

Deve ser aqui referido que o segundo autor, Norman J. Wildberger, é muito crítico do uso do infinito em matemática. Por exemplo, no prefácio do seu livro *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry*⁸, Wildberger afirma (pág. xv) que a teoria aí exposta “une as três áreas nucleares da Matemática – Geometria, Teoria dos Números e Álgebra – e expulsa a Análise e os processos infinitos das bases do assunto”. Também defende aí (págs. 22–23) que há graves problemas lógicos por resolver relativamente ao conceito de número decimal (que o autor

define como sendo os números que têm uma “expansão decimal especificada por um algoritmo, um programa de computador ou uma função”) e, por maioria de razão, ao conceito de número real. Assim, não admira que as ideias defendidas no artigo em questão encaixem como uma luva na sua visão da matemática.

Para terminar, recomendo ao leitor a leitura do artigo [5]⁹ para ter uma visão sóbria e bem fundamentada relativamente à placa Plimpton 322, curiosamente também publicado na *Historia Mathematica*.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Calinger, *A contextual history of Mathematics to Euler*, Prentice Hall, 1999.
- [2] D. F. Mansfield e N. J. Wildberger, “Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry”, *Historia Mathematica* (no prelo), <https://doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001>.
- [3] O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover, 1957.
- [4] O. Neugebauer e A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*, Amer. Oriental Series 29, 1945, pp. 38–41.
- [5] E. Robson, “Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322”, *Historia Mathematica* 28, nº 3, pp.167–206, 2001.

⁸<http://web.maths.unsw.edu.au/~norman/book.htm>

⁹<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086001923171>



Publicado originalmente no jornal Público, em 15/07/2017. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:

Ana Cristina Moreira Freitas Universidade do Porto

Daniel Pinto Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:

Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **Humberto Bortolossi** Universidade Federal Fluminense, Brasil • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Peregrino Costa** Universidade de S. Tomé e Príncipe, São Tomé e Príncipe • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

Fid'algo – Print Graphic Design

Rua da Nau Catrineta n 14 2^o Dtr 1990-186 Lisboa

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE:

Sociedade Portuguesa de Matemática

Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

TIRAGEM 1250 Exemplares

ISSN 0373-2681 • ICS 123299 • DEPÓSITO LEGAL: 159725/00



A VESICA PISCES E O PENTÁGONO REGULAR

JOSÉ NETO

PROFESSOR DE MATEMÁTICA APOSENTADO

alves.neto@live.com.pt

Uma vez expostas à luz crua da matemática, o que irá restar da *vesica pisces* e da *mandorla*?

No n.º 181, março de 2017, a *Gazeta de Matemática* publicou o artigo “Mandorla e vesica pisces – sementes dos polígonos”, da autoria de Filipe Alberto da Silva [1].

Inerente a este trabalho está a convicção de que a matemática não vive separada da Filosofia e da Estética. Concordo entusiasticamente: nas suas tentativas para tornar o Universo inteligível, o Homem encontra, de vez em quando, harmonias que o surpreendem e fascinam – e que o levam a adotar princípios de harmonia como bússola orientadora nas suas investigações. Porém, o caminho nunca é seguro: as esperadas harmonias podem esconder-se quando esperamos encontrá-las e revelar-se quando menos contamos.

Por muito cativante que seja a ideia de que um esquema gráfico simples como é o da *mandorla/vesica pisces* pode encerrar segredos que vão da criação do mundo à geração dos polígonos regulares, passando pela ascensão de Cristo e pelo princípio feminino, o nosso entusiasmo esfria quando observamos que o pentágono cuja construção é descrita no artigo não é regular.

Proponho-me recordar aqui a construção do pentágono regular como me ensinaram nas aulas de desenho do 4.º ou do 5.º ano do liceu, fazer a sua justificação e analisar a construção apresentada no artigo, “pelo método da *vesica pisces*”.

Uma vez expostas à luz crua da matemática, o que irá restar da *vesica pisces* e da *mandorla*?

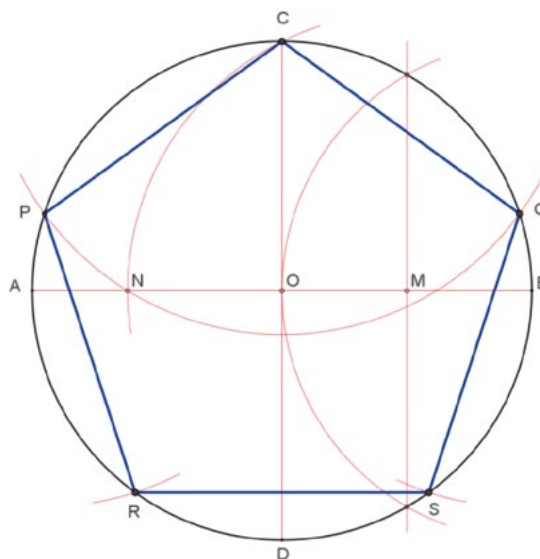
1. CONSTRUÇÃO DE UM PENTÁGONO REGULAR INSCRITO NUMA CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos a circunferência com centro O , já dividida por dois diâmetros perpendiculares, $[AB]$ e $[CD]$.

Passos da construção:

- ▶ Determinamos o ponto médio do raio $[OB]$: ponto M .
- ▶ Desenhamos um arco de circunferência com centro M e raio \overline{MC} , que encontra o segmento $[OA]$ no ponto N .
- ▶ Com centro em C e raio \overline{CN} , desenhamos um arco de circunferência, que encontra a circunferência dada nos pontos P e Q .

- ▶ Com centro em P , desenhamos um arco com o mesmo raio considerado no passo anterior, determinando na circunferência dada o ponto R . Repetimos este processo com centro em Q e determinamos o ponto S .
- ▶ O polígono $[CPRSQ]$ é um **pentágono regular**, isto é: um **pentágono que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais**.



2. JUSTIFICAÇÃO DA CONSTRUÇÃO

Começemos por notar que as cordas $[PC]$, $[CQ]$, $[PR]$ e $[QS]$ foram construídas com o mesmo comprimento, pelo que os ângulos ao centro POC , COQ , POR e QOS são iguais. Se cada um destes ângulos tiver 72° , o mesmo sucede com o ângulo ROS , pois $360^\circ - 4 \times 72^\circ = 72^\circ$. E isso implica que a corda $[RS]$ seja igual às outras quatro, pelo que o pentágono terá os cinco lados iguais.

Quanto aos ângulos do pentágono, eles também serão iguais, pelo facto de estarem inscritos em arcos de circunferência com a mesma amplitude.

Então, se provarmos que o ângulo POC tem 72° , podemos assumir que o pentágono está bem construído.

Para chegar aí, vamos calcular os comprimentos de alguns segmentos, tomando como unidade o raio da circunferência.

$$\text{Temos então } \overline{OB} = 1 \text{ e } \overline{OM} = 1/2.$$

Pelo teorema de Pitágoras, podemos afirmar que

$$\overline{MC} = \overline{MN} = \sqrt{5/4}.$$

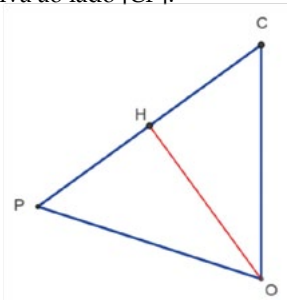
Temos então

$$\overline{NO} = \overline{MN} - \overline{OM} = \sqrt{5/4} - 1/2 = 1/2 (\sqrt{5} - 1).$$

De novo pelo teorema de Pitágoras, encontramos

$$\begin{aligned} \overline{CP} = \overline{CN} &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})} \\ &= \sqrt{\frac{10}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Consideremos agora o triângulo $[POC]$, isósceles, e a altura $[OH]$, relativa ao lado $[CP]$.



Ainda com o teorema de Pitágoras, calculamos:

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \sqrt{1^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{CP}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

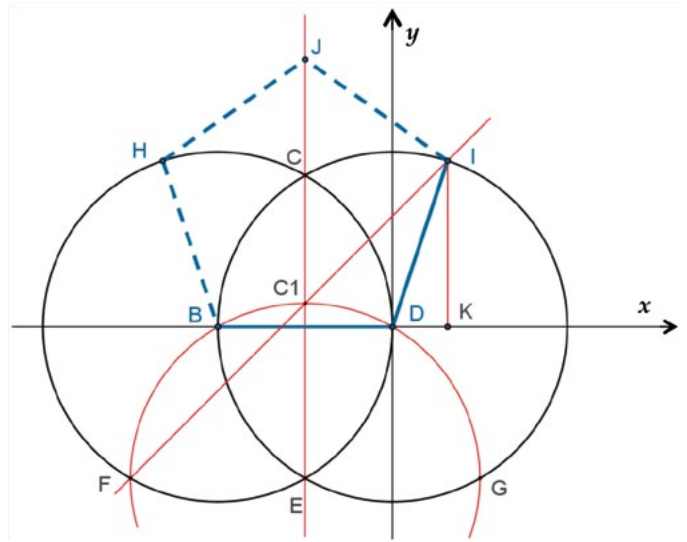
E podemos então afirmar que o cosseno do ângulo POH é igual a $\frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Mas este valor, que é igual a metade do célebre número de ouro, é o cosseno de 36° (ver demonstração em anexo). E como a função cosseno é injetiva no conjunto dos ângulos agudos, daí deriva que a amplitude do ângulo POH é 36° e a amplitude do ângulo POC , dupla daquela, é 72° .

□

3. CONSTRUÇÃO DO PENTÁGONO REGULAR (?) “PELO MÉTODO DA VESICA PISCES”

Vejamos agora a construção apresentada em [1].

Como base da construção, dispomos de duas circunferências iguais, sendo o centro de cada uma delas um ponto da outra circunferência (ou seja, uma vesica piscis, com a sua mandorla central). Na figura à direita, os centros são B e D e o segmento por eles determinado é o primeiro lado do pentágono que se vai construir. As circunferências encontram-se em dois pontos, C e E ,



Seguidamente, transcrevemos a construção em quatro passos que vem descrita em [1]. A figura ilustra essa construção, mas apenas parcialmente.

- 1) Com centro em E até B , traçar arco de circunferência. Encontrados os pontos F e G na vesica piscis e o ponto C_1 no eixo vertical CE .
- 2) Traçar retas de G e F para C_1 . Encontrados os pontos H e I por interseção das retas GC_1 e FC_1 (respectivamente) com os arcos exteriores da vesica.
- 3) Centro em H até B , traçar arco. Repetir a mesma operação com centro em I . Encontrado o ponto J no eixo vertical CE .
- 4) Completar o pentágono regular $JIDBH$.

Analisemos esta construção.

Na figura que apresentamos, considerámos um referencial cartesiano ortonormado, com origem em D , cujos eixos são paralelos aos eixos da vesica piscis. Como unidade, tomamos o comprimento de $[BD]$.

Acrescentámos o segmento $[IK]$, perpendicular ao eixo Dx , com $K \in Dx$.

Como a soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360° , se o pentágono fosse regular, a amplitude do ângulo IDK seria 72° (um quinto de 360°) – o que não sucede, como vamos ver.

A circunferência de centro D é definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

Como as circunferências de centros B e E têm raio unitário, temos que $\overline{EF} = \overline{EB} = \overline{ED} = \overline{BF} = \overline{BD} = 1$, pelo

que os triângulos $[BDE]$ e $[BEF]$ (não desenhados) são equiláteros e de lado 1. Os pontos E e F têm ordenada $-\sqrt{3}/2$ (igual a $-\cos 60^\circ$) e as suas abcissas são, respetivamente, $-1/2$ e $-3/2$ (igual a $-1/2 - 1$). Ficamos assim a conhecer os pontos seguintes:

$$D(0, 0) \quad B(-1, 0) \quad E(-1/2, -\sqrt{3}/2) \quad F(-3/2, -\sqrt{3}/2)$$

Quanto ao ponto C_1 , atendendo a que $\overline{C_1E} = 1$, as coordenadas são $(-1/2, 1 - \sqrt{3}/2)$.

Então, a reta FC_1 (que vai determinar o ponto I na circunferência de centro D) tem declive

$$\frac{1 - \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2}{-1/2 + 3/2} = 1.$$

e pode ser definida pela equação $y + \sqrt{3}/2 = 1(x + 3/2)$, equivalente a $y = x + \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, as coordenadas do ponto I podem ser obtidas resolvendo o sistema constituído pelas equações da circunferência de centro D e da reta FC_1

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + \frac{3-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Substituindo na 1.ª equação y por $x + \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, obtemos uma equação do 2.º grau em x , que fornece as abcissas dos dois pontos de encontro da reta FC_1 com a circunferência. O ponto I é um deles e a sua abcissa é a seguinte:

$$\frac{-3 + \sqrt{3} + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}.$$

Dispensamo-nos de apresentar aqui a resolução da equação.

Observando o triângulo retângulo $[IDK]$, cuja hipotenusa tem comprimento 1, podemos então dizer que

$$\cos \hat{IDK} = \frac{-3 + \sqrt{3} + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}.$$

Ora este valor difere do coseno de 72° , que é igual a $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. [VER ANEXO]

Com auxílio de uma calculadora, ficamos a saber que a amplitude aproximada do ângulo IDK é $71^\circ 38'$.

Portanto, este **pentágono não é regular** – apesar de ser uma boa aproximação e de ter os cinco lados iguais.

CONCLUSÃO

A informação veiculada no artigo [1] é muito rica e sugestiva nos aspetos estético, histórico, arquitetónico e filosófico.

Mas e do ponto de vista estritamente matemático? Poderemos “salvar” a *vesica piscis*?

