N. 0184

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA | Ano LXXVIV | Mar. 2018 | 4,20€

PT-MATHS-IN

Segurança Pré e Pós-Quântica

ANTÓNIO MACHIAVELO

Limites Alternativos

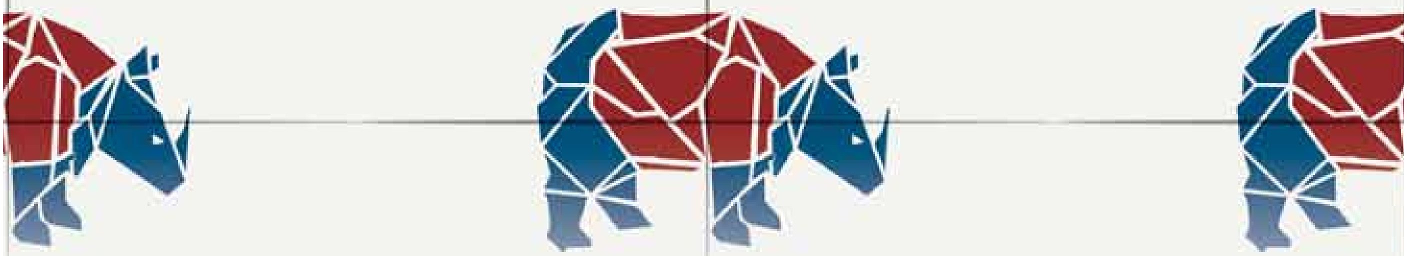
AUGUSTO J. FRANCO DE OLIVEIRA

ATRACTOR

Figuras Que Tremem

O Professor Goncharov Não Vem Mais

ANA MATIAS



11*th* European Conference *on* Mathematical *and* Theoretical Biology

ECMTB2018
LISBON

www.ecmtb2018.org

Lisbon **July 23-27**

Celebrating the ***Year*** of ***Mathematical Biology!***

Plenary Speakers:

Helen Byrne
University of Oxford, UK

Samuel Kou
Harvard University, USA

Andrea Pugliese
University of Trento, Italy

Antonio DeSimone
Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Italy

Mirjam Kretzschmar
UMC Utrecht, The Netherlands

Eörs Szathmáry
Eötvös Loránd University, Hungary

Eva Kisdi
University of Helsinki, Finland

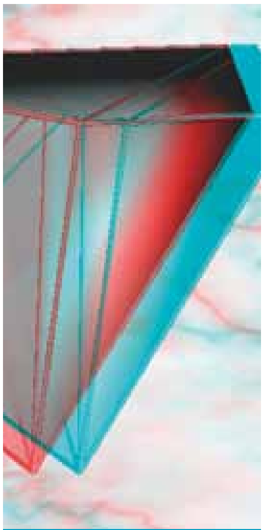
Eva Löcherbach
Université de Cergy-Pontoise, France

Kees Weijer
University of Dundee, UK

Supported by

Funding FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia) Projects: UID/MAT/04561/2013 (CMAFCIO); UID/MAT/04674/2013 (CIMA); UID/MAT/00297/2013 (CMA); UID/MAT/00006/2013 (CEAUL).

34 **O PROFESSOR GONCHAROV NÃO VEM MAIS**
Ana Matias



03 ATRACTOR
Figuras que tremem

18 **LIMITES ALTERNATIVOS**
Augusto J. Franco de Oliveira

10 CANTO DÉLFICO
A desigualdade de Karamata

M

ÍNDICE

Sílvia Barbeiro
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

A ARITMÉTICA E O SONHO

Na matemática, podemos fazer descobertas só com o pensamento. Na matemática, podemos idealizar.

O meu filho mais velho tem 6 anos e frequenta o primeiro ano do primeiro ciclo de escolaridade. Ontem, durante o pequeno-almoço, disse-me:

— 2+2=4, 4+4=8, 8+8=16, 16+16=32, e agora continua tu.

Eu continuei:

— 64, 128, 256, 512, 1024...

Interrompeu-me:

— Estás a ver mãe, ficamos com números grandes muito depressa.

Ao que respondi:

— Tens toda a razão!

Lembrei-me de uma experiência que li num *blog* de divulgação matemática. Peguei numa folha de papel e dobrei-a ao meio. Depois dobrei-a outra vez ao meio e assim sucessivamente. Ao fim de seis dobras, tínhamos a espessura de um caderno. Mas tornou-se difícil continuar a dobrar. Concluí:

— Se dobrássemos 42 vezes ficaríamos com uma torre mais alta do que a distância da Terra à Lua e se dobrássemos 51 vezes, a torre seria mais alta do que a distância da Terra ao Sol.

O rapaz ficou com ar sonhador. E ele e o irmão mais novo começaram imediatamente a fazer planos para uma subida até à Lua no próximo domingo. Decidiram não subir ao Sol porque está demasiado quente.

A matemática envolve e estimula a imaginação. A criatividade tem na matemática um papel tão primordial como noutras formas de expressão artística, como a literatura, a música ou a pintura. Para descobrir algo de novo é preciso uma ideia, em particular uma ideia que funcione. As boas ideias surgem não só da intuição, que é baseada na experiência, mas também de muita imaginação.

Imaginativos como são, os matemáticos criaram um universo que não se pode tocar nem sentir ou avistar. O processo de extrair a essência fundamental de um conceito e fazê-lo residir apenas no universo das ideias, removendo a dependência do mundo real, permite generalizar, agregar e unificar objetos e linhas de raciocínio, e aumenta o potencial de aplicação em diversas áreas. A abstração possibilita a conceção e a compreensão de objetos aparentemente irreais. Por exemplo, a nossa visão está limitada a três dimensões. Mas podemos pensar num cubo em dimensão quatro, um hipercubo, usando uma analogia dimensional para fazer o salto de três para quatro dimensões, para a seguir entender o análogo n-dimensional. A abstração não é apenas fascinante, ela desempenha um papel central na atividade humana. E as passagens desse universo abstrato da imaginação matemática para o mundo concreto estão na origem de enormes progressos científicos.

Convido-vos à leitura de mais um inspirador número da *Gazeta de Matemática* e faço votos para que nesta primavera sejam especialmente criativos.

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

FIGURAS QUE TREMEM

Quem já observou com atenção os guindastes que são usados nas obras, reparou por certo que os retângulos usados nas suas hastes compridas estão cheios de triângulos (ver figura 11), cuja função é contribuir para a rigidez da estrutura e impedir que ela se deforme intensamente ao levantar objetos pesados. Veremos neste texto como introduzir matematicamente as noções de estruturas rígida e trémula, começando por tratar a questão no plano para polígonos.

Dados um semiplano S com bordo horizontal r e um segmento $[AB]$ em r, comecemos por construir em S, para cada $n > 2$, um polígono com n lados, todos com o mesmo comprimento, tendo o segmento $[AB]$ como um dos lados (figura 1), e por ver, para cada valor de n, qual é o número de soluções deste problema.

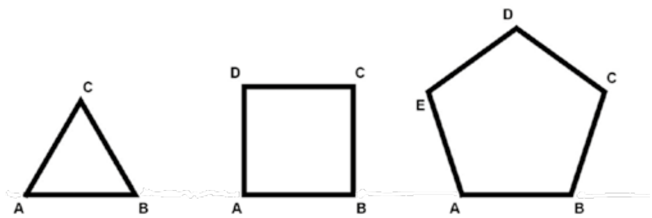


Figura 1.

Para $n = 3$, só há um triângulo que satisfaz as condições do problema; mas, para cada $n > 3$, há uma infinidade de soluções. Por exemplo, para $n = 4$, todos os losangos em S com lado $[AB]$ satisfazem essas condições; e são as únicas soluções, que em particular são pois todas convexas, pelo menos se na definição de polígono estiverem excluídos os casos degenerados. Se se aceitar que num polígono pode haver sobreposição de lados e que o polígono pode ter área nula, então haverá soluções não convexas para $n = 4$, como nos dois últimos exemplos da figura 2. Já para $n \geq 5$, há também soluções não degeneradas que não são convexas (ver figura 3).

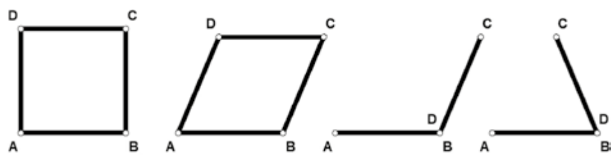


Figura 2.

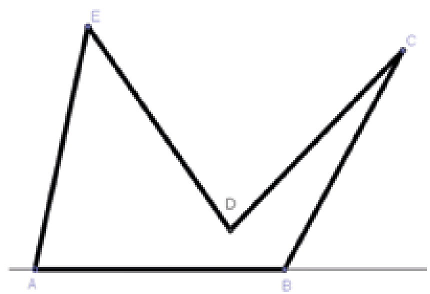


Figura 3.

Mais geralmente, se for fixado um lado num triângulo qualquer, então não podemos mover o vértice oposto, sem alterarmos o comprimento de pelo menos um dos dois lados adjacentes ao fixado. Já a situação é diferente para um quadrilátero qualquer não degenerado ou um polígono não degenerado com maior número de lados, que são sempre deformáveis[1] em polígonos com formas diferentes, mantendo-se constantes os comprimentos de todos os lados durante a deformação.

Resulta do que foi dito que no caso de um triângulo $[ABC]$, mesmo não equilátero, não há em S nenhum triângulo $[ABC']$ diferente de $[ABC]$, cujos lados tenham comprimentos iguais aos correspondentes de $[ABC]$, embora, pensando nos lados como hastes de uma estrutura física, esta imobilidade do C parece por vezes ser posta em causa na prática. O leitor pode querer construir uma tal estrutura, com os meios de que dispuser[2]. A figura 4 representa configurações que poderá reproduzir aproximadamente. Há, em cada uma das quatro situações representadas, três pares de barras ligadas, duas a duas, por orifícios nos extremos das barras. Numa, as três barras têm o mesmo comprimento e o triângulo obtido é equilátero, nas outras três o comprimento da haste horizontal fixa é o dobro do das outras duas hastes mais pequenas. Em três dos casos, essas ligações foram feitas por parafusos com porcas, mas não apertados demasiado, para não imobilizarem as duas hastes que eles ligam; no outro caso, o da direita em cima, o parafuso foi substituído por um pino que se ajusta[3] um pouco melhor do que o parafuso ao orifício da haste.

Sem folgas, em cada um dos três últimos casos, as duas hastes mais pequenas deveriam estar alinhadas com a maior. O objetivo da experiência é tentar afastar, o mais possível, da barra horizontal fixa, o ponto em que as duas outras hastes estão ligadas. No triângulo equilátero, é completamente impercetível qualquer alteração de posição do ponto, mas nos outros três casos, aproveitando as pequeníssimas folgas existentes entre o orifício e o parafuso (ou pino), conseguem-se alguns desvios: a figura 4 representa os desvios máximos conseguidos. Comparem-se, em particular, as duas imagens da direita: é visível na de baixo um maior ângulo de cada uma das duas barras pequenas com a horizontal (quase o dobro do ângulo na de cima), embora a diferença entre as folgas nos dois casos da direita seja só de 0,2 mm.

Isto significa que, na prática, o conhecimento aproximado dos comprimentos dos lados do triângulo permite, no caso de triângulos degenerados, formas bem diferentes umas das outras, embora tal não suceda no caso, por exemplo, do triângulo equilátero. Esta falta de rigidez de um triângulo degenerado $[ABC]$ como o que estamos a considerar está ligada ao facto de o comprimento dos lados mais pequenos $[AC]$ e $[BC]$ "não mudar significativamente", quando C se desloca um pouco na vertical. Se encontrarmos uma definição precisa que traduza o sentido, *a priori* subjetivo, da parte destacada na frase anterior, teremos encontrado uma forma de definir matematicamente a rigidez.

Antes de fazermos essa tradução, analisemos uma situação concreta. Com as notações anteriores, consideremos em S o (único) triângulo $[ABC]$ equilátero de lado $[AB]$: está na figura 5 a preto e azul. Se L designar metade do comprimento de $[AB]$, a altura h_0 de C é dada por $\sqrt{3}L$. Aplicando a este triângulo uma deformação f que conserve imóveis A e B e desloque C na vertical com velocidade escalar, por exemplo, constante e igual a 1, o ponto $C'(= f(C,t))$ representado na mediatriz de $[AB]$ em S está à distância $\delta = t$ de C, para cima e o triângulo $[ABC']$, isósceles, tem lados $[AC']$ e $[BC']$ com comprimentos ligeiramente maiores do que $2L$. O comprimento (comum) de $[AC']$ e $[BC']$ é dado pela função g definida por $g(h) = \sqrt{L^2 + h^2}$, em que $h = h_0 + \delta$ representa a altura de C' e, portanto, o aumento do comprimento, relativamente ao de $[AC]$, é

$$\begin{aligned}\epsilon = g(h_0+\delta) - g(h_0) &= \sqrt{L^2 + (h_0+\delta)^2} - \sqrt{L^2 + h_0^2} \\ &= \sqrt{L^2 + (h_0+\delta)^2} - 2L.\end{aligned}$$

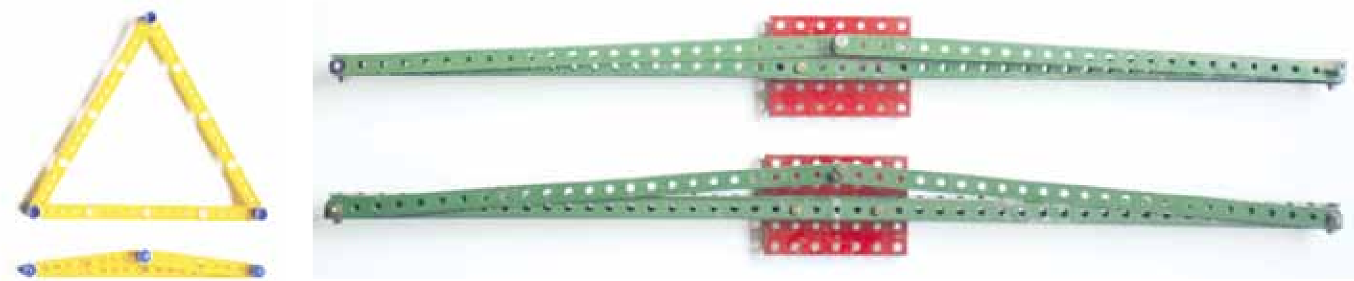
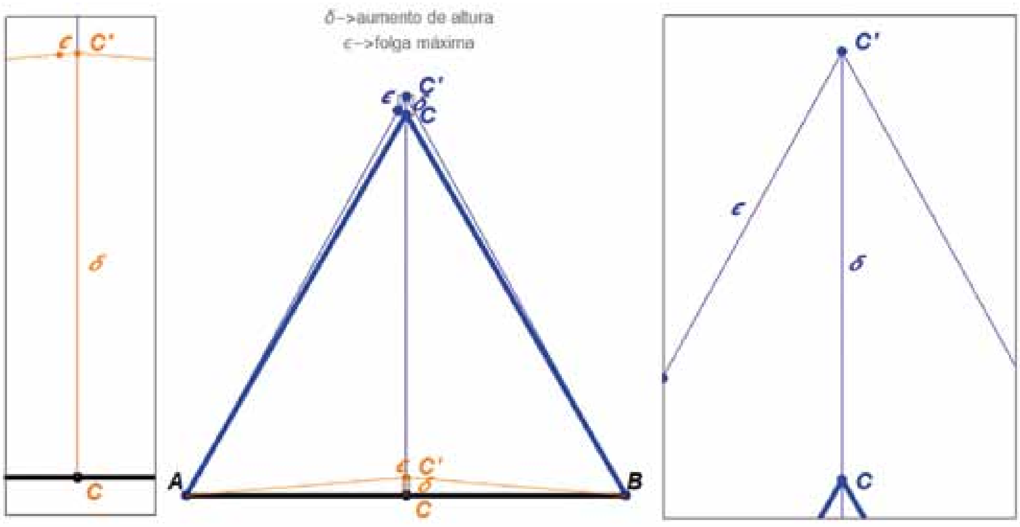


Figura 4.



◀ Figura 5.

▼ Figura 6.

Na figura 5, está marcado no segmento $[AC']$ o ponto que dista de A o mesmo que C, sendo, pois, ϵ a distância desse ponto a C'.

Na mesma figura está também representado (a preto e laranja) o que se passa quando se parte de um triângulo degenerado em vez de um equilátero. Nas fórmulas indicadas, há agora que substituir h_0 por 0. O comprimento de $[AC']$ e $[BC']$ é agora $\sqrt{L^2 + \delta^2}$ e, portanto, o aumento ϵ do comprimento, relativamente ao correspondente a $h_0 = 0$ é $\sqrt{L^2 + \delta^2} - L$.

Para uma comparação mais clara entre os valores de δ, correspondentes à deslocação de C para cima (até C') e os da folga ϵ que permitem os aumentos dos comprimentos, foram incluídas na figura 5, dos dois lados, ampliações de partes da imagem central, a da esquerda para o triângulo degenerado e a da direita para o equilátero. Nota-se que, no caso degenerado, o aumento de comprimento ϵ é insignificante, quando comparado com o aumento de altura δ. O mesmo não acontece no caso do triângulo equilátero, em que δ e ϵ são da mesma ordem de grandeza.

A figura 6 mostra os gráficos da função $\epsilon(\delta)$ nos dois casos considerados, tomando 610 mm como comprimento de $[AB]$, que é o do modelo usado. No caso do triângulo degenerado, para obter um aumento da altura do ponto C de cerca de 25 mm, basta uma folga de cerca de 1 mm, ao passo que no caso de um triângulo equilátero com a mesma base, a mesma folga permite um aumento de altura de pouco mais de 1 mm.

[1] Dado um polígono F no plano P, designando por V o conjunto dos vértices de F e A o das arestas, definimos deformação de F em P como uma função contínua f de $V \times [0,1] \to P$, tal que, para todo o vértice R em V, $f(R, 0) = R$. Para cada t, pondo $f_t(R) = f(R, t)$, $V_t = f_t(V)$ e, para cada aresta $a = [R, S]$ de F, $a_t = [R_t, S_t]$, A_t designa o conjunto dos segmentos a_t, para a em A. O polígono F_t é definido como o polígono com vértices V_t e arestas A_t. Dependendo do contexto, pode-se exigir que, para cada $t \in [0,1]$, a função $f_t : x \to f[x, t]$, satisfaça condições suplementares, como, por exemplo, que seja de classe C^1 e injetiva. Suporemos ainda que para cada vértice R tal que a função $t \to f[R, t]$ não seja constante, ela tem derivada não nula em $t = 0$. Ver em [1] exemplos interativos de deformações de polígonos. Uma deformação diz-se trivial se, para cada x em V, a função $t \to f_t(x)$ for constante.

[2] Se tiver acesso a um jogo do tipo *Meccano*, pode inspirar-se na figura 4 (lado esquerdo ou direito, conforme a época em que esse *Meccano* tiver sido adquirido), caso contrário, poderá usar três tiras de alumínio ou de PVC fino, em cada uma das quais terá de furar dois buracos.

[3] Os diâmetros dos orifícios, parafusos (e pinos) usados nas hastes das fotografias são: plástico 10,4 mm e 10,2 mm; outros: 4,3 mm, 3,6 mm (e 3,8 mm); as folgas são, pois, de 0,2 mm no caso plástico e 0,7 mm (e 0,5 mm) nos outros. Em todos os casos os diâmetros foram medidos com uma craveira com nónio e têm erro inferior a 0,1 mm.

O leitor já terá notado que o limite do quociente $\epsilon/\delta = (g(h_0+\delta)-g(h_0))/\delta$ quando δ tende para 0 é o valor[4] $g'(h_0)$ da derivada da função g no ponto h_0 (notar que δ é igual a t por termos suposto a velocidade escalar do movimento de C constante e igual a 1). E, precisamente, esse valor $h_0/\sqrt{L^2+h_0^2}$ é 0 se $h_0 = 0$ (caso degenerado, a laranja) e é diferente de 0 (mais precisamente é $\sqrt{3}L/(2L) = \sqrt{3}/2 \cong 0,866$) se $h_0 = \sqrt{3}L$ (caso equilátero, a azul).

Em conclusão, o triângulo degenerado $[ABC]$, em que C é o ponto médio de $[AB]$, tem as duas propriedades a seguir enunciadas. Fixada uma aresta $[AB]$,

- não há nenhuma deformação (não trivial) do polígono, que deixe o lado $[AB]$ fixo e conserve todos os comprimentos dos lados;
- existe uma deformação (não trivial) do polígono, que deixa a aresta $[AB]$ fixa e tal que, para cada aresta a, a função $t \to$ *comprimento de* a_t tem derivada nula em $t = 0$.

Chamaremos trémula a uma configuração que satisfaça estas duas condições. E diremos que uma configuração é rígida se satisfizer a primeira mas não a segunda.

O leitor poderá verificar que:

- o quadrado é deformável (por losangos), portanto não satisfaz a primeira condição, não sendo pois rígido nem trémulo (é flexível);
- qualquer triângulo não degenerado é rígido;
- qualquer polígono que não satisfaça a primeira condição satisfaz necessariamente a segunda, porque há uma deformação não trivial, em que as funções comprimento de cada lado são constantes.

Visto em detalhe o caso dos polígonos no plano, vamos agora alargar as definições ao caso de poliedros no espaço. O "análogo" de um triângulo equilátero no plano, figura rígida por excelência, é um tetraedro (poliedro regular com quatro faces que são triângulos equiláteros). E o que é que será o análogo ao quadrado e ao losango? Consideremos um cubo. Será deformável continuamente, como é o quadrado? A resposta depende do que exigirmos que se mantenha durante a deformação. No caso do quadrado no plano, queríamos que os comprimentos dos lados se mantivessem constantes durante a deformação (ou, o que é equivalente, que as distâncias entre vértices consecutivos do polígono se mantivessem constantes). No caso do cubo, há duas escolhas possíveis a fazer para uma deformação do poliedro: i) a mais fraca, exigindo que as distâncias entre vértices consecutivos de cada face se mantenham constantes, ou, o que é equivalente, que os comprimentos de todas as arestas do poliedro permaneçam constantes; ii) outra, exigindo que, para cada face, as distâncias entre quaisquer dois dos seus vértices se mantenham constantes, o que equivale a impor que, durante a deformação, cada face se mantenha isométrica à de partida. A figura 7 mostra uma fase na deformação do cubo que satisfaz a primeira condição e não a segunda: as faces não horizontais que contêm as arestas $[AB]$ e $[CD]$ são losangos não quadrados e as restantes quatro são quadrados. Para um poliedro que só tenha faces triangulares, as duas condições (i) e (ii) coincidem.

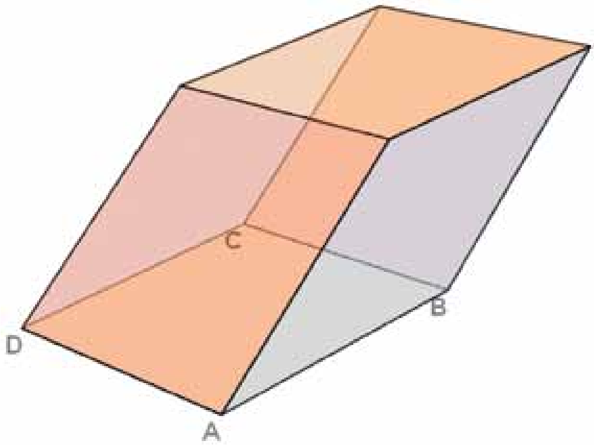


Figura 7.