A minha resposta é *sim*, se procedermos através de uma construção alternativa. De facto, a *vesica* presta-se

mesmo a construções exatas do pentágono regular, sendo dado o comprimento do lado.

Passo a expor a ideia, em traços largos.

Não é difícil provar que o quociente entre qualquer diagonal do pentágono e qualquer lado do mesmo é o número de ouro,

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad \text{[VER ANEXO]}$$

Retomemos então a figura anterior, continuando a considerar $\overline{BD} = 1$ (lado do pentágono a construir).

O vértice contíguo a D e situado à direita de D , que vamos designar por $I1$ (para não confundir com I), fica determinado por duas condições simples: dista $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ de B e dista 1 de D .

Se considerarmos um triângulo retângulo em que um cateto tem comprimento $1/2$ e o outro tem comprimento 1 (o que, na *vesica*, pode ser feito de muitas maneiras), obtemos, na hipotenusa, o comprimento $\sqrt{5}/2$. Na figura, construiu-se $[PQ]$ e, depois, com o mesmo comprimento, $[PR]$.

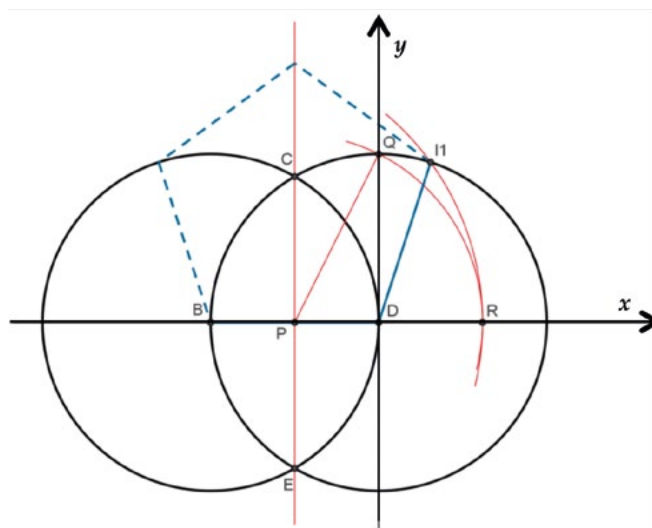
Depois, se prolongarmos com um segmento de comprimento $1/2$, já temos um outro segmento com comprimento

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Na figura, temos $[BR]$.

Para determinar o ponto $I1$, basta agora determinar um dos dois pontos de encontro da circunferência de centro D e raio 1 com a circunferência de centro B e raio Φ .

E o resto da construção decorre sem dificuldade.



ANEXO – VALORES TRIGONOMÉTRICOS DE 36° E 72° E MEDIDA DA DIAGONAL DO PENTÁGONO REGULAR

Por estarem associadas, de alguma maneira, ao pentágono regular, as amplitudes de 18°, 36°, 54° e 72° merecem ser consideradas *amplitudes notáveis*, a par das amplitudes de 30°, 45° e 60°.

As amplitudes de 36° e 54°, respetivamente dupla e tripla da amplitude de 18°, são, além disso, complementares e, portanto, $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$.

Designando, por razões de comodidade, a amplitude de 18° por α , podemos escrever $\cos(3\alpha) = \sin(2\alpha)$, equação que nos habilita a calcular o valor exato de $\sin 18^\circ$.

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) = \sin(2\alpha) &\Leftrightarrow \cos(2\alpha + \alpha) = \sin(2\alpha) \\ &\Leftrightarrow \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha = \sin(2\alpha) \\ &\Leftrightarrow (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros desta equação por $\cos\alpha$ (que é diferente de zero), vem:

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha &= 2\sin\alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha &= 2\sin\alpha \\ \Leftrightarrow -4\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\alpha &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-4}.\end{aligned}$$

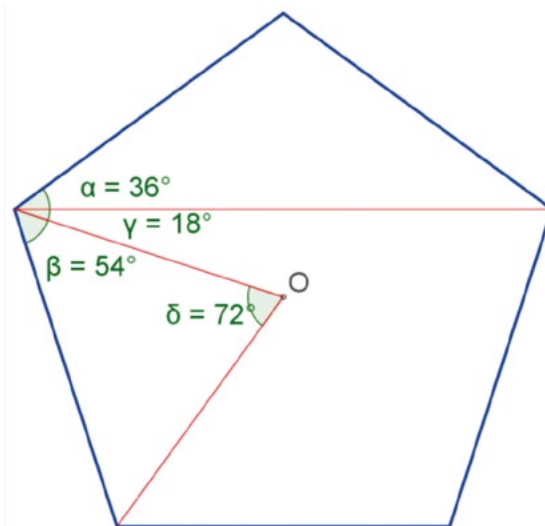
O valor que nos interessa é a solução positiva, portanto,

$$\sin 18^\circ = \frac{1 - \sqrt{5}}{-4}.$$

A partir deste resultado, podemos agora calcular os valores trigonométricos de que precisamos, no contexto da exposição anterior: $\cos 36^\circ$ e $\cos 72^\circ$.

$$\begin{aligned}\cos 36^\circ &= \cos(2 \times 18^\circ) = \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ \\ &= 1 - 2 \times \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{-4}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} \\ &= 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 72^\circ &= \cos(2 \times 36^\circ) = \cos^2 36^\circ - \sin^2 36^\circ \\ &= -1 + 2\cos^2 36^\circ = -1 + 2 \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ &= -1 + 2 \times \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} = -1 + \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$



Quanto à medida da diagonal do pentágono relativa ao lado, podemos ver agora claramente que é Φ .

Observemos a última figura. Se designarmos por l e d as medidas respetivas dos comprimentos do lado e da diagonal, e tomando $l = 1$, segue-se que:

$$\cos 36^\circ = \frac{d/2}{l} \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{d}{2} \Leftrightarrow d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ou seja: $d = \Phi$.

REFERÊNCIAS

[1] Silva, Filipe Alberto da, “Mandorla e Vesica Pisces – Sementes dos Polígonos”, *Gazeta de Matemática* 181, pp. 10-15, mar. 2017.

SOBRE O AUTOR

José Neto é licenciado em Matemática – Ramo Educacional pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e professor de matemática do ensino secundário, aposentado. É coautor do manual de matemática do 10.º ano publicado em 1993 pelas Edições ASA e autor do livro de exercícios resolvidos *Como se faz?* (matemática A, 12.º ano), publicado em 2004 pela mesma editora. Entre 1996 e 2000, orientou estágios pedagógicos de matemática para a Universidade Portucalense.

SOMA DE PALÍNDROMOS

Lagrange demonstrou que todo o número natural pode ser escrito como soma de quatro quadrados perfeitos. Um resultado recente diz-nos que existem também representações dos números naturais como soma de um certo número de palíndromos.



PEDRO J. FREITAS
Universidade
de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt



MANUEL SILVA
Universidade
Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

1 INTRODUÇÃO

Recordemos que uma capicua, ou número palíndromo, é um número inteiro que coincide com o seu reverso, i.e., pode ser lido da mesma forma da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. A noção de palíndromo depende naturalmente da base em que escrevemos o número. Por exemplo, o número 22 é um palíndromo quando consideramos a sua expansão decimal, mas na sua representação binária, dada por 10110, já não é um palíndromo. Para simplificar a discussão, vamos considerar quase sempre a representação decimal.

Existem diversos problemas em aberto envolvendo palíndromos. Talvez o mais famoso seja o dos números de Lychrel. Definimos um processo iterativo que transforma quase todos os números em palíndromos. Começamos por um número natural qualquer e somamos esse número com o seu recíproco, i.e., o número que se obtém lendo da direita para a esquerda. Por exemplo, se o número inicial for 57, somamos 57 com 75 e obtemos 132. Podemos repetir mais uma vez esta operação, somando 132 com o seu recíproco 231, obtendo desta forma 363. O resultado obtido neste segundo passo é um palíndromo! Será que este processo iterativo, independentemente do número de partida, produz invariavelmente um palíndromo? Se experimentarmos um número ao acaso, iremos quase sempre obter, sem ser necessário muitas iterações, um palíndromo. No entanto, alguns números pa-

recem resistir a transformar-se em palíndromos. Veja-se o enigmático 196, para o qual foram calculados, com um esforço computacional significativo, números com mais de mil milhões de dígitos sem que surja um palíndromo. Um número diz-se de Lychrel se nunca produzir um palíndromo pelo processo iterativo descrito. Não se sabe se existe algum número de Lychrel, mas o 196 é o candidato mais bem colocado.

QUADRADOS PERFEITOS E PALÍNDROMOS

Nem todos os conjuntos de números naturais merecem a mesma atenção e o mesmo respeito por parte dos matemáticos. Os conjuntos dos números primos e dos quadrados perfeitos são certamente mais importantes do que o conjunto dos palíndromos. Existem diversos resultados interessantes sobre os números primos, ou sobre os quadrados perfeitos, mas não se conhecem muitas propriedades envolvendo palíndromos. Vamos agora descrever um resultado recente sobre a estrutura aritmética dos palíndromos.

Teorema [2]. *Todo o número natural pode ser escrito como soma de três palíndromos.*

Por exemplo, a representação de 201 como soma de palíndromos é a seguinte: $201 = 101 + 99 + 1$. O resultado é válido não só para a expansão decimal, mas para qualquer base $b \geq 5$. Um conjunto de números naturais S tal que todo o número natural se possa escrever como soma de um número fixo de parcelas de S diz-se uma base aditiva.

Lagrange demonstrou, em 1770, que todo o número natural pode ser escrito como soma de quatro quadrados perfeitos. Podemos dizer que os quadrados perfeitos formam uma base aditiva de ordem 4. Schnirelmann demonstrou, em 1930, que os números primos constituem igualmente base aditiva. Sabemos agora que os palíndromos são uma base aditiva de ordem 3. Este teorema melhora um resultado anterior, também recente, que afirmava ser possível representar qualquer número natural como soma de 49 palíndromos [1].

A demonstração deste resultado ocupa 42 páginas e não é muito instrutiva. A ideia é subdividir os números naturais em diversos tipos, apresentando-se em seguida um algoritmo que mostra produzir sempre uma solução do problema. O algoritmo apresentado pode facilmente ser implementado em computador, para produzir uma solução específica qualquer. Trata-se, por isso, de uma prova construtiva e não apenas uma demonstração de existência. O argumento, como referimos anteriormente, funciona para todas as bases $b \geq 5$.

Falta saber o que se passa para $b = 2, 3, 4$. O problema para palíndromos em bases pequenas foi também resolvido este ano, num outro artigo [3]. Os autores fazem notar que o problema da representação de um número como soma de palíndromos pode ser traduzido naturalmente em termos de linguagens formais e autómatos. Um autômato é uma máquina com um número finito de estados e regras de transição que reconhece certas linguagens, i.e., dada uma palavra, o autômato é capaz de saber se esta pertence ou não à linguagem dada. O primeiro passo é encontrar um autômato que reconheça todos os números que podem ser escritos como soma de palíndromos, para um certo número fixo de parcelas. Em seguida, mostra-se que o autômato definido é universal. A demonstração é feita neste caso por um programa de computador. O autômato utilizado tinha cerca de 25.000 estados, o que é considerado razoável do ponto de vista computacional.

A mesma técnica de demonstração pode certamente ser usada para provar outros resultados matemáticos. Os autores afirmam no final do artigo que, se um argumento matemático implica a análise de demasiados casos, talvez seja boa ideia transformar a demonstração num algoritmo. Melhor ainda, devemos, se possível, procurar um autômato que descreva o problema, e assim produzir uma prova automática.

NÚMEROS PRIMOS E PALÍNDROMOS

Não sabemos se existe, ou não, um número infinito de nú-

meros primos que sejam simultaneamente palíndromos. É possível, com a ajuda de um computador, encontrar diversos números primos palíndromos, mas nada nos garante que estes números se esgotem. Heuristicamente, e se acreditarmos que as definições de número primo e de palíndromo são independentes, deveria ser possível encontrar números arbitrariamente grandes satisfazendo as duas propriedades em simultâneo. Na verdade, para uma certa noção natural de densidade de conjuntos inteiros, podemos demonstrar que quase todos os números palíndromos são compostos, o que nos mostra que estas duas noções não são independentes.

Dirichlet provou, em 1837, que existem infinitos números primos em todas as progressões aritméticas infinitas, desde que não exista um divisor comum a todos os elementos da sequência. Na verdade, o resultado diz-nos que os números primos estão bem distribuídos em todas as progressões aritméticas. Em particular, podemos encontrar tantos primos da forma $3n + 1$ como da forma $3n + 2$, a probabilidade de um número primo deixar resto 1 ou 2 quando dividido por 3 é a mesma. Para algumas propriedades os números primos comportam-se de modo aleatório, ou neutro.

Analogamente ao que se passa com os números primos, existem também infinitos palíndromos em quase todas as progressões aritméticas infinitas. A única exceção são as progressões onde todos os elementos são múltiplos de 10, isto porque, sendo o último dígito zero, não podem conter palíndromos. A distribuição dos palíndromos pelas progressões aritméticas, ao contrário dos primos, não será certamente regular.

Terminamos esta pequena digressão no mundo dos palíndromos com um desafio. Consideremos a sequência infinita: 1, 12, 123, 1234, 12345, ... onde cada elemento se obtém juntando os primeiros n números naturais. Será que algum elemento desta sequência depois do primeiro volta a ser um palíndromo?