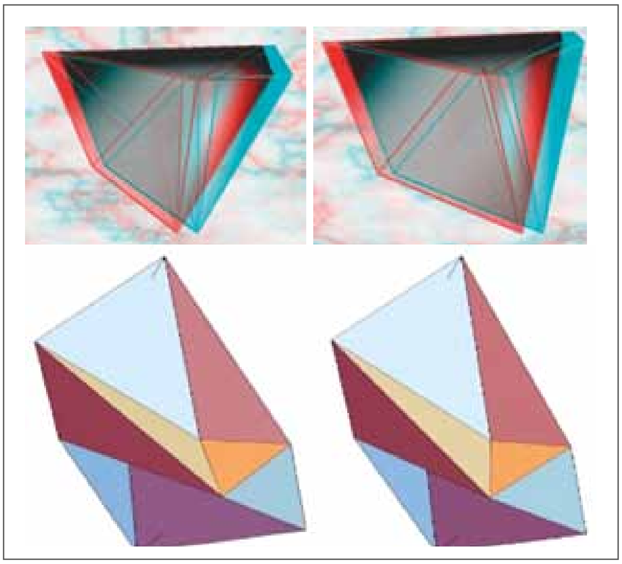


Figura 8.

Um poliedro é dito flexível se existir uma deformação

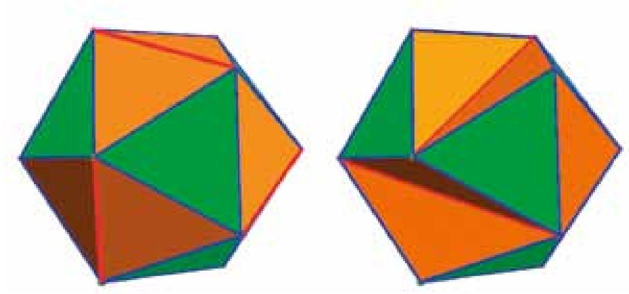


Figura 9.

não trivial que fixe uma face e satisfaça a condição mais forte (ii). Cauchy provou, em 1813, que nenhum poliedro convexo (não degenerado) é flexível (o argumento pode ler-se em [2]). Durante 164 anos, esteve em aberto o problema de saber se haveria ou não poliedros (sem auto interseções) flexíveis não convexos. Uma resposta afirmativa foi dada em 1977 por Connelly, tendo sido exibido um exemplo[5] de um tal poliedro em que todas as faces são triangulares. A figura 8 mostra fases na deformação[6] de um poliedro definido por Steffen, baseado no de Connelly, mas com menor número de faces, tendo sido provado mais tarde que nenhum outro existe com ainda menor número de faces.

A definição de poliedro trémulo é semelhante à usada no caso dos polígonos no plano. Diremos que o poliedro é trémulo se

- ▶ não for flexível;
- ▶ houver uma deformação (não trivial) do poliedro, tal que, para cada aresta a, a função $t \to \textit{comprimento de } a(t)$ tem derivada nula em $t = 0$

e o poliedro é rígido se satisfizer a primeira condição e não a segunda.

O leitor poderá verificar que:

- ▷ já foi visto um exemplo de um poliedro flexível, mas, contrariamente ao caso dos polígonos no plano, não é um exemplo elementar;
- ▷ uma pirâmide triangular degenerada, por exemplo, com um triângulo equilátero por base e em que o vértice "oposto" é o centro da base, constitui um exemplo trivial de um poliedro trémulo;
- ▷ qualquer poliedro flexível satisfaz a segunda condição.

A figura 9 ajuda a ver como se pode definir um exemplo de um poliedro trémulo não degenerado, devido a Jessen. Partindo dos vértices de um icosaedro regular[7], fazemos escolhas de pares de faces contíguas pela forma indicada na imagem da esquerda (faces não verdes) e substituímos cada um desses pares por um par reentrante de triângulos isósceles, mantendo-se o conjunto de vértices inalterado (imagem direita), embora, claro, as novas arestas a vermelho tenham comprimentos diferentes das primitivas. Aplica-se ao poliedro uma deformação que conserve os comprimentos das arestas a vermelho, e que se traduza na diminuição, com velocidade constante, da distância entre os vértices dos diedros reentrantes que não pertencem às (novas) arestas vermelhas, até terem o valor final 0, caso em que os triângulos isósceles referidos se identificam dois a dois. Escolhido um vértice V_0 e uma face verde à qual ele pertença, se essa deformação mantiver fixo V_0 e conservar as direções das arestas dessa face às quais pertence V_0, a deformação fica perfeitamente determinada. Note-se que os comprimentos das arestas (a azul), bordos das faces (verdes), não permanecem constantes durante a deformação, embora se conservem iguais entre si. A figura 10 mostra os gráficos de várias funções, relacionadas com esta deformação, que termina num poliedro degenerado do qual só ficam visíveis as faces verdes, que ocupam as posições de um octaedro regular. Essa figura 10 permite observar que há um valor[8] de t para o qual ambas as funções comprimento têm derivada 0. Da família de poliedros representados por esta deformação só se pode concluir que é trémulo o correspondente a esse valor do parâmetro de deformação, e não todos os outros, como por vezes é afirmado. Para esse valor do parâmetro

---

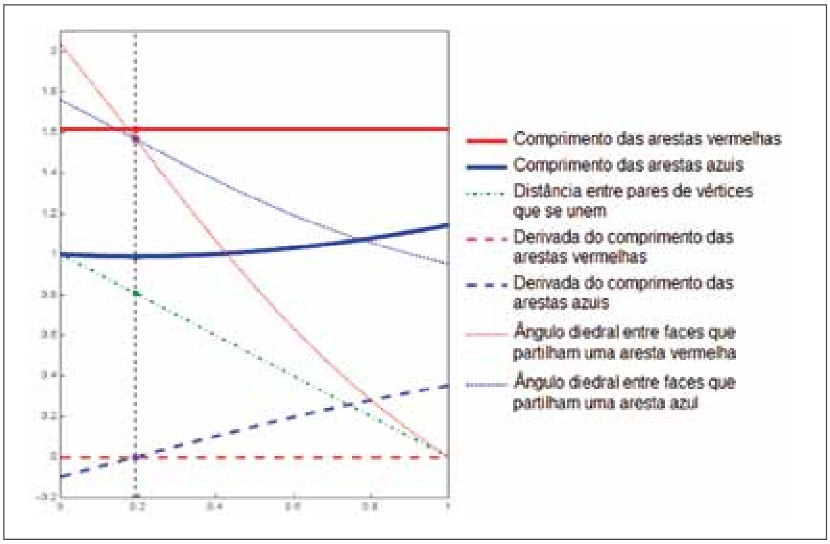
[4] Com a escolha feita, esse valor é o módulo da derivada de $t \to f(C,t)$ em 0. Claro que, se tivéssemos escolhido uma deformação f em que a velocidade escalar do movimento $t \to f(C,t)$ na origem fosse diferente de 1, o limite de ϵ/δ seria diferente do módulo da derivada em 0 de f relativamente a t, mas o anulamento de um equivaleria ao anulamento do outro, precisamente devido à condição extra imposta na definição de deformação.

[5] Um exemplo de um poliedro flexível com auto interseções tinha sido dado por Bricard 80 anos antes.

[6] O par de imagens pequenas, mais a baixo, permite visão estereoscópica aos leitores que consigam "juntar visualmente" as duas imagens numa só. O par de cima pode ser visto com óculos anáglifos. Um modelo em cartão foi construído para a "Exposição Matemática Viva", criada pelo Atractor, e que esteve cerca de dez anos em exibição no Pavilhão do Conhecimento. Modelos virtuais interativos em visão mono ou estereoscópica podem ser vistos em [1].

[7] Uma escolha de vértices de um tal poliedro pode ser a seguinte: $(0, \phi/2, 1/2)$, $(0, -\phi/2, 1/2)$, $(0, \phi/2, -1/2)$, $(0, -\phi/2, -1/2)$, $(\phi/2, 0, 1/2)$, $(-\phi/2, 0, 1/2)$, $(\phi/2, 0, -1/2)$, $(-\phi/2, 0, -1/2)$, $(\phi/2, 1/2, 0)$, $(-\phi/2, 1/2, 0)$, $(\phi/2, -1/2, 0)$, $(-\phi/2, -1/2, 0)$, em que ϕ designa o número de ouro.

[8] Esse valor é $1 - \phi/2 \cong 0,19$, ϕ designando o número de ouro.



◀ Figura 10.

▼ Figura 11.

em que o poliedro é trémulo, o ângulo diedral (variável) reentrante é[9] $\pi/2$. O poliedro trémulo correspondente é conhecido por icosaedro ortogonal de Jessen.

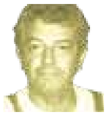
A figura 11 representa uma pequena porção da parte superior de um guindaste, que põe em evidência o uso da rigidez dos triângulos para reforçar estruturas com outras formas. Nessa figura é possível observar como: i) em cada uma das quatro faces (retangulares) da enorme coluna vertical (de secção quadrada), de que apenas é mostrada uma pequena parte de cima, há triângulos equiláteros, que dão rigidez a essa coluna; ii) em cada uma das duas faces laterais da grande haste horizontal (de secção triangular), há novamente triângulos equiláteros com o mesmo objetivo; iii) finalmente, os cabos de aço que permitem o suporte da haste horizontal do lado direito, equilibrada por grande massa do lado esquerdo, formam também na parte direita da imagem um grande triângulo; e na parte esquerda, há uma curiosa estrutura formada por dois triângulos (a amarelo) e um outro (a amarelo e preto) com os cabos de aço e uma haste cinzenta retangular quase vertical, ela mesma também triangulada, que permitem uma boa rigidez. Este é um exemplo convincente do uso que os engenheiros mecânicos fazem das noções que tratámos acima. Mas outros exemplos poderiam ser dados ligados à construção, bem conhecidos dos engenheiros civis.

REFERÊNCIAS

[1] *www.atractor.pt/mat/tremulos*

[2] M. Aigner, G. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, 2009.

[9] Feitas as contas para o ângulo diedral reentrante α em função do parâmetro de deformação t, obtém-se $tg[\alpha/2] = (1-t)/(-\phi 1+t)$. No caso ortogonal, ficará $1 = (1-t)/(-\phi 1 + t)$, ou seja $t = 1-\phi/2$. Portanto, a posição trémula é precisamente aquela em que o ângulo diedral reentrante é reto. Acontece que todos os outros ângulos diedrais (não reentrantes) são também retos nessa fase da deformação.



JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

HERANÇA

Muitos dos problemas que Leonardo Pisano, Fibonacci, nos ofereceu no *Liber Abaci*, de 1202, mantêm um encanto especial. O mais famoso de todos é, claro, o dos coelhos, que deu origem à célebre sucessão, mas hoje trazemos aqui um outro que, em 1519, o nosso Gaspar Nicolas, no *Tratado da Pratica Darismetyca*, também abordou e ao qual acrescentou algo.

O problema em questão (ver a edição de Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci*, Springer 2002, p. 399) pode ser enunciado assim:

> Um pai divide a sua herança entre os filhos da seguinte maneira. O primeiro recebe um euro e um sétimo do restante; o segundo tem direito a dois euros e um sétimo do restante, e assim sucessivamente. Acontece que todos recebem quantias iguais. Quantos são os filhos, quanto toca a cada um e de quanto era a herança?

Fibonacci propõe também o problema semelhante em que primeiro se acha o sétimo e depois se somam as quantias (um euros, dois euros, etc.).

Gaspar Nicolas propõe estas duas questões e ainda as que se obtêm substituindo sétimos por nonos. E nós perguntamos ao leitor o que sucede se, em vez de sétimos ou nonos, tivermos, com toda a generalidade dos valores naturais de n, a fração $1/n$:

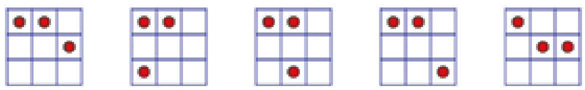
> Um pai divide a sua herança entre os filhos da seguinte maneira. O primeiro recebe um euro e $1/n$ do restante; o segundo tem direito a dois euros e $1/n$ do restante, e assim sucessivamente. Acontece que todos recebem quantias iguais. Quantos são os filhos, quanto toca a cada um e de quanto era a herança?

> E se o primeiro receber $1/n$ da herança mais um euro, o segundo receber $1/n$ do restante mais dois euros, e assim sucessivamente?

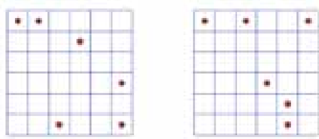
Sobre a questão do número anterior:

Dado um tabuleiro 3×3, pretende-se colocar (3) peões em três casas distintas de forma a que as respetivas distâncias sejam todas diferentes. Assumimos que os peões se identificam com os centros das células do tabuleiro e que as distâncias são as euclidianas, medidas em linha reta.

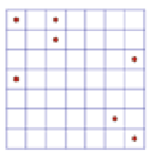
A menos de simetrias, este problema tem cinco soluções, aqui ilustradas.



Para $n = 4$ há 16 soluções e 28 para o caso $n = 5$. Para $n = 6$ somente duas soluções, a menos de simetrias:



Há uma só solução para $n = 7$:



Para valores superiores de n não há qualquer solução! [Ver o livro de Martin Gardner *The Colossal Book of Short Puzzles and Problems*, W.W. Norton & Company 2006, pp. 119-

A DESIGUALDADE DE KARAMATA


Amílcar Branquinho
Universidade de Coimbra
ajplb@mat.uc.pt


Jorge Neves
Universidade de Coimbra
neves@mat.uc.pt

"There are three great pillars of the theory of inequalities: positivity, monotonicity and convexity."
J. Michael Steele

INTRODUÇÃO

Uma boa estimativa vale ouro; a sua construção requer profunda intuição das grandezas envolvidas. Numa cadeia de estimativas, cada elo deve ser o melhor possível para não pôr em risco a demonstração da desigualdade desejada... isto se ela for verdadeira.

Saber estimar bem, munir-se das desigualdades certas é crucial para quem queira entrar no mundo da Análise Real. Existem inúmeras desigualdades notáveis, e muitas elementares, que têm um lugar especial na resolução de problemas de matemática olímpica.

Propomo-nos traçar um caminho por algumas desigualdades bem conhecidas, terminando com aquela que dá nome a este canto.

DESIGUALDADE DOS REARRANJOS

Seja n um inteiro positivo e sejam $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ duas sequências de números reais.

> *Qual é o emparelhamento dos termos de $a_1, \ldots, a_n$ com os termos de $b_1, \ldots, b_n$ para o qual a soma dos produtos de pares de números é maior? E qual é o emparelhamento para o qual a soma dos produtos é menor?*

A desigualdade dos rearranjos diz que, para qualquer escolha do emparelhamento, a soma dos produtos de pares é sempre menor do que aquela obtida ordenando ambas as sequências pela ordem decrescente (ou crescente) e maior do que aquela obtida mantendo a ordem numa das sequências e invertendo-a na outra.

Para formalizar esta ideia, suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$a_1 \geq \cdots \geq a_n \text{ e } b_1 \geq \cdots \geq b_n.$$

A desigualdade dos rearranjos diz então que, para toda a permutação σ dos índices $1, \ldots, n$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\, b_{n-j+1} \leq \sum_{j=1}^{n} a_j\, b_{\sigma(j)} \leq \sum_{j=1}^{n} a_j\, b_j\,. \tag{1}$$

Notemos que, à primeira vista, é surpreendente que estas estimativas se mantenham verdadeiras independentemente da existência de números negativos entre os termos destas sequências. Demonstraremos esta desigualdade mais adiante. Até lá, pense em como o faria.

DESIGUALDADE MG – MA

Uma ideia recorrente na manipulação de uma desigualdade na sua forma geral é a de tomar casos especiais das variáveis envolvidas, uma técnica que se poderia designar por *especialização*.

Suponhamos que $a_1, \ldots, a_n > 0$ e tomemos

$$b_j = \tfrac{1}{a_j}\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

A ordenação decrescente dos termos de $a_1, \ldots, a_n$ produz em $b_1, \ldots, b_n$ a ordenação crescente. Deduz-se então da desigualdade dos rearranjos que

$$n \leq \frac{a_1}{a_{\sigma(1)}} + \frac{a_2}{a_{\sigma(2)}} + \frac{a_3}{a_{\sigma(3)}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{\sigma(n)}}\,,$$

para qualquer permutação, σ, dos índices $1, \ldots, n$. Em particular, tem-se que

$$n \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}}\,. \tag{2}$$

Sejam agora ρ e $x_1, \ldots, x_n$ reais positivos quaisquer e tomemos na desigualdade (2)

$$a_j = \rho^j\, x_1 \cdots x_j\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

Obtém-se:

$$n \leq \frac{\rho\, x_1}{\rho^n\, x_1 \cdots x_n} + \rho\, x_2 + \cdots + \rho\, x_n\,.$$

Fazendo $\rho = 1/\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ e simplificando, obtemos:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\,,$$

que é a famosa desigualdade entre a média geométrica de n números reais, no primeiro membro, e a média aritmética de n números reais, no segundo membro. (*Cf.*[1].)

DEMONSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE DOS REARRANJOS

A demonstração desta desigualdade assenta na seguinte observação. Dadas duas sequências de números reais, $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$, a soma

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

pode ser calculada a partir da *fórmula de Abel de soma por partes*:

$$\begin{aligned} & x_n(y_1 + \cdots + y_n) \\ & + (x_{n-1} - x_n)(y_1 + \cdots + y_{n-1}) \\ & + (x_{n-2} - x_{n-1})(y_1 + \cdots + y_{n-2}) \\ & \vdots \\ & + (x_1 - x_2)y_1\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Consideremos, pois, $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$, sequências decrescentes de números reais, e substitua-se em (3) $x_1, \ldots, x_n$ por $a_1, \ldots, a_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ por qualquer permutação de $b_1, \ldots, b_n$, dada por uma permutação, σ, dos índices $1, \ldots, n$.

Como $b_1, \ldots, b_n$ é decrescente, temos

$$b_1 + \cdots + b_k \geq b_{\sigma(1)} + \cdots + b_{\sigma(k)} \geq b_{n-k+1} + \cdots + b_n$$

para todo o $k = 1, \ldots, n$. Por outro lado, como $a_1, \ldots, a_n$ também é decrescente, temos

$$a_k - a_{k+1} \geq 0,$$

para todo o $k = 1, \ldots, n-1$. Deduz-se então que (3) será máxima se tomarmos $\sigma(k) = k$ e mínima se tomarmos $\sigma(k) = n - k + 1$. □

FUNÇÕES CONVEXAS

A convexidade de funções é uma noção com uma definição extremamente simples, pelo que é surpreendente a profundidade dos resultados que ela origina.

Definição. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ diz-se *convexa* se, para quaisquer $a, b \in I$ e para todo o $\lambda \in [0,1]$, se tiver

$$f(\lambda\, a + (1-\lambda)\, b) \leq \lambda\, f(a) + (1-\lambda)\, f(b)\,. \tag{4}$$

Diremos ainda que f é *côncava* se $-f$ for convexa.

Há muitas desigualdades notáveis que na sua formulação envolvem uma função convexa. A desigualdade que dá o título a este canto é um exemplo, como veremos. Outra é a que se obtém como consequência imediata da definição de convexidade e que pode ser demonstrada a partir daquela por indução matemática: para qualquer função convexa f e quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in I$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tais que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, tem-se

$$f\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(x_j)\,. \tag{5}$$

Esta desigualdade é conhecida por *desigualdade de Jensen*. Ela é apenas uma entre várias cuja demonstração se atribui a Jensen, muitas delas com aplicações importantes em todo o edifício matemático.

Johan Ludwig Jensen (1859-1925) foi um matemático dinamarquês que, pela relevância dos seus trabalhos em ciência e engenharia, entrou para o panteão cultural da Dinamarca. Nos anos 90 do século XX, o Departamento de Matemática da Universidade de Copenhaga homenageou este matemático com um selo de correio alusivo ao seu trabalho. Na imagem que vemos abaixo não é possível ver uma outra inscrição que foi feita, e que traduzida para a nossa língua seria: "Jensen foi dinamarquês".

Geometricamente, a definição anterior diz-nos que uma função é convexa se, para quaisquer $a, b \in I$, o segmento de reta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ está acima do gráfico de f. Sendo esse segmento dado por:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\,,\ x \in [a, b]\,,$$

tem-se então

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \geq f(x)\,,\ x \in [a, b]\,,$$

ou ainda, trabalhando um pouco a expressão,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,,\ x \in]a, b]\,.$$

Não é difícil ver que este tipo de raciocínio nos leva uma formulação equivalente da convexidade, usando a *razão diferencial* de f,

$$\Delta f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\,,\quad \text{com}\quad x \neq y\,.$$

Exercício. *Mostre que f é convexa em I se, e só se, para todo o $y \in I$ (fixo), a função $\Delta f(x, y)$ for crescente na variável $x \in I \setminus \{y\}$.*

Uma vez que a razão diferencial é simétrica nas duas variáveis, deduz-se também que f é convexa se, e só se, fixando x, $\Delta f(x, y)$ for crescente em y.

Esta caracterização da convexidade permite verificar que a função $f(x) = x^n$, com $n \geq 1$, é convexa em $\mathbb{R}^+$. De facto, dados $x \neq y$, reais positivos, tem-se

$$\Delta f(x, y) = \frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}\,,$$

pelo que $\Delta f(x, y)$ é crescente na variável y, fixando x, e *vice-versa*.

Exercício. *Verifique que a função $f(x) = \sqrt{x}$ é côncava.*

Analisemos agora uma caracterização da convexidade de funções diferenciáveis:

Se f for diferenciável em I, então f é convexa se, e somente se, f' for uma função crescente.

Demonstração. Suponhamos que f' é crescente em I. Tomem-se $x, y, z \in I$ com

$$x < y < z\,.$$

Então, pelo teorema do valor médio de Lagrange, existem x^*, y^* com $x < x^* < y < y^* < z$ tais que

$$\Delta f(x, y) = f'(x^*) \leq f'(y^*) = \Delta f(z, y)\,.$$

Logo, a razão diferencial é crescente na primeira variável, pelo que se conclui que f é convexa. Reciprocamente, suponhamos que f é convexa. Sejam $x, y, u, v \in I$ com

$$x < y < u < v\,.$$

Então, como a razão diferencial é crescente em qualquer das variáveis, tem-se

$$\Delta f(x, y) \leq \Delta f(x, v) \leq \Delta f(u, v)\,.$$

Logo, fixando x e v, temos

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \Delta f(x, y) \leq \lim_{u \to v} \Delta f(u, v) = f'(v)\,,$$

i.e., $f'(x) \leq f'(v)$ para todo o $x \leq v$ em I. $\square$

Deste teorema obtém-se, como corolário, um critério bem conhecido para a convexidade de funções:

Se f for duas vezes diferenciável, f é convexa se, e somente se, $f'' \geq 0$.

DESIGUALDADE DE KARAMATA

Jovan Karamata (1902-1967) foi um matemático sérvio que trabalhou em Análise. No centenário do seu nascimento, também ele foi homenageado num selo de correios, como se pode ver na figura abaixo.

Para enunciarmos o teorema de Karamata, comecemos por fixar alguma terminologia. Dadas duas sequências decrescentes de números reais, $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$, diremos que a primeira majora a segunda se

$$\begin{aligned}
&a_1 \geq b_1 \,, \\
&a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \,, \\
&\vdots \\
&a_1 + \cdots + a_{n-1} \geq b_1 + \cdots + b_{n-1} \ \text{ e} \\
&a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n .
\end{aligned}$$

Tem-se então o teorema de Karamata:

Sejam $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ duas sequências decrescentes de números reais pertencentes a um intervalo I. Se a primeira sequência majorar a segunda e $f \colon I \to \mathbb{R}$ for uma função convexa, então

$$\sum_{j=1}^{n} f(a_j) \geq \sum_{j=1}^{n} f(b_j) \,. \tag{6}$$

Em boa verdade, a desigualdade de Karamata já aparecia numa publicação de Hardy, Littlewood e Pólya do ano de 1929. Karamata só publica a sua demonstração em 1932. (*Cf.* [2, 4]). A demonstração elementar que aqui apresentamos é retirada de [3].

Demonstração. Se existirem j, k tais que $a_j = b_k$ então retirem-se estes termos das sequências, uma vez que eles se cancelam na desigualdade pretendida. Como pode ser verificado facilmente, as sequências resultantes também satisfazem a hipótese de majoração. Sem perda de generalidade, suponhamos então que $a_j \neq b_k$, para quaisquer j, k. Ponhamos

$$c_j = \Delta f(a_j, b_j) = \frac{f(a_j) - f(b_j)}{a_j - b_j} \,.$$

Notemos que, como f é convexa e $\Delta f(a_j, b_k)$ está definida para quaisquer j, k, se tem

$$c_j = \Delta f(a_j, b_j) \geq \Delta f(a_{j+1}, b_j) \geq \Delta f(a_{j+1}, b_{j+1}) = c_{j+1},$$

ou seja, a sequência $c_1, \dots, c_n$ é decrescente. Fixemos a notação $A_0 = B_0 = 0$ e, para todo $k = 1, \dots, n$,

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \,, \; B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i \,.$$

Assim, da definição de $c_1, \dots, c_n$ obtém-se

$$\sum_{j=1}^{n} f(a_j) - \sum_{j=1}^{n} f(b_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, (a_j - b_j) \,.$$

Como $a_j = A_j - A_{j-1}$ e $b_j = B_j - B_{j-1}$, para todo o $j = 1, \dots, n$, o segundo membro é igual a:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} c_j (A_j - B_j) - \sum_{j=1}^{n} c_j (A_{j-1} - B_{j-1}) \\
&\qquad = c_n (A_n - B_n) + \sum_{j=1}^{n-1} (c_j - c_{j+1})(A_j - B_j) \,.
\end{aligned}$$

Dado que $A_k \geq B_k$ para todo o $k = 1, \dots, n-1$ e $A_n = B_n$, deduz-se (6). □

Observe-se que decorre diretamente da demonstração aqui apresentada que, se a função for convexa e crescente, na condição de majoração entre as sequências, a última igualdade pode ser omitida.

A desigualdade de Fuchs é uma generalização da desigualdade de Karamata que envolve a introdução de pesos em (6) e que pode demonstrar-se seguindo os passos da demonstração da desigualdade de Karamata.

Fixando reais positivos $\mu_1, \dots, \mu_n$, a desigualdade de Fuchs diz que

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j f(a_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu_j f(b_j) \,,$$

sempre que $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ forem duas sequências de números reais decrescentes tais que $\mu_1 a_1, \dots, \mu_n a_n$ majora $\mu_1 b_1, \dots, \mu_n b_n$.

Notemos que da desigualdade de Fuchs se pode obter a desigualdade de Jensen, (5), fazendo

$$b_1 = \cdots = b_n = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \,,$$

e $\lambda_j = \mu_j / (\mu_1 + \cdots + \mu_n)$ para $j = 1, \dots, n$.

PROBLEMAS

Terminamos com uma proposta de alguns problemas que podem ser resolvidos usando as ideias aqui apresentadas. Os problemas 1, 3 e 4 foram retirados de [5] e o problema 5 aparece em [6].

1. Sejam $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ duas sequências decrescentes de números reais positivos tais que, para todo o $k = 1, \dots, n$, se tem

   $$a_1 \cdots a_k \geq b_1 \cdots b_k \,.$$

   Mostre que $a_1 + \cdots + a_n \geq b_1 + \cdots + b_n$.

2. Sejam $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tais que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Dado $r \in \mathbb{R}^+$, define-se média ponderada de ordem r de $x_1, \dots, x_n$ com pesos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ por

$$\mathrm{MP}_r = \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j^r \Big)^{1/r} .$$

Suponha que $0 < r \leq s$. Mostre que $\mathrm{MP}_r \leq \mathrm{MP}_s$.

3. Sejam $a_1, \ldots a_n$ números reais positivos. Mostre que

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \cdots + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 .$$

4. Com as hipóteses do problema anterior, mostre que

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + a_j) \leq \Big(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\Big) \cdots \Big(1 + \frac{a_{n-1}^2}{a_n}\Big)\Big(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\Big) .$$

5. Sejam $f \colon [0, a_1] \to \mathbb{R}$ uma função convexa e $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ uma sequência decrescente de números em $[0, a_1]$. Mostre que

$$f\Big(\sum_{j=1}^{2n+1} (-1)^{j-1} a_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{2n+1} (-1)^{j-1} f(a_j) .$$

REFERÊNCIAS

[1] A. Branquinho, "Uma desigualdade fundamental", *Gazeta de Matemática* 168 (2012), 8-10.

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya, *Some simple inequalities satisfied by convex functions*, Messenger of Math. 58 (1929), 145-152.

[3] Z. Kadelburg, D. Đukić, M. Lukić e I. Matić, *Inequalities of Karamata, Schur and Muirhead, and some applications*, The Teaching of Mathematics 2005, Vol. VIII, 1, pp. 31-45.

[4] J. Karamata, *Sur une Inegalité Rélative aux Fonctions Convexes*, Publ. Math. Univ. Belgrade 1 (1932), 145-148.

[5] I. Matić, *Classical Inequalities*, The IMO compendium group, Olympiad Training Materials, *www.imomath.com*, 2007.

[6] G. Szegő, *Über eine Verallgemeinerung des Dirichletschen Integrals*, Math. Zeitschrift 52 (1950), 676-685.

Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

A MATEMÁTICA QUE PREVINE DOENÇAS

O ano de 2017 foi cheio de tragédias, uma se sobrepondo a outra. Já quase não nos lembramos da epidemia de sarampo, que depois de uma pausa de vários anos voltou a matar em Portugal. Epidemias graves, de uma doença que se julgava extinta, também ocorreram noutras regiões do globo. A quase-extinção foi obra de um esforço coletivo, onde um conceito matemático teve um papel central: *a imunidade de grupo.*

Não há dúvida de que a grande tragédia de 2017 foi a sucessão de mortes causadas pelos incêndios. Tão graves que nos fizeram esquecer o infortúnio anterior: uma morte causada por sarampo, algo que não acontecia desde há vários anos em Portugal. E o nosso canto da Europa não esteve só. Casos despontaram um pouco por todo o Velho Mundo, com particular gravidade na Roménia. Os Estados Unidos também não ficaram de fora, com um foco na Califórnia, bem no lugar onde as crianças de todo o mundo se encontram: a Disneylândia em Los Angeles. Ver figura 1.

O foco português iniciou-se a partir do internamento de um bebé de 13 meses que não havia sido vacinado e que desenvolveu a doença. Apesar de a primeira dose dever ser dada aos 12 meses, é natural que haja atrasos. Este doente contaminou diversos outros pacientes e trabalhadores, incluindo uma adolescente não vacinada que faleceu devido à conjugação do sarampo com uma pneumonia. Alegadamente, a rapariga tinha tido fortes reações alérgicas a outras vacinas e, em virtude da virtual extinção da doença, os pais, sob recomendação médica, resolveram não a vacinar [1].

Esta história envolve três grupos não vacinados que serão relevantes para a nossa discussão. O bebé, que era muito novo para receber a vacina; uma pessoa com alergia, que portanto não pode ser imunizada; adultos que não receberam as suas doses na idade que hoje é recomendada (a vacina só foi introduzida no Plano Nacional de Saúde em 1992).

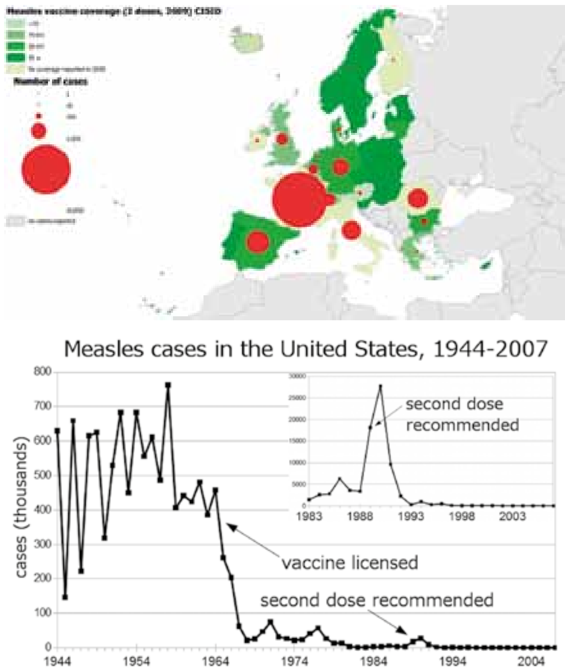
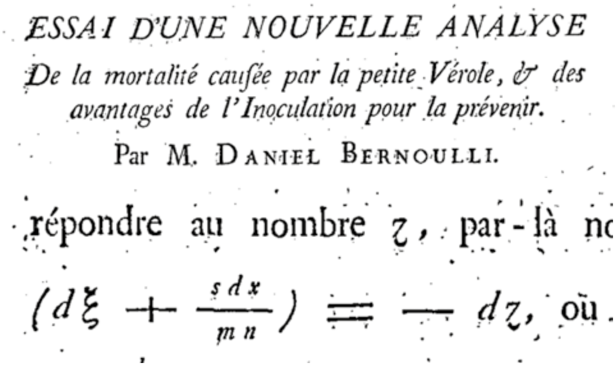


Figura 1. **Em cima:** Fração da população vacinada e número de casos na Europa. Veja a nítida correlação entre estas duas variáveis. Fonte: *https://www.vaccinestoday.eu/* **Em baixo:** Número de casos, ano a ano, nos Estados Unidos. Veja a correlação entre a introdução da vacina e o quase desaparecimento da doença. Infelizmente, a correlação também funciona no sentido inverso, quando houve no Reino Unido uma *fake news* relacionando vacinas e autismo, levando a um rápido aumento do número de casos. **Fonte: Wikipedia.**


ESSAI D'UNE NOUVELLE ANALYSE
De la mortalité cauſée par la petite Vérole, & des avantages de l'Inoculation pour la prévenir.
Par M. DANIEL BERNOULLI.

répondre au nombre z, par-là nc

$(d\xi + \frac{sdx}{mn}) = -dz$, où.

Figura 2. Trabalho original de D. Bernoulli, no qual estuda a dinâmica da varíola e os efeitos da variolação, utilizando equações diferenciais (no detalhe).

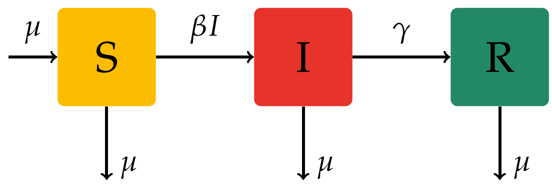


Figura3. O modelo SIR, numa formulação particularmente simples: As pessoas nascem **S**uscetíveis e morrem com uma taxa μ (a mortalidade independe do estado do indivíduo, ou seja, a doença não é mortal e supomos igual à taxa de nascimento por normalização – ou seja, supomos a população constante), são contaminadas de forma proporcional ao numero de indivíduos na classe **I**nfecciosa e, depois de um certo tempo característico, adquirem imunidade permanente, ficando até o fim da vida na classe **R**ecuperada. Se a imunidade for temporária, uma seta ligará **R** e **S**. A vacinação de adultos é representada por uma transição entre **S** e **R**, enquanto que a vacinação infantil é representada por uma parcela da população que já é **R** ao nascer. Escrevemos uma equação diferencial para cada classe, por exemplo, $S' = \mu - \mu S - \beta IS$, $I' = \beta IS - \mu I - \gamma I$, etc.

Quando cerca de 95% da população está imunizada contra o sarampo, o vírus para de circular e todos ficam protegidos. É o que se chama de *imunidade de grupo*. De facto, a ideia de que não é necessário imunizar cada uma das pessoas na face da Terra é crucial para que as campanhas de vacinação façam sentido, do ponto de vista da saúde pública. É isto que vamos discutir hoje.

O estudo matemático das vacinas é tão longo quanto as próprias vacinas. Antes de a primeira ter sido criada pelo médico inglês Edward Jenner, uma técnica chamada *variolação*, usada tradicionalmente no Oriente, começara a ser introduzida na Europa. Esta consistia em aplicar um pouco de material infeccioso da varíola em crianças saudáveis. A técnica não era desprovida de risco: poderia vir a ser desenvolvida uma infeção grave. Esta, no entanto, não era a situação mais comum. Em geral, havia uma infeção moderada que não deixava sequelas, da qual resultava uma imunidade permanente.

O conhecido matemático Daniel Bernoulli resolveu enfrentar a questão, levantada por um seu colega, sobre como comparar as vantagens a longo prazo da variolação em massa contra os riscos imediatos. Assim, fez o primeiro uso de equações diferenciais no estudo da dinâmica populacional [2]. Veja a figura 2, e também a referência [3], de onde tirámos parte das histórias abaixo.

Passaram-se mais de 100 anos, até que, no final do século XIX, o médico britânico nascido na Índia Ronald Ross resolveu dedicar-se ao estudo da malária [4]. Esta é em tudo diferente da varíola: causada por um parasita, em vez de vírus; não se transmite pessoa-a-pessoa, mas sim através do mosquito, o chamado *vetor* da doença. Por curiosidade, a palavra *vetor*, muito utilizada de forma distinta em matemática, significa *o que transporta*. De facto, quando Ross percebeu que a doença era transmitida pelo mosquito, foi tomado por uma ideia revolucionária: seria possível eliminar a doença reduzindo, mesmo sem eliminar, o número dos seus transmissores. Esta ideia foi recebida com ceticismo pelos seus contemporâneos, e Ross dedicou-se a modelar o problema matematicamente. Com isto concluiu que existe um parâmetro, a que hoje chamamos de *fator reprodutivo básico*, ou $\mathcal{R}_0$, que é capaz de prever a dinâmica a longo prazo da doença. Grosso modo, $\mathcal{R}_0$ indica a quantidade de infecções secundárias gerada por um único indivíduo infeccioso numa população totalmente suscetível. Se este número for menor do que um, então o número de doentes vai diminuir no tempo e a doença tende a desaparecer. Assim, dizemos que o estado livre de doença é estável.

Por outro lado, se $\mathcal{R}_0 > 1$, então o número de doentes tende a aumentar até que a diminuição do número de novas pessoas que possam ficar doentes (as que já se curaram gozam de imunidade) faz com que a doença pare de se expandir e atinja o equilíbrio endémico.

Portanto, o objetivo das intervenções não precisa de ser o de eliminar completamente o mosquito, ou seja, impedir totalmente a transmissão da doença, mas sim fazer com que cada doente infecte, em média, menos de uma pessoa. Desta forma, naturalmente a doença irá desaparecer.

Esta ideia ganhou força quando o médico escocês Anderson Gray McKendrick e o químico William Ogilvy Kermack criaram o que hoje é conhecido como o modelo SIR. Cada indivíduo pode estar num dos três estados: **S**uscetível, **I**nfeccioso ou **R**ecuperado. Este último indica pessoas com imunidade (que pode ser parcial ou permanente). Fornecendo os parâmetros para todas as transições possíveis entre os diversos estados, encontramos uma expressão explícita para o $\mathcal{R}_0$, e isto permite compreender exatamente quais as intervenções necessárias para o tornar menor do que 1. Veja a figura 3.

A vacinação pode ser entendida dentro deste esquema: se for vacinação de adultos, então uma fração dos suscetíveis é transformada a cada unidade de tempo em recuperados; para o caso da vacinação de crianças, colocamos os recém-nascidos em parte na classe **S** e em parte na classe **R**.

Neste modelo, temos que $\mathcal{R}_0$ é função de v, a taxa de vacinação da população, e existe um valor crítico v_0 tal que para $v > v_0$ a doença desaparece, enquanto para $v < v_0$ restará sempre uma fração de doentes na população. Se tivermos $v_0 < 1$, concluímos que não é necessário vacinar todos. Desta forma, o desaparecimento da doença acaba por proteger também aqueles que não podem ser vacinados, seja por serem muito jovens, seja por terem alergia a algum dos componentes. Mas protege também aqueles que decidem não vacinar, com base em informações falsas, teorias de conspiração, crenças metafísicas peculiares ou apenas por puro egoísmo.

Evidentemente, não cabe aos matemáticos – nem aos médicos, diga-se – decidir se as vacinas devem ou não ser obrigatórias. A sociedade está mais bem servida num modelo democrático. Mas cabe, certamente, aos que dominam as questões técnicas chamar a atenção para o facto de que vários países já conseguiram eliminar o sarampo e perguntar: "Porque é que a Europa não consegue?"

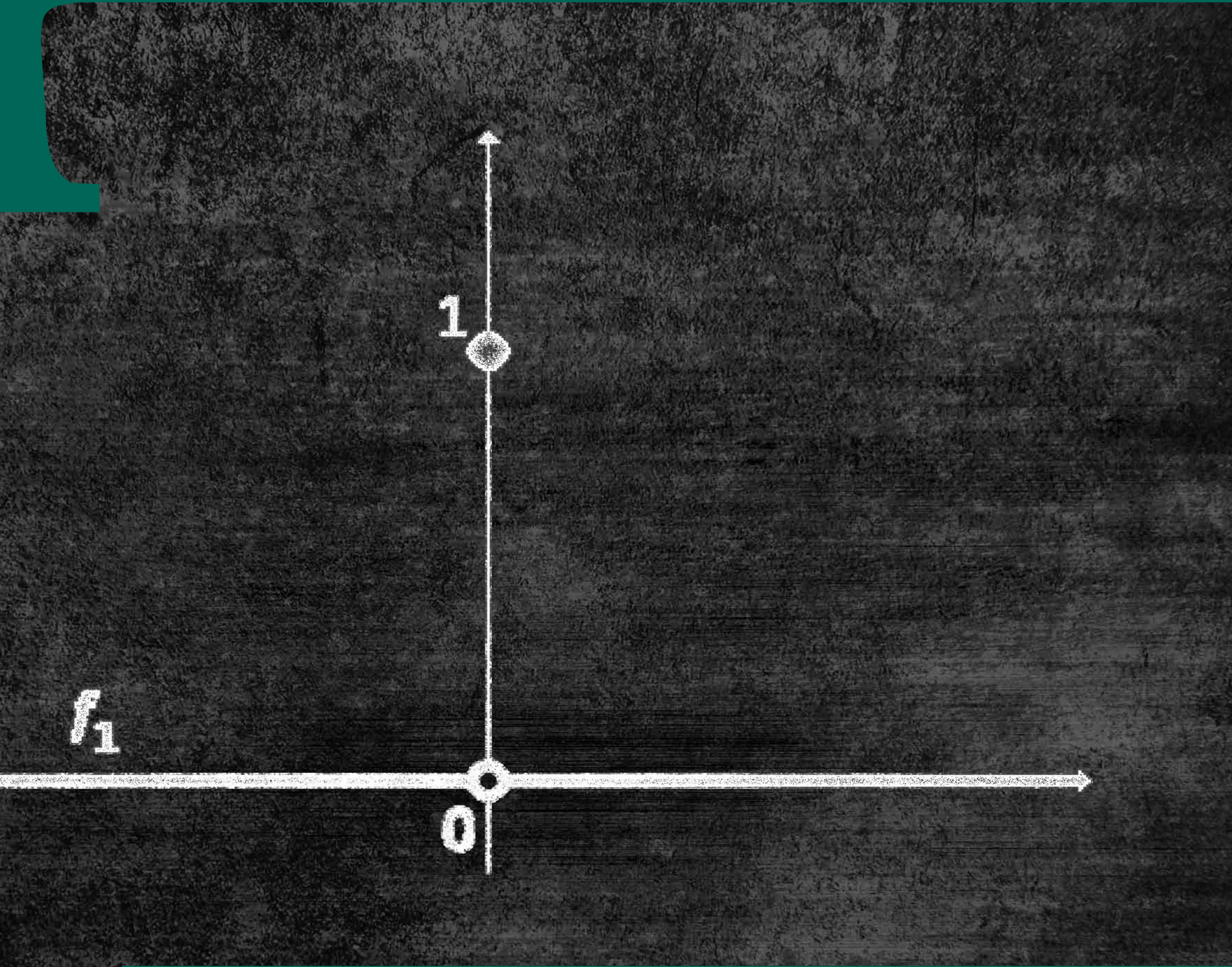
REFERÊNCIAS

[1] *https://www.publico.pt/2017/07/05/sociedade/noticia/fim-da-epidemia-de-sarampo-em-portugal-1778030*

[2] Bernoulli, D. *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir.* Hist. Acad. R. Sci. Paris, 1-45 (1760/1766).

[3] Nicolas Bacaër. *Histoires de mathématiques et de populations*. Ed. Cassini, Paris, 2009.

[4] Ross, R. *The Prevention of Malaria*, 1st edn. John Murray, London (1910).



LIMITES ALTERNATIVOS

AUGUSTO J. FRANCO DE OLIVEIRA
PROFESSOR EMÉRITO - UNIVERSIDADE DE ÉVORA
ajfrancoli@gmail.com

Tendo como motivo próximo as recentes alterações aos programas de Matemática A do 11.º ano de escolaridade, no que concerne a noção de limite de uma função num ponto, fazemos uma descrição das duas principais definições dessa noção, suas propriedades básicas e relacionamento entre elas, e terminamos com uma crítica às mudanças postas em prática, quer no conteúdo quer nos procedimentos que levaram à sua adoção.

1. INTRODUÇÃO

Os alunos e professores de matemática do 11.º ano de escolaridade depararam-se no ano letivo 2016/17, pela primeira vez, com a seguinte situação: a função real $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

não tem limite quando $x \to 0$ (fig. 1). Como é isto possível? Então $f_1(x)$ não se aproxima de 0 tanto quanto se queira para x suficientemente próximo de 0 (mas diferente de 0)?[1] A existência de limite num ponto não devia ser independente do valor da função nesse ponto?

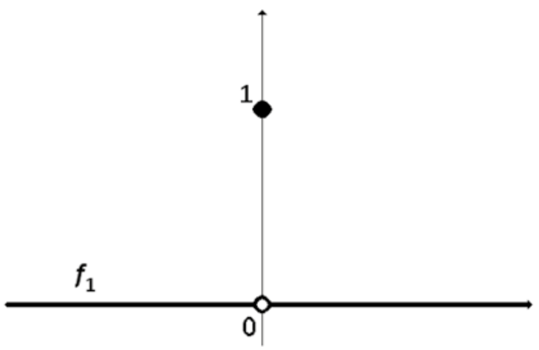


Figura 1.

Mas a restrição de f_1 a $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $g = f_1 \restriction \mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $g(x) = 0$ para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$, já possui limite quando $x \to 0$, e o limite é, naturalmente, 0:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Por outro lado, também poderá constatar que a função f_2 de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f_2(n) = 1$ é contínua em todos os pontos do seu domínio!

Não há contradição alguma à vista, o que há é uma "nova" noção de limite de uma função real de variável real num ponto, adotada nos novos programas e metas curriculares de Matemática A para o ensino secundário que resultaram da revisão curricular iniciada em 2011 (ver [NPM]).

Duas questões se nos colocam com pertinência a propósito da mudança:

1) A racionalidade da mudança;
2) A maneira como foi efetuada.