REFERÊNCIAS

- [1] W. Banks, *Every Natural Number is the Sum of Forty-nine Palindromes*, *Integers* (2016).
- [2] J. Cilleruelo, F. Luca, L. Baxter, *Every positive integer is a sum of three palindromes*, *Mathematics of Computation* (2017).
- [3] A. Rajasekaran, J. Shallit, T. Smith, *Sums of Palindromes: an Approach via Automata*, submitted to STACS, September 2017.

COORDENADORA



PAULA AMARAL
Universidade
Nova de
Lisboa
pt-maths-in@
spm.pt

AUTORAS

ANA FIDALGO
amdfidalgo@
gmail.com

MARINA FERREIRA
m.amado-
ferreira14@
imperial.ac.uk

ESTRUTURA DE ESPELHOS EM PAINÉIS FOTOVOLTAICOS – CONFIGURAÇÕES ÓTIMAS PARA AUMENTAR A EXPOSIÇÃO SOLAR DURANTE UM DIA

A incorporação de estruturas espelhadas em painéis fotovoltaicos é uma das técnicas utilizadas para aumentar a eficácia dos mesmos. Mas que tipo de superfície deve ter a estrutura? É a essa questão que procuramos responder neste artigo, tendo em conta não só a eficiência energética como também a simplicidade e a viabilidade da sua construção.

1 INTRODUÇÃO

Os painéis fotovoltaicos têm-se revelado cada vez mais importantes no contexto mundial da produção de energia. De acordo com a Agência Internacional de Energia, a energia solar tem o potencial de trazer contribuições consideráveis na resolução de alguns dos problemas mais urgentes que enfrentamos atualmente, nomeadamente no combate às alterações climáticas [1]. Torna-se assim fundamental encontrar novas formas de aumentar a sua eficiência. Uma solução comum, simples e de baixo custo consiste em incorporar uma estrutura espelhada que possibilita a reflexão dos raios solares para o painel, aumentando a intensidade da radiação recebida por este. A figura 1 mostra algumas estruturas possíveis para os painéis e espelhos. Neste artigo, propomos alternativas que consideramos serem mais eficientes.

Apresentamos de seguida uma descrição detalhada do problema industrial. Pretendemos otimizar a exposição solar global do painel fotovoltaico ao longo de todo o dia, para todas as posições relativas do Sol. O sistema painel-espelhos deve ser estático e de baixa manutenção. Uma vez que esta estrutura será para uso industrial, devemos ainda ter em conta o custo e a viabilidade da sua construção.

Para podermos comparar estruturas diferentes será

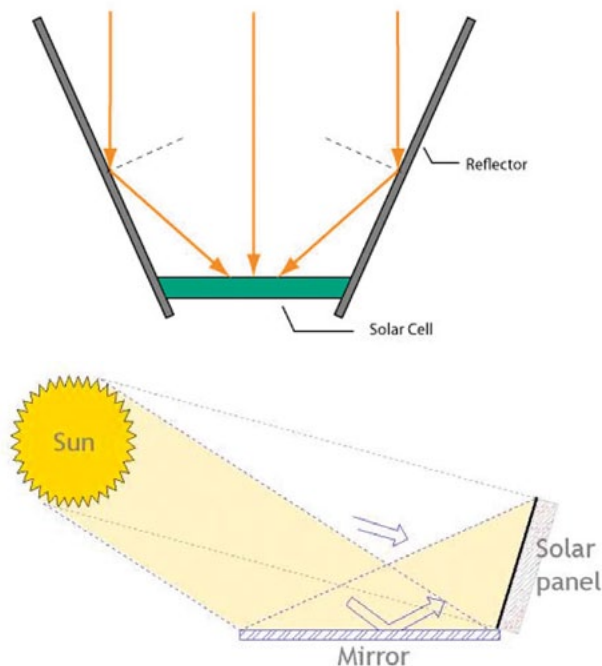


Figura 1. Possíveis configurações em 2D de estruturas de espelhos em painéis fotovoltaicos obtidas em [2] (em cima) e em [3] (em baixo).

necessário perceber primeiro o movimento aparente do Sol no céu e que parte da radiação emitida é que chega ao painel num dado momento.

Para tal, procuramos responder às seguintes questões:

1. Qual é a trajetória do Sol no céu?
2. Que percentagem da energia emitida pelo Sol é absorvida pelo painel?

Quando modelamos os raios solares que chegam à

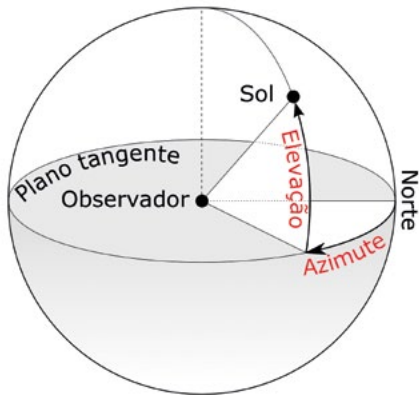


Figura 2. Representação da esfera celeste. Esquema tirado da Wikipedia e editado.

Terra, temos de ter em conta o dia, a hora e a localização geográfica dos painéis. Para termos uma ideia da complexidade deste desafio, apresentaremos de seguida um modelo para a trajetória do Sol no céu.

Imaginemos que estamos posicionados algures no deserto a apontar para o Sol. O nosso objetivo é medir o movimento do Sol relativamente à nossa posição na Terra. A primeira coisa que podemos fazer é identificar a nossa perspectiva dos corpos celestes com uma esfera centrada em nós, em que os corpos celestes são projetados na esfera. A tal esfera chamamos *esfera celeste*. Imaginemos que debaixo dos nossos pés temos um *plano tangente* à Terra nesse ponto onde nos encontramos. Esta situação está ilustrada na figura 2. Se projetarmos o segmento de reta que nos liga ao Sol no plano tangente, obtemos o *raio projetado*. Usando uma bússola, conseguimos identificar a direção do polo norte magnético terrestre. Com isto obtemos dois ângulos. O primeiro é o *azimute*, que corresponde ao ângulo entre o raio projetado e a reta que nos liga ao polo norte. O segundo ângulo é chamado *elevação* ou *altura* e corresponde ao ângulo entre o segmento de reta que nos liga ao Sol e o plano tangente. Estes dois ângulos estão representados na figura 2 e são suficientes para calcular a trajetória do Sol durante um dia. Na figura 3 podemos observar a elevação em função do azimute em Coimbra para diferentes alturas do ano. A elevação máxima de 74°

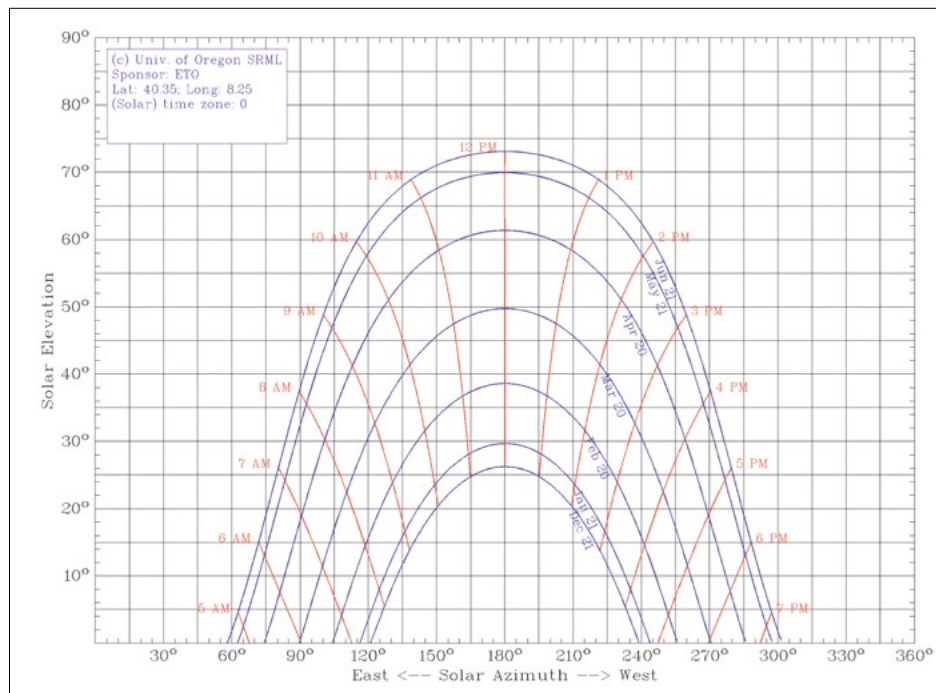


Figura 3. Elevação em função do azimute (em graus) para diversas alturas do ano em Coimbra (latitude: 40.35°). Este gráfico foi obtido através de um programa disponibilizado pelo Radiation Monitoring Laboratory, Universidade de Oregon [7].

é atingida no dia 21 de junho.

Para respondermos à segunda questão, comecemos por enumerar os parâmetros que influenciam a energia absorvida por um painel solar. Por exemplo, um painel consegue apenas absorver até 40% da energia da radiação incidente [4]. A intensidade da radiação solar depende das condições meteorológicas [5] e da distância entre o Sol e a Terra, que varia ao longo do ano. Depois de refletida num espelho, a radiação perde energia, os melhores espelhos atingem uma eficiência de cerca de 85% [6]. Para simplificar, não consideramos estas observações. Algumas delas são constantes, de modo que se podem usar valores normalizados, outras delas provocam apenas pequenas variações na energia absorvida e podem, portanto, ser desprezadas. Teremos apenas em conta que no caso de um painel com uma estrutura de espelhos anexada, tal como representado na figura 1, a radiação que chega ao painel corresponderá à soma das componentes normais dos raios diretos e dos raios refletidos.

Na próxima secção apresentamos a nossa abordagem ao problema, em que propomos a curvatura e a posição ótimas do espelho, que maximizam a energia recebida pelo painel ao longo de todo o dia.

2. MODELO MATEMÁTICO EM 2D E 3D

Começamos por assumir que os raios solares que chegam a um ponto na superfície da Terra durante um dia inteiro estão contidos num plano e que o ângulo desse plano relativamente ao plano tangente à Terra corresponde à elevação do Sol ao meio-dia, o qual designaremos de θ (ver figura 4). Supomos também que não há dissipação de energia durante todo o processo e que o painel solar está contido no plano perpendicular ao plano do movimento aparente do Sol. Consideremos, então, o caso bidimensional em que os raios incidentes fazem um ângulo α (note que ao meio-dia α coincide com o ângulo θ) e o espelho faz um ângulo β com o plano tangente à Terra nesse ponto, como está esquematizado na figura 5. Os ângulos são medidos em radianos. Para maximizar a energia que chega ao painel, temos de escolher o ângulo β do espelho de modo a que, para um dado α , os raios refletidos sejam perpendiculares ao painel solar.

De acordo com a lei da reflexão, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, isto é, $\beta - \alpha$. Tem-se ainda que os ângulos definidos pela direção normal ao painel solar e a cada borda do espelho são verticalmente opostos, pelo que cada um mede $\pi/2 - \beta$ radianos. Para que os raios solares sejam normais ao painel solar, o ângulo entre

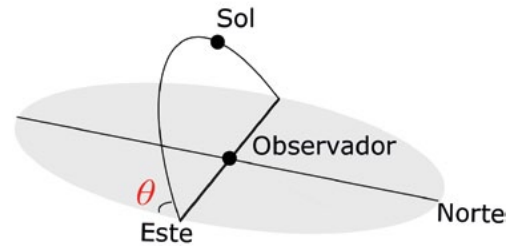


Figura 4. Representação do ângulo θ que o plano do movimento aparente do Sol faz com o plano tangente à Terra no ponto do observador.

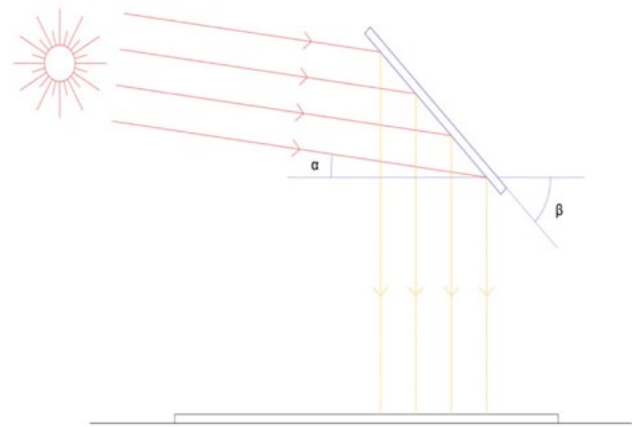


Figura 5. Esquema dos raios refletidos a atingir o painel solar perpendicularmente.

os raios refletidos e a direção normal ao painel solar, com $\pi/2 - \beta - (\beta - \alpha)$, tem de ser 0 radianos. Se resolvermos esta equação em ordem a β obtemos $\beta = \pi/4 + \alpha/2$, onde $\alpha \in [0, \pi/2[$.

O próximo passo é determinar a curva, que denominamos de *curva ortogonalizante*, cujas derivadas são iguais aos diferentes valores de $\tan(\beta)$, onde β representa o ângulo dado pela expressão acima.