Antes de discutir estas questões, fazemos um resumo da matemática que está em causa, nomeadamente, das noções de limite e principais consequências num contexto elementar de funções reais de variável real, isto é, funções com domínio contido em $\mathbb{R}$ e valores em $\mathbb{R}$. Como é natural, este texto destina-se a todas as pessoas interessadas no ensino das matemáticas nas nossas escolas e, em especial, aos professores de matemática do secundário.[2]

2. DUAS NOÇÕES DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Pode dizer-se que a Análise Matemática é a área das matemáticas onde mais se utilizam sistematicamente diversas noções de proximidade e convergência. No ensino elementar a convergência de sucessões é tratada antes da convergência de funções em geral, e esta pressupõe aque-

[1] Evitar a imiscuidade desta interpretação "cinemática" na conceção rigorosa de limite de uma função num ponto foi precisamente um dos objetivos de Weierstrass (lições em Berlim, 1861) com a sua definição (δ, ε), mas nem por isso aquela interpretação perdeu estatuto como motivação intuitiva até ao presente. Sebastião e Silva, no *Compêndio de Matemática*, 2.º vol. (1976), pp. 129-131, referindo-se à expressão "$f(x)$ aproxima-se de b, quando x se aproxima de a" (subentendendo por valores "*todos distintos de a*", p. 131) comenta: "Esta intuição de carácter dinâmico é muito valiosa e convém, por isso, mantê-la sempre viva no espírito (...). Mas, em matemática, não basta a intuição: é preciso definir os conceitos com *rigor lógico*, para podermos sobre eles raciocinar com inteira segurança."

[2] A presente versão incorpora as correções das várias gralhas, lapsos e sugestões diversas assinaladas pelo revisor (anónimo) do artigo, que agradeço.

la. Por sua vez, por uma questão de sensibilidade ao preceito pedagógico de caminhar do particular para o geral, sempre que possível, em muitos manuais elementares e universitários (por exemplo, Bartle *1964*), a continuidade é tratada antes dos limites de funções, mas não tem de ser necessariamente assim.

Começamos por dar duas definições ligeiramente diferentes do limite de uma função num ponto e depois trataremos da relação entre elas e da sua extensão. Para facilitar as comparações, adotaremos o mais possível a forma e as notações dos programas acima referidos.

Salvo aviso em contrário, f será sempre uma função com domínio $D = D_f$ contido em $\mathbb{R}$ e valores em $\mathbb{R}$. Recordamos algumas noções topológicas básicas.

(1) Uma vizinhança de um número real c é um conjunto de números reais V contendo algum intervalo aberto com centro em c, isto é, tal que, para algum $\varepsilon > 0$, $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subseteq V$.

(2) Uma sucessão de números reais $\langle x_n \rangle = \langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ converge para um número real c, e escreve-se $x_n \to c$, sse para todo o $\varepsilon > 0$ existe uma ordem k a partir da qual $|x_n - c| < \varepsilon$. [3]

(3) Um número real c é um ponto de acumulação de D se em toda a vizinhança de c há pontos de D diferentes de c. Equivalentemente, existe uma sucessão de pontos de D diferentes de c convergente para c. Resulta imediatamente que em toda a vizinhança de um tal ponto há infinitos pontos de D.

(4) Um número real c é um ponto aderente a D se em qualquer vizinhança de c há pontos de D, ou, equivalentemente, existe uma sucessão de elementos de D convergente para c. Note-se que c pode pertencer ou não a D. Se $c \in D$, pode não haver mais nenhum ponto de D numa vizinhança de c – neste caso, c é um ponto isolado de D, mas não deixa, por isso, de haver uma sucessão de pontos de D convergente para c: a sucessão constante $\langle x_n \rangle$, com $x_n = c$ para todo o n.

Observe-se ainda que todo o ponto de acumulação de D é ponto aderente a D, mas não reciprocamente. Por exemplo, se $D = \{0\}$, então 0 é aderente a D mas não é ponto de acumulação de D.

Indicamos, pois, as duas noções de limite de uma função num ponto com que vamos lidar até ao final deste artigo.

2.1 Definição. Seja c um ponto de acumulação do domínio D de f. Um número real b diz-se o limite em ponto excluído (ou simplesmente limite excluído) de f em c sse para cada vizinhança V de b existe uma vizinhança U de c tal que para todo o x, se $x \in U \cap D$ e $x \neq c$, então $f(x) \in V$. Neste caso, escrevemos

$$b = \mathrm{lime}_{x \to c} f(x). \tag{2.1}$$

Aquilo que é "excluído" é simplesmente a consideração do ponto c nas "aproximações" de x a c.[4]

2.2 Definição. Seja c um ponto aderente ao domínio D de f. Um número real b diz-se o limite (em ponto) incluído de f em c sse para cada vizinhança V de b existe uma vizinhança U de c tal que para todo o x, se $x \in U \cap D$, então $f(x) \in V$, isto é, $f[U \cap D]$. Neste caso, escrevemos

$$b = \mathrm{limi}_{x \to c} f(x). \tag{2.2}$$

2.3 Observações.

1. Obviamente, só podemos comparar as duas definições de limite em pontos de acumulação do domínio da função. Neste caso, observa-se que a diferença entre elas se centra no facto de o valor $f(c)$, quando existe, ser considerado ou não. Na primeira, def. 2.1, não interessa considerar o valor *f(c)*, caso exista; note-se que c pode pertencer ou não a D_f.

2. Observe-se também a distinção de notação nas equações (2.1) e (2.2). Deve-se perceber que a grande maioria dos autores apresenta apenas uma dessas noções, caso em que se refere a ela apenas como "o limite", e geralmente emprega a notação "$\lim_{x \to c} f(x)$". O problema é que, conforme o autor, ou estamos a referir-nos à noção 2.1 (lime) ou a 2.2 (limi), e isto tem de ser absolutamente claro desde o princípio. Raros são aqueles que se referem às duas noções, e mais raros ainda os que desenvolvem a questão das propriedades e comparação entre elas.

Está neste último caso Robert G. Bartlet, *The Elements of Real Analysis,* 1964, que estamos a seguir neste artigo (com adaptações).

3. Atendendo a que o leitor está provavelmente mais habituado à noção de limite excluído (a "antiga", como em Vicente Gonçalves, Dias Agudo, Carlos Sarrico, Elon Lages Lima, mas não Mário Figueira, Santos Guerreiro nem Campos Ferreira, para só mencionar alguns dos mais próximos), optamos por preservar o simbolismo convencional ("lim") ao nos referirmos ao limite em ponto excluído. Assim, convencionamos que, daqui em diante,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \mathrm{lime}_{x \to c} f(x).$$

3. PROPRIEDADES DOS LIMITES

A unicidade de qualquer limite, quando existe, é prontamente estabelecida. Assim acontece, igualmente, com a maioria das outras propriedades dos limites de uma função num ponto.

3.1 Lema. *(a) Se qualquer um dos limites lim, limi existe, então é único.*

(b) Se o limite incluído existe, então o limite excluído existe e são iguais: $\lim_{x\to c} f(x) = \mathrm{limi}_{x\to c} f(x)$.

(c) Se $c \notin D_f$*, então o limite excluído existe sse o limite incluído existir.*

Nas partes (a) e (b), subentende-se que cada limite é considerado num ponto conforme a definição a que se reporta: ponto de acumulação em lim, ponto aderente em limi. A parte (b) do lema mostra que a noção de limite incluído (a dos novos programas) é um pouco mais restrita do que a do limite excluído. A parte (c) mostra que elas podem ser diferentes apenas no caso em que $c \in D_f$.

Dem. (b) Suponhamos que o limite incluído existe, digamos $b = \mathrm{limi}_{x\to c} f(x)$, e seja V uma vizinhança qualquer de b. Então existe uma vizinhança U de c tal que $f[U \cap D_f] \subseteq V$. Em particular, para todo $x \in U \cap D_f$ com $x \neq c$, $f(x) \in V$. Isto mostra que $\lim_{x\to c} f(x) = b$. □

A função f_1 ilustrada na fig. 1 constitui um exemplo em que as duas noções de limite num ponto diferem. Se $c = 0$, o limite (excluído) de f_1 em $c = 0$ existe e é igual a 0, enquanto o limite incluído não existe.

Apresentamos a seguir algumas condições necessárias e suficientes para a existência dos limites incluídos e excluídos, deixando a prova de algumas partes para o leitor.

3.2 Teorema de caracterização. *As seguintes condições, relativas ao limite excluído em ponto de acumulação do domínio, são equivalentes:*

(a) Existe o limite excluído $b = \lim_{x\to c} f(x)$.

(b) Para todo $\delta > 0$*, existe* $\varepsilon > 0$ *tal que, para todo o* $x \in D = D_f$*, se* $0 < |x - c| < \varepsilon$*, então* $|f(x) - b| < \delta$.

(c) Para qualquer sucessão $\langle x_n \rangle$ *de elementos de* $D = D_f$ *diferentes de* c *tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$*, tem-se* $\lim_{n\ to\infty} f(x_n) = b$.

Dem. (a) ⇒ (b). Suponhamos que existe o limite excluído $b = \lim_{x\to c} f(x)$, e seja dado $\delta > 0$ ao arbítrio. Como o intervalo aberto $V =]b - \delta, b + \delta[$ é uma vizinhança de b, por (a) existe uma vizinhança U de c tal que se $x \in U \cap D$ e $x \neq c$ então $f(x) \in V$, isto é, $|f(x) - b| < \delta$. Por definição de vizinhança de c, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno isto também acontece, em particular, para todo o $x \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\cap D$ e $x \neq c$, quer dizer, para todo o $x \in D$ tal que $0 < |x - c| < \varepsilon$.

(b) ⇒ (a). Seja V uma vizinhança ao arbítrio de b, e seja $\delta > 0$ tal que $]b - \delta, b + \delta[\subseteq V$. Por (b), existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o x, se $x \in D_f$ e $0 < |x - c| < \varepsilon$, então $|f(x) - b| < \delta$. Ora, o conjunto dos pontos x tais que $|x - c| < \varepsilon$ é uma vizinhança U de c. Provou-se, assim, que existe uma vizinhança U de c tal que para todo o $x \in U \cap D$ com $x \neq c$, $f(x) \in V$. Portanto, $b = \lim_{x\to c} f(x)$.

(b) ⇒ (c). Seja $\langle x_n \rangle$ uma sucessão de elementos de D diferentes de c tal que $x_n \to c$, com vista a provar que $f(x_n) \to b$. Seja pois $\delta > 0$ ao arbítrio. Por (b), existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $x \in D$, $0 < |x - c| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$; por hipótese sobre $\langle x_n \rangle$, existe k tal que, para todo o $n \geq k$, $|x_n - c| < \varepsilon$, donde se conclui que para todo o $n \geq k$ se tem $|f(x_n) - b| < \delta$.

(c) ⇒ (b). A prova de que (c) implica (b) [ou (a)] é por redução ao absurdo. Admitamos (c) e suponhamos, com vista a um absurdo, que nenhum número real b é o limite de f quando $x \to c$ por valores diferentes de c. Fixado b ao arbítrio, temos então que existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $x \in D$ tal que $0 < |x - c| < \varepsilon$ mas $|f(x) - b| \geq \delta_0$.

Particularizando $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, ..., 1/(n+1), ...$, obtemos elementos x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ... de D, respetivamente, tais que para todo o n,

$$0 < |x_n - c| < \frac{1}{n+1)} \text{ mas } |f(x_n) - b| \geq \delta_0.$$ [5]

É evidente que $x_n \to c$ quando $n \to \infty$, mas $f(x_n) \nrightarrow b$, o que é absurdo. □

[3]Consideramos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Recorde-se que no *Formulaire Mathématique* de 1894, G. Peano toma o zero como primeiro número natural.

[4] O termo "excluído" é utilizado por Vicente Gonçalves, relativamente ao ponto *c*. Diz ele: "*a* [nosso "*c*"], ainda quando valor de *x*, é sempre excluído." Nota 2, p. 165 de Gonçalves, 1953.

[5] A "escolha" dos elementos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de D tais que $0 < |x_n - c| < 1/(n+1)$ para todo o n é feita utilizando uma forma enfraquecida do Axioma da Escolha, o chamado Axioma Numerável da Escolha (NC). Ver Oliveira 1982.

3.3 Teorema de caracterização. *As seguintes condições, relativas ao limite incluído, são equivalentes:*

(a) Existe o limite incluído $b = \text{limi}_{x \to c} f(x)$.

(b) Para todo o $\delta > 0$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que, para todo o* $x \in D$, *se* $|x - c| < \varepsilon$, *então* $|f(x) - b| < \delta$.

(c) Para toda a sucessão $\langle x_n \rangle$ *de elementos de* $D = D_f$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, *tem-se* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

As demonstrações dos dois teoremas anteriores são formalmente semelhantes. Todavia, a título ilustrativo das diferenças conceptuais, fazemos a demonstração parcial.

Dem. (a) $\Rightarrow$ (c). Seja $\langle x_n \rangle$ uma sucessão ao arbítrio de elementos de $D = D_f$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, com vista a provar que $f(x_n) \to b$. Dado $\delta > 0$ ao arbítrio, ponhamos $V =]b - \delta, b + \delta[$. Por (a), existe uma vizinhança U de c tal que $f[U] \subseteq V$, e, por definição de vizinhança, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subseteq U$. Como, por hipótese, $x_n \to c$, tem-se $|x_n - c| < \varepsilon$ a partir de certa ordem k, donde $|f(x_n) - b| < \delta$ para todo o $n \geq k$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Admitamos (c) e suponhamos, com vista a um absurdo, que nenhum número real b é o limite de f quando $x \to c$. Fixado b ao arbítrio, temos então que existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $x \in D$ tal que $|x - c| < \varepsilon$ mas $|f(x) - b| \geq \delta_0$.

Particularizando $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, ..., 1/(n+1), ...$, obtemos uma sucessão $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ de elementos de D, respetivamente, tais que, para todo o n, $|x_n - c| < 1/(n+1)$ mas $|f(x_n) - b| \geq \delta_0$. [6] É evidente que $x_n \to c$ quando $n \to \infty$, mas $f(x_n) \not\to b$, o que é absurdo. □

A caracterização dos limites em termos de sucessões desempenha um importante papel nos NPM, que discutimos na secção 4.

O resultado seguinte produz uma ligação instrutiva entre esses dois limites e a continuidade de *f* num ponto *c* do domínio de *f*. Esta por ser definida por: para toda a vizinhança V de $f(c)$ existe uma vizinhança U de c tal que $f[U \cap D] \subseteq V$; a alínea (b) seguinte enuncia outra maneira de definir a continuidade pontual à maneira "antiga" preferida por muitos.

3.4 Teorema. *Se* c *é um ponto de acumulação pertencente ao domínio* D *de* f, *as seguintes condições são equivalentes.*

(a) A função f *é contínua em* c.

(b) O limite excluído de f *em* c *existe e é igual a* $f(c)$.

(c) O limite incluído de f *em* c *existe.*

Dem. (a) $\Rightarrow$ (b): Seja V uma vizinhança qualquer de $f(c)$. Por (a), existe uma vizinhança U de c tal que, se $x \in U \cap D$, então $f(x) \in V$. Isto implica claramente que $\text{lime}_{x\to c} f(x)$ existe e é igual a $f(c)$. Da mesma forma, $f(x)$ pertence a V para todo o $x \neq c$ em $U \cap D$, caso em que $\text{lime}_{x\to c} f(x)$ existe e é igual a $f(c)$. Por outro lado, vê-se facilmente que as condições (b) e (c) implicam (a). □

Omitimos os enunciados e demonstrações de resultados relativos a combinações algébricas de funções (somas, produtos, etc.). O seguinte resultado, referente à composição de duas funções é mais profundo e é um dos poucos lugares onde trabalhar com o limite incluído é efetivamente mais simples do que com o limite excluído.

3.5 Teorema. *Seja* f *uma função com domínio* $D_f \subseteq \mathbb{R}$ *e valores em* $\mathbb{R}$ *e* g *uma função com domínio* $D_g \subseteq \mathbb{R}$ *e valores em* $\mathbb{R}$. *Seja* $g \circ f$ *a composta de* f *e* g *(*g *após* f*) e seja* c *um ponto de acumulação de* $D_{g\circ f}$.

(a) Se os limites excluídos $b = \lim_{x\to c} f(x)$, $a = \lim_{x\to b} g(x)$ *existem e se* g *é contínua em* b *ou* $f(x) \neq b$ *para todo o* x *numa vizinhança de* c, *então o limite excluído de* $g \circ f$ *existe em* c *e*

$$a = \lim_{x\to c}(g(f(x)).$$

(b) Se os limites incluídos $b = \text{limi}_{x\to c} f(x)$, $a = \text{limi}_{x\to b} g(x)$ *ambos existem, então o limite incluído de* $g \circ f$ *em* c *existe e* $a = \text{limi}_{x\to c} g(f(x))$.

Dem. (a) Seja W uma vizinhança de a; como $a = \lim_{x\to b} g(x)$, há uma vizinhança V de b, de modo que se $y \in V \cap D_g$ e $y \neq b$, então $g(y) \in W$. Uma vez que $b = \lim_{x\to c} f(x)$, existe uma vizinhança U de c tal que se $x \in U \cap D_f$ e $x \neq c$, então $f(x) \in V$. Assim, se x pertencer ao conjunto possivelmente mais pequeno $U \cap D_{g\circ f}$ e $x \neq c$, então $f(x) \in V \cap D_g$. Se $f(x) \neq b$ em alguma vizinhança U_1 de c, segue-se que para $x \neq c$ em $(U_1 \cap U) \cap D_{g\circ f}$, então $(g \circ f)(x) \in W$, de modo que a é o limite excluído de $g \circ f$ em c. Se g for contínua em b, então $(g \circ f)(x) \in W$ para todo o x em $U \cap D_g$ e $x \neq c$.

Para provar a parte (b), observamos que as exceções feitas na prova de (a) não são mais necessárias. Portanto, se x pertence a $U \cap D_{g\circ f}$, então $f(x) \in V \cap D_g$ e, portanto, $g(f(x)) \in W$. □

A conclusão na parte (a) do teorema anterior pode falhar se deixarmos de lado a condição de que g seja contínua em b ou que $f(x) \neq b$ numa vizinhança de c. Para fundamentar esta observação, seja f_1 a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida em (2.1) e tomemos $g = f_1$ e $c = 0$. Então $g \circ f_1$ é dada por

$$(g \circ f_1)(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & c = 0 \end{cases}.$$

Além disso, temos $\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0 = \lim_{y \to 0} g(y)$, mas é claro que $\lim_{x \to 0} g(f_1(x)) = 1$. Observe-se que os limites incluídos não existem para estas funções.

Tal como os limites clássicos, os limites incluídos estendem-se sem dificuldade a limites laterais, limites no infinito, limites infinitos, limite superior e inferior, continuidade, semicontinuidade, etc., e a funções vetoriais.

4. DISCUSSÃO FINAL

Com vista a melhor organizar os nossos comentários aos NPM relativos aos domínios *Sucessões e Funções Reais de Variável Real* FRVR11, começamos por citar algumas partes relevantes dos mesmos.

4.1 Citações dos NPM (11.º Ano)

Na parte *Conteúdos*, pode ler-se:

[1 (p. 15)][7] "No domínio *Sucessões*, após a apresentação de alguns aspetos gerais, é introduzido o princípio de indução matemática, que constitui um instrumento fundamental para o estudo de diversas propriedades das sucessões, servindo ainda de suporte teórico à definição de sucessões por recorrência. São estudadas as progressões aritméticas e geométricas bem como o cálculo da soma de sequências dos respetivos termos."

[2 (p. 15)] "A noção de limite é introduzida de forma cuidada. Uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências concetuais graves. É pois exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição. É também desenvolvida, de forma bastante completa, a álgebra dos limites, incluindo uma análise das situações ditas indeterminadas, devendo os alunos justificar igualmente alguns destes resultados."

[3 (p. 15)] "No domínio *Funções Reais de Variável Real*, do 11.º ano, utilizam-se os conceitos introduzidos no domínio *Sucessões*, para, pelo processo atribuído a Heine, ficar definida a noção de limite de uma função, num dado ponto ou em mais ou menos infinito. Neste contexto, são essencialmente duas as opções que classicamente se consideram para a definição de limite num ponto a real, consoante o domínio em que se tomam as sucessões a tender para a, para o efeito de testar a existência do referido limite. A opção privilegiada [p. 16] desde há bastante tempo no Ensino Secundário em Portugal tem sido a que consiste em considerar, de entre as sequências no domínio da função, apenas aquelas que nunca tomam o valor a. Ou seja, tem-se optado pelo que vulgarmente se designa por "limite por valores diferentes de a". Neste programa optou-se pela versão alternativa, que consiste em admitir, com o mesmo objetivo, sucessões que podem tomar o valor a; considera-se, com efeito, que esta opção apresenta diversas vantagens. Em primeiro lugar, por ser mais simples de formular (e permitir também uma formulação mais simples da noção de continuidade) e, em segundo lugar, porque a própria noção de "limite por valores diferentes" (como outras afins como a de "limite à esquerda" e "à direita") passa a poder ser encarada como caso particular da noção de limite, quando considerada a restrição da função inicial a um subconjunto do respetivo domínio."

[4 (p. 16)] "A definição de limite segundo Heine – que já é comum no Ensino Secundário – permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões, bem como os teoremas de convergência por comparação, como o Teorema das funções enquadradas, que é uma consequência direta, com esta abordagem, do Teorema das sucessões enquadradas e que são estudados no 12.º ano. Apresenta-se em seguida a noção de continuidade e, como uma aplicação da noção de limite de uma função, o estudo das assíntotas, em particular no caso do gráfico de uma função racional."

Na parte *Metas (Funções Reais de Variável Real* FRVR11), que concretiza em pormenor o que foi exposto nos Conteúdos acima, pode ler-se:

[5 (p. 36)] Limites segundo Heine de funções reais de variável real

1. Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais.

[6] A "escolha" dos elementos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de D tais que $|x_n - c| < 1/(n+1)$ para todo o n é feita utilizando o Axioma Numerável da Escolha (NC).

[7] Para facilitar as referências, as numerações "[m (p. n)]" referem-se ao número do parágrafo citado e a página onde está localizado. A ortografia e as notações matemáticas nas citações são as originais e não as que eu próprio utilizo neste artigo.

1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como "ponto aderente a A" quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.[8]

2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$", $b \in \mathbb{R}$ como "limite de $f(x)$ quando x tende para a" quando a for aderente ao domínio D_f de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por "$\lim_{x \to a} f(x)$", referir, nesta situação, que "$f(x)$ tende para b quando x tende para a" e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.

3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, b como o "limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a" quando $b = \lim_{x \to a} f|_{]-\infty,a[}(x)$, representar b por $\lim_{x \to a^+} f(x)$, designá-lo também por "limite de $f(x)$ à esquerda de a", referir, nesta situação, que "$f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores inferiores a a" e estender esta definição ao caso de limites infinitos.(...)

[6, p. 37] 2. "Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais

1. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, que se o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe então é igual a $f(a)$.

2. Designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por "contínua em a" quando o limite $lim_{x \to a} f(x)$ existe."

4.2 Comentários

1 (p. 15). As sucessões desempenham um papel muito importante, por si mesmas e nas aplicações ao estudo dos limites de funções e continuidade nos NPM curriculares. Em primeiro lugar, trata-se de um primeiro confronto real com o infinito numerável, objetos infinitos e operações transcendentes. Neste domínio é introduzido o princípio de indução matemática, mas só depois é que se fala de progressões aritméticas e geométricas. Parece tudo um pouco estranho. O lugar apropriado para se falar da indução matemática seria no estudo dos números naturais e sua aritmética, chegando à divisibilidade e ao teorema fundamental da aritmética. Em todo o caso, parece-nos lógica e pedagogicamente mais apropriado tratar das progressões antes das sucessões.

2 (p. 15). A convergência de sucessões é assunto delicado, mas a este nível não há como evitar a definição rigorosa usual[9] (para todo o $\varepsilon > 0$, existe uma ordem a partir da qual...) ainda que não sejam de eliminar ou evitar explicações intuitivas e muitos exemplos e contra-exemplos ilustrativos.

3 (pp. 15-16). Chegamos ao domínio das funções reais de variável real, e aqui há sérias novidades. Na revisão anterior à presente também se adotou a definição de limite dita à Heine (ou segundo Heine), de uma função num ponto (ou no infinito qualificado), isto é, por meio de sucessões.[10] Mas, agora, a mudança para a perspetiva do limite em ponto incluído não foi precedida de nenhum estudo que a recomendasse nem de experiência piloto mais ou menos dilatada no tempo e devidamente avaliada no final. Agora, um voluntarista iluminado, amigo dos poderes tutelares, propôs a mudança que a tutela proclamou, e o resto do mundo que se amanhe. Por outro lado, é certo que a definição à Heine parece mais simples do que a weierstrassiana, mas paga-se um preço elevado: a forma lógica mais simples fez-se à custa de uma subida de tipo lógico dos objetos quantificados, nomeadamente, da quantificação de números (para todo o δ ... existe um ε ...) passou-se a uma quantificação de sucessões (para toda a sucessão...). Ora, não estou certo de que no 11.º ano seja bem assimilado o facto de uma sucessão de números reais ser um objeto, quanto mais, um objeto infinito quantificável. Mas esta subida no nível de abstração proposto não é a única.[11]

Na conceção e aplicação dos NPM, constatamos o autismo das decisões relativas a alterações nos programas, mas mais gravosas, porque são mais profundas e muito menos consensuais no universo das matemáticas ligadas ao ensino elementar. Porque, agora, se pôs de lado a ideia de "limite por valores diferentes de a" (acima designado por limite em ponto excluído) nas sucessões no domínio da função, e se adotou aquela outra que "consiste em admitir, com o mesmo objetivo, sucessões que podem tomar o valor a" (ver os teoremas de caracterização 3.2 e 3.3 acima).

Os autores do novo programa e das novas metas consideram que esta opção "apresenta diversas vantagens", por

(i) "ser mais simples de formular (e permitir também uma formulação mais simples da noção de continuidade)",

(ii) "porque a própria noção de 'limite por valores diferentes' (como outras afins como a de 'limite à esquerda' e 'à direita') passa a poder ser encarada como caso particular da noção de limite, quando considerada a restrição da função inicial a um subconjunto do respetivo domínio", e ainda porque

(iii) "A definição de limite segundo Heine (...) permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões, bem como os teoremas de convergência por comparação, como o Teorema das funções enquadradas (...). Apresenta-se em seguida a noção de continuidade (...)".

É claro que "ser mais simples de formular" não é argumento legítimo, se implicar, como é o caso, um "desvio" no sentido da abstração e da generalização (bourbakista?), absolutamente despropositadas no nível de ensino secundário, e isso não é aliviado pela adoção da definição à Heine, a qual funciona igualmente bem com as duas noções de limite de uma função num ponto. E quanto à continuidade, bem, ela já está contida na noção de limite incluído, no caso de a função estar definida no ponto. Bartle em *The Elements of Real Analysis*, p. 198, aponta uma vantagem do limite em ponto incluído: na demonstração do teorema sobre o limite da função composta, a qual, todavia, não faz parte dos programas. Mas uma vantagem decisiva dos limites em ponto excluído, reconhecida por todos os que a utilizam, que fica anulada com os limites incluídos é na definição de continuidade, que surge como especialização de uma noção um pouco mais geral.

Os autores dos NPM não enumeram nenhuma desvantagem, nem estudos que fundamentem as escolhas de uma maneira ou de outra. Isto, se não é, pelo menos parece ser uma maneira muito pouco científica ou pedagógica de proceder. Ainda que tivesse havido um prazo alargado e bem divulgado de apreciação prévia à entrada em vigor dos NPM, haveria de se avaliar o que estava mal antes e porquê, e sujeitar as partes novas a período experimental, com turmas piloto e professores especialmente treinados para o efeito. Quem vier a seguir, puder e quiser mudar tudo outra vez, a seu bel-prazer, não pode ser impedido de o fazer com o argumento de não haver precedentes. O mínimo que se pode dizer é que tudo isto está a léguas de distância de honrar a memória de José Sebastião e Silva.

Acrescentaria algumas opiniões que me parecem configurar desvantagens da noção de limite incluído. A primeira e mais importante, a meu ver, já foi indicada logo no início deste artigo, a propósito da função f_1 ilustrada na fig. 1: a quebra da ligação à ideia intuitiva de limite num ponto onde a função está definida. Fica sem explicação uma tão grande discrepância (entre o existir e o não existir limite) quando $x \to c$. A seguir, e sem querer cair no argumento de autoridade, não se compreende a súbita "quebra de tradição" no nosso ensino elementar, quando nada aconteceu a nível do ensino superior, aqui ou lá fora, que justifique ou sugira a conveniência de tal mudança. O mesmo Bartle em *The Elements of Real Analysis*, p. 197, assinala que o limite em ponto excluído é o mais popular, e em abono desse facto, por assim dizer, podemos mencionar os autores seguintes, desde os clássicos Courant (1924), Hardy (1921), Whittaker & Watson (1902), aos modernos Apostol (1974), Lang (1986), Rudin (1976), Strichartz (2000), Protter & Morrey (1986), Garling (2013), Marsden & Weinstein (1980), Spivak (2008) e muitos outros. Já Mawhin (1980) e Dieudonné (1969) adotam os limites incluídos, mas o tratamento que este último dá aos limites (cap. III 13) pela necessidade de tratar diferentemente casos especiais conforme o ponto pertence ou não ao domínio da função, não constitui o melhor exemplo da tão elusiva mas desejada elegância matemática.

Em conclusão, nada justifica as últimas alterações ao programa do domínio FRVR11 assinalados. Nem estudos, nem tradição, nem adequação pedagógica, e muito menos transparência de processos.

5. BIBLIOGRAFIA

Abbott, S. 2002. *Understanding Analysis*. Springer.

Apostol, T. 1967. *Calculus, Volume 1: One-variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra.* Second edition, Wiley.

Artigue, M. 2000. *Teaching and learning calculus: What can be learned from education research and curricular changes in France?", in E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld and J. Kaput (eds.), Research in Collegiate Mathematics Education IV*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, pp. 1–15.

Bartle, Robert G. 1964. *Elements of Real Analysis*, J. Wiley & Sons, Ltd.

[8] Nestas citações, os limites de funções num ponto a (o nosso "c") referidos são, obviamente, os limites em pontos incluídos "limi".

[9] Há outras definições rigorosas de convergência de sucessões e funções no âmbito do cálculo elementar que evitam totalmente as definições e os argumentos $(\delta,\ \varepsilon)$, como, por exemplo, em Hijab, *Introduction to Calculus ans Classical Analysis*, mas não são viáveis no ensino secundário.

[10] Já encontramos esta abordagem nos programas em vigor nos anos 60, na perspetiva do limite em ponto excluído, cf. o *Compêndio de Álgebra* (1963) de J. Sebastião e Silva e J. da Silva Paulo, cap.V, p. 188.

[11] Uma maneira de simplificar e tornar mais compreensível a definição weierstrassiana $(\delta,\ \varepsilon)$ usual (e analogamente, pois, para a versão com ponto incluído) consiste em definir $lim_{x\to a} f(x) = b$ sse "Para todo o $n \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o x, se $0 < |x - a| < \varepsilon$, então $|f(x) - b| < 1/(n+1)$".

Bridges, D. S. 1998. *Foundations of Real and Abstract Analysis.* Springer.

Cornu, B. 1983. *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et obstacles*, Doctoral Dissertation, Université Scientifique et Médicale, Grenoble.

—— 1991. "Limits", in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 153–166.

Courant, R. 1937. *Differential and Integral Calculus*, Vol. I, trad. por McShane, E. J. Segunda edição, Interscience.

Courant, R. e John, F. 1965. *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I, Interscience.

Courant, R., Robbins, H. e Stewart, Ian. 1996. *What is Mathematics?* Segunda edição, Oxford University Press.

Davis, R. B. e Vinner S. 1986. "The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages", *The Journal of Mathematical Behavior* 5, 281–303.

Grabiner, Judith V. 1983. "Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus". *The American Mathematical Monthly* 90, n. 3, pp. 185–194.

Jean Dieudonné, J. 1969. *Foundations of Modern Analysis,* vol. 1. 2.ª edição revista, Academic Press.

Douglas, R. G. (Editor). 1986. *Toward a Lean and Lively Calculus*. MAA.

EDM2 *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. 1993. 2.ª edição, MIT Press, vol. I, p. 326 segs.

Figueira, Mário S. R. 2011. *Fundamentos de Análise Infinitesimal.* 5.ª edição, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ferrini-Mundi, J. e Graham, K. 1994. *Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals*, in J. Kaput and E. Dubinsky (eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results*, MAA Notes 33, Washington, pp. 31-45.

Garling, D. J. H. 2013. *A Course in Mathematical Analysis,* vol. I, *Foundations and Elementary Real Analysis*. Cambridge University Press.

Gray, J. 2015. *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*. Springer.

Gonçalves, J. Vicente. 1953. *Curso de Álgebra Superior, I Parte: Elementos Gerais de Análise Real*, 3.ª edição, Lisboa.

Hairer, E., e Wanner, G. 1996. *Analysis by its History*, Springer.

Hardy, G. H. 1952. *A Course of Pure Mathematics*. 10.ª edição. Cambridge University Press.

Hijab, Omar. 1997. *Introduction to Calculus and Classical Analysis*. Springer.

Landau, E. 1980. *Differential and Integral Calculus*, MAS Chelsea, 3.ª edição, 2.ª impr.

Lang, S. 1986. *A First Course in Calculus.* 5.ª edição, Springer.

Lima, Elon Lajes. 1976. *Curso de Análise,* Vol. I, IMPA, Projecto Editores.

[NPMC]. 2013. Novos Programas e Metas Curriculares de Matemática A para o Ensino Secundário (cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas), *Diário da República* 2.ª série, n.º 143, de 26 de julho de 2013. Disponível em *http://www.matematica.pt/docs/diversos/programa-metas-curriculares-matematica--secundario.pdf*

Marsden, J., e Weinstein, A. 1980. *Calculus I, II, III.* Springer.

Mawhin, J. 1992. *Analyse – Fondements, techniques, évolution.* De Boeck Université.

Oliveira, A. J. Franco. 1982. *Teoria de Conjuntos, Intuitiva e Axiomática (ZFC)*. Escolar Editora.

Pedrick, G. 1994. *A First Course in Analysis*. Springer.

Protter, M. H., e Morrey, C. B. Jr. 1986. *Intermediate Calculus.* Springer.

Rudin, W. 1976. *Principles of Mathematical Analysis.* 3.ª edição, McGraw-Hill.

Spivak, M. 2008. *Calculus.* 4.ª edição (disponível *online*).

Strichartz, Robert S. 2000. *The Way of Analysis.* Segunda edição, Jones and Bartlett Books in Mathematics.

Tall, D. 1992. *'Students' Difficulties in Calculus Plenary presentation in Working Group 3*, ICME, Québec, August 1992. Published in *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME-7 1992, Québec, Canada, (1993), pp. 13–28.

—— 1996. *'Function and calculus'*, in A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (editores), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 289–325.

Sierpinski, W. 1916. *Sur le rôle de l'axiome de M. Zermelo dans l'Analyse Moderne*, *Compt. Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, Paris 193, pp. 688-691.

Sebastião e Silva, J. 1976. *Compêndio de Matemática*, 2.º volume, GEP, Lisboa.

Sebastião e Silva, J. e Silva Paulo, J. 1963. *Compêndio de Álgebra*. Livraria Popular de Francisco Franco, Lisboa.

Sinkevich, G. I. 2015. *On the history of epsilontics. St. Petersburg University of Architecture and Civil Engineering.* UDK 51(091).

Whittaker, E. T. e Watson, G. N. 1920. *A course of modern analysis; an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions.* Cambridge University Press.

Cotovia, 10 de Agosto de 2017

https://sites.google.com/site/tutasplace/

SOBRE O AUTOR

Augusto J. Franco de Oliveira. Licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de Lisboa. Mestre em Lógica Matemática pela Universidade de Leeds, Inglaterra, e Doutor em Matemática (especialidade de Álgebra, Lógica e Fundamentos) pela Universidade de Lisboa. Lecionou no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa (1968-1997) e no Departamento de Matemática da Universidade de Évora (1998-2007). Recebeu o título de Professor Emérito em Novembro de 2008. Lecionou também no Mestrado em História e Filosofia das Ciências na Secção Autónoma de História e Filosofia das Ciências da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (2008-2012). Conhecido conferencista, com vários livros e traduções publicadas nas áreas de Lógica e Fundamentos, Geometria, Análise Não-Standard, História e Filosofia da Matemática.

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

E SE SOMÁSSEMOS TODOS OS NÚMEROS NATURAIS?

Que sentido terá somarmos os números 1 + 2 + 3 + 4 + ··· ? Há quem defenda que a soma é $-1/12$, mas é preciso ter algum cuidado com estas afirmações.

Há um vídeo de matemática no *YouTube*[1] que, no momento que este texto está a ser escrito, já teve mais de seis milhões de visualizações e que deu origem a uma grande polémica. A causa desta polémica torna-se clara logo pelo título:

$$\text{ESPANTOSO: } 1+2+3+4+5+\cdots = -\frac{1}{12}.$$

É natural que um tal título chame a atenção e que não seja consensual.

O ponto de partida dos autores para chegarem à igualdade do título do vídeo é a série $1-1+1-1+\cdots$, por vezes designada por *série de Grandi*. É claro que se somarmos os primeiros termos desta série obtemos 0 (se somarmos um número par de termos) ou 1 (caso contrário). Daí, os autores saltam para a conclusão (?) de que a soma daquela série é $1/2$, ou seja, tem-se

$$1-1+1-1+\cdots = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Em seguida, consideram a série

$$S = 1-2+3-4+\cdots,$$

a qual somam a ela própria, mas com um ligeiro desfasamento. Mais precisamente, fazem esta soma:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & \cdots \\ + & & & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & \cdots, \end{array}$$

obtendo $1-1+1-1+\cdots$, que já tinham determinado ser igual a $1/2$. Assim sendo, deduzem que $2S = 1/2$ e, portanto, que $S = 1/4$.

O passo seguinte consiste em pegar na soma $1+2+3+4+\cdots$ e subtrair-lhe a soma $1-2+3-4+\cdots$:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots \\ - & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & \cdots, \end{array}$$

obtendo $0+4+0+8+\cdots$, ou seja o quádruplo da soma que queremos obter. Sendo assim,

$$(1+2+3+4+\cdots) - \frac{1}{4} = 4 \times (1+2+3+4+\cdots),$$

pelo que

$$-3 \times (1+2+3+4+\cdots) = \frac{1}{4},$$

ou seja,

$$1+2+3+4+\cdots = -\frac{1}{12}. \tag{2}$$

Os autores do vídeo explicam em seguida que a igualdade (2) até tem aplicações à Física e dão mesmo uma referência bibliográfica para apoiar esta afirmação [3, pág 22].

Para já, vejamos a parte matemática da igualdade (2). Por vezes, é afirmado que já Euler e Ramanujan afirmavam que esta é válida. No caso de Euler, embora se trate de alguém que manipulava séries sem as preocupações atuais relativamente à sua convergência, aparentemente

[1] *https://www.youtube.com/watch?v=w-I6XTVZXww*

nunca fez essa afirmação [1, § 7]. Em contrapartida, é verdade que Ramanujan defendeu que a igualdade (2) é válida (fê-lo numa carta dirigida a G. H. Hardy, acrescentando logo a seguir que o mais natural era que este, em seguida, lhe indicasse o caminho para o manicómio mais próximo) [2, pág. 53]. A justificação dada por Ramanujan sobre como deduzir (2) da igualdade

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4} \tag{3}$$

foi essencialmente a que foi descrita acima. Mas a demonstração, por assim dizer, de que se tem (3) é muito diferente. O que Ramanujan fez foi observar que, se $x \in]-1,1[$, então

$$1-2x+3x^2-4x^3+\cdots=\frac{1}{(1+x)^2}$$

(o que está inteiramente correto). Em seguida, substituiu x por 1, a fim de obter (3).

Há outra maneira de ligar a soma 1 + 2 + 3 + 4 + ··· ao número $-1/12$ a qual tem bastante a ver com Euler (veja-se [1] ou [4]). Este estudou a função

$$s \mapsto 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots, \tag{4}$$

que se designa por função ζ (zeta) de Riemann. Acontece que a série (4) só converge quando $s>1$ (supondo que s é real). Mas Riemann mostrou que é possível prolongar esta função a uma e uma só função derivável ζ de $ $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ em $\mathbb{C}$. E acontece que, para essa função, tem-se, de facto, $\zeta(-1)=-1/12$, o que, juntamente com a expressão (4), parece justificar a igualdade do vídeo. Mas é uma interpretação bastante forçada.

Pode provar-se que

$$\lim_{s\to 1, s\in]1,+\infty[} 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots=+\infty.$$

Por causa disso, não é possível prolongar a função (4) (originalmente definida unicamente quando $s \in]1,+\infty[$) a uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Assim sendo, é natural que, se quisermos prolongar a função ζ de forma a termos uma função bem-comportada, isso seja feito rodeando o ponto 1 e passando por números complexos não reais. Mas, embora esta seja uma maneira frequentemente empregue para justificar a igualdade (2), não deixa de ser bizarro o uso de números complexos não reais para justificar aquela relação.

De facto, Terence Tao (que, entre muitos outros prémios, recebeu a medalha Fields em 2006) publicou no seu blogue *What's new* um texto muito interessante sobre este tópico[2], no qual explica como dar uma interpretação puramente real à soma 1 + 2 + 3 + 4 + ··· de modo a dar $-1/12$. Aí ele também tece algumas considerações interessantes sobre este tipo de somas, tais como:

- Naturalmente, há algo de anómalo em a soma de números positivos dar um número negativo.
- As igualdades envolvidas não parecem consistentes entre si. Por exemplo, se à igualdade (2) se subtrair a igualdade (1), obtém-se

$$2+3+4+5+\cdots=-\frac{7}{12},$$

mas se se subtrair 1 à igualdade (2), o que se obtém é

$$2+3+4+5+\cdots=-\frac{13}{12}.$$

Um aspeto essencial aqui reside na palavra "interpretação". O uso do símbolo de igualdade em (1), em (2) e em (3) está errado, a menos que se redefina o que se entende por soma de uma série. Um dos problemas reside precisamente no facto de os autores do vídeo não fazerem isso.

Foi feita, no início deste texto, uma referência a aplicações à Física da igualdade (2). Uma tal aplicação consiste no chamado efeito Casimir[3], que é uma força de atração entre placas metálicas prevista pelos físicos holandeses Hendrik Casimir e Dirk Polder em 1948 e confirmada experimentalmente em 1997. Os cálculos empregues por estes físicos envolvem, se não se tiver cuidado, a igualdade

$$1+2^3+3^3+4^3+\cdots=\frac{1}{120} \tag{5}$$

(e, já agora, sim, $\zeta(-3)=1/120$) e uma versão simplificada e unidimensional daqueles cálculos envolve a igualdade (2). Daí a afirmar-se que uma demonstração experimental da validade das igualdades (2) e (5) já foi obtida é um passo que já foi dado... mas não devia ter sido.[4] O que, de facto, aconteceu, foi que aqueles físicos empregaram numa passagem dos seus cálculos o valor 1/120 ao qual chegaram não da aplicação da igualdade (5) mas sim de uma técnica próxima daquela que foi descrita por Terence Tao no texto acima mencionado.

Mas isto não deixa de sugerir que não se devem ignorar as igualdades (2) e (5). Afinal, parecem ter aplicações práticas. Isto é defendido por Edward Frenkel[5] (matemático conhecido do público português através do seu livro *Amor e Matemática*), que estabelece a seguinte analogia: a fórmula de Cardano para resolução de equações de terceiro grau envolve números complexos não reais. Deveria ter sido ignorada porque, inicialmente, ninguém conseguia explicar o que é a raiz quadrada de –1? É uma observação muito pertinente e há outras analogias da mesma natureza que se poderiam fazer, como, por exemplo, com as bases do Cálculo Infinitesimal, as quais suscitaram durante muito tempo grandes dúvidas quanto à sua consistência.

Sendo assim, a melhor opção consiste provavelmente em continuar a investigar em que contextos é que é legítimo substituir $1+2+3+4+\cdots$ por $-1/12$ ou substituir $1+2^3+3^3+4^3+\cdots$ por $1/120$ e tentar construir uma teoria geral sobre esse tipo de situações. E, ao mesmo tempo, evitar cuidadosamente o uso do símbolo de igualdade nestes casos. Um bom motivo para isso foi dado pelo Dr. SkySkull (pseudónimo de um físico norte-americano) no seu blogue *Skulls in the Stars*[6]:

> " Uma proporção deprimentemente grande da população parte automaticamente do princípio de que a matemática consiste numa feitiçaria bizarra e anti-intuitiva que somente os superinteligentes conseguem dominar. Mostrar-lhe resultados malucos deste tipo sem quaisquer reservas só reforça esta ideia e, na minha opinião, isso presta um mau serviço à matemática."

REFERÊNCIAS

[1] R. Ayoub, "Euler and the zeta function", *The American Mathematical Monthly* 81, N.º10 (dez. 1974), pp. 1067–1086.

[2] B. C: Berndt; A. C. Rankin, *Ramanujan: Letters and Commentary*, American Mathematical Society, 1995.

[3] J. Polchinski, *String Theory, vol.I*, Cambridge University Press, 1998.

[4] A. Weil, "Prehistory of the Zeta-function", *Number theory, trace formulas and discrete groups*, pp. 1–9, Academic Press, 1989.

---

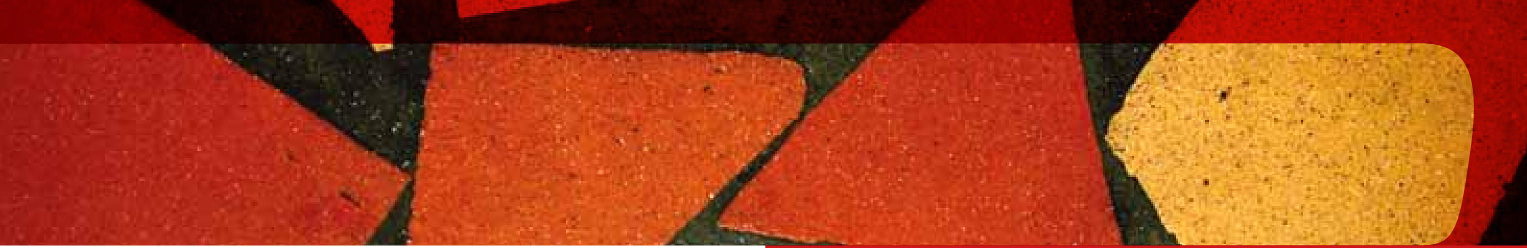
[2] *https://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula--bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic-continuation*

[3] *https://en.wikipedia.org/wiki/Casimir_effect*

[4] *http://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/summingNaturals.html*

[5] *https://www.youtube.com/watch?v=0Oazb7IWzbA*

[6] *https://skullsinthestars.com/2014/01/18/infinite-series-not-quite-as-weird-as--some-would-say/*



A CONJETURA DAS ZONAS DE TÓTH

Neste artigo falamos da demonstração de algumas conjeturas de geometria discreta, começando nos anos 30 e terminando no ano passado.