Uma vez que queremos uma curva decrescente, as derivadas terão de ser negativas. Logo, de $\beta = \pi/4 + \alpha/2$ segue que $\beta = \pi - (\pi/4 + \alpha/2) = 3\pi/4 - \alpha/2$ e a equação diferencial a resolver é

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\beta) = \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

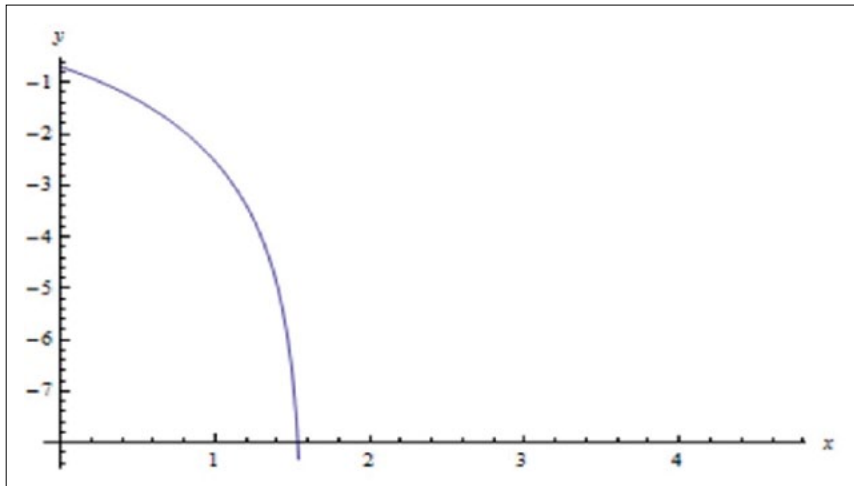


Figura 6. Representação do gráfico da curva ortogonalizante definida por $y = 2\log(\cos^{1/4}(2x + \pi))$, para $x \in [0, \pi/2]$.

A solução é

$$y(x) = 2\log\left(\cos\left(\frac{1}{4}(2x + \pi)\right)\right) + C, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

e um gráfico desta função para $C = 0$ pode ser visto na figura 6.

Esta curva tem a seguinte propriedade: para todo o $\alpha \in [0, \pi/2[$, existe um ponto na curva tal que os raios refletidos são normais à linha horizontal, que representa o painel solar. É devido a esta propriedade que podemos concluir que a curva ortogonalizante corresponde à solução ótima para o caso 2D.

De seguida, apresentamos a primeira generalização 3D do modelo 2D, a superfície ortogonalizante, que foi projetada para painéis solares retangulares. A estrutura é constituída por dois espelhos posicionados ao centro do painel, com curvatura igual à curva ortogonalizante, virados para lados opostos (ver figura 7). Isto faz com que um dos espelhos funcione durante a manhã, com $\alpha \in [0, \pi/2[$, e o outro durante a tarde, com $\alpha \in]\pi/2, \pi]$.

O painel solar deverá ser instalado perpendicularmente ao plano do movimento aparente do Sol. Isto é, o painel deverá fazer um ângulo de $90^\circ - \theta$ com o plano tangente à Terra. Mas θ varia ao longo do ano. Por exemplo, em Coimbra, varia entre 27° (no solstício de inverno) e 74° (no solstício de verão), como podemos ver na figura 3. Uma vez que os raios são mais fracos no inverno, o painel solar deverá ser fixado de forma a maximizar a energia no inverno. O que no nosso exemplo corresponde a um ângulo de aproximadamente $90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$.

O problema abordado neste trabalho é bastante com-

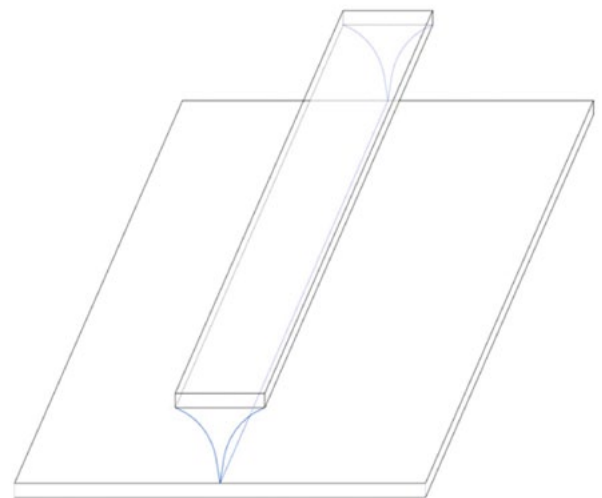


Figura 7. Representação do sistema espelho-painel baseado na superfície ortogonalizante.

plexo devido ao elevado número de variáveis envolvidas e a sua solução não é única. Outras estruturas tridimensionais deverão ser consideradas para avaliar as vantagens relativas da nossa proposta.

O problema tratado neste artigo foi proposto por

Francisco Cardoso (professor no Departamento de Física na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e membro do Centro de Instrumentação, onde lidera o Grupo de Automação e Instrumentação Industrial) e Flávio Cordeiro (*product developer* na empresa Eneida W & S, www.eneida.io) e a resolução apresentada foi desenvolvida por Ana Fidalgo, André Gomes, António Goucha, Daniela Jordão, Marina Ferreira e Sandra Lang no âmbito da *I Semana de Modelação Ibérica*, que decorreu de 7 a 12 de setembro de 2014, no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

REFERÊNCIAS

[1] International Energy Agency. *Solar Energy Perspectives: Executive Summary 2011*. Archived from the original (PDF) on December 3, 2011.

[2] Sadyrbayev, S., Bekbayev, A., Zhumayev, A., Yertayev, D., Ybraiyimkul, D., "Design and Research of Mirror Augmented Photovoltaics", *Condition of Town Almaty & World Applied Sciences Journal* 31(1): 128 – 132, 2014.

[3] <http://www.geo-dome.co.uk/article.asp?uname=solarmirror>

[4] <http://www.all-recycling-facts.com/solar-energy-efficiency.html>

[5] <http://www.deanza.edu/faculty/hamidiridha/esci61/pdf/esci61-solar-radiation-slides.pdf>

[6] Armitage, D., Underwood, I., Wu, Shin-Tson. *Introduction to Microdisplays*. John Wiley & Sons, 2006.

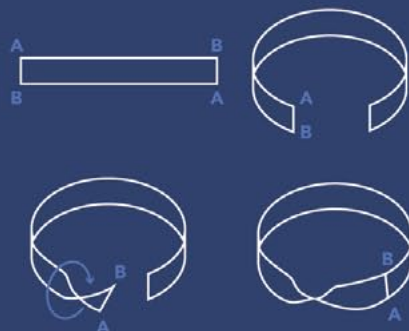
[7] <http://solarat.uoregon.edu/SunChartProgram.php>

QUER SER SÓCIO DA SPM?

Veja as vantagens e condições no verso.



CONSTRUA UMA BANDA DE MÖBIUS



COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos.

Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS 2017:

Sócio Efetivo: 40 euros

Sócio Estudante: 20 euros
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais

Escolar: 80 euros

Académico: 400 euros

Corporativo: 600 euros

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.

INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785

E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt

TABELA DE PUBLICIDADE 2018

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1900

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

imprensa@spm.pt

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

	 PÁGINA INTEIRA	 1/2 PÁGINA	 1/4 PÁGINA	 1/8 PÁGINA	 RODAPÉ
IMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€



NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

PORQUÊ?

Crianças e cientistas têm em comum uma interminável vontade de perceber o porquê de tudo. Será isso estranho?

Uma das características mais marcantes das crianças é a sua capacidade de questionar e de pôr tudo em causa: Porque é que a Terra anda à volta do Sol? Porque é que os cães ladram? Porque é que temos de beber água? Porque é que não podemos viver para sempre? Esta incessante busca de sentido torna-as fascinantes e, há que o admitir, também um pouco fastidiosas. Mas a curiosidade é sinal de inteligência e vitalidade, perguntar e procurar respostas é próprio (e exclusivo) dos seres humanos, é o que nos permitiu criar a civilização que temos e as suas manifestações mais nobres: a ciência, a filosofia, a arte e a literatura.

Todos os cientistas são em parte crianças, assim como os escritores. Se não fossem deixariam de fazer perguntas, contentar-se-iam com o que lhes foi dito sem causar grandes incómodos aos outros ou a si mesmos. As crianças não aceitam um “porque sim!”, mesmo que venha de uma autoridade (o pai ou a mãe, um professor ou o médico de família) e os cientistas e os escritores também não. Na verdade, o objetivo da ciência, da arte e da literatura é precisamente o de causar incómodo, de testar as tais respostas da autoridade, de retirar o tapete debaixo dos pés da certeza e do dogma.

Nas sessões que costumo fazer em escolas, os alunos perguntam-me com alguma frequência, “Porque é que escreve?”, e admito que não tenho uma resposta satisfatória. Fui tentando algumas: “Porque quero saber mais de mim e do mundo, porque não posso deixar de o fazer...”; Mas

talvez a resposta mais honesta seja simplesmente: porque gosto de ler. Não só gosto de ler como alguns dos momentos mais felizes da minha vida chegaram através da leitura: a descoberta de Kafka, de Pessoa, e de Jorge Luís Borges, a primeira vez que li o *Dom Quixote*, quando consegui dominar suficientemente o italiano para ler Italo Calvino no original.

Algo semelhante poderia ser respondido por um cientista à pergunta “Porque é que faz ciência?”, talvez simplesmente porque, em algum momento das suas vidas, todos os cientistas se tenham deslumbrado com a ciência de outros: – Newton, Darwin, Einstein, Curie – e procurem fazer parte do mesmo mecanismo e da mesma busca.

No meu entender, não se trata exatamente de um ato de imitação ou da busca de glória e fama (seria mais simples entrar num concurso televisivo), mas de algo que suspeito ser muito mais profundo. Enquanto membros da espécie humana, somos confrontados com um enorme legado deixado pelos nossos antepassados, um testemunho que nos excita a vontade, que nos traz a responsabilidade de respeitar esse património, mas também de o pôr à prova e de o aumentar. Talvez não venhamos a ser Dante, ou Cervantes, ou Einstein, mas podemos tentar, devemos tentar! Certamente daremos algum contributo para o conhecimento e para a arte, talvez até, com muito esforço e alguma sorte, consigamos um dia responder a uma pergunta. Por mim, não poderia pedir mais.



PEDRO NUNES E O HORÓPTERO: BREVE HISTORIOGRAFIA DE UMA NOTA DE RODAPÉ

NUNO ALEXANDRE DE SÁ TEIXEIRA

UNIVERSIDADE DE ROMA "TOR VERGATA" E UNIVERSIDADE DE COIMBRA

de.sa.teixeira@gmail.com

O nome de Pedro Nunes surge frequentemente associado, na literatura acerca da visão binocular, a um método de medida empírica do chamado horóptero – curva teórica que liga todas as localizações espaciais que estimulam pontos correspondentes nas retinas de ambos os olhos. Mas o que é que motiva a menção ao matemático português ao discutir uma metodologia psicofísica?

Alguém que se interesse pela produção científica acerca de percepção binocular poderá já ter-se deparado com o artigo publicado em 2003 por Ono e colaboradores no reputado *Journal of Experimental Psychology*¹. Este trata das implicações que tem para a percepção o facto de que, por possuímos dois olhos e, logo, dois pontos de vantagem espacialmente distintos para a apreensão visual do mundo, um pequeno objeto posicionado à nossa frente, em certas ocasiões, necessariamente oculta monocularmente partes distintas de um plano situado por detrás desse (facto notado por Leonardo Da Vinci). Para o/a leitor/a que se interesse pelo tópico, este artigo será certamente de interesse e asseguro-lhe que poderá aqui encontrar um tratamento cientificamente rigoroso desta questão. Não obstante, e para os propósitos do presente ensaio, importa destacar a seguinte afirmação, relegada para uma breve nota de rodapé (n.º2): “*Nonius* é o nome latinizado de Pedro Nunes, que usou [estes] estímulos para aceder ao erro de fixação binocular”². Esta nota refere-se ao horóptero-nónio (ver adiante), que é simultaneamente uma conceptualização e uma técnica de medida deste importante conceito psicofísico da percepção binocular. Mas que ligação existe entre o matemático português e o horóptero? Terá sido Pedro Nunes um pioneiro da Psicologia e desenvolvido estudos empíricos acerca da percepção binocular, como parece ser sugerido nesta nota de rodapé? E se assim foi, por que não é a fonte devidamente identificada como é usual? O/A leitor/a poderá já antecipar que a resposta a estas questões é, sumariamente, não, Pedro Nunes não contribuiu diretamente para o estudo

científico da percepção visual, elaboração do horóptero ou qualquer outro tópico de pesquisa em torno da percepção binocular e/ou estereoscópica e, para todos os efeitos, a sugestão nesta nota de rodapé é errónea. E, contudo, à parte a sugestão de uma contribuição explícita para o estudo do horóptero, este não é um caso isolado, como veremos adiante, sendo o nome do matemático frequentemente referido em tratamentos acerca deste tópico. Procurarei aqui clarificar o como e o porquê da associação entre Pedro Nunes e o horóptero, começando, sem mais demoras, por uma breve explicação deste último.

A VISÃO BINOCULAR E O HORÓPTERO

Que de uma estrutura anatómica com dois olhos emerge uma percepção aparentemente una e contínua do mundo suscitou interesse ao longo de virtualmente toda a história da cultura ocidental, intrigando vários pensadores e investigadores pelas questões geométricas implicadas pela visão binocular. Ptolomeu (c. 100-170 a.C.), matemático e astrónomo da Antiguidade, parece ter sido o primeiro a intuir a existência de uma correspondência direta entre pontos de ambos os olhos, na sua obra *Optica*, ainda que desta não tenha chegado até nós o primeiro volume (no qual trataria de aspetos físicos da visão) e dos restantes quatro apenas nos chegou uma tradução incoerente para o latim de uma versão árabe do grego original³. Posteriormente, na época medieval, Ibn al-Haytham (conhecido pelo nome latinizado de Alhazen; 965-1040), matemático e físico árabe, debruçou-se também sobre a geometria da visão binocular, antecipando já alguns aspetos do horóptero⁴. Um tratamento mais cuidado deve-se a Franciscus Anguilonius (1567-1617), padre jesuíta belga, que introduz também o termo “horóptero” (do grego *horos*, limite, e *opter*, observador) para se referir à entidade geométrica abstrata que conecta as direções visuais que estimulam pontos correspondentes na retina de cada olho. Na sua obra de 1613, *Opticorum Libri Sex Philosophis Juxta ac Mathematicis Utiles* ou, na sua forma abreviada, *Seis Livros de Óptica*, o horóptero é descrito e

¹ Ono, H., Lillakas, L., Grove, P. M., & Suzuki, M. (2003). “Leonardo’s constraint: Two opaque objects cannot be seen in the same direction”. *Journal of Experimental Psychology: General*, 132, 253-265.