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

Nesta coluna tentamos falar de resultados matemáticos demonstrados recentemente. Nem sempre isso tem acontecido – por exemplo, aquando da morte de Grothendieck, falámos de resultados com mais de 40 anos. Desta vez, porém, o resultado que dá o tema a este texto não pode ser mais recente: foi publicado na revista *Geometry and Functional Analysis* em dezembro passado, tendo ficado disponível *online* a 24 de novembro, no artigo [1]. Trata-se da demonstração de uma conjetura de László Fejes Tóth, formulada nos anos 70 do século passado, relativa a coberturas de esferas em $\mathbb{R}^n$.

Antes de descrevermos a conjetura, porém, vamos falar de um problema do mesmo teor, o das coberturas de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ com *bandas*, isto é, com zonas de $\mathbb{R}^n$ compreendidas entre dois hiperplanos paralelos. Dizemos que a largura de uma banda é a distância entre estes dois hiperplanos e definimos *largura* de um conjunto qualquer de $\mathbb{R}^n$ como o menor w tal que uma banda de largura w cobre o conjunto.

Num artigo de 1932, Tarski trata o problema de cobrir um conjunto convexo do plano por bandas, provando que, para qualquer cobertura, a largura do conjunto não excede a soma das larguras das bandas que o cobrem. Por outras palavras: mesmo usando várias bandas para cobrir um conjunto convexo, não se consegue melhor do que cobri-lo com uma banda de largura mínima. A figura 1 ilustra esta situação.

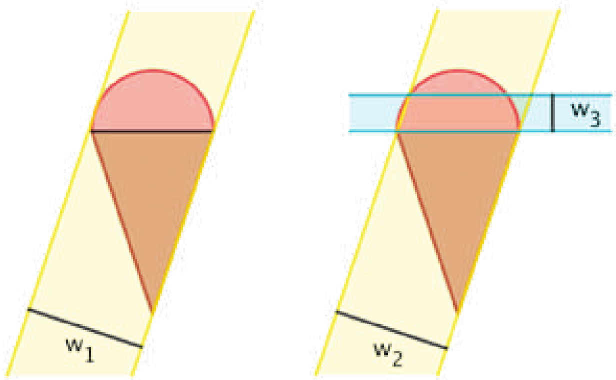


Figura 1. Duas coberturas de um conjunto do plano por bandas: $w_1 < w_2 + w_3$.

A generalização da conjetura para conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ aparece em dois artigos, de 1950 e 1951, de Thøger Bang, nos quais o autor prova esta versão generalizada. A conjetura teve entretanto mais reformulações, despertando ainda interesse hoje em dia, veja-se um levantamento em [2].

A conjetura de Tóth refere-se a coberturas de esferas de dimensão d em $\mathbb{R}^{d+1}$. Nesta situação, apenas se consideram bandas simétricas em relação ao centro da esfera, que vêm a ser simétricas também em relação a um hiperplano que contém o centro da esfera, chamado hiperplano central (da banda). Veja-se uma ilustração para $d = 2$ na figura 2: a banda é delimitada pelos planos a amarelo, o hiperplano central está a cinzento.

Chamamos *zona* à interseção de uma destas bandas com a esfera. Medimos a sua largura angularmente: dizemos que a *largura* (angular) de uma zona é ω se esta puder ser descrita como o conjunto dos pontos da esfera cuja distância angular ao hiperplano central (medida sobre a esfera) é menor ou igual a $\omega/2$.

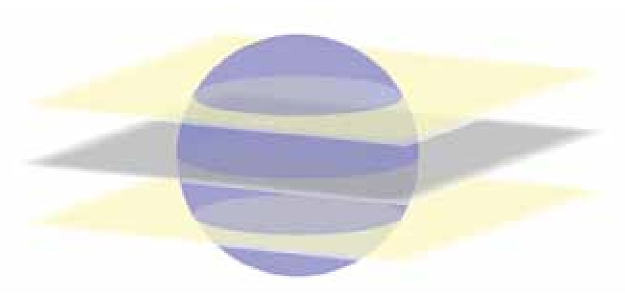


Figura 2. Interseção de uma esfera com uma banda em $\mathbb{R}^3$, com hiperplano central.

A figura 3 apresenta uma cobertura de uma circunferência por três zonas. A soma das suas larguras é π. Estão também representados vetores perpendiculares aos hiperplanos centrais de cada uma das bandas que definem as zonas – estes vetores definem a posição dos hiperplanos.

Em 1974, Tóth conjeturou que, se uma esfera de $\mathbb{R}^{d+1}$ for coberta por n zonas de largura (angular) igual, então esta largura tem de ser, pelo menos, π/n. Mais tarde, generalizou esta conjetura para zonas de largura angular não necessariamente igual: se n zonas cobrem a esfera, então a soma das suas larguras tem de ser, pelo menos, π. O tipo de afirmação é semelhante ao da conjetura de Tarski: mesmo cobrindo a esfera com várias zonas, as suas larguras somadas têm de ser, pelo menos, a de uma zona só, correspondente à esfera toda.

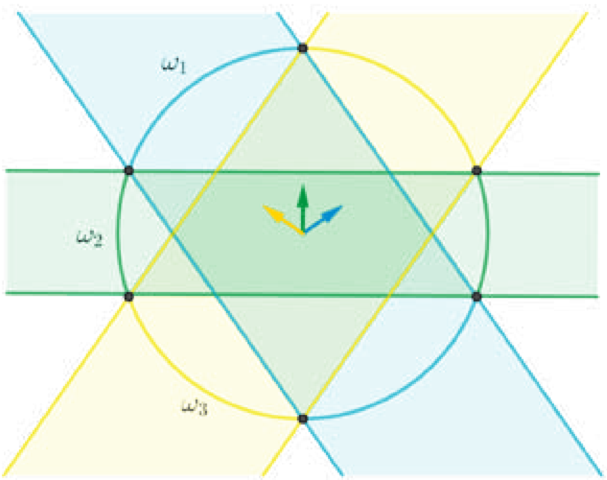


Figura 3. Circunferência decomposta em três zonas, com $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \pi$.

No artigo [1], Zilin Jiang e Alexandr Polyanskii demonstram esta conjetura, com um uso engenhoso de ferramentas de matemática elementar e de ideias presentes em artigos anteriores. Na verdade, o que demonstram é mais forte. O resultado é o seguinte.

Teorema. *Sejam $P_1, \ldots, P_n$ n zonas que cobrem a d-esfera. Além disso, para cada $1 \leq i \leq n$, sejam $2\alpha_i$ a largura de P_i e r_i a reta que passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao hiperplano central de P_i.*

Temos então que a soma das larguras de $P_1, \ldots P_n$ é, pelo menos, π, havendo igualdade se e só se, após reordenamento das zonas, $r_1, \ldots, r_n$ são complanares e estão dispostas em sentido anti-horário, de tal modo que o ângulo entre r_i e r_{i+1} é igual a $\alpha_i + \alpha_{i+1}$, para todo o $1 \leq i \leq n$ (com a convenção $\alpha_{n+1} = \alpha_1$).

O resultado afirma, portanto, que num arranjo ótimo de zonas na esfera, as retas perpendiculares aos hiperplanos centrais se dispõem num plano. Ou seja, se intersetarmos toda a figura com esse plano, a disposição é semelhante à da figura 3. Assim, neste caso, o que se passa em dimensão 2 (com esfera de dimensão 1) é exemplar, as retas são dirigidas pelos vetores representados.

O artigo usa ainda estes resultados e métodos para demonstrar uma versão um pouco mais geral da conjetura de Tóth, terminando com uma lista de conjeturas relacionadas. Em 1930, quando Tarski apresentou a primeira conjetura que aqui mencionámos, o tema da geometria discreta estava a nascer. Quase 90 anos depois, vemos que o tema continua vivo e a despertar interesse, gerando novos resultados e novos problemas.

REFERÊNCIAS

[1] Jiang, Z. & Polyanskii, A. "Proof of László Fejes Tóth's zone conjecture" *Geom. Funct. Anal.* (2017) 27: 1367. *https://doi.org/10.1007/s00039-017-0427-6*. arXiv:1703.10550 [math.MG]

[2] K. Bezdek, "Tarski's plank problem revisited" *Geometry—intuitive, discrete, and convex*, v. 24 of Bolyai Soc. Math. Stud., 45-64. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2013. arXiv:0903.4637 [math.MG]

Luis Afonso

Publicado originalmente no jornal Público, em 18/11/2017. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:
Ana Cristina Moreira Freitas Universidade do Porto
Daniel Pinto Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Graciano de Oliveira** Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **Humberto Bortolossi** Universidade Federal Fluminense, Brasil • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Peregrino Costa** Universidade de S. Tomé e Príncipe, São Tomé e Príncipe • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
Fid'algo – Print Graphic Design
Rua da Nau Catrineta n 14 2º Dtr 1990-186 Lisboa

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE:
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

O PROFESSOR GONCHAROV NÃO VEM MAIS

Ana Matias

Universidade do Algarve

ammatias@ualg.pt

O professor Vladimir Vladimirovich Goncharov, discreto professor russo de Análise Matemática da Universidade de Évora, faleceu em novembro de 2017. Apenas uma dúzia de pessoas no mundo dominariam todas as áreas abordadas nos seus trabalhos científicos. Esta homenagem evidencia as suas qualidades científicas, enquadradas num percurso da sua vida pessoal orientado pela generosidade, a honestidade e a sensibilidade.

Nada mais do que uma caneta e um papel sobre uma secretária nua no gabinete 250, do Colégio Luís António Verney da Universidade de Évora. Num dia de novembro mais quente do que o costume, impôs-se um silêncio pesado. Hoje, o professor Goncharov não vem. É o que se diz nos corredores e está quase certo. Vladimir Vladimirovich Goncharov, o discreto professor russo de Análise Matemática, não vem mais.

Entre o seu último dia de vida e o primeiro, distam um continente, uma cultura, um regime, uma forma de estar.

O pequeno Volodya nasceu a 9 de julho de 1962 em Irkutsk, na Sibéria, ex-URSS. Filho único de um advogado e de uma geógrafa, desde pequeno começou a ler livros de várias matérias de matemática. Os pais não entendiam bem o seu entusiasmo, mas não interferiram. Com 13, 14 anos, Volodya já conhecia os grandes matemáticos do mundo e era um entusiasta da teoria de números e outros temas científicos impercetíveis para os seus pais.

Nessa altura, em Irkutsk houve uma escola de verão de física e matemática, que frequentou com prazer e que selou definitivamente o seu rumo para a matemática. Volodya terminou o liceu e a universidade com resultados excelentes. "Queria ser professor de escola. Mesmo quando se licenciou, quis voltar à sua escola N.º 11 de Irkutsk para ensinar matemática a crianças", lembra a sua mãe.

Dado o seu bom desempenho durante a licenciatura, o prestigiado professor Tolstonogov Alexander Alexandrovich, convidou Volodya para fazer consigo uma pós-graduação. O ensino de matemática a crianças estava irremediavelmente perdido. O percurso académico de Vladimir foi impecável. Meses antes de completar 30 anos, acabou o seu Doutoramento em Equações Diferenciais e Física Matemática.

Por essa altura tornou-se diretor do Laboratório de Inclusões Diferenciais e Otimização de Irkutz. Estava no topo do seu percurso académico, a fazer investigação em áreas de ponta, mas Vladimir queria mais. Da Sibéria ainda fechada e conservadora da década de 90, Vladimir desejava uma abertura que a Rússia não lhe dava.

Recebeu um convite de colegas do prestigiado SISSA (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati), em Trieste (Itália) em 1990, onde regressaria com bolsas de investigação novamente em 1993 e entre 1997 e 1999. Trabalhou sob orientação de Arrigo Cellina e conheceu colegas como Giovanni Colombo, com quem manteve uma duradoura parceria. "Volodya tinha ideias matemáticas muito boas que levaram a alguns dos resultados da minha carreira de que mais gosto", refere Giovanni Colombo. "Era um matemático com uma formação sólida, com um gosto aristocrático. Trabalhar e escrever com ele era uma experiência difícil, estimulante e interessante."

Em Itália conheceu também António Ornelas, diretor do Departamento de Matemática da Universidade de Évora e responsável pela sua vinda para Portugal. Em 2000, Goncharov tornou-se professor na Universidade de Évora.

ERA RIGOROSO E PERFECIONISTA, COMO A SUA EDUCAÇÃO RUSSA IMPUNHA

Vladimir tinha um prazer intelectual e emocional na discussão científica. "Ele ria e chorava a falar de matemática", lembra Telma Santos, colega e sua antiga aluna de doutoramento. Telma Santos tem na mão muitas anotações, fruto das intensas e prazerosas horas a fio passadas com Vladimir a discutir matemática.

Rigoroso e perfecionista, como a sua educação russa impunha, era preocupado com a qualidade das demonstrações matemáticas, o que levava a algumas dores de cabeça e a uma pontinha de desespero dos seus alunos.

Começou por dar as quatro disciplinas de Análise Matemática para o curso de Matemática, mas depois deu também as Análises para vários cursos de Engenharia e Ciências da Terra e da Atmosfera, Estatística e Seminário – uma disciplina de Doutoramento. Estas disciplinas são por si só difíceis para os alunos, ainda mais com um professor com uma preocupação obstinada pelo formalismo.

Como professor, munia-se de "umas folhinhas nas quais redigia um verdadeiro guião cinematográfico, iniciando sempre com 'Bom dia' ou 'Boa tarde, hoje vamos falar





1. Volodya com 7 anos, no primeiro ano de escola, em 1969; **2.** Volodya com 16 anos, no 10º Ano, numa tarde dedicada ao trabalho do poeta Vladimir Mayakovsky. Leram poesia, fizeram textos e falaram acerca da vida do famoso poeta, em 1978; **3.** Cerimónia de graduação na qual Volodya, com quase 17 anos, recebeu o certificado da mão do diretor da escola, em 1979; **4.** Discussão científica com colega durante a conferência "Louisiana Workshop on Mathematical Control Theory", EUA, em maio de 2007; **5.** Vladimir Goncharov na mesa do "*Encontro de Matemática em homenagem a Graça Carita*", em março de 2017.

de…'", comenta Fátima Pereira, ex-aluna de Doutoramento e docente de disciplinas partilhadas com Goncharov. Dessas folhinhas que fez para a disciplina de Mestrado de Análise não Suave, preparava uma sebenta e uma aula que iriam servir para as suas provas de agregação. A sebenta, que estava a crescer desmesuradamente, ainda precisava de uma revisão de português, língua em que fazia questão que fosse feita. O seu português não era muito bom, limitação invulgar para um russo, notavam os colegas de Évora, habituados a professores estrangeiros. Estas dificuldades com a língua acentuavam uma certa timidez, mal confundida com distância para com alunos e colegas.

"Vladimir era um grande amigo, um amigo fantástico, foi de uma grande generosidade e ajudou-me na minha viagem à Sibéria", lembra Dulce Gomes, colega do departamento, com contida emoção.

A generosidade de Vladimir foi também canalizada para o Gabinete de Apoio ao Emigrante da Cáritas Diocesana, onde facilitou a comunicação entre os emigrantes do Leste Europeu e os professores de Português para estrangeiros. Neste gabinete conheceu, em 2001, Custódia Casanova, que veio a ser como uma segunda mãe para Vladimir, acolhendo-o na sua família e na sua casa para celebrar as festividades.

Em conjunto com Custódia, trabalhou voluntariamente nesta organização para ajudar os emigrantes no seu processo de integração, de equivalências pedagógicas e outros processos administrativos. Vladimir sabia, por experiência própria, as dificuldades por que passam os emigrantes nos procedimentos homéricos de mudança de país.

A RÚSSIA ESTEVE SEMPRE PRESENTE

"Este ano não haverá uma árvore de Natal gigante em casa de Vladimir. Não era uma árvore qualquer", afirma Custódia com tristeza. A árvore de Volodya lembrava a d'*O Quebra-Nozes* que guardava na sua memória, decorada ao estilo russo, com pequenos brinquedos, cúpulas e outros detalhes de uma riqueza e de uma diversidade muito apreciadas pelos amigos.

Volodya tinha adquirido o filme animado d'*O Quebra-Nozes* para divertir os filhos dos amigos em jantares lá em casa. "Quando Volodya nos recebeu, pôs o filme para as nossas meninas. Ele gostava de crianças e uma das nossas meninas tinha uma idade próxima da do filho de Volodya", lembra Cláudia, sua amiga.

O afastamento de Vladimir da Rússia era físico, mas a sua alma estava indelevelmente marcada pela cultura e pela tradição russas. Celebrava a Páscoa com Custódia, ou o Natal, ou o magusto, mas celebrava também a Páscoa ortodoxa e continuava apaixonado pelo Lago Baikal, pelos escritores clássicos e pela poderosa música dos compositores que ouvira durante a sua educação na Sibéria. Giovanni Colombo recorda o disco oferecido por Volodya do baixo de ópera Feodor Chaliapin e a leitura de um trecho de "Crime e Castigo" feita em russo por Volodya para mostrar a música da escrita de Dostoiévski.

Apenas uma dúzia de pessoas no mundo dominariam todas as áreas abordadas nos seus trabalhos científicos. A sua área de especialização era Equações Diferenciais e a Otimização, com interesse em Análise Multívoca, não Suave, não Linear, Inclusões Diferenciais, Cálculo de Variações e Controlo Ótimo. Encontrava-se a desenvolver atividades nas áreas de Análise Convexa, Problemas do Tempo Mínimo, Soluções Viscosas e Processos Estocásticos. Era coordenador do grupo de Equações Diferenciais e Otimização do centro de investigação CIMA (Centro de Investigação em Matemática e Aplicações) da Universidade de Évora. Foi autor de 27 artigos em revistas internacionais, como a Nonlinear Analysis, Set-Valued Analysis, Convex Analysis, Nonlinear Differential Equations e Topological Methods in Nonlinear Analysis. Os seus últimos dois artigos foram *Vector variational problem with knitting boundary conditions*, resultado da sua cooperação com Graça Carita e Georgi Smirnov e *Strong and weak convexity of closed sets in a Hilbert space* numa colaboração com Grigorii E. Ivanov.

ESTE ANO NÃO HAVERÁ O BOLO DE BOLACHA DO GONCHAROV

O desaparecimento de Graça Carita foi um duro golpe na sua vida profissional e pessoal. Tinha encontrado alguém que o espicaçava. Graça era explosiva, obrigava-o a estar na Universidade e a trabalhar mais depressa. "Trabalhavam bem juntos, complementavam-se", afirma Dulce Gomes. Vladimir foi mentor do "Encontro de Matemática em homenagem a Graça Carita", que o departamento organizou nos dias 3 e 4 de março de 2017.

Este ano não haverá o bolo de bolacha do Goncharov na festa de Natal do departamento. "Era um bolo excecional", refere Clara Grácio. O bolo demorava um dia a preparar, mas as iguarias laboriosas não demoviam Goncharov. Receber os amigos com um banquete de comida russa, impecável e minuciosamente apresentada, era um prazer para si. "Cada vez que fazia anos, convidava amigos e servia-lhes uma bebida nuns copinhos pequeninos muito antigos, de pé alto, com umas colherinhas que tinham sido da avó. Ele gostava muito destes objetos", acrescenta Dulce Gomes.

A personagem central da sua vida era a mãe, Nadezhda Mikhailovna, com quem tinha uma relação muito próxima. Passavam sempre férias juntos e viajavam. Em viagem, conversavam, observavam, trocavam graçolas e brincadeiras como crianças, como dois amigos de longa data.

"Hoje, 7 de novembro de 2017, dia centenário da Revolução de Outubro, perdemos o Vladimir", anunciou Rui Albuquerque, seu colega de departamento, com quem escreveu uma proposta ainda em avaliação. "Nós perdemos muito. A Universidade perdeu muito", diz Fátima Pereira, que dependia cientificamente de Vladimir. Dizia que estava a trabalhar com Giovanni no problema do século. Resolveria problemas matemáticos enquanto andava, sempre a pé, pelas ruas de Évora ou enquanto plantava mais uma aromática no jardim da casa nova? A casa nova era o seu refúgio: alterando-a a seu gosto, lançava as suas raízes em Portugal. Casa que o viu trabalhar no escritório arrumado, cenário de avanços matemáticos, e que o viu morrer quando o generoso coração lhe falhou.

Marina Averyanova recorda o amigo de infância como "um homem incrivelmente inteligente, honesto e decente. Um romântico na alma, capaz de apreciar a amizade e de amar a vida". Ainda este outono estiveram com colegas na dacha de Marina. Toda a gente adorava Volodya pela sua sinceridade, a sua gentileza e a generosidade da sua alma. Juntos viajaram em 2016 para Roma, Corfu e Atenas. No próximo verão, iriam para Espanha.

Não irão para Espanha, nem viajarão mais juntos. Vladimir Goncharov permanecerá em Irkutsk, ao lado do seu pai.

SOBRE O AUTOR

Ana Matias é Investigadora Auxiliar do CIMA (Centro de Investigação Marinha e Ambiental) da Universidade do Algarve. Licenciada em Geologia (Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa), Mestre em Estudos Marinhos e Costeiros e Doutorada em Geologia Marinha (Universidade do Algarve) e Mestranda em Comunicação de Ciência (Faculdade de Ciências Sociais e Humanas da Universidade Nova de Lisboa).

AUTOR
António Machiavelo
Univ. do Porto
ajmachia@fc.up.pt

SEGURANÇA PRÉ E PÓS-QUÂNTICA

O uso de códigos secretos, ou cifras, para transmitir informações confidenciais é multimilenário. O advento da Internet multiplicou os usos da criptografia, e hoje prepara-se já o futuro da segurança informática num potencial mundo povoado por uma nova geração de computadores radicalmente diferentes dos atuais – os computadores quânticos.

A *criptologia*, o estudo de cifras, isto é, de métodos seguros de transmissão de informação confidencial por forma a que esta seja ilegível por terceiros, engloba duas atividades algo opostas mas inseparáveis: a *criptografia*, a criação de cifras, e a *criptanálise*, a procura sistemática de fragilidades nessas mesmas cifras. Para desenhar uma cifra segura é necessário considerar a sua criptanálise e para fazer criptanálise é essencial conhecer os sistemas criptográficos e as ideias subjacentes à construção de cada um deles.

A criptografia é bem antiga, remontando provavelmente às primeiras civilizações humanas [9, Cap.2]. Mas o estudo sistemático da criptologia, e em particular da criptanálise, parece ter sido iniciado no seio do império árabe, provavelmente com importantes antecedentes persas [9, pp. 93-99].

É também antigo o envolvimento de matemáticos na criptologia. Por exemplo, François Viète (1540-1603), famoso pelo seu tratamento da teoria das equações, criptanalisou mensagens secretas espanholas ao serviço do rei Henrique IV de França [9, pp. 116-118]. Mais recentemente, Alan Turing (1912-1954), um dos fundadores da ciência de computadores, desempenhou um papel fundamental na criptanálise da cifra *Enigma*, um sistema criptográfico usado pelas tropas alemãs na Segunda Guerra Mundial [10, 12].

Todas as cifras *clássicas*, isto é, anteriores a 1976, são *simétricas*, ou seja, sabendo a chave usada para cifrar, sabe-se também como decifrar. Um exemplo simples e bem conhecido consiste em usar uma permutação pré-combinada das letras do alfabeto. Hoje as cifras clássicas têm apenas um interesse mais ou menos lúdico, embora a sua criptanálise possa constituir um bom exercício [11] e há várias ideias essenciais na criptologia clássica que são ainda hoje pertinentes.

Em 1976, Whitfield Diffie e Martin Hellman operaram uma mudança de paradigma em criptografia. Propuseram um método engenhoso para duas entidades selecionarem uma chave secreta, de um modo seguro, através de um canal não seguro – método hoje conhecido por *protocolo de Diffie-Hellman* –, e introduziram o conceito de *criptografia de chave pública*, explicando como poderiam ser elaborados sistemas criptográficos em que a chave usada para decifrar é, de um ponto de vista computacional, praticamente impossível de obter conhecendo a chave usada para cifrar, que pode pois ser pública [3]. Apesar de não apresentar nenhuma proposta concreta deste novo tipo de criptografia, o artigo estimulou a procura de um tal sistema e, em 1978, Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman publicaram o primeiro sistema prático de chave pública [13], que pode ser usado para transmitir informação confidencial e também como um esquema de assinatura digital, que ficou conhecido pela sigla formada pelas iniciais dos apelidos dos seus inventores: RSA.

A criptografia de chave pública veio alargar o uso da criptografia, que, se antes se limitava essencialmente a aplicações militares e a proteger segredos diplomáticos e industriais, hoje é ubíqua, protegendo transações feitas via

Internet, integridade e autenticação de documentos e entidades, assim como os mais diversos dados pessoais dos utilizadores.

O protocolo de Diffie-Hellman e a cifra RSA usam resultados de Teoria dos Números descobertos e explorados nos séculos XVII e XVIII. Dados[1] $n, a \in \mathbb{N}$, vamos designar aqui por $r_n(a)$ o resto da divisão de a por n. Por exemplo, $r_3(14) = 2$. No século XVII, Pierre de Fermat descobriu o seguinte resultado notável: se p é um número primo e $a \in \mathbb{N}$ é um número não divisível por p, então $r_p(a^{p-1}) = 1$ (sempre!). Por razões que não cabe aqui detalhar, Fermat não deixou escrita nenhuma demonstração deste, como de muitos outros resultados (na época não existiam ainda revistas científicas). Coube a Leonhard Euler, que viveu no século XVIII, fornecer demonstrações deste resultado. É claro que bastava uma para garantir a sua veracidade, mas diferentes demonstrações podem fornecer perspetivas extras que permitem ir mais fundo. Foi precisamente assim que Euler acabou por descobrir uma notável generalização do resultado de Fermat: dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\varphi(n) = \#\{k \in \mathbb{N} : \mathrm{mdc}(k, n) = 1\}$; então $r_n(a^{\varphi(n)}) = 1$ sempre(!) que $\mathrm{mdc}(a, n) = 1$. Euler descobriu ainda que para cada número primo p existem números g tais que os números $r_p(g^i)$, para $i = 1, 2, \ldots, p-1$, dão exatamente todos os números de $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ (por uma outra ordem). Estes números são chamados *raízes primitivas módulo* p. Acontece que há algoritmos eficazes e rápidos (em certo sentido) que permitem calcular $s = r_p(g^i)$, dados p, g, i, mas não se conhecem algoritmos "eficientes" para calcular i dados p, g, s – questão esta (a do cálculo de i à custa de p, g, s) que é conhecida pelo nome *problema do logaritmo discreto*, pois i é uma espécie de logaritmo (numa versão discreta, pois há apenas um número finito de possibilidades) de s módulo p, relativo à base g.

O protocolo de Diffie-Hellman pode agora ser descrito do seguinte modo. Duas entidades A e B que queiram escolher, através de um canal não seguro, uma chave secreta para ser usada numa cifra simétrica, começam por escolher um primo p e uma sua raiz primitiva g, sendo p suficientemente grande para a resolução do respetivo problema do logaritmo discreto ser um sério obstáculo a potenciais espiões. De seguida, A escolhe (de modo aleatório) um número $a \in \{2, 3, \ldots, p-3\}$ e calcula $u = r_p(g^a)$, enquanto B escolhe b nas mesmas condições e calcula $v = r_p(g^b)$. Depois, através do canal (que pode estar sob escuta), A envia u a B, e este envia v a A. Finalmente, A calcula $r_p(v^a)$ e B calcula $r_p(u^b)$. Ambos acabam por obter o mesmo número, k, pois $r_p(v^a) = r_p((g^b)^a) = r_p(g^{ba}) = r_p(g^{ab}) = r_p((g^a)^b) = r_p(u^b)$. O número k pode, pois, ser usado como chave secreta para comunicações futuras, uma vez que quem escutou toda a transmissão, não conhecendo nem a, nem b (a menos que consiga calcular logaritmos discretos), não consegue obter k.

Por seu lado, a cifra RSA baseia-se na observação de que, se $n = pq$, sendo p e q dois primos distintos, e se c for escolhido de tal modo que $\mathrm{mdc}(c, \varphi(n)) = 1$, então existe um número d tal que $r_{\varphi(n)}(cd) = 1$, obtendo-se duas funções, $x \mapsto r_n(x^c)$ e $x \mapsto r_n(x^d)$, do conjunto $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ nele próprio, que são inversas uma da outra – facto que resulta do teorema de Euler atrás mencionado. A primeira delas pode, pois, ser usada para cifrar mensagens por todos os que conheçam n e c, a chave dita *pública*, e a outra para decifrar mensagens por quem conheça a *chave privada* d. Já agora, d é calculado a partir de c e de $\varphi(n)$, usando um método com mais de 2000 anos, conhecido pelo nome de *algoritmo estendido de Euclides*.

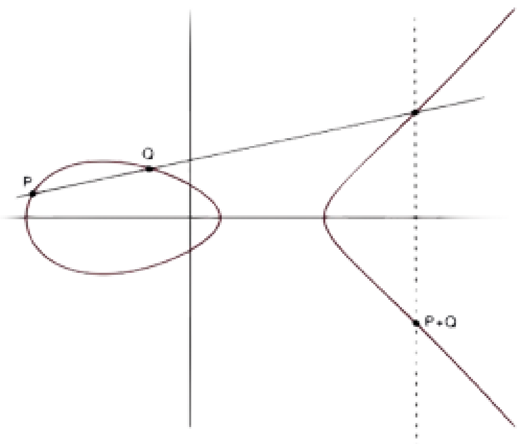
Enquanto o protocolo de Diffie-Hellman baseia a sua segurança na dificuldade de calcular logaritmos discretos, a segurança do sistema RSA assenta na dificuldade de fatorizar números a partir de um certo tamanho, quando comparada com a relativa facilidade em gerar números primos da mesma ordem de grandeza. Por exemplo, enquanto se pode hoje gerar primos com 1000 algarismos em frações de segundo, a fatorização de números como o seguinte:
25 195 908 475 657 893 494 027 183 240
048 398 571 429 282 126 204 032 027 777
137 836 043 662 020 707 595 556 264 018 525
880 784 406 918 290 641 249 515 082 189 298
559 149 176 184 502 808 489 120 072 844 992
687 392 807 287 776 735 971 418 347 270
261 896 375 014 971 824 691 165 077 613 379 859
095 700 097 330 459 748 808 428 401 797 429
100 642 458 691 817 195 118 746 121 515 172
654 632 282 216 869 987 549 182 422 433 637
259 085 141 865 462 043 576 798 423 387 184
774 447 920 739 934 236 584 823 824 281 198
163 815 010 674 810 451 660 377 306 056 201
619 676 256 133 844 143 603 833 904 414 952
634 432 190 114 657 544 454 178 424 020 924
616 515 723 350 778 707 749 817 125 772 467
962 926 386 356 373 289 912 154 831 438 167
899 885 040 445 364 023 527 381 951 378 636
564 391 212 010 397 122 822 120 720 357,

[1] Como é usual em Teoria dos Números, $\mathbb{N}$ designa o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

está fora do alcance dos nossos melhores algoritmos e de todo o poder computacional existente. Este número, que é conhecido por RSA2048, tem o tamanho de um "n" típico usado para assegurar a transação de movimentos financeiros via Internet, por exemplo.

Em 1985, Taher Elgamal mostrou que a ideia em que assenta o protocolo de Diffie e Hellman pode ser adaptada para dar uma cifra e um método de assinatura digital [4]. No mesmo ano, e de um modo independente, Victor S. Miller e Neal Koblitz sugerem o uso de *curvas elípticas* – certas curvas dadas por polinómios cúbicos de duas variáveis que podem ser munidas de uma estrutura de *grupo*, ou seja, de uma operação que a dois pontos da curva associa um outro ponto e que é associativa, tem elemento neutro e cada elemento tem um inverso. A vantagem do uso das curvas elípticas sobre os números primos e raízes primitivas da proposta original de Diffie e Hellman advém do facto de haver, para cada primo, várias curvas elípticas definidas sobre esse primo (i.e., para quem sabe o que isso significa, definida sobre o corpo com esse número primo de elementos).

Porém, em 1994, Peter Shor mostrou que num computador quântico – um computador que tira proveito de certos fenómenos subatómicos – podem implementar-se algoritmos que, em certo sentido, "resolvem" o problema da fatorização e o problema do logaritmo discreto [14]. Ou seja, um computador quântico torna obsoletos os protocolos de Diffie-Hellman e as cifras RSA e Elgamal. Apesar de não haver ainda computadores quânticos merecedores desse nome, sendo as dificuldades tecnológicas da sua construção imensas, há já alguns protótipos relativamente rudimentares que são suficientes para causar sérias preocupações sobre o futuro da segurança informática.



$$y^2 = x^3 - 11x + 7$$

Figura 1. Um exemplo de soma de pontos numa curva elíptica

Em consequência disso, tem havido um enorme interesse no desenvolvimento e no estudo de sistemas criptográficos alternativos que se pensa poderem resistir a ataques quânticos (em criptologia, como na vida, as certezas absolutas são muito escassas). Há várias propostas destes sistemas ditos *pós-quânticos*, usando as mais variadas ferramentas matemáticas [2]: códigos corretores de erros, reticulados geométricos, sistemas de equações quadráticas de várias variáveis. Há também propostas recentes interessantes usando grupos não-abelianos [7, 8], i.e. grupos onde a operação não é comutativa.

Uma outra alternativa que só muito recentemente [1, 15] se começou a explorar com alguma profundidade deriva do trabalho do criptógrafo chinês Renji Tao, e assenta na ideia de que a fatorização de certas composições de *autómatos finitos* – modelos matemáticos abstratos, simples mas bastante profícuos, de computação – poderá ser computacionalmente intratável (em certo sentido).

Na introdução do seu artigo intitulado "Teoremas sobre os Divisores dos Números" [5], L. Euler escreveu:

> " [...] *o conhecimento de uma qualquer verdade vale a pena por si só, mesmo que esta pareça não relacionada com o quotidiano; vimos já que todas as verdades, pelo menos as que conseguimos compreender, estão tão fortemente interligadas entre si que não podemos considerar uma qualquer delas de todo inútil sem alguma imprudência.*
>
> *E portanto, mesmo que uma determinada proposição pareça ser tal que, sendo verdadeira ou falsa, não nos traga absolutamente nenhum benefício, mesmo assim, o método pelo qual se venha a estabelecer a sua verdade ou falsidade, pode, no entanto, ser útil na abertura de caminhos para a descoberta de outras verdades mais úteis. Por esta razão, acredito firmemente que não gastei inutilmente o meu trabalho e o meu esforço na investigação das demonstrações de certas proposições. Por conseguinte, esta teoria de divisores não carece de qualquer uso, mas pode, em algum momento futuro, mostrar uma utilidade que não pode ser desprezada.*
>
> *Estou também especialmente convicto de que o método de cálculo que aqui uso pode, em algum momento, contribuir de um modo não desprezável para investigações mais sérias.*"

É muito interessante observar que aquilo que Euler expõe neste artigo, após estas observações introdutórias, é a sua segunda demonstração do resultado de Fermat acima mencionado. Foi analisando as descobertas de Fermat com cuidado, e profundidade, que Euler viria a descobrir a generalização que acima ficou descrita (que ele expôs em [6]) e que está na base do RSA, assim como os resultados nos quais assenta o protocolo de Diffie-Hellman. Euler não podia estar mais certo nas suas palavras! E pode-se argumentar que as ideias expostas neste seu artigo, e em outros subsequentes, motivaram ideias em Teoria de Grupos que hoje se usam para tentar resolver o problema de segurança colocado por eventuais computadores quânticos. Este é mais um exemplo da importância da pesquisa dita fundamental, da relação simbiótica entre matemática pura e aplicada, muitas vezes ignorada ou menosprezada pela sociedade em geral e pelas entidades financiadoras em particular.

Espero ter aqui ilustrado, ainda que brevemente, o quanto a matemática é fulcral na criptologia moderna e que, se a única coisa certa acerca do futuro é que ele é incerto, isso não significa que deixemos de tentar antecipá-lo e de nos precavermos da melhor forma possível para o que há de vir. A história do conhecimento, sendo a história que aqui se resumiu um minúsculo exemplo, mostra que tentar até pode dar resultado, e frutos interessantes.

REFERÊNCIAS

[1] Ivone Amorim, *Linear Finite Transducers Towards a Public Key Cryptographic System*, tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2016.

[2] Daniel J. Bernstein, Tanja Lange, *Post-Quantum Cryptography – dealing with the fallout of physics success*, Cryptology ePrint Archive, 2017, Report 2017/314, disponível em *https://eprint.iacr.org/2017/314*.

[3] W. Diffie, M. Hellman, *New Directions in Cryptography*, IEEE Transactions on Information Theory, IT-22, nov. 1976, pp. 644- 654.

[4] Taher Elgamal, *A Public Key Cryptosystem and a Signature Scheme Based on Discrete Logarithms*, IEEE Transactions on Information Theory, IT-31, July 1985, pp. 469- 472.

[5] L. Euler, *Theoremata Circa Divisores Numerorum* (E134). Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 1 (1750), pp. 20-48. Reimpressso em *Opera Omnia*: Séries 1, Vol. 2, pp. 63-85. O artigo original, juntamente com uma tradução para o inglês de David Zhao, está disponível em *www.eulerarchive.org*.

[6] L. Euler, *Theoremata Arithmetica Nova Methodo Demonstrata* (E271). Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8 (1763), pp. 74-104. Reimpressso em *Opera Omnia*: Series 1, Vol. 2, pp. 531-555. O artigo original, juntamente com uma tradução para o alemão de Artur Diener e Alexander Aycock, está disponível em *www.eulerarchive.org*.

[7] Ramón Flores, Delaram Kahrobaei, *Cryptography with Right-Angled Artin Groups*, Theoretical and Applied Informatics, 2016, Vol. 28, N.º3, pp. 8-16.

[8] Jonathan Gryak, Delaram Kahrobaei, *The Status of Polycyclic Group-Based Cryptography: a Survey and Open Problems*, Groups Complexity Cryptology, 2016, Vol. 8, N.º 2, pp. 171-186.

[9] David Kahn, *The Codebreakers: the story of secret writing*, Scribner, 1967.

[10] A. Machiavelo, "ENIGMA: uma história que devia ser mais conhecida", *Gazeta de Matemática*, 2004, N.º 147, pp. 14-15.

[11] A. Machiavelo e Rogério Reis, *Automated Ciphertext--Only Cryptanalysis of the Bifid Cipher*, Cryptologia, 2007, Vol. 31, N.º 2, pp. 112-124.

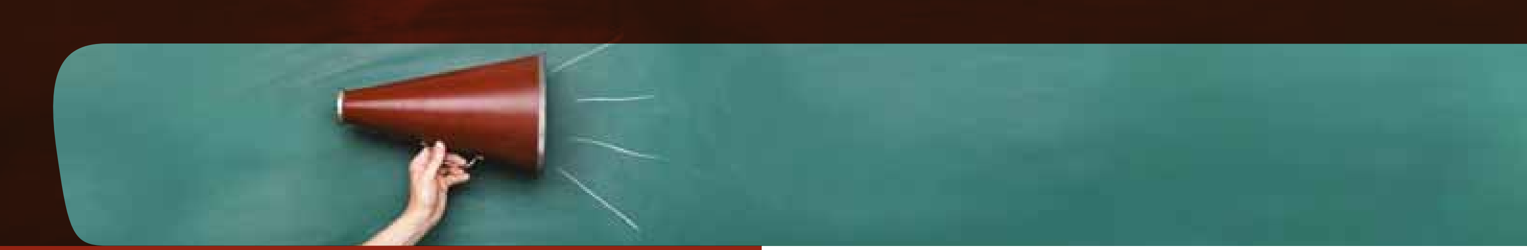
[12] A. Machiavelo e Rogério Reis,"Turing e a Enigma", *Boletim da SPM*, 2012, Vol. 67, pp. 97-120.

[13] R. Rivest, A. Shamir, L. Adleman, *A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems*, Communications of the ACM, 1978, Vol. 21, pp. 120-126.

[14] Peter W. Shor, *Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring*, in: Proceedings, 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Santa Fé, NM, November 20-22, 1994, IEEE Computer Society Press, pp. 124-134.

[15] Joana Vieira, *Finite Transducers in Public Key Cryptography*, tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2017.

Coordenação do espaço PT-MATHS-IN:
Paula Amaral, Universidade Nova de Lisboa, *pt-maths-in@ spm.pt.*



CONVERSA COM...

GONÇALO MORAIS
Instituto Superior de Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

ALBERT SHIRYAEV

Albert Shiryaev licenciou-se em Matemática pela Universidade de Moscovo em 1957 e doutorou-se, sob a orientação de Andrei Kolmogorov, pelo Instituto Steklov, em 1961, tendo mais tarde, em 1967, feito a agregação pela mesma instituição. É desde 1997 membro da Academia das Ciências Russa. É professor no Departamento de Probabilidade da Universidade de Moscovo desde 1970, presidente do mesmo departamento desde 1996 [sucedendo a Kolmogorov (1935-1965) e a Gnedenko (1966-1995)]. Fez contribuições fundamentais nas áreas da Teoria das Probabilidades e em Matemática Financeira. Tendo recebido inúmeros prémios e reconhecimentos, é considerado um sucessor da escola de pensamento criada por Andrei Kolmogorov.

GONÇALO Boa tarde, Professor. É uma honra para mim ter oportunidade de fazer esta entrevista. Sabe que desde os meus primeiros tempos da faculdade, quando tive a oportunidade de ler o livro *Foundations of the Theory of Probability* do seu professor, Andrei Kolmogorov, fiquei fascinado com a escola matemática russa. Depois, com o decorrer dos anos, fui lendo outras referências, vários livros sobre a história da matemática na antiga União Soviética e, depois destes anos todos, continuo a ser um adepto da vossa escola.

Quando li esse livro do Kolgomorov, ainda não tinha estudado Teoria da Medida. Contudo, todas as coisas encaixavam perfeitamente, muito embora, percebo-o hoje, a coerência formal não fosse de todo o objetivo dele...

SHIRYAEV Quando lemos qualquer coisa que o Kolmogorov tenha escrito, temos de ter presente que a maior parte das coisas para ele eram verdadeiramente triviais. Falo de coisas sobre as quais poderemos debater durante muito tempo até as compreendermos. Nesse livro em concreto, ele constrói a ideia de Probabilidade sem incluir qualquer coisa não essencial de Teoria de Medida e sem nunca se referir a ela. Por exemplo, ele diz o que é o valor esperado e baseia-se no integral de Lebesgue para o definir sem nunca o referir explicitamente. Isso fazia parte da natureza dele. Ele queria avançar, queria criar e movia-se rapidamente na direção do objetivo. Com 17 anos, ele alcançou o primeiro resultado que o tornaria conhecido...

GONÇALO Sim! A construção de uma série de Fourier divergente quase por toda a parte...

SHIRYAEV A sua demonstração desse resultado é brilhante! Depois começou a trabalhar em probabilidades e fez, juntamente com Kinshin, uma generalização da desigualdade de Tchebycheff... No seu primeiro trabalho em Probabilidades, ele ajuda a criar um resultado extraordinário.

GONÇALO Uma das constantes fundamentais em matemática é a admiração que todos que com ele contactaram demonstram...

SHIRYAEV Mas é claro! Não pela pessoa mas pela máquina mental que ele era. O seu pensamento parecia não ter quebras, mudando de um assunto para outro. Não era muito fácil compreendê-lo. As suas aulas eram extremamente complicadas porque a maior parte das coisas, volto a dizê-lo, eram para ele absolutamente triviais. Existem alguns resultados dele que foram publicados por outras pessoas. Ele dava-os simplesmente.

Um dos exemplos é o início do trabalho dele com o Arnold em problemas de estabilidade em Sistemas Dinâmicos...

GONÇALO A teoria KAM...

SHIRYAEV Exatamente.

GONÇALO Consta que ele já tinha uma demonstração para um caso muito geral, mas faltava estudar alguns casos particulares.

SHIRYAEV Muito por alto, o que ele fez foi dar a um conjunto de alunos uma equação e pediu-lhes para eles perceberem o que é que acontece quando o membro direito é perturbado. Todos chegaram à conclusão de que o retrato-fase era o mesmo. Repetiu o mesmo no ano seguinte e os alunos chegaram novamente à mesma conclusão. Ficou consciente de que aquilo que tinha pensado estava correto. O Arnold veio e juntou tudo. O mesmo tipo de situação já tinha acontecido quando eles, antes, resolveram um dos problemas de Hilbert. O Arnold deu o último passo e juntou tudo. O Sergei Novikov dizia muitas vezes que a pior coisa que tinha acontecido ao Arnold era ter sido aluno do Kolmogorov e por essa razão seguia os passos do seu mestre. Caso contrário, poderia ter sido um matemático da dimensão do próprio Kolmogorov. Nunca se saberá...

Lembro-me que, a certa altura, Kolmogorov propôs-me que déssemos a cadeira de Teoria das Probabilidades em conjunto porque tínhamos 250 alunos e as salas tinham 100 de capacidade máxima. Começámos então a delinear as aulas em conjunto e quando chegámos à desigualdade de Tchebycheff, ele perguntou-me se eu já tinha lido o artigo original. Ele exclamou que esse artigo era muito interessante e que essa desigualdade era absolutamente trivial, podendo demonstrar-se em apenas uma linha. No artigo original de Tchebycheff, pude depois comprovar, a demonstração decorre durante dez páginas. A demonstração que temos hoje é a do Kolmogorov, que aos olhos de todos está longe de ser complicada. Era isto que ele tinha de extraordinário: tornava as coisas mais simples.

Nas aulas, ele era diferente. Os assuntos que ele tratava eram tão complicados que era necessário que alguns de nós preparassem umas notas prévias para serem distribuídas pelos colegas, de modo a que todos pudessem usufruir das aulas convenientemente.

GONÇALO Ele tinha algum outro interesse para além da matemática?

SHIRYAEV Ele era um excelente historiador, tendo publicado um trabalho sobre a história da atividade agrária em Novgorod. Era um intelectual extraordinário.

GONÇALO E como é que começou o seu interesse por matemática e como é que encontrou o Kolmogorov?

SHIRYAEV Na verdade, durante o meu curso eu dediquei-me mais ao desporto do que à matemática. Fiz patinagem artística, saltos esqui e *slalom* e representei a Seleção da União Soviética nesta última modalidade. Já perto do fim do meu curso, preparei o trabalho para obter o meu diploma. Ele leu-o e convidou-me para ser seu colaborador no Instituto Steklov. E assim entrei, no dia 1 de setembro de 1957, no Instituto e toda a minha vida trabalhei neste local.

GONÇALO Como é que era a vida no Instituto nesses anos? Sentia-se a influência da política no dia a dia do Instituto?

SHIRYAEV Temos de clarificar isso. A minha situação era muito especial porque os meus pais trabalhavam no Ministério dos Negócios Estrangeiros e visitavam muitos países fora da União Soviética e da Europa de Leste. Além disso, tinha dinheiro suficiente para uma vida sem problemas. Talvez por isso tivesse feito tanto desporto! [risos]

GONÇALO Mas o ambiente de então era diferente do que é hoje...

SHIRYAEV Era diferente, sem dúvida, mas a diferença não era enorme. Eu não tinha muito contacto com a vida fora da universidade e do desporto, pois isto ocupava-me todo o tempo que eu tinha disponível.

GONÇALO Nunca sentiu, portanto, qualquer tipo de opressão na sua vida nesses tempos...

SHIRYAEV Nunca senti! Estando em matemática, eu era relativamente livre.