² *Nonius* is the latinized name of Pedro Nunes, who used the stimuli to access binocular fixation error. (p. 256).

³ Lindberg, D. C. (1976). *Theories of vision from Al-Kindi to Kepler*. Chicago: University of Chicago Press.

⁴ Raynaud, D. (2016). *Studies on binocular vision: Optics, vision and perspective from the thirteen to the seventeenth centuries*. Springer.

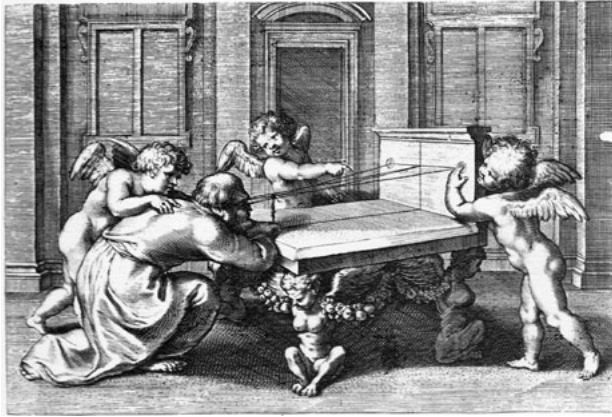


Figura 1. Frontispício, atribuído a Pieter Paul Rubens, do livro IV de Franciscus Anguilonius. O “observador” na imagem fixa o objeto imediatamente à sua frente, sendo a direção visual de cada olho dada pelas linhas projetadas na superfície ao fundo, na qual as diplopias (imagens duplas) são assinaladas pelos querubins.

elaborado, acompanhado por um frontispício alegadamente da autoria de Pieter Paul Rubens (1577-1640; ver figura 1)⁵. Por fim, numa obra publicada postumamente em 1704, Christiaan Huygens (1629-1695), matemático, físico e astrónomo holandês, formula a correspondência entre pontos distintos na retina como condição para a fusão binocular das imagens de ambos os olhos e, portanto, para a visão estereoscópica.

Caberia, contudo, a Gerhard Vieth (1763-1836) e a Johannes Müller (1801-1858), ambos fisiólogos alemães, a descrição independente da geometria teórica do horóptero, dando assim início à investigação científica moderna deste importante conceito. Devido à fisiologia ocular, e assumindo que ambos os olhos são perfeitamente esféricos, quando um dado objeto é focado binocularmente, o conjunto de pontos que estimulam localizações correspondentes em ambas as retinas é dado por um círculo (se nos restringirmos ao plano horizontal) contendo o ponto de fixação e ambas as pupilas (na descrição de Vieth) ou os centros das lentes oculares (de acordo com Müller). A figura 2 (baseada no diagrama de Müller) deverá esclarecer o que se entende, então, por horóptero. Os dois círculos menores no fundo da imagem representam os dois olhos (vistos de cima). O ponto A é aqui o ponto de fixação – ambos os olhos estão direcionados para este de forma a que a imagem de A (linhas contínuas e pontos a_e e a_d , para as projeções no olho esquerdo e direito, respetivamente) coincida com a fóvea (área central da retina com a maior resolução). Como os olhos possuem uma estrutura comum e simétrica,

por assunção, um qualquer ponto do círculo maior, a tracejado, irá estimular pontos correspondentes em ambas as retinas. Considere-se o ponto B : este irá estimular os pontos b_e e b_d (no olho esquerdo e direito, respetivamente) que, por se encontrarem a uma igual distância da fóvea (os raios visuais estão em ângulos congruentes em relação àqueles que originam as imagens a_e e a_d), representam pontos correspondentes. O horóptero propriamente dito corresponde aqui ao círculo maior, a tracejado, que liga todos os pontos que irão estimular recetores correspondentes na retina – este é designado por *círculo de Vieth-Müller*, por razões óbvias. Mais, qualquer objeto que, no mundo, ocupe uma posição coincidente com o círculo de Vieth-Müller será visto pelo observador como uma única imagem, fundida estereoscopicamente (a rigor, e para a visão estereoscópica, basta que um objeto ocupe uma área centrada no horóptero, conhecida como *área fusional de Panum*). Objetos fora ou dentro do círculo de Vieth-Müller, por estimularem pontos díspares na retina, serão vistos como uma imagem dupla ou diplopia (que pode ser cruzada ou homónima, respetivamente para objetos dentro ou fora do horóptero), sendo esta tão maior quanto mais distante do horóptero estiver o objeto. Finalmente, note-se que, consoante o ponto de fixação esteja a uma menor ou maior distância do observador, o horóptero será dado respetivamente por um círculo com um menor ou maior diâmetro. Porque o nosso sistema visual tende a ignorar as diplopias, estas não serão de imediato óbvias na nossa perceção. Porém, o/a leitor/a poderá rapidamente constatar a sua presença com o seguinte exercício: coloque ambos os indicadores direito e esquerdo das suas mãos alinhados e em frente à sua face, de tal forma que um fique a cerca do dobro da distância do seu nariz em relação ao outro – foque alternadamente o indicador mais distante e o mais próximo, prestando atenção às imagens visuais do outro dedo. Deverá ver imagens duplicadas (na horizontal) do dedo não fixado.

Importa sublinhar que o círculo de Vieth-Müller é uma entidade teórica, resultante de uma abstração geométrica baseada na assunção de que ambos os olhos são perfeitamente esféricos. Determinar empiricamente a geometria do horóptero é não só possível como veio a ocupar parte considerável da literatura em Psicologia de finais do século XIX e início do século XX. Poupano ao/a leitor/a uma descrição exaustiva dos vários métodos sugeridos para a sua medida, importa aqui realçar aquele que veio a ficar conhecido como o método do nónio (enfaticamente designado como o único e real horóptero por Shipley e Rawlings, 1970). O observador para o qual se pretende medir o horóptero é de-

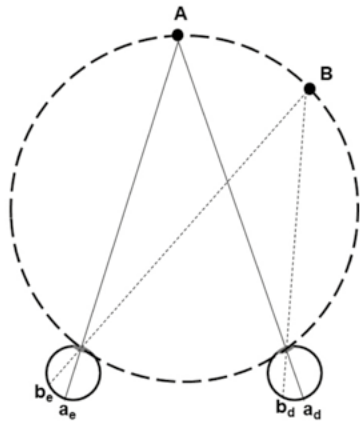


Figura 2. Descrição geométrica do círculo de Vieth-Müller ou horóptero teórico. Ver texto para detalhes.

vidamente posicionado de forma a poder fixar com ambos os olhos um ponto à sua frente indicado por um marcador específico (por exemplo, uma pequena bola negra a uma dada distância do observador). Numa direção distinta daquela ocupada pelo ponto de fixação, mas dentro do campo visual do observador, é colocado, por exemplo, um arame alinhado verticalmente. A distância deste arame aos olhos do observador pode ser ajustada (ou por ele ou pelo experimentador). Finalmente, em frente aos olhos do observador é colocada uma máscara cuidadosamente elaborada para permitir uma visão desimpedida do ponto de fixação por ambos os olhos, mas apenas uma visão parcial do arame: por exemplo, com o olho esquerdo o observador consegue ver a secção inferior do arame mas apenas a secção superior com o olho direito. Se o arame estiver situado além ou aquém do horóptero, o observador verá as duas porções do arame (imagens no olho esquerdo e direito) desalinhadas entre si. Quando o arame ocupa uma posição no horóptero, o observador conseguirá ver ambas as porções do arame alinhadas verticalmente – a posição do arame *e*, portanto, a localização desse ponto do horóptero, é então registada. O mesmo procedimento é repetido para várias direções dentro do campo visual do observador até que se obtenha uma caracterização adequada da curva do horóptero. Para terminar esta explicação, indico apenas que o horóptero empiricamente determinado não corresponde ao círculo de Vieth-Müller: a sua forma tende a possuir uma curvatura ligeiramente menor do que a postulada pelo círculo, o que veio a ficar conhecido como o *desvio de Hering-Hillebrand* (referência aos autores que originalmente o descobriram). A explicação para o desvio prende-se não só com irregularidades na lente dos olhos como com a diferenças na densida-

de de células fotossensíveis na retina. Seja como for, o ponto relevante para o presente texto é o termo “nónio”, que invariavelmente designa na literatura da especialidade o método acima descrito ou variantes do mesmo. Este parece ter sido proposto originalmente por S. G. van der Meulen em 1873⁶, mas referido por método ou critério de “nónio” a partir das pesquisas feitas em Viena pelo austríaco Armin Tschermak, entre 1900 e 1924⁷. Finalmente, num artigo de 1932, o americano Adelbert Ames refina o método, mantendo a designação de “nónio”⁸.

PEDRO NUNES E O NÓNIO

A razão da escolha do termo “nónio” para designar um método de medida do horóptero é relativamente óbvia e não oferece grandes ambiguidades. *Nonius*, versão latina de *Nunes*, descreve a solução elaborada pelo matemático e cosmógrafo português Pedro Nunes (1502-1578) para uma leitura mais precisa de uma medida dada no mostrador numérico de um instrumento, originalmente pensado para o astrolábio (instrumento para a medida da altura acima do horizonte de objetos celestes). O nónio é descrito por Pedro Nunes na sua obra de 1542, *De Crepusculis* (para a elaboração do presente ensaio, e no que se refere a Pedro Nunes e o Nónio, baseio-me extensamente nos artigos de António Estácio dos Reis⁹). De forma breve, Pedro Nunes concebe a ideia de um astrolábio contendo não só a usual escala graduada de 0° a 90°, mas um conjunto de outras escalas, concêntricas com a primeira, mas divididas em secções progressivamente maiores (de 0 a 89, de 0 a 88, etc.). Dada uma qualquer medida em que o ponteiro não coincida exatamente com uma das subdivisões da primeira graduação, é provável que, contudo, coincida com uma das restantes (ou dela se aproxime). Graduando essas escalas de uma forma adequada, será possível obter uma medida mais precisa do que aquela permitida por uma única graduação, notando a coincidência entre o ponteiro e as marcas graduadas das

⁵ Ver Shipley, T., & Rawlings (1970). *The nonius horopter – I. History and theory*. *Vision Research*, 10, 1225-1262.

⁶ Van der Meulen, S. G. (1873). *Stereoskopie bei unvollkommenem sehvermögen*. *Archiv für Ophthalmology*, 19, 100-136-

⁷ Tschermak, A. (1924). *Fortgesetzte studien über binokularesehen*. *Pflugers Archiv für die Gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere*, 204, 234-246.

⁸ Ames, A. (1932). “Corresponding retinal points, the horopter and size and shape of ocular images.” *Journal of the Optical Society of America*, 22, 575-631.

⁹ Reis, A.E. (2002). “O nónio de Pedro Nunes.” *Gazeta de Matemática*, 143, 5-19. Conferir também a página pedronunes.cienciaviva.pt

diversas escalas. Ainda que Pedro Nunes não pareça (tanto quanto é possível averiguar) ter-se dedicado às questões geométricas da visão binocular, é interessante notar que a sua ideia para o nónio surge inspirada por uma passagem do *Almagesto* de Ptolomeu, autor que, como atrás referido, foi pioneiro no estudo de direções visuais correspondentes em ambos os olhos, ainda que numa outra obra (*Optica*). Em qualquer caso, e tal como um navegador usando um astrolábio dotado de um nónio deverá obter uma medida da altura de um corpo celeste procurando o melhor alinhamento entre duas linhas (a do ponteiro e uma das marcas nas escalas graduadas), também assim deve um observador sujeito a uma medida do horóptero procurar o melhor alinhamento entre duas linhas (a secção superior e inferior do arame ajustável, vistas com os olhos direito e esquerdo). Esta parece ser, fundamentalmente, a similaridade que suporta o uso do termo “nónio” para o método psicofísico. Ocorre que, ainda que Pedro Nunes tenha concebido a ideia para o nónio, não parece que tenha assistido à sua execução prática, quando muito pelo facto de que a tecnologia da altura dificilmente poderia ter suplantado as dificuldades técnicas, em particular a precisão geométrica, necessárias à sua construção. Isto não obstante a anedótica sugestão de Francisco Stockler, em 1818, de acordo com a qual não só teria existido no país uma versão do nónio como a mesma teria sido destruída e o metal usado para o gradeamento de uma igreja beneditina em Coimbra, hoje demolida. À parte esta indicação, e passando aqui por cima do uso que Tycho Brahe (1546-1601) deu às ideias de Pedro Nunes, terá sido o francês Pierre Vernier (1580-1637) a conceber uma concretização prática do nónio, sob a forma de um setor graduado móvel (hoje ainda presente em alguns paquímetros e outros instrumentos de medida). Desde então, os termos “nónio” e “vernier” têm ambos sido usados para designar o uso de subescalas graduadas cuja leitura se baseia na correspondência visual de linhas marcadoras, frequentemente com um dos termos a ser preterido em relação ao outro em diferentes línguas e países. Aliás, conforme nos relata António Estácio dos Reis, uma certa tensão acerca de qual autor reconhecer ao apelidar subescalas graduadas, Pedro Nunes ou Pierre Vernier, remonta já a Jérôme Lalande, que em 1771 defende o uso do termo “vernier”. Apenas quatro anos depois, João Jacinto de Magalhães reage, argumentando a favor do uso do termo “nónio”.

PEDRO NUNES E O HORÓPTERO

Retomando a nota de rodapé com a qual inicie a presente discussão, e conforme havia já indicado, a referência a Pedro

Nunes no âmbito de discussões em torno do horóptero não se esgota no artigo de Ono e colaboradores. Na literatura especializada, a referência é relativamente ocorrente, ainda que somente o artigo de Ono (tanto quanto consegui averiguar) pareça implicar um envolvimento direto de Pedro Nunes em estudos empíricos. Com efeito, e sem procurar ser exaustivo, encontramos no livro de David Stidwill e Robert Fletcher de 2011, *Normal Binocular Vision*, na página 81, o seguinte: “O método de vernier foi originalmente usado pelo matemático português Nunez [sic] (em latim, Nonius) para a calibração de instrumentos astronómicos”¹⁰. Pierre Buser e Michel Imbert, na obra *Neurophysiologie Fonctionnelle: Vision (tome IV)*, de 1987 (tradução inglesa de 1992; página 180) referem que “o procedimento preferido é aquele que explora a técnica binocular de vernier (por vezes referida como Nonius após o nome Nunez [sic], matemático português do século XVI)”¹¹. Por fim, Ian Howard e Brian Rogers, tanto no livro de 1995 (*Binocular Vision and Stereopsis*, página 55)¹² como na obra de 2012 (*Perceiving in Depth: volume 2*, página 173)¹³ explicitam que “tais pares de linhas são conhecidas como linhas nonius, do nome latinizado de Pedro Nuñez [sic], um matemático português do século XVI que inventou uma forma antiga da escala de Vernier”¹⁴. Curiosamente, no exaustivo artigo dedicado à história e à teoria do horóptero-nónio, Shipley e Rawlings (1970) não oferecem qualquer menção a Pedro Nunes. A ocorrência mais antiga do nome do matemático que consegui encontrar na literatura sobre o horóptero deve-se a Keneth Ogle, na sua obra clássica *Researches in Binocular Vision* (originalmente publicado em 1950 e reeditado em 1964, a versão consultada para o presente texto), numa nota de rodapé na página 37: “Nonius é a forma latinizada de Nunes, o nome de um matemático português, e refere-se a um dispositivo usado em tempos em instrumentos graduados. O dispositivo foi subsequentemente melhorado para o vernier”¹⁵. Esta nota parece efetivamente ser a origem de todas as subsequentes referências e destaca-se por ser a única que encontrei que de facto cita uma fonte: o *Webster’s New International Dictionary* (Ogle deverá ter consultado a segunda edição, de 1934). Parece, pois, provável que o esclarecimento que Ogle se sentiu compelido a fazer acerca do termo *nonius* tenha iniciado uma sequência de breves referências a Pedro Nunes, cada uma “autorizando” a seguinte, até culminar na sugestão errónea de Ono de que o português tenha antecedido a determinação empírica do horóptero.

Em jeito de conclusão, resta apenas tentar perceber por que Ogle julgou necessário clarificar a origem do termo *nonius*. Sem excluir a possibilidade de que tenha sido tão-

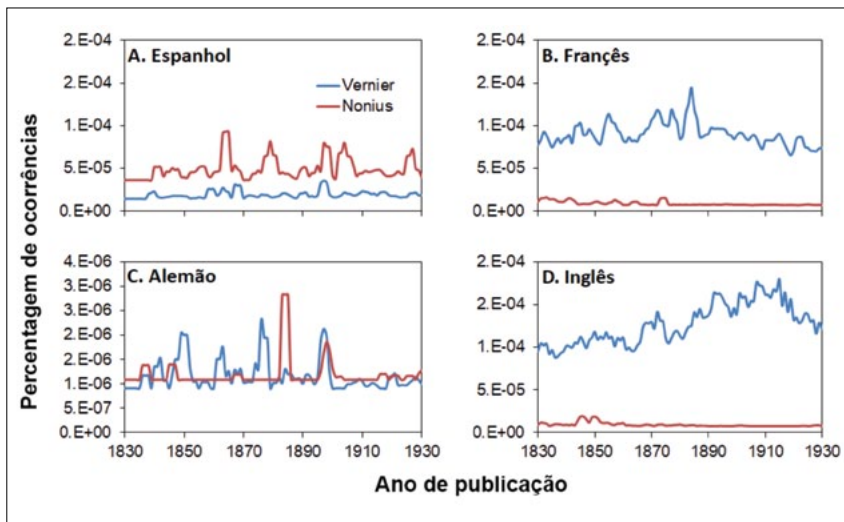


Figura 3. Frequência dos termos *vernier* (linhas a azul) e *nonius* (linhas a vermelho) em livros publicados entre 1830 e 1930 em espanhol (painel A), francês (painel B), alemão (painel C) e inglês (painel D). Dados extraídos de Google Ngram Viewer.

-samente uma curiosidade histórica, é possível que a pouca frequência do termo na língua inglesa tenha motivado o esclarecimento. Ainda que com carácter meramente exploratório, a figura 3 mostra a prevalência de ocorrências dos termos *vernier* e *nonius*, em livros publicados entre 1830 e 1930 (altura em que as pesquisas modernas sobre o horóptero se iniciam) e indexados na ferramenta Google Ngram Viewer, nas línguas espanhola (painel A; português não está contemplado na plataforma), francesa (painel B), alemã (painel C) e inglesa (painel D). De uma forma heurística, estes dados sugerem que, como esperado, *nonius* é mais prevalente que *vernier* nas publicações espanholas, sendo o inverso verdade para a língua francófona. Para o alemão, ambos os termos ocorrem com uma baixa frequência, sem que nenhum se destaque, o que poderá explicar a ausência de referências a Pedro Nunes nos artigos de Tschermak: se *nónio* e *vernier* eram tomados como sinónimos na língua germânica, a adoção de um ou de outro para a medida do horóptero seria relativamente indiferente. Acresce que o termo *vernier* era já usado nas ciências psicológicas para medidas de acuidade visual (acuidade de *vernier* – baseada na capacidade de um observador de discriminar pequenos desalinhamentos entre linhas verticais a uma dada distância). Finalmente, na literatura inglesa a predileção é claramente para o termo *vernier*, sendo *nonius* relativamente invulgar. Em suma, é possível que, dado o significado relativamente obscuro no inglês do termo *nonius*, Kenneth Ogle tenha julgado necessário incluir o esclarecimento para os leitores anglófonos, após consultar um dicionário de referência. Seja ou não esse o caso, e ainda que meramente como alusão numa ou outra nota de rodapé, o nome

de Pedro Nunes veio a ocupar o seu lugar numa literatura científica relativamente inesperada acerca da visão e da percepção binocular.

¹⁰ The vernier method was originally used by the Portuguese mathematician Nunez (in latin, Nonius) for calibrating astronomical instruments. Stidwill, D., & Fletcher, R. (2011). *Normal Binocular Vision: Theory, investigation and practical aspects*. Oxford: Blackwell Publishing.

¹¹ A preferred procedure is one exploiting a binocular vernier technique (sometimes referred to as of Nonius after the name Nunez, a Portuguese mathematician of the 16th Century). Buser, P., & Imbert, M. (1992). *Vision*. Cambridge, MA: MIT Press.

¹² Howard, I. P., & Rogers, B. J. (1995). *Binocular vision and stereopsis*. New York: Oxford University Press.

¹³ Howard, I. P., & Rogers, B. J. (2012). *Perceiving in depth: Volume 2*. New York: Oxford University Press.

¹⁴ Such pairs of lines are known as nonius lines, from the Latinized name of Pedro Nuñez, a 16th-Century Portuguese mathematician who invented an early form of the Vernier scale.

¹⁵ Nonius is the latinized form of Nunes, the name of a portuguese mathematician, and pertains to a device at one time used in graduation instruments. The device was subsequently improved into the vernier. (From Webster's New International Dictionary.) Ogle, K. (1964). *Researches in binocular vision*. New York: Hafner Publishing.

SOBRE O AUTOR

Nuno Alexandre De Sá Teixeira formou-se em Psicologia pela Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Coimbra, e doutorou-se em Psicologia Experimental pela mesma instituição. É investigador doutorado no Centro de Biomedicina Espacial da Universidade de Roma 'Tor Vergata', Itália, e no Instituto de Psicologia Cognitiva da Universidade de Coimbra.



GONÇALO MORAIS CONVERSA COM PETER NEUMANN



GONÇALO MORAIS
Instituto Superior
Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

Peter Neumann é professor emérito do Queen's College, Oxford. Filho de matemáticos, doutorou-se em 1966, com uma tese intitulada *A Study of Some Finite Permutation Groups*. Pela sua longa carreira, é um testemunho-chave para compreender a evolução do estudo da Álgebra nas últimas cinco décadas. Entre outras atividades, foi presidente da *British Society for History of Mathematics*, teve vários cargos no *Council of the London Mathematical Society* e é editor de uma série de revistas científicas. Ganhou ainda mais destaque com a primeira tradução integral dos trabalhos de Évariste Galois para inglês.

GONÇALO Dada a longevidade da sua carreira, consegue ter uma perspetiva temporal bastante ampla da evolução da matemática...

PETER NEUMANN É verdade! Tornei-me verdadeiramente um matemático nos últimos três anos da minha licenciatura. Eu digo três anos porque tive de repetir o último ano, visto que um dos artigos que eu tinha de apresentar foi recusado. Tive, por causa disso, de repetir tudo o que constava nesse último ano. Eu estava nessa altura na escola onde ainda estou hoje: Queen's College, em Oxford. Eu entrei em Oxford em 1959, ou seja, estamos a falar de um período de quase 60 anos. Um dos livros que li na altura foi o *Faster than Thought*, dirigido por Lord Bowden, e era uma História da Computação até ao ano de 1958. Estamos a falar de computadores cuja memória era uma onda de mercúrio! [Risos!] Estas eram as máquinas projetadas por cientistas como o Alan Turing ou o John Von Neumann, entre outros. Contudo, pode ser considerada uma época pré-computadores.

GONÇALO Hoje com um computador ou uma máquina de calcular é possível, de uma maneira rápida e eficaz, encontrar exemplos e ilustrações para conceitos matemáticos nas aulas ou com outros colegas...

PETER NEUMANN Quando eu era aluno de pós-graduação em Oxford, já havia um computador eletrónico. Repare como as coisas avançavam rapidamente. O computador chamava-se Mercury e eu tentei aprender o *assembler* dessa máquina mas, tenho de o dizer, falhei! [Risos] Era sobretudo usado para análise numérica, mas teve uma importância decisiva em outras áreas, como a Cristalografia. Estou a pensar no trabalho da Dorothy Hodgkin, que utilizou este mesmo computador para a análise do espectro dos raios X de moléculas como a penicilina. Daí a poucos anos, ela viria a ganhar o Prémio Nobel da Química.

Eu, pessoalmente, só comecei a usar este tipo de ferramentas a partir de 1968 ou 69, quando estava já disponível um computador significativamente mais rápido que usava cartões perfurados. Era um ICL 1906A e eu usava-o na altura para estudar grupos de permutações.

GONÇALO Quando se estuda matemática, em áreas como Equações Diferenciais, e devido à falta de uma ferramenta como aquelas de que dispomos hoje para fazer cálculos, nota-se que os cientistas do século XIX tinham de encontrar processos bastante engenhosos para conseguirem fazer esses mesmos cálculos com a precisão necessária. A sua carreira iniciou-se num momento em que o computador pessoal era apenas uma miragem. Sente que algo mudou significativamente na forma como se faz matemática com a introdução dos computadores?

PETER NEUMANN No século XIX havia uma quantidade enorme de informação que estava tabelada. Já antes, no século XVII, havia tabelas de logaritmos e de senos com dez e com 14 decimais exatas. E neste caso estamos a falar de uma época antes da introdução de calculadoras. Havia alguns erros e hoje conseguimos datar as várias tabelas por causa da cópia desses mesmos erros...

GONÇALO Estamos neste caso a falar literalmente de um erro propagado...

PETER NEUMANN Exatamente... Isto era de tal maneira importante que a *Royal Society* na Grã-Bretanha, e estou certo de que também as Academias de Paris e Berlim, tinha como projeto a criação de enormes bibliotecas com tabelas. Tabelas de logaritmos e exponenciais, senos e cossenos, tangentes, funções hiperbólicas, funções de Bessel, enormes tabelas de funções de Bessel até 14 decimais. Todos os cálculos começaram por ser feitos à mão. No final do século XIX e no início do século XX, os laboratórios de Oxford e Cambridge adquiriram as máquinas de calcular Brunsviga e os cálculos começaram a ser feitos desta forma. Hoje alguém jamais usará alguma destas tabelas. Quando queremos um qualquer valor, agarramos num computador ou numa máquina de calcular e já está.

GONÇALO Num telemóvel...

PETER NEUMANN Esta foi, de facto, uma mudança significativa pois, na escola, eu tive de aprender a usar tabelas de logaritmos com três casas decimais. Isto para Física e Química. Que eu me lembre, nunca as usávamos em matemática. Usávamos também uma régua de cálculo em Física... Mas tudo isto desapareceu completamente. Eu ainda tenho uma que guardo porque me foi oferecida pelo meu avô, que era engenheiro. Muito pe-



quena, feita de marfim. Hoje todos estes instrumentos são ensinados aos alunos em Inglaterra quando estudam História da Tecnologia e não como algo que eles eventualmente possam vir a usar.