GONÇALO E como é que era o ambiente intelectual nesse tempo na Universidade de Moscovo?

SHIRYAEV Diz-se muitas vezes que os anos cinquenta foram os anos de ouro da escola matemática russa. Estavam no mesmo departamento os seguintes nomes: Kolmogorov, Alexandrov, Petrovski, Gelfand e muitos outros. Era, por isso, de um nível intelectual altíssimo. Com o fim da União Soviética, muita gente emigrou e a esta escola ficou claramente mais fraca.

GONÇALO E, contudo, o Professor nunca quis sair e mudar-se para um país ocidental...

SHIRYAEV Visitei muitas universidades. E estive em muitos sítios diferentes, mas nunca tive vontade de sair. Eu tinha e tenho uma vida confortável e o Instituto Steklov funcionou sempre de uma forma absolutamente democrática. Podíamos fazer, de facto, tudo o que quiséssemos. Na Academia das Ciências Russas, a mesma coisa. Nunca ninguém se preocupou com as minhas preferências políticas, apenas com a importância do meu trabalho enquanto matemático. Além disso, sempre pude sair e entrar do país quando quisesse.

Existem muitos casos de matemáticos que saíram da Rússia, como é o caso do Sinai, e que aproveitam o tempo em que não têm aulas para manterem contacto com a escola em Moscovo. No caso do Sinai, quando não está em Princeton, ele está em Moscovo e orienta alunos lá.

O Arnold passava metade do ano em França e metade do ano na Rússia. Por isso, mesmo os que saíram nunca perderam o contacto com Moscovo.

GONÇALO E os alunos, hoje em dia, mantêm de alguma forma o mesmo espírito dessa altura?

SHIRYAEV Hoje os alunos têm uma visão mais prática. Quando acabam os estudos preferem ir trabalhar para bancos e seguradoras. Quando terminei os meus estudos, as coisas eram muito diferentes. A administração central fazia a distribuição dos alunos que tinham terminado os seus estudos pelas vagas disponíveis. Não tínhamos, por isso, grande palavra a dizer. Agora não.

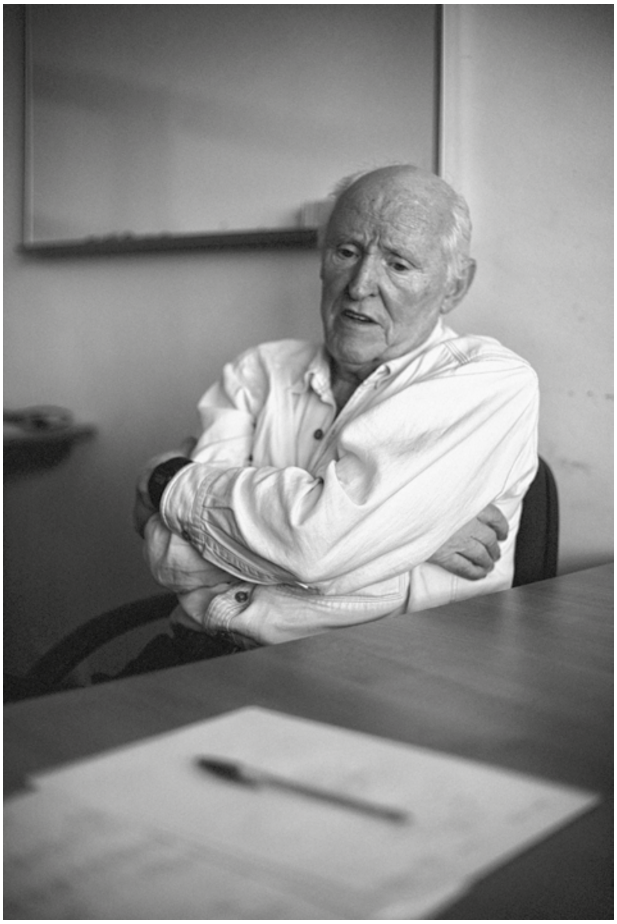
GONÇALO Entretanto, passou a interessar-se por Matemática Financeira...

SHIRYAEV Bem, eu trabalhei em diferentes áreas, Probabilidades, Estatística, Processos Estocásticos... Nunca desejei trabalhar durante demasiado tempo numa só direção. Eu fui, talvez, a primeira pessoa a escrever um livro de Matemática Financeira, um livro enorme chamado *Essentials of Stochastic Finance*, que já teve quatro ou cinco edições, publicado pela World Scientific. A certa altura, assisti a um curso de Matemática Financeira na Alemanha e percebi que as pessoas estavam a usar martingalas para fazer cálculos que eu conseguia acompanhar perfeitamente, mas não fazia ideia do que era uma obrigação ou uma opção financeira. Fiquei terrivelmente chateado por isso! [risos]

Assim, quando cheguei a Moscovo propus aos meus colegas que, três vezes por semana, estudássemos Matemática Financeira. Na altura, todos recusaram, mesmo nomes que hoje estão no topo da área, como o Dmitry Kramkov. Eu impus-me, fiz voz grossa e perceberam que estava mesmo a falar a sério. Foi assim que tudo começou. Hoje esse livro continua a ser considerado importante na área. Fui convidado para ir para fora da Rússia dar aulas sobre Matemática Financeira, mas decidi não aceitar, pelas razões que já discutimos. Entretanto, todos os outros vão saindo. Agora toda a gente pode sair.

GONÇALO Esta é uma questão curiosa... Qual era o critério para alguém ser autorizado a sair antes da Perestroika?

SHIRYAEV É difícil dizer. Tinha tudo a ver com o Partido Comunista e com o que eles achavam do comportamento da pessoa que pedia autorização...



GONÇALO Significava que essa pessoa tinha um comportamento político considerado errado ou demasiado ativo...

SHIRYAEV Significava muitas vezes que essa pessoa não era suficientemente ativa! Para muitas pessoas, era simplesmente proibido.

GONÇALO Gostaria de saber qual a sua opinião acerca do futuro da Matemática Financeira e quais os problemas mais importantes nesta área. Claro que ter uma fórmula fechada para opções americanas é algo com que muita gente sonha...

SHIRYAEV Sendo especialista em *Optimal Stopping*, percebo que esse problema é muito difícil. A raiz da dificuldade deste e de outros problemas em Matemática

Financeira prende-se com o facto de serem problemas não-lineares. Por isso, mesmo eu, que sou especialista na área, tenho cada vez mais dificuldade em ler os artigos publicados porque as pessoas estão a tentar resolver estas não-linearidades com métodos muito diferentes. Existem outros problemas ainda mais difíceis como é o caso de opções russas, que basicamente dá o direito de compra de uma *call* ou de venda de uma *put* ao preço de mercado do colateral durante a vida da opção. Ao contrário do que acontece na maioria das outras opções, no caso das opções russas a maturidade pode ser infinita. Este é um problema talvez ainda mais complicado do que o análogo das opções americanas.

GONÇALO Professor, resta-me agradecer-lhe o tempo que me dispensou e esperar que de russo para inglês e de inglês para português não se perca o essencial da nossa conversa.

SHIRYAEV Obrigado.

NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

O QUE É QUE LEVA UM CIENTISTA A ESCREVER?

Pode nem sempre ser assim, mas a curiosidade e a criatividade são quase sempre pontos de partida tanto para cientistas como para escritores.

Na crónica anterior, tentei responder a uma das perguntas que me fazem com maior frequência: "Por que escreve?" Hoje tentarei responder a outra que costuma acompanhar a primeira: "O que é que leva um cientista a escrever?"

Sempre houve escritores cuja formação era essencialmente científica: C.P. Snow, Arthur C. Clarke, Isaac Asimov ou o italiano Paolo Giordano, autor de *A Solidão dos Números Primos*. Também temos em Portugal vários exemplos: Rómulo de Carvalho, Jorge de Sena ou o nosso contemporâneo João Ricardo Pedro, aos quais podemos juntar diversos médicos que se dedicaram à literatura: Fernando Namora, Miguel Torga e António Lobo Antunes, entre muitos outros.

Qual será, então, a ligação entre as ciências e a prática das letras? Haverá alguma ou trata-se apenas de um acidente estatístico? Não posso responder por todos, mas tenho as minhas teorias.

Em primeiro lugar, a curiosidade, sim, tão simples quanto isso. Ninguém se interessa pela ciência se não possuir uma grande e insaciável dose de curiosidade: para que serve? De onde vem? De que é feito? O que é que acontece depois? São estas algumas das perguntas, dir-se-ia quase infantis, que nos levam até à matemática, à física, à química, à biologia e a todas as outras ciências. Perguntar pelo prazer de perguntar, de perseguir uma resposta que talvez já tenha sido produzida ou que teremos de buscar por nós. Esse instinto, o de levantar a cortina da realidade para lhe conhecer os bastidores, é o mesmo que leva alguém a escrever um romance ou um poema. Por que somos como somos? Por que amamos? Por que lutamos? Por que ficamos tristes ou alegres? O que é que desejamos no nosso íntimo?

Vi sempre a ficção como um laboratório da condição humana – inventem-se personagens e uma trama, algumas tensões e desejos, e logo veremos o que acontece, como se comportam, que caminhos trilham para obterem os seus resultados. Qualquer grande obra nos ensina um pouco mais sobre o que é isto de se ser humano. Ao lermos Dante, Camões, Cervantes ou Shakespeare aprendemos muito sobre os outros e sobre nós mesmos, o que nos une e o que nos aparta. Nenhuma verdade é absoluta, porém, como na ciência, e está sempre sujeita ao teste do tempo e à aprovação dos pares.

O outro grande ponto de contacto entre ciência e literatura é a criatividade, pois ambas se fazem com ela. Não por acaso, todos os grandes cientistas que conheci eram leitores ávidos de ficção, e começaram muito cedo, enquanto crianças. As leituras que vamos fazendo obrigam-nos a "pensar com a cabeça de outra pessoa", a imaginar cenários, fisionomias, cenas de ação, paisagens e até outras civilizações e seres que não existem senão na mente de quem as escreveu e nas mentes de quem as lê. Mais do que o cinema, o teatro ou os jogos de computador, onde tudo está já diante dos nossos olhos, um livro só é eficaz se o leitor aceitar participar com a sua imaginação e conseguir completar as propostas do autor usando as suas próprias capacidades criativas. Afinal, é sempre a mesma brincadeira infantil, tão simples e tão complexa, tão essencial para quem quer viver num jogo permanente de perguntas e respostas.

AFONSO BANDEIRA CONQUISTA O PRESTIGIADO **SLOAN RESEARCH FELLOWSHIP 2018**

Afonso Bandeira, antigo vencedor das Olimpíadas Portuguesas de Matemática, acaba de ser distinguido com o prestigiado Sloan Research Fellowship 2018. Este reconhecimento premeia os mais promissores investigadores de diferentes áreas científicas, atualmente a desenvolver trabalho de investigação nos Estados Unidos da América e no Canadá. O montante pecuniário da bolsa é de 65.000 dólares (cerca de 53.000 euros) e poderá ser gasto ao longo de um período de dois anos em qualquer despesa que apoie os seus trabalhos de investigação.

Afonso Bandeira, de 29 anos de idade, é atualmente professor auxiliar no Instituto Courant de Ciências Matemáticas, da Universidade de Nova Iorque, sendo membro do Departamento de Matemática e do Centro de Data Science. O antigo aluno da Universidade de Coimbra, onde completou o mestrado em 2010, obteve o seu doutoramento em Matemática Aplicada e Computacional na Universidade de Princeton, sob orientação do Professor Amit Singer, com a dissertação Convex Relaxations for Certain Inverse Problems on Graphs. Entre 2015 e 2016, foi instrutor de Matemática Aplicada no Massachusetts Institute of Technology (MIT). Ainda no Ensino Secundário, em 2006, conquistou o Prémio Bento de Jesus Caraça e, em 2016, foi um dos oradores plenários do Encontro Nacional da SPM, com a apresentação "Problemas Matemáticos da Era da Revolução de Dados".

Afonso Bandeira procura uma compreensão mais profunda de vários processos para extrair informações de dados. Embora os conjuntos de dados maciços hoje disponíveis permitam mudar a forma de compreender o mundo que nos rodeia, os desafios computacionais decorrentes da análise desses dados podem apresentar barreiras fundamentais para aprender com eles. O trabalho de Afonso Bandeira analisa os limites da inferência estatística com restrições computacionais. Num primeiro plano, tem-se focado em problemas com uma estrutura algébrica rica, como por exemplo reconstruir uma molécula através de um grande conjunto de imagens com ruído obtidas por microscopia crioeletrónica.

31.º SNHM EM **VISEU**

A Escola Superior de Educação de Viseu recebe o 31.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), nos próximos dias 11 e 12 de maio. O conferencista convidado deste ano é o professor Scott A. Walter, da Université de Nantes, Centre François Viète. As inscrições no seminário terão um valor reduzido até 21 de abril e as submissões de comunicações terminam a 31 de março.

140TH EUROPEAN STUDY GROUP WITH INDUSTRY NO BARREIRO

Terá lugar de 4 a 8 de junho de 2018, na Escola de Tecnologia Barreiro do Instituto Politécnico de Setúbal, o 140th European Study Group with Industry (ESGI). Um grupo de estudo é uma oficina de uma semana que reúne matemáticos e empresas. As empresas propõem uma série de desafios e, no primeiro dia, os matemáticos escolhem um grupo no qual trabalharão um dos desafios juntamente com o parceiro industrial/empresarial. No último dia, cada grupo fará uma apresentação dos resultados obtidos e, posteriormente, será enviado um relatório sobre cada problema à empresa correspondente, que poderá conter sugestões para uma colaboração adicional. As empresas têm a possibilidade de beneficiar dos conhecimentos obtidos através da análise matemática dos seus problemas e os matemáticos de trabalharem com a indústria e criarem novas ideias e soluções para problemas reais. Os estudantes também poderão participar nestes grupos de estudo. Consulte toda a informação em *http://www.esgi140.ips.pt/*

ISTO É MATEMÁTICA DISTINGUIDO NO **SCI-DOC 2018**

O programa *Isto é Matemática*, apresentado pelo matemático Rogério Martins, foi galardoado com o prémio de Melhor Programa de Televisão Generalista Europeu sobre Ciência 2018, atribuído pelo SCI-DOC: Festival Europeu de Documentário Científico de Lisboa. O evento é uma organização conjunta da Apordoc – Associação pelo Documentário, a EuroPAWS e a EuroScience. A cerimónia de entrega de prémios teve lugar, no dia 4 de março, no Museu da Farmácia, em Lisboa. O episódio levado a concurso foi "A Corrente que Levita", da 11.ª série do programa, exibido na SIC Notícias e na SIC Internacional em 2017. A série promovida pela Sociedade Portuguesa de Matemática contou com o apoio da Fundação Vodafone Portugal.

ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMEMORA **25 ANOS**

O 8.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática decorrerá, de 13 a 16 de agosto de 2018, no Centro de Engenharias e Ciências Exatas da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, Brasil. Este evento, coorganizado pelo Seminário Nacional de História da Matemática e pela Sociedade Brasileira de História da Matemática, comemora 25 anos desde que o seu primeiro encontro aconteceu em Coimbra, em 1993. Incentivar o intercâmbio entre pesquisadores brasileiros e portugueses que trabalham na área de História da Matemática e divulgar e discutir as pesquisas realizadas são os grandes objetivos do encontro. As submissões de comunicações estão abertas até 15 de abril. Consulte a página do evento em *http://www.elbhm.com/*.

36.ª **FINAL** DAS **OLIMPÍADAS** EM **MIRANDELA**

De 22 a 25 de março, o Agrupamento de Escolas de Mirandela recebe a final das 36.as Olimpíadas Portuguesas de Matemática. As provas decorrerão durante as manhãs dos dias 23 e 24, e depois do almoço os estudantes têm agendadas diversas atividades lúdicas. Domingo é dia de conhecer os vencedores, 36 no total: 12 na categoria Júnior (6.º e 7.º anos), 12 na categoria A (8.º e 9.º anos) e 12 na categoria B (10.º, 11.º e 12.º anos) – que receberão as merecidas medalhas de ouro, prata e bronze. Os vencedores das categorias A e B poderão ainda vir a integrar as delegações que representarão Portugal nas competições internacionais depois de frequentarem um estágio no projeto Delfos, em Coimbra. As Olimpíadas Internacionais de Matemática terão lugar na Roménia, em julho, e as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática decorrerão entre Monte Gordo e La Rábida, em setembro.

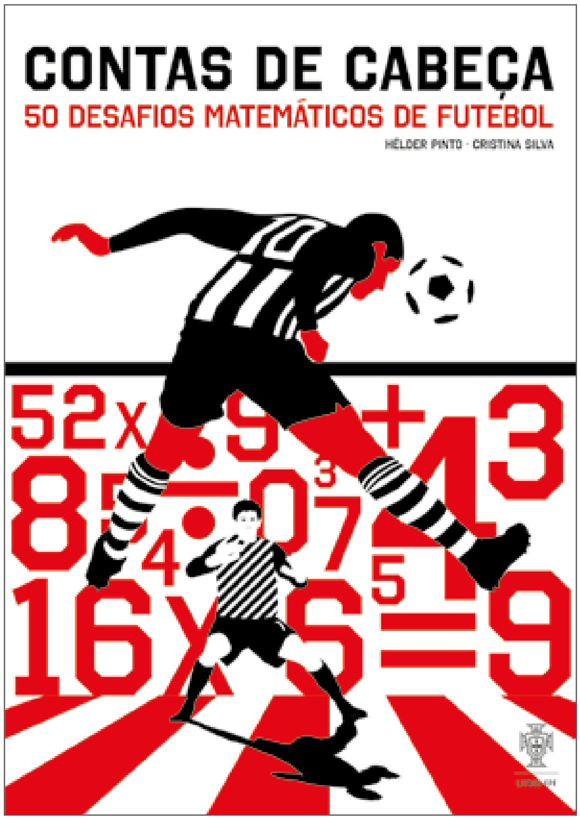
36.as OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

INSCRIÇÕES ABERTAS PARA O **ENCONTRO NACIONAL DA SPM 2018**

O Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática 2018 irá decorrer, de 9 a 11 de julho, nas instalações da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Bragança (ESTG-IPBragança), co-organizadora do Encontro. As inscrições já estão abertas na página do evento, *http://www.enspm2018.ipb.pt/*, e terão um valor reduzido até ao dia 17 de junho. As sessões científicas terão como oradores: André Oliveira, da UTAD, que tem trabalhado nas áreas da Geometria Algébrica, Geometria Diferencial e Topologia Algébrica; Nuno Freitas, da Universidade de British Columbia, Canadá, galardoado em 2015 com o prémio José Luis Rubio de Francia), e Patrícia Gonçalves, do Instituto Superior Técnico, que estuda probabilidades e processos estocásticos com forte ligação às equações com derivadas parciais, tendo sido distinguida recentemente com uma *Starting Grant* do Conselho Europeu de Investigação (ERC). A sessão de divulgação ficará a cargo do matemático espanhol Raúl Ibáñez, diretor do portal DivulgaMAT, Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas e presidente da Comissão de Divulgação da Real Sociedad Matemática Española. Além das sessões plenárias, o evento contará com duas mesas-redondas e várias sessões de formação. Este ano haverá ainda lugar para uma sessão especial dedicada ao público em geral.

CONTAS DE CABEÇA – 50 DESAFIOS MATEMÁTICOS DE FUTEBOL

A Sociedade Portuguesa de Matemática acaba de lançar, em parceria com a Federação Portuguesa de Futebol, o livro *Contas de Cabeça – 50 Desafios Matemáticos de Futebol,* da autoria de Hélder Pinto e Cristina Silva. Este livro pretende captar a atenção dos jovens estudantes para a matemática através de um tema universal e que suscita paixões em todo o mundo: o futebol. Com dezenas de imagens e exemplos, o livro contém 50 enigmas acessíveis à maioria dos leitores.



TARDES DE MATEMÁTICA NA **FNAC COLOMBO**

A partir do dia 22 de março as *Tardes de Matemática* em Lisboa ganham uma nova casa: a Fnac Colombo. Conhecida pela sua oferta inigualável de produtos culturais e tecnológicos, a Fnac acolhe as *Tardes de Matemática*, com três palestras agendadas para 2018. Criadas pela Sociedade Portuguesa de Matemática em 2001, as *Tardes* continuam a mostrar como a matemática está presente em tudo.

Adérito Araújo
Universidade de Coimbra
alma@mat.uc.pt

ENCONTRO NACIONAL DA SOCIEDADE

A Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) e o Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Bragança (ESTG-IPBragança) estão a organizar Encontro Nacional da SPM 2018 que irá decorrer nos dias 9 a 11 de julho de 2018, nas instalações da ESTG-IPBragança

De dois em dois anos, a SPM realiza o seu Encontro Nacional com o objetivo de proporcionar à comunidade matemática a oportunidade de trocar experiências, conhecimentos e ideias, bem como a de promover ações de formação para professores dos ensinos Básico e Secundário. Pela sua natureza, o evento constitui-se como o ponto de encontro de todos os que investigam e ensinam matemática em Portugal, dando a conhecer o que de melhor tem sido feito por matemáticos portugueses, sendo o fórum ideal para discutir assuntos relacionados com o ensino e a divulgação da disciplina.

Na edição deste ano não faltam motivos de interesse. As palestras plenárias são muito abrangentes e estão a cargo de matemáticos que se têm destacado pela grande qualidade do seu trabalho. Como se pode ver na página do evento, *http://www.enspm2018.ipb.pt/*, os oradores das sessões científicas são: André Oliveira, da UTAD, que tem trabalhado nas áreas de Geometria Algébrica; Geometria Diferencial e Topologia Algébrica, Nuno Freitas, da Universidade de British Columbia, Canadá, galardoado em 2015 com o prémio José Luis Rubio de Francia, concedido pela Real Sociedad Matemática Española (RSME), pela sua investigação em tópicos da Teoria dos Números; e Patrícia Gonçalves, do IST, que estuda probabilidades e processos estocásticos com forte ligação às equações com derivadas parciais, tendo sido distinguida recentemente com uma *Starting Grant* do Conselho Europeu de Investigação (ERC), pelo seu trabalho sobre limites hidrodinâmicos e flutuações de equilíbrio, no âmbito dos sistemas estocásticos. O trabalho desenvolvido por estes três jovens dá conta da enorme vitalidade da matemática portuguesa.

A sessão de divulgação ficará a cargo do matemático espanhol Raúl Ibáñez, diretor do portal DivulgaMAT, Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas (*http://www.divulgamat.net*) e presidente da Comissão de Divulgação da RSME (Real Sociedad Matemática Española). O trabalho desenvolvido por Raúl Ibáñez é muito vasto e tem sido amplamente reconhecido, não só em Espanha mas também na Europa. A sessão do ensino ainda não está fechada mas, como vem sendo hábito, irá constituir uma excelente oportunidade para refletir e discutir os temas que mais interessam a todos professores. Além da sessão plenária, o evento contará com duas mesas-redondas e várias sessões de formação, proporcionando a todos os que se dedicam ao estudo e ao ensino da matemática uma oferta rica e muito variada.

À semelhança do que aconteceu em 2016, o programa do Encontro Nacional é completo, com um diversificado leque de sessões temáticas, propostas pela comunidade científica, que tem respondido entusiasticamente à chamada da SPM. A grande novidade desta edição é a realização de uma sessão dedicada ao público em geral, a decorrer numa das noites do evento, que, além de um pequeno momento cultural, terá como protagonista o destacado matemático e divulgador de ciência Rogério Martins. Não faltam, por isso mesmo, motivos para uma deslocação à bonita cidade de Bragança.

Fica o convite à participação dos associados. O Encontro Nacional da SPM é de todos e para todos. Vemo-nos em Bragança!

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2018

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3º esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*