GONÇALO Uma das coisas que eu tento explicar aos meus alunos é que as ferramentas que eles aprendem em Análise ou Álgebra são de facto úteis, servem para calcular coisas e não são meros conceitos que eles têm apenas de contemplar...

PETER NEUMANN De facto, o método de Newton-Raphson é prático para ser usado à mão porque converge quadraticamente... Se numa aproximação obtemos duas decimais, na iteração seguinte obtemos quatro, depois oito e assim sucessivamente.

GONÇALO E, como referiu, quando começou a usar computadores, isto significou para si uma mudança significativa na forma de fazer matemática?

PETER NEUMANN Não. Eu na altura aprendi uma linguagem chamada ALGOL...

GONÇALO Que ainda hoje é usada...

PETER NEUMANN Sim, é verdade. Eu estava interessado em problemas relacionados com Teoria de Grupos e Teoria dos Números. Era sobretudo trabalho numérico. Mais tarde, em 1988, envolvi-me em trabalhos relacionados com Teoria dos Grupos Computacional, e nesta altura sim. Os computadores eram usados em todas as áreas que referimos, em Combinatória e em muitas áreas de Matemática Pura. Nesta altura as pessoas começaram a perguntar: Como podemos computar o que estamos a estudar? Nos anos sessenta, o Charles Sims desenvolveu os algoritmos que nós, alguns anos depois, estávamos a usar para estudar os grupos de permutações. O problema era o seguinte: se considerarmos os primeiros 50 naturais e se considerarmos duas permutações neste conjunto, qual o grupo gerado por estas? Quando o Charles Sims estava a trabalhar neste tipo de problemas, numa altura em que ele inclusive visitou Oxford e nós trabalhamos juntos, ele conseguiu descobrir todos os grupos até ao grau 20. Passados dois anos, ele já conseguia, para grupos de um certo tipo, fazer o mesmo para grupos de grau menor ou igual que 50. Quando eu comecei a trabalhar com ele neste assunto, a descrição atingia já o grau 10^6 .

A partir daqui, o tipo de questões começou a ser um pouco diferente. O que se começou a tentar perceber era se seria possível encontrar algoritmos capazes de resolver este tipo de problemas num tempo razoável. Foi por causa deste tipo de questões que eu entrei neste campo. Claro que depois passámos a questionar-nos nos mesmos problemas mas com outro tipo de objetos como, por exemplo, matrizes invertíveis sobre corpos finitos. E estes revelaram-se problemas muitíssimo mais difíceis. Até com matrizes dez por dez no corpo com dois elementos, o tamanho deste grupo é, simplificando, 2^{99} . Pondo a questão em termos simples: se alguém me der duas matrizes dez por dez, invertíveis, com todas as entradas 0 ou 1, e me perguntar qual o grupo que estas duas matrizes geram, a resposta é extremamente difícil. Conseguimos desenvolver algoritmos que tratam de problemas como este até matrizes de tamanho 400 por 400. Estes algoritmos têm uma componente aleatória, o que significa que por vezes nos dão uma resposta errada, mas a análise dos algoritmos serve para garantir que esse risco é muito pequeno.

GONÇALO Mudando um pouco o rumo da nossa conversa, a universidade em que dá aulas, Oxford, é conhecida por ter um sistema de avaliação peculiar...

PETER NEUMANN Ao nível da licenciatura, sim, é verdade. Oxford é uma universidade muito seletiva. Para cada vaga temos dez candidatos, por isso levamos o processo de seleção muito a sério. Isto permite-nos ter confiança no perfil dos nossos alunos. No final do primeiro ano, há um exame eliminatório. Havia uma nota, para que os alunos pudessem perceber o quão bons eles tinham sido, mas apenas importava que eles passassem. Mas dos 250 alunos que atualmente frequentam os vários cursos onde a matemática é um elemento central, apenas dois ou três reprovam em cada ano. E sempre que algum aluno reprova, é realmente um falhanço do sistema.

Quando alguém se candidata a Oxford, o processo de candidatura contém as notas do secundário, uma carta escrita pelo próprio e referências dadas pelos professores. Depois é feito um teste de aptidão já em Oxford e duas ou três entrevistas. Nestas entrevistas tentamos perceber os resultados dos candidatos face às circunstâncias do seu passado: se são provenientes de uma escola com um departamento de matemática forte ou não, quais as condições familiares, enfim, tentar perceber este tipo de coisas que julgamos importantes para o desempenho futuro. A certa altura, os candidatos são colocados perante matérias que nunca encontraram antes e tentamos perceber de que forma é que eles reagem, de que forma colaboram, se aceitam sugestões e coisas deste tipo. Sendo um processo tão rigoroso, se ao fim de um ano um aluno reprova no exame, foi todo este processo que falhou.

Antigamente, depois de um aluno ter sido aprovado no exame do final do primeiro ano, só voltava a ser avaliado no final do seu curso. Quando eu fiz os meus exames finais, em 1963, tive de defender nove artigos. Cada defesa demorava três horas e eram realizadas uma de manhã e outra à tarde, todos os dias de quinta-feira a terça-feira de manhã, com o domingo livre. Agora as coisas estão mudadas, pois, do segundo ano em diante, todos os anos têm um exame final e os alunos conseguiram não ter dois exames no mesmo dia. Neste momento, estão a tentar negociar não terem dois exames em dias consecutivos.

GONÇALO Deixe-me fazer uma pergunta um tanto ou quanto provocadora...

PETER NEUMANN Bem, *try me!*



GONÇALO Acha que Galois teria conseguido entrar em Oxford?

PETER NEUMANN Bem, ele não foi aceite na *École Polytechnique*... É muito difícil responder a essa questão. Eu prefiro acreditar que nós seríamos capazes de identificar o seu talento. Por outro lado, eu também acredito que teria odiado ser seu professor. Ele tinha uma personalidade muito complicada e na idade em que ele tinha de se candidatar à universidade ele estava na vanguarda da investigação. Por isso, para ele estudar ou não estudar na universidade era irrelevante. Se ele fosse candidato a Oxford, iria possivelmente diretamente para o doutoramento. É mesmo muito difícil responder a essa questão.

GONÇALO Uma das coisas que eu li no seu livro precisamente sobre o trabalho de Galois é que foi a primeira tradução integral do seu trabalho para inglês. Não é isso um pouco surpreendente?

PETER NEUMANN Bem, houve várias traduções parciais anteriores. A sua importantíssima *Premier Mémoire*, na qual ele cria aquilo a que nós agora chamamos Teoria de Galois e, acidentalmente, cria a noção de Grupo porque necessita deles, foi traduzido para inglês pelo Harold Edwards em 1984. A carta para Chevallier foi traduzida muito antes. De facto, existem duas ou três traduções diferentes para inglês desta carta. Julgo que o seu artigo sobre corpos finitos nunca tinha sido traduzido, assim como o resto da sua obra.

Existe uma primeira tradução para alemão do seu trabalho em 1889, por Heinrich Maser.

GONÇALO Não lhe parece estranho?

PETER NEUMANN Eu não consigo dar uma resposta definitiva a isso, mas parece-me que ninguém no século XIX em Inglaterra parecia entender o trabalho de Galois. Os matemáticos ingleses nesse período estavam a seguir uma direção completamente diferente, pelo que, não havia ninguém em Inglaterra com vontade de traduzir este

tipo de trabalhos. Por esse motivo, fico bastante mais surpreendido que não haja neste período uma tradução por parte dos matemáticos norte-americanos, pois estavam bastante interessados neste tipo de problemas. Somente a carta a Chevallier teve uma tradução em 1922, creio, nos Estados Unidos. Quando a Teoria de Galois chegou a Inglaterra, já estava de tal forma desenvolvida face ao que Galois tinha feito, que os escritos originais interessavam apenas aos historiadores.

GONÇALO Contudo Galois é uma personagem histórica fascinante. É um cidadão do seu tempo...

PETER NEUMANN É um louco do seu tempo! [Risos] De facto a criação do mito de Galois ocorre na última década do século XIX. Existe uma primeira tentativa em 1848 de publicitar o nome de Évariste Galois, por parte do irmão Alfred, na revista *Magasin Pittoresque*, depois de Liouville ter revisto os escritos originais e os ter publicado em 1846 no *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Mas o mito foi realmente criado depois de 1887,

quando Galois se tornou um dos elementos da história da *École Normale Supérieure*, e toda a nação reconheceu a figura deste republicano! [Risos]

Na minha perspetiva, como eu descrevo no livro, ele é de facto um matemático extremamente criativo ao mesmo tempo que é um republicano altamente ineficiente. Foi repetidamente preso por coisas sem importância e, sendo um símbolo do republicano revolucionário, não é mais do que isso: um símbolo. Como disse, isto acontece muito mais tarde, no final do século XIX, numa altura em que se reconhece quão revolucionário é o seu trabalho enquanto matemático e porque se fez matar num duelo com a idade de 20 anos. Hoje, muitos franceses reconhecem o seu nome não tendo, no entanto, a noção da importância dos seus trabalhos.

GONÇALO Professor, muito obrigado pelo seu testemunho.

PETER NEUMANN Foi um prazer!



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas,
bibliotecas ou instituições similares*.

Mais Informações em
www.spm.pt/exposicoes

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.

ÉTIENNE GHYS NAS PEDRO NUNES LECTURES

No passado mês de Setembro, o reconhecido matemático francês Étienne Ghys esteve em Portugal para três palestras, a convite das Pedro Nunes Lectures. Em Lisboa, na Fundação Calouste Gulbenkian, falou sobre “Engarrafamentos nas grandes cidades: o preço da anarquia”; em Coimbra, das “Três bolas matemáticas”; e, no Porto, sobre as “Singularidades de curvas algébricas reais, um ponto de vista topológico”. Étienne Ghys é diretor de investigação do Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) na École Normale Supérieure, em Lyon. O seu excecional trabalho de investigação nas áreas da Geometria e dos Sistemas Dinâmicos tem sido reconhecido através da atribuição de diversos prémios e distinções, tais como a de membro da Academia Francesa das Ciências, em 2004, o título de Cavaleiro da Legião de Honra, em 2012, conferencista convidado no Congresso Internacional de Matemáticos em Kyoto, membro da comissão organizadora do Congresso Internacional de Matemáticos

em Hyderabad, membro da comissão da Medalha Fields, em 2014, e do prémio Prix Servant da Academia das Ciências. Foi distinguido com o título de Doutor Honoris Causa pela Universidade de Genebra, em 2008. Foi editor de prestigiadas publicações, tais como *Annals of Mathematics* e *Publications Mathématiques de l’IHÉS*. O seu trabalho na promoção da matemática é notável, tendo sido distinguido com o The Clay Award for Dissemination of Mathematical Knowledge, em 2015, com o Prix du Livre Audio 2011 e com o Prix d’Alembert da Sociedade Matemática de França, em 2010. Juntamente com Aurélien Alvarez e Jos Leys, produziu uma série de filmes, publicados em DVD e disponíveis *online* em diversas línguas, que tiveram um grande impacto junto dos estudantes do ensino secundário. As Pedro Nunes Lectures são uma organização conjunta da Sociedade Portuguesa de Matemática e do Centro Internacional de Matemática, com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian.

ADÉRITO ARAÚJO NOMEADO PRESIDENTE DO EUROPEAN CONSORTIUM FOR MATHEMATICS IN INDUSTRY

Adérito Araújo, vice-presidente da SPM e ex-diretor da *Gazeta de Matemática*, foi nomeado Presidente do European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI), assumindo funções a partir do dia 1 de Janeiro de 2018. Depois de, nos últimos dois anos, ter exercido o cargo vice-presidente, o professor de Coimbra irá, a partir de agora, liderar os destinos desta conceituada instituição europeia. O ECMI (<https://ecmiindmath.org>) é um consórcio de empresas e instituições académicas que atua cooperativamente com o objetivo de promover e apoiar o uso da modelação, da simulação e

da otimização matemáticas no tecido empresarial europeu. Através de várias iniciativas, tanto no campo da investigação como no do ensino e no da transferência de tecnologia, o ECMI tem contribuído decisivamente para fortalecer a matemática industrial na Europa, facilitando o acesso das empresas ao conhecimento e ao *know-how* existente na academia. Em Portugal, os membros institucionais do ECMI são o CMUC, Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, o Departamento de Matemática do IST, Lisboa, e o CMUP, Centro de Matemática da Universidade do Porto.





MARYAM MIRZAKHANI

3 maio 1977 - 14 julho 2017

MARYAM MIRZAKHANI, A “NOBEL DA MATEMÁTICA” DEIXA-NOS AOS 40 ANOS DE IDADE.

Maryam Mirzakhani, a primeira mulher a receber a Medalha Fields, o galardão mais importante na área da matemática, morreu a 14 de julho de 2017, aos 40 anos de idade.

AUTORA

Teresa Maria Sousa
Escola Naval

Maryam Mirzakhani, nasceu a 13 de maio de 1977 em Teerão, Irão. Frequentou a Farzanegan School, dedicada ao ensino de alunos excecionais, tendo sido a primeira estudante iraniana feminina a competir nas Olimpíadas Internacionais de Matemática, em 1994, nas quais ganhou uma medalha de ouro. Em 1995, repete o feito nas Olimpíadas em Toronto, tendo, desta vez, obtido a pontuação máxima (42 pontos, contra os 41 obtidos em 1994). Prossegue os seus estudos superiores na Sharif University of Technology, onde termina a sua licenciatura em Matemática em 1999. Inicia, de seguida, o seu doutoramento na Universidade de Harvard, que conclui em 2004, sob a supervisão do professor Curtis McMullen, também ele galardoado com a Medalha Fields em 1998.

Maryam especializou-se em espaços modulares das superfícies de Riemann, teoria de Teichmüller, geometria hiperbólica, teoria ergódica e geometria simplética. Sendo o seu trabalho de cariz puramente teórico, poderá vir a ter

impacto na física teórica, em vários ramos da engenharia e da ciência dos materiais. No universo da matemática, tem implicações concretas no estudo dos números primos e de criptografia.

Terminado o doutoramento, Maryam prossegue a sua carreira académica como investigadora no Clay Mathematics Institute (2004). Foi professora na Universidade de Princeton (2004-2008), tendo-se mudado para a Universidade de Stanford em 2008, onde ensinou até ao fim da sua vida. Em 2014, Maryam recebe a Medalha Fields, pelas suas contribuições excecionais para o estudo da geometria e da dinâmica das superfícies de Riemann e dos seus espaços modulares.

A medalha Fields é um galardão atribuído de quatro em quatro anos a, no máximo, quatro matemáticos com idade inferior a 40 anos. A medalha Fields e o Prémio Abel são, muitas vezes, designados como o Nobel da Matemática. No entanto, estes prémios são diferentes na sua essência. Enquanto o prémio Abel é um galardão de carreira, visto ter em conta a obra produzida pelo matemático ao longo da sua vida, a medalha Fields é um prémio concedido a jovens matemáticos em reconhecimento do trabalho já realizado. A medalha Fields foi entregue pela primeira vez em 1936 e desde 1950 tem sido entregue regularmente de quatro em quatro anos. Este prémio também oferece uma quantia em dinheiro que desde 2006 tem sido de 15 mil dólares.

Maryam Mirzakhani foi galardoada com a medalha Fields em 2014, ficando duplamente na história por ser a primeira mulher e o primeiro cidadão iraniano a receber este prestigiado prémio. A atribuição deste galardão a Maryam Mirzakhani deveu-se aos seus progressos notáveis na teoria das superfícies de Riemann e dos seus espaços modulares, tendo desbravado caminho para novas fronteiras nesta área. As suas ideias envolvem diversos métodos e áreas distintas, como a geometria algébrica, a topologia e a teoria da probabilidade. Na geometria hiperbólica, Mirzakhani respondeu a questões fundamentais relacionadas com o comportamento de linhas geodésicas em superfícies hiperbólicas. De facto, na sua tese de doutoramento, Mirzakhani provou resultados muito precisos para o número de linhas geodésicas fechadas de comprimento fixo que uma determinada superfície de Riemann pode ter. Mais tarde, usou esses resultados para demonstrar

a conjectura de Witten. Os seus últimos trabalhos envolvem o estudo de sistemas dinâmicos, tendo obtido resultados que poderão ser usados, por exemplo, no estudo do comportamento físico de gases. O trabalho desenvolvido por Mirzakhani é colossal e abre novos horizontes na investigação matemática e nas suas ligações a outras áreas do conhecimento.

Como vemos, Maryam Maryam Mirzakhani deixou-nos um legado científico de enorme importância e, certamente, inspirador para que mais mulheres se dediquem à matemática e a outras ciências.

Termino destacando algumas palavras proferidas por Maryam Mirzakhani.

“Temos de gastar alguma energia e fazer algum esforço para ver a beleza da matemática.”

“Não tenho nenhuma receita específica [para descobrir novas demonstrações]. ... É como estar perdida na selva e tentar usar todo o conhecimento ao meu alcance para encontrar novas ideias e truques, e com alguma sorte talvez consiga encontrar o caminho de saída.”

BIBLIOGRAFIA

[1] *IMU Prizes 2014 citations*. International Mathematical Union. Retrieved August, 12 2014. <http://www.mathunion.org/general/prizes/2014/prize-citations>

[2] *Maryam Mirzakhani, Stanford mathematician and Fields Medal winner, dies*
<http://news.stanford.edu/2017/07/15/maryam-mirzakhani-stanford-mathematician-and-fields-medal-winner-dies/>



SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA VENCE PRÊMIO GULBENKIAN – CONHECIMENTO

Atribuído este ano pela primeira vez, o Prémio Gulbenkian – Conhecimento subordinado ao tema “Promoção do Sucesso Escolar” foi concedido à Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) pela criação e a organização das Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), que este ano assinalaram a sua 35.^a edição. De acordo com o júri do Prémio Gulbenkian, na base desta distinção está a promoção de uma “iniciativa educativa de referência e de grande impacto nacional, que há mais de três décadas promove o gosto por esta disciplina”. É ainda destacado o mérito da competição em colocar dezenas de milhares de alunos dos ensinos básico e secundário em contacto com a matemática “num ambiente estimulante e criativo”.

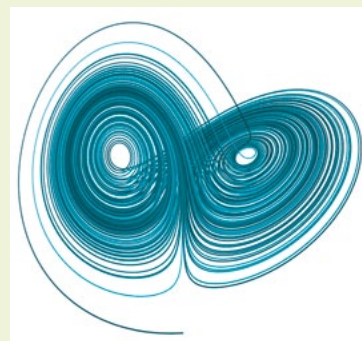
Os Prémios Gulbenkian Coesão, Sustentabilidade e Conhecimento, de âmbito nacional, foram entregues aos vencedores destas áreas numa cerimónia dirigida pelo Presidente da República, Professor Marcelo Rebelo de Sousa, no Anfiteatro ao Ar Livre da Fundação Calouste Gulbenkian, em Lisboa, no dia 20 de julho. Estes prémios juntam-se ao já existente Prémio Calouste Gulbenkian (internacional), que distingue pessoas singulares ou coletivas pelo seu contributo na defesa dos direitos humanos. As OPM tiveram a sua primeira edição em 1983 e desde o início que um dos seus principais objetivos foi o de contribuir para o desenvolvimento do gosto pela matemática entre os estudantes portugueses, promovendo, deste modo, o sucesso escolar dos jovens envolvidos na competição. A adesão das escolas e dos alunos ao concurso cresceu de forma evidente, tornando-se um dos acontecimentos na área da ciência que, atualmente, mais jovens envolve em Portugal.

As OPM são organizadas pela SPM em parceria com o Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, e contam com o apoio do Ministério da Educação, da Ciência Viva, da Fundação Calouste Gulbenkian, do Novo Banco e da Pathena.



MENÇÃO HONROSA PARA MÓDULO DO ATRACTOR

O portal Atractor recebeu uma Menção Honrosa na segunda competição internacional para módulos de exibição da “Mathematics of Planet Earth” (MPE), uma competição da responsabilidade da UNESCO, da International Mathematical Union (IMU), da International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) e da Imaginary. Este projeto visa mostrar como as ciências matemáticas são úteis para percebermos o nosso planeta e para enfrentarmos os desafios do desenvolvimento sustentável e das mudanças globais. Um júri internacional avaliou 28 candidaturas oriundas de 16 países e atribuiu três prémios. Alguns dos módulos enviados foram escolhidos pelo júri para uma menção honrosa, sendo um deles o enviado pelo Atractor: “The mathematics of tides”. Tanto os projetos premiados como os que obtiveram menções honrosas fizeram parte da exposição MPE oficial, que esteve patente de 21 a 29 de outubro em Londres. Poderá fazer o *download* de todos os módulos vencedores sob uma licença aberta da <http://imaginary.org/mpe>.



ESCHER NO MUSEU DE ARTE POPULAR A PARTIR DE 24 DE NOVEMBRO

A exposição do artista holandês Maurits Cornelis Escher chega a Lisboa pelas mãos da Arthemisia, uma das maiores empresas de exposições de arte do mundo. A estreia é feita com mais de 200 obras de Escher, o artista gráfico que ficou conhecido pelas suas representações de construções impossíveis, através da exploração do infinito com recurso aos padrões e figuras geométricas e à ilusão ótica. A exposição estará aberta ao público de 24 de novembro a 27 de maio de 2018. Em exibição vão estar obras-primas de Escher, como “Mão com Esfera Refletora”, “Relatividade” e “Belvedere”, e terá ainda equipamentos didáticos, experiências científicas e algumas surpresas.

ECMTB2018 SUBMISSÃO DE CONTRIBUTED TALKS E POSTERS

Estão abertas até ao dia 20 de fevereiro as submissões de resumos para *contributed talks* e *posters* na European Conferences on Mathematical and Theoretical Biology 2018 (ECMTB), que decorrerá de 23 a 27 de julho em Lisboa. As inscrições na conferência realizadas até 15 de abril beneficiarão de um preço reduzido. Consulte toda a informação em: <http://www.ecmtb2018.org/>.

PORTUGAL CONQUISTOU OURO, PRATA E BRONZE NAS OLIMPIADAS IBERO-AMERICANAS DE MATEMÁTICA



A equipa portuguesa obteve excelentes resultados nas Olimpíadas Ibero-americanas de Matemática (OIAM), que decorreram na cidade de Puerto Iguazú, Argentina, entre 16 e 23 de setembro, arrecadando três medalhas (ouro, prata e bronze) e uma menção honrosa. Participaram nesta competição perto de 100 jovens de mais de 20 países da América Latina e da Península Ibérica. Henrique Navas, de Lisboa, é o responsável pela medalha de ouro, Kevin Pucci, de Chaves, pela de prata, e João Morais, de Mirandela, conquistou a de bronze. Maria Madrugo, de Lisboa, alcançou uma menção honrosa e ficou apenas a um

ponto de uma medalha de bronze. Kevin Pucci, de 16 anos, e Henrique Navas, de 18, já haviam conquistado duas medalhas de bronze nas Olimpíadas Internacionais, que decorreram no Rio de Janeiro, em julho. Portugal participou pela primeira vez nas OIAM em 1990 e, desde então, já conquistou sete medalhas de ouro, 17 medalhas de prata e 37 de bronze. A participação de Portugal nas OIAM é organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática, e a preparação dos alunos é assegurada pelo Projeto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

VERÃO OLÍMPICO PARA A SPM

A Sociedade Portuguesa de Matemática viu especialmente reconhecido o esforço ímpar que desenvolve na promoção da Matemática e no seu ensino em duas ocasiões no mês de Julho de 2017.

No dia 20 de Julho o prestigiado Prémio Gulbenkian – Conhecimento 2017, subordinado ao tema “Promoção do Sucesso Escolar, foi concedido à Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) pela criação e organização das Olimpíadas Portuguesas de Matemática, que este ano assinalaram a sua 35.^a edição. De acordo com o júri do Prémio Gulbenkian, na base desta distinção esteve a promoção de uma “iniciativa educativa de referência e de grande impacto nacional, que há mais de três décadas promove o gosto por esta disciplina”. Foi ainda destacado o mérito da competição em colocar dezenas de milhares de alunos dos ensinos básico e secundário em contacto com a matemática “num ambiente estimulante e criativo”.

O Prémio foi entregue ao presidente da SPM, no dia 20 de Julho, na Fundação Calouste Gulbenkian, numa cerimónia dirigida pelo Presidente da República, Professor Marcelo Rebelo de Sousa. No valor de 50.000€ para 5 anos, o Prémio permitirá desenvolver ainda mais, e de forma sustentada, o movimento olímpico nacional e a sua inserção nas Olimpíadas internacionais (Olimpíada Internacional de Matemática, Olimpíadas Ibero-Americanas, Olimpíadas da CPLP).

Nem de propósito: dias depois, teve início no Porto a 7.^a Olimpíada de Matemática da CPLP organizada pela SPM. Unir os países lusófonos através da matemática, incentivar o desenvolvimento da disciplina em todos eles e aprofundar a cooperação nesta área são os grandes objetivos das Olimpíadas da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (CPLP). Esta decorreu que este ano decorrem na Faculdade

de Ciências da Universidade do Porto, de 23 a 30 de Julho.

Esta foi a segunda vez que Portugal acolheu o evento, tendo sido a primeira em 2011, em Coimbra, o primeiro ano em que se realizou a competição – correspondendo a um desafio feito em 2010 ao então Presidente da SPM, Nuno Crato, pelo então Ministro da Ciência e Tecnologia, Mariano Gago. A chama olímpica foi assim transportada pela SPM, e nalguns casos mesmo acesa pela primeira vez, de Portugal para países irmãos em quatro continentes, numa iniciativa que, nas palavras de Natália Dias Furtado, representante de Cabo Verde, “é crucial para corrigir os desequilíbrios disciplinares no nosso País”.

Numa organização conjunta entre a SPM e o CIM, decorreram entre 25 e 29 de Setembro as Pedro Nunes Lectures 2017. O convidado deste ano foi o matemático francês Étienne Ghys, reconhecido pelas suas notáveis contribuições nas áreas de Geometria e Sistemas Dinâmicos, bem como pela sua actividade excepcional na divulgação da Matemática, de que são emblemáticos os filmes *Dimensions* e *Chaos*, livremente acessíveis na Web. Étienne Ghys falou no dia 25, na Fundação Calouste Gulbenkian, sobre “Engarrafamentos nas grandes cidades: o preço da anarquia”; no dia 27, na Universidade de Coimbra, sobre “Três bolas matemáticas”; e no dia 29, na Universidade do Porto, sobre Singularidades de curvas algébricas reais: um ponto de vista topológico”. Foram sessões inesquecíveis para quem esteve presente, a fechar um Verão de ouro para a SPM.

Tratou-se de um Verão carregado de ouro olímpico para a SPM!

M Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: gazeta@spm.pt.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2018

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para imprensa@spm.pt

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

